UAGro

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

Unidad Académica de Matemáticas

Centro de Investigación de Matemática Educativa

Preconcepciones de Pendiente en Estudiantes de Bachillerato

Tesis que presenta:

M.C. Martha Iris Rivera López

para obtener el grado de Doctor en ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

Director de Tesis:

Dr. Crisólogo Dolores Flores

Chilpancingo de los Bravo, Gro. Diciembre de 2019

Agradecimientos

Primero a DIOS, por prestarme vida, darme la fortaleza y acompañarme en todo momento.

A mi madre Belén López y mi padre Germán Rivera, por confiar en mí, por su paciencia y atenciones que me brindaron siempre. A mis hermanos, Marco, Germán, Chris, Jona y Edwin; mis cuñadas, Sari y Adri; y mis adorados bebés Andy y Keiry, quienes con su compañía hicieron pasar momentos agradables y darme fortaleza para no desistir en este proyecto. Gracias al apoyo y atenciones de mi familia, cumplo una meta más.

Al Dr. Crisólogo Dolores Flores por su apoyo para ingresar al programa de doctorado en el Centro de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE-UAGro), por su voto de confianza y por compartir sus conocimientos y experiencias relacionadas con la investigación, en particular, con la educación matemática. Agradezco, asimismo, su interés y preocupación hacía mi formación como investigador.

A los investigadores y amigos, Javier García y Gerardo Salgado, cuyas aportaciones académicas y personales fueron de gran apoyo para sobresalir durante el proyecto de doctorado. Gerardo, mi equipo de investigación, compañero de discusión y análisis, así como en la producción y culminación de diversas investigaciones. De ambos recibí preciadas y relevantes aportaciones, críticas, comentarios y sugerencias para el desarrollo y culminación de esta investigación. Fue imprescindible contar siempre con su presencia incondicional.

A Efra, amigo y compañero, quien a pesar de la distancia siempre estuvo apoyándome en el proyecto. Sus palabras alentadoras y precisas para enfrentar todo tipo de problemas personales y académicos que durante la estancia del doctorado presenté, siempre me motivaron y permitieron la culminación del proyecto.

A mi familia

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo financiero para la realización de mis estudios del Doctorado con número de registro: **378559**

Índice

PRECONCEPCIONES DE PENDIENTE EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO[1]

Resumen

En el presente documento se reporta una investigación que indaga sobre las preconcepciones de pendiente de estudiantes de bachillerato de primer año (Grado 10). Se trata de un estudio de corte cualitativo en el que participaron 30 estudiantes que no han cursado la asignatura de Matemáticas III, correspondiente a estudiar Geometría Analítica. Para la recolección de datos se empleó la metodología Entrevista Basada en Tareas y el método de Análisis Temático para su respectivo análisis. La entrevista se integró por 13 tareas que involucran diferentes representaciones de la pendiente ya reportadas por algunos investigadores (Dolores, Alarcón y Albarrán, 2002; Moore-Russo, Conner y Rugg, 2011; Stump, 1999, 2001a).

El análisis de las producciones (escritas, verbales y gestuales) de los 30 participantes permitió identificar 9 preconcepciones que los estudiantes manifestaron al realizar cada una de las tareas. Entre éstas, las más frecuentes fueron: la pendiente como la longitud de un segmento de recta, la pendiente como un objeto, la pendiente como la inclinación de la recta y la pendiente como el ángulo. Con una menor frecuencia, la pendiente como el valor de la intersección de la recta con los ejes, la pendiente asociada a una expresión algebraica, la pendiente como una cualidad de rampas y escaleras, la pendiente como el cociente determinado por los valores de las intersecciones de la recta con los ejes y, como incógnita.

---

[1]El presente documento es la versión extensa de Rivera, M. I. y Dolores, C. (en prensa). Preconcepciones de pendiente en estudiantes de Bachillerato. *Enseñanza de las ciencias*.

SLOPE´S PRECONCEPTIONS IN HIGH SCHOOL STUDENTS

Abstract

This paper reports an investigation that investigates the slopes´s preconceptions in High school students, before taking the Mathematics III subject, corresponding to the study of Analytical Geometry. This is a qualitative study in which 30 first-year high school students participated. For the data collection, the Task-Based Interview methodology and the Thematic Analysis method were used for its respective analysis. The interview was integrated by 13 tasks involving different representations of the slope already reported by some researchers (Dolores, Alarcón and Albarrán, 2002; Moore-Russo, Conner and Rugg, 2011; Stump, 1999, 2001a, 2001b).

The analysis of the productions (written, verbal and gestural) of the 30 participants allowed to identify 9 preconceptions that the students expressed when performing each of the tasks. Among these, the most frequent were: the slope as the length of a line segment, the slope as an object, the slope as the inclination of the line and the slope as the angle. With a lower frequency, the slope as the value of the intersection of the line with the axes, the slope associated with an algebraic expression, the slope as a quality of ramps and stairs, the slope as the quotient determined by the values of the intersections of the line with the axes and, as unknown.

INTRODUCCIÓN

La pendiente es un concepto importante en la educación matemática ya que su enseñanza es obligatoria, emerge en la educación secundaria (SEP, 2011a), es tratado en el bachillerato (SEP, 2013a) y trasciende a los estudios universitarios. Es previsto en el currículum de varios países (Dündar, 2015; Nagle y Moore-Russo, 2014; Newton y Poon, 2015). El estudio de este concepto va más allá de sólo usarlo algebraicamente y como indicador de inclinación (Dündar, 2015), dado que contribuye al estudio de las funciones lineales y permite describir el comportamiento de funciones no lineales, por ejemplo, cuadrática y exponencial (Teuscher y Reys, 2010; Yerushalmy, 1997). Además, ayuda en la construcción de la línea del mejor ajuste en Estadística (Casey y Nagle, 2016) y del concepto de derivada en Cálculo (Dolores-Flores, Rivera-López y García-García, 2018; Moore-Russo, Conner y Rugg, 2011; Pineda, 2014; Teuscher y Reys, 2012; Vrancken, Engler y Müller, 2008), así como en la interpretación de fenómenos de la vida real (Dolores, García y Gálvez, 2017; Stump, 2001a). Por ello, es necesario que los estudiantes desarrollen una buena comprensión sobre este concepto desde sus estudios secundarios y así estar mejor preparados para sus estudios universitarios.

La pendiente, como noción geométrica hace referencia a una medida de la inclinación de la recta (Lobato y Thanheiser, 2002), mientras que como noción variacional a la razón de cambio, es decir, a la relación entre el cambio de una variable respecto de otra entre dos puntos particulares (Cheng, 2010; Reyes-Gasperini, 2013). Para una función no lineal, la razón de cambio varía dependiendo del punto o los puntos seleccionados, para el caso en que se trate de un punto en particular, la pendiente se calcula por medio de la razón de cambio de la recta tangente a la curva, dando lugar así a la derivada (Hoffman, 2015). Otras formas en que puede emerger este concepto son: algebraicamente en fórmulas y ecuaciones, geométricamente en gráficos, trigonométricamente como la tangente del ángulo de inclinación de una recta, en cálculo como límite, etc. (Rivera, Salgado y Dolores, 2019). Esto lo hace un concepto protagonista en el currículo matemático y fundamental para desarrollar un pensamiento matemático avanzado (Carlson, Oehrtman y Engelke, 2010; Confrey y Smith, 1995; Noble, Nemirovsky, Wright y Tierney, 2001).

Por otro lado, las preconcepciones juegan un papel importante en la adquisición de conceptos matemáticos por parte de los estudiantes (Yanik, 2011) y establecen un punto de partida indispensable para cualquier situación de enseñanza, ya que forman parte del conocimiento previo (Campanario y Otero, 2000). Su estudio es importante, porque nos muestran los momentos significativos y aspectos de los procesos de construcción mental que son influenciados por las vivencias individuales y colectivas que afectan el significado. De la misma manera, Ausubel (1978) afirma en el epígrafe de su obra: "Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría este: El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente" (p. 6). Es decir, que para contribuir a la mejora del aprendizaje se debe tener presente la serie de experiencias y conocimientos que afectan el aprendizaje de los alumnos y éstos deben ser aprovechados para su beneficio. De ahí que, la presente investigación examina las preconcepciones de pendiente que tienen los estudiantes de bachillerato.

Este escrito se estructura en seis capítulos, en los cuales se puntualizan las características de esta investigación, el análisis de los datos recabados y las conclusiones. En el capítulo uno, se expone el problema de investigación, la pregunta de investigación y el objetivo de la presente investigación. En el capítulo dos, se muestran los antecedentes que dieron sustento y permitieron tener una aproximación al problema planteado. Asimismo, en este capítulo se presentan tres estudios realizados en el contexto mexicano, los cuales se desarrollan empleando las conceptualizaciones de pendiente como referente teórico: uno de ellos muestra un recorrido del concepto de pendiente en el currículum mexicano y una breve contrastación con lo reportado en el currículum estadounidense (Nagle y Moore-Russo, 2014; Stanton y Moore-Russo, 2012); los otros dos, son exploraciones sobre lo que utilizan los estudiantes recién egresados del bachillerato al resolver tareas que involucran el concepto. Los resultados de estos estudios proporcionaron elementos para el diseño de las tareas que permitieron identificar las preconcepciones, ya que muestran, de alguna manera, lo que ha quedado en los estudiantes una vez culminado el bachillerato.

En el capítulo tres, se describe el marco conceptual conformado por el concepto de pendiente, razón de cambio y lo que se va a entender por preconcepciones. En el capítulo cuatro, se especifican las características metodológicas de esta investigación: tipo de estudio, población participante y condiciones tomadas en cuenta para seleccionarla, instrumentos para la recopilación de datos, contenido matemático del estudio, el cómo se efectuó la recopilación y el análisis de datos. En el capítulo cinco se presentan los resultados, de los que se destacan nueve preconcepciones identificadas en este grupo de estudiantes. Finalmente, en el capítulo seis se plantean algunos aspectos cruciales que podrían profundizarse para realizar extensiones de esta investigación, así como implicaciones que emergieron con el análisis de los datos de este estudio.

CAPÍTULO I

Planteamiento del problema y Pregunta de Investigación

1.1 Planteamiento del problema

El estudio de las preconcepciones no es novedoso en la investigación, ya que desde los 80's y 90's junto con las concepciones, creencias y concepciones alternativas tuvieron auge como objeto de investigación. El interés de los investigadores sobre este tipo de conocimiento en los estudiantes se debió a que los estudios indicaban que no se puede considerar al ser humano como una tabula rasa, ya que todo individuo antes del estudio formal sostiene firmemente sistemas descriptivos y explicativos de los fenómenos científicos y lógico-matemático (Confrey, 1990). Por ello, como profesores e investigadores se debe reconocer que todos los conocimientos y habilidades que tiene un individuo son fruto de su aprendizaje, los cuales pueden ser obtenidos a través de sus experiencias y percepciones sensoriales, y no necesariamente ser resultado de una interacción dentro de un aula escolar (Ázcarate, 1992).

En la literatura existen muchos términos utilizados para describir "lo que el alumno sabe", entre estos: preconcepciones, concepciones previas, ideas previas, concepciones, creencias, etc. (Ausubel, 1978; Oyarbide, 2004; Tovar, Castillo y Marin, 2007), dependiendo del estatus de la formación del concepto. Su estudio es importante ya que gran parte de las dificultades y errores que se tienen en la educación matemática pueden tener su origen en las preconcepciones o concepciones previas, ya que estas se arraigan fuertemente en la mente de los estudiantes y son difíciles de cambiar (Behar y Ojeda, 2000; Simons, 1999).

Por otra parte, los programas de Matemáticas de Secundaria de México sugieren la conexión entre el concepto de pendiente y la razón de cambio (SEP, 2011a). Este reconocimiento sería fundamental para pasar a una razón de cambio promedio (Deniz y Kabael, 2017a), y por consecuentemente podrían estar listos para la razón de cambio instantánea, así como para la derivada (Nagle y Moore-Russo, 2013a). De igual manera, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) reconoce la importancia del estudio de este concepto, ya que declara que todos los estudiantes deben ingresar a la escuela secundaria (grado 9° al 12°) o el bachillerato (equiparado con la escuela mexicana) con una comprensión de los elementos claves de las gráficas, incluido el concepto de pendiente. Además, los programas de instrucción desde el kínder hasta el 12° grado deben permitir a todos los estudiantes analizar la idea de cambio en diversos contextos (NCTM, 2000). De manera que, perciban la utilidad del concepto de razón de cambio en la vida cotidiana para la toma de decisiones, como es elegir un plan telefónico, un producto (refresco, leche, aceite, etc.) o determinar una hipoteca (Hoffman, 2015), entre otras.

Sin embargo, los estudios han reportado que estudiantes e incluso profesores, tienen una comprensión mínima sobre el concepto de pendiente y experimentan varias dificultades conceptuales (Dolores-Flores, et al., 2018; Lobato y Siebert, 2002; Simon y Blume, 1994; Teuscher y Reys 2010; Zaslavsky, Sela y Leron, 2002). Entre éstas, su interpretación tanto en situaciones funcionales como físicas (Simon y Blume, 1994; Stump, 2001a, 2001b) así como también para transferir su conocimiento acerca de ésta en diversos contextos como la economía, biología, física, etc. (Lobato y Thanheiser, 2002; Planinic et al., 2012; Wilhelm y Confrey, 2003).

Para Stump (2001a) y Walter y Gerson (2007), las dificultades en la comprensión de este concepto se deben a los diversos significados que los profesores asocian con la palabra pendiente (inclinación, declive, empinada, entre otras) y a la escasa o nula conexión que hacen con la razón de cambio (Nájera, 2015; Teuscher y Reys, 2010; Zaslavsky et al., 2002). Por su parte, Cho y Nagle (2017) atribuyen que una posible fuente de las dificultades con este concepto se debe a la variedad de formas en que puede conceptualizarse y su desconexión entre éstas. La desconexión entre las diferentes representaciones de la pendiente se debe a que generalmente su enseñanza se centra en la práctica de la fórmula mediante la introducción de los números. Más aún, este concepto matemático generalmente se enseña sin contexto ni conexión, orillando a su memorización por parte de los alumnos (Wagener, 2009). Además, como razón de cambio tiene poco o ningún énfasis en la interpretación de lo que significa el resultado dentro de un contexto dado o sin tener en cuenta las unidades de medida (Herbert y Pierce, 2008). Esta situación implica un endeble paso de la comprensión local basada en el cálculo a la comprensión global del significado del cociente o para hacer conexiones con la idea de razón de cambio en contexto (Walter y Gerson, 2007).

Las investigaciones han dado cuenta de las conceptualizaciones que de pendiente tienen los estudiantes (Casey y Nagle, 2016; Stump, 2001a), los profesores (Stump, 1999; Hoffman, 2015; Nagle, Moore-Russo, Viglietti y Martin, 2013; Newton y Poon, 2015), las que están presentes en el currículo estadounidense (Nagle y Moore-Russo, 2014; Stanton y Moore-Russo, 2012), y en libros de texto (Kim, 2012). Sin embargo, aún hay vacíos y necesidades por satisfacer en esta línea de investigación. Por ejemplo, se necesita más investigación sobre las conceptualizaciones más comunes de pendiente que tienen tanto los profesores como sus estudiantes y, cómo éstas influyen en la enseñanza y el aprendizaje (Stanton y Moore-Russo, 2012). Stanton y Moore-Russo (2012) sugieren investigar las ideas previas o concepciones iniciales de la pendiente que tienen los estudiantes o las que se forman primero cuando se introducen al concepto. También, plantean hacer una comparación entre las conceptualizaciones que ponen en juego los estudiantes de diferentes países cuando se les realizan las mismas preguntas o preguntas similares.

Por su parte, Nagle et al. (2013) plantean la búsqueda de la existencia de una relación jerárquica entre conceptualizaciones de la pendiente, o bien cómo las imágenes personales de los profesores, acerca de la pendiente, se relacionan con su práctica. También, sugieren centrarse en el papel que juegan los profesores de educación secundaria (grado 6-12) en el desarrollo de las conceptualizaciones de los estudiantes en la universidad. Hoffman (2015) propone un estudio referente a la comparación de las conceptualizaciones de la pendiente en los estudiantes y los profesores de educación secundaria, o bien una comparación de las conceptualizaciones de los profesores de secundaria (grado 6-8) con profesores de bachillerato (grado 9-12). A este respecto, este estudio se centró en la investigación de las preconcepciones de pendiente que se tienen en el Bachillerato.

Hemos decidido el Bachillerato por 3 razones. Primera, de acuerdo con la currícula, el concepto es tratado con mayor profundidad en este nivel educativo. Segunda, en los niveles educativos previos a éste se trabaja con el concepto de razón y proporcionalidad, los cuales son precursores del concepto de pendiente (Cheng, 2010; Holguín, 2012; Reyes-Gasperini, 2013; Sabinin, 2011), la proporcionalidad directa es vista como una propiedad caracterizada por la linealidad (Gómez, 2007) y están relacionados con la noción variacional del concepto de pendiente. Y por último, la tercera se debe a que este nivel educativo es un campo escasamente explorado por los investigadores, más aún en México.

Por otro lado, en el proceso de enseñanza y aprendizaje se tiende a provocar cambios conceptuales en los estudiantes sobre la base del conocimiento de sus ideas previas (Ázcarate, 1992; Mahmud y Gutiérrez, 2010). Es decir, que para mejorar el aprendizaje es necesario conocer los conocimientos precedentes de los estudiantes, particularmente el relacionado con el conocimiento a ser enseñado, porque este tendrá una influencia decisiva en su aprendizaje. Puede convertirse en obstáculo o en punto de partida para que, en el proceso de enseñanza pueda ser trascendido para acercarlo al conocimiento aceptable (Dolores et al., 2017). Ignorar sus conocimientos precedentes seguramente conducirá a la preservación de concepciones alternativas o conceptos erróneos, que de por sí son difíciles de remover o trascender incluso con la enseñanza reiterada.

Además, respecto a los estudios sobre preconcepciones, se han desarrollado principalmente en el campo de las ciencias naturales (por ejemplo, Mahmud y Gutiérrez, 2010; Moreira y Greca, 2003; Yip, 1998; Zavala, 2012). En educación matemática, los estudios se han centrado en identificar las preconcepciones de estudiantes sobre: un curso de Estadística (Tovar et al., 2007); la asociación estadística en tablas de contingencia (Batanero, Estepa, Godino y Green, 1996); las translaciones geométricas (Yanik, 2011) y; la simetría reflexiva (Mhlolo y Schafer, 2013), entre otros. Sin embargo, las preconcepciones de pendiente en los estudiantes de bachillerato es un área escasamente explorada.

1.2 Pregunta de investigación y objetivo

De la problemática anteriormente expuesta y basado en la recomendación de Stanton y Moore-Russo (2012), este estudio se centró en indagar sobre las preconcepciones de pendiente. Específicamente, el estudio es cualitativo y utilizó entrevistas basadas en tareas para responder la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué preconcepciones de pendiente tienen los estudiantes de bachillerato?

Para dar respuesta a la pregunta de investigación se planteó como objetivo general: *Identificar qué preconcepciones de pendiente manifiestan los estudiantes de primer año de bachillerato en la resolución de diversas tareas que la involucran.*

Para llegar al planteamiento de este estudio, previamente se desarrollaron otras exploraciones en estudiantes que ya han culminado sus estudios de bachillerato (grado 12), cuyo marco referencial fueron las conceptualizaciones de pendiente.

Los objetivos de los estudios fueron:

- *Explorar qué conceptualizaciones de pendiente emplean los estudiantes de bachillerato en México al resolver tareas que involucran el concepto.*

- *Explorar qué conceptualizaciones de pendiente emplean los estudiantes universitarios en México al resolver tareas que involucran el concepto.*

- *Explorar qué conceptualizaciones de pendiente se promueven en el currículo de matemáticas en México.*

Los resultados de estos estudios proporcionaron elementos para:

- *Diseñar tareas que involucren diversas representaciones de la pendiente, contemplando lo identificado en la currícula mexicana así como la demanda cognitiva que deben alcanzar los estudiantes con su educación de bachillerato.*

Así, de acuerdo con la pregunta de investigación de este estudio y el cumplimiento de los objetivos de las otras investigaciones realizadas en el contexto mexicano, se pretendió contribuir en el conocimiento acerca de las conceptualizaciones del concepto de pendiente que manifiestan los estudiantes que ya lo han trabajado en el aula escolar, al resolver tareas que involucran el concepto. Asimismo, mostrar el desarrollo que tiene este concepto a través de la currícula, es decir cómo se plantea en la currícula mexicana desde la educación básica hasta el nivel medio superior.

Por otra parte, conocer las preconcepciones tiene dos implicaciones. Primera, atender una demanda en la investigación internacional, ya que hoy día sabemos que los alumnos mantienen un conjunto diverso de ideas previas o preconcepciones sobre los contenidos científicos, las cuales, mayoritariamente son erróneas y se reconoce en la literatura que son uno de los factores clave que deben tenerse en cuenta como una condición necesaria (aunque no suficiente) para un aprendizaje significativo. Asimismo, este estudio permitirá conocer acerca de lo que ha dejado su estudio en la educación secundaria con respecto al concepto de pendiente. Una segunda implicación, dar elementos para el desarrollo de futuras investigaciones centradas en el diseño de propuestas metodológicas para la enseñanza del concepto, de manera que se contemplen las preconcepciones y coadyuve a un mejor entendimiento de este concepto.

CAPÍTULO II

El concepto de Pendiente en la investigación

2.1 Antecedentes de la investigación

La comprensión de la pendiente no es tarea fácil, ya que ésta se puede representar en diversos contextos (Cho y Nagle, 2017; Moore-Russo, et al., 2011; Mudaly y Moore-Russo, 2011; Stanton y Moore-Russo, 2012; Stump, 2001b), esto exige que tanto profesores como estudiantes las conecten para un mejor entendimiento del concepto (Nagle y Moore-Russo, 2013a, 2013b; Stanton y Moore-Russo, 2012). Sin embargo, las investigaciones han dado cuenta de las dificultades que tienen estudiantes y profesores al trabajar con este concepto (Casey y Nagle, 2016; Cho y Nagle, 2017; Leinhartdt, Zaslavsky y Stein, 1990; Lobato y Thanheiser, 2002; Newton y Poon, 2015; Weber, Tallman y Middleton, 2015; Teuscher y Reys, 2012; Wagener, 2009). Entre éstas se tiene que la relación existente entre la pendiente y la razón de cambio no es del todo evidente para ellos (Byerley y Thompson, 2017; Moore-Russo et al., 2011; Teuscher y Reys, 2012). A este respecto, Simon y Blume (1994) también notaron la resistencia en los profesores de considerar la pendiente como una relación del cambio de una variable con respecto a otra, lo cual les dificulta relacionarla en otro contexto como es la física.

En ese mismo sentido, Nájera (2015) planteó situaciones que involucraron el cálculo de la pendiente de una recta, la velocidad, rapidez y aceleración a estudiantes recién egresados de bachillerato, encontrando que utilizan razones de cambio pero no son conscientes de que se trata del mismo modelo matemático, esto por desconocer el devenir de las fórmulas, evidenciando así una desconexión entre pendiente y razón de cambio. Según Nagle, Moore-Russo y Martínez-Planell

(2016), el tener solo memorizada la fórmula los orilla solo a conectar valores de coordenadas de dos puntos dados, por lo que, en la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ a menudo tienden a olvidar "si las y's o las x's están en la parte superior", ya que relacionar el concepto solo con la fórmula conlleva a no darle sentido al valor resultante, que de manera geométrica éste refiere a la razón de cambio de la distancia vertical con relación a la distancia horizontal (Simon y Blume, 1994).

Por su parte, Stump (2001b) y Walter y Gerson (2007) encuentran que los profesores al instruir acerca de la pendiente asocian los términos de inclinación, empinado, cuesta, declive, entre otras, con la palabra pendiente, lo cual impide a los estudiantes mirarla como una relación entre dos variables. De la misma manera, Hoffman (2015) identifica que el esquema conceptual de los profesores respecto a ésta es relacionarla de inmediato con rampas, escaleras, techos de casa, calles empinadas, etc., representación de la pendiente que Stump (2001a) denominó situación mundo real, categoría de situación física. Sin embargo, estas ideas a pesar de estar relacionadas con la idea de pendiente con poca frecuencia se reconocen como una medida de inclinación (Nagle y Moore-Russo, 2013b). Por tanto, es válido pensar en la existencia de la diversidad de esquemas conceptuales por parte de los estudiantes.

Con respecto a lo anterior, en los 90's, Ázcarate (1992) indagó sobre los esquemas conceptuales de los estudiantes asociados al concepto de pendiente. Éstos los clasificó en tres perfiles: geométrico, operativo y funcional, en estos no hace distinción si son aproximadas o alejadas de la definición matemática del concepto, ya que los define en función de las palabras que emplean los estudiantes al hacer referencia a ella. Más tarde, en ese mismo sentido, Stump (1999, 2001a) y Moore-Russo et al. (2011) también clasifican las representaciones de la pendiente que evocan los profesores de secundaria y estudiantes universitarios. Stump (1999, 2001a, 2001b) identificó ocho y las categorizó como: *razón geométrica*, *razón algebraica*, *propiedad física*, *propiedad funcional*, *coeficiente paramétrico*, *conceptualización trigonométrica*, *conceptualización en cálculo* y *situación del mundo real* (físicas y funcionales). Posteriormente, Moore-Russo et al. (2011) agregaron: *propiedad* *determinante*, *indicador de comportamiento* y *constante lineal*, las cuales denominaron en su conjunto como ***conceptualizaciones de pendiente*** (véase Tabla 1).

Tabla 1

Conceptualizaciones de pendiente

Conceptualización	**Descripción**	**Código**
Razón Algebraica	Cambio en y entre cambio en x, razón con una expresión algebraica $\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \text{ o } \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$.	A
Razón Geométrica	La razón del desplazamiento vertical y desplazamiento horizontal en la gráfica de una recta. Subida sobre corrida del gráfico de una recta.	G
Propiedad Funcional	Razón de cambio constante entre las variables o dos cantidades; a veces se observa en las respuestas que implican razones relacionadas o constantes de proporcionalidad.	F
Situación Mundo-Real	Situación física, estática o dinámica, situación funcional (por ejemplo: una rampa, distancia en función del tiempo).	R
Indicador de comportamiento	Número real con signo que indica crecimiento (+), decrecimiento ($-$), tendencia horizontal de la línea (0). Si no es cero, indica la intersección con el eje x.	B
Propiedad Física	Descripción de una recta utilizando expresiones como grado, inclinación, tendencia, ladeo, declive, etc.	P
Coeficiente Paramétrico	Coeficiente m (o su valor numérico) en $y = mx + b$ o $y - y_1 = m(x_2 - x_1)$	PC
Concepción Trigonométrica	Propiedad relacionada con el ángulo de una recta que hace con una recta horizontal; tangente del ángulo de inclinación.	T
Concepción en Cálculo	Medida relacionada con la derivada como la pendiente de la tangente a una curva, de una recta secante, o cómo razón de cambio instantánea para cualquier función (incluso una no lineal).	C
Propiedad Determinante	Propiedad que determina si las rectas son paralelas o perpendiculares; propiedad con la que se puede determinar una recta si se da un punto y su pendiente.	D
Constante Lineal	Propiedad constante y única para las rectas; "recta" o "rectitud" de una línea que no es afectada por la traslación. Es una propiedad constante, independiente de la región del gráfico lineal que se está considerando, es decir que dos puntos cualesquiera determinan la pendiente.	L

Nota: Adaptada de Nagle y Moore-Russo (2014) «Traducción propia»

Con base en las conceptualizaciones de pendiente, Moore-Russo y colaboradores se interesaron en identificar cuáles predominan en profesores, estudiantes y documentos curriculares. Los estudios de Hoffman (2015), Moore-Russo et al. (2011), Mudaly y Moore-Russo (2011), Nagle et al. (2013) y Stump (1999, 2001a, 2001b) se realizaron con distintas poblaciones, destacando la norteamericana, y en diferentes niveles educativos. Por ejemplo, Nagle et al. (2013) comparan las conceptualizaciones de pendiente que tienen los estudiantes y profesores en nivel superior, apreciando que la conceptualización como *indicador de comportamiento* fue sobresaliente en los estudiantes, contrario en la de los profesores. De la misma manera, en los profesores es relevante la conceptualización de pendiente en la aplicación a *situaciones mundo real*, no así para los estudiantes. Además, dicho estudio evidenció un escaso razonamiento covariacional en los estudiantes, el cual es base para entender y relacionar con las conceptualizaciones de pendiente más avanzadas como es en *situaciones funcionales* y *en cálculo* (Nagle et al., 2013).

En cambio, Hoffman (2015) encuentra la conceptualización que predomina en los profesores de secundaria (grado 6-8) es como *razón algebraica* seguida de la *situación mundo real* asociada a objetos físicos, encontrando escasa la *conceptualización trigonométrica*, *conceptualización en Cálculo*, *propiedad determinante* y *constante de linealidad*. Por su parte, Cho y Nagle (2017) reportaron dificultades procedimentales y conceptuales, así como los errores con respecto a la pendiente que manifiestan los estudiantes universitarios al trabajar con tareas rutinarias en las que figuran algunas conceptualizaciones de pendiente.

En conjunto las investigaciones antes mencionadas, dan cuenta que la *conceptualización trigonométrica* de la pendiente es muy poco común en los profesores y estudiantes norteamericanos. Este resultado es coincidente con lo que encuentra Stanton y Moore-Russo (2012) y Nagle y Moore-Russo (2014) en el currículo estadounidense así como en los estándares de matemáticas, es decir, esta conceptualización es a la que menos se hace referencia. De acuerdo con Nagle y Moore-Russo (2013b), si se diera la vinculación de la *conceptualización razón algebraica* y *la trigonométrica* se tendrían más oportunidades de fortalecer la comprensión de este concepto. ¿Pero que hay al respecto en México?

A continuación presentamos tres exploraciones que se realizaron en el contexto mexicano. El primero, con estudiantes recién egresados del bachillerato en el 2017, el segundo con estudiantes recién ingresados a la universidad en el 2018 y, el tercero, explora el desarrollo de la pendiente en la currícula desde la educación primaria hasta la educación bachillerato (1° al 12° grado). Los tres estudios toman como marco referencial el conjunto de conceptualizaciones de pendiente descritas anteriormente en la Tabla 1.

2.2 Las conceptualizaciones de pendiente en estudiantes de bachillerato[2]

En México, el estudio de las conceptualizaciones de pendiente es reciente. Sin embargo, algunos trabajos de investigación se han centrado en estudiar la razón de cambio en estudiantes (Dolores et al., 2002; Dolores et al., 2017). Dolores-Flores et al. (2018) reportaron que la enseñanza-aprendizaje de la pendiente prioriza lo procedimental y el desarrollo de nociones conceptuales queda relegado a un segundo plano.

Por otra parte, García (2006) reporta que la instrucción del profesor influye en el aprendizaje de sus estudiantes. Para el caso de la derivada encontró que su enseñanza es meramente informativa y no explicativa, lo cual orilla a la memorización y dificulta percibir su relación de manera natural con la pendiente, ya que el discurso del profesor se centra en indicar a los estudiantes sobre lo que se emplea en cada situación que la involucre. Páez, Guzmán y Zambrano (2015) reportan la práctica de un profesor de 9 grado que se sustenta en recursos visuales para dar justificaciones. Esto, impide mirar que una recta paralela al eje de las abscisas tiene pendiente cero, ya que por la ausencia del ángulo de inclinación de una recta horizontal y representar geométricamente la razón de cambio en la recta dado dos puntos, el profesor dice que no tiene pendiente, sin embargo, emplea el cero para representarla. Una vez que este reflexiona sobre su práctica se da cuenta de su error, empero el estudiante ya aceptó la justificación.

[2] Este es un estudio que se encuentra postulado a un capítulo del libro *"Investigación e Innovación en Matemática Educativa en Guerrero"* por Rivera y Dolores (2018).

El caso que reportan Páez et al. (2015) es de un profesor que por el objetivo de la investigación pudo percatarse de su error, pero ¿qué pasará con las justificaciones de otros profesores? ¿Qué conceptualizaciones tendrán y cuáles estimularán en su práctica docente? García (2006) reportó que los estudiantes sólo reproducen lo que el profesor realiza y emplean lo que él autoriza, entonces ¿cómo influyen sus conceptualizaciones en las que se forman sus estudiantes? ¿El profesor considera las conceptualizaciones de sus estudiantes cuando enseña el concepto? Para responder a estas interrogantes es necesario una diversidad de estudios sobre las conceptualizaciones de cada factor que influye en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Además, los estudios permitirían confirmar si hay otras que aún no se han identificado y entender el papel que juegan éstas en la enseñanza y aprendizaje de funciones lineales, funciones no lineales y el comportamiento funcional, incluida la derivada (Stanton y Moore-Russo, 2012).

2.2.1 Objetivo

De lo anteriormente expuesto y a la escasez de los estudios en el nivel de bachillerato, este estudio se planteó como objetivo *investigar las conceptualizaciones de la pendiente que usan los estudiantes preuniversitarios en la resolución de diversas tareas que involucran el concepto*. Se realizó con estos estudiantes, dado que han tratado de manera formal el concepto de pendiente y razón de cambio.

2.2.2 Método

Una conceptualización de pendiente es considerada en el mismo sentido que Hoffman (2015), como una representación específica del concepto de pendiente. Para investigar qué conceptualizaciones de la pendiente usan los estudiantes, se emplearon las once conceptualizaciones descritas en la Tabla 1 y se realizó una entrevista semiestructurada basada en tareas con cada uno de los estudiantes. Consideramos que ésta es apropiada, ya que permite conocer las ideas y procedimientos matemáticos que utilizan los estudiantes al resolver tareas (Goldin, 2000). Los participantes fueron 27 estudiantes voluntarios recién egresados del Bachillerato (18-20 años) y provenientes de diversas instituciones del Estado de Guerrero, México del año 2017. Cada entrevista en promedio tuvo una duración de 60 a 90 minutos.

Para la recolección de datos, se diseñó y validó un instrumento conformado por 16 tareas. La validación permitió discriminar y asegurar que las tareas permitieran el logro del objetivo, así como recoger el nivel de partida requerido para su resolución. Se realizó con 6 estudiantes que se encontraban tomando un curso de Cálculo Integral en el Bachillerato, el cuál originó que se prescindiera de 3 tareas y el refinamiento en el planteamiento de 7. El instrumento final estuvo integrado por 13 tareas, de las cuales 5 (tareas 4, 5, 7, 11, 13) fueron adaptaciones de Hoffman (2015) y 8 diseñadas por los investigadores (ver Anexo A). Cada tarea favorece el usos de al menos una de las 11 conceptualizaciones de la pendiente reportadas en Moore-Russo et al. (2011).

Por otro lado, las tareas pueden agruparse en las que el término de "pendiente" es explícito en el planteamiento y otras en las que no. En las tareas 2, 3, 5, 6 y 9; se pide de manera explícita, el cálculo de la pendiente de: una escalera (dadas sus dimensiones y otra dada el ángulo de inclinación); rectas (dada una en el plano cartesiano; tres, dadas su ecuación) y; la pendiente de una recta tangente a una curva. El otro grupo de tareas no hace referencia al cálculo de la pendiente, sino al uso e interpretación en diferentes situaciones, pero sin involucrar el término "pendiente". Por ejemplo, dar un criterio sobre la elección de una resbaladilla menos peligrosa, elección de una función lineal a partir de tablas de valores, interpretación de la pendiente expresada en porcentaje, comparación de dos razones de cambio, elección de rectas paralelas y perpendiculares dada su ecuación, identificación de intervalos de crecimiento, de decrecimiento en una curva, identificación de las variables que están en juego en una razón de cambio, así como el reconocimiento de que la pendiente de una recta no cambia al ser la recta trasladada.

Para el análisis de datos se transcribieron y leyeron todas las entrevistas y mediante un análisis comparativo de los argumentos y procedimientos realizados por los participantes, se identificaron palabras claves o procedimientos que hacen referencia a las conceptualizaciones descritas en la tabla 1. Cada investigador revisó las grabaciones de video y leyeron las transcripciones escritas de cada estudiante de manera independiente y realizó su respectiva codificación. Cabe mencionar que no se buscaban respuestas correctas, sino las representaciones asociadas a la pendiente que utilizaron los estudiantes. Por ejemplo, si el estudiante utilizó la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ en alguna tarea, está fue codificada como razón algebraica, si hizo referencia a la pendiente como el avance en x y avance en y, este fue codificado como razón geométrica, etc.

Para determinar las conceptualizaciones que usaron los estudiantes, los investigadores se reunieron y compararon su codificación propuesta. Las discrepancias fueron discutidas hasta que se llegó a un acuerdo sobre la codificación final de los datos. Esto permitió la confiabilidad de los resultados y garantizó su validez, credibilidad y rigor, eliminando así el sesgo de un único investigador.

2.2.3 Resultados

Para las tareas en las que el término "pendiente" fue explícito, 10 estudiantes utilizaron la conceptualización *razón algebraica*, 11 emplearon la *razón geométrica*, 7 usaron *coeficiente paramétrico*, 2 hicieron referencia a la *constante lineal*, 4 a la *conceptualización trigonométrica*, 1 a la de *indicador de comportamiento*, 1 a la *conceptualización en Cálculo* y 1 la empleó como *propiedad física*. La tabla 2 muestra las frases claves o procedimientos que permitieron la codificación para cada conceptualización.

Tabla 2

Frases claves o procedimientos y ejemplos de algunas respuestas dadas por los estudiantes para cada conceptualización de la pendiente

Conceptualización (No. de estudiantes)	**Frase clave o procedimiento que permitió la codificación**	**Ejemplo de respuesta (No. tarea)**
Razón algebraica (10)	▪ Uso de la fórmula $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.	▪ Para calcular la pendiente se usa la fórmula $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y para eso me imagino el plano cartesiano y los puntos son (0,0) y (6,2) (T. 2). ▪ Elegimos dos puntos y para más fácil tomamos los de las intersecciones y aplicamos la fórmula (T. 3 y T. 9).

Razón geométrica (11)	▪ Avance en x y avance en y. ▪ Desplazamientos en x y en y.	▪ Suponemos que este es x (señala la base de la escalera) y este es y (Señala la altura de la escalera) y vemos cuánto se movió en x y en y y escribimos aquí y (se refiere al numerador) y aquí x (se refiere al denominador), entonces es $\frac{2}{6}$ que es equivalente a $\frac{1}{3}$ (T. 2).
Coeficiente paramétrico (7)	▪ Es m en la ecuación $y = mx + b$	▪ La pendiente es m en $y = mx + b$ (T.6 y T.9). ▪ Primero obtengo $y = mx + b$ y la pendiente es el número que acompaña a x (T.9).
Constante lineal (2)	▪ Con cualquier par de puntos puedo calcular la pendiente. ▪ La pendiente es la misma para toda la recta. ▪ Dos triángulos rectángulos semejantes dan la misma pendiente.	▪ Para calcularla no importa que puntos tome, la pendiente es la misma (T. 3). ▪ Como es una línea recta la pendiente es única (T.3). ▪ No importa que triángulos tome, la pendiente siempre me va a dar la misma (T.3).
Concepción trigonométrica (4)	▪ La pendiente es la tangente del ángulo de inclinación. ▪ La pendiente es $\tan \theta$.	▪ El ángulo es de 45° entonces tan 45° es 1, entonces la pendiente es 1 (T. 5). ▪ Sabemos que la pendiente es la tangente y la tangente es cateto opuesto sobre cateto adyacente (T.3).
Indicador de comportamiento (1)	▪ La pendiente es positiva y podemos ver que va creciendo.	▪ Si trazamos un plano cartesiano el ángulo es menor a 90° entonces la pendiente es positiva y entonces va a ir creciendo (T. 2).
Concepción en Cálculo (1)	▪ La derivada es la pendiente de la recta tangente.	▪ Buscamos la ecuación de la curva y la derivamos y así obtenemos la pendiente de la tangente en ese punto (T.9).
Propiedad física (1)	▪ Es la inclinación que tiene la escalera	▪ La pendiente va a ser la inclinación de la escalera que puede estar dada por el ángulo (T.2).

Cabe mencionar que algunos estudiantes utilizaron e hicieron referencia a más de una conceptualización de pendiente en algunas tareas, un ejemplo de ello es el estudiante E24. En la tarea 3, E24 hace referencia a la conceptualización de pendiente *constante lineal* y *la trigonométrica*, al calcular la pendiente de la recta. A continuación, se muestra el extracto de la entrevista, en el que las palabras en cursivas en el texto permitieron la identificación de una conceptualización.

I: ¿Cuál es la pendiente de la recta que se muestra en la figura 5? Explique ampliamente cómo la obtiene.

E24: [Realiza los cálculos que se muestran en la Figura 1], es uno.

I: ¿Cómo le hiciste?

E24: La intersección entre el eje de las equis y el eje de las ye, forman un triángulo rectángulo. Ese triángulo tiene catetos de valores uno y uno, ya nada más calculé la *tangente de este ángulo.*

I: ¿Por qué la tangente del ángulo?

E24: Porque la tangente nos ayuda a calcular la pendiente de la recta, y tangente es igual a cateto opuesto entre cateto adyacente [señala los catetos en el triángulo que dibujo]. De hecho, se pueden tomar cualquier triángulo.

I: ¿Y la pendiente es igual en toda la recta?

E24: Sí, si yo trazo desde este punto, de esta manera [*traza triángulos,* Figura 2] siempre me da uno, *puedo tomar cualesquiera dos puntos que me ayuden a construir triángulos y siempre me va a dar lo mismo*.

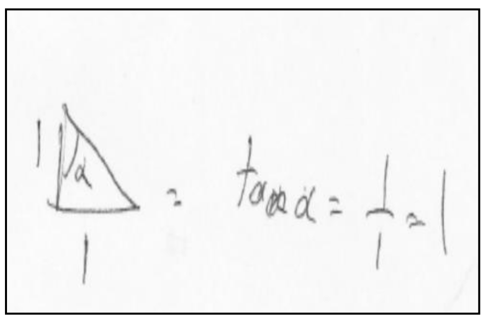


Figura 1. Procedimientos del estudiante E24

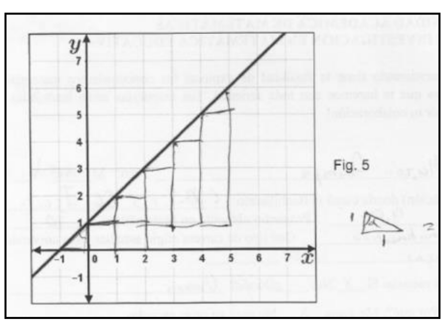


Figura 2. Producción de E24, conceptualización constante lineal.

La conceptualización *razón algebraica* fue identificada por el uso de la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, principalmente en las tareas 2 y 3. El estudiante E21, identifica las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes y los sutituye en la fórmula para calcular la pendiente (Figura 3) y al cuestionarle sobre otra forma de obtener la pendiente declara que es la única forma que conoce.

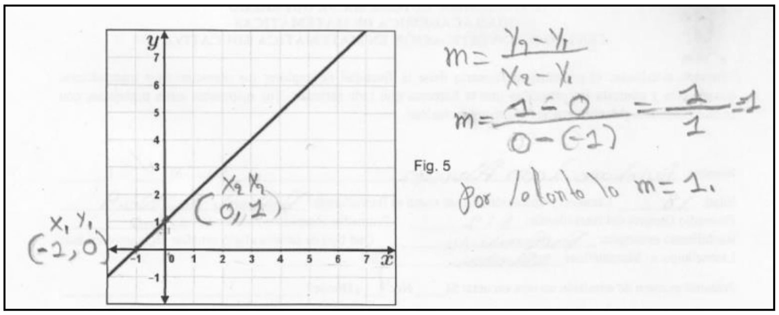


Figura 3. Producción de E21, conceptualización razón algebraica

La tarea 2, se da en un contexto no matemático, es decir no se da un plano cartesiano y se pide calcular la pendiente de una escalera dada la medida de su base y su altura. Sólo 2 estudiantes transfieren la situación al plano cartesiano y aplican la fórmula. A continuación se muestra el extracto de la entrevista realizada a E12.

I: Todos los días Don Toño tiene que subir las escaleras para llegar a la entrada de su oficina. Con base en los datos dados en la Fig 4, ¿Qué pendiente tiene la escalera?

E12: Bueno, aquí no aparece en un plano, pero podemos imaginarlo

I: ¿Para qué necesitas el plano?

E12: Para poder *aplicar la fórmula de la pendiente* y bueno si suponemos que este cero es el origen, entonces este lado es como si fuera el eje equis [señala la base] y este como si fuera el eje de las ye [señala la altura]

I: ah ok, ¿y entonces?

E12: entonces si trazamos una línea imaginaria por encima [señala con el dedo una recta que une el inicio con el final de la escalera] *podemos tener los puntos cero coma cero y el punto seis coma dos y entonces ye dos menos ye uno entre equis dos menos equis uno es igual a dos menos cero entre seis menos cero* y [escribe sus operaciones y susurra sus cálculos, Figura 4] … es uno entre tres, o sea un tercio.

I: ¿y eso que significa?

E12: no sé, sólo me sé de memoria la fórmula.

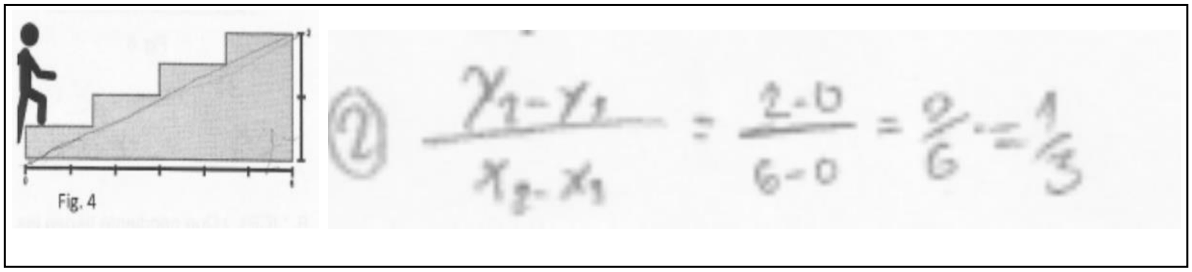


Figura 4. Producción de E12, conceptualización razón algebraica

La conceptualización *coeficiente paramétrico* fue empleada por los estudiantes con mayor frecuencia en la tarea 6, en la cual se dieron ecuaciones de rectas, en su forma general y su forma ordinaria. Sin embargo, E18 también la usa para resolver la tarea 9, tal como se muestra en el extracto de la entrevista.

I: Calcula la pendiente de la tangente a la curva en el punto A.

E18: Uhmm…ya nos dan la tangente.

I: ¿Lo podrías determinar a partir de la gráfica?

E18: [Realiza conteo de cuadritos y escribe…]

I: ¿Qué estás haciendo ahí?

E18: Tratando de sacar una ecuación para la recta

I: Ah ok, y ¿ya con eso vas a sacar la pendiente?

E18: Ajá… [Concluye que es $y = 3x + 4$] bueno según yo, ya saqué la ecuación y si es que estoy bien, su pendiente es 3.

I: ¿Por qué?

E18: Porque cuando tenemos esta ecuación [señala $y = 3x + 4$], de la forma ye igual a eme equis más be, *la pendiente es el número que acompaña a x.*

De los 27 participantes, sólo 8 reconocen a la pendiente como m o a en la ecuación de la recta dada en su forma ordinaria. Otros 3 estudiantes no lo tienen totalmente claro pues consideran que mx es la pendiente o generalizan que el valor del número que acompaña a x es la pendiente, tal como también lo encuentra Birgin (2012). La conceptualización de la pendiente como *indicador de* *comportamiento* se identificó en un estudiante que hizo referencia a distinguir entre la pendiente es positiva o es negativa, tal como en Nagle et al. (2013).

Por otro lado, cuando resuelven las tareas en las que no aparece explícitamente el término "pendiente", la conceptualización que más usaron los estudiantes fue como *propiedad física* seguida de la conceptualización *constante lineal*. Esta conceptualización apareció con mayor frecuencia en la tarea 7 y la tarea 1, tal como se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3

Frecuencia de las conceptualizaciones usadas en las tareas que no aparece explícitamente el término "pendiente"

No. Tarea	**A**	**G**	**F**	**R**	**B**	**P**	**PC**	**T**	**C**	**D**	**L**
1. Resbaladilla menos peligrosa.	0	1	0	0	0	22	0	1	0	0	0
4. Tabla que corresponde a una función lineal.	0	0	1	0	0	0	3	0	0	0	9
7. Interpretación de 12% en una calle e interpretación de una tubería con una pendiente de 2%.	0	0	1	0	1	35	0	0	0	0	0
8. Selección de recta paralela y perpendicular a una dada.	0	0	0	0	2	0	0	0	0	6	0
10.Correspondencia de razones de cambio descrita con su gráfica.	0	2	2	0	2	8	0	0	0	0	0
11.Intervalos de crecimiento y decrecimiento.	0	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0
12. Interpretación de una situación dadas dos gráficas que representan el llenado de una cubeta.	0	2	5	0	0	8	1	0	0	0	0
13. Dada una función lineal, ¿qué pasa si se cambia el término independiente o si la recta es traslada a un punto (x, y)?	0	1	0	0	4	6	3	0	0	6	8

Por ejemplo, la tarea 1 estuvo planteada de la siguiente manera: De acuerdo con tu opinión, ¿Qué resbaladilla es la menos peligrosa para un niño de 6 años?

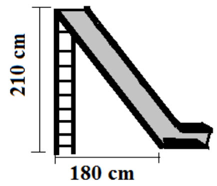


Fig.1

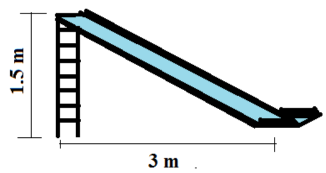


Fig.2

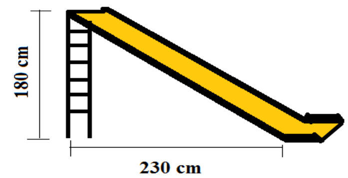


Fig.3

Se encontró que 24 estudiantes se basaron en atributos de la pendiente como *propiedad física* para la elección de la resbaladilla, es decir, que de acuerdo con Moore-Russo et al. (2011) y Mudaly y Moore-Russo (2011) esta conceptualización se caracteriza porque hacen referencia a la propiedad de una recta y es descrita por expresiones como grado, inclinación, empinado, etc. En este caso, hicieron alusión a la inclinación y con menor frecuencia se atribuye su elección *al ángulo* (5 estudiantes), seguido del término de *pendiente* (3 estudiantes) con expresiones como mayor pendiente o menor pendiente. Los estudiantes que involucraron a la pendiente en esta situación, E24 y E12, usan la *conceptualización trigonométrica* y la de *razón algebraica* respectivamente, para decidir cuál tiene menor pendiente tal cómo se muestra en la Figura 5 y Figura 6.

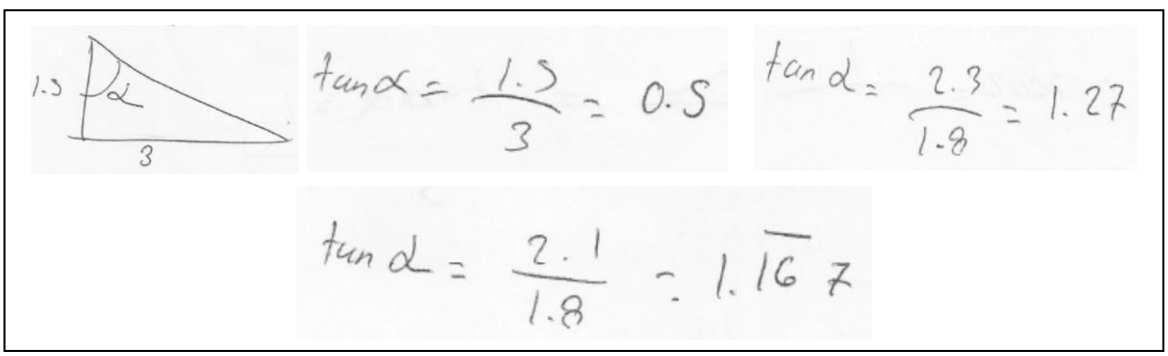


Figura 5. Producción de E24, conceptualización trigonométrica de la pendiente

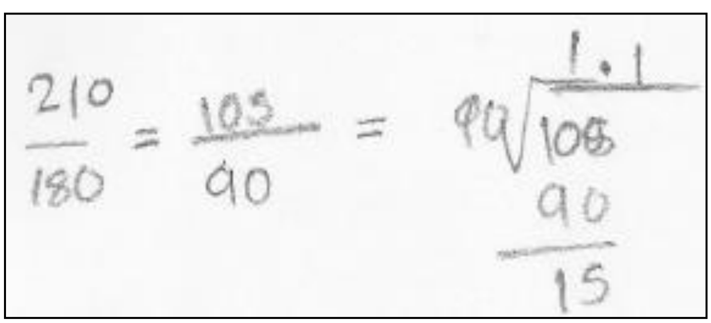


Figura 6. Producción de E12, uso de la conceptualización razón algebraica como $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Para el caso de la pendiente como determinador de la relación entre dos rectas, es decir para decidir si dos rectas son paralelas o perpendiculares, se encontró que 6 estudiantes tienen presente a la pendiente como determinador de paralelismo y 4 para la perpendicularidad. Se identificó el uso de esta conceptualización cuando es sus procedimientos o argumentos aparecen expresiones como *son paralelas si las pendientes son iguales*, *son perpendiculares si el producto de sus pendientes es menos uno* o *las pendientes son recíprocas y de signos contrarios*. Por ejemplo, veamos el extracto de E1

I: De la lista que se da a continuación, selecciona la que sea perpendicular o la que sea paralela a la recta $y = x + 1$. ¿Sabes cuáles son las rectas paralelas y cuáles son las rectas perpendiculares?

E1: si

I: Me puedes decir, por favor

E1: las perpendiculares son las que forman entre sí un ángulo recto, 90 grados, es decir que se cortan y las paralelas son las que por más que se prolonguen pues nunca se van a cortar, o sea que la misma distancia es la que van a ir teniendo a lo largo de su longitud.

I: bien, y aquí cómo decidirías cuál podría ser paralela o perpendicular a la recta $y = x + 1$

E1: uhmm, yo sé que se despeja de una manera para tener lo que es eme y ya teniendo estas [señala la m], las multiplicas entre sí, por ejemplo, tienes eme uno y eme dos, y *las multiplicas entre sí y si te da menos uno eso quiere decir que es perpendicular.*

I: ¿y por qué?

E1: no sé porque funciona, pero en la escuela eso me enseñaron, que *al multiplicar las pendientes me tiene que dar menos uno y si las pendientes son iguales entonces van a ser paralelas.*

I: ah ok…

E1: aunque también las podríamos graficar, pero sería más trabajo, yo usaría las pendientes.

Para conocer la conceptualización que predomina en su definición de la pendiente, en la tarea 2, dónde apareció el término por primera vez de manera explícita, se les preguntó sobre lo que se le venía a la mente cuando escuchaban el término y en la parte final de la entrevista se les pidió que dieran una definición de lo que entendían por la pendiente. No hubo mucha diferencia, la conceptualización que se manifestó fue *propiedad física* por lo que mencionaron expresiones como: *La pendiente es la inclinación, es el grado de inclinación, es un desnivel, es la inclinación de la recta, es el ángulo de inclinación, es una subida o una bajada*. Sólo un estudiante al final complementa su definición afirmando que la pendiente es la razón de cambio y ejemplifica con la velocidad, por lo que esto último hace referencia la conceptualización de la pendiente como *propiedad funcional*.

Por otro lado, si bien es cierto no se centró en mirar si las respuestas o las ideas puestas en juego por parte de los estudiantes eran correctas, sino más bien lo que utilizaron para resolver las tareas y en ellas identificar las representaciones que hicieran de la pendiente. De manera que se encontró que 22 estudiantes representan a la pendiente como la recta o segmento de recta, por lo que el uso del teorema de Pitágoras permitió calcular la pendiente, tal como se muestra en la Figura 7.

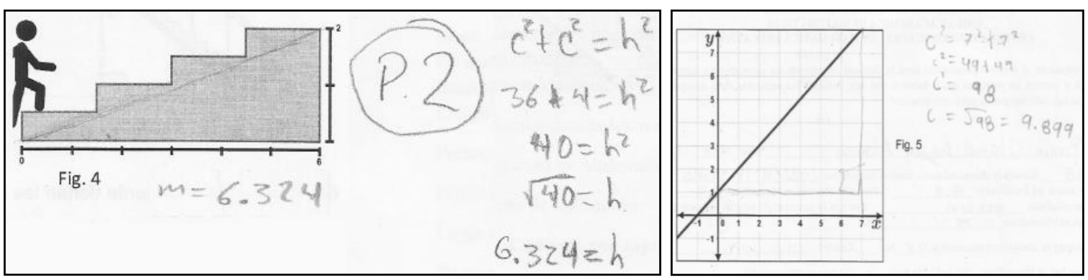


Figura 7. La pendiente como recta o segmento de recta

Cabe mencionar que incluso algunos estudiantes que usan las conceptualizaciones *razón geométrica, razón algebraica* y *coeficiente paramétrico* para calcular la pendiente, al interpretar su resultado lo asocian al valor de la longitud de la recta o segmento de recta, es decir también la conceptualizan como la recta. Para otros, la pendiente es el punto de corte con alguno de los ejes cartesianos, es decir que si la recta corta en el eje y en 3, entonces la pendiente es 3. Algunos participantes consideran como sinónimos pendiente e inclinación, de manera que asocian al ángulo como el valor de la pendiente.

2.2.4 Conclusiones

El propósito de este estudio fue investigar qué conceptualizaciones de la pendiente usan los estudiantes al resolver diversas tareas que la involucran. Se encontró que los participantes de este estudio usaron la de *propiedad física*, *constante lineal*, *razón geométrica*, *razón algebraica* y *coeficiente paramétrico*. En su minoría, usan la pendiente como *propiedad determinante* y como *indicador de comportamiento*. Sólo 2 estudiantes usan la *conceptualización en Cálculo* y *la trigonométrica.*

La conceptualización de la pendiente predominante fue la de *propiedad física*, lo cual es correspondiente con la definición que dan para la pendiente, es decir, para ellos la pendiente es la inclinación o el grado de inclinación de una recta. Este resultado es coincidente con lo que encontró Hoffman (2015) en profesores de secundaria, ya que, para ellos, la conceptualización de la pendiente como *propiedad física* pesa más en su imagen conceptual que tienen acerca de ella. Con una menor frecuencia los estudiantes emplearon las conceptualizaciones de la pendiente como *razón geométrica* y *razón algebraica*, pero para el caso en que figuraba el término "pendiente" en el planteamiento de las tareas. Este resultado es consistente con lo que encuentran Nagle et al. (2013) en estudiantes de cálculo avanzado y Walter y Gerson (2007) y Stump (1999) en estudiantes de secundaria. El uso de estas conceptualizaciones es proveniente de la definición de pendiente que se presenta en los libros de texto, y posiblemente del tratamiento que el profesor da a este concepto. Por un lado, parece ser que la instrucción de la pendiente se enfatiza más en un sentido procesal y menos conceptual, y por otro lado, que la imagen propia que tiene el profesor del concepto es posible que no la explote en su práctica docente (Nagle y Moore-Russo, 2013a).

La conceptualización *trigonométrica* y la *de Cálculo* son menos recurridas por los estudiantes preuniversitarios, situación similar a lo que ocurre en el contexto norteamericano tanto en profesores como las que se promueven en su currícula (Hoffman, 2015; Moore-Russo, et al., 2011; Nagle y Moore-Russo, 2013a; Nagle y Moore-Russo, 2014; Nagle, Moore-Russo y Styers, 2017; Stanton y Moore-Russo, 2012). La pendiente conceptualizada como *propiedad funcional*, es decir como una razón de cambio constante fue utilizada esporádicamente por los estudiantes, resultado contrario a lo que encuentran Nagle et al. (2013) en los profesores de educación superior, quienes reconocen a la pendiente como una propiedad funcional y que se aplica a situaciones del mundo real, además de desempeñar un papel integral en el desarrollo de los conceptos clave de cálculo. Si bien es cierto, los resultados son comparados con profesores y además de otro contexto, habría que preguntarse qué pasa con los profesores mexicanos, ya que Byerley y Thompson (2017) suponen que, si el profesor tiene una riqueza de significados, así como de una comprensión más conceptual, permitirá que también sus estudiantes sean capaces de establecer redes de conexiones entre los conceptos, en este caso entre el conjunto de conceptualizaciones que se tenga acerca del concepto de pendiente.

Por otro lado, los estudiantes (10) que manifestaron en un inicio no recordar como calcular la pendiente, resuelven las tareas auxiliándose del triángulo rectángulo y recurriendo al teorema de Pitágoras o a las razones trigonométricas, como consecuencia de tener conceptualizada a la pendiente como la recta o más en particular la hipotenusa del triángulo rectángulo, resultado que también según Byerley y Thompson (2017) ocurre en algunos profesores. Asimismo, el recordar que la pendiente se involucra en la expresión $y = mx + b$, asocian directamente al valor de b que gráficamente es la intersección con el eje y, tal como también lo encuentra Birgin (2012).

Los resultados de este estudio, una vez más confirman aún la presencia de la dificultad de interpretar a la pendiente como una razón de cambio en situaciones variacionales, ya que las conceptualizaciones que utilizaron los estudiantes están más relacionadas con el sentido geométrico de la pendiente. El concebir a la pendiente como la hipotenusa o como la misma recta puede llegar a ser un obstáculo para cuando ésta se quiera conectar con situaciones variacionales. Esta información es de utilidad para el profesor ya que debe considerarla en su práctica docente al momento de enseñar este concepto y subsanar las ideas que ha futuro pudieran obstaculizar su conexión con otros conceptos.

2.3 Las conceptualizaciones de pendiente en estudiantes universitarios[3]

Este estudio, al igual que el anterior es de corte exploratorio y continua en la línea de investigación marcada por Stanton y Moore-Russo (2012) sobre estudiar diferentes poblaciones y niveles educativos de otros países y tener un panorama más amplió sobre el conocimiento de pendiente que alcanzan los estudiantes hasta su educación bachillerato.

2.3.1. Objetivo

El objetivo del estudio *fue identificar las conceptualizaciones de la pendiente que evidencian los estudiantes universitarios al discutir y resolver tareas relacionadas con este concepto*.

2.3.2. Método

La investigación es cualitativa y exploratoria. Para la recolección de datos se utilizó una entrevista basada en tareas, en el sentido de Goldin (2000). Para identificar las conceptualizaciones de la pendiente que evidencian estudiantes universitarios se utilizó una Entrevista Basada en Tareas y las once conceptualizaciones de la pendiente descritas en la Tabla 1. Una Entrevista Basada en Tareas puede ser estructurada o semiestructurada y requiere de una interacción mínima entre un sujeto (el que resuelve la tarea) y un entrevistador (el que pregunta), donde el sujeto habla durante, o inmediatamente después, de resolver una tarea (pregunta, problema, actividad) evidenciando así, su conocimiento, su comportamiento y razonamiento en la resolución de la tarea (Koichu y Harel, 2007).

Los participantes fueron 21 estudiantes (doce hombres y nueve mujeres), cuyas edades varían entre diecisiete y dieciocho años. Recientemente, habían culminado sus estudios del Preuniversitario en diversos Subsistemas Educativos ubicados en diferentes regiones del Estado de Guerrero, México. Todos obtuvieron un promedio en matemáticas mayor a 8 y habían tomado los cursos de Geometría Analítica y Cálculo. Todos estaban legalmente inscritos a la Licenciatura en

---

[3] Rivera, M. I., Salgado, G., Dolores, C. (2019). Explorando conceptualizaciones de la pendiente en estudiantes universitarios. *Bolema*. *33*(65), 1027-1046.

Matemáticas y se encontraban tomando un curso propedéutico introductorio en el 2018, el cual tenía una duración de 8 horas diarias durante cuatro semanas.

Las tareas que integraron el protocolo empleado en esta investigación son el resultado del trabajo en conjunto de los investigadores de este estudio. Para su elaboración se consideraron los resultados de diversas investigaciones (Mudaly y Moore-Russo, 2011; Nagle et al., 2013; Stump, 1999, 2001a, 2001b) que han explorado las conceptualizaciones de pendiente en estudiantes y/o profesores. También, se revisaron cinco libros de texto sugeridos en documentos oficiales del Preuniversitario (Salazar, 2010; Cuellar, 2010; Mazón, 1997; Mora y Río, 2009; Contreras et al., 2009). La revisión de los libros se debió a que es uno de los antecedentes académicos inmediatos que han sido pieza fundamental en la formación de los estudiantes que aspiran a realizar sus estudios universitarios. Permitió a los investigadores conocer la demanda cognitiva requerida para trabajar el concepto de la pendiente en ese Nivel Educativo. Esto fue de suma importancia para el diseño de las tareas, dado que los participantes son de recién ingreso a la universidad y en el momento de la recolección de datos, no habían tomado un curso de matemática superior. Esto ayudó que las tareas diseñadas fueran asequibles para los estudiantes.

El protocolo inicial se conformó por trece tareas. Para ganar rigor y confiabilidad en los datos, se validó con diez estudiantes que se encontraban en 12° grado del Preuniversitario. Para la validación también se utilizó la Entrevista Semiestructurada Basada en Tareas, cada entrevista estuvo a cargo de un investigador, misma que fue videograbada para su posterior análisis. En esta fase, el entrevistador planteó la tarea y pidió al estudiante platicar sus ideas y procedimientos empleados durante la resolución. En esta interacción, si el entrevistador detectaba una frase o procedimiento clave para los objetivos del estudio, realizó preguntas auxiliares como: *¿por qué lo hiciste así*?, *¿conoces otra vía de solución*?, *¿a qué te refieres con este término*?, *¿por qué utilizaste esa fórmula*? etc., con la intención de profundizar en los razonamientos empleados.

La validación permitió discriminar y asegurar que las tareas fueran congruentes con el objetivo, así como recoger el nivel de partida requerido para su resolución. De esta manera, se prescindió de dos tareas y el refinamiento en el planteamiento de 8. De modo que, el protocolo final se integró por once tareas que involucran diversas representaciones de la pendiente (ver Anexo B), de las cuales una fue adaptada de Mudaly y Moore-Russo (2011) y dos de Stump (1999).

Los datos fueron recolectados en las instalaciones de la Unidad Académica de Matemáticas adjunta a la Universidad Autónoma de Guerrero, en la ciudad de Chilpancingo de los Bravo, México. Las entrevistas se realizaron en tres cubículos por tres investigadores involucrados en el estudio. Cada entrevista tuvo en promedio una duración de 90 minutos. Fueron videograbadas (con previa autorización de los participantes) con la finalidad de captar: evidencia escrita, movimientos kinestésicos empleados, evidencia verbal etc. La entrevista giró en torno al protocolo proporcionado al estudiante y preguntas auxiliares (*¿por qué lo hiciste así*?, *¿conoces otra vía de solución*?, *¿a qué te refieres con este término*?, *¿por qué utilizaste esa fórmula*?), a fin de conocer a detalle su razonamiento.

Para el análisis de los datos se digitalizaron las producciones escritas y transcribieron las entrevistas en el procesador de texto (Microsoft Word). La Figura 8 muestra el diseño de la tabla que se utilizó para registrar el análisis individual de las producciones de los estudiantes. En ella, se registró con una *X* la conceptualización identificada en cada tarea.

Estudiante ________	Conceptualizaciones											
Tareas (T_n)	A	G	F	R		B	P	PC	T	C	D	L
				R_P	R_F							
T_1												
T_2												
T_3												
⋮												
T_{11}												

Figura 8. Ejemplo de la tabla empleada para el análisis de los datos por estudiante

Para registrar el análisis individual, cada investigador revisó y contrastó la evidencia digitalizada y las transcripciones de las entrevistas, a fin de identificar frases o procedimientos empleados por los estudiantes en cada tarea. De este modo, estableció códigos asociados a la descripción de cada conceptualización de la pendiente señalada en el Tabla 1.

Para determinar las conceptualizaciones de la pendiente que manifiestan los estudiantes, los investigadores se reunieron y en conjunto, compararon y discutieron las codificaciones propuestas por cada uno. En caso de algún desacuerdo, se discutieron las posturas hasta llegar un consenso y decidieron el tipo de conceptualización presente. Esto permitió la confiabilidad de los resultados y garantizó su validez, credibilidad y rigor, eliminando, así, el sesgo de un único investigador.

2.3.3. Resultados

De los análisis y la triangulación realizada por los investigadores, se determinaron los códigos asociados a la descripción de cada conceptualización, los cuales se muestran en la Tabla 4, permitiendo, así, la categorización.

Tabla 4

Códigos asignados a la descripción de cada conceptualización

CONCEPTUALIZACIÓN	DESCRIPCIÓN DE LOS CÓDIGOS
Propiedad Física (P)	P_1: Se asume el valor de la pendiente como el ángulo de inclinación. P_2: La pendiente es descrita empleando términos como: empinamiento, inclinación o grado de inclinación. P_3: Emplea algún brazo o algún objeto (lápiz, regla, cuaderno, etc.) para simular la inclinación.
Razón Algebraica (A)	A_1: Utiliza la fórmula $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ para calcular la pendiente a partir de las coordenadas de dos puntos en el plano. A_2: Cuantifica y utiliza los cambios Δx y Δy para obtener la pendiente. A_3: Calcula diferencias y obtiene la razón de cambio.
Propiedad Determinante (D)	D_1: Rectas paralelas tienen la misma pendiente.

Coeficiente Paramétrico (PC)	PC_1: El valor numérico de la pendiente está dado por el número que acompaña la x en la ecuación $y = mx + b$. PC_2: El valor numérico de la pendiente es el valor de m en $y - y_1 = m(x - x_1)$. PC_3: la pendiente en la ecuación de la forma $ax + by + c = 0$ es $m = -\frac{a}{b}$
Situación Mundo Real-Situación Física (R_P)	R_{P1}: La pendiente es la subida o bajada. R_{P2}: La pendiente es un techo inclinado.
Constante Lineal (L)	L_1: Al trasladar una recta en el plano la pendiente se conserva. L_2: Dada la gráfica de una recta se puede tomar cualquier pareja de puntos y la pendiente será la misma.
Razón Geométrica (G)	G_1: Representa la pendiente de la recta a través de aumento en y cuando x aumenta su valor en 1. G_2: Representa la pendiente de la recta a través de desplazamientos verticales y horizontales.
Indicador de Comportamiento (B)	B_1: Si la pendiente es positiva la recta es creciente y si es negativa entonces es decreciente. B_2: La pendiente es cero si la recta es constante.

En la Tabla 5 se muestran los códigos asociados a las conceptualizaciones evidenciadas por los estudiantes en cada tarea. Los nombres utilizados son pseudónimos que permiten identificar a cada estudiante.

Tabla 5

Códigos asociados a las producciones de los estudiantes por tarea

Estudiante	Tareas										
	T_1	**T_2**	**T_3**	**T_4**	**T_5**	**T_6**	**T_7**	**T_8**	**T_9**	**T_{10}**	**T_{11}**
Emanuel	A_1	P_1	D_1		P_1	P_1, P_3	A_3	B_2		P_1	P_1
Diana	A_1	P_2, P_3		L_2	P_1	P_1	A_3	B_2	PC_1	P_1	P_2
Lorenzo	A_1	P_1			P_1	R_{P1}	A_3			P_1	P_1
Yareli	PC_1, PC_2, PC_3, G_2	D_1	PC_2	PC_1	P_1, P_3		A_3	B_2	PC_1, B_1	P_1	L_1
Miguel	A_1, G_1	D_1	G_1, D_1	PC_1	P_1	P_1, P_3	A_3	B_2	PC_1	P_1	D_1, L_1
Francisco	A_1	P_2, P_3	A_1	PC_1	P_2, P_3	R_{P1}	A_3	P_2	A_1	A_1	A_1
Armando	A_1	P_1			P_1	R_{P1}	A_3			P_1	
Ilse	A_1	P_1			P_1	P_1		B_2			P_1, P_3
Azurym	A_1, PC_1, L_2	D_1	D_1	PC_1	P_1	P_2, P_3		B_2	PC_1	P_1	P_1
Josué						P_2, P_3	A_3				
Alejandra	A_1	D_1	A_1	PC_1	P_1	P_1	A_3	P_1		P_1	P_1

José	A_1		PC_2	A_1	P_1	P_1	A_3	P_2	PC_1	P_1	D_1
Juan	A_2	D_1		PC_1	P_1	R_{P1}	A_3	P_2			P_1
Axel						P_2, P_3	A_3			P_1	P_1
Andrea		P_1			P_1	P_1	A_3			P_1	
Alán	A_1	D_1	A_1	PC_1	P_1, P_2, P_3	R_{P1}	A_3	P_1, P_2		P_1	D_1, L_1
Adelina										P_1	
Elena	P_1	P_1			P_1	P_2, P_3		P_1			P_1
Luis		R_{P2}				R_{P1}	A_3				P_1
Alma	A_1										
Jesús					P_1					P_1	

Para explicitar los elementos utilizados en la determinación de las conceptualizaciones de cada estudiante, tomamos como ejemplo el caso de Miguel, ya que evocó más conceptualizaciones en la resolución de las once tareas.

Miguel evidenció siete conceptualizaciones de la pendiente: *Razón Algebraica, Razón Geométrica, Propiedad Física, Coeficiente Paramétrico, Propiedad Determinante, Constante Lineal e Indicador de Comportamiento.* Para fundamentar esta declaración a continuación se muestra el análisis realizado a sus producciones. Para obtener la pendiente de una recta dada en un plano graduado, Miguel identifica las coordenadas cartesianas de dos puntos por donde pasa la recta y emplea la fórmula algebraica $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(A)$. Su respuesta la representó como desplazamientos verticales y horizontales en la gráfica (G), tal como se observa en la Figura 9.

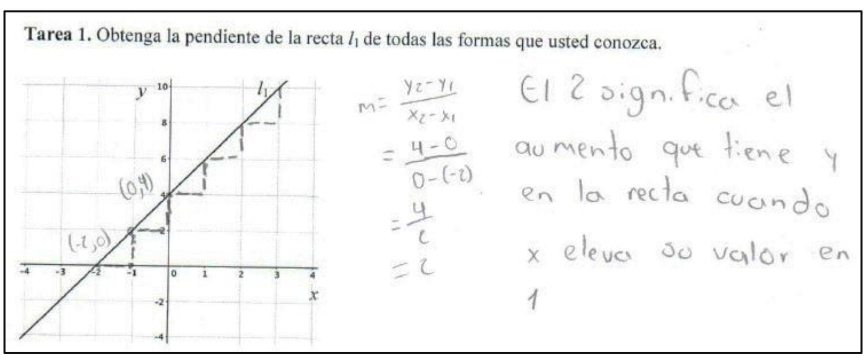


Figura 9. Conceptualización Razón Algebraica y Razón Geométrica en los procedimientos de Miguel

Para la comparación de las pendientes de tres techos situados en una casa, Miguel se apoya del criterio de paralelismo, es decir: *si dos o más rectas son paralelas entonces sus pendientes son iguales* (D). Este criterio también fue utilizado en la resolución de las tareas 3 y 5 para argumentar la posibilidad de que a partir de la gráfica de una recta existen otras que tienen la misma pendiente (D), y argüir que la traslación de una recta en el plano no afecta el valor numérico de su pendiente (L).

Por otra parte, para graficar una recta a partir de un punto dado y su pendiente (positiva), Miguel parte del punto e interpreta y representa la pendiente como aumento en y producido por un aumento en x (G). Para identificar una función lineal a partir de una tabla numérica, construye la expresión algebraica que describe el comportamiento de dichos valores y la compara con la forma de la ecuación de la recta $y = mx + b$ (PC).

Para la comparación y el establecimiento de la relación entre las pendientes de dos rectas dadas en planos no graduados, tarea 5 y 10, Miguel asume al ángulo de inclinación como la pendiente de una recta (P). De manera que si una recta tiene mayor ángulo, entonces su pendiente es mayor (Figura 10) y que al duplicar su ángulo de inclinación entonces su pendiente se duplica. Esta postura persistió incluso cuando interpretó una señalización vial relacionada con la pendiente de un camino, en sus argumentos incorporó movimientos kinestésicos, usando sus brazos para describir una subida (P).

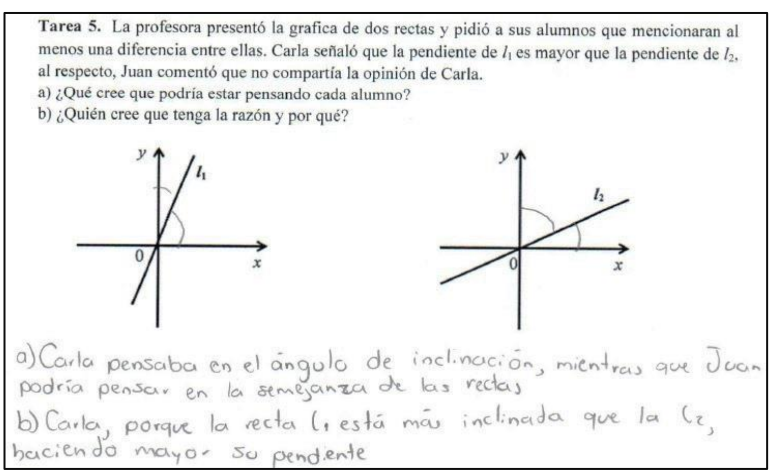


Figura 10. Ejemplo de la Conceptualización Propiedad Física en los procedimientos de Miguel

Al resolver una tarea que involucraba una situación expresada en lenguaje común en la que se requería la identificación y el cálculo de una razón de cambio constante, Miguel realiza cálculo de un cociente de diferencias (A) misma que asocia con una constante, pero no la interpreta como una razón de cambio.

Miguel no evidenció la conceptualización en *Cálculo,* ya que para él la pendiente es una característica propia de la recta y no de una curva (por ej., parábola). Esta idea la manifestó cuando se le presentaron cuatro gráficas (tres rectas y una parábola) y se le pidió que eligiera cuál de ellas podría tener una pendiente de 2. Sus argumentos se centraron en que por la ubicación de las rectas en el plano estas tendrían pendientes positivas, negativas o cero (B). Tal como se muestra en el extracto de la entrevista.

Entrevistador: Para ti, ¿Cuáles de las gráficas podrían tener pendiente dos?
Miguel: Para mí, ninguna.
Entrevistador: ¿Por qué?
Miguel: Uhmm, la primera tiene pendiente negativa y no puede ser dos.
Entrevistador: ¿Cómo sabes que es negativa?
Miguel: Es que se ve que tiene un ángulo de inclinación mayor a noventa grados, esto hace que su pendiente sea negativa, la segunda tiene pendiente positiva su ángulo es menor a noventa grados, pero su pendiente supera a dos, la tercera no puede tener pendiente dos ya que es horizontal y por eso su pendiente es cero.
Entrevistador: ¿Y qué ocurre con la cuarta gráfica?
Miguel: La última no es una recta, que yo sepa la pendiente es para las rectas. No sé si podría sacarle la pendiente a ésta [señala con su lápiz la gráfica de la parábola]

De las producciones de Miguel se destacó que, al confrontarse con la gráfica de una recta, describe su pendiente en términos del ángulo de inclinación, mientras que cuando la información dada es la ecuación de la recta (Tarea 11), asocia la pendiente directamente con el número que acompaña la x en $y = mx + b$. Finalmente, las conceptualizaciones que no evidenció fueron: T*rigonométrica, Propiedad Funcional, Situación Mundo Real* y la de *Cálculo*.

De manera general, se encontró que los estudiantes evidenciaron de una a ocho conceptualizaciones entre las cuales se identificaron: *Propiedad Física, Razón Algebraica, Propiedad Determinante, Constante Lineal, Coeficiente Paramétrico, Razón*

Geométrica, Indicador de Comportamiento y Situación Mundo Real- Situación Física. En la Tabla 6 se muestra cuántas y cuáles conceptualizaciones se identificaron en cada estudiante. En esta aparece una X_n, donde n representa el número de tareas donde fue identificada la conceptualización.

Tabla 6

Conceptualizaciones de pendiente en estudiantes universitarios

Estudiante	**Conceptualizaciones**												**Núm. de conceptualizaciones**
	A	*G*	*F*	*R*		*B*	*P*	*PC*	*T*	*C*	*D*	*L*	
				R_P	*R_F*								
Emanuel	X_2					X_1	X_5				X_1		4
Diana	X_2					X_1	X_5	X_1				X_2	5
Lorenzo	X_2			X_1			X_4						3
Yareli	X_1	X_1				X_2	X_2	X_3			X_1	X_1	7
Miguel	X_2	X_2				X_1	X_3	X_2			X_3	X_1	7
Francisco	X_6			X_1			X_3	X_1					4
Armando	X_2			X_1			X_3						3
Ilse	X_1					X_1	X_4						3
Azurym	X_1					X_1	X_4	X_3			X_2	X_1	6
Josué	X_1						X_1						2
Alejandra	X_3						X_5	X_1			X_1		4
José	X_3						X_4	X_2			X_1		4
Juan	X_2			X_1			X_3	X_1			X_1		5
Axel	X_1						X_3						2
Andrea	X_1						X_4						2
Alán	X_2			X_1			X_3	X_1			X_2	X_1	6
Adelina							X_1						1
Elena							X_6						1
Luis	X_1			X_2			X_1						3
Alma	X_1												1
Jesús							X_2						1

2.3.4. Discusión y Conclusiones

Nuestros resultados describen que los estudiantes tienen un conocimiento limitado sobre las diversas representaciones de la pendiente, ya que aproximadamente el 52% evidenciaron entre una y tres conceptualizaciones, de las cuales la *Propiedad Física* y la *Razón Algebraica* fueron las que más emplearon en la resolución de las tareas. Sólo el 9.5% evidenciaron siete conceptualizaciones. Las conceptualizaciones *Propiedad Funcional, Trigonométrica, Cálculo* y *Situación mundo real* en su categoría de situaciones funcionales estuvieron ausentes en las producciones de todos los estudiantes.

El 95% de los estudiantes utilizaron la pendiente como el ángulo de la inclinación de una recta. Cuando se involucraron en una tarea que requería de interpretar la subida de un camino en términos de su pendiente, a través de una señalización vial, utilizaron frases como empinamiento e inclinación como equivalentes a la pendiente, algunos realizaron movimientos kinestésicos, empleando sus brazos u objetos (lápiz, regla, cuaderno etc.).

Estos resultados son comprensibles, ya que según Cheng y Sabinin (2008) las personas comienzan a aprender acerca de la pendiente a través de la inclinación de objetos en la vida cotidiana, como: rampas, escaleras, resbaladillas, calles, cerros, techos de casas etc. De este modo, los estudiantes pueden visualizar el concepto matemático de pendiente sin depender de ninguna habilidad matemática, como usar una razón o calcular un límite (Deniz y Kabael, 2017a, 2017b; Nagle y Moore-Russo, 2013b). Sin embargo, el que los estudiantes interpreten la pendiente como el ángulo no debe considerarse una idea errónea (Rasslan y Vinner, 1995), ya que este es un aspecto importante de la pendiente y de acuerdo con Zaslavsky et al. (2000) enseñar a los estudiantes a ignorarlo o tratarlo como irrelevante no contribuye a la comprensión del concepto.

El reconocimiento de la pendiente como *Coeficiente Paramétrico* se produjo en el 43% de los estudiantes al identificarla como m en la ecuación de la recta $y = mx + b$ la cual referenciaron como: el número que acompaña a la x en la ecuación, el coeficiente de x, la constante que acompaña a la x. Incluso, algunos hicieron referencia a su valor numérico como m en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ y una minoría como $m = -\frac{a}{b}$ en la ecuación de la forma $ax + by + c = 0$. El 90% de los estudiantes desconocían la interpretación geométrica del concepto, evidenciando una comprensión limitada del concepto de pendiente y su vínculo con una función lineal, resultado parecido a lo que reporta Birgin (2012).

Asimismo, la desconexión entre la pendiente y razón de cambio fue evidente en este grupo de estudiantes, ya que ninguno manifestó la *conceptualización en Cálculo*. Este resultado puede ser producto de su instrucción, probablemente porque sus profesores no propician este vínculo o los miran como conceptos aislados. Stump (1999) y Nagle et al. (2013) muestran resultados en profesores estadounidenses que respaldan nuestra hipótesis.

Asimismo, Dolores-Flores et al. (2018) en estudiantes de Bachillerato y, Teuscher y Reys (2012) en estudiantes de Cálculo Avanzado, encuentran la misma desconexión. Esto implicó que los estudiantes al confrontarse con una tarea que requería de reconocer si una parábola podía tener una pendiente de 2, la totalidad de los estudiantes manifestaron que la pendiente solo se podía calcular en rectas.

Los participantes previamente habían sido instruidos en los cursos de Geometría Analítica y Trigonometría en el Preuniversitario, nivel académico en el cual los Programas de Estudio sugieren como punto de partida el tratamiento de la pendiente de una recta como la tangente de su ángulo de inclinación. Sin embargo, nuestros resultados evidenciaron que ninguno evocó la conceptualización *Trigonométrica* en sus procedimientos y argumentos. Esto nos hace suponer que en su instrucción existe una desconexión entre la definición de la pendiente como la tangente trigonométrica de su ángulo de inclinación y el cociente $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Este resultado en particular es similar a lo encontrado por Stump (2009) y Nagle y Moore-Russo (2013a) con profesores.

Si bien, los criterios de paralelismo y perpendicularidad son un tema sugerido en los Programas de Estudio de Bachillerato (SEP, 2013a), se esperaba que una porción significativa de estudiantes manifestara su reconocimiento y dominio al resolver algunas tareas que lo requerían. Sin embargo, solo el 38% lo empleó exclusivamente para el caso de las rectas paralelas en un contexto gráfico. Ninguno de los estudiantes referenció el criterio para el caso de las rectas perpendiculares.

Nuestro estudio no solo reveló las conceptualizaciones de la pendiente ya reportadas, los procedimientos y argumentos de casi el 38% de los estudiantes evidenciaron que la pendiente es conceptualizada como la magnitud de una recta, techo o calle. Este hallazgo es similar a lo encontrado en profesores de matemáticas por Byerley y Thompson (2017). Por otro lado, aproximadamente el 48% consideraron que la pendiente de una recta es la intersección de esta con algún eje coordenado (x o y), resultado que Birgin (2012) encontró con estudiantes turcos de octavo grado. También, se encontró que alrededor del 10% de los estudiantes consideran que la pendiente de una recta es la recta misma (el objeto).

En conclusión, podemos decir que el estudio ha revelado un escaso conocimiento de las diversas representaciones de la pendiente por parte de los estudiantes, tal como también lo ha identificado Asiala et al. (1997), Borji, Alamolhodaei y Radmehr (2018) y, Borji, Font, Alamolhodaei y Sánchez (2018). Se percibió una desconexión entre los aspectos geométricos y variacionales de la pendiente, parece ser que su aprendizaje e instrucción se ha centrado en lo procedimental relegando a un segundo plano lo conceptual.

Por otra parte, el estudio también identificó una serie de errores y malentendidos sobre ecuaciones de función lineal, funciones crecientes, decrecientes, rectas paralelas y perpendiculares, gráficos y el concepto de pendiente. Algunos confundieron los aspectos algebraicos y geométricos de la pendiente y más aún desconocen los variacionales.

Este estudio proporcionó una visión crítica de las conceptualizaciones de la pendiente de los estudiantes universitarios mexicanos. Sin embargo, reconocemos que como en cualquier estudio hay limitaciones. Esta investigación está limitada por el tamaño de la muestra, en general, solo 21 estudiantes participaron en este estudio cualitativo, ya que un tamaño de muestra más grande habría permitido una recolección más robusta de datos y podríamos haber introducido aspectos cuantitativos. Recomendamos realizar estudios similares en otros estados de la república mexicana, que involucren estudiantes y profesores de otros niveles educativos, la instrucción del profesor y los libros de texto, ya que es escasa la investigación en México sobre esta línea y, así, equiparar los resultados con lo reportado en otros países. De este modo, podríamos conocer la correlación que existe entre estos elementos que conforman el proceso de enseñanza-aprendizaje de la pendiente y, por tanto, aportar elementos para mejorar su entendimiento.

2.4 Conceptualizaciones de Pendiente que se promueven en la currícula mexicana[4]

Los planes y programas de estudio de matemáticas de la educación básica del 2011 y la educación media superior del 2013, tienen como enfoque común el desarrollo de competencias. Mediante este enfoque se buscaba el carácter funcional del conocimiento matemático y la posibilidad de aplicarlo de forma variada, reflexiva y perspicaz a una multiplicidad de situaciones de los más diversos tipos, es decir, se buscaba que el conocimiento matemático que se construye en el aula fuera aplicable en situaciones de la vida cotidiana (Rivera, García y Cabañas, 2012). La importancia de analizarlos radica en que sobre la base de estos se diseñan los textos e instrumentos de evaluación, a través de los cuales se difunde, enseña y aprenden los conceptos. Dado que son de uso obligatorio para el profesor y él como representante institucional, lo interpreta y lo pone en funcionamiento (Cabañas-Sánchez, 2011; Hume y Coll, 2010; Kahle, 2007), son factores influyentes para el aprendizaje y comprensión matemática por parte de los estudiantes.

El estudio de las conceptualizaciones de pendiente en la currícula estadounidense se ha realizado por Stanton y Moore-Russo (2012) y Nagle y Moore-Russo (2014). En México, Páez (2015) da un análisis de la pendiente en la currícula mexicana del 2006 del nivel secundaria, destacando la interpretación geométrica de esta, así como del concepto de razón de cambio. Sin embargo, hace falta un análisis del resto de sus representaciones y cómo se da el desarrollo de este concepto desde la escuela de educación básica hasta la educación del nivel medio superior. Otra razón que nos orilló a realizar el análisis fue, conocer hasta que nivel cognitivo se propone el trabajo con el concepto de pendiente y así poder diseñar las tareas que permitirían conocer las preconcepciones de los estudiantes.

[4] Estudio proveniente Rivera, M. I y Dolores, C. (2017). Concepciones de la pendiente en el currículum oficial de la educación básica. En Memoria electrónica del XIV Congreso Nacional de Investigación Educativa. Recuperado de http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v14/doc/2566.pdf
Complementado en Dolores, C., Rivera, M.I., y Moore-Russo, D. (en prensa). "Conceptualizations of slope in the intended Mexican curriculum". School Science and Mathematics.

2.4.1 Objetivo

Respecto al análisis de los planes y programas de estudio de matemáticas de la educación básica, nos planteamos como objetivo: *Explorar las conceptualizaciones de pendiente que se promueven es estos*, así como *identificar cuáles se promueven más en la educación primaria, secundaria y bachillerato, y por tanto de manera general (del 1° al 12° grado)*. Para el logro de este primer objetivo, es decir, para analizar el plan y programas de estudio de matemáticas para los grados 1° al 12°, utilizamos las once conceptualizaciones de pendiente descritas anteriormente en la Tabla 1 y el método de Análisis de contenido.

2.4.2 Marco referencial y Método

En la currícula, los grados de 1° al 6° corresponden a la escuela primaria, los grados 7° al 9° corresponden a la escuela secundaria, y los grados 10° a 12° corresponden a la escuela de nivel bachillerato o escuela nivel medio superior en México. Todos los materiales curriculares se obtuvieron de los sitios web de la Secretaría de Educación Pública (SEP).

Los programas de estudio, para los grados 1 al 9 se desglosan en ejes, temas y contenidos. Los ejes se refieren a la dirección o curso de una acción de aprendizaje, estos son: (a) Sentido numérico y pensamiento algebraico; (b) Forma, espacio y medida; y (c) Análisis de la información. El primero, centra en el estudio de la aritmética y el álgebra, el segundo en el estudio de la geometría y la medición, y el tercero trata el análisis general de la información cuantitativa y su uso en la toma de decisiones (SEP, 2011b). Los temas son las ideas matemáticas principales que se encuentran en los ejes, estos son: (a) Patrones y ecuaciones, (b) Proporcionalidad y funciones, (c) Medición, (d) Figuras y cuerpos geométricos, y (e) Análisis y representación de datos. La información más detallada sobre un tema en un grado específico se proporciona a través de descripciones más específicas, llamadas contenidos. Por ejemplo, un contenido relacionado con el concepto de pendiente en el plan de estudios es "Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente” (SEP 2011c, p.50).

Los programas de estudio de matemáticas para los grados 10 a 12 tienen una estructura ligeramente diferente a la de los grados anteriores. Cada grado de bachillerato o nivel medio superior se divide en dos semestres. La organización curricular se estructura primero en materias y luego en bloques, en cada uno se describen desempeños que se lograrán junto con sus objetos de aprendizaje, competencias a desarrollar, actividades de enseñanza y aprendizaje, y herramientas de evaluación. En el grado 10, los estudiantes primero cursan Matemáticas I con objetos de aprendizaje que corresponden al álgebra básica. Luego estudian Matemáticas II, con objetos de aprendizaje que corresponden a geometría euclidiana, trigonometría y algunos temas básicos de probabilidad y estadística. En el grado 11, cursan Matemáticas III con objetos de aprendizaje que corresponden a geometría analítica, y luego Matemáticas IV, correspondiente al precálculo. En el grado 12, tienen la opción de cursar Matemáticas V (Cálculo diferencial) y luego Matemáticas VI (Cálculo integral).

Para realizar el Análisis de Contenido, sugerido por Bardin (2002), se debe tener un objeto de estudio, que en este caso fueron los respectivos programas de estudio de matemáticas de cada grado escolar. Las unidades de análisis fueron las frases o las palabras clave de: 1) los temas y contenidos en los programas de estudio correspondientes a los grados 1 a 9 y 2) los bloques en los materiales curriculares de los grados 10 a 12 (es decir, desempeños, objetos de aprendizaje, competencias para desarrollar, actividades de enseñanza, actividades de aprendizaje y herramientas de evaluación) que refieran a alguna de las conceptualizaciones de pendiente.

Dado que en los programas de estudio no se detalla mucho sobre los contenidos a desarrollar, optamos por identificar las *menciones explícitas de pendiente* así como aquellas en las que se dan de *manera implícita*. Ambas menciones pueden ayudar a los estudiantes a formar nociones de lo que significa este concepto, cómo está representado y los procedimientos típicamente asociados con él. Por ello, cuando se mencionó pendiente o alguna expresión sinónima (por ejemplo, fórmula de pendiente, razón de cambio de una función lineal), se documentó como una mención explícita de la conceptualización correspondiente. Cuando el equipo de investigación consideró que una de las conceptualizaciones identificadas de pendiente estaba presente pero no había una mención específica de pendiente o alguna expresión sinónima, entonces se documentó como una mención implícita (por ejemplo, proporciones, proporcionalidad constante, funciones lineales).

Para registrar el análisis, se elaboró una tabla para cada nivel educativo desde el grado 1° al 12°. La primera columna enumera los contenidos (para los grados 1 a 9) o los desempeños (para los grados 10 a 12) en los que se divide el plan de estudios. En las columnas restantes se utilizan los códigos utilizadas para denotar las conceptualizaciones de pendiente identificadas por grado. Se utilizó el método de revisión por pares para determinar los tipos de conceptualizaciones de pendiente promovidas en el plan de estudios. Los investigadores revisaron cada programa de estudio y clasificaron las conceptualizaciones existentes de pendiente de forma independiente. El objetivo de la revisión fue identificar todas las referencias a la pendiente y luego buscar frases o palabras clave que permitan la codificación de los contenidos utilizando los códigos asociados en la Tabla 1. Finalmente, se compararon y discutieron las asignaciones de codificación propuestas. En caso de desacuerdo, los investigadores discutieron el extracto hasta que se logró un consenso sobre el tipo de conceptualización representada. El número de referencias en los programas de estudio de matemáticas para cada grado determinó la frecuencia de las conceptualizaciones de pendiente. Al final, la frecuencia se obtuvo para cada nivel educativo.

Se tuvo a consideración que las conceptualizaciones que pudieran emerger en un contenido no son únicas. Por ejemplo, uno está declarado de la siguiente manera: "Representación algebraica y análisis de una relación de proporcionalidad $y = kx$, asociando los significados de las variables con las cantidades que intervienen en dicha relación (SEP, 2011b, p.41)". En este podemos identificar que el término pendiente o razón de cambio no está de manera explícita, por lo que las conceptualizaciones identificadas están asociadas a una mención implícita. De este modo, las frases o palabras claves identificadas "representación algebraica de una relación de proporcionalidad $y = kx$" y "análisis de una relación de proporcionalidad $y = kx$ en el que se asocia el significado de las variables que intervienen en dicha relación". En la primera frase se tiene que la representación algebraica $y = kx$ conlleva a la identificación de k como el coeficiente paramétrico en esa expresión lineal, que es codificado por CP. Mientras que en lo que refiere al análisis de k en esa relación es regularmente presentada como constante de proporcionalidad, lo cual de acuerdo con la Tabla 1, se corresponde a la conceptualización propiedad funcional (F).

2.4.3 Resultados

El término "pendiente" no se utilizó explícitamente antes del grado 9. Sin embargo, hubo temas que abordaron implícitamente las conceptualizaciones de pendiente.

En los grados 2, 4, 5 al 8 hubo menciones implícitas de algunas conceptualizaciones de pendiente. Para los grados 1 y 3, no hubo menciones que refirieran a razón, tasa, proporción, u otras ideas relacionadas con el concepto de pendiente. El tema de “problemas multiplicativos” fue relacionado con la pendiente en los grados 2 y 4, mientras que para los grados 5 a 8, fue el de “proporcionalidad de funciones”. La conceptualización *propiedad funcional* fue la más común en estos grados, como se muestra en la Tabla 7. Esta conceptualización se asoció a partir de las frases "factor de proporcionalidad" o "relación proporcional", el cual se refiere al factor en la relación en los grados 2 y 4, o identificar el factor como una generalización en el análisis de tablas que describen un par de secuencias numéricas en el grado 5. Para el grado 6, la frase "proporciones del tipo para cada n, m", que contribuye implícitamente a la interpretación de una razón de cambio. Las frases "constante de proporcionalidad" y "el efecto de la aplicación sucesiva de la constante de proporcionalidad" permitieron codificarlo como *propiedad funcional* y *constante lineal* en el grado 7, como se sugiere en la Tabla 1.

En el grado 8 se introduce la notación algebraica $y = kx$ para analizar la relación proporcional que se estudió numéricamente en el grado 5 y establecer una conexión con sus gráficas trabajadas en el grado 7. Los contenidos en el grado 8 proporcionan evidencia de seis conceptualizaciones identificadas en seis contenidos específicos, que incluyen: *razón geométrica*, *propiedad funcional*, *coeficiente paramétrico*, *situación mundo real*, *indicador de comportamiento* y *constante lineal*, tal como se muestra en los extractos en la Tabla 7.

Table 7

Conceptualizaciones de pendiente identificadas en el 2°, 4° hasta 9° grado (SEP, 2011a, 2011b, 2011c, 2011d, 2011e)

G	M	Contenido	Código
2		1. Resolución de distintos tipos de problemas de multiplicación (relación proporcional entre medidas, arreglos rectangulares).	F
4		1. Exploración de distintos significados de la multiplicación (relación proporcional entre medidas, producto de medidas, combinatoria) y desarrollo de procedimientos para el cálculo mental o escrito.	F
5		1. Identificación y aplicación del factor constante de proporcionalidad (con números naturales) en casos sencillos.	F
6		1. Comparación de razones del tipo "por cada n, m", mediante diversos procedimientos y, en casos sencillos, expresión del valor de la razón mediante un número de veces, una fracción o un porcentaje.	F
7	Implícita	1. Formulación de explicaciones sobre el efecto de la aplicación sucesiva de factores constantes de proporcionalidad en situaciones dadas.	F, L
8	Implícita	1. Representación algebraica y análisis de una relación de proporcionalidad $y = kx$, asociando los significados de las variables con las cantidades que intervienen en dicha relación.	F, PC
		2. Análisis de las características de una gráfica que represente una relación de proporcionalidad en el plano cartesiano.	L
		3. Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal entre dos conjuntos de cantidades.	F, R
		4. Representación de la variación mediante una tabla o una expresión algebraica de la forma: $y = ax + b$.	F, PC
		5. Lectura y construcción de gráficas de funciones lineales asociadas a diversos fenómenos.	G, F
		6. Análisis de los efectos al cambiar los parámetros de la función $y = mx + b$, en la gráfica correspondiente.	PC, B, L
9	Explícita	1. Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa.	A, P, F, PC, R
		2. Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente.	A, T
	Implícita	3. Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las situaciones que corresponden a una relación de proporcionalidad.	F, PC, L
		4. Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etc.	F, R, B
		5. Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.	T

	6. Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.	R, L

Nota: G denota Grado. M denota Mención para indicar si ésta es explícita o implícita.

La conceptualización *propiedad funcional* y *coeficiente paramétrico* fueron las más destacadas en el grado 8. La primera, se codificó cuando el contenido involucró el análisis de la relación proporcional entre las variables, ya sea en una tabla o en gráficos, ya que para este grado se propone que el estudiante logre asociar los significados de las variables que se ponen en juego en esta relación, específicamente para funciones lineales. Mientras que la segunda, en los contenidos que tratan la relación algebraica $y = kx$, k representan la constante de proporcionalidad, las expresiones algebraicas $y = ax + b$ e $y = mx + b$, donde a y m representan la pendiente y gráficamente son los parámetros que garantizan que la relación da lugar a una línea recta en el plano cartesiano.

La conceptualización *constante lineal* garantiza una de las características principales de una gráfica que representa la relación proporcional en un plano cartesiano (Nagle y Moore-Russo, 2013b). El contenido asociado con el análisis de los efectos que conllevan el cambio de los parámetros en una función lineal, por ejemplo, el efecto cuando m es positivo o negativo, puede aprovecharse para promover la conceptualización de pendiente como *indicador de comportamiento*. La conceptualización *razón geométrica* se codificó para el contenido asociado con la construcción de gráficos de funciones lineales, para el caso pendiente-ordenada al origen. La conceptualización *situación de mundo real* se codificó por las frases "situaciones problemáticas" o "fenómenos en diferentes contextos", ya que el objetivo principal fue identificar e interpretarlas, para ello, las variables y unidades de medida requieren más atención.

El término "pendiente" se menciona explícitamente en el grado 9 por primera vez (Contenido 1 y 2, ver Tabla 7). Se introduce como sinónimo de "inclinación" y se asocia con el cálculo y el análisis de la razón de cambio (mencionado explícitamente por primera vez también) de un proceso o fenómeno modelado por una función lineal, lo que llevó a codificar algunas conceptualizaciones de pendiente. Para el cálculo numérico de la pendiente se utiliza la fórmula algebraica de la pendiente, lo cual se codifica como conceptualización *razón algebraica*; asimismo, el contenido que trata sobre el valor del cociente formado por la longitud del cateto opuesto y el cateto adyacente de un triángulo rectángulo, ya que se enfatiza la determinación del valor de este cociente. En la relación del valor numérico de la pendiente y el ángulo de inclinación, se proporciona evidencia de la *conceptualización trigonométrica*. El modelo de una función lineal (estudiado anteriormente) alude a la conceptualización de *coeficiente paramétrico* y la relación entre la pendiente y la inclinación dirige hacia la conceptualización *propiedad física*.

Por otro lado, la mención implícita de pendiente en este grado sugiere otras conceptualizaciones, que incluyen la *constante lineal* al analizar una representación gráfica e identificar si se trata de una relación proporcional (contenido 3) y como *indicador de comportamiento* (contenido 4) al dar lectura a las gráficas que representan situaciones de movimiento o el llenado de recipientes, ya que esto implica describir el comportamiento de la gráfica. El análisis de la razón de cambio de un fenómeno sugiere codificarlo como *propiedad funcional* y las referencias: "análisis de la razón de cambio de un fenómeno" (Contenido 1), "situaciones de movimiento y llenado de recipientes" (Contenido 4) y, "análisis de situaciones problemáticas con fenómenos lineales en física, biología, economía "(Contenido 6), orilló al equipo de investigación a asignar el código de *situación del mundo real*, porque en estos contenidos hay una situación funcional dinámica, lo cual requiere de mayor atención a las variables y a las unidades de medidas que se ponen en juego.

Las conceptualizaciones de pendiente asociadas en el grado 10 se encuentran en los Bloques II y VI de Matemáticas I y en los Bloques III y VI de Matemáticas II. En este grado no hubo referencia explícita a la pendiente o razón de cambio; sin embargo, algunos desempeños estuvieron relacionados con la pendiente y sus conceptualizaciones, tal como se muestra en la Tabla 8.

Las conceptualizaciones más notables fueron *propiedad funcional*, *coeficiente paramétrico* e *indicador de comportamiento* (ver Tabla 8). *Propiedad funcional* se identificó en los desempeños que hicieron referencia a "funciones lineales", "modelos de variación proporcional" y "el uso de tablas como técnica para graficar una función lineal" (BII-P1; BVI-P1 y P3). Las referencias a la expresión $y=mx+b$

(BVI-P2) o al requisito de expresiones algebraicas para modelar situaciones que involucran variaciones lineales o funciones (BVI-P4 y P7), se codificaron como *coeficiente paramétrico*. Esto se debió a que en las representaciones algebraicas se usa el parámetro m o su valor numérico correspondiente. Además, para emplear la técnica de punto-ordenada a origen para graficar una función lineal (BVI-P3) se debe considerar el cómo es la pendiente, es decir, si es positiva, negativa o cero, del mismo modo para describir el comportamiento de una función (BVI-P6 y P7) y así determinar si es creciente, decreciente o constante, este último también codificado como *indicador de comportamiento*. La frase "describir el comportamiento de una gráfica de funciones lineales" permitió codificar la conceptualización *constante lineal* la cual garantiza la propiedad de rectitud de la línea.

En Matemáticas I, para que los estudiantes logren los desempeños 4 y 5 (que se muestran en la Tabla 8), se propone como actividad de aprendizaje: resolver problemas de su entorno y/u otras áreas que puedan representarse mediante una ecuación lineal con una variable, relativos al movimiento rectilíneo uniforme en formas conocidas por los estudiantes o cálculos de interés simple relacionados con su vida diaria (SEP, 2013a). Esta actividad deja en claro el uso de ecuaciones lineales en otras áreas o en el entorno mismo, por lo que se codificaron como *situación del mundo real.* En Matemáticas II, el estudio de la semejanza de triángulos (BIII-P1) contribuye a la conceptualización *constante lineal* y *razón geométrica*, ya que la validación de la razón constante permite reconocer la constancia de la razón del aumento (o disminución) sobre el avance como sugiere Nagle y Moore-Russo (2013a). Por otro lado, la *conceptualización trigonométrica* está asociada al contenido 1 (BVI-P1) que involucra las razones trigonométricas, en particular la tangente trigonométrica, ya que refiere al cociente de las longitudes de los catetos.

En el grado 11, el concepto de pendiente se menciona explícitamente en Matemáticas III como un elemento básico de la recta en el Bloque III y se usa en el Bloque IV para estudiar las diversas formas de la ecuación de la recta. En Matemáticas IV se estudian las funciones algebraicas y trascendentales, la pendiente no se menciona explícitamente. Sin embargo, existen relaciones con algunas conceptualizaciones de pendiente en el Bloque III, tal como se muestra en la Tabla 8.

Table 8.

Conceptualizaciones de pendiente identificadas en el 10° hasta 12° grado (SEP, 2013a, 2013b, 2013c, 2013d, 2013e, 2013f)

G	C	B	M	Desempeño	Código
10	Mat. I	II	Implícita	1. Utiliza razones, tasas, proporciones y variaciones, modelos de variación proporcional directa.	F
		VI		1. Identifica lo que es una ecuación lineal en una variable y una función lineal, así como la relación entre ellas.	F
				2. Reconoce a $y = mx + b$ como una ecuación de dos variables como la forma de una función lineal.	PC
				3. Aplica diversas técnicas para graficar una función lineal.	G, F, B
				4. Modela situaciones con una ecuación lineal y/o función lineal.	PC, R
				5. Redacta y resuelve problemas relativos a situaciones que requieran el uso de ecuaciones lineales en una variable y/o funciones lineales..	PC, R
				6. Describe el comportamiento de la gráfica de una función lineal.	B
				7. Describe el comportamiento de las variables y/o resultados al solucionar problemas de ecuaciones y/o funciones lineales; tanto algebraica como gráfica.	PC, B, L
	Mat. II	III		1. Argumenta la aplicación de los criterios de semejanza.	G, L
		IV		1. Aplica las razones trigonométricas en ejercicios teóricos-prácticos.	T
11	Mat. III	III	Explícita	1. Identifica la relación entre el ángulo de inclinación y la pendiente de una recta.	A, T
		IV		1. Usa diferentes formas de la ecuación de la recta: pendiente-ordenada al origen, punto-pendiente y dados dos puntos.	A, PC, D
		III	Implícita	2. Aplica los elementos de una recta como lugar geométrica en la solución de problemas y/o ejercicios (por ej. relación entre paralelismo y perpendicularidad).	R, D
	Mat. IV	II		1. Resuelve problemas que involucren funciones inversas, escalonadas, valor absoluto, idéntica y constante.	B, L
		III		1. Determina si la situación corresponde a un modelo de grados cero, uno y dos, empleando criterios de comportamiento de datos en tablas, descripción de enunciados, tipos de gráficas y regularidades particulares observadas.	F, R, B, L
				2. Emplea los modelos lineales y cuadráticos para describir situaciones teóricas o prácticas que implican o no, razones de crecimiento o decrecimiento constante que se asocien con el modelo.	PC, R, B
12	Mat. V	III	Explícita	1. Compara los diferentes procesos algebraicos que determinan una razón de cambio, mediante el análisis de casos relacionados con la producción agrícola, velocidad instantánea y producción industrial existentes en el entorno cotidiano.	A, C, R

		2. Analiza y resuelve problemas matemáticos que modelan razones de cambio para cuantificar el cambio físico, biológico, económico, entre otros, después de transcurrido un tiempo.	C, R
Mat. VI	I	1. Estimación del error en el cálculo de la pendiente de una recta tangente a la curva.	A, C

Nota: G denota Grado. M denota Mención para indicar si ésta es explícita o implícita.

En Matemáticas III, bloque III, el desempeño 1 sugiere la definición de pendiente como la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación; por lo tanto, la *conceptualización trigonométrica* está presente. La conceptualización *razón algebraica* se identifica cuando se trabaja con el cociente de diferencias $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Según las frases clave utilizadas para codificar las conceptualizaciones de pendiente, la conceptualización *propiedad determinante* también se encuentra en este bloque porque en las actividades de enseñanza y las actividades de aprendizaje sugieren resolver problemas que involucran paralelismo y perpendicularidad (BIII, P2).

En el Bloque IV, la conceptualización *coeficiente paramétrico* y *razón algebraica* se identificaron en el desempeño 1 que refiere al trabajo con diferentes formas de ecuaciones lineales dadas ciertas condiciones. Por ejemplo, pendiente-ordenada al origen ($y = mx + b$), donde m se reconoce como el *coeficiente paramétrico*. Si no se da m, entonces se usa la razón algebraica $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. La forma punto-pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$ o dados dos puntos $y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1)$ son otra forma de obtener la ecuación de la recta, por lo que el uso de m y $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ permitió esta codificación.

En Matemáticas IV, la conceptualización de pendiente *indicador de comportamiento* y *situación del mundo real* están vinculadas con explicaciones del aumento y la disminución en situaciones que deben ser modeladas y representadas por funciones lineales (BIII-P1 y P2). La conceptualización *propiedad funcional* se codifica al prestar atención al comportamiento de los datos dados en tablas y graficas que representen situaciones correspondientes a un modelo lineal (BIII-P1). Si la decisión depende en elegir entre gráficas lineales y otras, entonces la conceptualización *constante lineal* está implícitamente presente. Teniendo en cuenta que los modelos representan situaciones prácticas y éstas pueden estar asociadas a un conjunto de pares ordenados si se dan en tablas o gráficas, entonces al interpretar los resultados se puede emplear la razón de cambio, por lo que la conceptualización *razón algebraica* está implícita. Para las situaciones, también se puede identificar que la razón de cambio es negativa (para funciones decrecientes); positiva (para funciones crecientes) o cero (para funciones constantes). Para el uso de modelos lineales es necesaria una expresión algebraica, por lo que el desempeño 2 en el bloque III se codifica como *coeficiente paramétrico*.

El grado 12 está destinado a enseñar cálculo diferencial y cálculo integral. En cálculo diferencial se identificaron las conceptualizaciones: *razón algebraica*, *conceptualización en cálculo* y *situación del mundo real*. No fue sorprendente que la *conceptualización en cálculo* fuera la más común y se identificó por las frases clave: "razón de cambio instantánea o promedio" y "pendiente de la línea secante o tangente". Algunas conceptualizaciones no se abordaron explícitamente en los desempeños sino más bien en los objetos de aprendizaje, actividades de enseñanza o actividades de aprendizaje asociadas. Por ejemplo, una actividad de aprendizaje sugirió "Proponer situaciones en los ámbitos administrativo, económico, natural y social para aplicar el concepto de razón de cambio promedio y razón de cambio instantánea" (SEP, 2013e, p. 25). La conceptualización *razón algebraica* se infiere del cálculo de la razón de cambio promedio porque se necesita la fórmula $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. La conceptualización *situación del mundo real* se identifica cuando el desempeño refiere a la interpretación de la razón de cambio en diferentes contextos, como biología, física, economía, etc.

En el cálculo integral, el bloque I describe el desempeño 1 "Calcula e interpreta aproximaciones de la derivada de modelos matemáticos relacionados con diferentes disciplinas, desde su representación gráfica y la determinación de su diferencial" (SEP, 2013f, p.14). Para su codificación como conceptualización en cálculo, el equipo de investigación se apoyó de la actividad de enseñanza que refiere a la "estimación del error en el cálculo de la pendiente de una línea tangente a una curva" (SEP, 2013f, p.16).

2.4.4 Discusión

El análisis de los programas de estudio de matemáticas desde el 1° al 12° grado, permitió identificar las conceptualizaciones que se enfatizan y cuando ocurren. Asimismo, deja ver una vista longitudinal de la enseñanza del concepto de pendiente (ver Figura 11), en la cual se identifica que, se desarrolla en tres etapas con cierta discontinuidad entre la segunda y la tercera etapa. La primera etapa ocurre en los grados 2, 4, 5, 6 y 7. Esto corresponder a los precedentes de pendiente y se centra en la idea de factor constante de proporcionalidad (es decir, constante lineal) que luego se vincula con la conceptualización *propiedad funcional* implícitamente y una introducción del lenguaje algebraico en el grado 8.

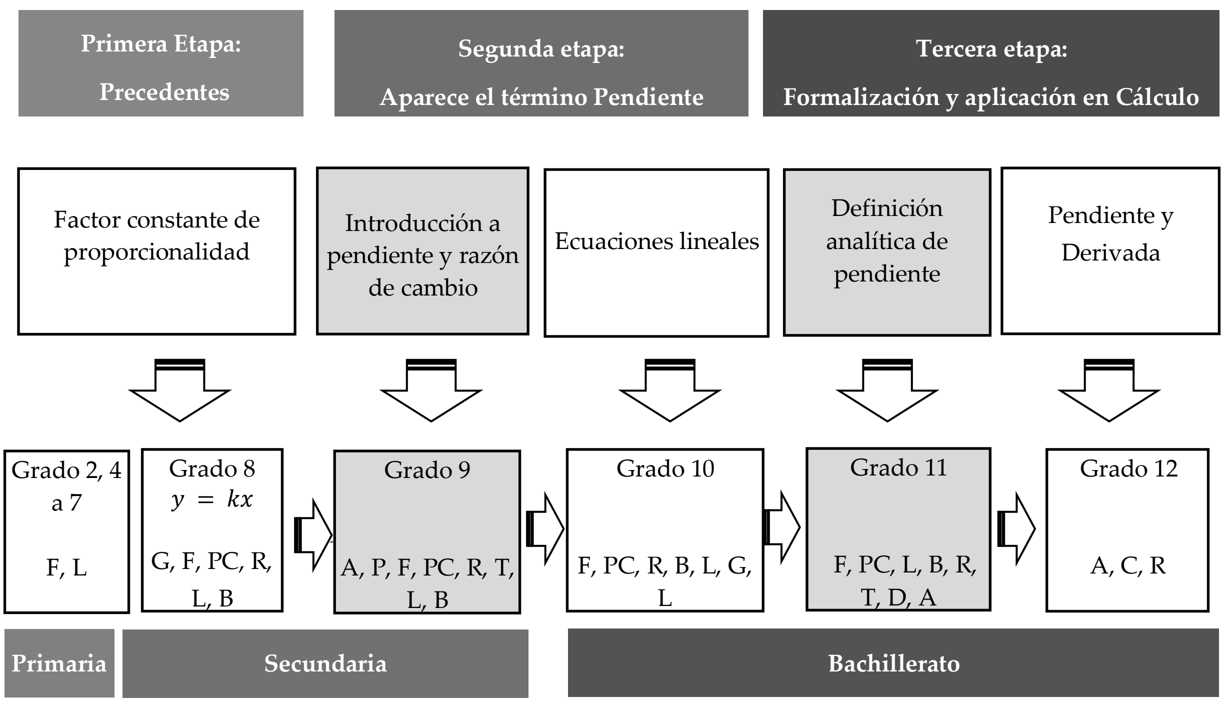


Figura 11. Desarrollo de la pendiente a lo largo del plan de estudio de Matemáticas de México.

La segunda etapa la integra el noveno y décimo grado, donde el término "pendiente" se menciona por primera vez y se introduce a través de su relación con la razón de cambio en fenómenos que se modelan con una función lineal. Por lo tanto, está vinculado principalmente a la conceptualización *propiedad funcional* y la de *situación del mundo real*. Se identificaron otras conceptualizaciones desprendidas de la definición analítica, incluida la *conceptualización trigonométrica, la razón algebraica, coeficiente paramétrico* y *propiedad física*. La discontinuidad observada ocurre al pasar al grado 10. Si bien, algunas referencias a las conceptualizaciones de pendiente son explícitas en el grado 9, en el grado 10 (donde se introducen formalmente las ecuaciones lineales) la pendiente se menciona solo implícitamente. En esta coyuntura clave, la pendiente debe usarse explícitamente como criterio de definición de funciones lineales. Aunque los maestros pueden mencionar las representaciones de la pendiente, sin embargo esto no garantiza que los estudiantes puedan mirarlas conectadas. Una posibilidad de mejorar el entendimiento de este concepto es si el estudiante es capaz de conectar todas las representaciones de pendiente desde su primera mención en el grado 9 con las funciones lineales.

La tercera etapa, la de su formalización y aplicación en Cálculo, se lleva a cabo en el bachillerato, donde la pendiente se define como la tangente del ángulo de inclinación (grado 11) y donde se menciona explícitamente la conceptualización en Cálculo asociado a situaciones de la vida cotidiana (grado 12). En Cálculo, se produce la transición de la razón de cambio promedio a la razón de cambio instantánea, al igual que su interpretación como la pendiente de la tangente a una curva.

Nuestros hallazgos sugieren que los estudiantes mexicanos estudian la pendiente explícitamente en el grado 9, pero con algunas discontinuidades, lo que puede no permitir a los estudiantes identificar y conectar las representaciones múltiples del concepto en los grados futuros. Específicamente, los resultados mostraron que solo se promueve una conceptualización en la primaria, 9 en la secundaria y 10 en el bachillerato. La Figura 12 muestra que hubo más menciones explícitas e implícitas a la pendiente en el bachillerato que en la secundaria (es decir, 23 implícitas y 7 explícitas en la secundaria, y 28 implícitas, 12 explícitas en el bachillerato).

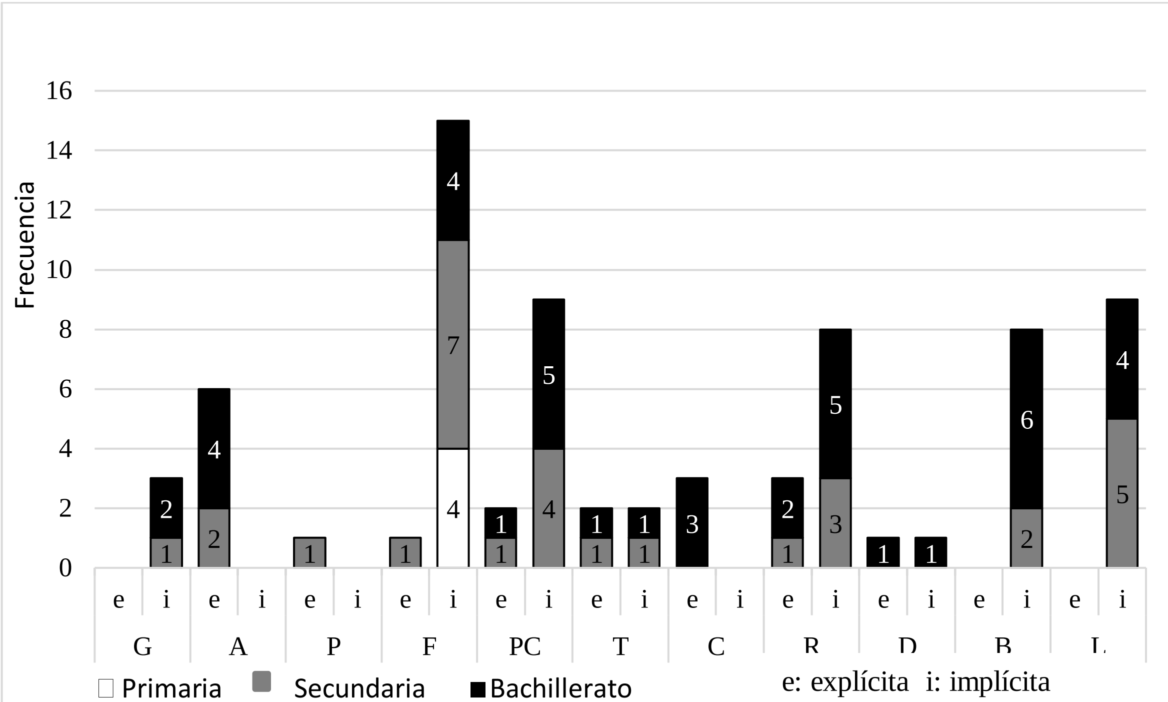


Figura 12. Frecuencia de las conceptualizaciones de pendiente en el plan de estudio mexicano.

La conceptualización de *propiedad funcional* fue la que tuvo un énfasis principal en el currículo matemático de México, lo cual está alineado con los hallazgos recientes en los Estados Unidos (Stanton y Moore-Russo, 2012; Nagle y Moore-Russo, 2014). Después *propiedad funcional*, las siguientes dos conceptualizaciones más notables (en orden) fueron: *situación del mundo real* y *coeficiente paramétrico*. La conceptualización *situación del mundo real* puede ayudar a los estudiantes a desarrollar una comprensión más rica de la pendiente ya que, como lo afirma Stump (2001b), "las situaciones del mundo real no solo brindan oportunidades significativas para desarrollar la comprensión de las matemáticas, sino que también brindan la oportunidad de comunicar su comprensión de las matemáticas" (p.88).

Cabe señalar que el énfasis de la propiedad funcional y la conceptualización *situación del mundo real*, coincide con las intenciones de las recientes reformas curriculares mexicanas. Sin embargo, el plan de estudio no detalla cómo se va a incorporar la aplicación de los contenidos matemáticos ni ofrece ejemplos específicos de cómo ayudar a los estudiantes a establecer este vínculo con los diversos contextos. Por lo tanto, este cambio en el énfasis, que puede ser bastante nuevo para los maestros, no está completamente desarrollado. Por ejemplo, para resolver tareas sobre situaciones de variación, es necesario que los estudiantes puedan coordinar cantidades covariantes y esta capacidad está relacionada con la comprensión de la pendiente (Carlson et al., 2010); sin embargo, el razonamiento covariacional (que respalda esta capacidad) no forma parte de los estándares, competencias o desempeños propuestos en el currículo mexicano.

Las cinco conceptualizaciones más destacadas (propiedad funcional, situación del mundo real, coeficiente paramétrico, constante lineal e indicador de comportamiento) representaron el 73% de todas las referencias implícitas y explícitas de la pendiente en el plan de estudios mexicano. La escasa presencia de las otras ocho conceptualizaciones de la pendiente en el plan de estudios puede conducir a una comprensión débil y desconectada de la pendiente. El hecho de que las menciones implícitas ocurran cuatro veces más que las explícitas, puede ser indicativo de una falta de promoción de conexiones inter e intra entre la pendiente con otros conceptos matemáticos e incluso entre sus diferentes representaciones. Los estudiantes necesitan un ambiente de instrucción que apoye sus conexiones de pendiente (Lobato, Ellis y Muñoz, 2003).

Si bien, la pendiente no puede ser el enfoque principal en todos los grados, es posible e importante promover conexiones explícitas y abordar activamente las posibles desconexiones entre la pendiente y razón de cambio, ya reportada en diversas investigaciones. También es posible promover conexiones entre el concepto informal de inclinación y el concepto matemático de pendiente, lo que permitiría al estudiante entender su interpretación como la tangente del ángulo de inclinación de una recta (Nagle y Moore-Russo, 2013b). Además, esto podría estar relacionado con el papel que juega en Cálculo al determinar máximos y mínimos de funciones como esos puntos en un gráfico, donde la pendiente de la recta tangente es cero.

Desarrollar una comprensión conceptual conectada de ideas matemáticas clave, como la pendiente, es fundamental en la educación matemática (NCTM, 2000; Cai y Ding 2017). En particular, para que un estudiante tenga una mejor comprensión de la pendiente no basta con que conozca la razón geométrica y la razón algebraica u otras conceptualizaciones, sino más bien la conexión entre estas. Por ejemplo, si parte de la razón geométrica, la cual puede considerarse como una secuencia de triángulos rectángulos iguales y/o semejantes cuyas hipotenusas forman parte de la gráfica de la recta, los conllevaría a conceptualizar la pendiente como *una constante lineal* (es decir, propiedad que no depende de qué parte de la recta el estudiante considerando, la pendiente es única; Nagle y Moore-Russo, 2013b). De esta manera, el alumno entendería como la pendiente se vincula con la rectitud de una línea y así mismo cómo ésta actúa como un parámetro en las funciones lineales (vinculación a la conceptualización *coeficiente paramétrico*).

Ahora bien, dada la yuxtaposición geográfica y la frecuente inmigración de México a los EE. UU., el saber cómo se estructura el tratamiento de la pendiente en el plan de estudios mexicano podría ser útil para que los educadores estadounidenses comprendan el razonamiento matemático de los estudiantes inmigrantes mexicanos. Dicho esto, este es solo un indicador. Es importante tener en cuenta que, por sí solo, conocer el plan de estudios mexicano no es suficiente para acceder a la comprensión completa del estudiante (ya que muchos factores influyen en el aprendizaje).

Una diferencia importante entre el plan de estudios mexicano y lo que la investigación ha reportado sobre los documentos curriculares estadounidenses (Stanton y Moore-Russo, 2012) es la falta de énfasis en la pendiente como *razón geométrica* que se ha identificado también en los estudios realizados a instructores y estudiantes de EE. UU. (Stump, 1999; Nagle et al. 2013, Nagle y Moore-Russo 2013a). De hecho, Dolores-Flores et al. (2018) descubrió que los estudiantes mexicanos enfatizan la razón algebraica, es decir solo al uso de la fórmula de la pendiente para calcular la pendiente. A partir de esto, uno podría hipotetizar una preferencia a un enfoque más analítico o procedimental de la pendiente en el plan de estudios mexicano, mientras que los Estados Unidos podrían estar enfatizando un enfoque más visual, centrado en el gráfico de la recta. Además, los hallazgos señalan que la pendiente es introducida en las escuelas de EE. UU. desde el 8° grado (Stanton y Moore-Russo, 2012; Nagle y Moore-Russo, 2014), mientras que en las escuelas de México es desde el 9° grado, por tanto, los estudiantes que ingresan a las escuelas de EE. UU. pueden tener dificultades particulares. Estas podrían ser aún más pronunciadas si estos no han tenido elementos que les permita visualizar la pendiente como una razón geométrica.

2.4.5 Limitaciones y futuras investigaciones

En este estudio, mostramos un análisis del plan de estudios mexicano con respecto a la pendiente, pero no ofrecemos información sobre lo que se imparte (lo que los maestros enseñan en el aula) o lo que los estudiantes pueden demostrar. Es importante tener en cuenta que el plan de estudios analizado presentó deficiencias respecto a las orientaciones para implementarlo, asi como inconsistencias en las conexiones explícitas de la pendiente entre los niveles educativos, por lo que le da al maestro la libertad de interpretarlo y abordarlo de acuerdo con sus criterios personales. Por lo tanto, es posible que en México lo que se plantea enseñar tenga divergencias con lo que se imparte. Muy poco se sabe al respecto. En este sentido, solo encontramos la investigación de Valenzuela y Dolores (2012), quienes proporcionan alguna evidencia a favor de este supuesto, ya que encontraron diferencias sustanciales entre lo que plantea el plan de estudios matemático para el bachillerato y lo que se enseña con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones de segundo grado y problemas de función.

Algo similar a lo anterior puede estar sucediendo en los EE. UU., según Stanton y Moore-Russo (2012), los documentos de normas estatales presentan una falta de orientaciones para trabajar con el contenido. Por lo tanto, para saber cuánta influencia tiene el plan de estudios en las prácticas de los maestros, se necesita investigación futura para dar evidencias de cómo los maestros interpretan lo declarado en los documentos oficiales. Otro elemento que juega un papel importante son los libros de texto que se utilizan como una posible implementación del plan de estudios. Además, a menudo son parte del puente entre lo planeado y lo impartido (Schmidt et al., 2001). Dado que los libros de texto tienen una gran influencia en la instrucción en el aula, el trabajo futuro debe examinar las conceptualizaciones de pendiente promovidas en ellos.

La investigación en los EE. UU. destaca las dificultades en profesores en pre-servicio sobre la enseñanza del concepto de pendiente como *propiedad funcional* (Stump, 2001b), así como el uso poco frecuente por parte de los estudiantes (Nagle y Moore-Russo, 2013a). Teniendo en cuenta el énfasis de esta conceptualización en el plan de estudios mexicano, sería pertinente un estudio centrado en cómo los estudiantes y los maestros entienden la pendiente, especialmente en la transición de la secundaria al bachillerato, y particularmente en la capacidad de interpretar razones de cambio en contextos aplicados, ya que de acuerdo con el plan de estudios, es en estos niveles educativos donde la pendiente está explícitamente destinada a ser enseñada.

Finalmente, la investigación apunta a que los maestros de EE. UU. podrían centrarse más en las interpretaciones visuales de la pendiente (Stanton y Moore-Russo, 2012) que dependen de la mnemotecnia (Walter y Gerson, 2007) y en cálculos de procedimiento y la comparación de distintas formas de obtenerla (Frank, 2016; Moore y Thompson, 2015; Nagle et al., 2013). El estudio actual y otras investigaciones realizadas en México (por ejemplo, Dolores-Flores et al., 2018; Rivera et al., 2019) sugieren un posible énfasis en los cálculos algebraicos. De hecho, los investigadores internacionales se han referido en este sentido a un "descuido" con respecto a la pendiente (Zaslavsky et al., 2002). Por esta razón, se necesita más estudio internacional, por un lado para comprender cómo se aborda el concepto en todo el mundo y, por otro lado, para determinar cómo el plan de estudios planeado así como el impartido ayuda a los estudiantes a desarrollar una mejor comprensión de la pendiente para poder recurrir a ella cuando se esté estudiando conceptos matemáticos más avanzados. Los estudios no solo deben buscar comparaciones entre países, sino también estudios longitudinales dentro de la currícula de un país para ayudar a diferentes países a identificar diferentes etapas para la instrucción de pendiente (ya sea explícita o implícita) y cualquier posible discontinuidad

2.5 Reflexión de los estudios realizados en México

Los estudios descritos en la sección 2.2, 2.3 y 2.4, son exploraciones que en autoría y coautoría con otros investigadores (integrantes del grupo de investigación al que pertenezco y cuyo objeto de estudio es el concepto de pendiente) se han realizado con el objetivo de conocer y aportar elementos para tener un panorama más amplio de lo que pasa en México respecto de las representaciones de la pendiente, ya reportadas en la literatura especializada en Educación Matemática.

Todos los estudios tienen en común el marco referencial, es decir, el conjunto de conceptualizaciones descritas en Moore-Russo et al. (2011). Los primeros dos, atienden la demanda internacional de dar un visión de lo que hacen los estudiantes de otros países, en este caso mexicanos, en particular en el nivel medio superior, en los cuáles, como ya se dijo anteriormente en sus respectivas secciones, dan evidencia de un dominio débil y además escaso de las representaciones que deberían emplear los estudiantes que ya han culminado su educación básica.

De acuerdo con los resultados de la investigación centrada en la currícula, los estudiantes deberían tener dominio de al menos de 8 conceptualizaciones. Sin embargo, culminan sus estudios de bachillerato y un 50% asocia directamente a la fórmula algebraica y un 30% la reconoce en la expresión $y = mx + b$ pero de forma memorística, desconocen su interpretación y el devenir de la fórmula, tal como también ya lo ha reportado Dolores-Flores et al. (2018), asi como lo que representa en la función lineal y en la gráfica, tal como lo ha reportado Birgin (2012).

Los hallazgos de los tres estudios previamente descritos sugieren una variedad de estudios, entre ellos conocer el conocimiento que tienen los estudiantes antes de que sea trabajado de manera formal el concepto, entendiendo por formal el hecho de que se les presenta la definición. Dado que ya se tiene reporte de las dificultades que presentan los estudiantes, incluidos mexicanos, este estudio optó por interesarse en el conocimiento previo que tienen los estudiantes para enfrentar situaciones donde figura el concepto y alguna de sus representaciones. Asimismo, el estudio permite identificar cómo ponen en juego las ideas precarias de este concepto.

Además, la población en la que se van a identificar la preconcepciones y según lo que plantea la currícula, los participantes ya tuvieron un primer acercamiento al concepto. De manera que, podemos identificar lo que ha dejado la escuela secundaria y mirar qué tanto influye la instrucción de la pendiente durante el bachillerato.

CAPÍTULO III

Marco conceptual

Dado que el objetivo es explorar las preconcepciones del concepto de pendiente, es necesario tener una postura de lo que entenderemos por preconcepciones, la cual se describe en este capítulo. Además, se da la definición de lo que es pendiente y su relación con la razón de cambio.

3.1 Pendiente y Razón de cambio

La pendiente y la razón de cambio son presentados con el mismo modelo matemático, es decir un cociente de diferencias $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. De este se obtiene que la pendiente es un número real, que puede interpretarse desde dos nociones, una geométrica y otra variacional. En la primera, hace referencia a una medida de la inclinación de la recta, mientras que en la segunda, hace referencia a la razón de cambio, la cual es la variación de una variable respecto de otra entre dos puntos particulares (Reyes-Gasperini, 2013; Lobato y Thanheiser, 2002; Dolores et al., 2017).

En los libros de Cálculo, las definiciones que dan para pendiente y razón de cambio, involucran tanto la noción geométrica como la noción variacional, solo que emplean diferentes notaciones. Por ejemplo, en Larson (2010) se define a la pendiente de la siguiente manera:

La pendiente de una recta no vertical es una medida del número de unidades que la recta asciende (o desciende) verticalmente por cada unidad de variación horizontal de izquierda a derecha. Considerar los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de la recta de la figura P.12 (véase Figura 13). Al desplazarse de izquierda a derecha por la recta, se produce una variación vertical de $\Delta y = y_2 - y_1$ (cambio en y) unidades por cada variación horizontal de $\Delta x = x_2 - x_1$ (cambio en x) unidades. La pendiente m de una recta no vertical que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2$. (p.10).

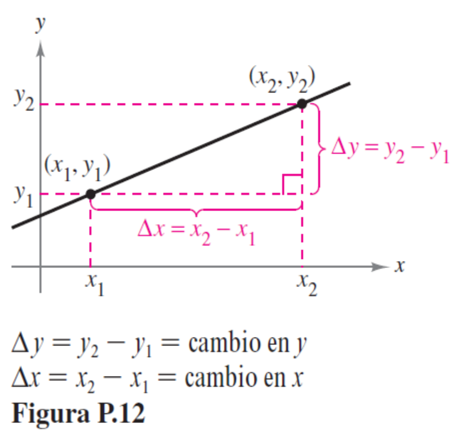


Figura 13. Imagen tomada de Larson (2010, p.10)

Mientras que, en Stewart (2012) se define a la razón de cambio como sigue:

Suponga que y es una cantidad que depende de otra cantidad x. Así, y es una función de x y lo expresamos como $y = f(x)$. Si x cambia de x_1 a x_2, entonces el cambio en x (también conocido como incremento de x) es $\Delta x = x_2 - x_1$, y el cambio correspondiente en y es $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$.

El cociente de diferencias $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ se llama razón de cambio promedio de y respecto de x sobre el intervalo $[x_1, x_2]$, y puede interpretarse como la pendiente de la recta secante PQ (pp. 147-148), tal como se muestra en la Figura 14.

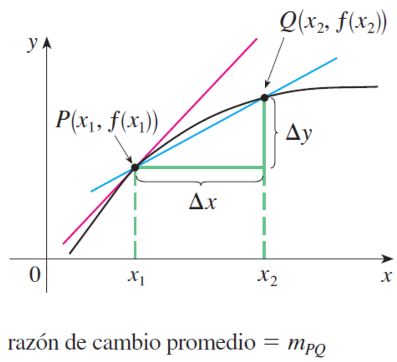


Figura 14. Imagen tomada de Stewart (2012, p.148)

Como podemos observar en las dos definiciones, la de Larson (2010) y de Stewart (2012), muestran como el concepto de pendiente es utilizado para medir situaciones variacionales que van de una razón de cambio constante (para el caso de la representación en el plano de una relación proporcional directa) a una no constante, como es para el caso de la razón de cambio promedio, la cual va más de allá de la interpretación de funciones lineales. Por ello, de manera general suele denominarse *razón de cambio* en los que se involucran diversos contextos como son en la física, la biología, la economía, cálculo, etc.

3.2 Preconcepciones

Antes de que una persona aprenda "algo" formalmente, esta tiene significados de las palabras usadas en la ciencia, ya que desde niños según sus experiencias en sucesos de su vida cotidiana los han llevado a construir significados y explicaciones (Osborne y Wittrock, 1983), permitiendo así formar un conocimiento previo. Simons (1999) define el conocimiento previo como "todo el conocimiento que los aprendices tienen disponible al ingresar a un entorno de aprendizaje y, que es potencialmente relevante para el aprendizaje de nuevos conocimientos" (p. 579, «Traducción propia»). Este puede ser formal o informal, implícito o explícito, y puede ser parcialmente correcto o incorrecto en comparación con los estándares científicos (Simons, 1999). Puede consistir en "el inventario personal de información, habilidades, experiencias, creencias y recuerdos de un individuo" (Alexander, Shallert y Hare, 1991, p. 317, «Traducción propia») y también puede referirse al conocimiento intuitivo o preconcepciones, que incluyen ideas sostenidas antes de la instrucción formal. (Aguirre, 1988). De esta manera, el conocimiento intuitivo está "compuesto de intuiciones, ideas y creencias de un alumno sobre entidades matemáticas" (Sirotic y Zaskis, 2007, p. 51, «Traducción propia»).

Bretones (2003) considera que las preconcepciones subyacen a todo tipo de conocimiento, tanto conceptual como procedimental. Orientan la interacción y la acción de un individuo (Bello, 2004; Bretones, 2003, Campanario y Otero, 2000); apoyan al aprendizaje, activando el conocimiento de una clase anterior o de un contexto familiar para formar una nueva idea (Yanik, 2011). Por su parte, Yip (1998) las entiende como construcciones personales basadas en ideas informales formadas en la vida cotidiana y/o dentro del salón de clase. Tovar et al. (2007) las define como las ideas que desarrolla el estudiante a medida que ha tenido contacto con información relacionada con un concepto o fenómeno. Rodríguez (2017) considera que se elaboran para dar respuesta a su necesidad de interpretar fenómenos naturales o conceptos científicos, y así brindar explicaciones o descripciones. Estas tienen un carácter inconexo e incluso a veces son contradictorias, ya que un mismo alumno puede explicar el mismo fenómeno desde varios puntos de vista inconsistentes entre sí (Pozo y Carretero, 1987).

De acuerdo con Abouchedid y Nasser (2000) las preconcepciones pueden estar guiadas por la realidad experimental en la que los estudiantes confunden experiencias reales con la teoría formal. Por otro lado, las concepciones alternativas devienen de ideas ya formales y conllevan a que una nueva concepción entre en conflicto con una ya existente y además no es correspondiente con lo aceptado dentro de la matemática. Ambas situaciones juegan un papel importante en la comprensión y el procesamiento de la información por parte de los estudiantes. Esto deja entrever que, una preconcepción empleada durante el estudio formal de un concepto pasaría a un estatus de concepción o concepción alternativa, según sea el caso de (Matz, 1980).

Por ello, sobre la base de las ideas expuestas de Matz (1980), Abouchedid y Nasser (2000) y Tovar et al. (2007), en esta investigación entenderemos por *preconcepciones de pendiente* a las nociones desarrolladas por el estudiante como resultado de sus experiencias (escolares y extraescolares) con el concepto, previo al curso de Matemáticas III (Grado 11), ya que en este se promueve la formación del concepto y el trabajo con su definición formal. De esta manera, todos los argumentos que hacen referencia a la pendiente, así como los procedimientos y movimientos corporales (por ejemplo, la simulación del grado de inclinación de una recta utilizando su brazo o un objeto material), proporcionados por los estudiantes son asociadas con sus preconcepciones sobre el concepto, aunque éstas no sean aceptables dentro de la matemática.

CAPÍTULO IV

Metodología

En este capítulo se describen las características metodológicas de la investigación. Dado que el objetivo es explorar las preconcepciones de pendiente que tienen los estudiantes de bachillerato, nos apoyamos de la metodología entrevista basada en tareas de Goldin (2000) y el método de análisis temático de Braun y Clarke (2012).

4.1 Entrevista basada en tareas

La elección de esta metodología parte del hecho de que solo entrevistar da verbalización de los procesos de pensamiento que tiene el individuo, que sin duda alguna proporcionan información importante pero no nos permite mirar cómo ponen en acción esos procesos. También los datos pueden ser obtenidos mediante instrumentos de indagación como son tareas o cuestionarios, pero el hecho de que resuelvan y conocer solo sus procedimientos no permite conocer las ideas que pone en acción el individuo al resolverla. De esta manera consideramos conveniente una combinación de ambos recursos, es decir de una entrevista y un instrumento, la cual es correspondiente con la propuesta metodológica de Goldin (2000), es decir de una entrevista basada en tareas.

Una entrevista basada en tareas es aquella en la que se requiere de una interacción mínima entre un sujeto (el que resuelve problemas) y un entrevistador (el que plantea o pregunta), donde el sujeto habla durante o inmediatamente después de resolver una tarea (preguntas, problemas o actividades) evidenciando así su conocimiento y razonamiento en la resolución de problemas (Koichu y Harel, 2007). Consideramos que esta metodología es adecuada porque permite observar cómo los participantes ponen en juegos sus ideas matemáticas. Además, esto nos permite hacer inferencias sobre el posible significado matemático que se les atribuyen (Goldin, 1997); también, da oportunidad de conocer el conocimiento conceptual de los participantes, así como de ampliar su entendimiento (Assad, 2015).

Para nuestro estudio, la entrevista basada en tareas sirve para recolectar los datos y tener la información necesaria para explorar las preconcepciones de la pendiente que cada participante tiene o pone en práctica al resolver cada una de las tareas. La entrevista fue semiestructurada, dado que permitió al entrevistador realizar preguntas referentes a sus procedimientos y al vocabulario empleado (por ejemplo: si un estudiante dice: "*la pendiente es el ángulo*", entonces se le preguntó sobre lo qué es el ángulo; "*la pendiente es la inclinación*", se profundizó sobre lo que entendía por inclinación, etc.). Dado que la entrevista se aplicó de manera individual, participaron 2 entrevistadores (investigadores de este estudio) en la recolección de los datos. Cada entrevista tuvo una duración de 60 a 90 minutos.

4.2 Participantes

La investigación cualitativa a menudo implica seleccionar a propósito a los participantes, ya que el investigador está tratando de estudiar una muestra única basada en el propósito de la investigación. En este estudio, los estudiantes tuvieron la característica de no haber cursado geometría analítica con el objetivo de investigar sus preconcepciones de pendiente. En México, el bachillerato se cursa en tres años, distribuidos en seis semestres, generalmente las edades de los estudiantes oscilan de 15 a 18 años; para nuestro estudio los estudiantes estaban cursando el segundo semestre correspondiente al primer año de bachillerato y sus edades varían de 15 a 16 años.

Los participantes son provenientes de una preparatoria perteneciente a la Universidad Autónoma de Guerrero ubicada en la región centro del Estado de Guerrero, México. La preparatoria fue elegida específicamente por dos razones. Una, se tiene una relación profesional con el director de la escuela y con los maestros de los estudiantes. Por lo tanto, nos sentimos cómodos acercándonos a ellos y solicitar el permiso para llevar a cabo este estudio en la escuela y con sus estudiantes. Segunda, la escuela fue seleccionada debido a su proximidad de nuestra residencia de origen. Al elegirla, se pudo asegurar que se tuviera más flexibilidad para establecer reuniones con los estudiantes. Por ejemplo, en tres ocasiones, se citó a estudiantes fuera del horario escolar para que no estuvieran presionados por perder sus clases.

Los estudiantes fueron elegidos por sus profesores, el criterio que se consideró es que estos fueran alumnos regulares. En total se entrevistaron a 30 estudiantes (13 hombres y 17 mujeres).

Cabe mencionar que de acuerdo con el análisis del currículo que se realizó y cuyos resultados se mostraron en la sección 2.4, es posible que los estudiantes ya tengan ideas previas sobre la pendiente. Sin embargo, no tenemos certeza de que así sea, ya que no se indagó sobre su historial académico y además provenían de diversas escuelas secundarias del estado de Guerrero entre ellas: técnicas, generales y telesecundarias.

4.3 Diseño de las tareas de la entrevista

Para el diseño de las tareas se consideraron algunas representaciones de la pendiente que categorizaron Moore-Russo et al. (2011) y Stump (1999, 2001). Asimismo, los resultados del análisis de la currícula asi como de las exploraciones que se hicieron con los estudiantes que ya han culminado su educación bachillerato, permitieron considerar la demanda cognitiva de cada tarea. También se consideraron resultados sobre las concepciones alternativas que ya se han detectado por Dolores et al. (2002) con estudiantes de bachillerato y universidad, como son: interpretar mayor velocidad media como la representación gráfica de la ordenada de mayor altura; al estimar la velocidad media en una gráfica dar la magnitud de la ordenada y asociar la velocidad negativa con una gráfica cuyas ordenadas son negativas.

Las tareas fueron diseñadas en conjunto por el investigador y el grupo de investigación al que pertenece. Las tareas están planteadas de manera abierta, permitiendo a los estudiantes de poner en juego todas las ideas que consideren apropiadas para resolverlas y con el objetivo de no influir en sus procedimientos. Cada tarea requiere analizar e interpretar situaciones específicas que involucran representaciones verbales, gráficas o algebraicas de la pendiente. De las cuales, 4 representan simulaciones de situaciones con la vida cotidiana y 6 se dan en contextos escolares rutinarios.

La tarea 1 consistió en comparar la pendiente de una escalera respecto de una rampa. Esta involucra al menos dos representaciones de la pendiente, entre ellas como razón algebraica y como propiedad física, las cuales pudieran aparecer o no. La primera al emplear $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ o bien, para la segunda al apoyarse de los términos inclinacion, ángulos, empinada, etc. Sin embargo, dado a los recursos que se les dio, es decir, transportador, regla y calculadora, ellos pudieran calcular el ángulo y emplear una representación trigométrica, es decir obtener la tangente del ángulo.

Por otro lado, por el poco trabajo que pudieran tener con el concepto, así como las experiencias en su vida cotidiana, es probable que se dejen guiar más por lo visual e interpretar que la pendiente sea el qué tan empinado este el objeto.

Esta se planteó de la siguiente manera. "La entrada a una cafetería tiene dos accesos: una escalera y una rampa. La imagen (Figura 15) muestra sus medidas. ¿Qué acceso tiene mayor pendiente?"

Figura 15. Imagen mostrada en la tarea 1

La tarea 2, es algo similar a la tarea 1, dado que nuevamente comparan pendientes, pero ahora de rectas que estan dadas en planos cartesianos no graduados. Esta tarea es más de tipo conceptual, ya que el estudiante debe conocer que para poder decidir en este contexto es necesario conocer la graduación de los ejes. Sin embargo, es más esperada la representacion de la pendiente como propiedad física, ya que en la etapa en que se encuentran los estudiantes es mas probable que se dejen guiar por lo visual.

Esta tarea plantea decir: Cómo son entre sí las pendientes de la recta l_1 y l_2 (Figura 16) y se les pidió sus argumentos. Asimismo, se les planteó la pregunta auxiliar sobre argumentar cuál tenía pendiente mayor.

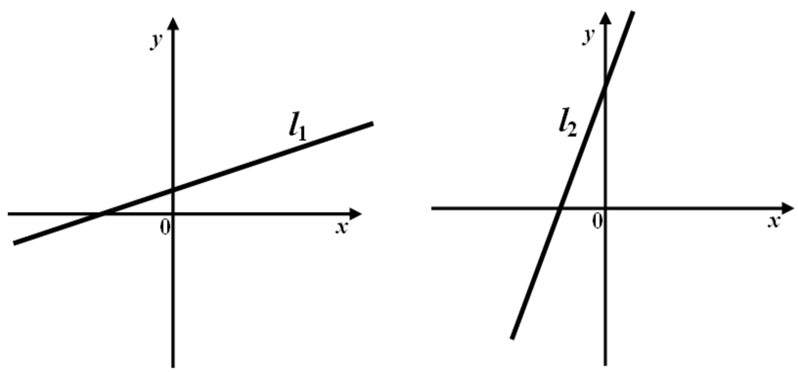


Figura 16. Rectas dadas en la tarea 2

La tarea 3, con el objetivo de conocer qué elementos consideran necesarios para el cálculo de la pendiente de una recta, se les plantearon 4 segmentos de recta dados en un mismo plano cartesiano y graduado (Figura 17). Dos de estos presentan elementos que permiten realizar el cálculo, uno de ellos el ángulo de inclinación y el otro las intersecciones en los ejes x e y; otro es completamente horizontal y el otro no tiene cortes a los ejes.

La pregunta detonadora fue: ¿En cuál o cuáles rectas es posible calcular la pendiente? una vez argumentado para cada caso, se les pidió que mostraran o dijeran como las calculaban.

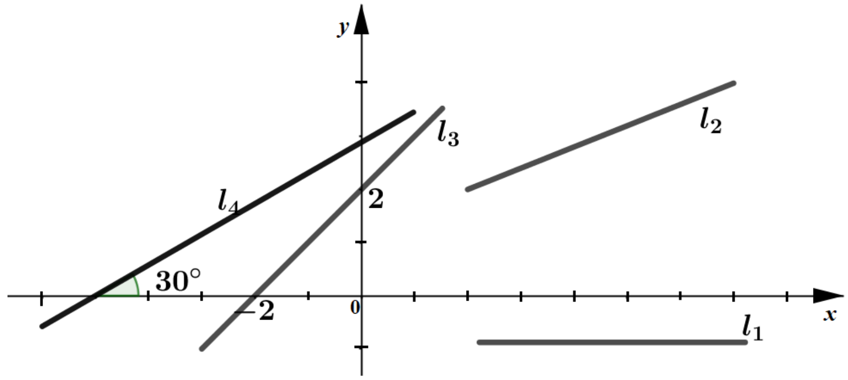


Figura 17. Rectas dadas en el plano cartesiano en la tarea

Las representaciones de la pendiente involucradas en esta tarea son: la trigonométrica, razón algebraica, razón geométrica y propiedad física, aunque cabe mencionar que por las caracteristicas de los participantes pueden aparecer otras ideas que van a depender del conocimiento de cada estudiante.

La tarea 4 da lugar a las representaciones de la pendiente como coeficiente paramétrico, propiedad determinante, constante lineal, razón algebraica, razón geométrica y propiedad física. Sin embargo, no es garantía de que sean las ideas que el estudiante ponga en juego. Esta estuvo planteada de la siguiente manera: "La gráfica de la recta l_1 tiene por ecuación a $y = 2x + 4$, es trasladada de modo que ahora está sobre el punto (4,0) y se transforma en l_2. ¿Qué pendiente tiene l_2?" véase Figura 18.

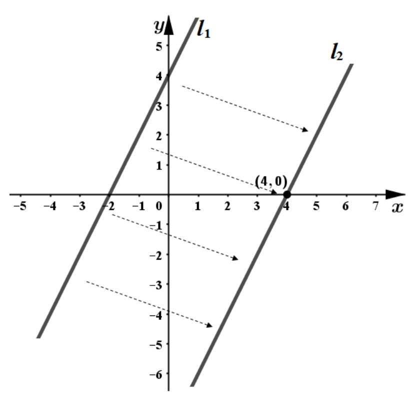


Figura 18. Imagen utilizada para la tarea 4

Nuevamente la tarea sugiera el cálculo de la pendiente, pero también permite identificar la interpretación que el estudiante le de. Pesé a que las preguntas giran entorno al cálculo, no es objetivo del estudio saber si resuelve bien cada tarea, sino qué emplea para dar una solución.

Para la tarea 5, se muestra la fotografía de una escalera (Figura 19), con información de la medida de su huella y contrahuella. La pregunta consistió en decir qué pendiente tiene la escalera, además de conocer que interpretación le da en un contexto real. Las representaciones involucradas son, situación mundo real física y razón geométrica.

Figura 19. Fotografía utilizada para la tarea 5

La tarea 6 contempló la representación de la pendiente como propiedad funcional, ya que en esta se interpreta la velocidad y asimismo usar o verificar la velocidad usando $\frac{\Delta d}{\Delta t}$. Esta se planteó de la siguiente manera:

"Ana salió de su casa a las 12.00 pm y regresó a las 8:00 pm. La siguiente gráfica (Figura 20) muestra el comportamiento de la distancia que recorrió en su automóvil respecto del tiempo. Escribe los intervalos que correspondan a cada situación.

a) Ana conduce su auto a una velocidad de 40 km/h. _______
b) En su regreso a casa, se encontró con mucho tráfico. _________
c) Se detuvo a comer. _________
d) Ana conduce su auto a una velocidad de 10 km/h. ________"

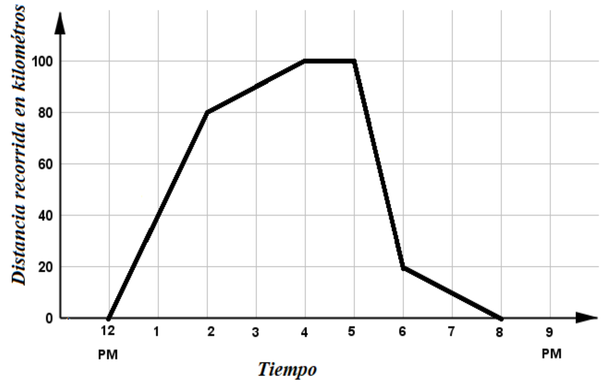


Figura 20. Gráfica presentada en la tarea 6

La tarea 7 da la oportunidad a evocar las representaciones razón algebraica, razón geométrica, propiedad determinante y coeficiente paramétrico. Asimismo, permite emplear las ideas que tenga cada estudiante acerca de la pendiente. La tarea partió de la ecuación de la recta así como de su representación en el plano cartesiano junto con otra recta paralela denominada l_1 (Figura 21). Y demandó lo siguiente, ¿Cuál es la ecuación de la recta l_1? y ¿Cuál es la pendiente de la recta l_1?

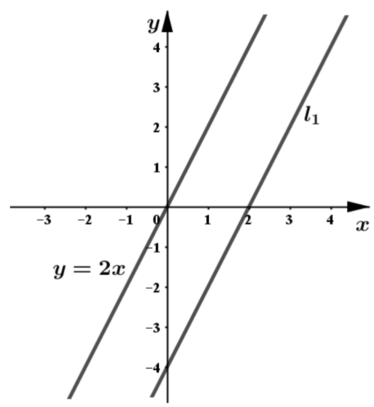


Figura 21. Gráfica presentada en la tarea 7

La tarea 8 da oportunidad al estudiante a referirse a la pendiente como coeficiente paramétrico y asi mismo relacionarlo como factor que determina cuando la recta es creciente, decreciente o constante, por lo que se dio la expresión general de la función $y = mx - 1$ y se le preguntaron las condiciones que debe cumplir para ser una función creciente, decreciente o constante. Además en esta tarea, también es posible identificar que ideas asocian a los parámetros y a una función creciente, decreciente o constante.

La tarea 9 demanda la pendiente de una recta en el plano cartesiano dada alguna información (Figura 22) que permite obtenerla de diversas maneras, entre estas está el uso de la representación como razón geométrica, razón algebraica, la trigonométrica, por mencionar primordialmente. Sin embargo, el planteamiento no obstruye a poner en juego las ideas que tienen los estudiantes que no conocen del todo las distintas representaciones de la pendiente.

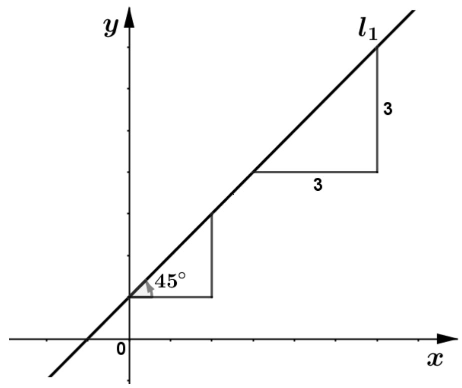


Figura 22. Gráfica presentada en la tarea 9

La tarea 10 es un primer acercamiento a la pendiente como coeficiente paramétrico y propiedad funcional en una situación del contexto real que involucra la constante proporcional. Además, es una actividad en la que de acuerdo al análisis curricular, es común trabajarla. Esta plantea lo siguiente:

> Miguel vende cloro a domicilio, puede vender por litro o por la cantidad de dinero que le pidan. Una señora le pidió cuatro litros y medio y pagó $27, mientras que otra clienta le pidió $18 y don Miguel le dio tres litros. Analiza la situación y contesta lo siguiente:
>
> a) Si Ana le compra $15 pesos, ¿cuántos litros de cloro le darán?
>
> b) Don Miguel desea conocer una regla general que relacione el costo a pagar y el número de litros de cloro. Supongamos que la regla tiene la forma $y = kx$. ¿Cuál es esa expresión algebraica?
>
> c) ¿Qué significa el valor de k?

En esta tarea se espera que los estudiantes manifiesten las ideas que se relacionan con la constante de proporcionalidad, así como con lo que significa.

Las tareas 11, 12 y 13, son preguntas que dejaran ver lo que para ellos es la pendiente, cómo se representa y dar ejemplos.

4.4 Análisis de datos

Las entrevistas fueron videograbadas y se realizaron en la oficina de un profesor y en el auditorio de la escuela. El foco de la cámara se centró en las manos del estudiante, este posicionamiento permitió una grabación de su trabajo mientras resolvía cada tarea. Para proteger el anonimato de los estudiantes, sus rostros no fueron grabados y se utilizaron los acrónimos E1, E2, E3, …, E30 para identificarlos. Para su respectivo análisis, las entrevistas se transcribieron y escanearon las hojas de trabajo de los estudiantes, empleándose así el análisis temático sugerido por Braun y Clarke (2012) y el método de triangulación para proporcionar confiabilidad, validez, credibilidad y rigor (Aguilar y Barroso, 2015).

El objetivo del análisis temático es identificar, organizar y sistematizar patrones de significados (temas) utilizando un conjunto de datos para dar respuestas a la pregunta de investigación. De acuerdo con Braun y Clarke (2012), un tema capta algo importante de los datos en relación con la pregunta de investigación y representa algún nivel de respuesta o significado modelado dentro del grupo de datos. Estos patrones se identifican a través de un riguroso proceso de familiarización y codificación de datos y, desarrollo y revisión de temas. La triangulación de datos es un procedimiento heurístico diseñado para documentar información de acuerdo con diferentes puntos de vista, lo que aumenta la calidad y la validez de los datos, ya que se elimina el sesgo de un solo investigador (Arias, 2000).

El método de análisis temático se estructura en 6 fases, en las primeras 4 fases, los investigadores (con diferentes niveles de experiencia) analizaron los datos de forma independiente, posteriormente, compararon y discutieron sus resultados. En caso de desacuerdo, los datos se analizaron conjuntamente y este proceso eventualmente condujo a un consenso de opinión. Todo esto se realizó en la fase 4 del análisis temático. En la fase 5, los investigadores discutieron los resultados y formaron conclusiones en sesiones de trabajo específicas. A continuación, se describe cada una de las fases a partir de las cuales se estructura el método.

Fase 1. *Familiarización con los datos.*

La familiarización con los datos y el lenguaje utilizado por los participantes se logró al leer repetidamente las transcripciones de las entrevistas.

En esta fase se transcribieron las 30 entrevistas en Microsoft Word. Una vez transcritas, se continuó el con la lectura de las transcripciones y anotando las ideas principales que ponen en juego los participantes. Se apoyó de Microsoft Excel para ordenar la información y facilitar la codificación inicial en los datos. En cada columna se escribió cada una de las actividades que se incluyeron en las 13 tareas y en las filas los pseudónimos de los estudiantes para los cuales hemos denominado Estudiante 1 (E1), Estudiante 2 (E2), Estudiante 3 (E3), y así sucesivamente hasta Estudiante 32 (E30) tal como se muestra en la figura 23.

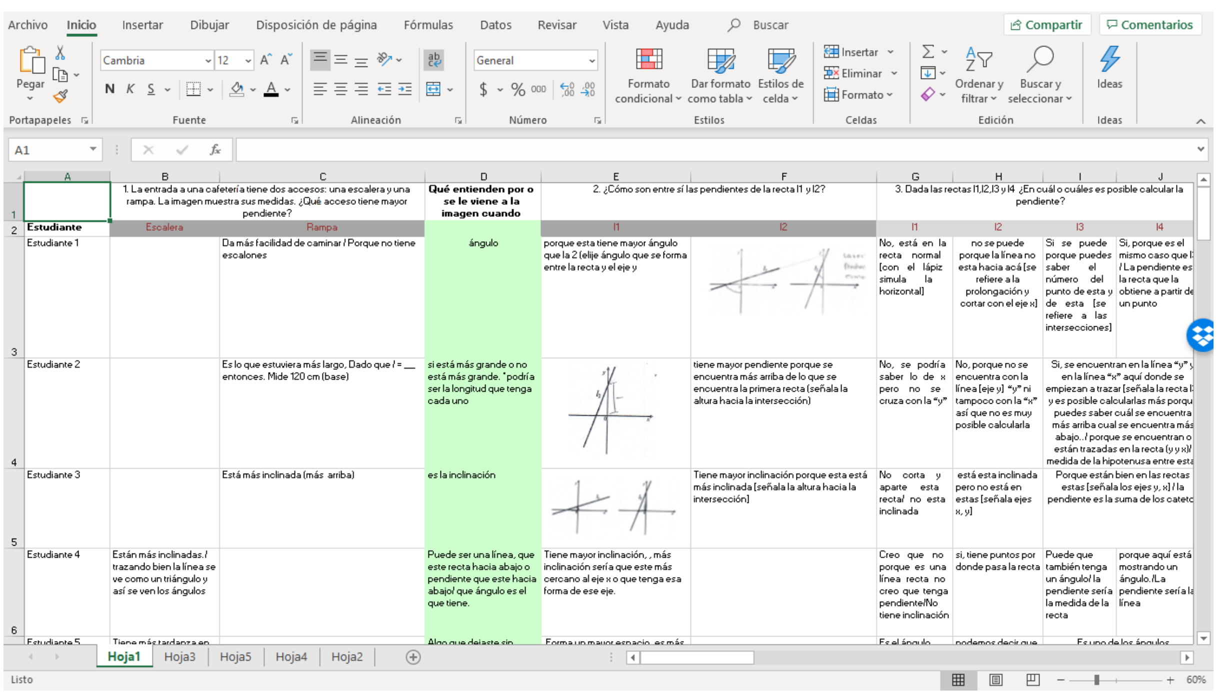


Figura 23. Captura de pantalla de la organización de los datos en Microsoft Excel

Fase 2. *Generación de códigos iniciales*.

Se establecieron códigos iniciales para una primera clasificación basada en la pre-lectura de las narrativas. Se buscaron palabras o frases empleadas por los estudiantes para referirse a la pendiente en sus procedimientos y justificaciones. Por ejemplo, en el extracto de E9 se puede ver en letras cursivas las frases que permitieron establecer algunos códigos iniciales como son la pendiente como: la inclinación, posición y el valor de *m*.

> **I**: La entrada a una cafetería tiene dos accesos: una escalera y una rampa. ¿Qué acceso tiene mayor pendiente?
> **E9**: bueno, *la pendiente es la inclinación*, entonces aquí es la rampa.
> **I**: ¿por qué?
> **E9**: porque su inclinación es mayor
> **I**: ¿A qué te refieres con inclinación?
> **E9:** *que está como más acostadita,* para mí entre más horizontal más inclinación, o sea entre más vaya bajando más inclinación tiene [mueve el brazo simulando el movimiento], aunque bueno, también se podría hacer con el plano cartesiano sacando los valores de *m* y *b*, de ahí *sacas la pendiente que es m*, pero no tengo esos datos.

Las frases más significativas o claves que refieren a la pendiente son las que se han denominado como códigos iniciales. El análisis se realizó por alumno y por tarea, para llevarlo a un análisis en conjunto. Los códigos y los temas se derivan del contenido de los datos por sí mismos, de modo que la revisión del investigador durante el análisis coincide estrechamente con el contenido de los datos.

A continuación, presentamos la codificación obtenida en tres de las tareas como ejemplo. La Tabla 9 muestra los códigos identificados en la tarea 1, ejemplos de un extracto de la entrevista y la frecuencia en la que apareció cada código. Por ejemplo, en esta se interpreta que los estudiantes ponen en juego la idea de pendiente como "*longitud*", pero para responder a la tarea refieren a la longitud de la base o a la longitud de una hipotenusa que ellos visualizan en la tarea. Lo mismo para el código "*inclinación*", esta es atribuida por la posición en que se encuentra un segmento que visualizan, al ángulo o a la longitud de la base o de la distancia horizontal que abarcan las escaleras o la rampa.

Tabla 9

Códigos identificados en la Tarea 1

Código	Asociado a:	Ejemplo de un extracto de la entrevista	F
Longitud	Base	E5: Es la rampa porque es la que *está más largo*, y ahí vemos que *la base* mide 120, entonces eso hará que la diagonal también sea más larga.	**4**
	Hipotenusa	E7: La rampa, porque tiene *más larga* su longitud (recorre con el dedo la rampa) y se ve porque *la línea de la diagonal o la hipotenusa* es más larga que la de la escalera.	**12**
Inclinación	Posición	E11: Las escaleras porque están *más inclinada*, es decir que están *más hacia arriba*,	**3**
	Ángulo	E4: Las escaleras porque están *más inclinadas* y eso se ve bien si trazamos la línea y así se ve como un triángulo y así se ve en los *ángulos*, éste es más grande.	**4**
	Longitud-base	E10: Las escaleras porque se ven como *más inclinadas* y además como *la medida* de su ancho (señala la *base*) es menor, eso hace que este más inclinada.	**3**
Facilidad	Esfuerzo	E1: La rampa tiene mayor pendiente porque es *más fácil para caminar*, porque no tiene escalones.	**1**
	Tiempo	E6: Las escaleras, porque la rampa tiene más tardanza en subir, *subimos más rápido* en las escaleras porque solo son 3 escalones.	**2**
$\boldsymbol{m}$ **en** $\boldsymbol{y = mx + b}$	Valor de m	E9: La rampa porque su inclinación es mayor, para mí entre más horizontal más inclinación. También se podría hacer con el plano cartesiano *sacando lo de m y b*, de ahí sacas la pendiente que es *m*.	**1**
Diagonal	Rampa	E29: La rampa, porque tiene más distancia y más pendiente, *la pendiente*, es por ejemplo lo que *vas a subir, por ejemplo, escaleras*, cerros o algo así, y entre más distancia más pendiente.	2

Nota: F denota Frecuencia

En la tarea 2, para la decisión de la recta con mayor pendiente se identificaron 3 códigos, los cuales están asociadas a las ideas que pusieron en juego los estudiantes (ver Tabla 10). Por ejemplo, hablaban de la inclinación pero está asociada a la posición con respecto del eje x o del eje y, o bien, al valor de la ordenada máxima, intersección con el eje y, o al ángulo.

Tabla 10

Códigos identificados en la Tarea 2

Código	Asociado a:	Ejemplo de un extracto de la entrevista	F
Inclinación	Posición respecto a x	E4: la uno tiene *mayor inclinación*, más inclinación sería que este *más cercano al eje x* o que tenga la forma de ese eje.	**4**
	Posición respecto a y	E16: la dos, porque ésta está por así decirlo *más cerca de la ye.* [distancia el eje y al extremo superior de la recta], su inclinación es más.	**2**
	Altura	E6: la dos tiene *más inclinación*, porque tiene una *altura* más… alta.	**4**
	Intersección con y	E2: tiene *mayor pendiente* ele dos porque se encuentra más arriba de lo que se encuentra la primera recta (*señala la intersección*).	**9**
	ángulo	E1: ele uno porque tiene *mayor ángulo* que la 2 o sea esta *más inclinada*.	**4**
Longitud	Base	E10: la 2 porque está *más inclinada*, porque aquí mide menos [señala la *distancia de la intersección con el eje y hacia el origen*].	**2**
	Recta	E25: las dos tienen la misma pendiente porque se ve que tienen *el mismo tamaño* nada más que tienen diferente posición, por eso se ven diferentes.	**3**
	Segmento del 1er cuadrante	E5: La uno, porque un mayor espacio, es más larga, entre más pendiente *más larga* es esta [se refiere al *tamaño de la recta en el cuadrante*].	**1**
Área mayor	Triángulo mayor	E11: la recta ele 2 tiene *mayor pendiente* porque sus líneas se intersecan en diferentes puntos y forman *un triángulo mayor* que la recta ele 1.	**1**

Nota: F denota Frecuencia

La Tabla 11, muestra los códigos identificados en la Tarea 3 así como las asociaciones que realizaron los estudiantes con respecto a la idea que pusieron en juego para atenderla.

Tabla 11

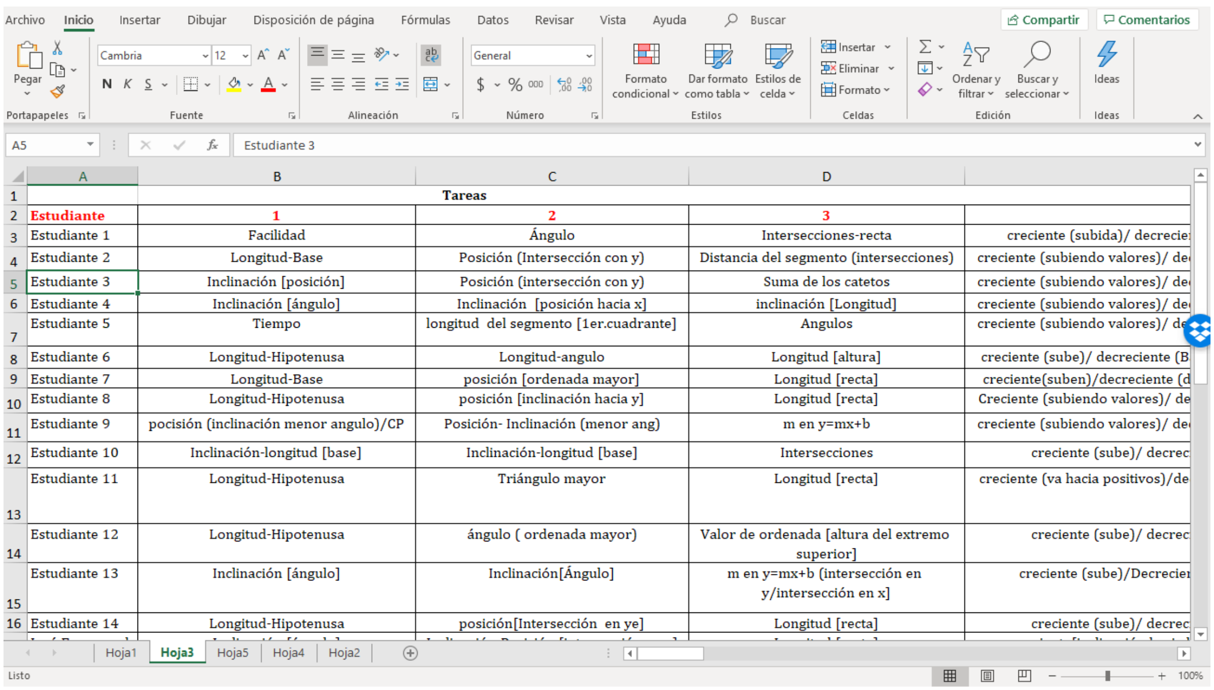
Códigos identificados en la Tarea 3

Código	Asociado a:	Ejemplo de un extracto de la entrevista	F
Diagonal	Segmentos	E7: en la tres y cuatro, *porque son estas* [*señala los segmentos*] las diagonales, la uno no porque no está inclinada, y la dos no corta a las *x*'s o la *y*'s [señala los ejes del plano cartesiano].	**7**
Longitud	Recta	E6: todas, porque ya están marcadas sus *distancias de un punto a otro* y para calcularla *mediría sus centímetros*	**12**
	Segmento acotado por las intersecciones	E2: En la uno y dos no, en las otras sí, porque conocemos de donde se empiezan a trazar [señala la intersección en el eje x] y donde terminan [señala intersección en el eje *y*] y entonces la pendiente es esto [señala el *segmento formado por las intersecciones* como extremos], su medida.	**3**
	Altura	E27: En la uno no, porque no tiene inclinación. Las otras, todas tienen altura y acá va su inclinación, digamos que es donde se pueden encontrar los grados y su altura, entonces aquí la 3 y 4 casi tienen la *misma pendiente*, *sus alturas* casi son *iguales*.	**4**
Ángulo	Ángulo	E20: La uno no porque no se le puede calcular el ángulo, en las otras sí, porque están las dos líneas y asi si le podemos *calcular el ángulo*.	**6**
$\boldsymbol{m}$ **en** $\boldsymbol{y = mx + b}$	Valor m	E9: En todas porque ya tienes el plano cartesiano solamente te guiarías contando y ya sacas el *valor de m* y luego el valor de b. Eme va en equis y b con ye creo, algo así, pero *m es la pendiente.*	**1**
	Cociente formado por $\frac{\text{Ordenada al origen}}{\text{abscisa al origen}}$	E13. Para calcularla se tienen los puntos dónde corta en el eje "*y*" y el eje "*x*" y vamos a usar la fórmula *y= mx + b*, donde b representa el punto de corte con ye y *m* representa la pendiente, entonces *para ele cuatro, es -5 y 3*, creo que arriba va el 3 en la fórmula (escribe y = 3/-5 + b] entonces *su pendiente sería 3/-5.*	**1**

Nota: F denota Frecuencia

En esta misma tarea, otra codificación que pudo identificarse como condición para poder calcular la pendiente fueron, la existencia de las intersecciones de la recta con los ejes (8) y que la recta tenga una cierta inclinación (18) y que se pueda apreciar un triángulo (4).

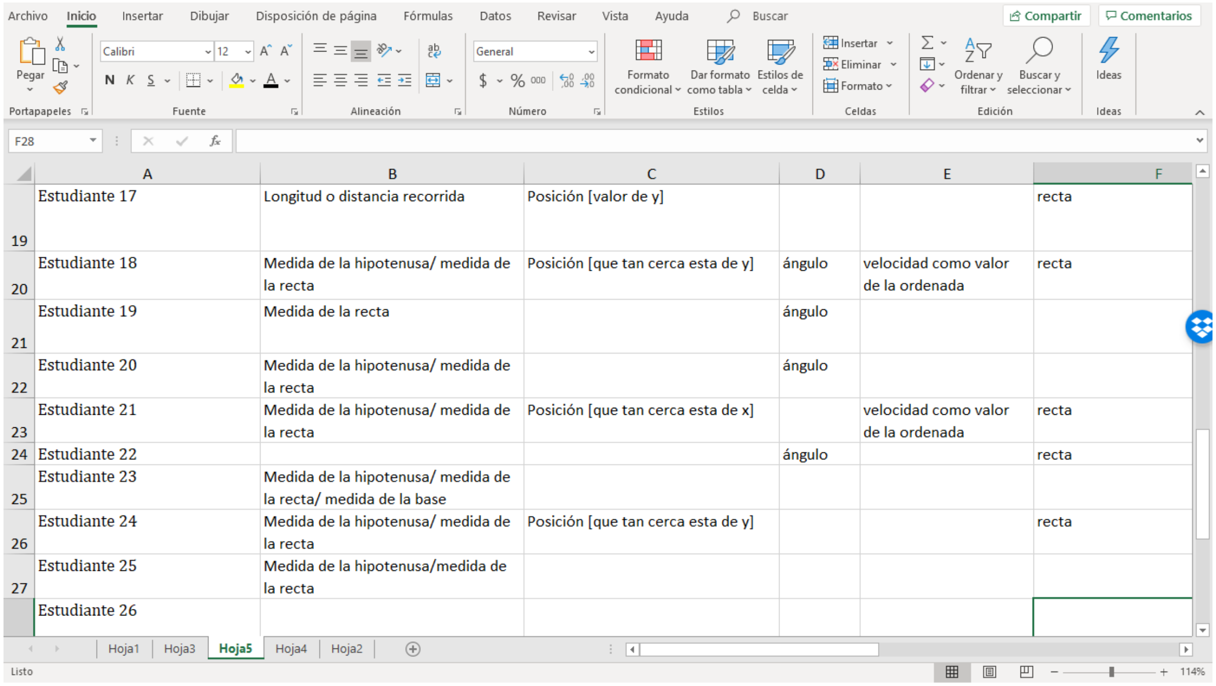
Cabe mencionar que para poder establecer las frecuencias, primero se organizó la codificación apoyándonos de Microsoft Excel. En esta es posible apreciar qué ideas o procedimientos empleó cada estudiante para realizar cada una de las tareas o lo que evitó la atendieran. Una parte de esta organización se muestra en la Figura 24.



		Tareas		
Estudiante	1	2	3	
Estudiante 1	Facilidad	Ángulo	Intersecciones-recta	creciente (subida)/ decrecie
Estudiante 2	Longitud-Base	Posición (Intersección con y)	Distancia del segmento (intersecciones)	creciente (subiendo valores)/ de
Estudiante 3	Inclinación [posición]	Posición (intersección con y)	Suma de los catetos	creciente (subiendo valores)/ de
Estudiante 4	Inclinación [ángulo]	Inclinación [posición hacia x]	inclinación [Longitud]	creciente (subiendo valores)/ de
Estudiante 5	Tiempo	longitud del segmento [1er.cuadrante]	Angulos	creciente (subiendo valores)/ de
Estudiante 6	Longitud-Hipotenusa	Longitud-angulo	Longitud [altura]	creciente (sube)/ decreciente (B
Estudiante 7	Longitud-Base	posición [ordenada mayor]	Longitud [recta]	creciente(suben)/decreciente (d
Estudiante 8	Longitud-Hipotenusa	posición [inclinación hacia y]	Longitud [recta]	Creciente (subiendo valores)/ de
Estudiante 9	pocisión (inclinación menor angulo)/CP	Posición- Inclinación (menor ang)	m en y=mx+b	creciente (subiendo valores)/ de
Estudiante 10	Inclinación-longitud [base]	Inclinación-longitud [base]	Intersecciones	creciente (sube)/ decrec
Estudiante 11	Longitud-Hipotenusa	Triángulo mayor	Longitud [recta]	creciente (va hacia positivos)/de
Estudiante 12	Longitud-Hipotenusa	ángulo (ordenada mayor)	Valor de ordenada [altura del extremo superior]	creciente (sube)/ decrec
Estudiante 13	Inclinación [ángulo]	Inclinación[Ángulo]	m en y=mx+b (intersección en y/intersección en x]	creciente (sube)/Decrecier
Estudiante 14	Longitud-Hipotenusa	posición[Intersección en ye]	Longitud [recta]	creciente (sube)/ decrec

Figura 24. Captura de pantalla de la primera codificación de los datos en Microsoft Excel

Asimismo, para reconocer qué ideas puso en juego cada estudiante, se realizó una codificación sin importar la tarea, esta también se organizó en Microsoft Word y se muestra una parte en la Figura 25. En esta se puede apreciar cómo se empieza a relacionar los códigos de manera que ayudan al establecimiento de los tema en la siguiente fase.



	A	B	C	D	E	F
19	Estudiante 17	Longitud o distancia recorrida	Posición [valor de y]			recta
20	Estudiante 18	Medida de la hipotenusa/ medida de la recta	Posición [que tan cerca esta de y]	ángulo	velocidad como valor de la ordenada	recta
21	Estudiante 19	Medida de la recta		ángulo		
22	Estudiante 20	Medida de la hipotenusa/ medida de la recta		ángulo		
23	Estudiante 21	Medida de la hipotenusa/ medida de la recta	Posición [que tan cerca esta de x]		velocidad como valor de la ordenada	recta
24	Estudiante 22			ángulo		recta
25	Estudiante 23	Medida de la hipotenusa/ medida de la recta/ medida de la base				
26	Estudiante 24	Medida de la hipotenusa/ medida de la recta	Posición [que tan cerca esta de y]			recta
27	Estudiante 25	Medida de la hipotenusa/medida de la recta				
	Estudiante 26					

Figura 25. Captura de pantalla de la primera codificación de los datos en Microsoft Excel sin considerar las características de las tareas.

Fase 3. *Búsqueda de temas*.

En esta fase la búsqueda de temas es un proceso activo en el que los códigos iniciales son comparados entre sí (Braun y Clarke, 2012). Esto permite identificar patrones asociados en las respuestas dadas por los estudiantes y así agruparlos en un tema. Es decir, consiste en identificar áreas de similitud y superposición entre los códigos; este proceso de generación de temas (y subtemas) implica el agrupamiento de códigos que parecen compartir algún rasgo unificador para reflejar y describir un patrón coherente y significativo en los datos.

En términos de este estudio, un tema es una preconcepción. Para ello, observaron los códigos asociados para hacer referencia al concepto de pendiente. En esta fase se agruparon los códigos que establecían una misma relación. Por ejemplo, se tenían códigos como: longitud de la altura, longitud de la hipotenusa, la pendiente es la medida de la diagonal, la pendiente es la distancia de un punto inferior a otro superior, y de estos se construyó el tema "*La pendiente como la longitud del segmento de recta*".

Fase 4: *Revisión de temas*.

Este proceso involucra un proceso recursivo mediante el cual el desarrollo de los temas es revisado en relación con los datos codificados y todo el conjunto de datos (Braun y Clarke, 2012). Para ello, se revisan los temas frente a los extractos asociados a cada uno a fin de que exista relación entre ellos. En este proceso, se pueden modificar o formar nuevos temas que capturen de forma más significativa los datos relevantes que responder a la pregunta de investigación.

Cabe mencionar que en esta etapa se pueden eliminar algunos temas que no agrupen el patrón respuesta de los estudiantes o que no sea suficientemente soportado por la evidencia. De acuerdo a Braun y Clarke (2012) algunas preguntas que pueden guiar este proceso son: ¿Es este realmente un tema (dado que podría ser sólo un código) ?; si se trata de un tema, ¿cuál es su calidad, es decir, dice algo útil sobre el conjunto de datos y la pregunta de investigación?; ¿cuáles son los límites de este tema, es decir, que puede incluir y qué excluye? y; ¿hay suficientes datos (significativos) para apoyar este tema, es decir, el tema es fino o denso?; ¿el tema tiene coherencia?

Por tanto, en esta etapa la coherencia entre los temas y los datos será la que determine el refinamiento de los temas (o subtemas, si es el caso). En esta etapa es válido también dividir un tema amplio en un número de temas más específicos o coherentes o bien, juntar aquellos de tal forma que en grupo forman un todo más coherente.

Como resultado de esta fase, en este estudio, algunos temas sufrieron cambios en el título o descripción, por ejemplo, se tenía el tema "*la pendiente como la recta"*, en el que se encontraban los códigos "la pendiente es la línea diagonal" y "la pendiente es la hipotenusa"; también se tenía el tema "*la pendiente como una subida o bajada*" cuyos códigos hacen referencia a " la pendiente es una subida o una bajada", "la pendiente es como un terreno que se ve como una bajada". Sin embargo, al analizar estos temas se identificó que hablaban de la pendiente como un ente o un objeto, de manera que esto provocó que se creará un tema, cuyo nombramiento fue: "*la pendiente como un objeto*". De manera que, los dos que eran temas en la fase 3 del análisis pasaron a ser dos subtemas, tal como se sinteriza en la Tabla 12. En esta fase se reunieron los investigadores para presentar los temas identificados y en caso de desacuerdo llegar a un consenso sobre los temas finales.

Tabla 12
Ejemplo de la creación de un tema y modificación a subtemas en la fase 4 del análisis.

Tema	Subtema	Códigos
La pendiente como objeto	La pendiente como la recta	• La pendiente es la diagonal. • La pendiente es la línea inclinada. • La pendiente es la hipotenusa. • La pendiente es la recta.
	La pendiente como una subida o una bajada	• La pendiente es una subida o bajada. • La pendiente es como un terreno donde se ve la subida o bajada.

Fase 5. *Definiendo y nombrando los temas*.

Braun y Clarke (2012) caracterizan esta fase como aquella en la que es necesario establecer claramente lo que es único y específico sobre cada tema; asimismo, un buen análisis temático tendrá temas que (a) no sean demasiados, ya que deberían idealmente tener un enfoque singular; (b) están relacionados, pero sin superponerse, por lo que no son repetitivos, aunque pueden basarse en temas anteriores; y (c) permiten responder directamente a la pregunta de investigación.

Habría que mencionar también que, en algunos casos, es posible tener subtemas dentro de un tema, que son útiles en casos en los que hay uno o dos patrones generales dentro de los datos pero cada uno se reproduce de diferentes maneras (Braun y Clarke (2012). Esta fase del análisis consiste en seleccionar extractos para presentar, analizar y luego exponer la historia de cada tema. De manera que, los temas en este estudio se definieron (ver Tabla 13) después de sesiones de trabajo entre los investigadores en los que se discutió sobre los aspectos que destacarían en cada tema.

Fase 6. *Producción del informe*.

Esta fase del análisis temático parte del conjunto de temas completamente nombrados y definidos, que en este caso son las preconcepciones de pendiente identificadas en los participantes.

Para los propósitos de esta investigación el reporte (presentado en el siguiente capítulo) consiste en: primer lugar, presentar una tabla que muestra de manera general los temas y subtemas asociadas a las preconcepciones de pendiente, así como la definición de cada una; y posteriormente describir cada una de ellas.

CAPÍTULO V

Resultados

Del análisis y triangulación de los datos, se identificaron 9 preconcepciones de pendiente en los estudiantes que aún no han trabajado el concepto de pendiente en el bachillerato. Cada una fue manifestada con diferente frecuencia y en algunas se identificaron subtemas, tal como se muestra en la Tabla 13.

Las entrevistas revelaron que la mayoría de los participantes tenía dificultades para describir o hablar de la pendiente en términos matemáticos. El 40% de los estudiantes declaró haber tenido una experiencia escolar con el concepto de pendiente en sus estudios de secundaria (la currícula oficial plantea su estudio en el grado 9), pero no recordaban su definición ni cómo calcularla. Sin embargo, mostraron tener varias ideas asociadas a la pendiente, algunas difusas y otras cercanas al concepto matemático. En consecuencia, en sus explicaciones hubo influencia su vida escolar pero mayoritariamente se basaron en sus experiencias de su vida cotidiana, ya que los términos que utilizaron para explicar tienen un significado distinto a la definición que se da en matemáticas. Por ejemplo, para ellos, el ángulo es el espacio que hay de la recta con respecto de la horizontal o el número con grados; inclinación, es la posición de la recta con respecto de la horizontal o vertical o el ángulo; diagonal, es una línea inclinada.

Tabla 13

Preconcepciones de la pendiente.

La pendiente…	Descripción	Subtemas	F
Como longitud de un segmento de recta	Se refiere a la medida de la recta o segmento de recta involucrado.	• La pendiente es la medida la recta. • La pendiente es el valor de la altura. • La pendiente es el valor de la base.	89 7 6
Como un objeto	Se refiere a la propia recta o a la parte inclinada de una superficie o de un objeto en la que pueda visualizarse una diagonal (línea inclinada).	• La pendiente es la recta. • La pendiente es como una subida o bajada.	43 10
Como la inclinación	Se refiere a la posición que tiene el segmento de recta.	• La pendiente es la posición de la recta con respecto a la horizontal o vertical. • La pendiente como la inclinación atribuida a la intersección con el eje y.	35 7
Como el ángulo	Se refiere al valor del ángulo que se forma de la horizontal hacia la diagonal de una escalera o rampa, o hacia la recta, con la característica de ser menor de 90°.		25
Como intersección en los ejes	Se refiere al punto de corte del segmento de recta con el eje x o el eje y.		22
Asociada a una expresión algebraica	Se refiere a una ecuación o al valor de algún elemento que pertenece a la ecuación de la recta.	• La pendiente es el valor de m en $y = mx + b$. • La pendiente es la ecuación. • La pendiente es el valor de b en $y = mx + b$.	7 6 2
Se obtiene del cociente determinado por los valores de las intersecciones con el eje x e y.	**S**e refiere a calcular la pendiente como el cociente de la abscisa al origen y ordenada al origen de manera indistinta.		4

Como una cualidad en rampas o escaleras	Se refiere a un rasgo necesario para facilitar el recorrido de una rampa y una escalera empleando un menor esfuerzo y/o tiempo.	3
Como incógnita	Se refiere a un valor desconocido o la solución de un problema.	2

Nota: F denota frecuencia

5.1 La pendiente como longitud de un segmento de recta

Esta preconcepción se refiere a considerar a lo que mide la recta o segmento de recta como la pendiente. Es utilizada por el 93% de los estudiantes, cada uno la mostró con diferente frecuencia. Esta se manifestó en su mayoría en las tareas que requerían el cálculo de la pendiente de una recta dada en el plano cartesiano (Tarea 3, 4, 7 y 9) y el cálculo y/o comparación de la pendiente de una rampa y de una escalera (Tarea 1 y 5). Los participantes que tienen esta preconcepción consideraron diferentes longitudes asociadas a la pendiente, las cuales se describen a continuación.

5.1.1 La pendiente es la medida de la recta.

Esta idea fue la de mayor frecuencia (89 veces) y se caracterizó como aquella en la que los estudiantes manifiestan que la pendiente es la medida de la recta dada cuando se da en el plano cartesiano, mientras que cuando se da una rampa o una escalera es la longitud de la rampa o la zanca (véase Figura 26 y Figura 27).

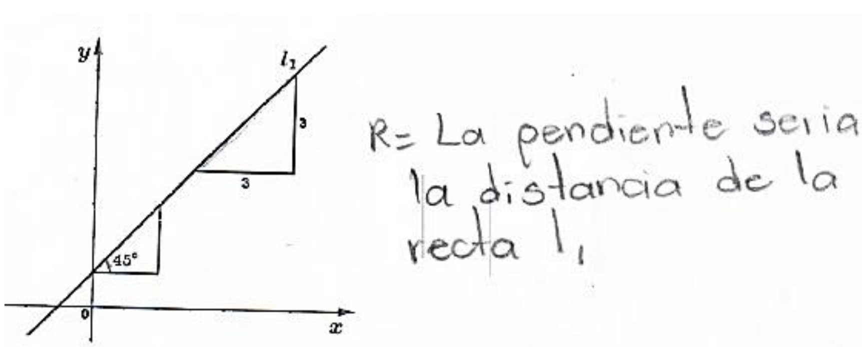


Figura 26. Ejemplo de la pendiente como longitud de la recta

Figura 27. Ejemplo de la pendiente como longitud de la zanca

Para obtener la longitud utilizan: el Teorema de Pitágoras, ya que a partir de visualizar un triángulo rectángulo la equiparán con la hipotenusa; miden la recta con una regla omitiendo el plano cartesiano (ver Figura 28) y/o; consideran que la medida de la recta es la proyección de la recta en el eje x o el eje y, tal cómo se muestra en el extracto de estudiante E14.

I: ¿Cuál es la pendiente de la recta l_1?

E14: Bueno pues aquí es uno, dos, tres y aquí uno [cuenta las particiones en el eje y positivo y negativo], entonces sería nueve lo que mediría toda la recta, porque ocho más uno, son nueve.

I: ok, pero ahí me estás dando lo que mediría esto [señala el eje y] y nos están pidiendo la pendiente de la recta l_1.

E14: sí, pero eso es lo mismo que mediría la recta.

I: ¿por qué consideras eso?

E14: porque si movemos la recta de manera que coincida con el eje y, entonces este punto [señala el extremo derecho] cae en ocho si tomamos que cada rayita vale uno [señala las particiones que se dan], y el otro punto llega a menos uno [señala el extremo izquierdo] pero como son distancias entonces es uno. Entonces, si sumamos las distancias nos da nueve, y como ya lo dije anteriormente que la pendiente es la distancia de un punto a otro, entonces nueve es la pendiente.

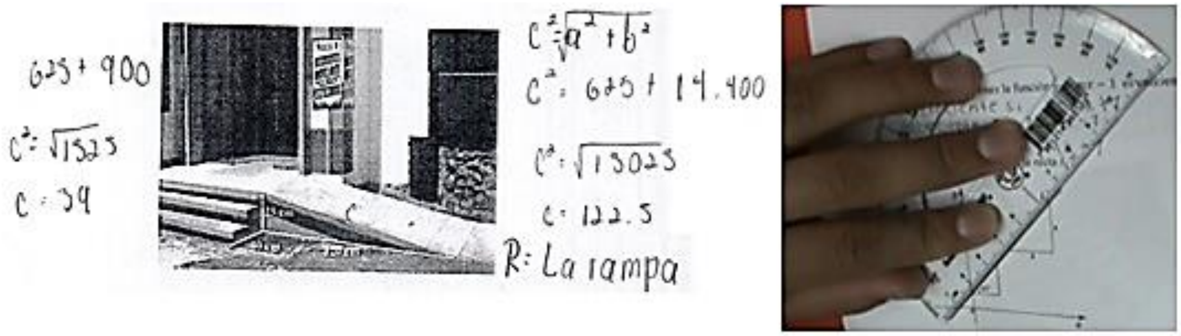


Figura 28. Procedimientos para obtener la longitud del segmento de recta dada.

En este subtema, 20% de los estudiantes consideran la pendiente como la longitud del segmento de recta pero de manera restringida, ya que consideran solo el segmento que se encuentra por encima del eje x, porque el segmento que se ubica por debajo del eje x daría distancias negativas, y esto no existe o no tiene sentido. A continuación, se muestra la parte de un extracto de la entrevista cuando el estudiante E27 hace esta declaración al atender la Tarea 4.

I: […][5] ¿La pendiente es la misma, o se modifica al trasladarse?

E27: si se modifica, porque ahora ya sólo tienes esto en ele dos [señala el segmento de recta que esta después de la intersección con el eje x], aquí se forma el triángulo, que es como lo que esta después de suelo.

I: ¿Qué quieres decir con eso?

E27: es que la recta es esta [señala a l_2], pero si suponemos que esto es el suelo [señala el eje x], entonces aquí empieza la pendiente [señala el segmento de recta] que sería donde se empieza a formar como este triángulo [remarca el triángulo, véase Figura 29].

I: ¿Entonces cuál es la pendiente de esa recta?

E27: hmmm… mediría esto [señala lo que sería la hipotenusa del triángulo] pero me apoyaría de la altura que sería lo mismo que mide la diagonal y entonces la pendiente es 4.

I: ¿entonces ese 4 es la pendiente de la recta ele sub dos o nada más de ese segmento?

E27: es lo mismo, porque esto que abajo es como si no existiera.

[5] […] se escribe con el objetivo de señalar la existencia de más discurso en la entrevista por ambas partes.

Figura 29. Procedimientos de E27 en la Tarea 4.

5.1.2 La pendiente como el valor de la altura.

Se manifestó principalmente en las tareas que pedían el cálculo de la pendiente de una recta dada en el plano cartesiano (7 veces). Esta refiere a considerar la longitud del segmento que baja desde su extremo derecho y es perpendicular al eje x. De esto modo, las principales atribuciones que dan para la pendiente es el valor de la máxima ordenada, tal como se muestra en la producción y el extracto de E7.

I: ¿Cómo son entre sí las pendientes de la recta l_1 y l_2?
E7: son iguales.
I: ¿por qué?
E7: porque las dos tienen la misma distancia nada más que… no, son diferentes, si son diferentes.
I: ¿por qué son diferentes?
E7: porque sus distancias son diferentes.
I: ¿a qué distancias te refieres?
E7: esta [señala el extremo derecho de l2] está más alta que la de l1, tiene una altura más… alta.
I: entonces, si te pido que me des su pendiente, ¿cuál es su pendiente?
E7: está [traza líneas punteadas desde el extremo superior hacia el eje y, véase Figura 30], el número que este aquí, puedo medirlo con la regla para saber cuánto es.
I: Así está bien, sólo escribe tu respuesta por favor.

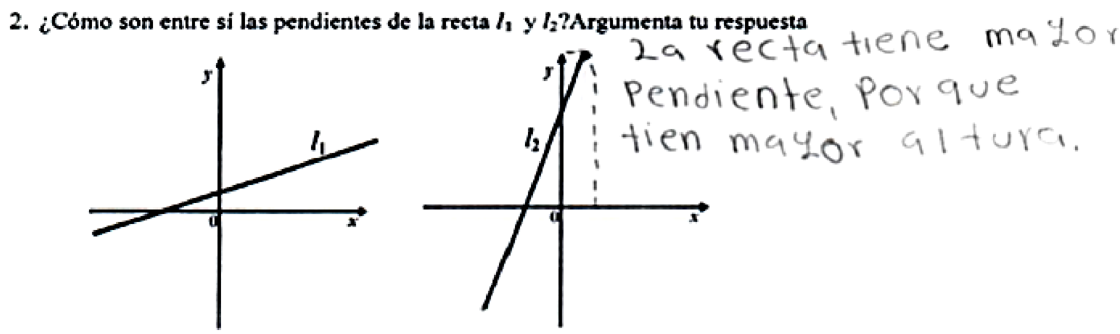


Figura 30. Procedimientos de E7 en la Tarea 2.

5.1.3 La pendiente como el valor de la base.

Parten de visualizar un triángulo rectángulo formado por la recta, el eje x y por una recta perpendicular bajada del extremo derecho hacia el eje x, dónde la medida de la base es la pendiente. Por tanto, fue natural para los estudiantes asociar a la pendiente el valor de la abscisa del extremo derecho del segmento. Se manifestó (6 veces) en las tareas que pedían la pendiente de la recta dada en el plano cartesiano, tal como se muestra en la producción de E30 (véase Figura 31).

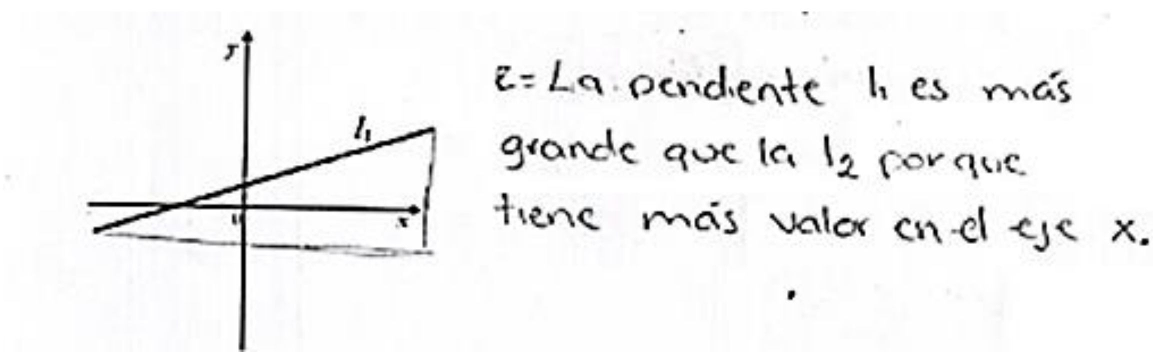


Figura 31. Justificación de E30 al resolver la Tarea 2.

De la misma manera, el estudiante E26 asigna el valor de la abscisa a la pendiente de la recta, pero para justificar resuelve una ecuación y según su criterio, esto justifica que su respuesta es correcta, tal como se puede apreciar en el siguiente extracto y su producción.

I: […] ¿Cuál es la pendiente de la recta l_1?

E26: sería seis.

I: ¿cómo lo sabes?

E26: porque si aquí bajamos [traza un perpendicular del extremo derecho hacia el eje x, véase Figura 32], queda en el punto seis.

I: entonces ¿esa es su pendiente?

E26: si, porque esa es su medida, aunque también lo podemos hace con una operación.

I: ¿qué operación?

E26: [escribe $y = 2x + 4$] equis vale uno, entonces [sigue escribiendo y sustituye el valor de 1 en la ecuación y continúa realizando las operaciones, tal como se ve en la Figura 32] y nos da 6, y sí, su pendiente es 6 […]

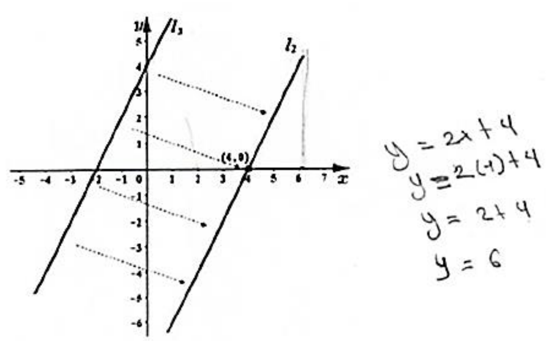


Figura 32. Procedimientos de E26 al resolver la Tarea 4.

Otra tarea en la que figuró fue en la de una escalera dadas la respectiva medida de uno de sus escalones. En esta, la pendiente fue asociada a la longitud horizontal que se forma al unir las huellas de todos los escalones omitiendo asi la medida de la contrahuella, tal como se puede apreciar en el extracto de la entrevista realizada a E23.

I: En la escalera, como la puedes ver aquí [señala la imagen en la hoja], los escalones tienen una medida de 27cm de huella, o sea donde se pisa y 18 cm de contrahuella, o sea la alzada, tal como se muestra en la fotografía. La pregunta es ¿qué pendiente tiene la escalera?

E23: La pendiente sería lo que mida la base de la escalera.

I: ¿A qué te refieres con la base?

E23: o sea de lo que abarque sin los escalones.

I: ¿cómo es eso?

E23: si, porque con todos los escalones se forma como un… un triángulo ¿no?, entonces si nada más nos fijamos en esto [simula con la mano una horizontal] sería solo la medida de la base de los escalones… o sea aquí sería 27cm su base y si juntamos todos los escalones sería 27 por … no sé cuántos escalones tiene la escalera, pero multiplicaría 27 por la cantidad escalones.

I: y ¿eso sería la pendiente?

E23: si, la medida de la base de la escalera.

5.2 La pendiente como un objeto

Esta preconcepción se refiere a considerar a la pendiente como a la propia recta o segmento de recta, así como a la parte inclinada de una superficie o de un objeto en el que se visualice una diagonal, entendiéndose ésta en términos coloquiales, es decir como una línea inclinada respecto de la horizontal. Se manifestó en el 66% de los estudiantes, cada uno con diferente frecuencia. Esta se identifica en dos contextos, en matemáticas y en la vida cotidiana, pero en ambas hacen referencia en sí al ente, tal como se describe a continuación.

5.2.1 La pendiente es la recta.

El estudiante hace referencia a la pendiente como a la recta que se da en el plano cartesiano, en términos de "es la línea inclinada", "es una diagonal", "es la recta", principalmente al preguntar sobre qué es la pendiente (44% de los estudiantes). Con esta idea, al resolver las tareas que involucraban una recta en el plano cartesiano omitieron toda la información que se dio en estas. Asimismo, cuando se les preguntó sobre lo que se le venía a la mente cuando escuchaban la palabra "pendiente", antes (estudiantes que al plantearles la primera tarea, declararon no haber trabajado el tema) o después (una vez contestado la tarea 1), el 33% hizo referencia a una línea inclinada. En general, esta idea se manifestó 43 veces, y en la Figura 33 se muestran algunas evidencias.

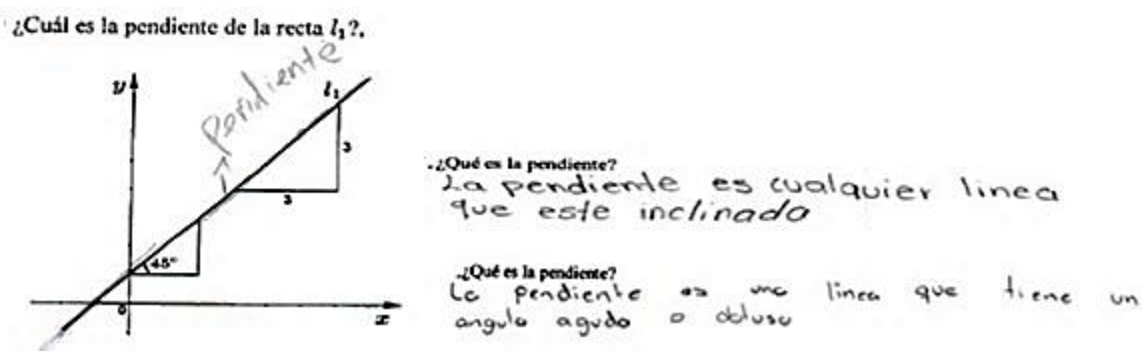


Figura 33. Ejemplos de la pendiente preconcebida como la recta.

En esta categoría se encontró con dos tipos de estudiantes, quienes se aferraron a la idea de que la pendiente es la recta por lo que al pedirle un valor de la pendiente, ellos no lo atribuían a nada más que al propio dibujo dado, tal como se muestra en el siguiente extracto.

I: ¿Cuál es la pendiente de la recta l1? … aquí tenemos la recta l_1 y te dan algunos datos ¿Cuál sería su pendiente?

E17: La pendiente sería está [señala recorriendo con su lápiz la recta dada].

I: ¿a qué te refieres?

E17: a esta [señala nuevamente la recta]

I: ¿a la recta?... es que no entiendo a qué te refieres con esta.

E17: pues es esta [coloca la punta del lápiz sobre la recta].

I: ¿puedes marcar ahí cuál es la pendiente?

E17: [remarca la recta dada]

I: ¿sería la línea?

E17: sí, esa es una pendiente.

I: y si te piden encontrar la pendiente, ¿qué harías o qué resultado daría?

E17: pues nos darían puntos por donde va a pasar la pendiente, y es que hay una fórmula que te da valores y con eso encuentras los puntos por donde va a pasar la pendiente

I: la recta y la pendiente ¿es lo mismo?

E17: si, sólo si tiene forma de una pendiente.

I: ¿cómo es eso de forma de una pendiente?

E17: una línea inclinada.

En cambio, otros que también partieron de esta idea, fue natural dar la longitud del segmento como valor de la pendiente, tal como se deja ver en el extracto de la entrevista a E1.

I: Dada las rectas l_1, l_2, l_3 y l_4 . ¿En cuál o cuáles es posible calcular la pendiente?

E1: la ele uno no, porque está en la recta normal [con el lápiz simula la horizontal] y la dos no se puede porque la línea no está hacia acá [se refiere a la prolongación y cortar con el eje x] y la tres y cuatro si se puede porque cortan y son pendientes.

I: ¿puedes calcular la pendiente de la recta ele sub tres?

E1: ¿su pendiente?

I: sí, ¿Cómo la calcularías?

E1: sacar la fórmula de equis para saber dónde va a quedar el punto este y este [señala las intersecciones]

I: ¿dónde va a quedar los puntos, pero que no ahí ya están los puntos?

E1: sí, pero si no los conociéramos tendríamos que sacar la fórmula para encontrarlos y así poder trazar la pendiente

I: ¿la pendiente sería la línea?

E1: si [escribe en su hoja, esta es la pendiente, véase Figura 34]

I: pero, entonces ¿cuál sería su valor?

E1: pues si me piden un valor sería lo que mide ¿no? [...]

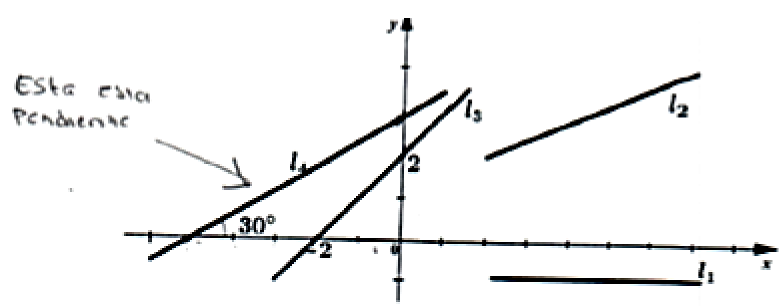


Figura 34. Producción de E1 en la Tarea 3.

Como se aprecia en el extracto de la entrevista al estudiante E17, sino se le hubiese pedido un valor de la pendiente, él no hubiera asignado medida del segmento. Así como este estudiante, mantienen su idea de pendiente como la recta. Por ello, en él la preconcepción identificada es de pendiente como un objeto.

5.2.2 La pendiente es como una subida o una bajada.

Esta preconcepción es cercana a su experiencia de su vida cotidiana, como es su interacción con el recorrido de calles y carreteras. Se caracteriza por considerar a la pendiente como una subida o una bajada, es decir, un sendero o lugar con declive. En las tareas identifican a la pendiente como la rampa para las sillas de ruedas y la rampa en la que se apoya la escalera, tal como se muestra en la Figura 35.

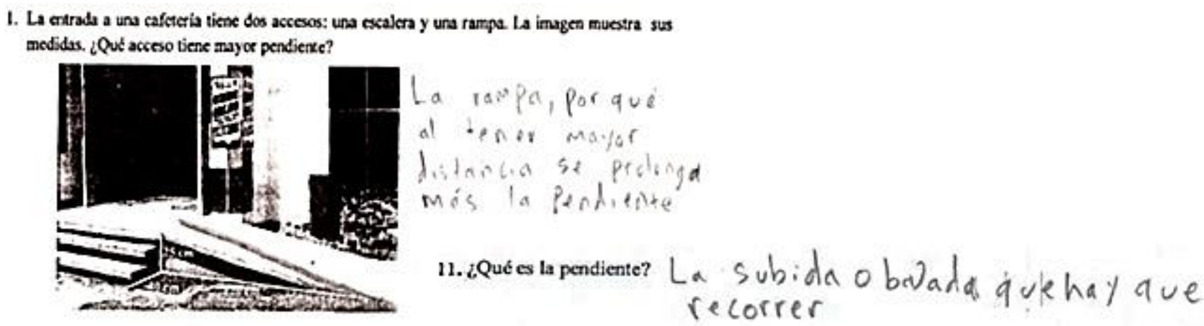


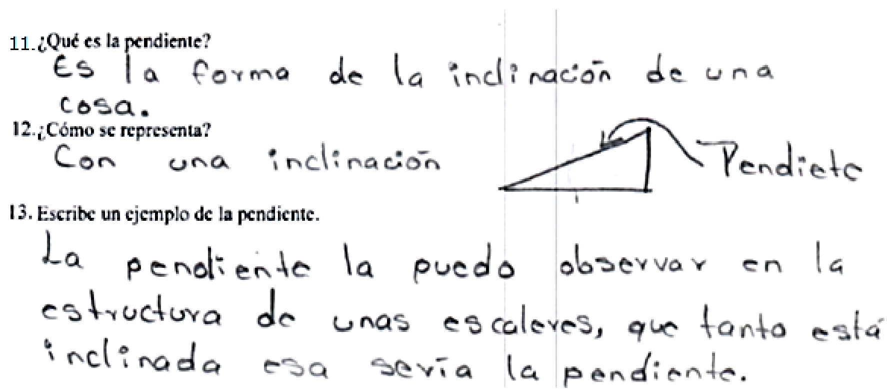
Figura 35. Ejemplos de la pendiente como la subida o bajada.

Asimismo, esto se puede mirar en el extracto de la entrevista cuando el estudiante E1 atendió la tarea 5.

I: En la escalera, los escalones tienen una medida de 27 cm de huella y 18 cm de contrahuella, tal como se muestra en la fotografía. ¿Qué pendiente tiene la escalera?
E1: pues la pendiente es esta parte de la escalera.
I: ¿cuál?
E1: pues esta parte, la que se forma con los escalones.
I: pero ¿a qué parte te refieres?
E1: esta parte, la que se ve inclinada [con su lápiz señala toda la escalera].
I: puedes marcarla ahí por favor
E1: [toma una regla y traza una línea, véase en la Figura 36] esta.
I: ¿y cómo la calculamos?
E1: pues sólo la trazamos ¿o quiere un valor?
I: la pregunta es ¿cuál sería la pendiente de esa escalera?
E1: uhmm… pues esta sería la medida de la pendiente.

Figura 36. Producción del estudiante E1 en la tarea 5.

Analizando el discurso de E1, así como su producción, se percibe que el asignarle un valor a la pendiente es otro requerimiento que trata de asociar con la pendiente, pero para él es claro sobre lo que piensa acerca de la pendiente, es decir la mira como un objeto y atribuirle la medida es una asociación que hace forzada como para satisfacer al entrevistador. Por ello, se abstrae que la idea esencial que pone en juego el estudiante E1 es la pendiente como un objeto, visto más como una subida o bajada. De manera similar, se puede apreciar la misma idea en la producción del estudiante E10 al definir lo que es pendiente, cómo lo representa y al ejemplificar en la Figura 37.


11. ¿Qué es la pendiente?

Es la forma de la inclinación de una cosa.

12. ¿Cómo se representa?

Con una inclinación

13. Escribe un ejemplo de la pendiente.

La pendiente la puedo observar en la estructura de unas escaleres, que tanto está inclinada esa seria la pendiente.

Figura 37. Ejemplo de pendiente como subida o bajada en la producción de E10.

5.3 La pendiente como la inclinación

Se caracteriza por considerar a la pendiente como la inclinación, entendida como la posición que tiene un segmento de recta o un objeto. Para determinarla se apoyan de: la posición de la recta con respecto de la horizontal o vertical (35 veces) y; del valor de la intersección que tiene la recta con el eje y en el plano cartesiano (7 veces). Se percibió la dificultad para externar verbalmente lo que consideran por inclinación, de manera que para explicarla utilizaron la mano o el brazo para visualizar cuando un objeto tiene inclinación y pendiente, evidenciando y afirmando que la pendiente e inclinación son sinónimos. A continuación, se describen las dos ideas que manifiestan los estudiantes.

5.3.1 La pendiente es la posición de la recta con respecto a la horizontal o vertical.

Se caracteriza por hacer referencia a la pendiente en términos de la posición que tiene el segmento de recta respecto de la horizontal (30 veces) o de la vertical (5 veces). El 23% de los estudiantes definen a la pendiente como la inclinación de la recta, entendiéndola como la posición, por ejemplo, el estudiante E30 declara que "*la pendiente es la inclinación y ésta es el que tan lejos o que tan cerca este la recta a ye*".
O como también lo emplea el estudiante E13 para dar respuesta a la Tarea 2.

I: ¿Cómo son entre si las pendientes de las recta l_1 y l_2?

E13: son diferentes.

I: diferentes ¿por qué?

E1: porque una está más inclinada que la otra.

I: ¿cuál tendría mayor pendiente?

E13: esta [señala la recta l_2]

I: ¿Por qué?

E13: pues en sí se ve más inclinada que la otra, entre más recta parezca, más inclinada va a estar.

I: ¿cómo te das cuenta de lo inclinado?

E13: pues me guío por el eje *y*, por ejemplo si esta como recto… bueno como parado, por ejemplo, si una rampa está casi igual como una pared va a estar muy empinada y va a estar difícil subirla, pero en cambio sí está un poquito más planito como el suelo si se va a poder caminar, por eso esta [señala la recta l_2] tiene más pendiente.

I: pero aquí ¿cómo ves que tiene más pendiente?

E13: porque está más inclinada, y sé que está más inclinada si se acerca más a ye o bueno si se asemeja a ye.

Cabe mencionar que el 20% de los estudiantes consideran que una recta tiene más pendiente si se encuentra más cerca de la horizontal, tal como se observa en el extracto de la entrevista de E6 y en la producción del estudiante E4 (véase Figura 38).

I: ¿Cómo son entre si las pendientes de las recta l_1 y l_2?

E6: pues una está enfocada más hacia abajo y la otra esta como más hacia arriba, aquí van cambiando sus grados, una tiene mayor grado que la otra y por eso hace que vayan cambiando de dirección.

I: ¿cuál tendría mayor pendiente?

E6: esta [señala la recta l_1]

I: ¿por qué?

E6: porque entre menos grados tenga la recta va a ser más grande su pendiente debido a que como que se va acostando y entonces eso hace que se haga un poco más larga

I: entonces, ¿cuál sería la pendiente?

E6: la inclinación

I: ¿y qué es la inclinación?

E6: la pendiente

I: ¿cómo, entonces pendiente e inclinación es lo mismo?

E6: sí, algunos le llaman pendiente y otros le llaman inclinación, pero en sí se refiere a qué tan cerca o lejos esta del eje *x*.

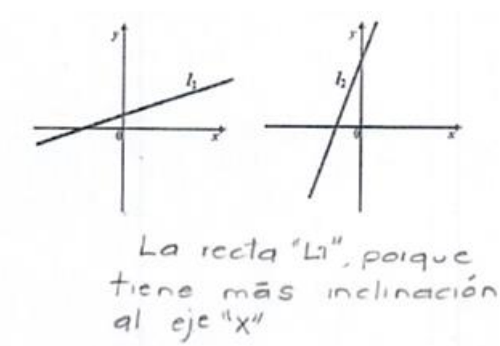


Figura 38. Producción del estudiante E4 en la tarea 2.

5.3.2 La pendiente como la inclinación atribuida a la intersección con el eje y.

Se manifestó principalmente al comparar las pendientes de dos rectas (7 veces), entendiéndola como la inclinación, pero atribuida a la intersección que tienen las rectas con el eje y. A continuación se muestra en parte del extracto de la entrevista de E15 así como su producción en la Figura 39.

[…]

E15: la recta l_2 tiene mayor pendiente, porque está más inclinada.

I: ¿cómo sabes que está más inclinada?

E15: porque por ejemplo suponiendo que aquí tenemos uno, dos, tres [Da graduación a los ejes de ambos planos cartesianos, ver Figura 39], entonces como podemos ver, la recta l_1 pasaría por el punto uno, y de la recta l_2 su inclinación está hasta el número cuatro, entonces eso también me demuestra que la pendiente es mayor.

I: ¿por el corte con el eje y?

E15: sí, eso nos demuestra cual tiene mayor pendiente en el plano cartesiano.

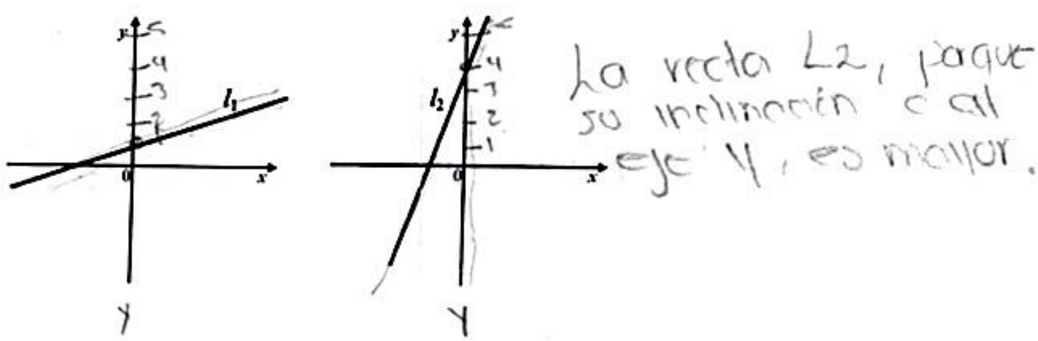


Figura 39. Producción del estudiante E15 en la tarea 2

5.4 La pendiente como el ángulo

Se refiere a considerar la pendiente como el valor del ángulo que se forma de la horizontal hacia la recta o una diagonal para el caso de la escalera o rampa. El 40% de los estudiantes la manifiesta con mayor frecuencia en las tareas 3 y 9, seguida de la 5 y en el resto más esporádicamente (ver Figura 40).

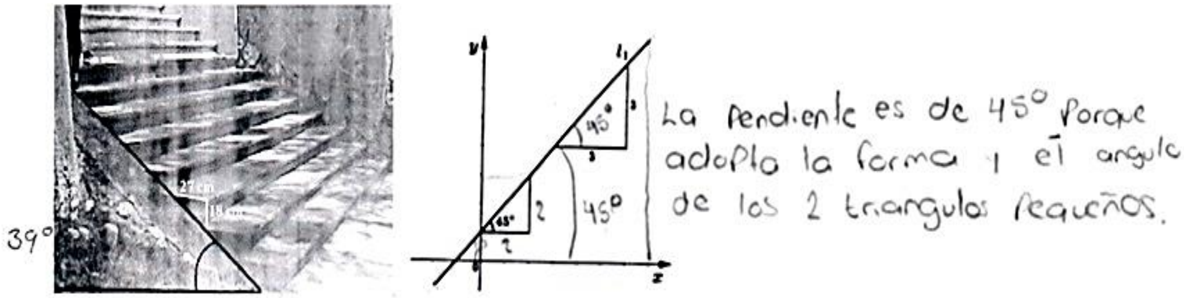


Figura 40. Ejemplo de la preconcepción de la pendiente como el ángulo

El 20% del 40% de los estudiantes, dicen explícitamente la pendiente es el ángulo, mientras que el otro 20% argumenta que el valor de la pendiente es el valor del ángulo porque ese es su inclinación, tal como se muestra en el siguiente extracto de entrevista.

I: Dadas las rectas l_1, l_2, l_3 y l_4, ¿en cuál o cuáles es posible calcular la pendiente?
E18: en la cuatro y la tres
I: ¿Por qué?
E18: porque la pendiente es la inclinación y estos tiene una base y así se podría calcular el ángulo. Y en estas [señala la recta l_1 y l_2] no, no tienen una base.
I: tú crees que es importante conocer la base para poder calcular la pendiente, ¿De qué te ayudaría la base para poder calcularla?
E18: porque a través de ahí se pude medir el ángulo, y ese es su inclinación, lo que te piden.
I: Pero te piden la pendiente.
E18: si, pero es lo mismo que su inclinación y su inclinación es el ángulo.

5.5 La pendiente como el valor de la intersección en los ejes

Esta preconcepción se refiere a considerar la pendiente de la recta como el punto de corte entre la recta dada y alguno de los ejes del plano cartesiano. El 33% de los estudiantes la manifestó en al menos una tarea, asignando la ordenada al origen o la abscisa al origen como el valor de la pendiente de la recta. Como ejemplo se muestran las producciones del estudiante E2 al resolver la Tarea 7 y 9 (ver Figura 41) y en la entrevista declaro que la pendiente es "*el punto donde se cruza la recta con el eje y o x*".

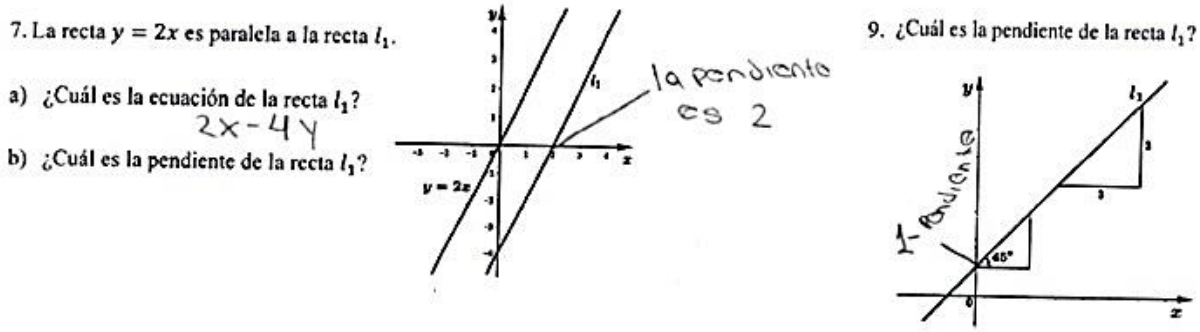


Figura 41. Producciones del estudiante E2 en la Tarea 7 y tarea 9.

Cabe mencionar que el 27% de los participantes manifestó que la recta debe intersecarse con el eje x o el eje y para poder obtener la pendiente, caso contrario no es posible calcularse, tal como se muestra en los siguientes extractos de entrevista.

I: Dadas las rectas l_1, l_2, l_3 y l_4, ¿en cuál o cuáles es posible calcular la pendiente?

E3: Yo digo que en esta [señala la recta l_3] y está también [señala la recta l_4] […] Las otras no, porque no cortan a las rectas estas [señala los ejes y, x], la dos esta inclinada pero no corta, y todas tienen que cortar para que se les pueda calcular. […] Para l_3, sería 2, porque es ahí hacia donde se inclina.

E10: La ele tres y ele cuatro, porque las dos pasan por los ejes, aunque si alargamos la ele 2 también podría pasar, pero no sé qué tanto afecte, mientras que la uno no, porque solo pasaría por un eje.

E11: En la ele cuatro y ele tres, en ele cuatro ya nos están dando el ángulo, para la ele tres puedo sacarlo o utilizar el corte en ye, mientras que ele uno y ele dos no cortan al eje x o al eje *y.*

Otro aspecto que resaltar es que, a pesar de que algunos estudiantes no consideran a la pendiente como la intersección, para ellos si es un prerrequisito que la recta tenga intersección con algunos de los ejes del plano cartesiano, pero es más por la necesidad de visualizar un triángulo, no porque les sirva para calcularla.

5.6 La pendiente asociada a una expresión algebraica

Esta preconcepción incluye ideas de la pendiente como la ecuación o el valor de algún elemento de la ecuación de la recta $y = mx + b$, específicamente m y b. Esta se manifestó principalmente en algunos estudiantes que declararon haberla estudiado en la educación secundaria.

5.6.1 La pendiente es el valor de m en la ecuación $y = mx + b$.

Se reconoce el valor de m como la pendiente en la ecuación de la recta $y = mx + b$. Se manifestó en el 7% de los estudiantes y se empleó en al menos en 2 tareas. Siempre que se pidió la pendiente, los estudiantes buscaron la expresión $y = mx + b$ en el planteamiento de las tareas o la dedujeron de los datos, tal como se observa en las producciones del estudiante E13 en la Tarea 5 (Figura 42).

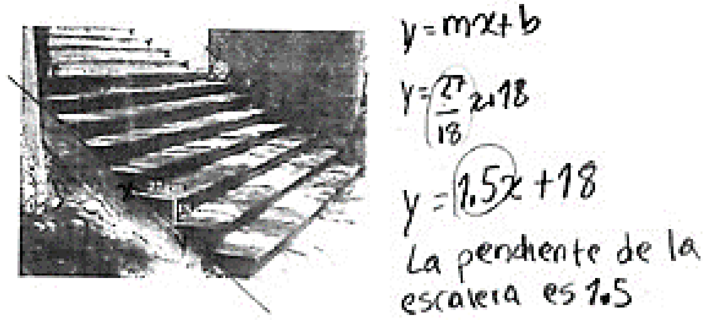


Figura 42. Producciones de E13 en la Tarea 5.

De la misma manera lo hace el estudiante E9, quien establece la relación con la expresión $y = mx + b$, pero declara no recordar como obtener, tal cómo se observa en el extracto de su entrevista al atender la Tarea 1.

> **I:** La entrada a una cafetería tiene dos accesos: una escalera y una rampa. La imagen muestra sus medidas. ¿Qué acceso tiene mayor pendiente?
>
> […]
>
> **I:** ¿conoces otra forma para conocer cual tiene mayor pendiente?

E9: bueno también se podría hacer con el plano cartesiano sacando lo de eme y b, de ahí sacas la pendiente.

I: Me podrías mostrar cómo se hace eso

E9: haces un plano cartesiano, sacas eme y b, pero aquí no tengo esos datos. Sólo sé que m es la pendiente.

I: ¿y no los podrías obtener de los datos que te dan ahí?

E9: es que no sé cómo se hace, no me lo han enseñado…solo me acuerdo que nos daban lo de eme y be y de ahí sacábamos la pendiente.

Asimismo sucedió cuando se enfrentó con la Tarea 3, sólo reconoce que m es la pendiente, pero al pedirle que trabaje con ella, el trabajo algorítmico con el concepto sobresale de sus ideas y en el procedimiento que realizó al querer representar la pendiente en el plano cartesiano, tal cómo se observa en parte del siguiente extracto.

I: Tenemos las rectas l_1, l_2, l_3 y l_4, ¿en cuál o cuáles es posible calcular la pendiente?

E9: en todas.

I: ¿Por qué?

E9: porque ya tienes el plano cartesiano, solamente te guiarías contando y ya sacas el valor de m y luego el valor de b.

I: por ejemplo aquí [señala la recta horizontal l_1] ¿cuánto sería su pendiente?

E9: ah, a ver si me acuerdo… uhmm… creo que eme era dos y be era, no, menos dos [escribe m=2 y agrega el signo quedando m=−2 y escribe b=1]… algo así.

I: ah ok!, ahora me puedes decir por qué, ¿Qué significa m?

E9: es que a mí me explicaron pues que eme es del primer valor que da una ecuación y ya para sacar mi pendiente vas colocando un punto y sale tu recta [remarca el punto (2,-1)]

I: ah ok, por ejemplo aquí el eme igual a menos dos es porque tienes aquí dos [señala el valor de x=2]

E9: ah no, si me equivoqué era dos [borra el signo en dónde escribió el valor de m]…. aja eme va en equis y b con ye creo, algo así, pero creo que tomas el valor de este [señala el eje y] y ya de ahí vas contando algo así [hace como conteos verticales con el lápiz].

I: bueno ya tienes los valores de eme y de be, entonces ahí ¿cuál sería su pendiente?

E9: pues no tiene porque está en recta horizontal, no hay ninguna pendiente.

I: y ¿por qué sabes que no hay ninguna pendiente?

E9: porque se mantiene este… horizontalmente, no se ve así como aquí [señala la recta 2] que esta inclinada.

I: ah ok, entonces ¿no tendría pendiente?

E9: para mí no.

I: y en la segunda, o sea ele sub dos ¿cuál sería su pendiente?

E9: aquí si hay pendiente

I: y ¿cuál sería?

E9: pues lo voy a tratar de sacar pero no, no lo he visto. Pero igual trataría de sacar a eme y be.

[…]

I: por ejemplo si tú quisieras conocer la pendiente ¿de qué te serviría conocer a m y b?

E9: pues porque es ir acomodando eso y ya sacaríamos la pendiente.

I: a ver supongamos que en ese plano [se refiere al dado en la tarea], yo te doy una m igual a tres y un b igual a 1, si yo te doy eso valores, ¿cómo los acomodarías aquí?

E9: ya me acordé!, es mejor sacarlo como fracción [escribe el $m = \frac{3}{1}$ y ya escoges el uno [se posiciona en x=1] y este, uno dos tres aquí [sube tres posiciones y coloca un punto] y luego otra vez uno y uno y ya sale [traza un segmento que pasa por (1,1) y en (1,3), véase Figura 43] ya pasaría por aquí.

I: entonces ¿cuál sería su pendiente?

E9: pues si eme vale 3 entonces es tres, la verdad no sé muy bien, pero yo sé que eme es la pendiente.

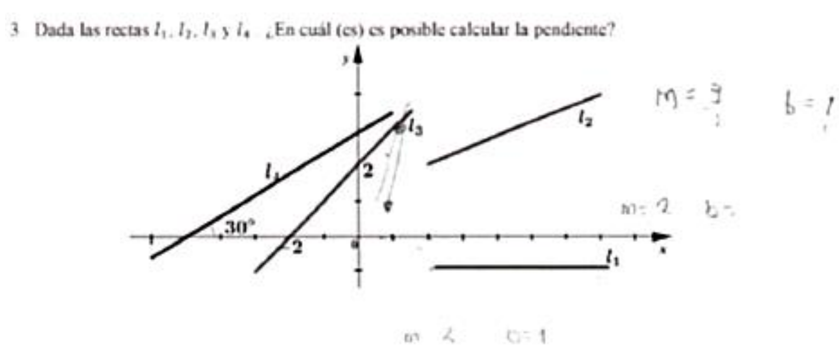


Figura 43. Producciones de E9 en la Tarea 3.

5.6.2 La pendiente es la ecuación.

Los estudiantes referencia a la ecuación de la recta como la pendiente (17%). Se utilizó en las tareas 4, 7 y 11, con diferente frecuencia. Un estudiante distingue que su definición de pendiente es propia para matemáticas, cuya idea principal es la pendiente como una ecuación. A continuación se muestra el extracto y la evidencia escrita del estudiante E1 que manifestó esta preconcepción.

I: con tus palabras, me puedes decir qué es la pendiente

E1: si, [Escribe en la hoja, la pendiente en la matemática es cuando tenemos que buscar una fórmula de una línea recta, véase Figura 44] eso es, en mi opinión

I: ¿qué quieres decir con eso?

E1: ah que la pendiente es buscar una fórmula para que nos dé una línea.

I: ah ok, ¿has escuchado hablar de la ecuación de la recta?

E1: si, pues es la fórmula que buscamos.

I: ah ya, entonces ¿la pendiente es la ecuación de la recta?

E1: en matemáticas sí.

I: ¿y cuando no es en matemáticas?

E1: es que depende, puede ser un ángulo o una subida o bajada.

[…]

I: Me puedes dar un ejemplo por favor

E1: pues es como esta ¿no? [señala la recta de la Tarea 9]

I: bueno pero que sea creado por ti, que hallas visto en otro lado, uno que tú puedas asociarlo con la pendiente.

E1: lo voy a hacer en una recta, ¿lo puedo hacer?

I: si claro

E1: [traza el plano cartesiano y lo gradúa, traza una recta que interseca en dos puntos exactos] y ya de esta tenemos que sacar un fórmula para saber si es cierto, si da aquí o no [se refiere a la recta]

I: ¿entonces cuál es la pendiente?

E1: pues es buscar la fórmula o ecuación que nos da esta [Señala la recta que trazó, véase Figura 44].

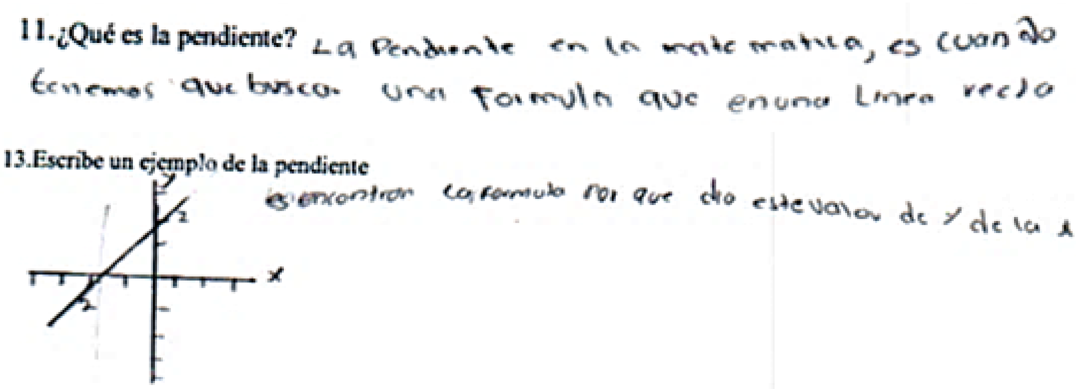


Figura 44. Producciones del estudiante E9 en la Tareas 11 y 13.

Entre los argumentos de otros estudiantes encontramos que "*la pendiente es una medida expresada en una ecuación, por eso la ecuación es la pendiente*", "*la pendiente es esta ecuación*". De manera que en sus respuestas figuran expresiones como $y = 2x$, $y = x - 2$, tal como se ve en la producción de E14 en la Figura 45.

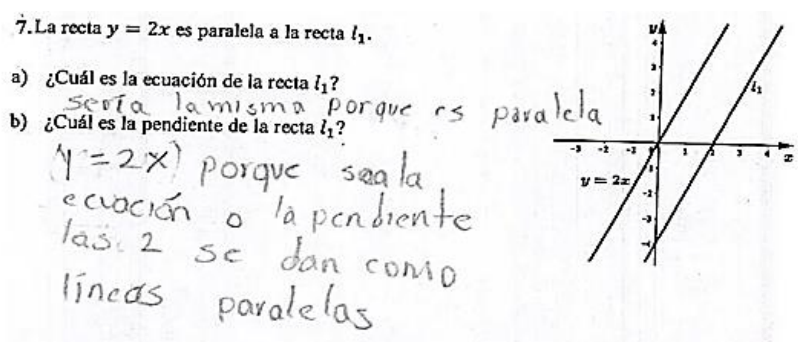


Figura 45. Producción del estudiante E14 en la Tarea 7.

5.6.3 La pendiente es el valor de b en la ecuación $y = mx + b$.

Esta idea se evidenció en el 7% de los estudiantes, y se identificó en los argumentos "*la pendiente es el valor de b en la ecuación* $y = mx + b$" y "*la pendiente es el término independiente de la ecuación de la recta*". Esta idea se diferenció de la preconcepción de la pendiente como la intersección de los ejes porque en aquella los estudiantes hablaban específicamente del punto de corte, mientras que aquí se refieren específicamente al valor de b de la expresión algebraica sin relacionar al papel de b con el corte en la gráfica en el eje y. Esto se puede apreciar en el extracto de la entrevista realizada a E12.

I: La gráfica de la recta l_1 tiene por ecuación a $y = 2x + 4$, es trasladada de modo que ahora está sobre el punto (4,0) [señala con el dedo el punto] y se trasforma en l_2, en lugar de ser ele uno, pasa a ser ele dos [señala con el dedo el desplazamiento], ¿qué pendiente tiene l_2?

E12: La pendiente es la misma, porque es paralela, o sea es igual a la recta l_1... no, espere…

I: a ver, ¿cuál es la pendiente de l_1?

E12: es cuatro

I: y ¿cuál es la pendiente de l_2?

E12: dos

I: ¿por qué cuatro es la pendiente de ele uno?

E12: porque aquí lo dice la ecuación [señala la ecuación dada] y este número siempre va a ser la pendiente y después dice el problema que se traslada a dos entonces va a cambiar la pendiente.

I: entonces, ¿cuál sería la pendiente de ele dos?

E12: Tendría que sacar una ecuación como esta [señala la ecuación dada], y ver qué valor va a tener este número [señala el término independiente de la ecuación] pero no sé cómo se saca, no me acuerdo si nos lo enseñaron.

5.7 La pendiente se obtiene del cociente determinado por las intersecciones en el eje x e y

Esta idea se refiere a identificar las intersecciones en los ejes y establecer el cociente de manera indistinta. Se empleó en 4 tareas por el 3% de los estudiantes y es un procedimiento para obtener el valor de m. La figura 46 muestra cómo el estudiante E13 lo utiliza para contestar a los requerimientos de la Tarea 3.

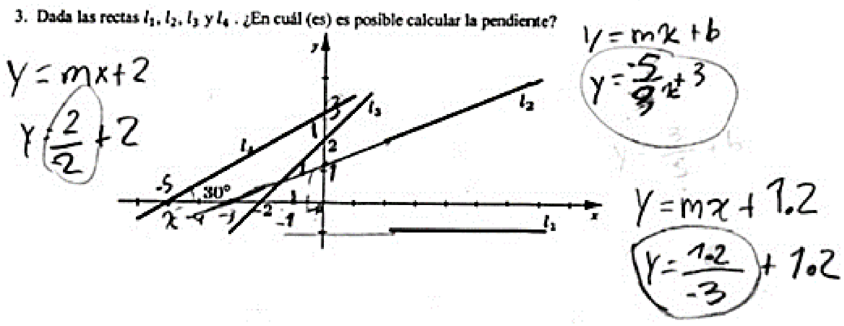


Figura 46. La pendiente obtenida del cociente de las intersecciones para la Tarea 3.

De la misma manera, el estudiante E13 pone en juego la misma idea al resolver la tarea 7 (véase Figura 47), pero en esta ocasión forma al cociente tomando intersección en x entre intersección en y, en el cual el manifiesta que no importa el orden en cómo se escriban, tal como se puede apreciar en el siguiente extracto de entrevista.

I: ahora tenemos lo siguiente, la recta $y = 2x$ es paralela a la recta l_1 [señala en la imagen], ¿cuál es la ecuación de la recta l_1?

E13: bueno, tendría que sacar una ecuación como esta [escribe en la hoja $y = mx + b$] y ver qué valor a tener este [señala a m]…pues aquí tenemos que el punto de corte es en –4, ahora para sacar mx tenemos que calcular, entonces… [hace trazos en la gráfica]…tenemos que empezar desde el punto de corte en los dos, aquí es –2 y acá es 4 [escribe formando el cociente], bueno aquí va a ser un chilaquil con los signos

I: ¿por qué?

E13: bueno no importa porque de todas maneras menos entre más es menos.

I: entonces, ¿cuál su ecuación?

E13: esta [escribe en la hoja su respuesta, véase Figura 47]

I: ahora lo siguiente, ¿cuál es la pendiente de la recta l_1?

E13: sería esto de aquí [señala en su respuesta la fracción] sería la fracción de acá [escribe su respuesta] que equivaldría a –0.5, esa sería su pendiente.

I: ¿existe un orden para acomodar los números en la fracción?

E13: no importa, de hecho nos va a dar lo mismo.

I: ¿sí?

E13: [comprueba y se da cuenta que no] ah no!, aquí nos da menos dos.

I: entonces, ¿cuál es la pendiente?

E13: nunca me pregunté del orden, yo sabía que no importaba, pero ahorita ya empiezo a dudar, siempre lo hago así como venga. Pero aquí yo digo que si es menos cero punto cinco.

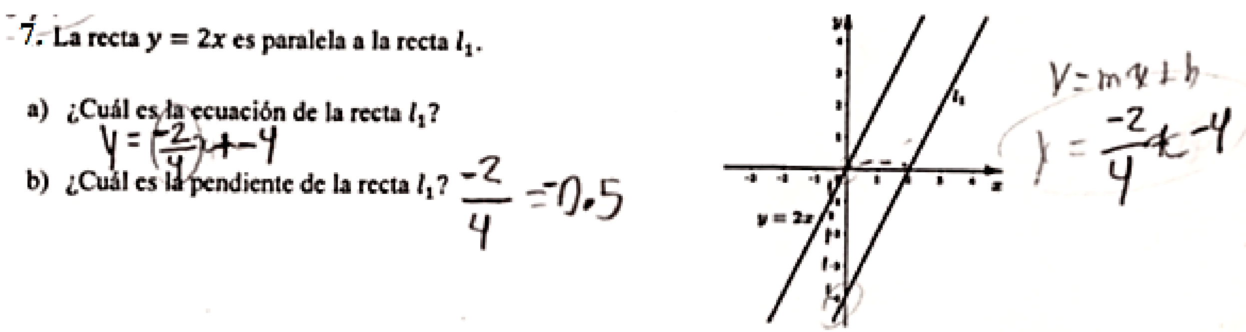


Figura 47. Producción del Estudiante E13 al resolver la Tarea 7.

De manera análoga, en la Tarea 9, tomas las intersecciones y forma el cociente para poder obtener el cociente, tal como se muestra en la Figura 48. Sin embargo, el siempre parte de la ecuación $y = mx + b$ y así visualiza el valor el m para asignárselo a la pendiente.

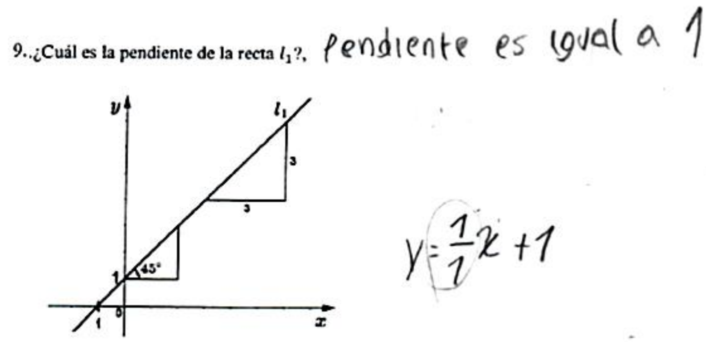


Figura 48. Producción del Estudiante E13 al resolver la Tarea 9.

5.8 La pendiente como una cualidad en rampas o escaleras

Esta preconcepción se evidenció al justificar en la Tarea 1. El 10% de los estudiantes identifica a la pendiente como una cualidad necesaria para recorrer rampas o escaleras con menor esfuerzo en un determinado tiempo. En esta idea se identifica una relación entre el esfuerzo y tiempo, de manera que, el 7% atribuye que una mayor pendiente es cuando se tiene más facilidad de ascenso o descenso. Entre sus argumentos destacan que en una rampa es menor el esfuerzo que se realiza, pero es mayor el tiempo empleado, caso contrario al uso de las escaleras, tal como se aprecia en el siguiente extracto de la entrevista.

I: La entrada a una cafetería tiene dos accesos: una escalera y una rampa. La imagen muestra sus medidas. ¿Qué acceso tiene mayor pendiente?

E5: la escalera.

I: la escalera, ¿por qué?

E13: porque como que tienes que hacer un poco más de… o sea tienes que hacer más movimientos, en cuestión de medida esta es la que tiene menos [señala la escalera] pero… en cuestión de movimientos es la escalera porque te tardas más, por el momento de estar doblando la rodilla y en esta pasas directo [señala con el índice recorriendo la rampa], pasas rápido, entonces el que tiene mayor pendiente es la escalera.

I: entonces, cuando escuchaste la pendiente, ¿qué es lo primero que te imaginaste?

E13: como mayor tardanza, o sea que cuál se tarda más tiempo.

I: ¿y eso tendrá que ver con la pendiente?

E13: pues sí, porque se creó para que se haga menos esfuerzo, de hecho por eso se inventaron las rampas, porque las escaleras estás siempre más paraditas y hace uno más esfuerzo, menos tiempo pero más esfuerzo.

5.9 La pendiente como incógnita

Esta preconcepción se refiere a considerar la pendiente como un valor desconocido de una ecuación o la solución de un problema. Está apareció principalmente cuando se les pidió que dijeran lo que es pendiente. Por ejemplo, en la entrevista E20 argumento lo siguiente:

E20: es el valor obtenido.
I: ¿a qué te refieres con eso?
E20: la solución de un problema pues.
I: ¿toda solución de un problema es pendiente?
E20: no, lo que se represente con x
I: ¿Me puedes dar un ejemplo que puedas asociar con la pendiente?
E20: ¿cualquier ejemplo?
I: si, pero que lo puedas asociar con la pendiente.
E20: [escribe x-5y] sería x en este caso.
I: ¿equis sería la pendiente?
E20: si, su resultado.

De manera similar, el estudiante E5 la define como "*una medida que está representada por una ecuación*, tal como lo expresa en la entrevista.

I: ¿qué es la pendiente?
E20: es una medida que se representa con una ecuación.
I: ¿a qué te refieres con eso?
E20: es una medida de algo, no sé, un porcentaje o un resultado encontrado.
I: pero ¿es una medida de qué?
E20: pues no sé, puede ser de distancia, tiempo y peso, lo que nos estén pidiendo, al final es un valor que estamos buscando.
I: y ¿cómo lo vemos en la ecuación?
E20: puede ser con la x o con cualquier letra, no importa, porque al final es el valor que vamos a encontrar.

En ambas ideas se puede identificar que la pendiente lo tienen preconcebida como una asociación a incógnita, ya que declaran que es el valor buscado. Al parecer estos participantes tenían presente el contenido que recién habían trabajo en el aula, ya que según la currícula, en el grado 10 se ve la ecuación lineal.

CAPÍTULO VI

Discusión y conclusión

6.1 Preconcepciones de pendiente en estudiantes de bachillerato

El análisis de datos revela que los estudiantes que aún no han trabajado el concepto de pendiente en el curso de Matemáticas III en el bachillerato, ponen en juego diversas nociones al trabajar con diferentes tareas que involucran el concepto, las cuales probablemente son más provenientes de su experiencia con el término en la vida cotidiana que con su experiencia escolar. De ahí que, las preconcepciones que manifiestan son la pendiente como: la longitud de un segmento, un objeto, la inclinación, el ángulo, la intersección con los ejes en un plano cartesiano, asociada a una expresión algebraica, el cociente determinado por las intersecciones en los ejes, una cualidad en rampas o escaleras y, una incógnita; todas con diferente frecuencia, tal como se muestra en la Figura 49.

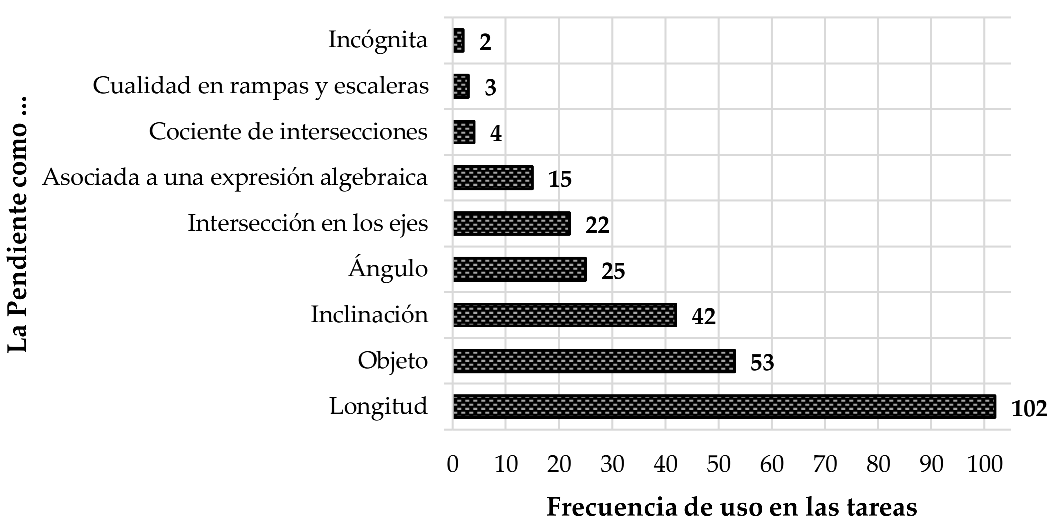


Figura 49. Frecuencia de cada preconcepción

En general, los estudiantes evidencian de 2 a 6 preconcepciones de pendiente, de las cuales algunas son consecuencia de otras. Por ejemplo, el 20% de los estudiantes que denominó a la recta como la pendiente, al pedirle su respectivo valor fue natural asociar la longitud del segmento de recta dado. Sólo el 10% de estudiantes del 40% que declaró haber trabajado con el concepto en su educación secundaria, manifiesta dos nociones relacionadas con alguna conceptualización de pendiente, estas son: reconocer a m en la ecuación $y = mx + b$, y definir a la pendiente como la inclinación de la recta. La primera, de acuerdo con Stump (1999) y Moore-Russo et al. (2011) es conceptualizar a la pendiente como un coeficiente paramétrico; mientras que la segunda es conceptualizarla como una propiedad física. Sin embargo, estas nociones parecen ser producto de una memorización, tal como también lo reporta Birgin (2012).

La preconcepción de pendiente como la longitud del segmento de recta se manifiesta en el 97% de los estudiantes y se empleó con mayor frecuencia. Sin embargo, esta idea no sólo la tienen los que aún no la han estudiado de manera formal, sino también en aquellos que tienen años de experiencia en la docencia, tal como lo encuentra Byerley y Thompson (2017) en algunos profesores estadounidenses de bachillerato, quienes definían a la pendiente como la distancia entre dos puntos. Asimismo, este resultado es coincidente con lo que encuentran Rivera et al. (2019) con estudiantes que ya han culminado sus estudios de bachillerato. Para el caso del contexto mexicano, el término "pendiente" en su vida cotidiana es utilizado para hacer referencia a declives o cuestas en una calle, en carreteras, en montañas, etc. Por ello, es entendible que los estudiantes manifestaran la preconcepción de la pendiente como objeto, y consideraran a la pendiente como la recta en las tareas planteadas en el contexto matemático.

En cambio Jiménez y Buendía (2017) al explorar con personas de distintos perfiles, incluso algunos no tienen área afín a matemáticas; por ejemplo, comerciante, recepcionistas, persona de limpieza, estudiante de contabilidad, profesor de primaria, de bachillerato y profesor de economía; destacan que, las personas en la vida diaria usan más este concepto en términos de comportamientos e inclinaciones.

De acuerdo con el análisis, el 40% del 97% de los estudiantes que consideraron a la pendiente como la distancia entre dos puntos partieron de la idea inicial de la pendiente como la recta y por tanto su valor estaría dada por su longitud. Este resultado da pautas para inferir que la experiencia de los estudiantes con el concepto pesa más al momento de dar una definición y al ejemplificarla, tal como se muestra en la Figura 50. En esta podemos ver los ejemplos propuestos de cinco estudiantes, E4, E7, E19, E28 y E30, respectivamente.

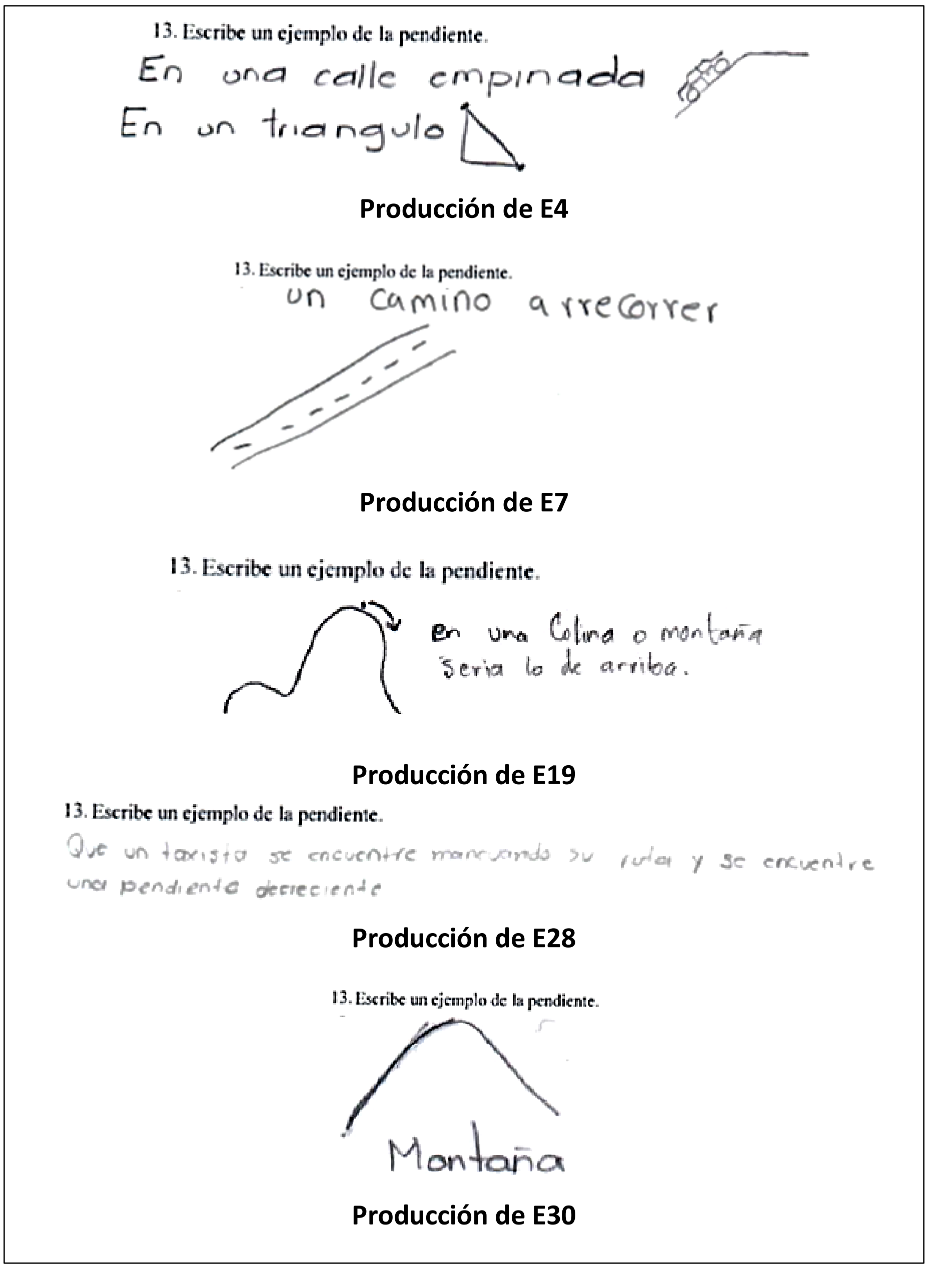


Figura 50. Propuesta de ejemplos de los estudiantes sobre la pendiente

En la preconcepción de pendiente como longitud, no sólo consideran la medida de la recta, algunos hacen referencia a la longitud del segmento que baja del punto máximo dado hacia el eje x, de manera que como pendiente asignan el valor de la máxima ordenada. Este resultado ya ha sido identificado por Dolores et al. (2002), Beichner (1994) y McDermott, Rosenquist y Van Zee (1987) en estudiantes que trabajan con problemas que involucran la pendiente y la velocidad, e incluso por Billings y Klanderman (2000) en futuros profesores.

Por otra parte, el 23% de los estudiantes destaca que la relación de la pendiente y la velocidad se debe con los valores de las distancias y el tiempo se obtienen datos para ser graficados y así obtener la pendiente, lo cual para ellos es la recta. El resto menciona que son cosas diferentes porque son de diferentes áreas. Este último resultado es similar a lo reportado por Dolores-Flores et al. (2018) en estudiantes preuniversitarios que ya han cursado Cálculo. De manera análoga, en la tarea que involucró un acercamiento a la razón de cambio constante a través de la constante de proporcionalidad, el estudiante relacionó con la pendiente sólo si se pide graficar.

Para el caso de la preconcepción de la pendiente como la inclinación, el estudiante refiere más a la posición que tiene una recta respecto a la horizontal en lugar de mirar a la pendiente como la medida de esa inclinación de la recta (Lobato y Thanheiser, 2002); más aún es nula una percepción de una relación entre dos cambios, es decir de la manipulación de una distancia horizontal y una distancia vertical. Los participantes de este estudio atribuyen la posición solo a la distancia vertical. Asimismo, hacen referencia a la pendiente como el ángulo de inclinación, definición que de acuerdo con Agudelo-Valderrama y Martínez (2016) es un uso coloquial que se le da a este término.

Otro aspecto que resaltar es que, durante las entrevistas se pudieron identificar algunas dificultades, pese a que no fue objetivo del estudio. Entre estas encontramos que, a pesar de que los estudiantes entienden a la pendiente como el ángulo, al menos un 23% de los estudiantes presentó dificultades para medirlos, es decir, no saben emplear el transportador, tal como se puede apreciar en la Figura 51. En esta se observa que uno de los estudiantes toma como eje de referencia la misma recta a pesar de reconocer qué ángulo es el que pretende medir, que en este caso se trataba del ángulo de inclinación de la recta.

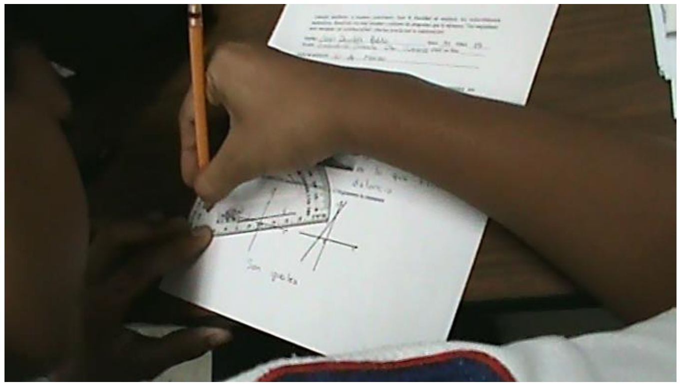


Figura 51. Ejemplo de cómo mide el ángulo un estudiante.

Respecto a los términos de creciente y decreciente, todos los estudiantes lo emplean en un sentido coloquial, creciente cuando algo sube y decreciente cuando algo baja, lo cual, para ellos es fácil de identificar una función creciente o decreciente una gráfica y no a una expresión algebraica (al menos un 50%). A este respecto, Bush y Karp (2013) también reportan que de manera general, los estudiantes prefieren ver gráficas que las funciones dadas en expresiones algebraicas. Esto se ve reflejado, por qué al menos un 50% de los participantes prefirió dar ejemplo sobre cómo sería la gráfica que ellos asocian para hablar de función creciente, decreciente o constante (véase Figura 52).

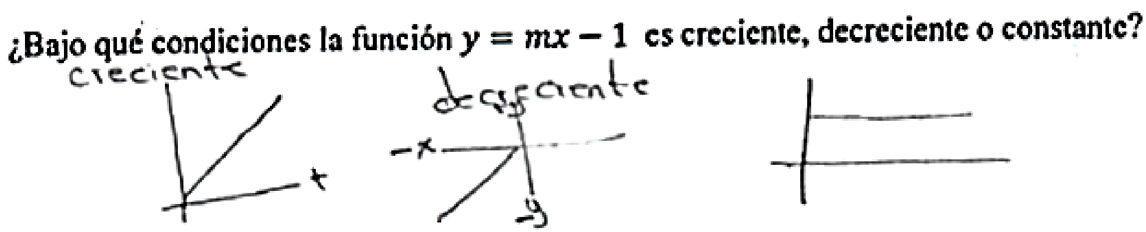


Figura 52. Ejemplo de cómo los estudiantes visualizan una función creciente, decreciente y constante.

Nuestros resultados se corresponden con lo que encuentran Jiménez y Buendía (2017), es decir, que para interpretar una gráfica los estudiantes no hacen referencia a la pendiente, se apoyan más de aspectos visuales que analíticos.

Esto deja ver y ser coincidente con los resultados de Dolores (2004), Cardona (2009) y Christensen y Thompson (2012) sobre la existencia de la imprecisión que presentan los estudiantes para interpretar donde una función es positiva, creciente y decreciente. Otro 42% de los estudiantes trató de trabajar con la expresión algebraica, y partir de ahí para asociarlo con una función creciente, decreciente o constante. Estos atribuyen que el signo del término independiente de la expresión $y = mx + b$, es decir b indica el comportamiento de la función, tal como se muestra en la Figura 53. De manera similar, Barr (1980, 1981), Moschkovich (1996), Birgin (2012) y Hattikudur et al. (2012) lo encuentran en estudiantes de octavo grado, ya que confunden el papel que juega m y b en la ecuación de la recta de la forma $y = mx + b$ y lo que representan en el plano cartesiano.

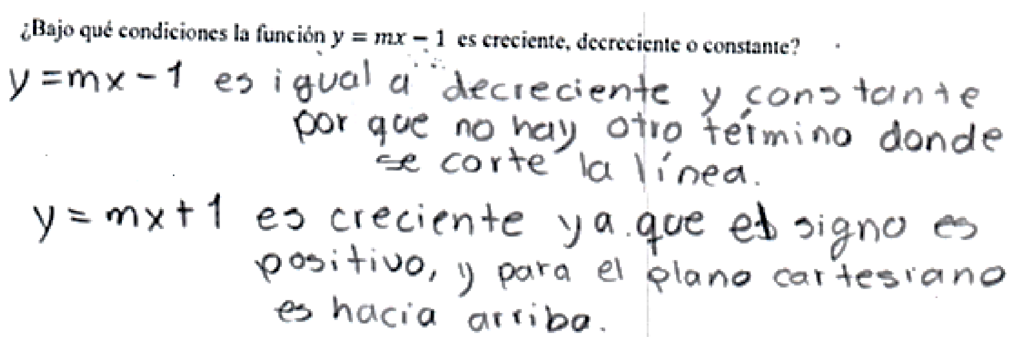


Figura 53. Ejemplo de cómo deben ser la expresión algebraica de una función creciente y de una decreciente

De acuerdo con la currícula mexicana, en la educación secundaria se debe promover la relación entre pendiente, razón de cambio e inclinación (SEP, 2011a). Sin embargo, los estudiantes de este estudio mostraron escaso conocimiento sobre esta relación. Además, dado que las preconcepciones sobre la pendiente o razón de cambio de una función lineal afectan en el aprendizaje matemático posterior (Birgin, 2012), es importante que los profesores de los diversos niveles educativos así como los de capacitación a profesores tengan la oportunidad de conocerlas.

Según Biemans y Simons (1995) el ser consciente de estas y abordarlas en la instrucción puede ayudarlos a reorganizar su estructura de conocimiento y posiblemente corregirlas.

6.2 Conclusión y futuras investigaciones

En conclusión observamos que, en contraste con los resultados de los estudios presentados en el capítulo dos, acerca de las conceptualizaciones de pendiente en los estudiantes en el contexto mexicano, se tiene que no hay mucha variación respecto a lo que para ellos corresponderían ser concepciones alternativas, por el momento y estatus de estudio que ellos presentaban, tal como lo refieren Matz (1980) y Abouchedid y Nasser (2000). Esto hace suponer que probablemente son preconcepciones arraigadas, que han adquirido un cierto grado de coherencia por las experiencias que han tenido con el concepto de pendiente en su vida cotidiana. Sin embargo, los estudios han evidenciado que estudiantes y profesores con más experiencia aún conservan algunas de estas preconcepciones, lo cual permite hipotetizar que el estudiante fragmenta lo que aprende escolarmente de lo que experimenta en su vida cotidiana. En este sentido, Jiménez y Buendía (2017) lo confirma cuando mencionan que es una consecuencia natural de la tradición escolar, ya que está siempre centrada en aspectos analíticos. Asimismo, Zaldívar y Cordero (2015) declaran que lo que ocurre en lo cotidiano siempre está alejado del discurso escolar sobre lo matemático y se da énfasis a aspectos significativos, pues esto es relegado u opaco en el aula.

Según la currícula mexicana, los participantes debieron tener ya una primera experiencia con el concepto de pendiente, pero sólo la mitad afirmó tal declaración. Y de acuerdo con los resultados de este estudio, pareciera que ese primer acercamiento no fue significativo para ellos. Por ello, para verificar tal afirmación, sería importante un estudio que explore en estudiantes de primaria, pero centrándose en primer lugar, en las nociones que están involucradas en el concepto de pendiente, como es la inclinación y sus factores que influyen y, en la constante de proporcionalidad, a fin de conocer cómo es que evolucionan tales nociones o bien, si es que se mantienen. Por ejemplo, para el caso de la pendiente como un objeto y como la longitud de un segmento, son preconcepciones que los jóvenes que ya han trabajado incluso con la definición matemática las siguen conservando, ¿estas nociones figurarán mucho antes de tener un primer acercamiento? o ¿qué hace que no evolucionen estas nociones?, son interrogantes significativas para conocer el devenir de tales nociones y el fracaso de su evolución. Para la última pregunta, un análisis de cómo es la instrucción de los profesores de secundaria sobre este concepto daría elementos sobre el por qué los estudiantes deciden fragmentar, o si el profesor es quien promueve eso.

Jiménez y Buendía (2017) también identifican que las personas en la vida diaria usan este concepto más en términos de comportamientos e inclinaciones lo cual no es algo que se aproveche en el aula. Por ello, sería interesante un estudio que con lo obtenido hasta el momento, sobre las preconcepciones, se diseñen actividades que posibiliten a los estudiantes a trascender estas preconcepciones a un conocimiento aceptable y cercano al concepto de pendiente, así mismo realizar experimentos de enseñanza a fin de afinar elementos que conlleven al diseño de una propuesta metodológica sobre la enseñanza de este concepto, y en la cual se pueda ir trabajando la conexión entre sus diversas representaciones.

Referencias Bibliográficas

Abouchedid, K., y Nasser, R. (2000). *The role of presentation and response format in understanding, preconceptions and alternative concepts in algebra problems* [PDF file]. Recuperado de https://eric.ed.gov/?id=ED438174

Agudelo-Valderrama, C., y Martínez, D. (2016). In pursuit of a connected way of knowing: The case of one mathematics teacher. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *14*(4), 719–737.

Aguirre, J. M. (1988). Student preconceptions about vector kinematics. *Physics Teacher*, *26*(4), 212–216.

Alexander, P. A., Shallert, D. L., y Hare, V. C. (1991). Coming to terms: How researchers in learning and literacy talk about knowledge. *Review of Educational Research*, *61*(3), 315–343.

Arias, M. (2000). Triangulación metodológica: sus principios, alcances y limitaciones. *Investigación y Educación en Enfermería*, *18*(1), 13–26.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., y Chwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), 399–430.

Assad, D. A. (2015). Task-based interviews in mathematics: Understanding student strategies and representations through problem solving. *International Journal of Education and Social Science*, (1), 17–26.

Ausubel, D. (1978). *Psicología educativa. Un punto de vista cognitivo*. México: Trillas.

Azcárate, C. (1992). Estudio de los esquemas conceptuales y de los perfiles de unos alumnos de segundo de BUP en relación con el concepto de pendiente de una recta. *Épsilon*, *24*, 9–22.

Bardin, L. (2002). *El análisis de contenido.* 3ª Edición. Madrid: Akal.

Baroody, A. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. En A. Baroody & A. Dowker (Eds), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise* (pp. 1–33). Mahwah, NJ: LEA.

Barr, G. (1980). Graphs, gradients and intercepts. *Mathematics in School*, *9*(1), 5–6.

Barr, G. (1981). Some student ideas on the concept of gradient. *Mathematics in School*, *10*(1), 14–17.

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. D., y Green, D. R. (1996). Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 151–169.

Behar, R., y Ojeda, M. (2000). El proceso de aprendizaje de la estadística: ¿Qué puede estar fallando? *Heurística*, *10*, 26–43.

Beichner, R. J. (1994). Testing student interpretation of kinematics graphs. *American Journal of Physics, 62*(8), 750–762.

Bello, S. (2004). Ideas previas y cambio conceptual. *Educación química*, *15*(3), 210–217.

Biemans, H. J., y Simons, P. R. J. (1995). How to use preconceptions? The contact strategy dismantled. *European Journal of Psychology of Education*, *10*(3), 243.

Billings, E. M., y Klanderman, D. (2000). Graphical representations of speed: obstacles preservice K-8 teachers experience. *School Science and Mathematics*, *100*(8), 440–450.

Birgin, O. (2012). Investigation of eighth-grade students' understanding of the slope of the linear function. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *26*(42a), 139–162.

Borji, V., Alamolhodaei, H., y Radmehr, F. (2018). Application of the APOS-ACE theory to improve students' graphical understanding of derivative. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(7), 2947–2967.

Borji, V., Font, V., Alamolhodaei, H., y Sánchez, A. (2018). Application of the complementarities of two theories, APOS and OSA, for the analysis of the university students' understanding on the graph of the function and its derivative. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(6), 2301–2315.

Braun, V., y Clarke, V. (2012). Thematic analysis. En H. Cooper (ed.). *Handbook of research methods in psychology* (pp. 57–71), Washington (DC): American Psychological Association.

Bretones, A. (2003). Las preconcepciones del estudiante de profesorado: de la construcción y transmisión del conocimiento a la participación en el aula. *Educar*, *32*, 25–54.

Bush, S. B., y Karp, K. S. (2013). Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: A review. *The Journal of Mathematical Behavior, 32(3), 613–632.*

Byerley, C., y Thompson, P. W. (2017). Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *The Journal of Mathematical Behavior*, *48*, 168–193.

Cabañas-Sánchez, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico* (Tesis Doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Cai, J., y Ding, M. (2017). On mathematical understanding: perspectives of experienced Chinese mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(1), 5–29.

Campanario, J. M., y Otero, J. (2000). Más allá de las ideas previas como dificultades de aprendizaje: las pautas de pensamiento, las concepciones epistemológicas y las estrategias metacognitivas de los alumnos de Ciencias. *Enseñanza de las ciencias*, *18*(2), 155–169.

Cardona, R. (2009). *Comprobación experimental de un diseño didáctico para la estabilización de la noción de derivada* (Tesis de Maestría). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México.

Carlson, M., Oehrtman, M., y Engelke, N. (2010). The precalculus concept assessment: A tool for assessing students' reasoning abilities and understandings. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 113–145.

Casey, A. y Nagle, C. (2016). Students' use of slope conceptualizations when reasoning about the line of best fit. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(2), 163–177.

Cheng, D., y Sabinin, P. (2008). Elementary students' conceptions of steepness. En: Figueras, O., Cortina, J. L., Alatorre, S., Rojano, T., y Sepúlveda, A. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (p. 297-304), México: Cinvestav-UMSNH.

Cheng, S. (2010). *Connecting proportionality and slope: Middle school students' reasoning about steepness.* (Doctoral dissertation). Boston University, Boston.

Cho, P., y Nagle, C. (2017). Procedural and conceptual difficulties with slope: an analysis of students' mistakes on routine tasks. *International Journal of Research in Education and Science*, *3*(1), 135–150.

Christensen, W. M., y Thompson, J. R. (2012). Investigating graphical representations of slope and derivative without a physics context. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research*, *8*(2), 023101-1–023101-5.

Confrey, J. (1990). Chapter 1: A review of the research on student conceptions in mathematics, science, and programming. *Review of Research in Education*, *16*(1), 3–56.

Confrey, J. y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*, 66–86.

Contreras, L., Martínez, M., Lugo, O., y Montes, M. (2009). *Cálculo Diferencial e Integral*, México: Santillana.

Cuellar, J. (2010). *Matemáticas III*. México: Mc Graw Hill.

Deniz, Ö. y Kabael, T. (2017a). 8th grade students' processes of the construction of the concept of slope. *Education and Science, 42*(192), 139−172.

Deniz, O., y Kabael, T. (2017b). Students' mathematization process of the concept of slope within the realistic mathematics education. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi (H.U. Journal of Education)*, *32*(1) 123–142.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: Concepciones alternativas de estudiantes de Bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7(3)*, 195–218.

Dolores, C., Alarcón, G., y Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *5*(3), 225–250.

Dolores, C., García, J., y Gálvez, A. (2017). Estabilidad y cambio conceptual acerca de las razones de cambio en situación escolar. *Educación Matemática*, *29*(2). 125–158.

Dolores-Flores, C., Rivera-López, M. I., y García-García, J. (2018). Exploring mathematical connections of pre-university students through tasks involving rates of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(3), 369–389.

Dündar, S. (2015). Knowledge of mathematics teacher-candidates about the concept of slope. *Journal of Theory and Practice in Education (Eğitimde Kuram ve Uyguluma), 11*(2), 673–693.

Frank, K. (2016). Plotting points: Implications of "over and up" for students' covariational reasoning. En M. Wood, E. Turner, M. Civil, y J. Eli (Eds.), *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the PME* (pp. 573–580). Tucson, Arizona: The University of Arizona.

García, E. (2006). *Un estudio descriptivo de las interacciones en el aula, elemento de análisis en la reprobación y rezago de Cálculo* (Tesis de Licenciatura). Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Goldin, G. (1997). Chapter 4: Observing mathematical problem solving through task-based interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *9*, 40–177.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En Kelly, A y Lesh, R. ed., *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, 517–545.

Gómez, B. (2007). La razón en semejanza: El caso del perrito. En E. Castro y J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en educación matemática: Pensamiento numérico* (pp. 237-257). Granada, España: Editorial universitaria de Granada.

Hattikudur, S., Prather, R. W., Asquith, P., Alibali, M. W., Knuth, E. J., y Nathan, M. (2012). Constructing graphical representations: Middle schoolers' intuitions and developing knowledge about slope and *y*-intercept. *School Science and Mathematics, 112*(4), 230–240.

Herbert, S., y Pierce, R. (2008). An 'emergent model' for rate of change. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*(3), 231–49.

Hoffman, W. (2015). *Concept image of slope: Understanding middle school mathematics teachers' perspective through task-based interviews* (Doctoral dissertation), The University Of North Carolina At Charlotte, Charlotte.

Holguín, C. E. (2012). *Razonamiento proporcional* (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

Hume, A. y Coll, R. (2010). Authentic student inquiry: the mismatch between the intended curriculum and the student-experienced curriculum. *Research in Science & Technological Education*, *28*(1), 43–62.

Jiménez, E., y Buendía, G. (2017). Significados gráficos para la pendiente desde el cotidiano. *Revista Pakbal*, *39*, 5–11.

Kahle, J. (2007). Systemic reform: Research, vision, and politics. En S. Abell y N. Lederman (Eds.), *Handbook of research on science education* (pp. 911–942). Mahwah, NJ: LEA.

Kim, R. (2012). The quality of non-textual elements in mathematics textbooks: an exploratory comparison between South Korea and the United States. *ZDM*, *44*(2),175–187.

Koichu, B., y Harel, G. (2007). Triadic interaction in clinical task-based interviews with mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(3), 349–365.

Larson, R. (2010). *Cálculo de una Variable*, Novena Edición, México, D.F: Mc Graw Hill.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., y Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research, 60,* 1–64.

Lobato, J., El lis, A., y Muñoz, R. (2003). How “focusing phenomena” in the instructional environment support individual students' generalizations. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 1–36.

Lobato, J., y Siebert, D. (2002). Quantitative reasoning in a reconceived view of transfer. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*, 87–116.

Lobato, J., y Thanheiser, E. (2002). Developing understanding of ratio-as-measure as a foundation for slope. En B. Litwiller y G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook* (pp. 162–175). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mahmud, M. C., y Gutiérrez, O. A. (2010). Estrategia de enseñanza basada en el cambio conceptual para la transformación de ideas previas en el aprendizaje de las ciencias. *Formación Universitaria*, *3*(1), 11–20.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *The Journal of Mathematical Behavior*, *3*, 93–166.

Mazón, J. (1997). *Calculo Diferencial*. México: Mc Graw Hill.

McDermott, L., Rosenquist, M. y Van Zee, E. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. *American Journal of Physics, 55*, 503–513.

Mhlolo, M. K., y Schafer, M. (2013). Consistencies far beyond chance: an analysis of learner preconceptions of reflective symmetry. *South African Journal of Education*, *33*(2), 1–17.

Moore, K., y Thompson, P. W. (2015). Shape thinking and students' graphing activity. En T. Fukawa, N. Infante, K. Keene, y M. Zandieh (Eds.), *Proceedings of the 18th Meeting of the MAA Special Interest Group on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 782–789). Pittsburgh, PA: RUME.

Moore-Russo, D., Conner, A., y Rugg, K. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(1), 3–21.

Mora, E., y Río, M. (2009). *Cálculo Diferencial e integral. Ciencias sociales y económico administrativas.* México: Santillana.

Moreira, M. A. y Greca, I. M. (2003). Cambio conceptual: análisis crítico y propuestas a la luz de la teoría del aprendizaje significativo. *Ciência y Educação*, *9*(2), 301–315.

Moschkovich, J. (1990). Students' interpretations of linear equations and their graphs. En R. Speiser, C. Maher, C. Walter. (Eds.) *Proceedings of the 14th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp 109–116), Snowbird, Utah: North American Chapter

Mudaly, V., y Moore-Russo, D. (2011). South African teachers' conceptualisations of gradient: A study of historically disadvantaged teachers in an advanced certificate in education programmed. *Pythagoras*, *32*(1), 27–33.

Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J., y Martin, K. (2013). Calculus students' and instructors' conceptualizations of slope: a comparison across academic levels. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *11*(6), 1491–1515.

Nagle, C., Moore-Russo, D., y Martinez-Planell, R. (2016). A framework for describing conceptions of slope. En M. B. Wood, E. E. Turner, M. Civil, y J. A. Eli (Eds.) *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American*

Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 195-198). Tucson, Arizona: The University of Arizona.

Nagle, C., Moore-Russo, D., y Styers, J. L. (2017). Teachers' Interpretations of Student Statements about Slope. En: Galindo, E., y Newton, J. (Eds.) *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 589–596). Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Nagle, C., y Moore-Russo, D. (2013a). The concept of slope: Comparing teachers' concept images and instructional content. *Investigations in Mathematics Learning*, *6*(2), 1–18.

Nagle, C., y Moore-Russo, D. (2013b). Connecting Slope, Steepness, and Angles. *Mathematics Teacher*, *107*(4), 272–279.

Nagle, C., y Moore-Russo, D. (2014). Slope across the Curriculum: Principles and Standards for School Mathematics and Common Core State Standards. *Mathematics Educator*, *23*(2), 40–59.

Nájera, J. (2015). *Conexiones que establecen los estudiantes de bachillerato al resolver Problemas de razones de cambio* (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Guerrero, México.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Newton, X. A., y Poon, R. C. (2015). Pre-service stem majors understanding of slope according to common core mathematics standards: An exploratory study. *Global Journal of Human-Social Science Research*, *15*(7), 1–17.

Noble, T., Nemirovsky, R., Wright, T., y Tierney, C. (2001). Experiencing change: The mathematics of change in multiple environments. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(1), 85–108.

Osborne, J., y Wittrock, C. (1983). Learning science: A generative process. *Science Education*, *67*(4), 489–508.

Oyarbide, M. (2004). Estilos cognitivos, desarrollo operatorio y preconcepciones. *Revista Internacional de Psicología*, *5*(1), 1–23.

Páez, D. (2015). *Análisis de la práctica del profesor de Matemáticas en torno al concepto de pendiente: Énfasis en la reflexión durante y después de la acción* (Tesis Doctoral). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México.

Páez, D., Guzmán, J., y Zambrano, J. (2015). Reflexiones del profesor en torno al concepto de pendiente. En. A. Ruiz (Presidencia). *XIV Conferencia interamericana de educación matemática*. Conferencia llevada a cabo en Chiapas, México. Consultado en http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/365/183

Pineda, C. (2014). *Una Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada.* (Tesis de Maestría). Universidad Santo Tomás, Bogotá DC, Colombia.

Planinic, M., Milin-Sipus, Z., Katic, H., Susac, A., y Ivanjek, L. (2012). Comparison of student understanding of line graph slope in physics and mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*(6), 1393–1414.

Pozo, J. I. y Carretero, M. (1987). Del pensamiento formal a las concepciones espontáneas: ¿Qué cambia en la enseñanza de la ciencia? *Infancia y Aprendizaje*, *38*, 35–52.

Rasslan, S., y Vinner, S. (1995). The graphical, the algebraical and their relation: The notion of slope. En L. Meira y D. Carraher (Eds.) *Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 264–271). Recife, Brazil: Universidade Federale de Pernambuco.

Reyes-Gasperini, D. (2013). *La transversalidad de la proporcionalidad*. México: Subsecretaría de Educación Media Superior. Secretaría de Educación Pública.

Rivera, M., García, J., y Cabañas, M. (2012). Un estudio sobre la práctica de un profesor de Matemáticas al desarrollar el concepto de sistema de ecuaciones lineales bajo el enfoque de competencias. En Flores, R. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 25, pp.1141–1150). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Rivera, M. I., Salgado, G., y Dolores, C. (2019). Explorando Conceptualizaciones de la Pendiente en Estudiantes Universitarios. *Bolema*, *33*(65), 1027–1046.

Rodríguez, P. A. (2017). Ideas previas de estudiantes de décimo grado respecto al concepto de ecosistemas. *Enseñanza de las ciencias*, (Extra), 4157–4162.

Sabinin, P. D. (2011). *Reasoning about steepness: strategies of fifth through eighth grade students when solving steepness tasks* (Doctoral dissertation). Boston University, Boston.

Salazar, V. (2010). *Matemáticas 3*. México: Nueva Imagen.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 267–296.

Schmidt, W., McKnight, C., Houang, R., Wang, H., Wiley, D., Cogen, L., y Wolfe, R. (2001). *Why schools matter: A cross-national comparison of curriculum and learning*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

SEP (2011a). *Programas de estudio 2011. Educación secundaria. Matemáticas*. México, D.F.: SEP. Recuperado de http://evaluaciondocente.sep.gob.mx/materiales/SEPPROGRAMASDEESTUDIO2011.GUIAPARAELMAESTRO.SECUNDARIA.MATEMATICAS.pdf

SEP (2011b). *Programas de estudio 2011. Educación básica primaria. Segundo grado.* México, D.F.: SEP. Recuperado de https://sector2federal.files.wordpress.com/2012/05/2-programa-segundo-grado-2011.pdf

SEP (2011c). *Programas de estudio 2011. Educación básica primaria. Cuarto grado.* México, D.F.: SEP. Recuperado de https://sector2federal.files.wordpress.com/2012/05/4-programa-cuarto-grado-2011.pdf

SEP (2011d). *Programas de estudio 2011. Educación básica primaria. Quinto grado*. México, D.F.: SEP. Recuperado de https://coleccion.siaeducacion.org/node/1218

SEP (2011e). *Programas de estudio 2011. Educación básica primaria. Sexto grado*. México, D.F.: SEP. Recuperado de https://coleccion.siaeducacion.org/node/1219

SEP (2013a). *Matemáticas III.* México, D. F.: Secretaría de Educación Media Superior. Recuperado de http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/3er_SEMESTRE/Matematicas_III_biblio2014.pdf

SEP (2013b). *Matemáticas I.* México, D. F.: Secretaría de Educación Media Superior. Recuperado de http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/1er_SEMESTRE/Matematicas_I_biblio2014.pdf

SEP (2013c). *Matemáticas II.* México, D. F.: Secretaría de Educación Media Superior. Recuperado de https://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/z2do_SEMESTRE/Matematicas_II_biblio2014.pdf

SEP (2013d). *Matemáticas IV.* México, D. F.: Secretaría de Educación Media Superior. Recuperado de http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/4to_SEMESTRE/Matematicas_IV_biblio2014.pdf

SEP (2013e). *Cálculo Diferencial.* México, D. F.: Secretaría de Educación Media Superior. Recuperado de http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/cfp_5sem/calculo-diferencial.pdf

SEP (2013f). *Cálculo Integral.* México, D. F.: Secretaría de Educación Media Superior. Recuperado de http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/cfp_5sem/CALCULO_INTEGRAL.pdf

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14.

Simon, M., y Blume, G. (1994). Mathematical modeling as a component of understanding ratio-as-measure: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior, 13*, 183–197

Simons, P. R. J. (1999). Transfer of learning: Paradoxes for learners. *International Journal of Educational Research*, *31*(7), 577–589.

Sirotic, N., y Zaskis, R. (2007). Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(1), 49–76.

Stanton, M., y Moore-Russo, D. (2012). Conceptualizations of slope: A review of state standards. *School Science and Mathematics*, *112*(5), 270-277.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas.* México, D. F.: Cengage Learning.

Stroup, W. (2002) Understanding qualitative calculus: A structural synthesis of learning research. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(2), 167–215.

Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal*, *11*(2), 124–144.

Stump, S. (2001a). High school precalculus students' understanding of slope as measure. *School Science and Mathematics*, *101*(2), 81–89.

Stump, S. (2001b). Developing preservice teachers' pedagogical content knowledge of slope. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(2), 207–227.

Teuscher, D. y Reys, R. (2010). Slope, rate of change, and steepness: Do students understand the concepts? *Mathematics Teacher, 3*(7), 519–524.

Teuscher, D., y Reys, R. (2012). Rate of change: ap calculus students' understandings and misconceptions after completing different curricular paths. *School Science and Mathematics, 112*(6), 359–376.

Tovar, J., Castillo, H. y Marín, M. (2007). Preconcepciones de estudiantes de la pontificia Universidad Javerian Cali sobre el curso de estadística. *Pensamiento Psicológico, 3*(9), 61–78.

Valenzuela, C., y Dolores, C. (2012). El currículum oficial e impartido: contenidos y objetivos. *Números*, *79*, 47–69.

Vrancken, S., Engler, A., y Müller, D. (2008). Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de resultados. *Revista Premisa*, *10*(38), 36–46.

Wagener, L. (2009). A worthwhile task to teach slope. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *15*(3), 168–174.

Walter, J. G., y Gerson, H. (2007). Teachers' personal agency: Making sense of slope through additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(2), 203–233.

Weber, E., Tallman, M., y Middleton, J. (2015). Developing elementary teachers' knowledge about functions and rate of change through modeling. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(1), 1–33.

Wilhelm, J., y Confrey, J. (2003). Projecting rate of change in the context of motion onto the context of money. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34*(6), 887–904.

Yanik, H. B. (2011). Prospective middle school mathematics teachers' preconceptions of geometric translations. *Educational Studies in Mathematics*, *78*(2), 231–260.

Yerushalmy, M. (1997). Designing representations: Reasoning about functions of two variables. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(4), 431–466.

Yip, D. (1998). Identification of misconceptions in novice biology teachers and remedial strategies for improving biology learning. *International Journal of Science Education*, *20*(4), 461–477.

Zaldívar, D. y Cordero, F (2015). Conozca al señor movimiento: la situación del resorte. En Cordero, F. (coord). *En La ciencia desde el Niñ@. Porque el conocimiento también se siente* (pp. 129-142). México: Gedisa editorial

Zaslavsky, O., Sela, H., y Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: The effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 119–140.

Zavala, G. (2012). Las preconcepciones de los estudiantes como estrategias de aprendizaje. *Revista Internacional Magisterio*, *57*, 28–33.

Anexos

ANEXO A

Tareas de la Entrevista

1. (PF). De acuerdo a tu opinión, ¿qué resbaladilla es menos peligrosa para un niño de 6 años? ¿Por qué?

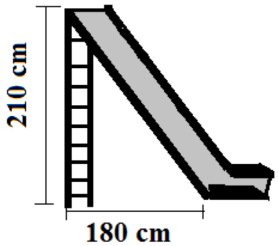


Fig. 1

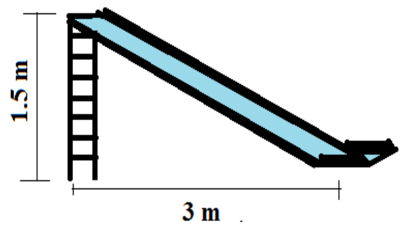


Fig. 2

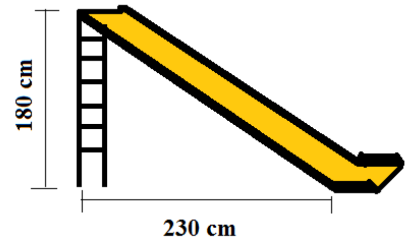


Fig. 3

2. (RG). Todos los días Don Toño tiene que subir las escaleras para llegar a la entrada de su oficina. Con base en los datos dados en la figura 4, ¿Qué pendiente tiene la escalera? Explica que realizaste para hallarla.

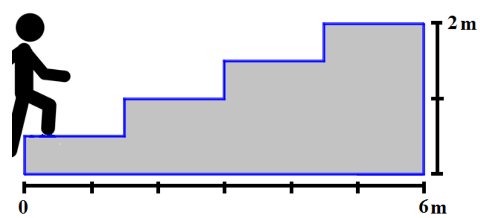


Fig. 4

3. (RG) ¿Cuál es la pendiente de la recta que se muestra en la Figura 5? Explique ampliamente cómo la obtiene.

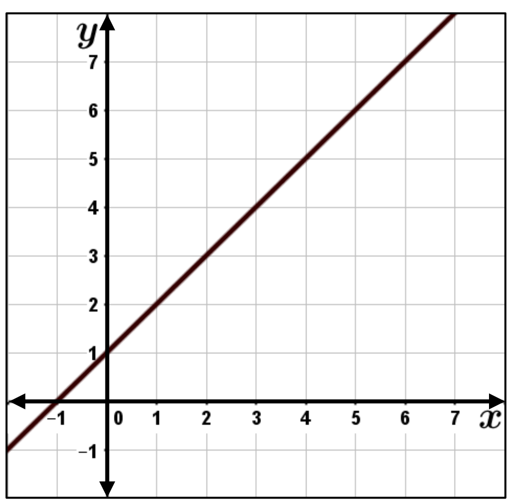


Fig. 5

4. (RA). Sobre la base de los valores de las tablas siguientes, decide cuál de ellas corresponde a una función lineal. Explique las razones de su decisión.

a)

x	$f(x)$
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

b)

x	$f(x)$
0	2
2	6
4	10
6	14
8	18

c)

x	$f(x)$
-3	10
-2	5
-1	2
0	1
1	2

5. (CT). Miguel desea construir una escalera que tenga un ángulo de inclinación de 35°, tal como se muestra en la Figura 6.

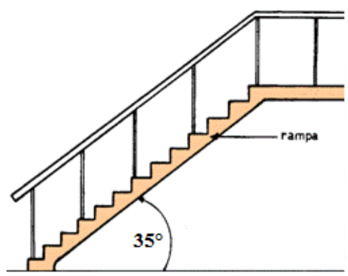


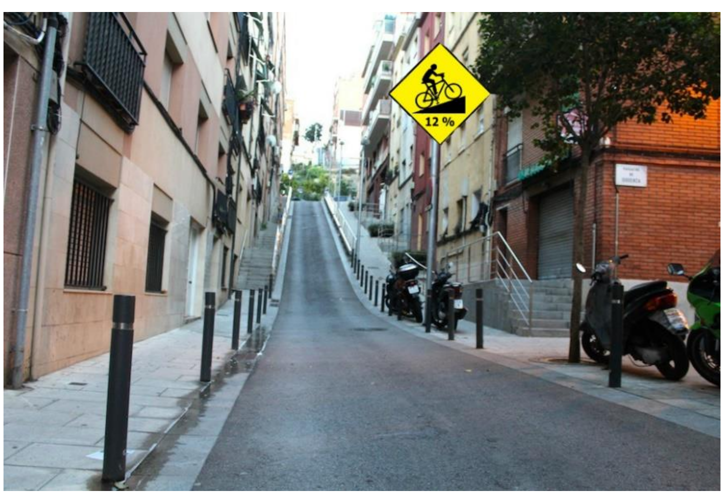
Fig. 6

A) ¿Cuál es la pendiente de dicha escalera?

B) Propón posibles medidas para la huella y contrahuella de manera que el ángulo de inclinación no cambie.

6. (CP). ¿Qué pendiente tienen las rectas cuyas fórmulas se muestran a continuación?
   a) $y = kx + \mathrm{b}$ ____________________________
   b) $y = 5\text{-}3x$ ____________________________
   c) $y\text{-}2x\text{+}3= 0$ ____________________________

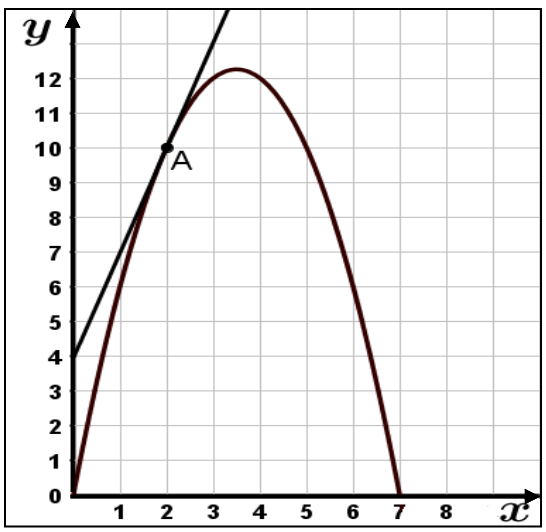
7. (SMR). En el Barrio del Carmen, calle de la Murtra en Barcelona aparece el siguiente letrero. ¿Qué significa ese 12%?



Otra opción (SMR). En la colocación de las tuberías para el desagüe de un baño, el ingeniero le ordena al albañil colocar la tubería con una pendiente mínima de 2% para que el agua escurra sin problema. Si tuvieras que explicárselo al albañil ¿cómo lo harías?

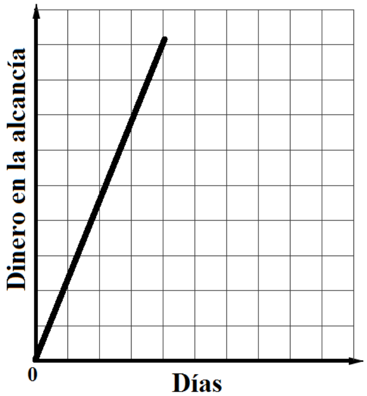
8. (DP.) De la lista que se da a continuación, selecciona la que sea perpendicular o paralela a la recta $y= x+1$. Explique por qué.
   a) $y = 2x$
   b) $y = x+2$
   c) $y = -x+1$

9. (CC). Calcula la pendiente de la tangente a la curva en el punto A. Explica tu respuesta.

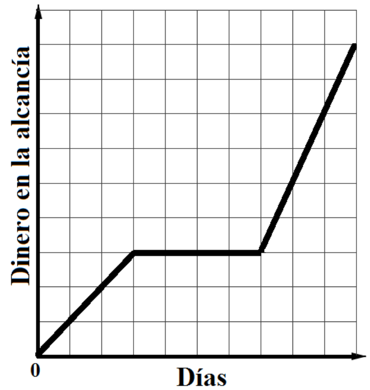


10. (SMR: SF). Las siguientes gráficas representan la relación de los días transcurridos con el dinero que tiene la alcancía de Ana, Luís, Ángel, Beto y Karla. Asocia cada niño con la gráfica que describa la relación de cómo fueron ahorrando.
    a) Luis mete dinero y saca dinero
    b) Beto es el que consigue ahorrar más en menos tiempo.
    c) Ana echa en la alcancía siempre la misma cantidad.
    d) Cuando decidieron ahorrar, Karla ya tenía una cantidad en su alcancía.
    e) Ángel es quien tiene menos dinero ahorrado.

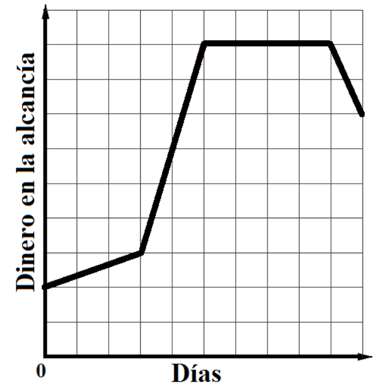
A.



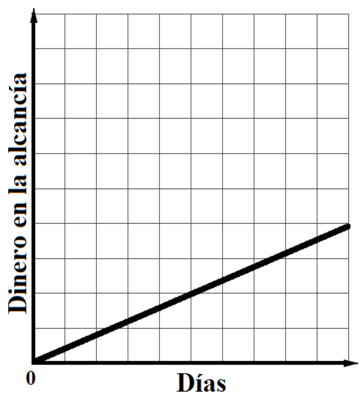
B.



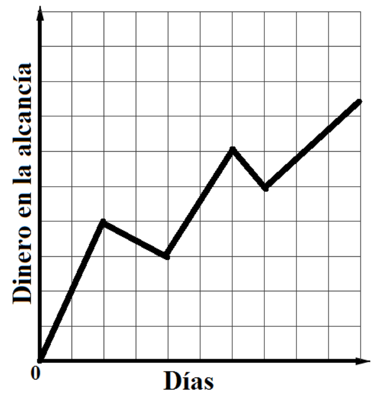
C.



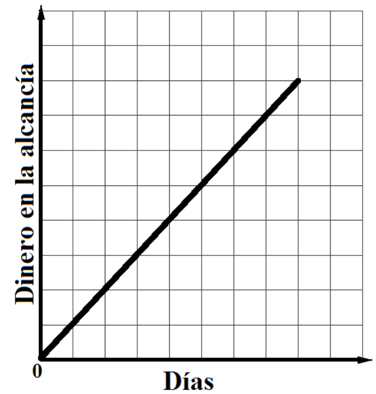
D.



E.

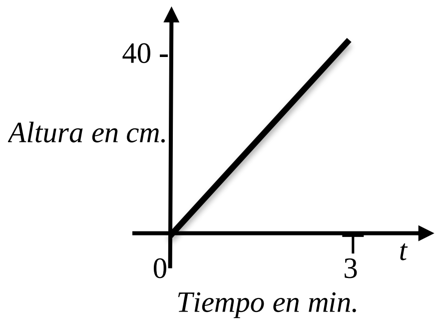


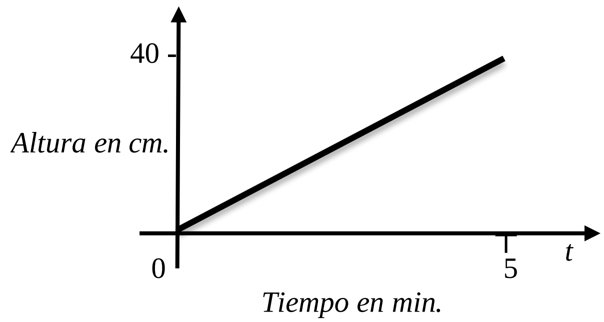
F.



11. (IC) Cómo se comporta la función cuya gráfica se muestra a continuación. Es decir, en qué intervalos crece, dónde decrece y dónde se hace constante. Explique ampliamente las razones de sus repuestas.

12. (PF). El maestro de Kiara y Miriam les dejó la tarea de llenar una cubeta cilíndrica a una razón constante y que representaran en una gráfica la variación de la altura del nivel del líquido respecto del tiempo. Las gráficas obtenidas fueron las siguientes:





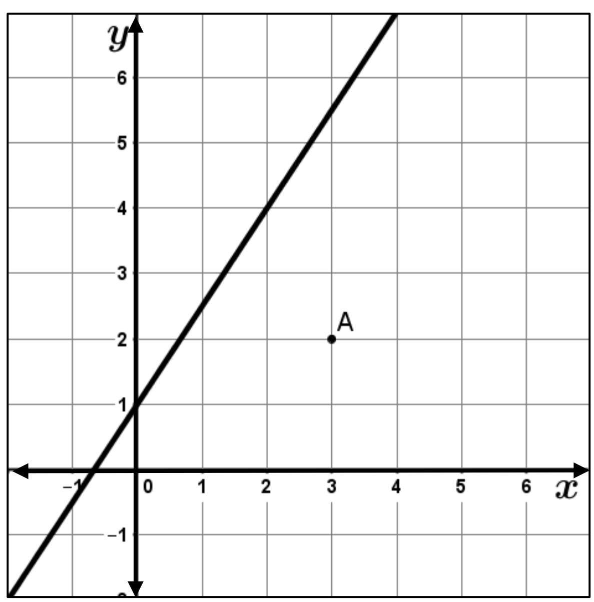
Gráfica de Kiara

Gráfica de Miriam

¿Cómo son entre sí las gráficas? ¿Qué piensas que habrá pasado para que sus gráficas se vean así?

13. (CL). Si en la función $y = \frac{3}{2}x + 1$
   a) Se cambia el término independiente por 3 ¿La función lineal es la misma o es diferente? ¿Por qué? ¿Qué pasa con la pendiente?

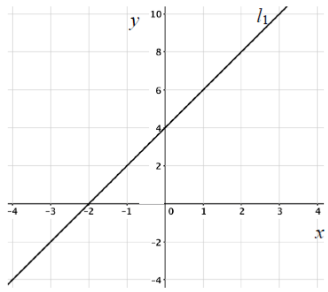
   b) Ahora si se traslada la recta al punto A (3,2), es decir si tomaras la recta e hicieras que pase por el punto A, ¿Qué pasa con su pendiente?



ANEXO B

Tareas de la Entrevista

Tarea 1. Obtenga la pendiente de la recta l_1 de todas las formas que usted conozca.



Tarea 2. ¿Cómo son entre sí las pendientes de los techos A, B y C?

Tarea 3. Construya la gráfica la recta que pasa por el punto A (1,-2) y cuya pendiente sea 3. ¿Es posible que existan otras rectas que tengan la misma pendiente? Argumente.

Tarea 4. Identifique la tabla de valores que proviene de una función lineal y argumente su elección.

A

x	F(x)
1	1
2	4
3	9
4	16

B

x	F(x)
1	2
2	4
3	6
4	8

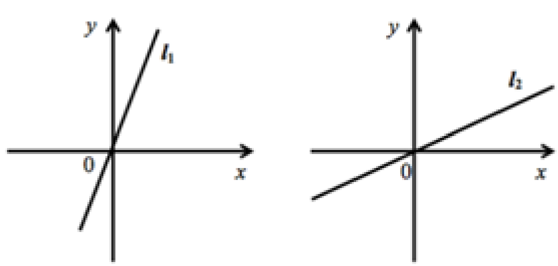
C

x	F(x)
-2	6
-1	3
0	0
1	-3

Tarea 5. La profesora presentó la gráfica de dos rectas y pidió a sus alumnos que mencionaran al menos una diferencia entre ellas. Carla señaló que la pendiente de l_1 es mayor que la pendiente de l_2, al respecto, Juan comentó que no compartía la opinión de Carla.

a) ¿Qué cree que podría estar pensando cada alumno?

b) ¿Quién cree que tenga la razón y por qué?

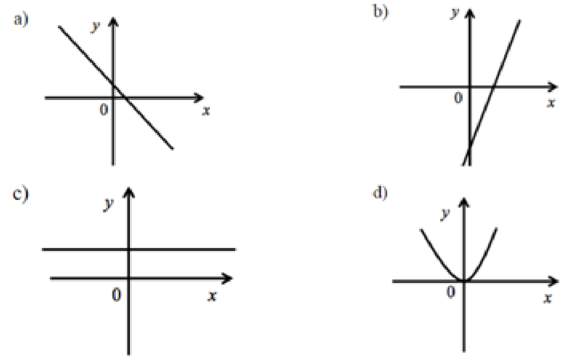


Tarea 6. En Italia se encuentra una subida conocida como el "Salita Scanuppia" en la que una señal de tráfico advierte claramente lo que se avecina, en esta aparece un 45% tal como se ve en la imagen 1, ¿Qué significa esa señal?

Imagen 1.Salita Scanuppia

Tarea 7. María tiene una cantidad de dinero ahorrada en el banco. De su salario, guarda la misma cantidad quincenal. Después de tres quincenas, ella tiene ahorrado $2100. En la séptima quincena su ahorro es de $2900.
a) ¿Cuánto ahorra María cada quincena?
b) ¿Cuánto tenía inicialmente en el banco?

Tarea 8. Analice las cuatro gráficas y responda, ¿cuáles podrían tener una pendiente de 2? Argumente su elección y escriba por cada inciso su análisis.



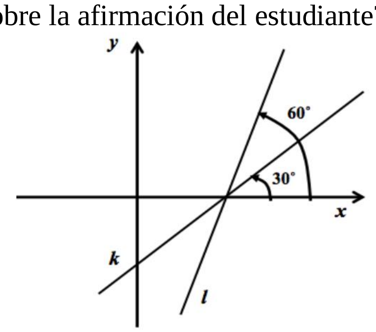
Tarea 9. Analice las ecuaciones dadas y responda lo que se pide

I. $y = 2x$ II. $y = -\frac{1}{2}x$ III. $y = 4x$ IV. $y = 3$

V. $y = -3x + 2$ VI. $y = 2x + 4$ VII. $y = 3x + 1$

a) Elija y escriba las ecuaciones que se corresponden con rectas crecientes, decrecientes, constantes. Argumente su respuesta.
b) Elija y escriba las ecuaciones que representan rectas paralelas entre sí. Argumente su respuesta.
c) Elija y escriba las ecuaciones que representan rectas perpendiculares entre sí. Argumente su respuesta.
d) Elija y escriba las ecuaciones que representan rectas cuya pendiente es dos.

Tarea 10. La recta *k* forma un ángulo de 30º con el eje *x*, y la recta *l* forma un ángulo de 60º con el eje *x*. Luis asegura que la pendiente de la recta *l* es el doble de la pendiente de la recta *k*. ¿Qué opina sobre la afirmación del estudiante?



Tarea 11. Dada la gráfica de la recta *l*. Construya al menos dos rectas, que tengan la misma pendiente. Argumente su respuesta.