UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
DOCTORADO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD
EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Prácticas matemáticas y formas normativas de razonamiento que soportan la evolución del razonamiento matemático en el marco del pensamiento funcional en un aula de clases de primaria

TESIS DOCTORAL

Que para obtener el grado de Doctor en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

Presenta:

Melby Guadalupe Cetina Vázquez

Director de tesis

Dra. María Guadalupe Cabañas-Sánchez

Chilpancingo, Guerrero Diciembre, 2019

Prácticas matemáticas y formas normativas de razonamiento que soportan la evolución del razonamiento matemático en el marco del pensamiento funcional en un aula de clases de primaria

Prácticas matemáticas y formas normativas de razonamiento que soportan la evolución del razonamiento matemático en el marco del pensamiento funcional en un aula de clases de primaria

Tesis Doctoral

Melby Guadalupe Cetina Vázquez

Directora de tesis

Dra. María Guadalupe Cabañas Sánchez

Comité evaluador:

Dra. Catalina Navarro Sandoval. Universidad Autónoma de Guerrero
Dra. Lilia Aké Tec. Universidad Autónoma de Querétaro
Dr. Armando Morales Carballo. Universidad Autónoma de Guerrero
Dra. María García González. Universidad Autónoma de Guerrero

2019

Centro de Investigación en Matemática Educativa
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero
Chilpancingo, Guerrero, México

Esta investigación fue financiada
por el Consejo Nacional de Ciencia
y Tecnología

Becaria No.
297662

A mis padres

Mi ejemplo de vida

Índice

Contenido **Pág.**

Abreviaturas

C1	Criterio 1
C2	Criterio 2
C3	Criterio 3
PMA	Práctica Matemática en el Aula
FNR	Forma Normativa de Razonamiento
FRI	Forma de Razonamiento Individual

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Introducción

En la actualidad hay una fuerte demanda en la investigación por estudiar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en toda su complejidad. Lo que implica el uso coordinado de diversas perspectivas teóricas que permitan, el análisis y la descripción de los aspectos, sociales e individuales, de la actividad matemática que sucede dentro de un aula de clases (Cobb & Yackel, 1996; Cobb, 1999; Wawro, 2011; Rasmussen, Wawro & Zandieh, 2015) cuando se aborda un contenido matemático específico.

Esta investigación, avanza en esa línea, se centra en el análisis de la actividad matemática que sucede dentro de un aula de clases, a través de uno de sus aspectos, como es el razonamiento matemático. Su elección recae en que, una descripción de la evolución del razonamiento matemático, deja en evidencia las conexiones entre ideas, representaciones y contextos, así como de argumentaciones y justificaciones (Wawro, 2011), que los estudiantes hacen para resolver un problema; convencer a los demás o a ellos mismos de una afirmación particular; o para integrar una serie de ideas en un todo más coherente (Brodie, 2010).

En ese contexto, este estudio persigue caracterizar las prácticas matemáticas y las formas normativas de razonamiento que soportan la evolución del razonamiento matemático de una comunidad de aula de clases de primaria, a lo largo de una secuencia de instrucción que promueva el desarrollo del pensamiento funcional. El fin es establecer un panorama global del desarrollo del pensamiento funcional de los niños en situaciones de aula, en el contexto escolar y social.

Este tipo de trabajos, eventualmente, tienen un papel clave sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje en la promoción del pensamiento funcional en la matemática escolar, al poner de manifiesto formas de pensamiento funcional y de participación en el aula que los profesores de matemáticas necesitan reconocer y desarrollar con sus estudiantes.

Para efectos de organización, la presente memoria de tesis doctoral, está dividida en seis capítulos.

El primer capítulo reporta una revisión a la literatura especializada sobre las temáticas de pensamiento funcional y análisis del razonamiento matemático, con el fin tanto de dar evidencia de la necesidad y pertinencia del presente estudio, como de delimitar los aspectos que lo sustentan y lo conforman. Se finaliza con el planteamiento del problema, la pregunta y los objetivos de investigación.

El segundo capítulo establece el sustento teórico y el marco interpretativo adoptado para la realización del estudio desde un contexto escolar y social. De manera particular, se fundamenta de la perspectiva sociocultural de Cobb y Yackel (1996) y su marco interpretativo de los aspectos sociales e individuales que norma la actividad matemática en el aula.

El tercer capítulo incluye un análisis de contenido matemático escolar para la sucesión matemática con progresión aritmética. Considerado para reflexionar sobre el tratamiento otorgado a este contenido en el currículo de matemáticas de la educación primaria mexicana, así transformarlo y extenderlo, para el diseño de una secuencia de instrucción que contemple problemas de generalización de patrones como vía para desarrollar pensamiento funcional.

El cuarto capítulo presenta el diseño metodológico de la investigación, el cual se desarrolla con elementos de una investigación diseño. Específicamente, el tipo de diseño utilizado es un experimento de enseñanza en el aula, basado de tres etapas: 1) diseño de materiales de instrucción y planificación; 2) experimentación en el aula; y 3) análisis retrospectivo (Cobb, 2000). Etapas discutidas en el marco del presente estudio.

El quinto capítulo describe las prácticas matemáticas y las formas normativas de razonamiento que soportaron la evolución del razonamiento matemático que la comunidad de aula de primaria estudiada evidenció a lo largo de una secuencia de instrucción que promovió el desarrollo del pensamiento funcional. La descripción es organizada por cada problema que constituyó la instrucción.

El sexto capítulo plantea una síntesis de la investigación. Se da respuesta a la pregunta de investigación y se exponen las conclusiones sobre los objetivos formulados. Además, se inidican tanto las aportaciones y limitaciones del estudio, como algunas interrogantes de investigación abiertas.

Capítulo 1. Antecedentes y problema de investigación

En la actualidad existe una creciente demanda por estudiar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en toda su complejidad. Lo que implica considerar la naturaleza social y culturalmente situada de la actividad matemática en el aula de clases (Cobb, 1999). Este capítulo presenta una revisión a la literatura sobre el pensamiento funcional, para evidenciar la necesidad y pertinencia de trabajos que, desde una mirada sociocultural, analicen la actividad matemática en un aula de clases a lo largo de una secuencia de instrucción que promueva el desarrollo de pensamiento funcional. Se asume que una forma de analizar la actividad matemática en el aula, es mediante uno de sus aspectos, como es el razonamiento matemático. Así mismo, se da cuenta que una de las vías para promover pensamiento funcional en primaria, son los problemas de generalización de patrones. Es de tener en cuenta que, en el trabajo con este tipo de problemas, una de las formas de razonamiento matemático (en particular el algebraico), que permea, involucra al pensamiento funcional.

1.1. El pensamiento funcional en los primeros grados de la educación elemental

El pensamiento funcional es parte de las propuestas de innovación curricular de álgebra temprana (*en inglés early algebra)* que promueven en las aulas de los primeros grados de la educación elemental, la incorporación de actividades dirigidas al estudio y generalización de patrones, relaciones y propiedades matemáticas para desarrollar competencias propias del álgebra, en un ambiente en el que se valore que los estudiantes exploren, modelen, hagan predicciones, discutan, comprueben ideas, argumenten y practiquen habilidades de cálculo (Blanton & Kaput, 2005). Su objetivo, es desarrollar y promover simultáneamente el pensamiento aritmético y el algebraico desde edades tempranas (de 3 a 12 años de edad), con la finalidad de desarrollar un aprendizaje con comprensión que facilite el estudio posterior del Álgebra en la educación secundaria.

El pensamiento funcional es reconocido como un punto de entrada importante en el pensamiento algebraico temprano y entendido como una actividad cognitiva centrada "en la relación entre dos (o más) cantidades variables, específicamente los tipos de pensamiento que van desde relaciones específicas (incidencias individuales) a generalizaciones de esa relación en todas las instancias" (Smith, 2008, p.143). La parte de razonamiento algebraico asociado con el pensamiento funcional ocurre cuando los niños crean sistemas de representación apropiados (por ejemplo, tablas, gráficos, lenguaje verbal o escrito, y variables) para representar una generalización de una relación entre cantidades variables

(Smith, 2008). El contenido matemático protagonista, es la función (Drijvers, Dekker & Wijers, 2011). Por tanto, su desarrollo posibilita los estudios sobre las nociones de variable y de función (Tanışlı, 2011; Doorman & Drijvers, 2011; Vergel 2015) y abre camino a unas matemáticas más avanzadas, como el Cálculo y el Análisis.

El tratamiento sugerido para desarrollar el pensamiento funcional, es mediante la transformación y ampliación del contenido aritmético considerado dentro del currículo de matemáticas de la educación elemental, para convertirlo en un recurso de oportunidades para construir patrones, conjeturar, generalizar y justificar las relaciones matemáticas entre cantidades (Blanton & Kaput 2003; Blanton & Kaput, 2005). Blanton y Kaput (2005) plantean que "las matemáticas de los grados elementales deben, desde el inicio de la educación formal, extenderse más allá del enfoque bastante común en los patrones recursivos para incluir el currículo y la instrucción que atienden deliberadamente cómo dos o más cantidades varían entre sí" (p.34). Reconocen que con ello se evitarían saltos, rupturas y cortes didácticos entre la enseñanza de la Aritmética y el Álgebra.

1.2. Los problemas de generalización de patrones como ruta para abordar el pensamiento funcional

Una de las rutas considerada por la investigación (e.g. Warren & Cooper, 2006; Vergel, 2015; Blanton et al., 2015; Pinto, 2016; Tanışlı, 2011) como la más importante para abordar el pensamiento funcional en los primeros grados de la educación elemental, son los problemas de generalización de patrones, que permiten introducir y trabajar con relaciones matemáticas entre dos cantidades que varían, esto es, relaciones funcionales. La relación funcional que puede establecerse en este tipo de problemas, es entre el patrón y su posición (Tanışlı, 2011).

Los problemas de generalización de patrones son el resultado de reconocer que un patrón es un elemento importante del desarrollo matemático para los niños y una construcción central de la investigación matemática (Waters, 2004 citado en Tanışlı & Özdaş, 2009). El patrón es entendido como "cualquier regularidad que usualmente involucra relaciones numéricas, espaciales o lógicas" (Mulligan & Milchelmore, 2009, p.34). Por su parte, la generalización es un acto cognitivo primario hacia la abstracción matemática (Mason 1985 citado en Butto y Rojano, 2004) y el centro de las actividades matemáticas (Tanışlı & Özdaş, 2009; Radford, 2013). Se basa en la capacidad de:

> … extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos (Kaput, 1999, p. 136).

El trabajo con patrones en los primeros grados de la educación, favorece tanto el desarrollo de la generalización, como la articulación de la generalización en situaciones cotidianas (Mason, 1985, citado en Butto y Rojano, 2004). Estos resultados, respaldan la configuración de los problemas de generalización de patrones como vía para desarrollar el pensamiento funcional.

Este tipo de problemas implican la búsqueda de patrones y su solución exige hallar un término a partir de otros dados o conocidos. Radican en generar, a partir de los términos particulares dados o condiciones iniciales de su generación, nuevos términos particulares (que suelen ser consecutivos, cercanos o lejanos) o la expresión del término general. Ponen de manifiesto, la necesidad de producir un patrón de comportamiento de los términos conocidos (Merino, Cañadas y Molina, 2013).

Estos problemas de generalización de patrones, pueden entenderse como el resultado de transformar y ampliar el contenido aritmético del currículo de matemáticas de la educación primaria mexicana de *sucesiones matemáticas con progresión aritmética y geométrica*.

1.3. Estado de la investigación sobre el pensamiento funcional

La investigación sobre el pensamiento funcional (e.g. Blanton & Kaput 2004; Blanton & Kaput, 2005; Brizuela & Earnest, 2008; Stephens et al., 2012; Merino, Cañadas y Molina, 2013; Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey & Newman-Owens, 2017) ha reportado que cuando el currículo y la instrucción dan la oportunidad a los niños de involucrarse en el pensamiento funcional, son capaces de trabajar con ideas de generalización, estructura y relaciones, que expresan mediante el uso de dibujos, tablas, gráficos, lenguaje común (verbal y escrito) y variables. También, con gestos, la manipulación de artefactos y el movimiento corporal (Radford, Edwards & Arzarello, 2009; Vergel, 2015). Esto apunta a que el pensamiento funcional puede abordarse con éxito en los primeros grados de la educación elemental e integrarse como parte del currículo de matemáticas (Blanton & Kaput 2003; Blanton & Kaput, 2005; Kaput, 2008).

Hoy día, esta línea de investigación, ya no discute si los niños son capaces o no de desarrollar ciertos rasgos del pensamiento funcional, sino que busca explicar hasta dónde son capaces de desarrollarlos y cómo promoverlos en las aulas de clases. Por ejemplo, Blanton y Kaput (2004) reportan cómo los estudiantes de grados elementales (de preescolar hasta quinto grado) desarrollan y expresan funciones. Toman en cuenta las formas de representación utilizadas, la progresión en el lenguaje matemático y las operaciones empleadas, y cómo atienden a una o más cantidades variables. Sus resultados indican que los estudiantes pueden participar en el pensamiento covariacional desde preescolar y que son capaces de describir cómo las cantidades se corresponden desde el primer grado usando lenguaje común hasta quinto grado en palabras y símbolos. Resaltan que, aunque la búsqueda de patrones en conjuntos de datos de una sola variable es común en los currículos elementales, es aconsejable que las matemáticas de los grados elementales se transformen y extiendan para incluir también el pensamiento funcional.

La literatura evidencia al menos cuatro grupos de estudios asociados con el pensamiento funcional, los que se centran en: 1) los estudiantes, 2) los profesores, 3) el currículo, instrucción o análisis de libros de textos; y 4) proponer modelos o marcos para caracterizar el pensamiento algebraico o parte de él.

1.3.1. Investigaciones centradas en el estudiante

Las investigaciones centradas en el estudiante, han indagado en aspectos cognitivos y sociales dentro y fuera de las aulas de clases. Los resultados se reconocen en términos de: a) formas de pensamiento funcional, b) tipos de representaciones, c) estrategias, d) dificultades y/o limitaciones, e) enfoques para articular sus ideas, y f) progreso de los estudiantes en generalizar y representar las relaciones funcionales.

a) *Formas de pensamiento funcional*. Son tres las *formas de pensamiento funcional* que la investigación ha documentado en el marco de la generalización de patrones, asociados a relaciones funcionales lineales (Smith, 2008; Blanton & Kaput, 2005), en niños de educación primaria: patrón recursivo o recurrencia, pensamiento covariacional o covariación y la correspondencia o relación de correspondencia. Apoyado en estas formas de pensar, Tanışlı (2011) reconoce que cuando los estudiantes de quinto grado trabajan de forma individual con patrones numéricos expresados en tablas, piensan en la covariación, descubren la relación de correspondencia y generalizan esta relación. Este es un indicativo de las habilidades de razonamiento de los estudiantes, asociadas a sus formas alternativas de pensar en la generalización de la relación de correspondencia.

El estudio de Stephens et al. (2012) con estudiantes de tercero a quinto grado, investigó el impacto de una progresión de aprendizaje de álgebra temprana, referidas al pensamiento funcional. Se desarrolló en el marco de un experimento de enseñanza, que se basó en el análisis de las habilidades de los estudiantes al participar en el experimento. Documentaron que después de una intervención sostenida de álgebra temprana, las habilidades de los estudiantes incrementaron, de modo tal, que pasaron de un pensamiento recursivo a uno covariacional sobre funciones lineales así como para representar reglas de correspondencia tanto en palabras como en variables. Reconocieron una mejora significativa en las habilidades de los estudiantes, por cuanto a: 1) construir tablas de funciones en los de tercero y cuarto grado, 2) identificar patrones o relaciones en las tablas en los de tercer grado, 3) representar verbalmente una regla funcional en los de tercero y cuarto grado, y 4) representar simbólicamente una regla funcional en todos los grados.

El estudio de López-Mojica, Cárdenas, Sánchez y Aceves (2017) por su parte, se ocupó de estudiar procesos cognitivos que se articulan al pensamiento funcional, en una población con síndrome de Down de entre 11 a 15 años de edad. *Caracterizaron los procesos cognitivos del pensamiento algebraico* en atención a tres ejes rectores: epistemológico, cognitivo y social. El primero, refiere al conocimiento matemático. El segundo, a los esquemas compesatorios que se presentan cuando el individuo desarrolla una deficiencia, los que le permiten superarlas para explorar el medio en el que se desarrolla (el individuo). El tercero, enfatiza en que la adquisición del conocimiento matemático es resultado de la interacción entre el sujeto, el objeto y el signo, a manera que un concepto siempre puede ser perfeccionado y se distingue de, y entre, objeto y signo. En ese contexto de ideas y posturas teóricas, diseñaron y aplicaron actividades que exploraron el desempeño de esta población, ante problemas de seriación, proporción y patrones geométricos. Evidenciaron en el eje epistemológico, la presencia de nociones de seriación, proporción y patrones geométricos durante la actividad matemática. En el eje cognitivo, reconocieron que los jóvenes emplearon el esquema compensatorio visual, el cual favoreció su pensamiento matemático. En el eje social, reconocieron que actividades con patrones geométricos favorecen el desarrollo del pensamiento algebraico en este tipo de población.

b) *Tipo de representaciones*. Por cuanto al *tipo de representaciones* a las que recurren los niños para observar y expresar las relaciones entre cantidades en problemas de generalización de patrones, la investigación ha documentado al menos diez, desde diferentes enfoques y perspectivas teóricas, tales como: dibujos (figural o pictórica), tablas, gráficos, lenguaje común (verbal y escrito), expresiones con variables y representaciones múltiples (e. g. Brizuela & Earnest, 2008; Stephens et al., 2012; Merino, Cañadas y Molina, 2013; Blanton, et al., 2017), los gestos, el ritmo, la manipulación de artefactos y el movimiento corporal (e.g. Radford et al., 2009; Radford, 2014; Vergel, 2015). Merino et al. (2013) por ejemplo, establecieron una categoría de representaciones a partir de la solución de un problema genérico sobre generalización de un patrón lineal, en niños de quinto grado. Tomaron como base el concepto de representación y algunas categorías ya establecidas. En ese contexto documentaron, las del tipo: pictórica, verbal, numérica, simbólica y múltiple.

Desde la teoría cultural de la objetivación, la investigación ha documentado el tipo de representaciones que usan los estudiantes en tareas de generalización de patrones, en términos de recusos semióticos (e.g. Radford, 2008; Radford, 2014; Vergel, 2015). Se sustentan del análisis de la génesis del pensamiento algebraico en el contexto de las acciones a través de las cuales los jóvenes estudiantes expresan sus generalizaciones. Génesis explorada a partir de la forma en que surgen y evolucionan nuevas relaciones entre el cuerpo, la percepción y el inicio del uso de símbolos a medida que los alumnos participan en actividades sobre generalización de patrones. Los recursos semióticos que usaron, como los gestos, el movimiento, la ritmicidad y la actividad perceptual fueron consubstanciales a la manifestación y constitución del pensamiento algebraico temprano. Evidenciaron una evolución del pensamiento algebraico factual (donde los medios semióticos de objetivación movilizados fueron los gestos, los movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras para expresar acciones concretas) hacia el contextual (donde los gestos y las palabras fueron sustituidos por otros medios semióticos de objetivación tales como frases "clave", para expresar el término general).

c) *Estrategias*. En el marco de las *estrategias* empleadas por los niños cuando resuelven problemas de generalización de patrones, se han reportado al menos diez: 1) contar a partir de un dibujo (Stephens et al., 2012; Merino et al., 2013; Jurdak & El Mouhayar, 2014), 2) recursivo, 3) objeto-entero, 4) fragmentado, 5) explícito o funcional (Lannin, Barker & Townsend, 2006; Tanışlı & Özdaş, 2009; Jurdak & El Mouhayar, 2014), 6) de diferencia (Stacey, 1989), 7) uso de patrón, 8) opera sin uso de patrón, 9) repetición de enunciado (Merino et al., 2013) y 10) respuesta directa (Morales, Cañadas, Brizuela y Gómez, 2016).

Estudios como los de Lannin, Barker y Townsend (2006), informan las estrategias de generalización algebraica utilizadas por dos estudiantes de quinto grado (de EE. UU.) junto con los factores que parecen influir en su aparición, destacan: el valor de entrada, la estructura matemática de la tarea, las estrategias anteriores, la imagen visual de la situación y, las interacciones sociales con el profesor y otro estudiante. Tanışlı y Özdaş (2009), analizaron las estrategias usadas por estudiantes de quinto grado en Turquía (con niveles de éxito alto, medio y bajo), en la resolución de problemas de generalización de patrones en atención a la generalización cercana y lejana. Identificaron a las estrategias recursiva y explícita como las más usadas. La primera, en etapas cercanas y la segunda en etapas lejanas. Jurdak y El Mouhayar (2014), por su parte, exploraron la tendencia de desarrollo del nivel de razonamiento de los estudiantes en la generalización de patrones asociado con el uso de las estrategias en los niveles de grado de cuarto a undécimo en cinco escuelas en el Líbano. Su estudio da cuenta, que el nivel de razonamiento de los estudiantes tuvo una tendencia creciente entre grupos de niveles de grado. El tipo de tarea (inmediata, cercana, lejana) y el tipo de función (lineal, no lineal) parecieron mediar el desarrollo del nivel de razonamiento en el nivel de grado, no así la complejidad de la tarea (simple, más compleja). Identificaron varias estrategias en cada grupo de nivel de grado y las tendencias de desarrollo del nivel de razonamiento de los estudiantes asociados con el uso de ellas, no fueron uniformes y variaron en los grupos de nivel de grado, por lo que apoyaban una interpretación neo-piagetiana de los resultados.

d) *Dificultades y limitaciones*. En el ámbito de la generalización de patrones, también se han reconocido las *dificultades y/o limitaciones* que enfrentan los estudiantes al construir una expresión matemática plausive (o regla general) que exprese el comportamiento de un patrón en cualesquiera de sus etapas. En este sentido, Warren y Cooper (2008) destacan a las descripciones orales de una generalización, como una dificultad y limitación en estudiantes de ocho años, porque carecen de precisión. Dificultad con el uso de vocabulario matemático necesario, para dar respuestas precisas: palabras como "fila" y "columna" y describir una matriz como 2 filas por 4 columnas. Con base en ello, sugieren mayor investigación sobre el papel del lenguaje matemático y la comprensión matemática en el aula de primaria. En Carraher, Martinez y Schliemann (2008), documentaron dos dificultades en estudiantes de tercer grado mientras resuelven problemas sobre la generalización de patrones figurales en sucesiones lineales: 1) el paso entre las conceptualizaciones recursivas a las expresiones de funciones de forma cerrada (de entrada y salida) y 2) el paso o conducción del pensamiento empírico, basado en conjeturas sobre los casos en cuestión, al razonamiento teórico que se deriva de operaciones sobre afirmaciones explícitas sobre relaciones matemáticas. En ese marco de ideas, sugieren promover procesos donde los estudiantes aprendan y sean introducidos a hacer generalizaciones matemáticas sobre problemas para los que se les permite buscar patrones y anotar relaciones y estructuras. Ya que como bien señalan, aprenderán de manera progresiva a formular estas generalizaciones usando notación algebraica. Aún más gradualmente, aprenderán a obtener nueva información reflexionando sobre las expresiones algebraicas que ellos mismos y otros han producido.

e) *Enfoques para articular ideas*. Se han caracterizado a los *enfoques de recurrencia, el covaricional* y *el de correspondencia* (Smith, 2008), a partir de las acciones que los estudiantes realizan, y por medio de los que los estudiantes articulan *ideas* sobre relaciones entre una o dos cantidades. Estos enfoques se han identificado en diversos estudios. A partir del enfoque de recurrencia, identificaron ideas en niños de preescolar, como "contando por 2" y "cada vez más" y en los de primer grado para el caso de contar ojos y colas para cierta cantidad de perros como "estamos contando por 3" desde un enfoque de recurrencia. En preescolar también reconocieron ideas desde un enfoque covariacional: "cada vez que añadimos un perro más, tenemos dos ojos". Desde un enfoque de correspondencia, estudiantes de segundo grado plantearon expresiones como “tienes que duplicar el número de perros para obtener el número de ojos" y los de tercero, cuarto y quinto grado como “no importa cuántos perros tengas, solo tienes que multiplicarlo por 2", así describen esta relación como '$n \times 2$' y '$2 \times n$' (Blanton & Kaput, 2004). Otras ideas identificadas son "contando en dos" y "doblando" en estudiantes de segundo grado (Cañadas, Brizuela & Blanton, 2016).

f) *Progreso de los estudiantes en generalizar y representar las relaciones funcionales*. Los estudios que indagan sobre el *progreso* de los estudiantes mientras *generalizan y representan las relaciones funcionales* como parte de un enfoque integral del álgebra temprana refieren al nivel básico. Este grupo de estudios (e.g. Markworth, 2010; Blanton et al., 2015; Blanton, et al., 2017; Stephens, Fonger, Strachota, Isler, Blanton, Knuth y Murphy, 2017) han usado a la trayectoria hipotética de aprendizaje como modelo teórico para el diseño de secuencia de instrucción, que contribuya a fomentar la comprensión de las relaciones funcionales en los niños. Se han orientados a validar las trayectorias de aprendizaje y su caracterización basada en los datos empíricos.

El estudio de Markworth (2010), para documentar el progreso en estudiantes de primaria (quinto grado) se apoyó del concepto de práctica matemática acuñado de Cobb y colaboradores (Coob & Yackel, 1995; Yackel & Coob, 1996), sin evidenciar las formas normativas de razonamiento, fundamental para dar cuenta de la evolución del razonamiento de una comunidad de aula desde una mirada sociocultural del aprendizaje. Así, determinó seis prácticas matemáticas para ilustrar la progresión del aprendizaje de los estudiantes durante una secuencia de instrucción local sobre el desarrollo del pensamiento funcional en el contexto de patrones geométricos de crecimiento: 1) utilizar el razonamiento figurativo para identificar y articular la estructura física del patrón de crecimiento, 2) traducir el razonamiento figurativo al razonamiento numérico, 3) identificar una relación entre el número de etapa y un aspecto cuantificable del patrón de crecimiento, 4) representar una relación entre el número de etapa y un aspecto cuantificable del patrón de crecimiento, 5) usar variables como cantidades variables para la generalización de las variables independientes y dependientes, y 6) representar la relación funcional en una ecuación simbólica completa.

Blanton et al. (2015), Blanton et al. (2017) y Stephens et al. (2017) expresan ese progreso, en téminos de niveles de sofisticación en el pensamiento infantil en enseñanza básica, sobre la generalización. En Blanton et al. (2015), proponen ocho niveles que se espera puedan desarrollar niños de tercer grado en relación con la gran idea matemática de pensamiento funcional: 1) generar datos lineales y organizarlos en una tabla de funciones, 2) identificar el significado de una variable utilizada para representar una cantidad variable, 3) identificar un patrón recursivo y describirlo en palabras; usar para predecir datos cercanos, 4) identificar una relación covariacional y describir en palabras, 5) identificar una regla de función y describir en palabras y variables, 6) usar una regla de función para predecir valores de funciones lejanas, 7) dado un valor de la variable dependiente, determinar el valor de la variable independiente (reversibilidad), y 8) construir un gráfico de coordenadas.

En Blanton et al. (2017) categorizaron seis niveles con base en el uso de cantidades variables y notación variable: 1) pre-variable / pre-simbólico, 2) pre-variable/letras como etiquetas o como objetos representativos, 3) letras que representan variables con valores fijos y deterministas, 4) letras que representan variables con valores fijos pero elegidos arbitrariamente, 5) letras como variables que representan incógnitas variables, y 6) letras que representan variables como objetos matemáticos. En Stephens et al. (2017) se clasificó once niveles asociados con la generalización y la representación que se hace de las relaciones funcionales: 0) no hay respuesta o reafirmación de lo dado; 1) patrón recursivo-particular, 2) patrón recursivo general, 3) relación de covarianza, 4) instanciación única, 5) Funcional-particular, 6) funcional-básico, 7) funcional-emergente en variables, 8) funcional-emergente en palabras, 9) funcional-condensado en variables, y 10) funcional-condensado en palabras.

Zapatera (2018) por su parte, evidencia ese progreso, con base en la coordinación de diez descriptores (Figura 1.1) que contribuyeron a diagnosticar la comprensión de los estudiantes sobre la generalización de patrones y a describir su progreso en quinto grado, en términos de crecimiento asociado con el pensamiento algebraico.

Figura 1.1. Descriptores de los niveles de la trayectoria, reimpreso de Zapatera (2018, p. 108).

1.3.2. Investigaciones centradas en el profesor

El pensamiento funcional también ha sido objeto de estudio en profesores en formación y en servicio, de nivel básico (e.g. Warren & Cooper, 2008; Wilkie, 2014; Godino et al., 2015; Pino-Fan, Assis & Castro, 2015; Zapatera, 2019). Warren y Cooper (2008) exploraron las *acciones de enseñanza* que comenzaron a salvar muchas de las dificultades reportadas en otras investigaciones, producto de la exploración de los patrones de crecimiento visual y la expresión de estos patrones como funciones y expresiones algebraicas en jóvenes adolescentes. Los datos del estudio fueron recolectados en el marco de un experimento de enseñanza desarrollado en dos aulas de clases con estudiantes de ocho años de edad. El análisis de los datos reveló seis acciones de los profesores que apoyaron el examen de patrones de crecimiento como relaciones funcionales entre el patrón y su posición, como son: 1) el uso de materiales concretos para crear patrones, 2) preguntas específicas para hacer explícita la relación entre el patrón y su posición, 3) preguntas específicas que ayudan a los estudiantes a alcanzar una generalización en relación con posiciones desconocidas, 4) el discurso, 5) el sistema de signos, y 6) la actividad semiótica. Estas acciones no solo permitieron que los estudiantes fuesen capaces de pensar en la relación entre dos conjuntos de datos, sino también de expresarla de forma abstracta.

El estudio de Wilkie (2014) por su parte, analizó *aspectos del conocimiento actual de los profesores* sobre la enseñanza del pensamiento funcional en la educación primaria superior. Como parte de un proyecto en Australia, encuestó a 105 profesores de educación primaria superior. La encuesta contenía varios ítems de respuesta abierta que buscaron datos sobre la comprensión de los maestros en cuatro de los dominios de conocimiento: Conocimiento de contenido especializado (SCK); Conocimiento de contenido y estudiantes (KCS); Conocimiento de contenido y enseñanza (KCT); y Conocimiento del plan de estudios (KC). Los resultados indicaron que, en su mayor parte, el conocimiento de los profesores sobre el pensamiento funcional estaba por debajo del nivel esperado para la enseñanza del álgebra en la educación primaria superior. La Tabla 1.1 presenta un resumen de los hallazgos clave para cada uno de los cuatro tipos de conocimiento investigados y lo que la mayoría de los profesores pudieron hacer (es decir, fortalezas) y no pudieron hacer (es decir, debilidades). Los hallazgos proporcionan una base sólida sobre la cual construir el conocimiento de los profesores referente a cómo los estudiantes aprenden y las estrategias de enseñanza efectivas que pueden usar. Interés que comparte el trabajo de Godino et al. (2015).

Tabla 1.1.
Fortalezas y debilidades en el conocimiento matemático de los maestros para enseñar el pensamiento funcional, reinpreso de Wilkie (2014, p.419)

Tipo de conocimiento	Fortalezas	Debilidades
SCK	Identificar y representar la generalización del patrón de crecimiento en palabras o con un cálculo.	Representar la generalización simbólicamente.
KCS	Proporcionar posibles respuestas correctas de los estudiantes	Proporcionar ejemplos recursivos y explícitos de generalización. Usar la terminología algebraica apropiada. Interpretar los errores de los estudiantes.
KCT		Proporcionar una respuesta adecuada a un error del estudiante. Utilizar la terminología algebraica en la enseñanza. Usar pares de variables consecutivos y no consecutivos para enseñar generalización.
KC		Aplicar el currículo a las actividades apropiadas.

Zapatera (2019) por su parte, evidencia el estado que guarda el desarrollo de la competencia docente *mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los alumnos* en estudiantes para maestros (EPM) de educación primaria, quienes cursaban la asignatura *Aprendizaje y didáctica de las matemáticas.* Conceptualiza la mirada profesional con base en tres destrezas descritas por Jacobs, Lamb y Philipp (2010, citado en Zapatera, 2019): 1) identificar los aspectos relevantes, 2) interpretar la comprensión de los alumnos y 3) tomar decisiones de acción. Para llevar adelante su investigación, demandó a los EPM: a) describir las respuestas de tres alumnos de primaria a un problema de generalización de patrones, b) interpretar la comprensión de los alumnos y c) proponer acciones para mejorar o ampliar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Derivado de su investigación, generó descriptores de cuatro niveles de desarrollo: 1) EPM que no identifican los elementos matemáticos relevantes en el proceso de generalización de patrones, 2) EPM que identifican los elementos matemáticos, pero no los usan para interpretar la comprensión de los alumnos, 3) EPM que identifican los elementos y los usan para interpretar la comprensión de los alumnos, y 4) EPM que identifican los elementos, los usan para interpretar la comprensión de los alumnos y proponer acciones adecuadas para el progreso del aprendizaje de los alumnos de primaria. Infiere que los niveles establecidos y sus descriptores pueden ser el punto de partida para establecer una futura trayectoria de aprendizaje de la mirada profesional y ofrecer información a los formadores para interpretar el progreso de los EPM en el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los alumnos en el contexto de la generalización de patrones.

Otro estudio es el de Pino-Fan, Assis y Castro (2015), desarrollado con profesores de matemáticas de secundaria en ejercicio, quienes cursaban una maestría en Educación Matemática en Chile. Exploraron en estos profesores, el uso de algunas dimensiones y herramientas teórico-metodológicas sugeridas por el modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático del Enfoque Ontosemiótico, a través del análisis del conocimiento que evidenciaron al resolver una actividad (de naturaleza didáctico-matemática) sobre patrones. Analizaron dos dimensiones, la Matemática y la Didáctica. Desde la primera, analizaron el Conocimiento Común y el Conocimiento Extendido. Con base en la segunda dimensión, exploraron las Facetas Epistémica, Ecológica, Cognitiva, Afectiva, Interaccional y la Mediacional. Evidenciaron que los maestros pueden resolver elementos relacionados con el conocimiento de contenido común, aunque reconocen que tienen ciertas dificultades cuando se enfrentan a elementos que apuntan a explorar otras dimensiones de su conocimiento, por ejemplo, sobre conocimiento de contenido extendido, de recursos y medios, o del estado afectivo de los estudiantes.

1.3.3. Investigaciones centradas en el currículo, instrucción o análisis de libros de textos

Los estudios sobre pensamiento funcional centrados en el currículo e instrucción, han propuesto formas, medios y herramientas para integrarlo en el aula de clases. La investigación de Blanton y Kaput (2005) por ejemplo, se respondió *cómo* los profesores de primaria pueden *usar el pensamiento funcional para integrar el razonamiento algebraico en el currículo y la instrucción*. El estudio refiere al desarrollo profesional de cinco años, así como de un curso de posgrado para maestros de primaria. Identificaron tres dimensiones conectadas del cambio: 1) transformar la base de recursos instructivos de los maestros; 2) usar el pensamiento de los niños para aprovechar el aprendizaje de los maestros; y 3) crear un salón de clases con cultura y práctica para apoyar el pensamiento algebraico. A grandes rasgos, la primera dimensión plantea que los profesores transformen su base de recursos de instrucción existente (contenido aritmético) para incluir la exploración de las relaciones de covariación y correspondencia. Consideran que se logra si en los problemas aritméticos se involucra la variación de un parámetro, ya que es como los estudiantes generan un conjunto de datos que tienen una relación matemática, y el uso de cantidades suficientemente grandes para que ese parámetro conduzca al uso algebraico del número. La segunda dimensión de cambio se basa en que los profesores deben incorporar la generalidad en su instrucción, deben comprometerse con lo que los estudiantes dicen, hacen y escriben como un catalizador para construir su propio discurso algebraico en el aula, es decir, requieren un "sentido algebraico" mediante el cual puedan identificar momentos en el pensamiento de los niños para extender las conversaciones sobre aritmética a aquellas que exploran la generalidad matemática. Por último, la tercera dimensión alienta a construir una cultura de práctica en las aulas de clases para que el pensamiento funcional de los niños pueda prosperar. Ésta se crea cuando el profesor integra en su instrucción normas socio-matemáticas de conjeturas, argumentaciones y generalizaciones de manera intencional, donde los estudiantes tomen en serio los argumentos como formas de desarrollar un conocimiento confiable.

En este mismo grupo de estudios se ubican los de Button y Rojano (2004; 2010), quienes *propusieron rutas de acceso al pensamiento algebraico:* razonamiento proporcional y procesos de generalización. Para dar evidenciar de la viabilidad de dichas rutas, realizaron estudios empíricos con estudiantes de quinto y sexto grado de primaria, de entre 10 y 11 años de edad, basados en el Modelo Teórico Local propuesto en Filloy (1999) y Filloy, Rojano y Puig (2008). Los trabajos experimentales involucraron actividades con lápiz y papel y con el programa Logo. Los resultados revelaron que, durante la investigación, los estudiantes presentaron dificultades para percibir la diferencia entre secuencias aritméticas y geométricas, así como para expresar relaciones funcionales. Al término del estudio, reconocen que los participantes lograron comprender ideas básicas de variación proporcional, describir un patrón y formular una regla general, a medida que transitaban del pensamiento aditivo al multiplicativo.

Otro tipo de estudios, es el centrado en el análisis de libros de texto de la educación elemental, que caracterizan las *tareas o lecciones que refieren al pensamiento algebraico*. En ese contexto, Demosthenous y Stylianides (2014), delimitaron un marco analítico para categorizar tipos de tareas en primaria y las respectivas directrices (o la falta de ellas) en las guías docentes que los acompañan. Establecieron tres categorías: a) relaciones aritméticamente situadas (RAS), b) relaciones basadas en reglas (RBR) y C) relaciones conocidos-desconocidos (RD-C). Examinaron además, si en las tareas, la demanda de las relaciones entre los números y las cantidades está presente de forma explícita o implícitamente. Usaron este marco, para delimitar el porcentaje de tareas que corresponden a cada tipo, en los libros de texto de los grados cuarto, quinto y sexto en el contexto educativo chipriota. Reconocen que el 42,4% son tipo RBR; 45,7%, corresponden a la categoría RD-C; y 11,9% tipo RAS. Sugieren el desarrollo de investigaciones que exploren las interpretaciones de los profesores de primaria en tareas de este tipo, así como la difusión de diferentes tipos de tareas relacionadas con el álgebra. Basados en el marco analítico propuesto por estos investigadores, Cabañas-Sánchez, Salazar y Nolasco-Hesiquio (2017) y Salazar (2017), analizaron las tareas propuestas en el libro de texto de matemáticas de primer grado de Educación básica primaria en México, a fin de caracterizar las que potencian el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Se ubicaron en las correspondientes al eje sentido numérico y pensamiento algebraico. Su análisis parte de proponer una articulación entre este marco, con las grandes ideas matemáticas propuestas por Blanton et al. (2015).

Reconocen que una mayoría de tareas se ubican en las categorías tipo RAS (44%) y RBR (43%). Las de tipo RAS enfatizan en gran idea matemática equivalencia, cuyo razonamiento se orienta hacia la comprensión relacional del signo igual. Las de tipo RBR, como señalan estos autores, demandan el desarrollo del pensamiento funcional en los estudiantes, mientras se les ubica a reconocer patrones en sucesiones de tipo lineal en orden ascendente y descendete. Sitúan a los estudiantes a reconocer el comportamiento de los patrones numéricos o geométricos en una sucesión, para luego articularlos con el lenguaje verbal y/o escrito. Las tareas tipo RC-D las reconocen articuladas a las de tipo RAS. Refieren a la gran idea matemática ecuación, que aparece de modo implícito en situaciones sobre valor faltante. En ese contexto, aparece además, la gran idea matemática equivalencia. De ahí que las categorizan como tipo RAS, RC-D (13%).

En López-Mojica y Martínez (2017) también se analizan las tareas de los libros texto de texto de matemáticas de Educación Primaria en México, de primero a sexto grado. Se propusieron caracterizar la naturaleza algebraica de las tareas a fin de ofrecer a los docentes de este nivel educativo una alternativa del tratamiento de los conceptos algebraicos. Analizaron las lecciones que pertenecen al eje sentido numérico y pensamiento algebraico, con base en un marco de referencia que establece criterios de análisis para el diseño e implementación de actividades relativas a un pensamiento relacional, un pensamiento proporcional y el estudio de la generalidad a través de patrones. Los criterios de análisis establecidos, fueron: nociones de álgebra; situación y contexto; recursos semióticos; y términos empleados. Reconocieron un predominio en las lecciones sobre lo proporcional, un descuido en el tratamiento de lo relacional y un limitado desarrollo de la generalidad a través del estudio de patrones y secuencias. Las nociones de patrones y sucesiones fueron las que menos se identificaron en las lecciones (47 lecciones de un total de 180) de los seis niveles educativos. Con ello sugirieron un predominio hacia lo aritmético y el desaprovechamiento de sentar bases para un razonamiento algebraico. Otra investigación que involucró a las tareas de los libros de texto de matemáticas de primaria en México es el de Aké (2017). Para ello, delimitó un marco de referencia para el análisis de la actividad matemática, que le permitió identificar qué es lo que puede considerarse como algebraico en los niveles elementales, así como de las tareas que potencializan su desarrollo. Se sustentó del Modelo de Niveles de Algebrización propuesto por Godino y colaboradores (Godino, et al., 2014, citado en Aké, 2017). Ejemplificó el análisis a partir de una tarea dada y exploró las posibles prácticas matemáticas que implica. Delimitó los aspectos estructurales y funcionales del álgebra que podrían ser potenciados en la tarea para promover el razonamiento algebraico. Así, evidenció que los niveles de algebrización son referente para que los maestros de educación primaria puedan distinguir formas de razonamiento algebraico en la práctica matemática de los niños y discernir entre las tareas que promueven su desarrollo de las que no.

1.3.4. Investigaciones centradas en proponer modelos o marcos para caracterizar el pensamiento algebraico o parte de él

Un último grupo de investigaciones sobre pensamiento funcional, son las centradas en proponer modelos o marcos para caracterizar el pensamiento algebraico o parte de él (e. g. Rivera, 2013; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Godino, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa, 2015; López-Mojica y Martínez, 2017).

Basado en una síntesis de estudios realizados sobre la generalización de patrones, Rivera (2013) construye un *marco organizativo para caracterizar* el *proceso de generalización de patrones* en estudiantes del nivel de primaria y de secundaria. El marco propuesto (Figura 1.2), considera a los procesos inferenciales de abducción, inducción y deducción como centrales en la generalización de patrones. También, cinco dimensiones de la generalización de patrones: tipos y fuentes de generalización, tipos de estructuras, formas de atención (o conciencia) a las estructuras, modos de representar y de comprender generalizaciones. Este marco concibe a la generalización de patrones, como un proceso complejo que conlleva a la superposición simultánea de, procesos relevantes para construir, expresar y justificar estructuras interpretadas.

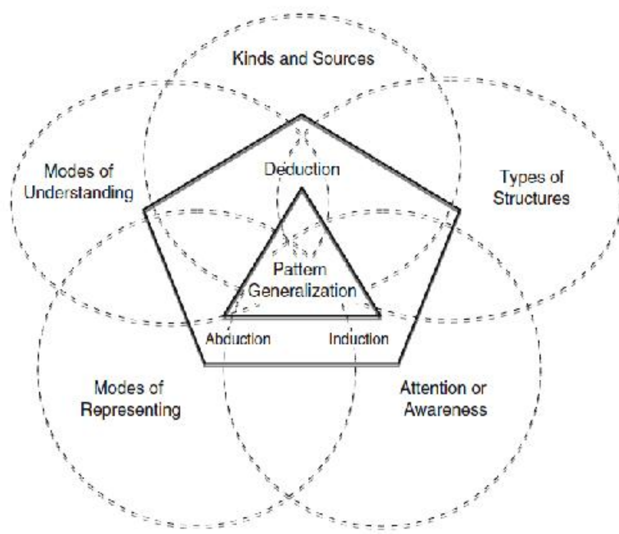


Figura 1.2. Marco organizativo del proceso de generalización de patrones, reimpreso de Rivera (2013, p.59).

Por su parte, Godino et al. (2015) articularon y extendieron el modelo de caracterización del razonamiento algebraico en Educación Primaria de Godino et al. (2014), mediante la inclusión de tres niveles adicionales de razonamiento algebraico que permiten analizar la actividad matemática en Educación Secundaria (incluido Bachillerato). Estos niveles estuvieron basados en consideración del uso y tratamiento de parámetros para representar familias de ecuaciones y funciones; y del estudio de las estructuras algebraicas en sí mismas, sus definiciones y propiedades, de acuerdo con el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Batanero & Font, 2007; Godino, 2012). En la Tabla 1.2 son presentados los seis niveles de razonamiento algebraico en primaria y secundaria (junto con el nivel 0 indicativo de ausencia de algebrización). Estos niveles de algebrización son ofrecidos también como medio para el diseño de prácticas operativas, discursivas y regulativas cuyo objetivo es la progresión del aprendizaje.

Tabla 1.2.
Niveles de algebrización en el EOS

Niveles de algebrización
Nivel 0: aritmético
Nivel 1: proto-algebraico incipiente
Nivel 2: proto-algebraico intermedio
Nivel 3: algebraico consolidado
Nivel 4: uso de parámetros
Nivel 5: manipulación de parámetros
Nivel 6: tareas estructurales

La investigación de López-Mojica y Martínez (2017) propone un marco de referencia que permita promover un pensamiento algebraico desde el enfoque del álgebra temprana. Desde el punto de vista metodológico se apoya de las tareas del eje Sentido numérico y pensamiento algebraico de los libros texto de matemáticas (de primero a sexto grado) de Educación Primaria en México. Proponen cuatro criterios de análisis para el diseño e implementación de actividades relativas a un pensamiento relacional, un pensamiento proporcional y el estudio de la generalidad a través de patrones. Estos criterios lo estructuran con base en los resultados de investigaciones previas (Ojeda, 2006; Butto y Rojano, 2010; Aké, 2013 citados en López-Mojica y Martínez, 2017) en los que distinguen (López-Mojica y Martínez, 2017, pp. 46-47):

1) *Nociones de álgebra*. estas refieren a las características relacional (Aké, 2013), proporcional (Butto y Rojano, 2010) y de patrones geométricos (Aké, 2013) que sientan bases para el pensamiento algebraico.
2) *Situación y contexto*. refieren al tipo de actividades que se tratan en las lecciones del libro de texto, es decir cómo se plantean los enunciados y el contexto (Ojeda, 2006) al cual atienden las nociones de álgebra.
3) *Recursos semióticos*. se consideran al tipo de figuras, diagramas, gráficas, tablas, lengua natural, simbología matemática (Ojeda, 2006) relacionada con el tipo de nociones algebraicas.
4) *Términos empleados*. el tipo de expresiones (Ojeda, 2006) que aluden a las nociones algebraicas de interés en las lecciones de los libros de texto.

1.4. Reflexión sobre el estado del arte de la investigación sobre el pensamiento funcional. Necesidad del presente estudio

Los estudios sobre el pensamiento funcional fueron divididos en al menos cuatro grupos, los que se centran: 1) en los estudiantes; 2) en los profesores; 3) en el currículo, instrucción o análisis de libros de textos; y 4) en proponer modelos o marcos para caracterizar el pensamiento algebraico o parte de él.

En general, estos estudios han perseguido explicar hasta dónde, los estudiantes, profesores o las tareas de los libros de texto, son capaces de desarrollar ciertos aspectos del pensamiento funcional, y el cómo promoverlo en las aulas de clases. La revisión a la literatura identificó el reporte de una gran variedad de aspectos cognitivos (e. g. lenguaje matemático y las operaciones empleadas, formas de pensar, tipos de representaciones, estrategias, nociones matemáticas puestas en juego, tipo de generalización expresada) asociados al pensamiento algebraico o al funcional, son pocas las investigaciones (e. g. Blanton & Kaput, 2004; Blanton & Kaput, 2005; Lannin, Barker & Townsend, 2006; Warren & Cooper, 2008; Radford et al., 2009; Radford, 2014; Vergel, 2015; Cañadas et al., 2016) enfocadas en los aspectos sociales (ideas matemáticas, interacciones sociales en el aula, recursos semióticos y normas sociomatemáticas) generadores de dichos pensamientos. Evidenciando la necesidad de estudios que persigan un análisis coordinado de aspectos, cognitivos y sociales, generadores de pensamiento funcional en las aulas de clases. Este tipo de investigaciones son válidas y necesarias, ya que permitirían una comprensión más amplia de la actividad matemática, en específico la algebraica, desplegada en las aulas de clases de matemáticas.

Lo anterior, abre camino a futuras investigaciones, las cuales aborden desde una mirada sociocultural del aprendizaje, el proceso de desarrollo del pensamiento funcional en las aulas de clases. Algunas cuestiones de interés, podrían referir a: ¿Qué caracteriza la evolución del pensamiento funcional en un aula de clases específico? ¿De qué forma el pensamiento funcional subyace en la actividad matemática, colectiva e individual, en un aula de clases? ¿Cuáles son las similitudes o diferencias en el pensamiento funcional, colectivo e individual, en un aula de clases?

La presente investigación avanza en esta línea. Está interesada en indagar la actividad matemática que emerge en una comunidad de aula de clases de primaria, a lo largo de una secuencia de instrucción que promueva el desarrollo de pensamiento funcional. Se asume que una forma de analizar la actividad matemática en el aula desde una mirada sociocultural (Cobb & Yackel, 1996), es mediante uno de sus aspectos, como es el razonamiento matemático.

El análisis del razonamiento, en lo individual y lo colectivo, dejaría en evidencia las conexiones entre ideas, representaciones y contextos, así como de argumentaciones y justificaciones (Wawro, 2011), que una comunidad de aula hace cuando resuelve problemas que promueven pensamiento funcional, como son los problemas de generalización de patrones. Investigar el desarrollo de cómo se conectan las ideas es una contribición importante para el campo de la investigación en educacion matemática en primaria. Algunas preguntas a responder son: ¿Cómo surgen, se desarrollan y difunden las ideas o formas de razonar algebraicamente en una comunidad de aula a lo largo del tiempo? ¿Cuáles son las formas de razonar de una comunidad de aula cuando trabaja con problemas que promueven el pensamiento funcional? ¿Cuál es la producción social del significado matemático asociado al pensamiento funcional en un aula de clases?

Este estudio busca sistematizar los resultados ya reportados en la línea de investigación del pensamiento funcional, ofrecer una secuencia de instrucción de referencia que admita un enfoque sociocultural del aprendizaje y describir basados de la empírea, la evolución del razonamiento matemático en una comunidad de aula sobre el pensamiento funcional a lo largo del tiempo. El producto es la propuesta de un modelo explicativo de la evolución del razonamiento de una comunidad de aula de clases de nivel primaria, para el caso de la generalización de patrones, que refiere al pensamiento funcional. El modelo tiene la cualidad de ser explicativo y de ser adaptado en caso de interacción con otras comunidades. Es decir, documenta una ruta para el aprendizaje de ideas importantes relacionadas con el pensamiento funcional.

1.5. Análisis de la evolución del razonamiento matemático en un aula de clases

En la actualidad hay una fuerte demanda en la investigación asociada al razonamiento matemático de los estudiantes en las aulas de clases (e.g. Brodie, 2010; Cobb, Stephan, McClain & Gravemeijer, 2001; Rivera & Becker, 2011; Conner, Singletary, Smith, Wagner & Francisco, 2014; Rasmussen et al., 2015; Krummheuer, 2015; Cetina-Vázquez; Cabañas-Sánchez & Sosa-Moguel, 2019), ya que permite evidenciar las conexiones entre ideas, representaciones y contextos, asi como de argumentaciones y justificaciones (Wawro, 2011), que los estudiantes hacen para: resolver un problema; convencer a los demás o a ellos mismos de una afirmación particular; o para integrar una serie de ideas en un todo más coherente (Brodie, 2010).

La investigación sobre el pensamiento funcional en primaria, no está ausente de ello (e.g. Blanton y Kaput, 2004; Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016). Sin embargo, los trabajos existentes muestran un primer acercamiento desde una perspectiva social, del proceso de generalización y de las ideas sobre relaciones funcionales que los estudiantes establecen cuando resuelven problemas de generalización de patrones. Limitados al tratamiento de relaciones funcionales lineales de la forma $a_n = dn$.

En cambio, hay investigaciones (e.g. Yackel, Rasmussen & King, 2000; Cobb, Stephan, McClain & Gravemeijer, 2001; Rasmussen et al., 2015; Zembat & Yasa, 2015; Güven & Dede, 2017) que bajo una perspectiva sociocultural, como la de Cobb y Yackel (1996), analizan los procesos sociales y psicológicos de aulas, en el contexto escolar y social. Sus productos son ricas descripciones de la evolución del aprendizaje matemático de comunidades de aula durante una secuencia de instrucción.

Dentro de este cuerpo de investigaciones, una forma de analizar el aprendizaje matemático a partir de la actividad colectiva e individual de los estudiantes, es mediante las prácticas matemáticas y las formas normativas de razonamiento que soportan la evolución del razonamiento matemático observable en el aula de clases (Cetina-Vázquez; Cabañas-Sánchez & Sosa-Moguel, 2019).

En ese contexto, las prácticas matemáticas y las formas normativas de razonamiento han sido analizadas y reportadas en diferentes contextos de aula de clases y en diferentes niveles educativos. Por ejemplo, en educación primaria, en primer grado, centrado en la medición lineal (McClain, Cobb, Gravemeije & Estes, 1999; Cobb et al., 2001); y en tercer grado, sobre el valor posicional (Bowers, Cobb & McClain, 1999). En educación secundaria, con estudiantes de séptimo grado, centrado en estadística (Cobb, 1999). En la educación media superior, con estudiantes de undécimo grado en un curso intructorio de cálculo (Cetina-Vázquez; Cabañas-Sánchez & Sosa-Moguel, 2019). En la educación superior, en un curso introductorio de ecuaciones diferenciales principalmente para ingenieros (Stephan & Rasmussen, 2002; Rasmussen, Stephan &Allen, 2004; Rasmussen, Zandieh & Wawro, 2009); y en un curso de matemáticas de pregrado en álgebra lineal (Rasmussen et al., 2015). Se requiere además, estudios que den cuenta del contenido asociado con el pensamiento funcional en el nivel primaria. Más aún, abre camino a estudios, que bajo este tipo de perspectiva (la cual vincula dos puntos de vista teóricos distintos sobre la actividad en el aula), proporcionen información sobre las prácticas matemáticas y las formas normativas de razonamiento que soportan la evolución del razonamiento matemático, colectivo e individual, en una comunidad de aula durante una secuencia de instrucción que promueva pensamiento funcional, con el fin de establecer una panorama global del proceso de desarrollo del pensamiento funcional de los niños en situaciones de aula, en el contexto escolar y social.

1.6. Problema y pregunta de investigación

Los resultados asociados a la literatura, evidencian la necesidad y pertinencia de estudios que coordinen las perspectivas social y psicológica, para dar una explicación más clara sobre el razonamiento matemático que surge en una comunidad de aula de primaria al resolver problemas que promueven el pensamiento funcional. La presente investigación está interesada en indagar las prácticas matemáticas y las formas normativas de razonamiento que soportan la evolución del razonamiento matemático que manifiesta una comunidad de aula de primaria. Mediante una secuencia de instrucción que involucre problemas de generalización de patrones, como vía para desarrollar pensamiento funcional en el nivel primaria.

Los problemas de generalización de patrones de interés para este estudio son los que resultan de transformar y ampliar el contenido aritmético del currículo de matemáticas de la educación primaria mexicana de *sucesiones matemáticas con progresión aritmética*. La relación funcional implicada es de la forma $a_n = dn + c$, donde $c \neq 0$.

La **pregunta** de investigación, es:

¿Qué prácticas matemáticas y formas normativas de razonamiento soportan la evolución del razonamiento matemático en una comunidad de aula de primaria a lo largo de una secuencia de instrucción que promueve el desarrollo del pensamiento funcional?

1.7. Objetivos de investigación

El **objetivo general** de investigación, es:

> *Caracterizar las prácticas matemáticas y las formas normativas de razonamiento que soportan la evolución del razonamiento matemático en una comunidad de aula de primaria, a lo largo de una secuencia de instrucción que promueve el desarrollo del pensamiento funcional.*

Los **Objetivos Específicos (OE)**, son:

OE1: Reconocer qué ideas matemáticas individuales expresadas en los argumentos de los estudiantes de una comunidad de aula de clases se constituyen en formas normativas de razonamiento durante una secuencia de instrucción que promueve pensamiento funcional.

OE2: Organizar las formas normativas de razonamiento en torno a las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes de una comunidad de aula de primaria.

1.8. Elementos clave de la investigación

El objeto de investigación es el razonamiento matemático. Su estudio se enmarca dentro del tema de pensamiento funcional en una comunidad de aula de primaria. Su contextualización permitió delimitar el objetivo general de la investigación, que remarca elementos clave, como:

1) Razonamiento matemático en una comunidad de aula.
2) Problemas de generalización de patrones como vía para desarrollar pensamiento funcional.
3) Secuencia de instrucción.

El primero, permitió delimitar los constructos teóricos y las herramientas para el análisis de los datos. El segundo, definió el contenido matemático asociado con el currículo de matemáticas. El tercero, estableció la metodología para el diseño del instrumento de recogida de información.

El producto de estos componentes es el diseño del estudio empírico, centrado en un experimento de enseñanza. Su desarrollo con la población de estudio y el análisis de sus producciones permitirá alcanzar tanto los objetivos específicos y el general, como responder a la pregunta de investigación.

Estas ideas clave se han organizado en un esquema (Figura 1.3) y definido en detalle en los diferentes apartados de este documento.

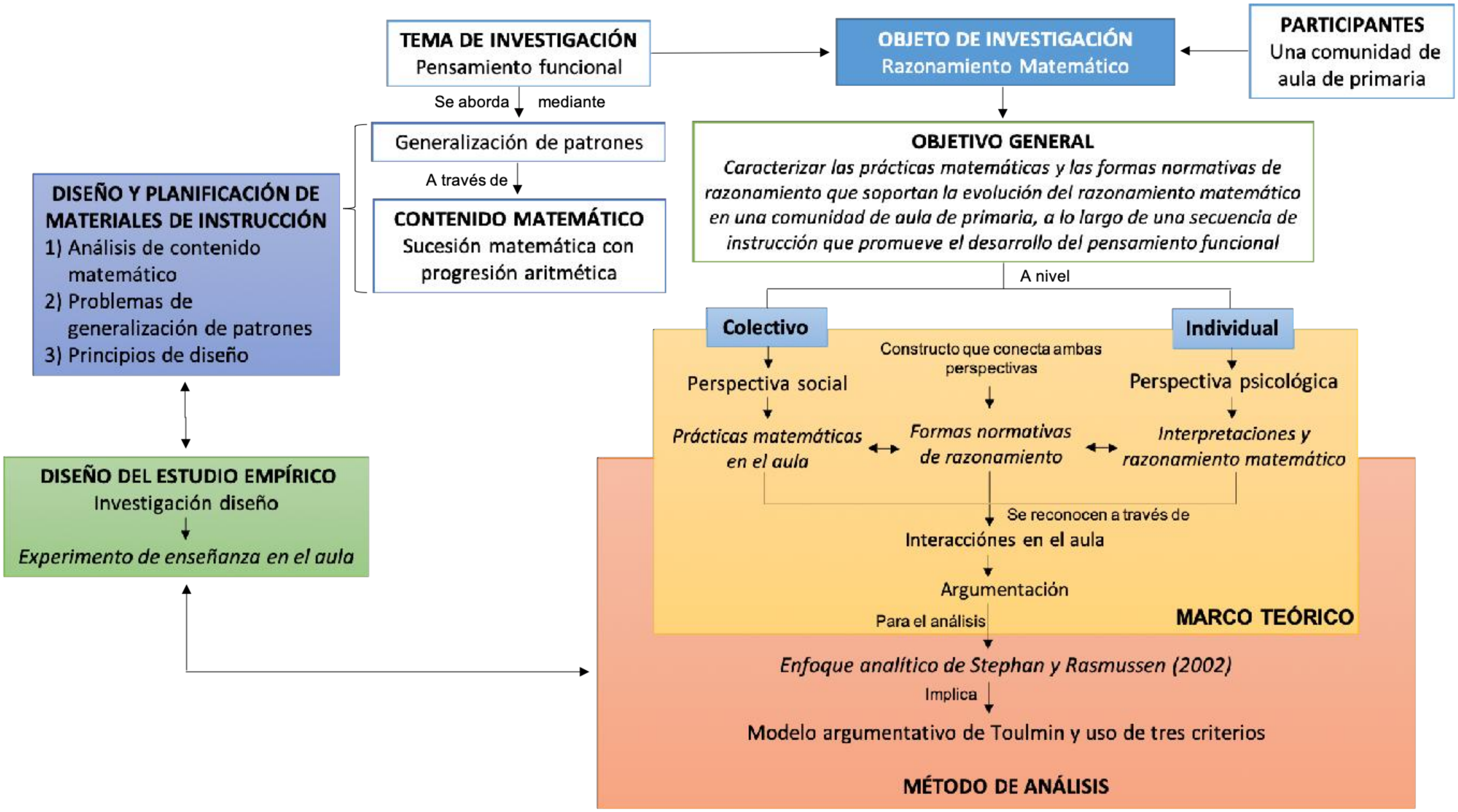


Figura 1.3. Elementos clave de la investigación.

Capítulo 2. Fundamentación teórica

El enfoque teórico considerado en esta investigación es la perspectiva sociocultural de aprendizaje de Cobb y Yackel (1996) y su marco interpretativo de aspectos sociales e individuales que norma las interacciones en el aula. Estos aspectos de alguna manera determinan los pensamientos y acciones de los individuos durante la interacción y, como consecuencia, el desarrollo matemático que está teniendo lugar. Este enfoque considera que las prácticas matemáticas surgen de ideas y normas matemáticas socialmente compartidas en clase y expanden la actividad matemática de una comunidad de aula a un nivel más avanzado de razonamiento.

En particular, para el análisis de las prácticas matemáticas y las formas normativas de razonamiento que soportan la evolución del razonamiento matemático que surgen en una comunidad de aula de primaria, se retoman los constructos de *prácticas matemáticas en el aula,* para el estudio del colectivo, el de *interpretación y razonamiento matemático,* como su correlato psicológico para el estudio de lo individual y el de *forma normativa de razonamiento matemático* como el constructo que permite el enlace entre perspectivas. El análisis se realiza a través de las interacciones en el aula de clases. En específico, en la *argumentación*.

2.1. Perspectiva sociocultural de aprendizaje de Cobb y Yackel (1996) y su marco interpretativo

Un desafío en la investigación en educación matemática es coordinar diferentes análisis para desarrollar una descripción más comprensiva sobre la enseñanza y el aprendizaje (Rasmussen et al., 2015), a través de la integración de diversas perspectivas teóricas (e.g. Cobb, et al., 2001; Krummheuer, 2007; Brodie, 2010; Conner et al., 2014; Rasmussen et al., 2015; Dreyfus, Hershkowitz & Schwarz, 2015). Uno de los primeros esfuerzos para integrar diferentes puntos de vista teóricos es la perspectiva sociocultural de aprendizaje de Cobb y Yackel (1996) y su marco interpretativo, derivada de la etnometodología y del interaccionismo simbólico de Blumer (1969) y el constructivismo psicológico de von Glasersfeld (1995). El supuesto central de este punto de vista es que el desarrollo matemático en el aula de clases está normado por un proceso de construcción individual y activa un proceso de enculturación matemática (Cobb & Yackel, 1996).

Bajo ese supuesto, la perspectiva sociológica de aprendizaje considera importante los procesos tanto sociales como psicológicos (Wawro, 2011) que norman las interacciones en el aula de clases y los trata como complementarios. Su marco interpretativo (Tabla 2.1) presenta la coordinación establecida de los puntos de vista teóricos, social y psicológico, para analizar la actividad matemática en comunidades de aula, como las que constituyen el profesor y los estudiantes. La *perspectiva social* alude a formas normativas de actuar, de razonar y de discutir en una comunidad de aula. Considera el razonamiento matemático de un estudiante en particular como un acto de participación en actividades normativas de una comunidad de aula. La *perspectiva psicológica* se refiere a la naturaleza del razonamiento de cada estudiante. En otras palabras, en sus formas particulares de participar en las actividades comunales (Cobb, et al., 2001).

Tabla 2.1.
Un marco interpretativo para analizar la actividad matemática colectiva e individual y el aprendizaje. Reimpreso de Cobb et al. (2001, p.119)

Perspectiva Social	**Perspectiva Psicológica**
Normas sociales del aula	Creencias individuales sobre su propio papel, el papel de los demás y la naturaleza general de la actividad matemática
Normas sociomatemáticas	Creencias y valores específicos de matemáticas
Prácticas matemáticas en el aula	Interpretaciones y razonamiento matemático

En la Tabla 2.1 se puede observar que cada perspectiva considera tres aspectos diferentes. Se "postula una relación reflexiva entre las construcciones sociales y sus correlatos psicológicos" (Yeckel, Rasmussen & King, 2000, p.277), en consideración de la hipótesis básica de "que ni las actividades individuales de los estudiantes ni las actividades comunales en el aula se pueden explicar adecuadamente, excepto en relación con la otra" (Cobb, 2000, p. 310). La unidad de análisis en esta visión teórica es el contexto social del aula, es decir, *la participación en la interacción en el aula*. Vía por la cual es posible documentar la situación establecida interactivamente en la que el estudiante está actuando; y explicar la constitución de procesos sociales y culturales mediante el conocimiento activo de los estudiantes individuales (Cobb & Yackel, 1996).

Para fines de la presente investigación se adoptan únicamente los constructos práctica matemática en el aula e interpretación y razonamiento matemático, debido a que resultan ser mutuamente constitutivos y permiten así, dar evidencia de los aspectos que soportan la evolución del razonamiento matemático que emergen en una comunidad de aula.

2.2. Prácticas matemáticas en el aula e interpretaciones y razonamiento matemático

El *razonamiento matemático* es entendido como "razonar sobre y con los objetos de las matemáticas" (Brodie, 2010, p.7). *Razonar* implica desarrollar líneas de pensamiento o argumento, con el propósito de convencer a los demás o a nosotros mismos de una afirmación particular, resolver un problema, o para integrar una serie de ideas en un todo más coherente (Brodie, 2010). El producto de un proceso de razonamiento es un texto, ya sea hablado o escrito (Douek, 2005). Específicamente, una línea de argumentación, que puede ser producida por una persona o coproducida por un grupo de personas. Su importancia radica en ser una parte clave del descubrimiento matemático. Justificar y crear argumentos en defensa de las reclamaciones, es fundamental para todas las formas de razonamiento matemático (Brodie, 2010).

En ese contexto, la perspectiva sociocultural (Cobb & Yackel, 1996), usa los constructos de práctica matemática en el aula y de interpretaciones y razonamiento matemático para contabilizar el aprendizaje matemático, a través del razonamiento matemático que tiene lugar en el contexto social del aula.

Las *prácticas matemáticas en el aula* constituyen las situaciones locales inmediatas del desarrollo de los estudiantes. Identificar las secuencias de tales prácticas, implica documentar la evolución de las situaciones sociales en las que los estudiantes participan y aprenden. El análisis revela las ideas y actividades matemáticas establecidas conjuntamente cuando el profesor y los estudiantes coordinan sus actividades individuales (Cobb & Yackel, 1996; Cobb, 2000).

Las *interpretaciones y razonamiento matemático* de los estudiantes individuales se toman como los correlatos psicológicos de estas prácticas, bajo la consideración que los estudiantes contribuyen activamente a la evolución de las prácticas matemáticas en el aula, ya que reorganizan sus ideas y actividades matemáticas individuales y, a la inversa, estas reorganizaciones están habilitadas y limitadas por la participación de los estudiantes en las prácticas matemáticas (Figura 2.1). El análisis pone de manifiesto la heterogeneidad en las ideas y actividades de los individuos de una comunidad de aula (Cobb & Yackel, 1996; Cobb, 2000).

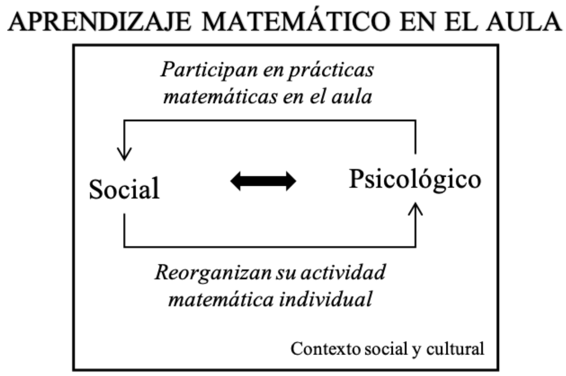


Figura 2.1. Esquema del proceso de aprendizaje matemático en una comunidad de aula.

Con estos constructos, se toma tanto al colectivo como al individuo como puntos de referencia. Rasmussen et al. (2015) ofrece una definición de las prácticas matemáticas en el aula en atención a las interpretaciones y razonamiento matemático de los estudiantes individuales. Estos autores refieren a prácticas matemática en el aula, como:

> "Las *formas normativas de razonamiento* que surgen a medida que los alumnos resuelven problemas, explican su pensamiento, representan sus ideas, etc. Por normativo queremos decir [...] que una idea o una forma de razonar funciona como si fuera una verdad matemática en el aula. Esto significa que las ideas particulares o las formas de razonamiento funcionan en el discurso del aula como si todos tuvieran una comprensión similar, aunque puedan existir diferencias individuales en la comprensión" (Rasmussen et al., 2015, p. 262).

Un análisis de las prácticas matemáticas en el aula y de las formas normativas de razonamiento da luz a las interpretaciones y actividades matemáticas de los estudiantes. De ahí que, esta investigación parta del supuesto de que basta un análisis de las prácticas matemáticas y de las formas normativas de razonamiento, para dar cuenta de las diferentes interpretaciones y razonamientos matemáticos de los estudiantes individuales.

Desde una mirada sociológica del aprendizaje, las prácticas matemáticas y las formas normativas de razonamiento son reconocidas a través de la participación en las interacciones en el aula de clases. En específico, en la *argumentación* (Krummehuer, 1995), entendida como "interacciones en el aula observada que tienen que ver con la explicación intencional del razonamiento de una solución o después de ella" (p.231).

Metodologicamente, para documentar las prácticas matemáticas y las formas normativas de razonamiento, se requiere establecer a la argumentación como una norma en el aula de clases (Cobb & Yackel, 1996) y el uso de enfoques analíticos (e.g. Stephan & Rasmussen, 2002; Rasmussen & Stephan, 2008) que permitan modelar las explicaciones dadas durante la actividad colectiva de los estudiantes.

La producción de estas prácticas matemáticas en el aula y estas formas normativas de razonamiento constituye la evolución del razonamiento matemático (Figura 2.2), emergente y potencialmente idiosincrásico en una comunidad de aula local (Rasmussen et al., 2015). En este sentido, examinar la evolución del razonamiento matemático es estudiar el aprendizaje matemático de una comunidad de aula.

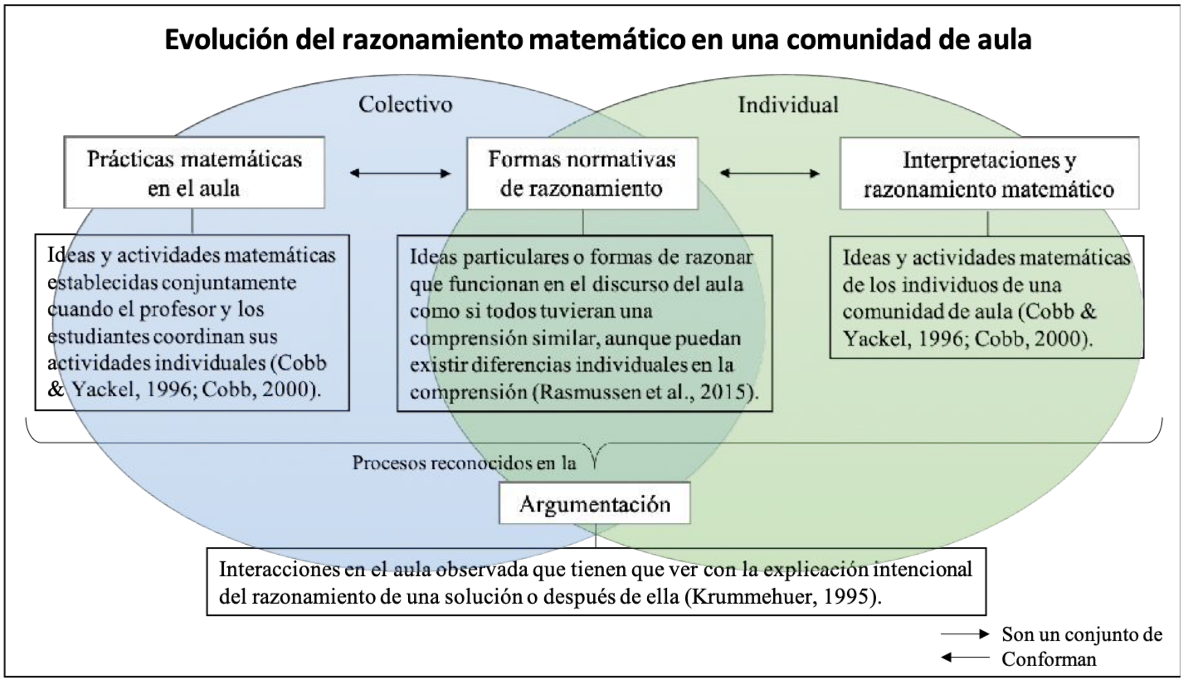


Figura 2.2. Constructos y lógica que permiten una caracterización de la evolución del razonamiento matemático en una comunidad de aula.

Capítulo 3. Contenido matemático

El tema de investigación abordado es el pensamiento funcional y se promueve con el trabajo de problemas de generalización de patrones con relación funcional lineal de la forma $a_n = dn + c$, donde $c \neq 0$. Se reconoce a este tipo de problemas como el resultado de transformar y ampliar el contenido aritmético del currículo de matemáticas de la educación primaria mexicana de *sucesiones matemáticas con progresión aritmética*.

Este capítulo presenta el análisis de contenido matemático escolar realizado para la *sucesión matemática con progresión aritmética.* Los documentos analizados fueron textos de las matemáticas escolares de la educación primaria mexicana. El objetivo fue reflexionar sobre el tratamiento otorgado a dicho contenido en el currículo de matemáticas de la educación primaria mexicana, para transformarlo y extenderlo, así diseñar y proponer una secuencia de instrucción que involucre problemas de generalización de patrones como vía para desarrollar pensamiento funcional en dicho nivel educativo.

3.1. Análisis de contenido matemático

El análisis de contenido matemático fue utilizado en este estudio como "un método para establecer y estudiar la especificidad de los significados de los conceptos y procedimientos que conforman un texto de las matemáticas escolares" (Rico y Fernández-Cano, 2013, p.12). Los textos analizados fueron: los Programas de estudio 2011 guía para el maestro (SEP, 2011a; 2011b; 2011c; 2011d; 2011e; 2011f), Desafíos matemáticos. Libros para el alumno (SEP, 2016a; 2016b; 2016c; 2016d; 2016e; 2016f) y Desafíos matemáticos. Libros para el maestro (SEP, 2014a; 2014b; 2014c; 2014d; 2014e; 2014f) de la educación primaria mexicana.

El contenido matemático abordado fue *sucesión matemática con progresión aritmética.* El objetivo del análisis fue reflexionar sobre el tratamiento otorgado a este contenido en el currículo de matemáticas de la educación primaria mexicana, para transformarlo y extenderlo, así diseñar y proponer una secuencia de instrucción que involucre problemas de generalización de patrones como vía para desarrollar pensamiento funcional en dicho nivel educativo.

Las categorías de análisis de contenido matemático, fueron (Rico y Fernández-Cano, 2013, p.11-12):

1) *Conceptual.* Considera el momento histórico y el marco poblacional donde se inserta.
2) *Formal y estructural.* Abarca los conceptos, definiciones y procedimientos, junto con la estructura formal que proporciona referencia a los contenidos matemáticos utilizados.
3) *Representacional.* Comprende las notaciones gráficas, simbólicas y sistemas de signos involucrados.
4) *Fenomenológica.* Aborda los fenómenos que dan origen a los conceptos, los contextos en los que se utiliza y aquellas situaciones en las que presentan y en las cuales se aplican, que dotan de sentido a los contenidos en estudio.

En los siguientes apartados se presentan los resultados obtenidos para cada una de estas categorías.

3.1.1. Conceptual

El análisis de contenido se ubicó en el currículo de matemáticas de la educación primaria mexicana (6 a 12 años de edad). Se identificó que los Programas de estudio 2011 y los libros Desafíos matemáticos para el alumno y para el maestro, están organizados en cuatro Estándares Curriculares de Matemáticas:

1) Sentido numérico y pensamiento algebraico
2) Forma, espacio y medida
3) Manejo de la información
4) Actitud hacia el estudio de las matemáticas

Estándares que comprenden el conjunto de aprendizajes que se espera de los estudiantes en los seis grados escolares para conducirlos a altos niveles de alfabetización matemática.

El estudio del contenido matemático de interés, sucesión matemática con progresión aritmética, está ubicado en el eje sentido numérico y pensamiento algebraico, a lo largo de los seis grados escolares de la educación primaria. La Tabla 3.1 resume los contenidos y definiciones matemáticas asociadas con la sucesión matemática con progresión aritméticas que son considerados en el currículo de matemáticas a lo largo de la educación primaria mexicana.

Tabla 3.1.
Contenidos y definiciones matemáticas

Sucesión matemática con progresión aritmética en primaria			
Eje sentido numérico y pensamiento algebraico			
Grado	Bloque	Contenido matemático	Definiciones matemáticas
Primero	I	▪ Expresión oral de la sucesión numérica ascendente y descendente de 1 en 1, a partir de un número dado. ▪ Escritura de la sucesión numérica hasta el 30.	▪ Una **sucesión numérica** es una secuencia ordenada de números que presenta alguna regularidad, ya sea de forma ascendente o descendente (SEP, 2014a, p.18). ▪ **Patrón** es una regularidad de signos (orales, gestuales, gráficos, geométricos, numéricos, etcétera) que se contruye siguiendo una regla (SEP, 2014a, p.37).
	III	▪ Conocimiento de la sucesión oral y escrita de números hasta el 100. Orden de los números de hasta dos cifras. ▪ Identificación de regularidades de la sucesión numérica del 0 al 100 al organizarla en intervalos de 10.	
Segundo	II	▪ Producción de sucesiones orales y escritas, ascendentes y descendentes de 5 en 5, de 10 en 10. ▪ Identificación de la regularidad en sucesiones ascendentes con progresión aritmética, para intercalar o agregar números a la sucesión.	▪ Las **sucesiones con progresión aritmética** son aquellas en las que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante (SEP, 2014b, p.60). ▪ **Patrón** es una regularidad de signos (orales, gestuales, gráficos, geométricos, numéricos, etcétera) que se contruye siguiendo una regla. La idea que se asocia a patrón es algo que se repite con regularidad (SEP, 2014b, p.123).
	V	▪ Producción de sucesiones orales y escritas, ascendentes y descendentes, de 100 en 100. Anticipaciones a partir de las regularidades.	
Tercero	III	▪ Identificación de la regularidad en sucesiones con números, ascendentes o descendientes, con progresiones aritméticas para continuar la sucesión o encontrar términos faltantes.	▪ Una **sucesión numérica con progresión aritmética** es una serie de números tales que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante, es decir, es la misma (SEP, 2014c, p.124). ▪ Las **sucesiones ascendentes** siempre van aumentando los valores de sus términos y las **sucesiones descendientes** siempre van disminuyendo los valores de sus términos (SEP, 2014c, p.124). ▪ En una **sucesión ascendente** se aplica una **adición**, por ejemplo, para obtener el término siguiente se debe sumar 4 al anterior (SEP, 2014c, p.124). ▪ En una **sucesión descendiente** se aplica una **sustracción**, por ejemplo a cada término se le resta 7 para obtener el siguiente (SEP, 2014c, p.124).
	IV	▪ Identificación de la regularidad en sucesiones con figuras, con progresión aritmética para continuar la sucesión o encontrar términos faltantes.	

			▪ Una **sucesión** es una secuencia de elementos que responden a una ley de formación (SEP, 2014c, p.171). ▪ Una **sucesión con progresión aritmética** se construye sumando o restando una cantidad fija al término anterior (SEP, 2014c, p.171).
Cuarto	I	▪ Identificación de la regularidad en sucesiones compuestas con progresión aritmética, para encontrar términos faltantes o averiguar si un término pertenece o no a la sucesión.	▪ Una **sucesión** es un conjunto ordenado de elementos (números, letras, figuras, etcétera) que responden a una ley de formación o regla. A los elementos de la sucesión se les llama **términos** (SEP, 2014d, p.33). ▪ Las sucesiones se construyen siguiendo una **regla**; por ejemplo, cada término se obtiene sumando una constante al término anterior (SEP, 2014d, p.33). ▪ Para decidir si un **elemento** dado (número o figura) pertenece o no a una sucesión, primero se debe encontrar la **regularidad** entre los elementos dados (SEP, 2014d, p.305).
	IV	▪ Identificación del patrón en una sucesión de figuras compuestas, hasta con dos variables.	
Quinto	IV	▪ Identificación de la regularidad en sucesiones con números (incluyendo números fraccionarios) que tengan progresión aritmética, para encontrar términos faltantes o continuar la sucesión.	▪ Una sucesión se genera a partir de un **patrón** o **ley de formación** (SEP, 2014e, p.193). ▪ En una sucesión con progresión aritmética, el patrón está dado por la **constante aditiva** entre los términos de la sucesión y se usa para encontrar términos faltantes o continuar con la sucesión (SEP, 2014e, p.195).
Sexto	IV	▪ Identificación y aplicación de la regularidad de sucesiones con números (naturales, fraccionarios o decimales) que tengan progresión aritmética. Construcción de sucesiones a partir de la regularidad.	▪ En las **sucesiones con progresión aritmética**, entre sus términos, hay una **constante aditiva** (SEP, 2014f, p.231).
	V	▪ Identificación y aplicación de la regularidad de sucesiones con figuras, que tengan progresión aritmética.	

3.1.2. Formal y estructural

En esta categoría se analizaron los conceptos, definiciones y procedimientos, junto con la estructura formal que proporciona referencia a la sucesión matemática con progresión aritmética. Para examinar estos elementos, se uso un sistema que consideró dos campos y tres niveles de complejidad (Tabla 3.2).

Tabla 3.2.
Campos y niveles para examinar la categoría formal y estructural. Adaptado de Fernández (2016)

Categoría de análisis: Estructura y análisis formal		
Campos	Niveles	Descripción de los niveles
Conceptos	Hechos	Los constituyen los términos, notaciones, convenios y resultados asociados con el contenido matemático de interés.
	Conceptos	Se encuentran los conceptos y relaciones. Los conceptos vienen dados por extensión o por comprensión. Las relaciones se establecen entre conceptos, o los objetos mismos, dando lugar a relaciones n-arias que, por sencillez, en la educación básica se limitan a las relaciones bianarias.
	Estructuras conceptuales	Se basa de la consideración de diversos conceptos, transformaciones y relaciones entre ellos, y de las operaciones y propiedades que los vinculan, que, eventualmente, pueden dar lugar a conceptos más complejos.
Procedimientos	Destrezas	Consisten en el procesamiento secuenciado de contenidos básicos, mediante el uso de convenios y manipulación de las notaciones.
	Razonamientos	Involucran el procesamiento de relaciones e inferencias logicas entre conceptos. Se consideran cinco tipos de razonamientos: lógico-deductivo, inductivo, analógico, numérico y figurativo.
	Estrategias	Implican el procesamiento de conceptos y la conexión de razonamientos vinculados con una o varias estructuras, para responder a una cuestión o problema.

En los siguientes párrafos se presetan los resultados identificados para cada categoría con sus respectivos niveles de análisis.

3.1.2.1. Conceptos

3.1.2.1.1. Hechos

Los hechos constituyeron un primer nivel de análisis conceptual de la sucesión matemática con progresión aritmética. Se realizó mediante cuatro subniveles de análisis (Fernández, 2016): términos, notaciones, convenios y resultados. La Tabla 3.3 muestra los resultados encontrados en este nivel y en sus subniveles de análisis, organizados por cada grado de la educación primaria.

Tabla 3.3.

Hechos asociados con la sucesión matemática con progresión aritmética en la educación primaria mexicana

Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto	Sexto
Términos: vocablos o palabras que se emplean para denominar los objetos, nociones, relaciones y operaciones de un tema matemático (Fernández, 2016, p.106).					
Números naturales de 0 al 100. Sucesión numérica ascendente o descendenten. Regularidad: de 1 en 1, o en intervalos de 10. Términos faltantes (escribir las cantidades que faltan). Términos consecutivos (completar la sucesión).	Números naturales de 0 al 1000. Sucesión ascendente o descendenten. Sucesiones de figuras con progresión artimética. Sucesiones numéricas con progresión artimética. Regularidad: de 5 en 5, de 10 en 10, y de 100 en 100. Términos faltantes. Términos consecutivos, cercanos y lejanos. Expresión de la regularidad.	Números naturales de hasta cuatro dígitos. Sucesión ascendente o descendenten. Sucesiones de figuras con progresión artimética. Sucesiones numéricas con progresión artimética. Términos faltantes. Términos consecutivos y cercanos. Diferencia Regularidad Ley de formación.	Números naturales. Sucesión ascendente o descendenten. Sucesiones compuestas con progresión artimética. Sucesiones de figuras compuestas con progresión artimética. Términos faltantes. Términos consecutivos, cercanos o lejanos. Diferencia. Regularidad. Patrón. Regla.	Números naturales y fraccionarios. Sucesión ascendente. Sucesiones numéricas con progresión artimética. Términos faltantes. Términos consecutivos y cercanos. Diferencia (constante aditiva). Regularidad. Patrón. Regla.	Números naturales, fraccionarios y decimales. Sucesión ascendente. Sucesiones numéricas con progresión artimética. Sucesiones de figuras con progresión artimética. Términos faltantes. Términos consecutivos, cercanos y lejanos. Diferencia. Constante aditiva. Regularidad. Patrón. Regla.
Notaciones: símbolos mediante los cuales se hacen presentes los conceptos del tema y expresamos sus propiedades, relaciones y operaciones (Fernández, 2016, p.106).					
No se hace uso de ningún tipo de notación.					
Convenios: acuerdos de uso frecuente (Fernández, 2016, p.106).					
Conteo ordenado de objetos o cantidades, con base en una cierta regularidad.	Conteo ordenado de objetos o cantidades, con base en una cierta regularidad.	Conteo ordenado de cantidades, con base en una cierta regularidad.	Calcular la diferencia entre dos términos consecutivos de una sucesión.	Calcular la diferencia (constante aditiva) entre dos términos consecutivos de una sucesión.	Calcular la diferencia (constante aditiva) entre dos términos consecutivos de una sucesión.

	Identificar cuánto se agrega o disminuye de un término a otro. Expresar la regularidad analizada, como: "va de 5 en 5", "se le suma 5" "aumenta de 5 en 5", "disminuye de 10 en 10", "disminuye cada vez 10", "se le resta 10" etc.	Identificar cuánto se agrega o disminuye de un término a otro. Expresar la regularidad analizada, como: "va de 5 en 5", "se le suma 5" "aumenta de 5 en 5", "disminuye de 10 en 10", "disminuye cada vez 10", "se le resta 10" etc.	Expresar la regularidad analizada, como: "va de 5 en 5", "se le suma 5" "aumenta de 5 en 5", "disminuye de 10 en 10", "disminuye cada vez 10", "se le resta 10" etc.	Expresar la regularidad analizada, como: "va de 5 en 5", "se le suma 5" "aumenta de 5 en 5", "disminuye de 10 en 10", "disminuye cada vez 10", "se le resta 10" etc.	Expresar la regularidad analizada, como: "va de 5 en 5", "se le suma 5" "aumenta de 5 en 5", "disminuye de 10 en 10", "disminuye cada vez 10", "se le resta 10" etc.
Resultados: inferencias básicas que se derivan de los hechos conceptules anteriores (Fernández, 2016, p.106).					
Una sucesión numérica es una secuencia ordenada de números que presenta alguna regularidad, ya sea de forma ascendente o descendente (SEP, 2014a, p.18).	La diferencia entre dos términos consecutivos en una sucesión con progresión aritmética, es constante.	La diferencia entre dos términos consecutivos en una sucesión con progresión aritmetica, es constante. Una sucesión con progresión aritmética se construye sumando o restando una cantidad fija al término anterior (SEP, 2014c, p.171). .	Cada término de una sucesión se obtiene sumando una constante al término anterior (SEP, 2014d, p.33). Para decidir si un elemento dado (número o figura) pertenece o no a una sucesión, primero se debe encontrar la regularidad entre los elementos dados (SEP, 2014d, p.305).	Se pueden generar sucesiones a partir de un patrón dado o ley de formación (SEP, 2014e, p.193). El patrón, en una sucesión con progresión aritmética, está dado por la constante aditiva entre los términos de la sucesión y se usa para encontrar términos faltantes o continuar con la sucesión (SEP, 2014e, p.195).	Entre los términos de una sucesiones con progresión aritmética, hay una constante aditiva (SEP, 2014f, p.231).

3.1.2.1.2. Conceptos

Los conceptos fueron un segundo nivel de análisis conceptual. La Tabla 3.4 presenta los conceptos asociados con el estudio de la sucesión matemática con progresión aritmética en la educación primaria. Los subniveles considerados fueron los conceptos y las relacionales.

Tabla 3.4.
Conceptos asociados con la sucesión matemática con progresión aritmética en la educación primaria mexicana

Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto	Sexto
Conceptos: vienen dados por extensión o por comprensión, todo concepto establece una clase o conjunto de objetos (Fernández, 2016, p.108).					
Sucesión de números naturales. Sucesión creciente y decreciente. Regularidad. Patrón.	Sucesión de números naturales. Sucesión creciente y decreciente. Progresión aritmética. Término de la sucesión. Términos: consecutivos, cercanos y lejanos. Diferencia. Regularidad. Patrón.	Sucesión de números naturales. Sucesión creciente y decreciente. Progresión aritmética. Término de la sucesión. Términos: consecutivos y cercanos. Diferencia. Regularidad. Regla de recurrencia. Patrón.	Sucesión de números naturales. Sucesión creciente y decreciente. Sucesiones compuestas. Progresión aritmética. Término de la sucesión. Términos: consecutivos, cercanos y lejanos. Diferencia. Regularidad. Regla de recurrencia. Patrón.	Sucesión de números naturales o fraccionarios. Sucesión de números fraccionarios. Sucesión creciente. Progresión aritmética. Término de la sucesión. Términos: consecutivos y cercanos. Diferencia. Constante aditiva. Regularidad. Regla de recurrencia. Patrón.	Sucesión de números naturales, fraccionarios o decimales. Sucesión de números fraccionarios. Sucesión de números decimaless. Sucesión creciente. Progresión aritmética . Término de la sucesión. Términos: consecutivos, cercanos y lejanos. Diferencia. Constante aditiva. Regularidad. Regla de recurrencia. Patrón
Relaciones: se establecen entre conceptos, o los objetos mismos, dando lugar a relaciones n-arias que, por sencillez, en la educación básica se limitan a las relaciones bianarias (Fernández, 2016, p.108).					
Relación de recurrencia					

3.1.2.1.3. Estructuras conceptuales

El tercer y último nivel de análisis conceptual consistió en establecer la estructura conceptual, desde la matemática formal, asociada con la sucesión matemática con progresión aritmética. Los resultados son resumidos en la Tabla 3.5, que presenta los objetos matemáticos conectados, los elementos, las diferentes propiedades y las relaciones existentes entre sus elementos de las sucesiones matemáticas con progresión aritmética. Aspectos que definen su estructura conceptual.

Tabla 3.5.
Estructura conceptual asociada con las sucesiones matemáticas con progresión aritmética

Estructura conceptual: Se basa de la consideración de diversos conceptos, transformaciones y relaciones entre ellos, y de las operaciones y propiedades que los vinculan, que, eventualmente, pueden dar lugar a conceptos más complejos (Fernández, 2016, pp. 108-109).			
Objetos matemáticos	**Elementos**	**Propiedades**	**Relaciones existentes entre sus elementos**
Correspondencia Aplicación Función Sucesión matemática Progresión aritmética	Término Posición Límite	Finitud Monotonía Acotación Convergencia Recurrencia	Relación de recurrencia Relación de correspondencia

Objetos matemáticos[1]

Las sucesiones matemáticas y las progresiones aritméticas forman parte de la Teoría de Números, fundamentada a partir de la teoría de conjuntos. Pueden hablarse de estucturas conceptuales tomando como base a las funciones como idea central.

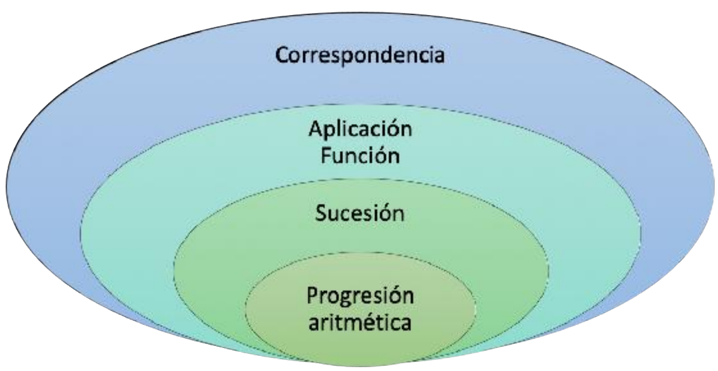


Figura 3.1. Relaciones de inclusión entre objetos matemáticos. Adaptado de Cañadas (2007, p.103).

La Figura 3.1, muestra las relaciones de inclusión entre objetos matemáticos asociados con el de sucesión. La *correspondencia* se presenta cuando se establece cualquier tipo de relación entre dos conjuntos, uno inicial (o de partida) y otro final (o de llegada). Para que dicha

[1] Esta sección presenta un resumen de los resultados reportados en Cañadas (2007, pp. 96-122) sobre el análisis conceptual de las sucesiones matemáticas. Se consideraron algunas modificaciones o especificaciones adicionales, que resultan pertinentes para el presente estudio.

correspondencia pueda denominarse *aplicación* o *función* es necesario que todos los elementos del conjunto del que se parte tengan una y sólo una imagen, reservando la expresión función cuando se trabaja en análisis matemático o cuando los dos conjuntos considerados son conjuntos numéricos. Las *sucesiones* son un caso de funciones particulares donde el conjunto inicial es el de los números naturales ordenados, y el conjunto final, o imagen es el conjunto de los números reales. Las *progresiones aritmeticas* son un tipo particular de sucesiones, cuya expresión analítica es un polinomio de grado uno.

La estructura matemática de las sucesiones lo constituyen: sus elementos, sus diferentes propiedades y las relaciones existentes entre sus elementos.

Elementos[2]

Una sucesión es una colección de números en la que un número es designado como el primero, otro como el segundo, otro como el tercero, y así sucesivamente. Cada número de la sucesión es llamado un *término*, y cada número natural al que está asociado dicho número, es conocido como la *posición.* Una sucesión se expresa de forma general, como:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

El número a_1 es el *primer término*; a_2, el *segundo término* y, en general, a_n es el *n-ésimo término* (támbien llamado término general). Por cada número natural n, hay un número correspondiente a_n. De esta forma, una sucesión se puede definir como una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales ordenados. Comúnmente se escribe como a_n en lugar de la notación de función $f(n)$ para indicar el valor de la función en el número n.

La sucesión $\{a_1, a_2, a_3, \dots,\}$ también se denota mediante

$$\{a_n\} \text{ o } \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Otro elemento, es el límite de una sucesión, denotado como:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Significa que los términos de la sucesión $\{a_n\}$ se acercan a L conforme n se incrementa. La definición formal de límite de una sucesión es:

[2] Esta sección y la sección de propiedades reportan definiciones de los libros de Stewart (1999) y Fuller (1977).

Una sucesión $\{a_n\}$ tiene el **límite** L y escribimos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{o} \qquad a_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

Si para toda $\varepsilon > 0$ existe un correspondiente entero N tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon \text{ siempre que } n > N$$

Propiedades

Finitud. Una sucesión que tiene un número fijo de términos es llamada una sucesión *finita*; de otro modo la sucesión es llamada sucesión *infinita*.

Convergencia. Una sucesión $\{a_n\}$ es *convergente* si existe $\lim_{n\to\infty} a_n$. Si no es así, se dice que la sucesión es *divergente*.

Monotonía. Una sucesión $\{a_n\}$ se llama *creciente* si $a_n < a_{n+1}$ para toda $n \geq 1$; esto es, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. Caso contrario, es *decreciente* si $a_n > a_{n+1}$ para toda $n \geq 1$. En cualquiera de los dos casos, si la desigualdad es estricta, la sucesión se llama estrictamente creciente o estrictamente decreciente, respectivamente. Una sucesión se llama *monótona* si es creciente o decreciente.

Acotación. Una sucesión $\{a_n\}$ está *acotada superiormente* si existe un número M tal que $a_n \leq M$ para toda $n \geq 1$. Y está *acotada inferiormente* si hay un número m tal que $m \leq a_n$ para toda $n \geq 1$. Si está acotada superiormente e inferiormente, $\{a_n\}$ es una *sucesión acotada.*

Teorema de las sucesiones monótonas. Toda sucesión acotada y monótona es convergente.

Relaciones

Una *relación de recurrencia* para una sucesión $\{a_n\}$ es una ecuación que expresa cada término a_n, a partir de cierto $n_0 \in \mathbb{N}$, en función de uno o más de los términos que le preceden $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}$. Los valores de los términos necesarios para empezar a calcular se llaman condiciones iniciales. Se dice que una sucesión es una solución de la relación de recurrencia si su término general verifica dicha relación. Ejemplos particulares de relaciones de recurrencia son las de la forma $a_n = a_{n-1} + d$ (progresión aritmética). Sus soluciones son $a_n = a_0 + dn$ (Ramirez, K, s.f.).

Una *relación de correspondencia* para una sucesión $\{a_n\}$ es una expresión algebraica que expresa el término general (a_n), en función de su posición (n). Considera lo qué cambia entre elementos sucesivos de una sucesión y lo qué no cambia (lo invariante). Ejemplos particulares de relaciones de correspondencia son las de la forma $a_n = a_1 + (n-1)d$ (progresion aritmética).

Progresiones aritméticas

Una sucesión en la que cada término después del primero se forma sumando un número fijo al número precedente es denominada una *progresión aritmética*. El número fijado es llamado la *diferencia común o razón de la progresión*. Sea

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_n, \ldots$$

Los términos de una progresión aritmética, cumplen con:

$$a_2 - a_1 = d$$

$$a_3 - a_2 = d$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$a_n - a_{n-1} = d$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

Así mismo, cada término de la progresión se puede obtener mediante añadir al término anterior la diferencia constante. Por ejemplo:

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Si a_1 representa al primer término y d a la diferencia común de una progresión artimética, se pueden escribir los términos sucesivos por adición repetida de d. Así para n términos, se tiene:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \ldots, a_1 + (n-1)d$$

El n-ésimo término se encuentra observando que el coeficiente de d en cada término es una unidad menor que el número de orden correspondiente al término. Al denotar al n-ésimo término por a_n, se tiene la fórmula

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Con a_1 y d dados, se puede encontrar cualquier término deseado de una progresión sustituyendo el entero positivo apropiado para n. Por ejemplo, determinar el trigésimo término de la progresión aritmética $2, 6, 10, \ldots$

Solución. Aquí $a_1 = 2, d = 4$ y $n = 30$. Entonces usando la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)d$, se encuentra

$$a_{30} = 2 + (30-1)4 = 2 + 116 = 118$$

Pero si no se da a_1 y en vez se conoce el valor a_k, donde $k < n$, entonces se puede expresar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_k = a_1 + (k-1)d$$

Si se despeja a_1 en ambas ecuaciones, se obtiene que:

$$a_1 = a_n - (n-1)d$$
$$a_1 = a_k - (k-1)d$$

Al igualar, queda:

$$a_n - (n-1)d = a_k - (k-1)d$$

Si se desarrolla, se obtiene:

$$a_n - nd + d = a_k - kd + d$$

Al despejar a_n:

$$a_n = a_k - kd + d + nd - d$$

Al simplificar y factorizar, se tiene que:

$$a_n = a_k - kd + nd$$

$$a_n = a_k + nd - kd$$

$$a_n = a_k + (n-k)d$$

Donde n, k, a_n y a_k son números naturales, tales que $n > k$, y d es un número real. Así, con a_k y d dados, se puede encontrar cualquier término deseado de una progresión sustituyendo el entero positivo apropiado para n mediante la fórmula

$$a_n = a_k + (n - k)d$$

Por ejemplo, determinar el trigésimo término de una progresión aritmética, conocido su tércer término $a_3 = 10$ y la diferencia común entre sus términos $d = 4$.

Solución. Si $a_3 = 10, d = 4$ y $n = 30$. Entonces empleando la fórmula $a_n = a_k + (n - k)d$, se encuentra

$$a_{30} = 10 + (30 - 3)4 = 10 + 108 = 118$$

Las propiedades de las progresiones aritméticas son: finitud (finitas o infinitas), convergencia (convergente o divergentes) monotonía (crecientes o decrecientes), acotación (acotada inferiormente, acotada superiormente o acotada).

3.1.2.2. Procedimientos

3.1.2.2.1. Destrezas

Las destrezas constituyeron un primer nivel de análisis procedimental de la sucesión matemática con progresión aritmética. Se realizó mediante el análisis del procesamiento secuenciado de contenidos básicos, mediante el uso de convenios y manipulación de las notaciones asociadas al contenido matemático en cuestión (Fernández, 2016). La Tabla 3.6 presenta los resultados determinados en este nivel de análisis, organizados por grado escolar.

Tabla 3.6.

Destrezas asociadas con las sucesiones matemáticas con progresión aritmética en la educación primaria mexicana

Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto	Sexto
Escritura y lectura de una sucesión numérica.	Escritura y lectura de una sucesión numérica. Continuar una progresión conociendo algunos de sus términos. Anticipar un término, cercano o lejano, dadas sus condiciones iniciales de generación de una sucesión.	Continuar una progresión conociendo algunos de sus términos. Anticipar un término cercano de la sucesión, dados algunos de sus términos o dadas sus condiciones iniciales de generación.	Continuar una progresión conociendo algunos de sus términos. Determinar si un elemento dado (número o figura) pertenece o no a una sucesión. Construir una sucesión numérica o de figuras con progresión aritmética .	Construir una sucesión numérica con progresión aritmética , dadas sus condiciones iniciales de generación. Determinar la diferencia (constante aditiva) entre los términos de la sucesión. Usar la diferencia (constante aditiva) para encontrar términos faltantes o continuar la sucesión.	Construir una sucesión numérica con progresión aritmética , dadas sus condiciones iniciales de generación. Determinar la diferencia (constante aditiva) entre los términos de la sucesión. Usar la diferencia (constante aditiva) para encontrar términos faltantes o continuar la sucesión.

3.1.2.2.2. Razonamientos

Los razonamientos fueron un segundo nivel de análisis procedimental de la sucesión matemática con progresión aritmética e involucraron el procesamiento de relaciones e inferencias logicas entre conceptos. En general, son considerados cinco tipos: lógico-deductivo, inductivo, analógico, numérico y figurativo. Los resultados (Tabla 3.7) muestran la implicación de tres tipos de razonamientos, inductivo, númerico y figurativo, asociados con el contenido matemático analizado.

Tabla 3.7.

Razonamientos asociados con las sucesiones matemáticas con progresión aritmética en la educación primaria mexicana

Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto	Sexto
Inductivo. Numérico.	Inductivo. Numérico. Figurativo.	Inductivo. Numérico. Figurativo.	Inductivo. Numérico. Figurativo.	Inductivo. Numérico.	Inductivo. Numérico. Figurativo

El razonamiento inductivo se refiere a un proceso cognitivo que comienza con el trabajo de casos particulares y, pasando por la formulación de conjeturas, llega a la comprobación de éstas" (Cañadas, 2007, p.66). Este tipo de razonamiento produce un paso de lo particular a lo general. El razonamiento numérico es un tipo particular de razonamiento inductivo donde se utilizan conceptos y operaciones algebraicas como las diferencias finitas y la prueba y el error (Rivera y Becker, 2005, p. 199). Este tipo de razonamiento conduce a generalizaciones entre valores numéricos ya conocidos y calculados. Se basa en usar la aritmética estándar para resolver etapas sucesivas o en adivinar y verificar para encontrar relaciones (Markworth, 2010). Y el razonamiento figurativo es un tipo particular de razonamiento inductivo centrado en la estructura física del patrón de crecimiento geométrico. Se basa en relaciones que podrían extraerse visualmente de un conjunto dado de casos particulares (Rivera y Becker, 2005, p. 199). Este tipo de razonamiento conduce a generalizaciones más precisas y con mejores justificaciones (Markworth, 2010).

3.1.2.2.3. Estrategias

Las estrategias fueron el tercer y último nivel de análisis procedimental de la sucesión matemática con progresión aritmética. Implican el procesamiento de conceptos y la conexión de razonamientos vinculados con una o varias estructuras, para responder a una cuestión o problema. En la Tabla 3.8 se presentan las estrategias que se esperan en los estudiantes cuando abordan el concepto de sucesión matemática con progresión aritmética a lo largo de la educación primaria.

Tabla 3.8.

Estrategias asociadas con las sucesiones matemáticas con progresión aritmética en la educación primaria mexicana

Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto	Sexto
Construcción de un conjunto ordenado de números siguiendo un patrón dado. Identificación de la regularidad entre dos términos consecutivos de una sucesión.	Construcción de un conjunto ordenado de números o de figuras siguiendo un patrón dado o inferido. Anticipación de un término (cercano o lejano) siguiendo un patrón dado. Identificación de la	Construcción de un conjunto ordenado de números o de figuras siguiendo un patrón inferido. Anticipación de un término cercano de la sucesión, dados algunos de sus términos o dadas sus condiciones iniciales	Identificación del patrón en una sucesión. Obtención de una regla de recurrencia. Continuación de una sucesión numérica o de figuras, siguiendo un patrón inferido.	Continuación de una sucesión numérica, siguiendo un patrón inferido. Construcción de una sucesión numérica, siguiendo un patrón dado y sus condicones iniciales.	Determinación de un término (consecutivo, cercano o lejano) de una sucesión (numérica o de figuras), siguiendo un patrón inferido. Construcción de una sucesión numérica, siguiendo un patrón

	regularidad entre dos términos consecutivos de una sucesión. Resolución de problemas con contexto real, donde estan involucradas sucesiones con progresión aritmética.	de generación. Identificación de la regularidad entre dos términos consecutivos de una sucesión. Obtención de una ley de formación (regla de recurrencia). Representación figural de una sucesión con progresión aritmética. Cálculo de la diferencia en una sucesión con progresión aritmética. Resolución de problemas con contexto real, donde estan involucradas sucesiones con progresión aritmética.	Representación figural (o numérica) de una sucesión con progresión aritmética. Cálculo de la diferencia en una sucesión con progresión aritmética. Resolución de problemas con contexto real, donde estan involucradas sucesiones con progresión aritmética. Representación en diferentes registros de una sucesión con progresión aritmética.	Identificación de regularidades entre los términos de una sucesión. Obtención de una regla de recurrencia. Cálculo de la diferencia (constante aditiva) en una sucesión con progresión aritmética. Representación numérica de una sucesión con progresión aritmética.	dado y sus condiciones iniciales. Obtención de una regla de recurrencia. Representación verbal, figural y numérica de una sucesión con progresión aritmética. Cálculo de la diferencia en una sucesión con progresión aritmética. Resolución de problemas con contexto real, donde estan involucradas sucesiones con progresión aritmética. Representación en diferentes registros de una sucesión con progresión aritmética.

3.1.3. Representacional

Una tercera categoría del contenido matemático escolar fue la representacional. Comprendió de las notaciones gráficas, simbólicas y sistemas de signos involucrados en los documentos analizados. Fueron considerados cuatro sistemas de representación base: numérico, figural, algebraico y verbal. La Tabla 3.9 documenta las representaciones de las sucesiones matemáticas con progresión aritmética presentes a lo largo de la educación primaria mexicana.

Tabla 3.9.
Representaciones de las sucesiones matemáticas con progresión aritmética en la educación primaria mexicana

Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto	Sexto
Numérica (simple oral y simple escrita).	Numérica (simple oral y simple escrita), figural y verbal.	Numérica (simple escrita), figural y verbal.	Numérica (simple escrita) y figural.	Numérica (simple escrita y tabular) y verbal.	Numérica (simple escrita) y figural.

Las representaciones son ejemplificadas a partir de ejemplos reimpresos de los documentos Desafíos matemáticos. Libro para el alumno.

Numérica simple oral. Expresa oralmente la sucesión matemática en su forma numérica simple.

Figura 3.2. Ejemplo de una representación numérica oral. Reimpreso de Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Primer grado (SEP, 2016a, p.13).

Numérica simple escrita. Expresa de forma escrita la sucesión matemática en su forma numérica simple.

Figura 3.3. Ejemplo de una representación numérica escrita. Reimpreso de Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Tercer grado (SEP, 2016c, p.86).

Numérica tabular. Expresa la relación mediante pares ordenados organizados en una tabla de valores.

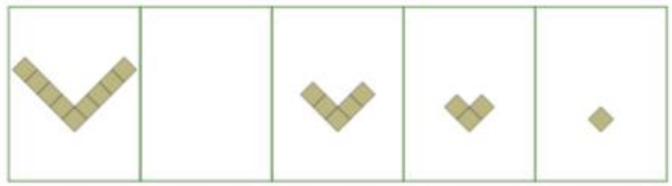
6. Algunos de los folios de los aspirantes que presentaron examen en el grupo 6 son los siguientes.

Primer asiento	2
Segundo asiento	4
Tercer asiento	6
Cuarto asiento	8
Quinto asiento	10

Figura 3.4. Ejemplo de una representación numérica tabular. Reimpreso de Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Quinto grado (SEP, 2016e, p.163).

Figural. Expresa la sucesión mediante la construcción ordenada de las figuras y/o los puntos que la forman.

2.



a) ¿Cuántos cuadrados utilizaste para dibujar la figura faltante?

Figura 3.5. Ejemplo de una representación figural. Reimpreso de Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Tercer grado (SEP, 2016c, p.112).

Verbal. Expresa la sucesión mediante lenjuage común.

Consigna

En equipos, resuelvan los siguientes problemas. Pueden utilizar su calculadora.

1. Si una sucesión aumenta de 1.5 en 1.5, ¿cuáles son los primeros 10 términos si el primero es 0.5?

2. ¿Cuáles son los primeros 10 términos de una sucesión si el inicial es $\frac{2}{3}$ y la diferencia entre dos términos consecutivos es $\frac{1}{6}$?

3. El primer término de una sucesión es $\frac{1}{3}$ y aumenta constantemente 0.5. ¿Cuáles son los primeros 10 términos de la sucesión?

Figura 3.6. Ejemplos de una representación verbal. Reimpreso de Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Sexto grado (SEP, 2016f, p.115).

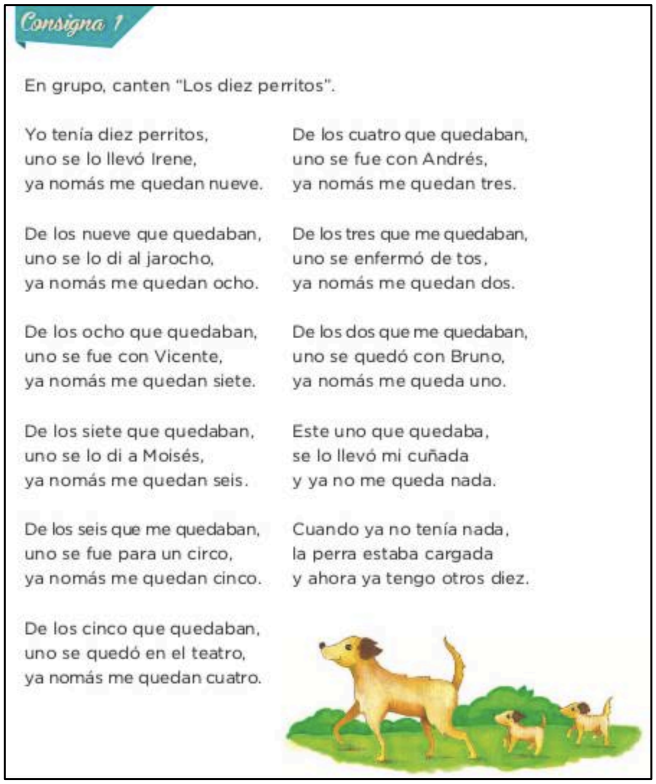
3.1.4. Fenomenológica

La fenomenológica es la cuarta y última categoría del análisis de contenido matemático escolar. Evidenció los fenómenos que dan origen a la sucesión matemática con progresión artimética en la educación primaria mexicana. Siendo el concepto de progresión artimética la que describe y organiza los contextos y situaciones en los que se presenta. Dotándose de sentido y significado (Rico y Fernández-Cano, 2013). La Tabla 3.10 resume los contextos y usos en los que son presentados las progresiones aritméticas en la educación primaria mexicana.

Tabla 3.10. *Contextos y usos de las sucesiones matemáticas con progresión aritmética en la educación primaria mexicana*

Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto	Sexto
Conteo ordenado de objetos en canciones infantiles. Conteo ordenado de cantidades, como los días que conforman los meses del año en un calendario. Conteo ordenado de objetos como frijoles, tarjetas o casillas numeradas en un tablero de juego.	Juegos donde interviene el uso de tarjetas ordenadas o tableros de juego. Patrones figurales o numéricos. Situaciones personales como el ahorro contante de dinero.	Patrones figurales o numéricos. Situaciones personales como el ahorro contante de dinero.	Patrones figurales o numéricos. Patrones compuestos. Situaciones laborales como construcción de estrucutras de vidrio para armar un edificio o pisos de madera con un cierto diseño.	Patrones numéricos. Situaciones personales como el lugar de asiento a ocupar en un examen según el folio asignado.	Patrones numéricos. Situaciones laborales como construcción de estrucutras armadas con tubos métalicos y hojas de vidrio

El primer acercamiento que tienen los niños en la educación primaria mexicana es el conteo de objetos, donde establecen inconscientemente una biyección entre los objetos considerados y una etiqueta (secuencia de números naturales) empleada para cuantificarlos o, bien, ordenarlos. Por ejemplo, se puede observar la secuencia numérica convencional para diferenciar ordenadamente en canciones infantiles (Figura 3.7) a animales, se le asigna un número en una lista ordenada creciente o decreciente, con el fin de propiciar el conteo oral.



Consigna 1

En grupo, canten "Los diez perritos".

Yo tenía diez perritos,
uno se lo llevó Irene,
ya nomás me quedan nueve.

De los nueve que quedaban,
uno se lo di al jarocho,
ya nomás me quedan ocho.

De los ocho que quedaban,
uno se fue con Vicente,
ya nomás me quedan siete.

De los siete que quedaban,
uno se lo di a Moisés,
ya nomás me quedan seis.

De los seis que me quedaban,
uno se fue para un circo,
ya nomás me quedan cinco.

De los cinco que quedaban,
uno se quedó en el teatro,
ya nomás me quedan cuatro.

De los cuatro que quedaban,
uno se fue con Andrés,
ya nomás me quedan tres.

De los tres que me quedaban,
uno se enfermó de tos,
ya nomás me quedan dos.

De los dos que me quedaban,
uno se quedó con Bruno,
ya nomás me queda uno.

Este uno que quedaba,
se lo llevó mi cuñada
y ya no me queda nada.

Cuando ya no tenía nada,
la perra estaba cargada
y ahora ya tengo otros diez.

Figura 3.7. Ejemplo de un contexto asociado a la acción de contar. Reimpreso de Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Primer grado (SEP, 2016a, p.15).

Otro contexto, es el conteo ordenado de cantidades, centrado en un entorno de calendario (Figura 3.8), donde se solicita que los niños completen las fechas de los días que conforman los meses del año. Tiene por objetivo continuar la construcción de sucesiones numéricas escritas que involucran números del 1 al 31.

Consigna 1

En equipos, realicen lo que a continuación se pide.

1. Anoten las fechas que faltan en el calendario.

Agosto 2014

domingo	lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado
					1	2
	4		6			9
		12		14		
17	18		20			
24/31		26		28		

2. Presenten su trabajo al grupo. Comparen las fechas que escribieron con lo que anotaron otros equipos.
3. Expliquen a sus compañeros qué hicieron para saber qué números faltaban.

Figura 3.8. Ejemplo de un contexto asociado a la acción de contar. Reimpreso de Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Primer grado (SEP, 2016a, p.19).

Otro tipo de conteo ordenado, en los libros de texto, son de objetos como frijoles, tarjetas ordenadas o de la posición de las casillas en tableros de juego (Figura 3.9). Tiene por objetivo que los niños analicen las regularidades en las sucesiones que van escribiendo. Se trabaja con números del 0 al 100.

Figura 3.9. Ejemplo de un contexto asociado a la acción de contar. Reimpreso de Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Primer grado (SEP, 2016a, p.61).

Los juegos (Figura 3.10) son otro contexto usado en la educación primaria para que los niños utilicen el cálculo mental al tener que anticipar el resultado de sumarle o restarle una cantidad a un número dado. Son prácticos, ya que puede llevarse a cabo varias veces ofreciendo algunas variantes en sus condiciones de desarrollo. Por ejemplo, puede pedirse que al inicio lancen un dado y se parta de la casilla que tenga el número o color que salió en el dado, o bien, que el inicio fuese el número de meta y la meta fuese llegar al valor inicial. También, pueden cambiarse las condiciones de conteo. Se trabajan con números del 0 al 1000.

Figura 3.10. Ejemplo de un contexto de juego. Reimpreso de Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Segundo grado (SEP, 2016b, p.37).

Los patrones son otro contexto empleado para trabajar con sucesiones matemáticas con progresión aritmética creciente y/o decreciente. Se identificó el uso de patrones figurales, numéricos y compuestos. Los patrones figurales (Figura 3.11) utilizados son figuras escalonadas o configuraciones puntuales. Su fin es que los niños identifiquen la regularidad de crecimiento o decrecimiento para continuar el patrón o determinar términos cercanos y lejanos.

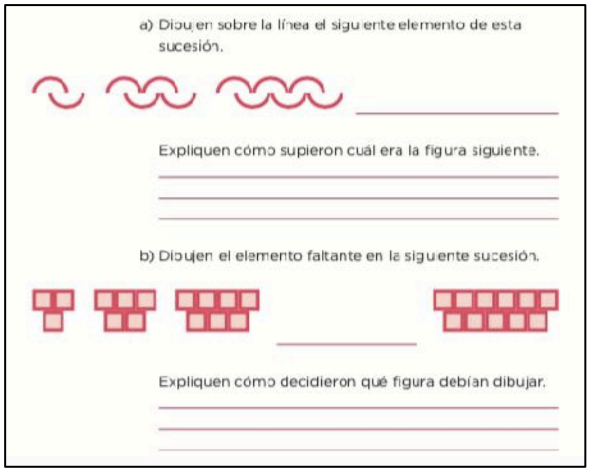


Figura 3.11. Ejemplo de patrones figurales. Reimpreso de Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Segundo grado (SEP, 2016b, p.38).

Los patrones numéricos (e.g. Figura 3.12) usados son colecciones de números ordenados de forma creciente o decreciente. Tienen como objetivo que los niños identifiquen la regularidad de crecimiento o decrecimiento para continuar el patrón o anticipar términos cercanos y/o lejanos.

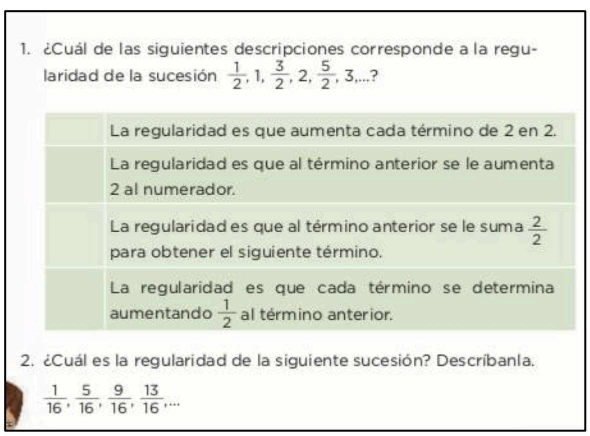


Figura 3.12. Ejemplo de patrones numéricos. Reimpreso de Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Quinto grado (SEP, 2016e, p.118).

Los patrones compuestos son representados tanto figural como numericamente, o bien de forma mixta (Figura 3.13). Este tipo de patrones son conformados por dos sucesiones intercaladas. Son abordados únicamente en cuarto grado. Su objetivo de uso es identificar y expresar la regularidad de crecimiento o decrecimiento en patrones compuestos. Además, de usar esa regularidad para determinar términos consecutivos, cercanos y/o lejanos; o de averiguar si un término pertenece o no a la sucesión.

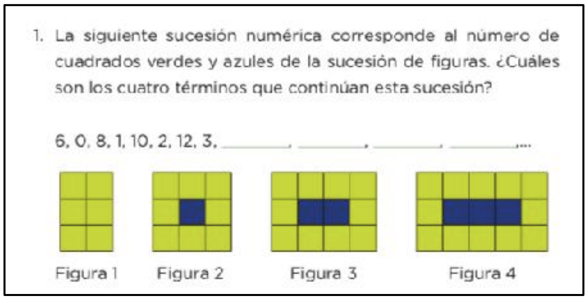


Figura 3.13. Ejemplo de un patrón compuesto. Reimpreso de Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Cuarto grado (SEP, 2016d, p.128).

Las situaciones personales, estuvieron presentes con relación a un contexto de ahorro constante (Figura 3.14), donde se dan las condiciones de generación del patrón de crecimiento. Es decir, se proporciona la relación de recurrencia. En ese proceso, los niños deben interpretar la información y construir el patrón para anticipar términos cercanos y/o lejanos. Otro contexto utilizado fue de aplicación a un examen. Asociado al lugar de asiento a ocupar en la aplicación del examen según el folio asignado. Su fin era que los niños identifiquen la regularidad mediante la cual se construye la sucesión y determinen términos cercanos y/o lejanos, así como, establecer si un término pertenece o no a la sucesión.

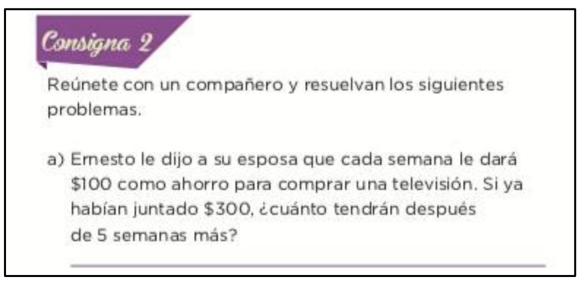


Figura 3.14. Ejemplo de una situación personal. Reimpreso de Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Segundo grado (SEP, 2016b, p.106).

Otro tipo de situaciones abordadas, fueron las laborales como la construcción de estructutras de vidrio para fachadas de edificios (Figura 3.15) y el armado de pisos de madera con un cierto diseño (Figura 3.16). Tienen por objetivo que los niños identifiquen y/o apliquen la regularidad (o patrón) de las progresiones para determinar (o anticipar) términos cercanos o lejanos. Támbien, que conecten las representaciones figural y numérica de los patrones inmersos.

En resumen, en los libros de textos existen muchos fenómenos que son usados para dar sentido a las progresiones aritméticas. Son englobados, todos aquellos contextos y situaciones en las que se evolucione de un estado a otro, bajo una diferencia común o constante.

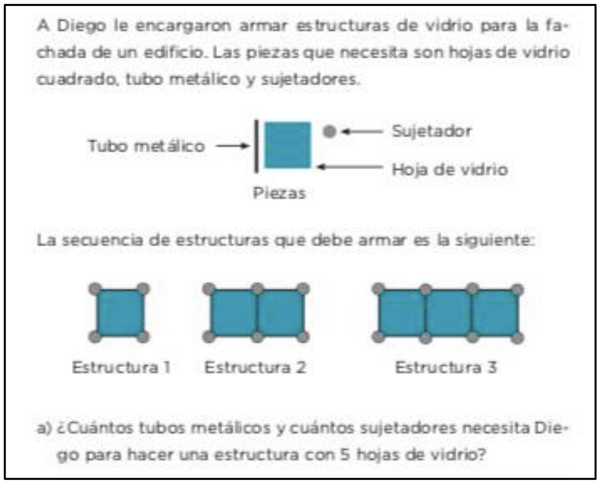


Figura 3.15. Ejemplo de una situación laboral. Reimpreso de Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Cuarto grado (SEP, 2016d, p.126).

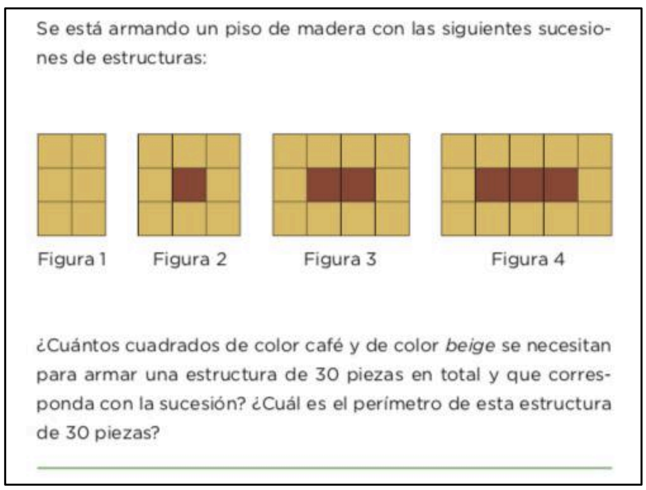


Figura 3.16. Ejemplo de una situación laboral. Reimpreso de Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Cuarto grado (SEP, 2016d, p.177).

3.2. Síntesis sobre el análisis de contenido matemático

El análisis de contenido matemático reveló que las sucesiones matemáticas (Figura 3.17), son un caso de funciones particulares donde el conjunto inicial es el de los números naturales ordenados, y el conjunto final, o imagen es el conjunto de los números reales. Asimismo, que las progresiones aritméticas son un tipo particular de sucesiones, cuya expresión analítica es un polinomio de grado uno de la forma $a_n = a_1 + (n-1)d$, donde a_1 representa al primer término y d a la diferencia común. Una expresión más general es $a_n = a_k + (n-k)d$, donde n y k son números naturales, tales que $n > k$, a_k representa un término k-ésimo conocido y d a la diferencia común.

Lo anterior, manifiesta la posibilidad, desde la matemática formal, de transformar y extender el contenido aritmético del currículo de matemáticas de la educación primaria mexicana de sucesión matemática con progresión aritmética para abordar pensamiento funcional. Esto se logra, al integrar en este tipo de contenido cuestiones que centren a los estudiantes a atender cómo dos cantidades varían entre sí, en consideración al uso de cantidades suficientemente grandes que conduce al uso algebraico del número (Blanton & Kaput, 2005).

Para lograr dicha transformación y extensión, se planteó la siguiente cuestión ¿Cuál es el tratamiento otorgado a las sucesiones matemáticas con progresión aritmética en el currículo de matemáticas de la educación primaria mexicana? Los resultados del análisis de contenido matemático escolar, evidenciaron que las progresiones aritméticas en la educación primaria mexicana, son tratadas a lo largo de los seis grados escolares que la comprenden dentro del eje Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico. Abordadas en sus diferentes tipos de representaciones como: numérica (simple oral, simple numérica y tabular), figural y verbal. Con monotonía creciente y/o decreciente. Los elementos considerados son posición y términos particulares (como términos consecutivos, cercanos y lejanos).

Se observa, por grado escolar, una creciente demanda en los objetivos y en el tipo y rango de valores numéricos. Por ejemplo, con respecto al conjunto de números tratados. De primero a sexto grado, se trabaja con progresiones aritméticas con números naturales. En quinto se añade el trabajo con números fraccionarios y en sexto con números decimales.

La mayor demanda cognitiva identificada en las tareas del libro de texto es el reconocimiento del patrón y su aplicación para obtener un término particular a partir del término anterior, es decir, encontrar la relación de recurrencia entre los términos. Evidencia de que no se les demanda el establecimiento de una regla general.

Los contextos usados para dar sentido y significado a las progresiones aritméticas, son problemas y/o situaciones asociadas con la acción de contar y de explorar aritmética y/o visualmente un patrón. Algunos contextos son: 1) conteo ordenado de objetos, cantidades, tarjetas o casillas en tableros de juego; 2) juegos; 3) patrones figurales, numéricos o compuestos; y 4) situaciones personales y laborales.

Esto da un referente de qué y hasta dónde son abordadas las sucesiones matemáticas con progresión aritmética en la educación primaria en México (Figura 3.17). Permitiendo tomar decisiones con respecto a la población de estudio, el tipo de representaciones a usar, el conjunto de números a tratar y los contextos a considerar para el diseño de una secuencia de instrucción que involucre problemas de generalización de patrones como vía para desarrollar pensamiento funcional. Lo cual será descrito en el siguiente capítulo.

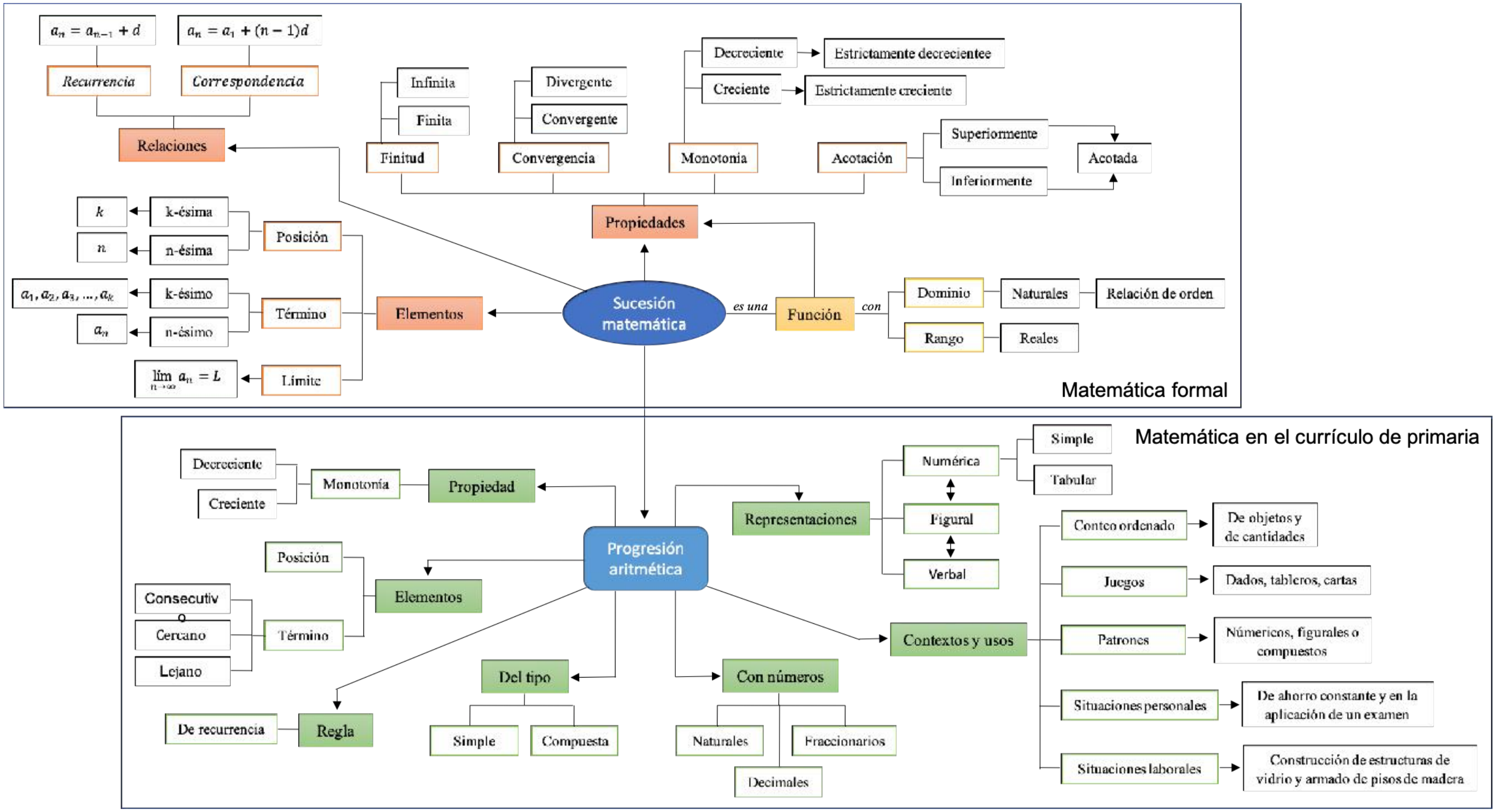


Figura 3.17. Estructura conceptual de la sucesión desde la matemática formal versus estructura conceptual de la progresión aritmética inmersa en la educación primaria mexicana.

Capítulo 4. Marco metodológico

La metodología de investigación utilizada es un experimento de enseñanza en el aula (Coob, 2000), ubicada dentro del enfoque de la investigación de diseño (Molina, 2006; Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Su objetivo es estudiar la naturaleza del desarrollo de las ideas, razonamientos, herramientas o modelos en los que están contenidos los estudiantes y el profesor (Kelly & Lesh, 2000; Steffe & Thompson, 2000; Cobb, 2000; Molina et al., 2011), a través de una secuencia de instrucción. Esta metodología fue ejecutada para abordar la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué prácticas matemáticas y formas normativas de razonamiento soportan la evolución del razonamiento matemático en una comunidad de aula de primaria a lo largo de una secuencia de instrucción que promueve el desarrollo del pensamiento funcional?

En los siguientes apartados, la investigación de diseño, el experimento de enseñanza en el aula y cada una de las etapas de su desarrollo se describen y discuten en el marco del presente estudio.

4.1. Investigación de diseño

La investigación de diseño, también denominado investigación de desarrollo o investigación basada en diseño, es un paradigma metodológico utilizado para el estudio del aprendizaje en contexto mediante el diseño sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza. Es de naturaleza principalmente cualitativa (Molina et al., 2011; Swan, 2014; Cobb, 2000) y se caracteriza por abordar la brecha entre la teoría y la práctica que ha atestado la educación (Wawro, 2011).

Swan (2014) define una investigación de diseño como:

> "un enfoque formativo de la investigación, en el cual un producto o proceso (o "herramienta") se visualiza, diseña, desarrolla y refina a través de ciclos de promulgación, observación, análisis y rediseño, con retroalimentación sistemática de los usuarios finales (...) Sus objetivos son crear herramientas innovadoras para que otros utilicen, describan y expliquen cómo funcionan estas herramientas, explican el rango de implementaciones que ocurren y desarrollan principios y teorías que pueden guiar los diseños futuros. En última instancia, el objetivo es transformador; busca crear nuevas posibilidades de enseñanza y aprendizaje y estudiar su impacto en los profesores, los niños y otros usuarios finales" (p.148).

El producto, proceso o herramienta mencionado por Swan, otros autores (e.g. Cobb, 2000; Cobb & Gravemeijer, 2008) lo llaman *diseño instruccional*, para referirse al diseño de ambientes de aprendizaje.

El ciclo (Figura 4.1) de la investigación diseño se constituye por dos fases: diseño instruccional e investigación, relacionadas de forma interdependiente. El diseño instruccional sirve como contexto para la investigación y, por otro lado, los análisis y explicaciones realizados sobre el aprendizaje informan la mejora del diseño instruccional, lo que da sentido a una de sus principales características, de investigar simultáneamente el proceso de aprendizaje y los medios por los cuales se apoya y organiza (Cobb & Gravemeijer, 2008).

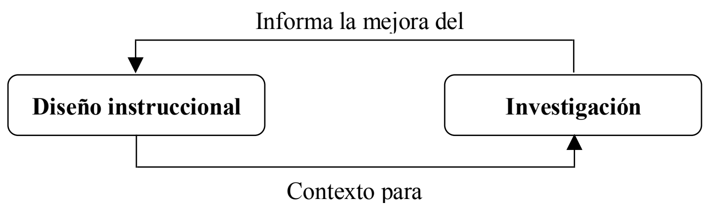


Figura 4.1. El ciclo de la investigación de diseño.

La diversidad de entornos a desarrollar en este tipo de estudios, junto con el tipo de personas involucradas, es uno de los factores que ha originado la existencia de una variedad de tipos de estudios de diseño en la investigación en Educación Matemática (Molina, 2006). Ejemplos de esta variedad se encuentran en el Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education (2000) y en el Handbook of Design Research Methods in Education (2008). Este estudio se realizó con el caso específico de un experimento de enseñanza en el aula (Cobb, 2000). El objetivo de este tipo de metodología, es que los investigadores experimenten, de primera mano, el aprendizaje y el razonamiento matemático (Steffe & Thompson, 2000) en comunidades de aula.

4.2. Experimento de enseñanza en el aula

El experimento de enseñanza en el aula (Cobb, 2000), es una metodología sustentada de la perspectiva sociocultural de aprendizaje de Cobb y Yackel (1996), que considera a la actividad matemática de los estudiantes ubicada necesariamente en una situación social y que los productos de su desarrollo matemático, formas de razonamiento cada vez más sofisticadas, están relacionados con su participación en comunidades de aula.

Algunas especificidades de este tipo de experimento de enseñanza, son (Cobb, 2000):

1) La actuación del investigador como profesor en el aula y su interacción con los estudiantes de manera individual, en grupos pequeños y en discusiones grupales con toda la clase.
2) La participación de los estudiantes en prácticas matemáticas en el aula, donde se espera que interactúen de acuerdo a ciertas normas de participación establecidas como parte de la microcultura del aula.
3) Los análisis realizados se basan de la actividad matemática empírica de los estudiantes según se ubica en el contexto social del aula.

En general, en un experimento de enseñanza en el aula, participan un investigador-profesor, un colectivo de estudiantes y uno o más investigadores-observadores. Su duración varía, de unas horas a uno o más años académicos. Uno de sus objetivos es el desarrollo de materiales de instrucción y el establecimiento de conjeturas iniciales para abordar problemas prácticos específicos. Estas conjeturas posteriormente orientan los análisis continuo y retrospectivo de las fuentes de datos (información de todo lo que ocurre en el aula de clases) que pueden incluir: producciones escritas de los estudiantes, grabaciones de video de entrevistas y/o discusiones grupales con toda la clase, capturas a la pizarra, notas de campo, por mencionar algunos (Cobb, 2000). Su objetivo final, es estudiar la naturaleza del desarrollo de las ideas, razonamientos, herramientas o modelos (Kelly & Lesh, 2000; Steffe & Thompson, 2000; Cobb, 2000; Molina et al., 2011) en los que están contenidos los estudiantes y el investigador-profesor, durante la implementación de una secuencia de instrucción. La cualidad que poseen sus resultados es la de ser explicativos y poder ser adaptados en caso de interacción con otros estudiantes (Molina, 2006).

La ejecución de los experimentos de enseñanza en el aula, se caracteriza en tres etapas: 1) diseño de materiales de instrucción y planificación; 2) experimentación en el aula; y 3) análisis retrospectivo (Cobb, 2000). Etapas que se relacionan con las fases del ciclo de la investigación de diseño de la siguiente forma: el diseño de materiales de instrucción y planificación está relacionado con la fase de diseño instruccional; y la experimentación y el análisis retrospectivo de las actividades y eventos en el aula, involucran la fase de investigación.

En los siguientes apartados, se describe cada una de las etapas en el marco del presente estudio.

4.3. Diseño de materiales de instrucción y planificación

La etapa de diseño de materiales de instrucción y planificación abarcó una serie de acciones que incluyeron: 1) establecer un punto de partida para el diseño de la secuencia de instrucción; 2) precisar los participantes; 3) delinear una trayectoria hipotética de aprendizaje; 4) diseñar los materiales de instrucción, 5) realizar un análisis a priori; y 6) especificar el rol del profesor.

4.3.1. Punto de partida para el diseño de materiales de instrucción

El fundamento del diseño de la secuencia de instrucción, son un análisis de contenido matemático y una revisión a la literatura centrada en dos temáticas: problemas de generalización de patrones y principios de diseño.

4.3.1.1. Análisis de contenido matemático

Se toman de referencia los resultados del análisis de contenido matemático escolar documentado en el Capítulo 3, realizado para sucesiones matemáticas con progresión aritmética. Dichos resultados permitieron tomar decisiones con respecto al grado académico al cual dirigir la secuencia de instrucción (población de estudio), el sistema de representación a usar, el conjunto de números a tratar y los contextos a considerar en los problemas de generalización de patrones.

El grado académico de interés es quinto de primaria, ya que curricularmente (Tabla 3.1) los estudiantes de tal grado, tienen conocimiento respecto al trabajo con progresiones aritméticas en sus diferentes representaciones y contextos. Así como, con la regla de recurrencia. También, han trabajado con contenido asociado con las estructuras aditivas y multiplicativas. Lo anterior, resulta un punto de partida fundamental para el desarrollo de una secuencia de instrucción que involucre problemas de generalización de patrones como vía para desarrollar pensamiento funcional.

El sistema de representación a usar en los patrones, es: numérico (tabular), figural y verbal. La importancia de considerar problemas de generalización de patrones en sus diferentes representaciones, radica en: 1) favorecer el tránsito entre representaciones; y 2) obtener mayor evidencia de la capacidad de hacer de los niños ante este tipo de problemas y de la manera en que su pensamiento funcional progresa.

El conjunto de números a tratar son los números naturales. En cursos anteriores, estudiantes de quinto grado, han trabajado solo con progresiones aritméticas con números naturales. El trabajo con progresiones artiméticas con números fraccionarios se da hasta finales de su curso de matemáticas en quinto grado. Motivo que llevó a delimitar el trabajo de patrones con números naturales.

Los contextos considerados en los problemas de generalización fueron los patrones, al ser cercanos para los estudiantes. Son trabajados de forma transversal en la educación primaria desde sus diferentes representaciones. Además, para el diseño de un contexto que involucre un patrón verbal, se contempló abordar una situación personal como el ahorro constante de dinero. Esto daría oportunidad de considerar aspectos que son tratados en la educación primaria mexicana en el diseño de materiales de instrucción de esta investigación.

4.3.1.2. Problemas de generalización de patrones

Los problemas de generalización de patrones son considerados por la investigación (e.g. Warren & Cooper, 2006; Vergel, 2015; Blanton et al., 2015; Pinto, 2016; Tanışlı, 2011) como una de las vías para promover el desarrollo del pensamiento funcional en la educación primaria, ya que permiten introducir y trabajar con relaciones funcionales de la forma $a_n = dn + c$, donde $c \neq 0$.

Los problemas de generalización de patrones implican la búsqueda de patrones y su solución exige hallar un término a partir de otros dados o conocidos. Estos problemas radican en generar, a partir de los términos particulares dados o condiciones iniciales de su generación, nuevos términos particulares (que suelen ser consecutivos, cercanos o lejanos) o la expresión del término general (o regla general). Ponen de manifiesto, la necesidad de producir un patrón de comportamiento de los términos conocidos (Merino, Cañadas y Molina, 2013).

El proceso implicado en la generalización de patrones, consiste en (Radford, 2008): 1) tomar conciencia de una regularidad común; 2) extender o generalizar dicha regularidad a todos los términos posteriores de la secuencia; y 3) usar esa regularidad común para determinar una expresión directa de cualquier término de la secuencia. Radford distingue en ese proceso dos tipos de generalizaciones: la aritmética y la algebraica. La generalización aritmética involucra los incisos 1 y 2 y el trabajo con cantidades determinadas. La generalización algebraica, abarca el tránsito por los tres incisos y el trabajo con cantidades indeterminadas.

Esta revisión dio la pauta de dos aspectos a considerar para el diseño de la secuencia de instrucción, el proceso y la estructura de los problemas de generalización de patrones.

4.3.1.3. Principios de diseño

Se hizo una revisión de los principios de diseño que la investigación en Educación Matemática ha resaltado considerar en la planificación y desarrollo de tareas de aprendizaje para apoyar el razonamiento matemático. Lo que conllevó a retomar de Solar y Deulofeu (2016) algunos componentes para promover la argumentación en el aula de clases, como son que las tareas permitan: a) diferentes procedimientos para su resolución, b) respuestas abiertas, y c) posturas diferentes. De Smith y Stein (1998) se tomó en cuenta las características de las tareas que apoyan altos niveles de demanda cognitiva, esto es que, tengan la potencialidad de involucrar al estudiante en mayores niveles de pensamiento, incluidos el razonamiento y la creación de sentido. Las caracteristicas son (p.348):

1) La atención de los estudiantes se centra en el uso de procedimientos con el propósito de desarrollar niveles profundos de comprensión de los conceptos e ideas matemáticas.
2) Sugieren explícita o implícitamente caminos a seguir que son procedimientos amplios y generales que tienen conexiones cercanas con los conceptos e ideas subyacentes, en oposición a los algoritmos cerrados que son opacos respecto a los conceptos subyacentes.
3) Usualmente están representados de múltiples maneras, tales como diagramas visuales, objetos concretos, símbolos, y situaciones problema. Hacer conexiones entre múltiples representaciones ayuda a desarrollar el significado.
4) Requiere algún grado de esfuerzo cognitivo. Aunque se puede seguir un procedimiento general, no pueden seguirse sin pensar. Los estudiantes necesitan involucrarse con ideas conceptuales que subyacen a los procedimientos para completar la tarea satisfactoriamente y así desarrollar la comprensión.

Estos principios forman parte de los aspectos considerados para el diseño de la secuencia de instrucción. En los problemas de generalización se planteó una mayor demanda cognitiva como es la expresión del término general (o regla general), en contraste con lo establecido en el currículo de la educación primaria mexicana.

Los resultados de estas tres revisiones ayudaron a definir aspectos específicos para el diseño de la secuencia de instrucción, la cual es personificada en términos de los participantes, una trayectoria hipotética de aprendizaje y los materiales de instrucción.

4.3.2. Participantes previstos

Una comunidad de aula de quinto de primaria, constituida por un investigador-profesor y un colectivo de estudiantes.

4.3.3. Trayectoria hipotética de aprendizaje

La *trayectoria hipotética de aprendizaje* fue usada como modelo teórico para el diseño de la secuencia de instrucción, estuvo compuesta de un objetivo de aprendizaje, un conjunto de actividades de aprendizaje y un proceso hipotético de aprendizaje (Simon, 2014). El resultado, fue un camino conjeturado por el que los estudiantes progresan en el desarrollo de su pensamiento funcional, asociado con la comprensión de las relaciones funcionales lineales.

El *objetivo de aprendizaje* fue apoyar a los estudiantes en el desarrollo de formas flexibles y productivas de pensamiento funcional, que involucran la comprensión de las relaciones matemáticas entre dos cantidades variables, que van desde relaciones específicas a generalizaciones de esas relaciones en todas sus instancias. En esta instrucción se trabajó con relaciones funcionales lineales cuya expresión algebraica general es de la forma $\mathrm{a_n} = \mathrm{dn} + \mathrm{c}$, donde $\mathrm{c} \neq 0$., en el contexto de problemas de generalización de patrones con distintos tipos de representaciones y condiciones iniciales. Se conjeturó que: 1) en la resolución de los problemas, los estudiantes utilizarían herramientas matemáticas basadas en el uso de pensamiento funcional cada vez más sofisticado, y 2) la actividad matemática individual de los estudiantes sería base para construir razonamiento matemático cada vez más sofisticado a medida que participaran en las prácticas matemáticas en el aula de clases.

El *proceso hipotético de aprendizaje* expresa de forma anticipada cómo el pensamiento y la comprensión de los estudiantes pueden evolucionar cuando las actividades de aprendizaje se implementan en el aula (Simon, 1995 citado en Cobb, 2000). En consideración de que las prácticas matemáticas en el aula son medios potenciales de apoyo para el desarrollo del pensamieto funcional (Markworth, 2010) y de una revisón a la literatura internacional (Radford, 2008; Markworth, 2010; Zapatera, 2018) sobre el proceso (o progreso) de aprendizaje del pensamiento funcional vía la generalización de patrones. En este estudio, se propusieron cinco prácticas matemáticas, basadas de la conjunción de los trabajos de Radford (2008), Markworth (2010) y Zapatera (2018), que los estudiantes podrían experimentar en el trabajo con problemas que promueven pensamiento funcional. Las cuales constituyeron un proceso hipotético de aprendizaje sobre pensamiento funcional:

1) **Extender el patrón.** Identifican y respetan las estructuras espacial y/o numérica del patrón para generar nuevos elementos.
2) **Percibir y registrar un patrón.** Exploran, espacial y/o numéricamente, qué cambia y qué permanece en los elementos de un patrón. Con ello, perciben y expresan lo qué es común entre los elementos de un patrón.
3) **Generalizar aritméticamente.** Generalizan lo qué es común a todos los términos posteriores de un patrón. Usan cantidades determinadas.
4) **Generalizar algebraicamente.** Articulan la relación funcional lineal entre la posición y el patrón, expresan la regla general. Usan cantidades indeterminadas.
5) **Predecir el comportamiento del patrón utilizando la expresión general.** Usan la regla general para el análisis posterior del patrón.

El orden y aparición de estas prácticas, son susceptibles de las variaciones consideradas en el diseño de cada problema de generalización de patrones y de la actividad matemática puesta en juego por los estudiantes participantes durante la aplicación.

El siguiente paso implicó diseñar una secuencia de materiales de instrucción para desarrollar formas flexibles y productivas de pensamiento funcional de los estudiantes al apoyar su proceso de aprendizaje a través de las cinco prácticas matemáticas establecidas.

4.3.4. Materiales de instrucción

Se diseñó una secuencia de materiales de instrucción para usar en una comunidad de aula de quinto grado. El diseño consideró: a) trabajar con problemas de generalización de patrones, b) tratar con patrones en sus diferentes representaciones: figural, numérico y verbal, c) variar las condiciones iniciales de cada problema; y d) contemplar los principios de diseño seleccionados en la revisión a la literatura en investigación en Educación Matemática.

La secuencia de materiales se conformó por cinco problemas de generalización de patrones (Anexo A), diseñados para desarrollarlas en cinco sesiones, cada una de aproximadamente 120 minutos de duración. En la Tabla 4.1 se proporciona información general de la secuencia de instrucción. La tabla incluye el contexto de cada problema, la descripción de la actividad de instrucción, las prácticas matemáticas abordadas en cada problema y las variaciones en las condiciones de los problemas.

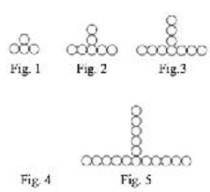
Problema 0. El objetivo es introducir a los estudiantes al trabajo de análisis de patrones y establecer como una norma en el aula de clases a la argumentación. La actividad matemática está dirigida al desarrollo de las dos primeras prácticas matemáticas: extender el patrón y percibir y registrar un patrón.

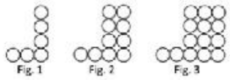
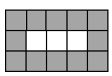
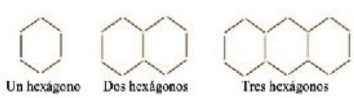
Si bien, este problema no persigue que los estudiantes generalicen, se consideró solicitar términos consecutivos, cercanos, lejanos y el general, por dos razones. La primera para que conozcan y comiencen a familiarizarse con la estructura que implican los problemas de generalización de patrones. La segunda para averigar qué hacen y hasta dónde son capaces de llegar (en un sentido de diagnóstico), así tomar decisiones durante la instrucción. Este problema funciona como punto de partida y sus resultados no son objeto a reportar en esta investigación.

La implementación de este problema, es contemplado en dos momentos, de forma individual y de discusión grupal con toda la clase. En la discusión grupal, el profesor debe promover la participación de los estudiantes con el objetivo de que hagan explícito su razonamiento matemático. El tema de discusión grupal es las múltiples formas de visualizar el patrón.

El patrón inmerso en este problema es retomado de Wilkie y Clarke (2016, p.240) e implica múltiples formas de verlo. La relación funcional involucrada es de la forma general $a_n = 3n + 1$.

Tabla 4.1.
Resumen de la secuencia de materiales de instrucción

Contexto del problema	**Actividad de instrucción**	**Prácticas matemáticas**	**Condiciones del problema**
Problema 0. Analiza la siguiente sucesión de figuras formadas por círculos de igual tamaño. 	Introducir el trabajo de análisis de patrones figurales. Compartir con todo el grupo.	1. Extender el patrón. 2. Percibir y registrar un patrón.	Se presentan los primeros términos de un patrón figural y se demanda determinar términos consecutivos, cercanos, lejanos y el general. Posiciones demandadas: 4, 7, 20, 50, n y 1500. Relación funcional: $a_n = 3n + 1$.

<table>
<tr>
<td>Problema 1. Las figuras de la sucesión siguiente están formadas por círculos de igual tamaño.
</td>
<td>Explorar diferentes formas de extender y generalizar un patrón figural.
Compartir en grupos pequeños y con todo el grupo.</td>
<td>1, 2 y
3. Generalizar aritméticamente.</td>
<td>Se presentan los primeros tres términos de un patrón figural y se solicita determinar términos cercanos y lejanos.
Posiciones demandadas: 5, 9, 12, 100, 2150.
Relación funcional: $a_n = 4n + 2$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Problema 2. Las figuras de una sucesión están formadas por cuadrados blancos y grises del mismo tamaño. Los cuadrados blancos se ubican de forma alineada, en el centro de cada figura y los grises, alrededor de los blancos, como se muestra en seguida.
</td>
<td>Generar el patrón figural y articular una regla general.
Compartir con todo el grupo.</td>
<td>1, 2, 3 y
4. Generalizar algebraicamente.</td>
<td>Se establecen las condiciones de generación de un patrón figural y un ejemplo, y se demanda la construcción de sus primeros términos, así como determinar términos consecutivos, cercanos, lejanos y el general.
Posiciones demandadas: 1, 2, 4, 10, 50, 130, n.
Relación funcional: $a_n = 2n + 6$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Problema 3. Los hexágonos de la sucesión están formados por palillos del mismo tamaño, como

Organiza los datos anteriores en la tabla y complétala.
<table><tr><td>Número de hexágonos</td><td>Cantidad de palillos</td></tr><tr><td>1</td><td></td></tr><tr><td>2
3</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td></tr><tr><td>5
6</td><td></td></tr></table></td>
<td>Transitar de una representación figural a una numérica del patrón, con la intensión de introducir su uso para el análisis y generalización del patrón.
Compartir en grupos pequeños y con todo el grupo.</td>
<td>1, 2, 3 y 4</td>
<td>Se presentan los primeros tres términos de un patrón figural y se solicita organizar los datos en una tabla. Luego se demanda determinar términos consecutivos, lejanos y el general.
Posiciones demandadas: 4, 5, 6, 23, 52, n.
Relación funcional: $a_n = 5n + 1$.</td>
</tr>
</table>

Problema 4. Analiza la siguiente situación y responde lo que se te solicita. Un niño desea ahorrar de forma que cada día ahorre \$3.00. Inicialmente su alcancía tiene \$10.00. 	Analizar un contexto del mundo real de un patrón expresado de forma verbal y establecer su generalización. Compartir con todo el grupo.	3, 4 y 5. Predecir el comportamiento del patrón utilizando la expresión general.	Se proporciona un patrón de forma verbal (ley de recurrencia) y se solicita determinar términos cercanos, lejanos y el general. Posiciones demandadas: 7, 30, 107, n, 365. Relación funcional: $a_n = 3n + 10$.

Problema 1. El objetivo es que los estudiantes exploren diferentes formas de extender y generalizar aritméticamente un patrón figural. La actividad matemática está dirigida al desarrollo de las tres primeras prácticas matemáticas: extender el patrón; percibir y registrar un patrón; y generalizar aritméticamente. Contempla demandar términos cercanos y lejanos.

Dos son los momentos contemplados en la implementación de este problema: en pequeños grupos y de discusión grupal con toda la clase. En la discusión grupal, el profesor debe promover la participación de los estudiantes en la argumentación y guiarlos a discutir sobre las diferentes formas de determinar un término deseado y cuál es el procedimiento (o regla) más eficiente.

El patrón de este problema es una propuesta de este estudio e implica múltiples formas de verlo. La relación funcional involucrada es de la forma general $a_n = 4n + 2$.

Problema 2. Su objetivo es que los estudiantes generen el patrón figural y articulen una regla general. Presenta las condiciones de generación del patrón y un ejemplo, y solicita determinar términos consecutivos, cercanos, lejanos y el general.

La actividad matemática inmersa está dirigida al desarrollo de las cuatro primeras prácticas matemáticas: extender el patrón; percibir y registrar un patrón; generalizar aritméticamente; y generalizar algebraicamente.

En la implementación del problema, se contemplan dos momentos de trabajo: de forma individual y de discusión grupal con toda la clase. Los temas de discusión grupal considerados, son: las múltiples formas de proceder y de mirar el patrón, y las diferentes formas de expresar el término general.

El patrón de este problema es procedente del trabajo de Cañadas (2007, p.209) e implica múltiples formas de verlo. La relación funcional involucrada es de la forma general $a_n = 2n + 6$.

Problema 3. El objetivo es que los estudiantes transiten de una representación figural a una numérica del patrón, con la intensión de introducir su uso para el análisis y generalización del patrón. Presenta los primeros tres términos de un patrón figural y solicita la organización de los datos en una tabla. Después, demanda términos consecutivos, lejanos y el general.

La actividad matemática implicada es el desarrollo de las cuatro primeras prácticas matemáticas: extender el patrón; percibir y registrar un patrón; generalizar aritméticamente; y generalizar algebraicamente.

El trabajo con este problema dentro del aula, se contempla en dos momentos, en pequeños grupos y de discusión grupal con toda la clase. La discusión grupal está planeada para tratar dos temas para argumentar: las múltiples formas de mirar el patrón y la expresión de la regla general.

El tipo de cuestión planteada en este problema fue una adaptación de las propuestas en Tanışlı (2011). El patrón fue retomado de Radford (2010, p. 11) e implíca múltiples formas de verlo. La relación funcional es de la forma general $a_n = 5n + 1$.

Problema 4. El objetivo es que los estudiantes analicen un contexto de situación personal (de ahorro constante) de un patrón expresado de forma verbal y establezcan su expresión general. Este problema presenta el patrón de forma verbal (ley de recurrencia) y solicita determinar términos consecutivos, lejanos y el general.

La actividad matemática inmersa está dirigida al desarrollo de las tres últimas prácticas matemáticas: generalizar aritméticamente; generalizar algebraicamente; y predecir el comportamiento del patrón utilizando la expresión general.

El trabajo con este problema, es considerado en dos momentos, de forma individual y de discusión grupal con toda la clase. Los temas de discusión son: la interpretación/aplicación de la ley de recurrencia y la expresión de la regla general. El patrón presentado en este problema es una propuesta de este estudio y solo implica una forma de ver el patrón. La relación funcional involucrada es de la forma general $a_n = 3n + 10$.

4.3.5. Análisis a priori

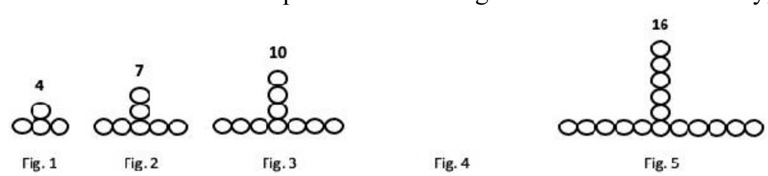
Para establecer las diferentes formas de pensamiento funcional que una comunidad de aula pueden desarrollar ante la implementación de la secuencia de materiales de instrucción de esta investigación, se utilizaron como categorías los modos de analizar patrones y relaciones entre cantidades establecidos por Smith (2008) y retomados por diversos estudios (e.g. Blanton & Kaput, 2005; Tanışlı, 2011; Stephens et al., 2012; Morales et al., 2016) como un marco (Tabla 4.2) para discutir las formas de pensamiento funcional encontrados en estudiantes de primaria ante la resolución de problemas de generalización de patrones.

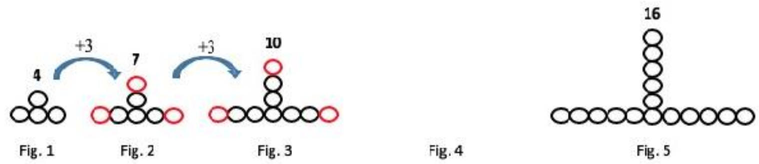
Tabla 4.2.
Modos de analizar patrones y relaciones entre cantidades

Relaciones entre cantidades	**Descripción**
Relación de recurrencia	Se centra en aquel patrón que permite identificar un valor (o varios) dentro de la secuencia de valores de una de las variables, dejando implícita la secuencia de valores de la otra variable (Blanton & Kaput, 2005; Morales et al., 2016). Por ejemplo: *"se le suma una unidad al valor anterior"*
Relación covariacional	Implica identificar cómo cambian las cantidades de ambas variables de forma simultánea y en mantener ese cambio como una parte explícita y dinámica de la descripción de una función (Blanton & Kaput, 2005; Morales et al., 2016). Por ejemplo: *"cuando* n *aumenta en dos,* a_n *aumenta en tres"*
Relación de correspondencia	Se basa en identificar una correlación entre variables, a_n y n (Smith, 2008). Por ejemplo: *"a_n es dos veces* n *más cuatro"*

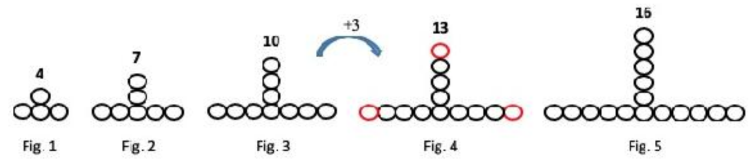
Problema 0. Las diferentes formas de pensamiento funcional que se espera pudieran desarrollarse mediante el análisis y la resolución de este problema, se presentan en la Tabla 4.3.

Tabla 4.3.
Analisis a priori de las formas de pensamiento funcional para el Problema 0

1. Relación de recurrencia
Tipo 1.1. Analizan la cantidad de círculos que forman a las figuras de la sucesión dada y,  reconocen que la diferencia entre pares de cantidades de círculos consecutivos que forman las figuras de la sucesión es común (o constante), aspecto que expresan como: *"la cantidad de círculos va aumentado de tres en tres"*



Para obtener la cantidad de círculos que le corresponde a una figura deseada, suman repetidamente la diferencia común partiendo de la cantidad de círculos que le corresponde a la figura uno (o a una figura dada) hasta la deseada. Su razonamiento se sustenta de un pensamiento aditivo que se aplica de forma iterada hasta obtener la cantidad de círculos de la figura deseada, por ejemplo:



La síntesis del término general es:

A. *“a la cantidad de círculos que forman una figura cualquiera le sumo tres unidades hasta llegar a la cantidad de círculos que forman la figura deseada”*

B. $a_n = a_{n-1} + 3$, donde n es el número de figura, a_n la cantidad de círculos que forma la figura de la sucesión analizada y a_{n-1} la cantidad de círculos que forma la figura anterior a la analizada.

Tipo 1.2. Se basa de ordenar los valores de la cantidad de círculos respecto al número de figura que forman en una representación numérica simple:

$$4, 7, 10, \_\_, 16, \ldots$$

Se reconoce que la diferencia entre dos cantidades de círculos consecutivos es una constante de tres unidades, que expresan como:

$$\overset{+3}{\frown}\ \overset{+3}{\frown}$$
$$4, 7, 10, \_\_, 16, \ldots$$

A. *“la cantidad de círculos va aumentado de tres en tres”*

Para obtener la cantidad de círculos que le corresponde a una nueva figura, el razonamiento se sustenta de un pensamiento aditivo que se aplica de forma recurrente a los valores de la cantidad de círculos, por ejemplo:

$$4, 7, 10, \overset{+3}{\underline{\mathbf{13}}}, 16, \ldots$$

La síntesis del término general es:

B. *“al valor anterior de círculos le sumo tres unidades”*

C. $a_n = a_{n-1} + 3$, donde n es el número de figura, a_n la cantidad de círculos que forma la figura de la sucesión analizada y a_{n-1} la cantidad de círculos que forma la figura anterior a la analizada.

Tipo 1.3. Se basa de ordenar los valores de la cantidad de círculos respecto al número de figura que forman en una representación tabular:

Número de figura	1	2	3	**4**	5
Cantidad de círculos	4	7	10		16

Se reconoce que la diferencia entre dos cantidades de círculos consecutivos es una constante de tres unidades, que expresan como:

Número de figura	1	2	3	**4**	5
Cantidad de círculos	4	7	10		16

+3 +3

A. *“la cantidad de círculos va aumentado de tres en tres”*

Para obtener la cantidad de círculos que le corresponde a una nueva figura, el razonamiento se sustenta de un pensamiento aditivo que se aplica de forma recurrente a los valores de la cantidad de círculos, por ejemplo:

Número de figura	1	2	3	**4**	5
Cantidad de círculos	4	7	10	**13**	16

La síntesis del término general es:

B. *"al valor anterior de círculos le sumo tres unidades"*

C. $a_n = a_{n-1} + 3$, donde n es el número de figura, a_n la cantidad de círculos que forma la figura de la sucesión analizada y a_{n-1} la cantidad de círculos que forma la figura anterior a la analizada.

2. Relación covariacional

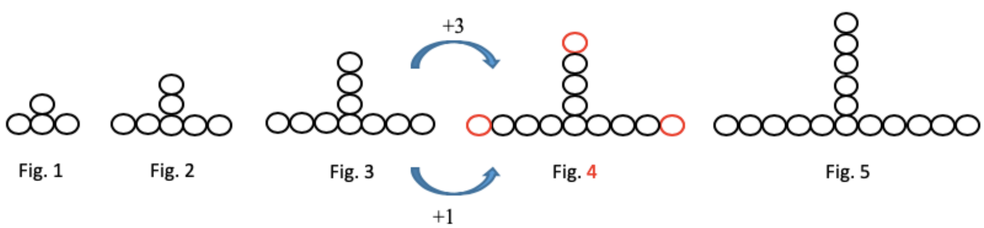
Tipo 2.1. Se basa de analizar la cantidad de círculos respecto al número de figura que forman mediante el uso de la representación figural dada.

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5

Se reconoce que las diferencias entre los valores consecutivos de número de figura son una constante de una unidad, al mismo tiempo que las diferencias entre los valores de las cantidades de círculos son constantes de tres unidades.

A. *"el número de figura va de uno en uno y la cantidad de círculos va de tres en tres"*

Para obtener un valor desconocido, el razonamiento se sustenta de un pensamiento aditivo que se aplica a ambas variables, esto es, al número de figura y a la cantidad de círculos, por ejemplo:



B. *"cuando el número de figura aumenta en uno, la cantidad de círculos aumenta en tres"*

La síntesis del término general es:

C. *"si al número de figura se le suma una unidad, a la cantidad de círculos se le suma tres unidades, y viceversa"*

D. *si* $n = (n-1) + 1$, *entonces* $a_n = a_{n-1} + 3$, donde n es el número de figura, $(n-1)$ es el número de figura anterior a la analizada, a_n la cantidad de círculos que forma la figura analizada y a_{n-1} la cantidad de círculos que forma la figura anterior a la analizada.

Tipo 2.2. Se basan de ordenar el número de figura y la cantidad de círculos, en pares ordenados mediante una representación tabular:

Número de figura	1	2	3	**4**	5
Cantidad de círculos	4	7	10		16

Se reconoce que las diferencias entre los valores consecutivos de número de figura son una constante de una unidad, al mismo tiempo que las diferencias entre los valores de las cantidades de círculos son constantes de tres unidades.

+1 +1

Número de figura	1	2	3	**4**	5
Cantidad de círculos	4	7	10		16

+3 +3

A. *“el número de figura va de uno en uno y la cantidad de círculos va de tres en tres”*

Para obtener un valor desconocido, el razonamiento se sustenta de un pensamiento aditivo que se aplica a ambas variables, esto es, al número de figura y a la cantidad de círculos, por ejemplo:

+1 +1

Número de figura	1	2	3	4	5
Cantidad de círculos	4	7	10	**13**	16

+3 +3

B. *“cuando el número de figura aumenta en uno, la cantidad de círculos aumenta en tres”*

La síntesis del término general es:

C. *“si al número de figura se le suma una unidad, a la cantidad de círculos se le suma tres unidades, y viceversa”*

D. *si* $n = (n-1) + 1$, *entonces* $a_n = a_{n-1} + 3$, donde n es el número de figura, $(n-1)$ es el número de figura anterior a la analizada, a_n la cantidad de círculos que forma la figura analizada y a_{n-1} la cantidad de círculos que forma la figura anterior a la analizada.

3. Relación de correspondencia

Tipo 3.1. Se basan de analizar la estructura del patrón figural, por ejemplo:

La **figura 4** se forma de tres grupos de cuatro círculos y de un círculo central

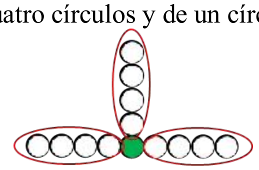


Fig. 4

o la **figura 4** se forma de tres grupos de cuatro círculos y un círculo superior.

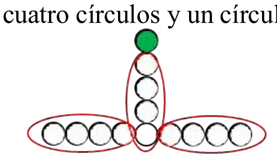


Fig. 4

Estas estructuras multiplicativas, se usan para obtener un valor desconocido de la sucesión, que a la vez se sustenta de un pensamiento multiplicativo, como sigue:

A. Si se conoce el número de figura y se desea determinar la cantidad de círculos que la forman, basta con:

Número de figura

↓

$3 \times \mathbf{4} = 12$

$12 + 1 = \mathbf{13}$ **círculos**

Síntesis del término general:

B. “el número de figura lo multiplico por tres, luego le sumo uno, el resultado es la cantidad de círculos que la forman”

C. $a_n = 3n + 1$, donde n es el número de figura y a_n la cantidad de círculos que forma la figura analizada.

Tipo 3.2. Otra estructura del patrón figural, es:
La **figura 4** se forma de dos grupos de cuatro círculos más uno y de un grupo de cuatro círculo.

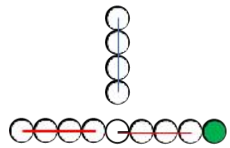


Fig. 4

Esta estructura multiplicativa, se usa para obtener un valor desconocido de la sucesión, que a la vez se sustenta de un pensamiento multiplicativo, como sigue:

A. Si se conoce el número de figura y se desea determinar la cantidad de círculos que la forman, basta con:

Número de figura

$(2 \times 4) + 1 = 9$

$9 + 4 = \mathbf{13\ círculos}$

Número de figura

Síntesis del término general:

B. *"al doble del número de figura le sumo uno, luego le sumo el número de figura, el resultado es la cantidad de círculos que la forman"*

C. *el número de figura lo multiplico por dos, luego le sumo uno, al resultado que me dé le sumo el número de figura, así obtengo la cantidad de círculos que la forman"*

D. $a_n = (2n + 1) + n$, donde n es el número de figura a_n la cantidad de círculos que forma la figura de la sucesión analizada.

Las diferentes formas de pensamiento funcional que pudieran desarrollar los estudiantes mediante el análisis y resolución de los problemas 1 al 4 son presentados en el Anexo B.

4.3.6. Rol del profesor

La responsabilidad del profesor como parte de una comunidad de aula, recae en impulsar el desarrollo de las matemáticas y establecer la argumentación como una norma en el aula de clases (Cobb & Yackel, 1996), es decir, el profesor debe promover que los estudiantes:

1) Compartan las diferentes formas en que proceden, expliquen y justifiquen su razonamiento, den sentido a las explicaciones dadas por los demás, indiquen su acuerdo o desacuerdo, y
2) Compartan y juzguen lo que consideran como una solución matemática diferente, una solución matemática sofisticada y una solución matemática eficiente, y una explicación y justificación matemáticamente aceptable.

Asimismo, el profesor debe fomentar la interacción en el aula de clases, respetando ideas y estableciendo cuestiones para enfocar a los estudiantes en los problemas de generalización de patrones. Algunas cuestiones guía que pudiera usar para enfocar a los estudiantes a explicar su razonamiento sobre la resolución de los problemas y potenciar su participación en la discusión grupal, son:

¿Cómo resolvieron la cuestión # del problema #?
¿Qué hicieron para obtener ese resultado? O ¿Cómo obtuvieron ese resultado?
¿Qué observaron en el patrón o de qué se basaron?
¿Cómo es la figura que le corresponde a la posición #? ¿Por qué tiene que ser así y no de otra forma? ¿Cómo lo determinaste?
¿Cuál es el valor del término que le corresponde a la posición # del patrón? ¿Por qué es ese valor y no otro? ¿Cómo lo determinaste?
¿La figura o valor del término presentado por su compañero corresponde a la posición solicitada? ¿Por qué?
¿Cuántos # debe tener la figura #? ¿Cómo lo determinaste?
¿Explica el procedimiento que seguiste?
¿Qué significa sumarle #?
¿Qué significa multiplicarlo por #?
¿Qué se hace de primero?
¿Alguien más lo hizo (procedio o piensa) así?
¿Quién lo hizo (procedio o piensa) de una forma diferente?
¿Explica la regla que estableciste?
¿Cómo se relaciona el valor del término con el valor de su posición?
¿Cuál regla (o procedimiento) resulta más eficiente para determinar el valor del término que le corresponde a la posición #? ¿Por qué?

Además, su función incluye considerar la trayectoria hipotética de aprendizaje y visualizar la evolución de la actividad matemática de los estudiantes hacia los objetivos de la misma, a través de la actividad en el aula de clases; y gestionar en el aula las dificultades y las limitaciones que experimenten los estudiantes.

Algunas dificultades y limitaciones documentadas por la investigación, que podrían experimentar los estudiantes ante la resolución de los problemas de generalización de patrones, son:

1) El vocabulario matemático necesario para proporcionar explicaciones precisas acerca de un patrón figural, palabras como "fila" y "columna" y describir una matriz como 2 filas por 4 columnas (Warren & Cooper, 2008).
2) Al interpretar los datos, donde únicamente identifican lo que cambia en el patrón, sin percibir lo que no cambia –el valor inicial del patrón– (Cetina-Vázquez y Cabañas-Sánchez, 2019), esto lleva al uso de estrategias, como: recursiva, diferencia, objeto-entero y fragmentar.

3) Fijación de una cierta estrategia y su resistencia a abandonarla (Lee, 1996; Lannin et al., 2006; Zapatera, 2018).
4) Falta de flexibilidad entre estrategias y uso de representaciones (Zapatera, 2018).
5) Usó de un enfoque recursivo para describir generalizaciones (Warren, 2000 citado en Warren & Cooper, 2008).
6) El paso del recuento a la abstracción del patrón (Zapatera, 2018; Carraher et al., 2008).
7) Falta de precisión al expresar verbalmente las generalizaciones (Warren & Cooper, 2008).

4.4. Experimentación en el aula de clases

La segunda etapa del experimento de enseñanza, consistió en la implementación de la secuencia de instrucción en el aula de clases y su análisis continuo.

4.4.1. Implementación de la secuencia de instrucción

La secuencia de instrucción se desarrolló en cinco sesiones de clases (Tabla 4.4), cada una de aproximadamente 120 minutos de duración. Cada sesión, tuvo episodios de trabajo individual y/o grupal, de entrevistas individuales y de discusión grupal con toda la clase. Las entrevistas individuales se usaron para tener mayor información sobre el proceso de razonamiento de cada estudiante durante la resolución de los problemas de generalización de patrones. Y también, para guiar y estructurar las discusiones grupales, de tal forma que durante las entrevistas se ubicaron las soluciones y procedimientos diferentes, y se motivaba a los estudiantes a explicarlos durante los episodios de discusión grupal con toda la clase.

Tabla 4.4**.**
Desarrollo de la secuencia de instruccción en el aula de clase

Sesión de clases	Fecha de ejecusión	Problema abordado
1	17/abril/2018	0
2	19/abril/2018	1
3	24/abril/2018	2
4	26/abril/2018	3
5	13/junio/2018	4

4.4.1.1. Participantes

Una comunidad de aula, constituida por un colectivo de estudiantes y un investigador-profesor, y tres investigadores-observadores.

Estudiantes

Un colectivo de 25 estudiantes, 17 mujeres y 8 hombres (10-11 años de edad), matriculados en quinto grado en la Escuela Primaria Doctor Alfonso G. Alarcón, en Zumpango de los Ríos, Guerrero, México. Este colectivo no había recibido ninguna preparación específica en la resolución de problemas de generalización de patrones. En cambio, había estudiado las propiedades de recurrencia en sucesiones matemáticas con progresión aritmética con números naturales en diferentes representaciones y contextos y las estructuras aditivas y multiplicativas.

Inicialmente, el colectivo estaba conformado por 33 estudiantes, de los cuales fueron elegidos 25, en consideración de al menos uno de los siguientes aspectos: 1) que hayan asistido a todas los sesiones de clases; y/o 2) que hayan participado en uno o más episodios de discusión grupal de alguna sesión de clases. Estos aspectos fueron importantes, ya que permitieron la selección de aquellos estudiantes en los que se podía tener un seguimiento (o un referente) de su desarrollo matemático durante la secuencia de instrucción.

La Escuela Primaria Doctor Alfonso G. Alarcón, fue opción para la experimentación en el aula de clases, debido a que ofreció las condiciones necesarias (como son espacio, tiempo, un colectivo de estudiantes de quinto grado, etc.), para el desarrollo de la secuencia de instrucción. Esta flexibilidad, fue dada por sus directivos, cuyo interés es que la investigación incida en sus aulas de clases, lo cual los ha llevado a una estrecha relación con nuestro grupo de investigación.

Investigador-profesor

La autora de este documento, guió el experimento de enseñanza, en el rol de profesor. Se encargo de: 1) seguir e impulsar el desarrollo de las matemáticas y la interacción en aula de clases, respetando ideas y estableciendo cuestiones para enfocar a los estudiantes en los problemas; 2) gestionar los errores y las dificultades presentes en los estudiantes; 3) orientar a los estudiantes a verificar sus respuestas; y 4) realizar en tiempo real (mientras los niños resolvían los problemas de generalización) entrevistas individuales.

Investigadores-observadores

Tres investigadores participaron como observadores durante el experimento de enseñanza en el aula. Su función fue tomar notas de campo y apoyar al profesor a realizar las entrevistas individuales. También, se encargaron de tomar fotografías a la pizarra y de grabar video durante las discusiones grupales con toda la clase.

4.4.1.2. Intrumentos de recolección de datos

Basados en la resolución de los cinco problemas de generalización de patrones, los datos se recolectaron a través de la producción escrita de los estudiantes, las grabaciones de voz de las entrevistas individuales, fotografías a la pizarra, las grabaciones de video de las discusiones grupales con toda la clase y notas de campo realizadas por los investigadores-observadores.

4.4.2. Análisis continuo

Al término de cada sesión de clases, se realizaron reuniones entre el investigador-profesor y los investigadores-observadores para reflexionar sobre lo acontecido. Así, tomar decisiones sobre el rumbo en el desarrollo del razonamiento y del pensamiento funcional de los estudiantes en las sesiones de clases subsiguientes.

Los puntos de reflexión fueron los éxitos y fracasos sobre cómo los problemas y la instrucción parecieron influir en el desarrollo del razonamiento y del pensamiento funcional de los estudiantes. Ello, en contraste con la trayectoria hipotética de aprendizaje establecida y en las especificidades de este tipo de experimentos de enseñanza en el aula.

Algunas decisiones tomadas en las reuniones, fueron:

1) Los instrumentos de recogida de datos. Siempre solicitar a los estudiantes que explicaran por escrito y verbalmente cómo resolvieron cada cuestión de los problemas.
2) Diseño del material de instrucción. Se identificó que si al inicio se daban todas las cuestiones que conforman los problemas, la participación de los estudiantes en la discusión grupal, se centraba en explicar el producto final de su forma de razonar y no todo el proceso involucrado a lo largo de la resolución del mismo. La medida tomada fue dividir las cuestiones de los problemas en partes que definieran diferentes episodios de trabajo escrito, seguidos de episodios de discusión grupal.

3) Gestión del aula. Los problemas 1 y 3 en su diseño se habían considerado trabajar en pequeños grupos, pero durante la aplicación del problema 1 se observó que la mayoría de los estudiantes trabajaron de forma independiente y al final de su resolución, procedían a contrastar sus resultados con los integrantes de sus equipos. En ese contexto, se decidió que todos los problemas se trabajaran de forma individual y el contraste se realizara en los episodios de discusión grupal con todo la clase.

4.5. Análisis retrospectivo

La última etapa de esta metodología, fue el análisis retrospectivo de todo el conjunto de datos recolectados durante el experimento en el aula. Uno de sus objetivos principales es "colocar los eventos del aula de clases en un contexto teórico más amplio, enmarcándolos como casos paradigmáticos de fenómenos más abarcadores" (Cobb, 2000, p.325-326).

En ese contexto, el análisis retrospectivo se realizó colocando los eventos del aula en la perspectiva sociocultural de aprendizaje de Cobb y Yackel (1996). La cual, sitúa el análisis de la actividad matemática de los estudiantes en el contexto social del aula. Su unidad de análisis es *la participación en la interacción en el aula*, en específico, en la *argumentación.*

Para identificar y caracterizar las ideas matemáticas de los estudiantes individuales, las formas normativas de razonamiento y las prácticas matemáticas en un aula de clases, se adoptó el enfoque analítico de Stephan y Rasmussen (2002) para el análisis de los datos empíricos. En este enfoque, el modelo argumentativo de Toulmin (Figura 4.2) es utilizado para analizar la estructura y las ideas expresadas en la argumentación de los estudiantes y hacer un seguimiento de cómo funcionan estas ideas en el discurso de los estudiantes, con el fin de reconocer aquellas que se convierten en parte de las formas normativas de razonamiento en el aula de clases.

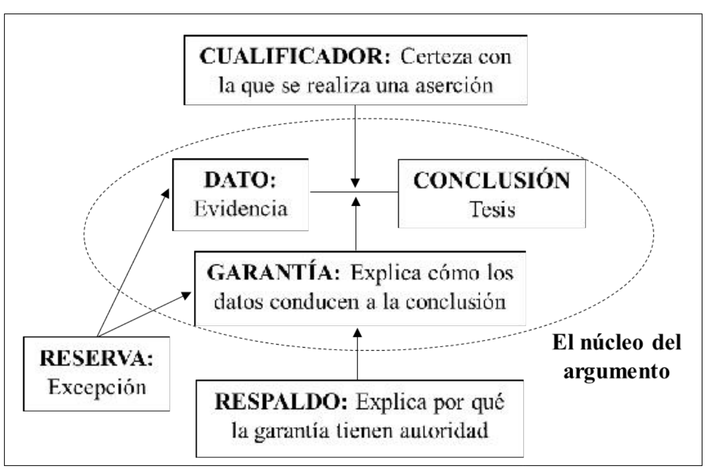


Figura 4.2. Modelo argumentativo de Toulmin. Adapatado de Rasmussen et al. (2015, p.263).

Especialistas en el área (e.g. Rasmussen, Stephan & Allen, 2004; Stephan & Rasmussen, 2002; Rasmussen et al., 2015) han caracerizado la forma en que los argumentos subyacen en la interacción en el aula, es decir, el contexto social del aula. Establecen que un argumento, es desencadenado a partir de una cuestión hecha, en donde un hablante (o hablantes) establece una *conclusión* y presenta pruebas o datos como apoyo a esta afirmación. Los *datos* consisten de hechos o procedimientos que conducen a la conclusión establecida. Para mejorar aún más la fuerza del argumento, quien habla a menudo proporciona una mayor clarificación que conecta los datos con la conclusión, que sirve como una *garantía*, o un conector entre los dos. Por último, un argumento puede incluir también un *respaldo*, lo que demuestra por qué la garantía tiene autoridad para apoyar el par datos-conclusión. El modelo de Toulmin (Toulmin, Rieke & Janik, 1984) también incluye de *cualificadores* (razones que indican el grado de fuerza o probabilidad de la conclusión) y *reservas* (excepciones hacia una afirmación o razón previamente hecha).

El análisis de los datos empíricos transitó por cuatro fases, que consistieron de lo siguiente:

Fase I: Analizar las transcripciones de las discusiones grupales de los problemas 1 al 4 (problemas de interés para el presente estudio) para reconocer y registrar las ideas matemáticas y formas de razonamiento individuales, asociadas con el pensamiento funcional, presentes durante la interacción en el aula y así poderlas seguir en los argumentos codificados.

Fase II: Reconstruir las discusiones grupales de cada uno de los problemas a través del modelo argumentativo de Toulmin (Figura 3.2), cuya estructura básica consiste en *dato, conclusión* y *garantía*. Támbien, incluye *respaldos, cualificadores* y *reservas*. El producto es un conjunto de argumentos codificados. La recopilación de todos los argumentos codificados da como resultado un registro de la argumentación de las cuatro sesiones de discusión grupal.

Fase III: Examinar las sesiones de clases, con base en el registro de la argumentación como datos en sí, con la intención de reconocer qué ideas matemáticas expresadas en los argumentos se convierten en parte de las formas normativas de razonamiento (ideas matemáticas tomadas como compartidas) en el aula de clases. Los criterios utilizados para determinar cuándo una forma de razonamiento se convierte en normativa, son (Stephan & Rasmussen, 2002, p.462):

> **Criterio 1 (C1):** Los respaldos y/o garantías para una conclusión en particular ya no aparecen en las explicaciones de los estudiantes y, por lo tanto, la idea matemática expresada en el núcleo del argumento es evidente por sí misma, o

> **Criterio 2 (C2):** Cualquiera de las cuatro partes de un argumento (dato, garantía, conclusión, respaldo) cambian de posición (es decir, de función) dentro de los argumentos subsiguientes y no son cuestionadas.

Un tercer criterio considerado en esta investigación, es el reportado en un estudio centrado en la documentación de formas particulares de razonamiento que se vuelven parte de las prácticas normativas de un curso universitario en química física (Cole, Becker, Towns, Rasmussen, Wawro & Sweeney, 2012):

> **Criterio 3 (C3):** Cuando una idea particular es usada repetidamente como datos o como garantía para diferentes conclusiones en varios episodios de la clase.

Fase IV. Disponer las ideas matemáticas registradas en la primera fase en relación con las formas normativas de razonamientos constituidas por la comunidad del aula. Asimismo, organizar las formas normativas de razonamiento identificadas en torno a las actividades matemáticas comunes realizadas por los estudiantes. Estas actividades matemáticas son las que se reconocen como prácticas matemáticas en el aula de clases.

Las ideas matemáticas de los estudiantes individuales, las formas normativas de razonamiento y las prácticas matemáticas reportadas en este estudio constituyen la situación local inmediata de la evolución del razonamiento matemático de una comunidad de aula local.

Capítulo 5. Prácticas matemáticas y formas normativas de razonamiento

En este capítulo se describen las prácticas matemáticas y las formas normativas de razonamiento que una comunidad de aula de quinto de primaria evidenció en el trabajo con problemas que promueven pensamiento funcional. Se reconoce, que si bien, no todos los estudiantes participaron activamente durante la interación en el aula, lo que se discutió y se acordó, repercutió en la actividad individual de cada estudiante que perteneció al colectivo.

Las prácticas matemáticas son documentadas como colecciones de formas normativas de razonamiento en torno a una actividad matemática general (Stephan & Rasmussen, 2002; Wawro, 2011; Rasmussen et al., 2015). A su vez, las formas normativas de razonamiento son reportadas como un conjunto de ideas matemáticas individuales asociadas con el pensamiento funcional, caracterizadas por funcionar en el discurso del aula como si todos tuvieran un entendimiento similar, aunque existieran ligeras diferencias individuales en la comprensión.

Las prácticas matemáticas en el aula, las formas normativas de razonamiento y las ideas matemáticas individuales, revelan la evolución del razonamiento matemático de la comunidad de aula estudiada. Asi mismo, manifiestan los cambios en la forma y en la función de cómo razonó la comunidad de aula sobre el pensamiento funcional a lo largo del tiempo.

En adelante es usada la siguiente abreviación:

Práctica Matemática en el Aula (PMA)
Forma Normativa de Razonamiento (FNR)
Forma de Razonamiento Individual (FRI)

5.1. Problema 1

Este problema tuvo como intensión que los estudiantes exploraran diferentes formas de extender y generalizar aritméticamente un patron figural. La discusión grupal fue desarrollada en un solo episodio centrado en debatir sobre las diferentes formas de determinar un término solicitado del patrón figural y cuál forma representa el procedimiento más eficiente.

Las formas de razonamiento individual desarrolladas por la comunidad de aula durante la interacción en el aula del problema 1 son resumidas en la Tabla 5.1. Se presenta como un bosquejo inicial de todas las formas de razonamiento que emergieron a lo largo del discurso del aula, así evidenciar cuáles se convirtieron en normativas y cuáles se abandonaron.

Tabla 5.1.
Formas de razonamiento individual emergentes en el desarrollo del problema 1

Formas de razonamiento individual
FRI1: A la sucesión se le van sumando cuatro
FRI2: Lo que iba haciendo, era cuatro por la figura que era, y se le suman dos
FRI3: Para saber cuántos círculos le corresponden a la figura 5, primero a cinco le resté tres, y me dio dos, ahora a ese dos lo multipliqué por cuatro y me dio ocho, y por último le sumé 14, y me dio 22
FRI4: La cantidad de círculos de la parte inferior son igual al número de figura más dos. Y que en todas las figuras se tenían filas de tres círculos, y las filas iban de acuerdo al número de figura
FRI5: Multipliqué el número de figura por cuatro
FRI6: Para la figura 100, multipliqué la cantidad de círculos que le corresponden a la figura 50 por dos
FRI7: $(2150-3)\cdot 4+14=8602$
FRI8: Para la figura 100, lo que yo hice fue multiplicar 100 por tres, luego, le sumo 100 círculos más dos
FRI9: Multiplicaría el número de figura por cuatro y le sumaría dos

Las prácticas matemáticas en el aula y las formas normativas de razonamiento desarrolladas por la comunidad de aula durante la interacción en el aula del problema 1 son resumidas en la Tabla 5.2. Es durante la explicación de cada forma normativa de razonamiento donde se hicieron explícitas las diferentes ideas matemáticas individuales identificadas en los estudiantes. El conjunto de estos tres aspectos evidencian la evolución del razonamiento matemático de la comunidad de aula de quinto de primaria implicada en el desarrollo del problema 1.

Tabla 5.2.
Evolución del razonamiento matemático colectivo implicado en el desarrollo del problema 1

Prácticas matemáticas en el aula	**Formas normativas de razonamiento**	**Criterio cumplido**
PMA1: Extender, percibir y registrar un patrón	FNR1: A la sucesión se le van sumando cuatro	C3
	FNR2: Lo que iba haciendo, era cuatro por la figura que era, y se le suman dos	C1
	FNR3: Para saber cuántos círculos le corresponden a la figura 5, primero a cinco le resté tres, y me dio dos, ahora a ese dos lo multipliqué por cuatro y me dio ocho, y por último le sumé 14, y me dio 22	C2
	FNR4: La cantidad de círculos de la parte inferior son igual al número de figura más dos. Y que en todas las figuras se tenían filas de tres círculos, y las filas iban de acuerdo al número de figura	C2

PMA2: Generalizar aritméticamente	FNR5: $(2150 - 3) \cdot 4 + 14 = 8602$	C2
	FNR6: Multiplicaría el número de figura por cuatro y le sumaría dos	C1

5.1.1. PMA1: Extender, percibir y registrar un patrón

Esta práctica se identificó con base en el reconocimiento de una actividad matemática invariante de los estudiantes en las cuatro primeras formas normativas de razonamiento:

> FNR1: A la sucesión se le van sumando cuatro.
>
> FNR2: Lo que iba haciendo, era cuatro por la figura que era, y se le suman dos.
>
> FNR3: Para saber cuántos círculos le corresponden a la figura 5, primero a cinco le resté tres, y me dio dos, ahora a ese dos lo multipliqué por cuatro y me dio ocho, y por último le sumé 14, y me dio 22.
>
> FNR4: La cantidad de círculos de la parte inferior son igual al número de figura más dos. Y que en todas las figuras se tenían filas de tres círculos, y las filas iban de acuerdo al número de figura.

La actividad en colectivo estuvo caracterizada por la exploración, espacial y numérica, de los primeros términos del patrón figural, a fin de reconocer qué permanece y qué cambia de un término a otro. Así la práctica consistió en percibir y registrar lo que es común entre los elementos de un patrón, a fín de establecer procedimientos viables para extenderlo y generar nuevos términos, en su mayoría, términos consecutivos y cercanos. Los razonamientos matemáticos de los estudiantes fueron soportados por argumentos figurales y numéricos. Por consiguiente, en esta práctica mayormente se hizo uso de argumentos intuitivos y basados en el contexto del problema.

5.1.1.1. FNR1: A la sucesión se le van sumando cuatro

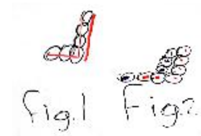
Esta idea matemática surgió entre los estudiantes como el producto de una primera exploración a los términos dados del patrón figural. En donde reconocieron qué permanece y qué cambia de un término a otro. El primer argumento relevante para FNR1, ocurrió cuando Yahir explicó a la clase (extracto 1-6) qué fue lo que realizó en el problema. Su argumento (Figura 5.1) se proporciona como evidencia de una de las formas de cómo es percibido y registrado lo que es común entre los términos de un patrón.

1. Profesor: Yahir, ¿Qué fue lo que hiciste en el problema?
2. Yahir: <u>Fui sumando las figuras</u>, por ejemplo, la figura 1 [dibuja en la pizarra la figura 1]

Fig 1

<u>Ésta es la figura 1, y es casi igual que la figura 2</u>

3. Profesor: ¿Por qué "casi igual"?
4. Yahir: Es que es como si pusiera la figura 1 y se le agrega cuatro círculos [dibuja en la pizarra la figura 2]



5. Profesor: ¿Dónde miraste eso de "casi igual"?
6. Yahir: ¡Ah! Es que aquí es lo mismo, es como la figura 1 [marca con rojo los círculos que el mira "como la figura 1" en la figura 2]. Es que aquí tiene los mismos [señala la figura 1 y los círculos que el señalo con rojo en la figura 2] éstos [círculos señalados con rojo en la figura 2] son éstos [círculos de la figura 1] y aquí le vas aumentando cuatro círculos [marca con un punto negro los cuatro círculos restantes de la figura 2]

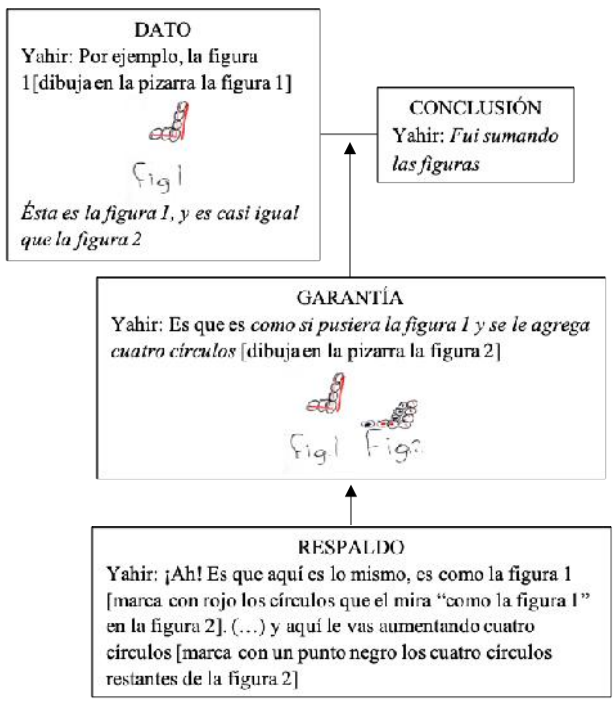


Figura 5.1. Argumento 1. Yahir describe lo primero que realizó en el problema.

El razonamiento seguido por Yahir para extender el patrón, se sustentó de una estructura aditiva soportada por el tipo de pensamiento operacional aditivo. El pensamiento aditivo (según Vergnaud, 1988; 1990) es asociado con aquella forma de pensar orientada a estructurar una situación problemática en términos de una adición, una sustracción o una combinación de tales operaciones. En ese contexto, Yahir hace mención que para generar un nuevo término (figura), basta con poner el término anterior y agregarle (o sumarle) cuatro unidades, en este caso, cuatro círculos. Este tipo de pensamiento es aplicado desde un contexto figural (contexto del problema).

Esta misma forma de razonar fue compartida por Brenda en la discusión grupal (extracto 39-42) desde un análisis del contexto numérico del patrón. En su argumento (Figura 5.2) presenta como tesis (CONCLUSIÓN) una lista numérica con las correspondencias entre los valores de número de figura y cantidad de círculos que la forman. Da como evidencia (DATO) la regularidad observada entre los términos del patrón, la cual usa para explicar cómo generó la lista numérica (GARANTÍA).

39. Profesor: Muéstranos lo que realizaste
40. Brenda: [Escribe en la pizarra]

3-14
4-18
5-22

Lo que hice fue ir sumando los cuatro

41. Profesor: Explícanos esos números que nos pones
42. Brenda: En la figura 3 vi que se le van sumando cuatro, bueno, vi que a la sucesión se le van sumando cuatro. Así que para la figura 4 serían 18, y para la figura 5 serían 22 círculos

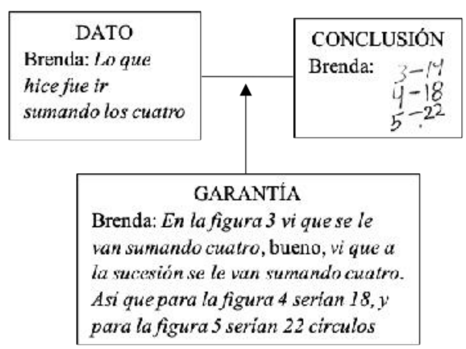


Figura 5.2. Argumento 2. Brenda describe la regularidad numérica observada.

A lo largo de la interacción en el aula esta forma de razonar fue evolucionando hasta reconocerse como “cuatro, que es la constante de la sucesión” . Idea usada por Fanny como DATO 4 en uno de sus argumentos (Figura 5.3) que formó parte de un argumento global (Figura 5.6) donde estableció una nueva regularidad entre los elementos del patrón. Evidencia que esta forma de razonar se convirtió en normativa para la comunidad del aula, ya que, estuvo funcionando repetidamente como DATO y/o GARANTÍA para diferentes CONCLUSIONES (Argumentos 1, 2 y 3). Así, cumplió el C3 y se convirtió en la *FNR1: A la sucesión se le van sumando cuatro*.

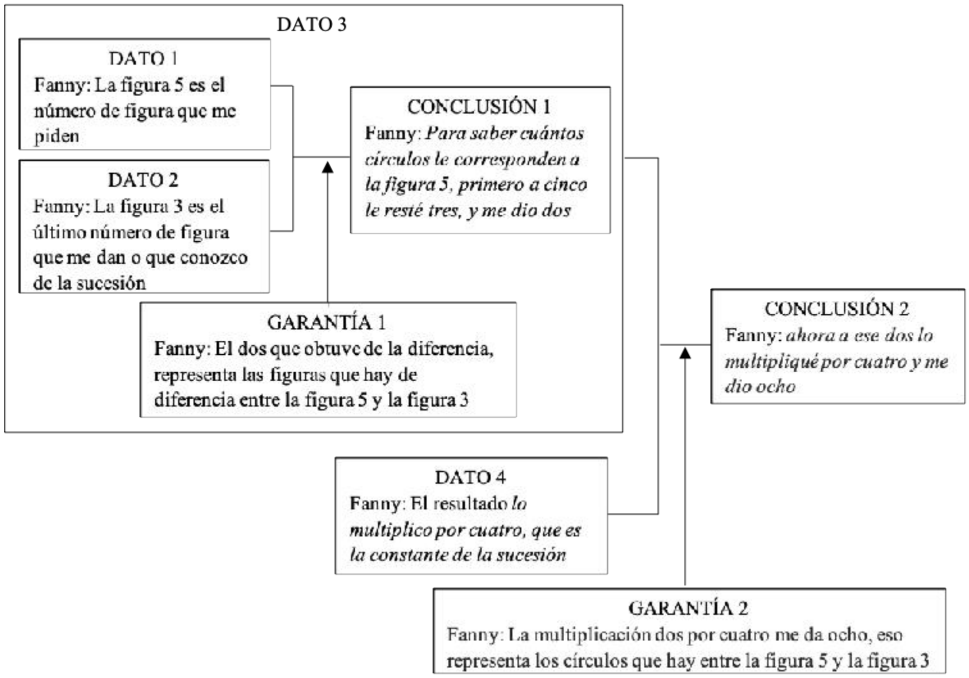


Figura 5.3. Argumento 3. Fanny usa como dato la regularidad observada para establecer un nuevo patrón.

La FNR1 fue expresada bajo diferentes ideas matemáticas individuales a lo largo de la interacción en el aula. En la Tabla 5.3 son resumidas las ideas para revelar la evolución que tuvo en su proceso de consolidación como FNR.

Tabla 5.3.
Evolución del razonamiento matemático individual asociada con la FNR1

Ideas matemáticas individuales asociadas con la FNR1 en el desarrollo del problema 1
• Fui sumando las figuras [Yahir, 2]
• Ésta es la figura 1, y es casi igual que la figura 2 [Yahir, 2]
• Como si pusiera la figura 1 y se le agrega cuatro círculos [Yahir, 4]

• Para la figura 5, igual dibujé (…) puse la figura 4 y agregué cuatro círculos [Yahir, 10]

• Iba haciendo la figura e iba sumando [Yahir, 12]
• Iba sumando cuatro a la cantidad de círculos anterior. Que es como si fuera la misma figura y le sumo cuatro círculos [Yahir, 18]
• Para la figura 3, es como si tuviera la figura 2 más cuatro [Yahir, 18]
• Para ver cuántos círculos necesitaba la figura 5, fue que de la figura 3 se le iban sumando cuatro hasta llegar a la figura 5 [Brenda, 38]

- Lo que hice fue ir sumando los cuatro [Brenda, 40]

  3 – 14
  4 – 18
  5 – 22

- Vi que a la sucesión se le van sumando cuatro. Así que para la figura 4 serían 18, y para la figura 5 serían 22 círculos [Brenda, 42]
- A la sucesión se le van sumando cuatro círculos [Brenda, 62]
- Cuatro, que es la constante de la sucesión [Fanny, 80]

5.1.1.2. FNR2: Lo que iba haciendo, era cuatro por la figura que era, y se le suman dos

Surgió cuando Xavier compartió con la clase (extracto 19-22) una forma diferente (a la expuesta por Yahir) de analizar el patrón figural del problema. Su razonamiento estuvo centrado en el examen coordinado de la estructura espacial y numérica de los primeros términos dados del patrón figural, donde extrajo una relación entre el patrón y su posición, basada en una estructura multiplicativa soportada por el tipo de pensamiento operacional multiplicativo, que consiste en esa forma de pensar que puede estructurar una situación problemática mediante una multiplicación, una división o una combinación de esas operaciones (Vergnaud, 1988; 1990).

La relación extraída resultó de identificar qué cambia y qué permanece en todos los términos conocidos. Él reconoció que en todas las figuras:

1) Cambia fisicamente "lo que está junto" y que numéricamente puede ser traducido como "cuatro por la figura que era"; y
2) Permanece físicamente "lo que esta separado" traducido numéricamente como "y se le suman dos".

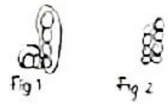
Esta relación fue usada en el Argumento 4 (Figura 5.4) como DATO 5 para dar evidencia de la CONCLUSIÓN 5 que fue la estructura espacial de la figura 2. Al ser el primer argumento compartido sobre esta forma de razonar, Xavier se vio en la tarea de justificar paso por paso su razonamiento, de ahí que el Argumento 4, resulte una concatenación de argumentos.

19. Profesor: ¿Alguien hizo algo similar o diferente?

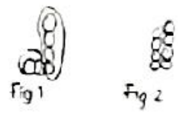
(…)

22. Xavier: [Pasa y dibuja en la pizarra la figura uno y luego coloca las etiquetas de Fig. 1 y Fig.2]

Lo que iba haciendo, era cuatro [encierra los cuatro círculos distribuidos espacialmente de forma vertical en la figura uno dibujada en la pizarra] por la figura que era, por ejemplo aquí [señala la etiqueta de Fig.2] la figura es dos, por dos, cuatro por dos son ocho [encima de la etiqueta Fig. 2, dibuja ocho círculos distribuidos espacialmente en dos columnas de a cuatro círculos],



y se le suman dos [señala y encierra los dos círculos restantes de la figura uno], que son éstos que están separados [vuelve a señalar los dos círculos en la pizarra]



y se le suma uno, dos [dibuja dos círculos más a la figura dos, mientras dibuja él cuenta].

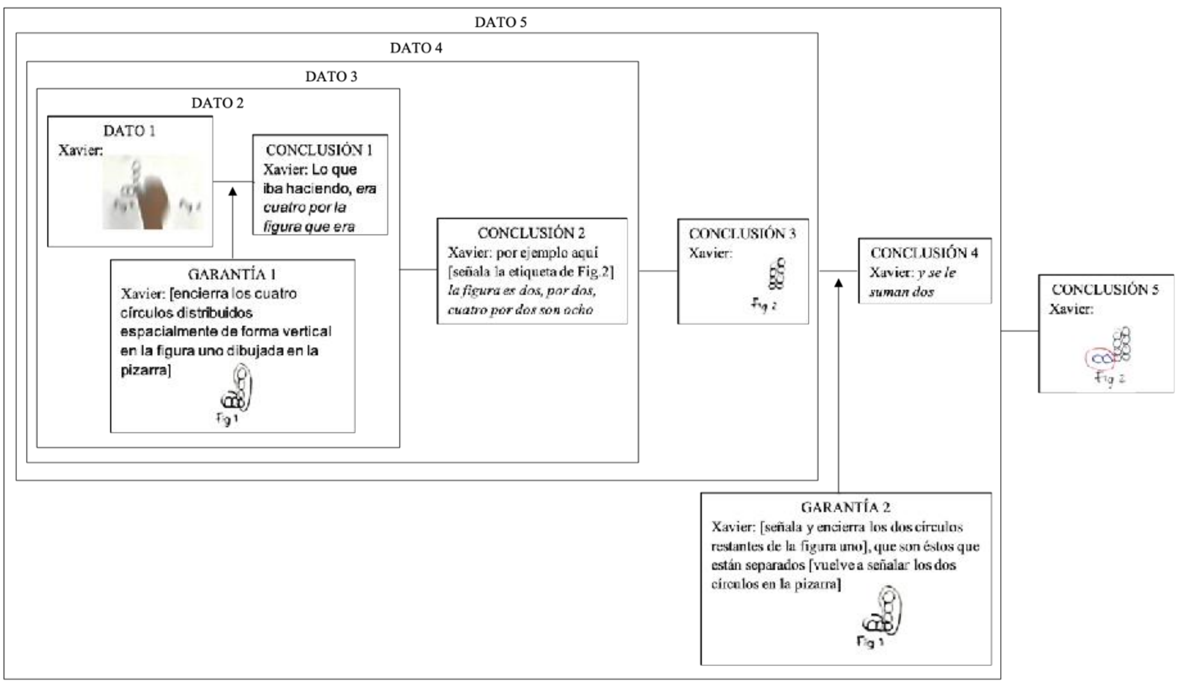
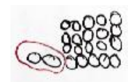


Figura 5.4. Argumento 4. Xavier presenta y usa la relación identificada entre el patrón y su posición.

Xavier continuó su explicación de cómo estructuró figuralmente los términos que le corresponden a las figuras 3 y 5 del patrón. Se presenta su explicación (continuación del extracto 22) expuesto a la clase para el caso particular de la figura 5. La Figura 5.5 presenta la reconstrucción de su argumento. Establece como tesis (CONCLUSIÓN) la estrucutra física del patrón de la figura 5 y usa como evidencia (DATO) la relación establecida entre el patrón y su posición. Suprimiendo las garantías que en argumentos anteriores (e.g. Argumento 4) había compartido. Evidencia que se cumplió con C1 y se constituyó la *FNR2: Lo que iba haciendo, era cuatro por la figura que era, y se le suman dos*.

22. Xavier: (…) Para la figura cinco, nada más hice cuatro por cinco igual a 20 [dibuja en la pizarra 20 círculos distribuidos espacialmente en cuatro columnas de a cuatro círculos],

y aquí solo se le aumentaban dos. Uno, dos [dibuja y va contando los círculos, al final los encierra].



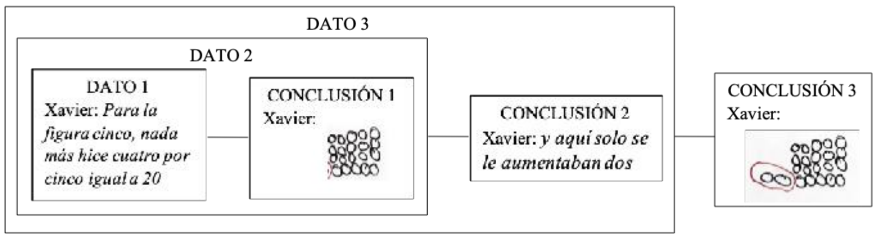
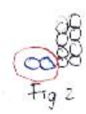


Figura 5.5. Argumento 5. Xavier usa la relación identificada para determinar un término cercano.

La FNR2 fue expresada bajo diferentes ideas matemáticas individuales durante la interacción en el aula, mismas que soportan su evolución individual (Tabla 5.4).

Tabla 5.4.
Evolución del razonamiento matemático individual asociada con la FNR2

Ideas matemáticas individuales asociadas con la FNR 2 en el desarrollo del problema 1
• Lo que iba haciendo, era cuatro por la figura que era, por ejemplo aquí, la figura es dos, por dos, cuatro por dos son ocho, y se le suman dos [Xavier, 22] 
• En la figura tres, es tres por cuatro igual a doce, y se le aumentan dos [Xavier, 22] 
• Para la figura cinco, nada más hice cuatro por cinco igual a 20, y aquí solo se le aumentaban dos [Xavier, 22] 

5.1.1.3. FNR3: Para saber cuántos círculos le corresponden a la figura 5, primero a cinco le resté tres, y me dio dos, ahora a ese dos lo multipliqué por cuatro y me dio ocho, y por último le sumé 14, y me dio 22

Esta forma de razonar es compartida a la clase por Fanny (extracto 70-86), quién desde una representación númerica de los primeros términos del patrón, percibe y registra una nueva relación, basada en la coordinación de la diferencia entre los valores de las posiciones (conocida y deseada) y de la diferencia entre los valores de sus términos. Producto de conectar: los datos conocidos (14 es la cantidad de círculos que constituyen la figura 3); la regularidad del patrón establecida en FNR1 (cuatro es la constante de la sucesión) y los datos deseados (cantidad de círculos que constituyen la figura 5). La reconstrucción de su argumento es presentada en la Figura 5.6. Observése que el DATO dado es una concatenación de argumentos que sustentan cada paso de la nueva relación registrada de forma verbal. La CONCLUSIÓN es el registro numérico de la dicha relación, la cual es planteada para el caso específico de la figura 5.

70. Fanny: Para saber cuántos círculos le corresponden a la figura 5, primero a cinco le resté tres, y me dio dos, ahora a ese dos lo multipliqué por cuatro y me dio ocho, y por último le sumé 14, y me dio 22

$$\begin{array}{r} 5 \\ -3 \\ \hline 2 \\ \times 4 \\ \hline 8 \\ +14 \\ \hline 22 \end{array}$$

71. Profesor: ¿Ese procedimiento para qué número de figura es?
72. Fanny: Para la figura 5
73. Profesor: ¿Qué representa ese número cinco?
74. Fanny: Es el número de figura que me piden
75. Profesor: Y el tres
76. Fanny: Es el último número de figura que me dan o que conozco de la sucesión
77. Profesor: ¡Ah!, es el último número de figura que se te dio [en el problema] de la sucesión
78. Fanny: Sí, la figura 3
79. Profesor: Entonces haces la diferencia, ¿y luego?
80. Fanny: El resultado lo multiplico por cuatro, que es la constante de la sucesión
81. Profesor: ¿Qué valor multiplicas por cuatro?
82. Fanny: El dos que obtuve de la diferencia, representa las figuras que hay de diferencia entre la figura 5 y la figura 3. La multiplicación dos por cuatro me da ocho, eso representa los círculos que hay entre la figura 5 y la figura 3.
83. Profesor: Y luego, ¿qué más haces?
84. Fanny: Le sumo 14, 14 es la cantidad de círculos que hay en la figura 3. Entonces, ocho más 14 me da 22, que representan los círculos que hay en la figura 5
85. Profesor: ¿Les dio el mismo resultado para la figura 5?
86. Estudiantes: Si, da 22

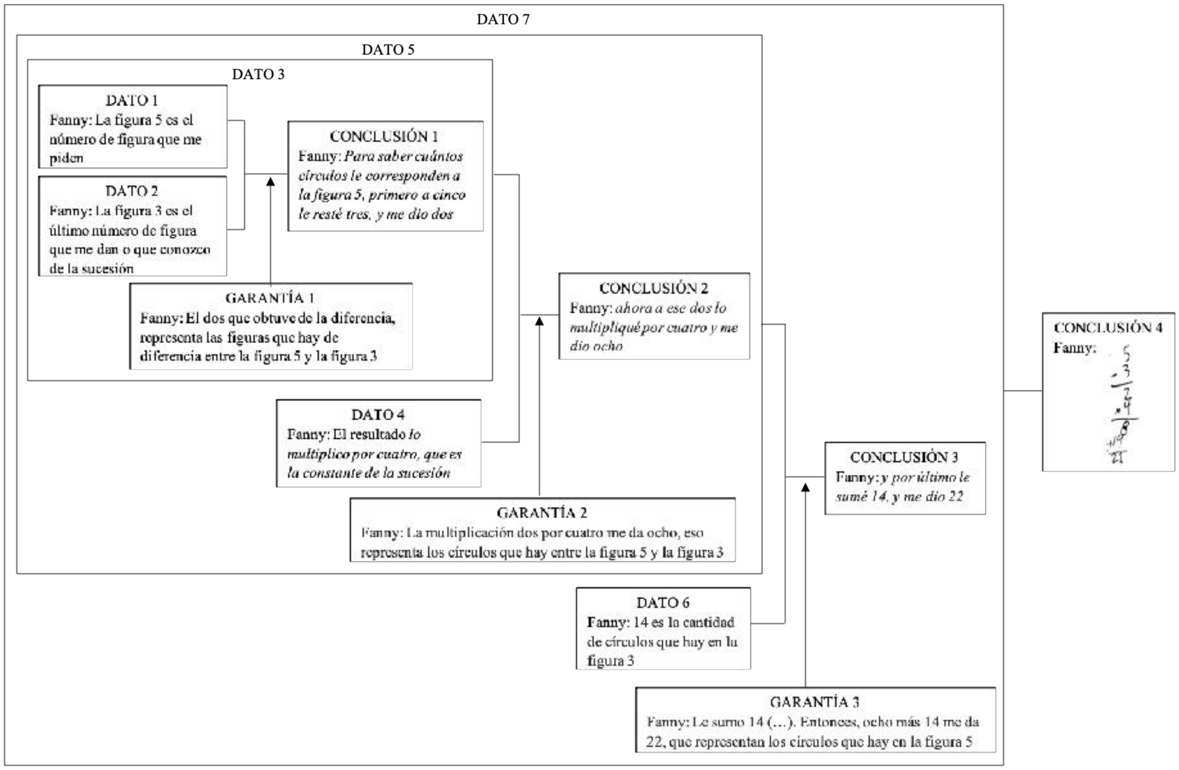
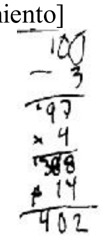


Figura 5.6. Argumento 6. Fanny establece una nueva relación basada en la representación numérica del patrón.

La discusión continuó (extracto 87-88) y el profesor cuestionó a Fanny sobre lo que hizo para determinar la cantidad de círculos que se necesitan para formar la figura 100. Al respecto, Fanny compartió su forma de proceder (CONCLUSIÓN), como el resultado de aplicar la relación numérica registrada para el caso de la figura 5 (DATO), pero ahora, para el caso específico de la figura 100. Su argumento es reconstruido en la figura 5.7.

87.	Profesor:	Ok. Fanny muéstranos qué hiciste para la cantidad de círculos que se necesitan para formar la figura 100
88.	Fanny:	[Escribe en la pizarra su procedimiento]



La evidencia empírica de que la idea matemática inmersa en el núcleo del Argumento 7 (figura 5.7) fue tomada como compartida por la comunidad del aula, es que el DATO presentado no fue cuestionado por alguno de sus integrantes. Además que, tuvo la función de CONCLUSIÓN en el Argumento 6. Así se satisfizo con C2 y se estableció la *FNR3: Para saber cuántos círculos le corresponden a la figura 5, primero a cinco le resté tres, y me dio* *dos, ahora a ese dos lo multipliqué por cuatro y me dio ocho, y por último le sumé 14, y me dio 22.*

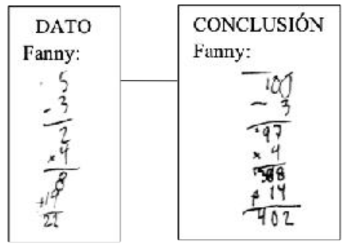
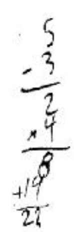


Figura 5.7. Argumento 7. Fanny usa la relación específica establecida para un término posterior del patrón.

Se infiere que, los integrantes de esta comunidad, no refutaron la forma de proceder de Fanny (Argumento 6), ya que al parecer (extracto 84-86), les resultó basto que sus resultados sean iguales para aceptarla como una forma matemáticamente válida, cuyo uso en argumentos posteriores (Argumento 7) no requirió de justificación.

La FNR3 fue sustentada de una idea matemática individual (Tabla 5.5) presente en la interacción en el aula que presume ser una sofisticación de las ideas matemáticas individuales que conformaron a la FNR1.

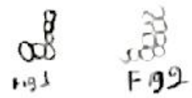
Tabla 5.5.
Evolución del razonamiento matemático individual asociada con la FNR3

Idea matemática individual asociada con la FNR3 en el desarrollo del problema 1
• Para saber cuántos círculos le corresponden a la figura 5, primero a cinco le resté tres, y me dio dos, ahora a ese dos lo multipliqué por cuatro y me dio ocho, y por último le sumé 14, y me dio 22 [Fanny, 70] 

5.1.1.4. FNR4: La cantidad de círculos de la parte inferior son igual al número de figura más dos. Y que en todas las figuras se tenían filas de tres círculos, y las filas iban de acuerdo al número de figura

Una última formar de razonar que formó parte de la PMA1, fue compartida al final de la discusión grupal del problema 1. Se hizo presente por dos estudiantes (Nadia y Mauro) quienes en conjunto explicaron y justificaron la regularidad observada en los primeros términos del patrón. Su razonamiento se basó en el examen coordinado de la estructura espacial y númerica del patrón, donde percibieron que cada término del patrón está constituida de una parte inferior “la cantidad de círculos de la parte inferior son igual al número de figura más dos" y una superior "se tenían filas de tres círculos, y las filas iban de acuerdo al número de figura". Esta regularidad fue expresada por primera vez por Nadia (extracto 102) ante el cuestionamiento del profesor ¿Alguna forma diferente de proceder?. En ese proceso, ella (Figura 5.8) presentó como CONCLUSIÓN una afirmación asociada a la regularidad percibida en los primeros términos del patrón. Como DATO manifestó los primeros dos términos del patrón y de GARANTÍA señaló en los términos la regularidad percibida. Nótese que esta primera expresión de la idea matemática resultó un tanto imprecisa. Sin embargo, en el trayecto de la discusión fue concretándose.

102. Nadia: [Dibuja en la pizarra]



De lo que nos dimos cuenta, es que en cada una de las figuras [en su parte inferior], se tiene [la misma cantidad de círculos que el número de figura con] dos aumentados, y que [su parte superior la puedo descomponer en filas], las filas son igual en cantidad que el número de figura [lo señala en la pizarra]

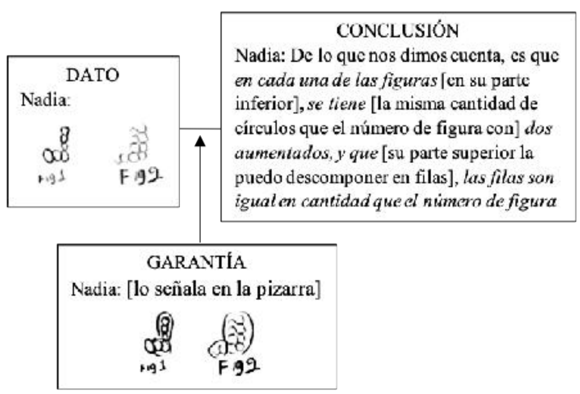


Figura 5.8. Argumento 8. Nadia comparte una primera idea de la regularidad observada en los términos de un patrón figural.

Para precisar la idea matemática inmersa en el razonamiento de Nadia, el profesor continuó la discusión (extracto 129-132) con la siguiente cuestión ¿qué más observaron?. Fue en ese momento que Mauro se hizo presente y en conjunto con Nadia presentaron una idea matemática más robusta de la regularidad observada. El Argumento 9 (Figura 5.9) presenta la función de las afirmaciones establecidas por estos dos integrantes de la comunidad del aula. Ellos establecieron como una primera tesis (CONCLUSIÓN 1 Y 2) la regularidad observada mediante un registro verbal. Seguidamente, esas conclusiones registradas en un argumento previo, las usaron como DATO para el estableciemiento de una nueva tesis

(CONCLUSIÓN 3) que consistió en el uso de la relación para expresar el caso específico de la figura 2. Evidencia empírica que se cumplió con C2 y se constituyó la *FNR4: La cantidad de círculos de la parte inferior son igual al número de figura más dos. Y que en todas las figuras se tenían filas de tres círculos, y las filas iban de acuerdo al número de figura.*

129. Profesor: ¿Qué más observaron?
130. Mauro: Que se le aumentan dos a los círculos de abajo [señala los círculos de la parte inferior de la figura 3 de la pizarra], que la cantidad de círculos de la parte inferior son igual al número de figura más dos [señala en la pizarra para la figura 3]
131. Nadia: Y que en todas las figuras se tenían filas de tres círculos, y las filas iban de acuerdo al número de figura.
132. Mauro: Por ejemplo, para la figura 2, para la parte superior, son dos por tres, son dos filas por tres círculos que tiene cada fila, y en la parte inferior, lo que observamos, es que se van agregando dos, es decir, que tengo la misma cantidad de círculos que el número de figura más dos, por ejemplo, en la figura 2, tengo dos círculos y le agregó dos en la parte inferior.

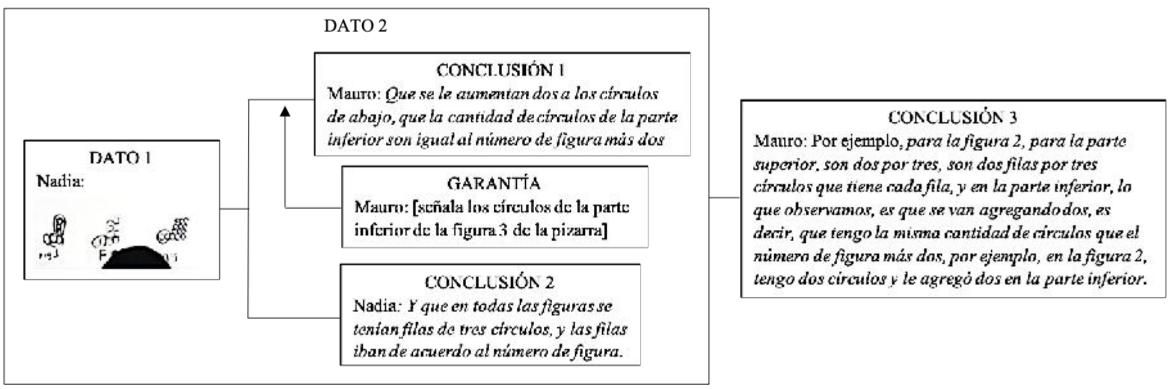


Figura 5.9. Argumento 9. Mauro y Nadia presentan una idea más concreta de la regularidad observada en los términos del patrón figural.

Esta FNR4 fue expresada bajo diferentes ideas matemáticas individuales a lo largo de la interacción en el aula. En la Tabla 5.6 son resumidas las ideas y se presenta la evolución que tuvo en su proceso de consolidación como FNR. Cabe resaltar, que esta idea matemática tuvo indicios de trascender a una generalización aritmética (última idea presentada en la tabla). Sin embargo, no hubo evidencia de su futura normatividad para con la comunidad de aula, por tanto, esta idea fue abandonada.

Tabla 5.6.
Evolución del razonamiento matemático individual asociada con la FNR4

Ideas matemáticas individuales asociadas con la FNR4 en el desarrollo del problema 1
• En cada una de las figuras, se tiene dos aumentados, y que, las filas son igual en cantidad que el número de figura [Nadia, 102]. Hay (…) filas de tres círculos [Nadia, 114] 

- Aquí se le van aumentando dos y las filas son de acuerdo al número de figura, aquí es la figura 3, entonces son tres filas [Nadia, 122]. En cada figura se tenían filas con tres círculos [Mauro, 126]

- Que la cantidad de círculos de la parte inferior son igual al número de figura más dos [Mauro, 130]. Y que en todas las figuras se tenían filas de tres círculos, y las filas iban de acuerdo al número de figura [Nadia, 131]
- Para la figura 2, para la parte superior, son dos por tres, son dos filas por tres círculos que tiene cada fila, y en la parte inferior, lo que observamos, es que se van agregando dos, es decir, que tengo la misma cantidad de círculos que el número de figura más dos, por ejemplo, en la figura 2, tengo dos círculos y le agregó dos en la parte inferior [Mauro, 132].
- Para la figura 100, yo me di cuenta que la figura 3 tiene tres filas con tres círculos, entonces lo que yo hice fue multiplicar 100 por tres, porque en cada fila hay tres círculos, y me da 300, luego, le sumo 100 círculos más dos, qué es 102, qué es el número de figura más dos, sumo todo y en total me da 402 [Mauro, 134]

$300 + 102 = 402$

100×3

5.1.2. PMA2: Generalizar aritméticamente

Esta práctica se detectó a partir de la actividad matemática común de los estudiantes en las dos últimas formas normativas de razonamiento:

FNR5: $(2150 - 3) \cdot 4 + 14 = 8602$.
FNR6: Multiplicaría el número de figura por cuatro y le sumaría dos.

Esta actividad estuvo compuesta de razonamientos orientados a generalizar lo qué es común a todos los términos posteriores de un patrón. Con base en el uso de cantidades determinadas, es decir, términos k-ésimos. La práctica consistió en el uso de los patrones establecidos en la PMA1, para generar términos lejanos. Así elegir de entre todos, el más eficiente. Los razonamientos matemáticos de los estudiantes fueron soportados por argumentos numéricos (aritmética básica). Se caracterizó por el uso de argumentos matemáticos que conectan lo numérico con el contexto del problema, y viceversa.

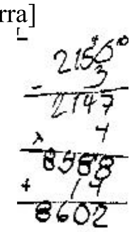
5.1.2.1. FNR5: $(2150 - 3) \cdot 4 + 14 = 8602$

Esta forma normativa, fue el resultado de abstraer numéricamente la relación establecida en la FNR3 y de usarla para determinar términos lejanos de un patrón. Un argumento relevante para esta idea matemática, ocurrió cuando Fanny expuso a la clase (extracto 91-96) qué fue lo que realizó para obtener la cantidad de círculos necesarios para formar la figura 2150. Su argumento (Figura 5.10) se proporciona como evidencia empírica de:

a) Las relaciones numéricas establecidas para determinar casos específicos que presumen ser términos lejanos del patrón;
b) El uso de un argumento previo, como evidencia (DATO 2) para nuevas afirmaciones (CONCLUSIÓN 2), sin ser cuestionado.

Fue así, como la idea matemática caracterizada como: $(2150-3)\cdot 4+14=8602$, cumplió con C2 y se estableció como la *FNR5*.

91. Profesor: Y qué hiciste para obtener la cantidad de círculos necesarios para formar la figura 2150
92. Fanny: Hice lo mismo [escribe en la pizarra]



93. Profesor: ¿Cuánto te da?
94. Fanny: 8602
95. Profesor: ¿Qué opinas de su procedimiento?
96. Sergio: Que sí obtiene los resultados correctos o esperados

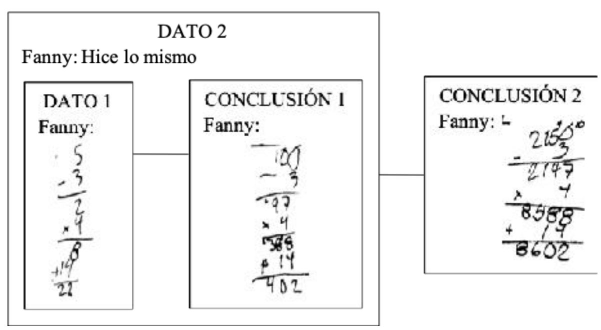
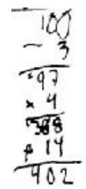
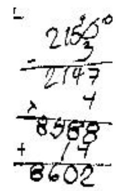


Figura 5.10. Argumento 10. Fanny usa la FNR3 para expresar su registro numérico y determinar un término lejano del patrón.

De nueva cuenta, surgió certeza que, los integrantes de esta comunidad, no cuestionaron la forma de proceder de Fanny, ya que al parecer (extracto 95-96), les resultó basto que sus resultados sean iguales para aceptarla como una forma matemáticamente válida, cuyo uso en sus argumentos (Argumento 7 y 8) no requiere de justificación.

La FNR5 fue expresada bajo diferentes ideas matemáticas individuales a lo largo de la interacción en el aula. En la Tabla 5.7 son resumidas las ideas y se evidencia su evolución.

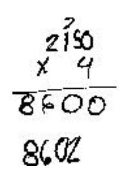
Tabla 5.7.
Evolución del razonamiento matemático individual asociada con la FNR5

Ideas matemáticas individuales asociadas con la FNR5 en el desarrollo del problema 1
• [Fanny, 88] 
• [Fanny, 92] 

5.1.2.2. FNR6: Multiplicaría el número de figura por cuatro y le sumaría dos

Esta idea matemática fue el producto de abstraer numéricamente la relación establecida en la FNR2 y de usarla para determinar términos lejanos del patrón. Se reconoció como la más usada por la comunidad en el desarrollo y resolución del problema 1. Un argumento relevante para esta forma de razonar, ocurrió cuando Xavier presentó a la clase (extracto 26-27) qué fue lo que realizó para obtener la cantidad de círculos necesarios para formar la figura 2150. Su argumento (Figura 5.11) se proporciona como evidencia empírica del uso de la relación establecida en la FNR2 (DATO) en un registro numérico para determinar términos lejanos del patrón (CONCLUSIÓN). Cabe resaltar que en el extracto 26-27 el estudiante no hizo referencia a la idea matemática establecida en la FNR2, pero es en la discusión subsiguiente (extracto 27-36) donde evidenció que el establecimiento de este tipo de relación matemática específica fue basada de la relación observada en los primeros términos del patrón figural. De ahí, que se haya tomado como DATO la FNR2.

26. Profesor: Haz para la figura 2150 para comparar los resultados con los de Yahir
27. Xavier: Este sería el resultado,



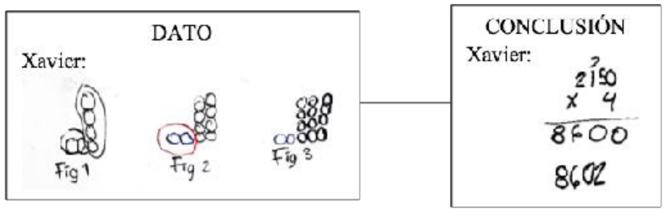
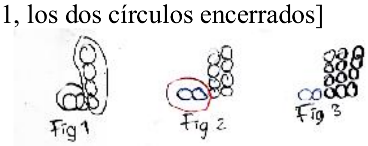


Figura 5.11. Argumento 11. Xavier aplica la relación de la FNR2 en un registro numérico para un término lejano del patrón.

Lo que se desea resaltar con el Argumento 11 (Figura 5.12), es que reveló que la idea matemática inmersa se tomó como compartida desde este momento al cumplir con C1: Las garantías para una conclusión en particular no aparecen en la explicación, y por lo tanto, la idea matemática expresada en el núcleo del argumento es evidente por si misma. Sin embargo, se reconoció que esta forma de razonar siguió evolucionando hasta finalizar la discusión grupal. Por tal motivo, son presentados dos extractos más que investigativamente resultaron relevantes de manifestar en este apartado.

Al continuar con la discusión (extracto 27-36), Xavier reconoció que su forma de proceder es ligeramente diferente a la expuesta por Yahir (extracto 16): “Lo vi de otra manera, multiplicando cuatro por 2150”. Afirmación que desencadenó la gestión del error del procedimiento de Yahir hacia la forma de proceder expuesta por Xavier, la cual se consideró como matemáticamente aceptable, al obtenerse un resultado correcto. Xavier y sus demás compañeros refirieron que al procedimiento de Yahir lo que le faltó fue “sumarle 2” lo cual explicaron que tiene significado en el contexto del problema como “los que siempre están en las figuras” o “los que están separados”. Evidencia que los estudiantes actuaron bajo ciertas normas de interacción dentro del aula, como fueron: dar sentido a las explicaciones dadas por los demás e indicar su acuerdo o desacuerdo.

27.	Xavier:	(…) También se puede hacer así como Yahir pero le faltó sumarle dos
28.	Profesor:	Yahir y Xavier nos han presentado algunos de sus procedimientos y resultados para la figura 2150, pero ustedes que opinan, ¿Cuál es la cantidad de círculos que se necesitan para formar la figura 2150?
29.	Estudiantes:	8602
30.	Profesor:	¿A cuál de los dos compañeros le dio ese resultado?
31.	Estudiantes:	A Xavier
32.	Profesor:	¿Qué le faltó al procedimiento de Yahir para obtener la cantidad de círculos necesarios para formar la figura 2150?
33.	Estudiantes:	Sumarle dos
34.	Profesor:	¿Esos dos quiénes son?
35.	Estudiantes:	Los que siempre están en las figuras
36.	Xavier:	Los que están separados, son los que siempre se suman, éstos [señala en el dibujo de la figura 1, los dos círculos encerrados]



Para finalizar la interacción en el aula del problema 1 y luego que los estudiantes discutieran las diferentes ideas matemáticas establecidas sobre la relación funcional involucrada en el patrón analizado, el profesor cuestionó al grupo ¿Cuántos círculos se necesitan para formar la figura 10000, qué procedimiento de los presentados emplearían y por qué? A fin de que compartieran y juzgaran lo que consideran como una forma de proceder matemática eficiente. Fueron Karen y Osmara (extracto 135-140) quienes argumentaron como la forma más eficiente: “Multiplicaría el número de figura por cuatro y le sumaría dos” y “Multiplicando por cuatro el número de la figura y sumando dos”, ya que “es el procedimiento más fácil, o más rápido, los demás, son más tardados, o más laboriosos”. Así, se rectificó que la idea matemática caracterizada como *FNR6: Multiplicaría el número de figura por cuatro y le sumaría dos*, fue tomada como compartida por la comunidad del aula.

135.	Profesor:	Si vemos hay diferentes formas de proceder, unos realizan la figura, otros enlistan los valores formando tablas, y otros determinan otros procedimientos, en donde tengan que multiplicar y sumar para obtener el resultado. Sí les preguntó, ¿Cuántos círculos se necesitan para formar la figura 10000, qué procedimiento de los presentados emplearían y por qué?
136.	Karen:	<u>Multiplicaría el número de figura por cuatro y le sumaría dos</u>
137.	Profesor:	¿Ustedes?
138.	Osmara:	<u>Multiplicando por cuatro el número de la figura y sumando dos</u>,
139.	Profesor:	¿Por qué?
140.	Osmara:	Porque es el procedimiento más fácil, o más rápido, los demás, son más tardados, o más laboriosos

La FNR6 fue expresada bajo diferentes ideas matemáticas individuales a lo largo de la interacción en el aula. La Tabla 5.8 resume las ideas y permite mirar la evolución del razonamiento matemático individual de la comunidad.

Tabla 5.8.
Evolución del razonamiento matemático individual asociada con la FNR6

Ideas matemáticas individuales asociadas con la FNR6 en el desarrollo del problema 1
▪ Para la figura 100, nada más se le hacía 100 por cuatro, igual a 400, y aquí se le pone 400, pero más los dos, serían 402 [Xavier, 22] 402 100 x 4 400
▪ [Xavier, 27] 2150 x 4 8600 8602
▪ Multiplicando cuatro por 2150 [Yahir, 16] (…) También puede hacerse así como Yahir pero le faltó sumarle dos [Xavier, 27]
▪ Multipliqué (…) el número de figura por cuatro. [Brenda, 56 y 58] (…) Le faltó sumarle dos [Karen y Osmara, 66]
▪ Multiplicaría el número de figura por cuatro y le sumaría dos [Karen, 136]
▪ Multiplicando por cuatro el número de la figura y sumando dos [Osmara, 138]

5.2. Problema 2

Este problema tuvo como fin que los estudiantes generaran el patrón figural y articularan una regla general. La discusión grupal fue desarrollada en tres episodios centrados en debatir sobre las múltiples formas de proceder y de mirar el patrón, y las diferentes formas de expresar el término general.

Las formas de razonamiento individual desarrolladas por la comunidad de aula durante la interacción del problema 2 son resumidas en la Tabla 5.9. Se presenta como un bosquejo inicial de todas las formas de razonamiento que emergieron a lo largo del discurso del aula, así evidenciar cuáles se convirtieron en normativas y cuáles se dejaron.

Tabla 5.9.
Formas de razonamiento individual emergentes en el desarrollo del problema 2

Formas de razonamiento individual
FRI1: Dibujé la figura y conté
FRI2: La sucesión va de dos en dos
FRI3: Es que a la figura tres como vi que para llegar a la figura uno, le faltan dos, y como la constante era de dos, entonces a los 12 cuadrados de la figura tres, le resté cuatro y me dio ocho
FRI4: Multipliqué los cuadrados blancos por dos, por lo que hay arriba y abajo. Al resultado le sumé seis, que son los tres cuadrados que hay en los dos extremos de la figura
FRI5: Es poner 10 arriba y 10 abajo porque son los que cubren a los 10 cuadrados blancos, más seis, porque son tres de aquí y tres de acá
FRI6: $(50 + 50) + (3 + 3) = 106$
FRI7: $(130 + 2) + (130 + 2) + 2 = 266$
FRI8: $(130 - 3) \cdot 2 + 12 = 266$
FRI9: Para la figura 50, multipliqué dos por 50, y me dio 100, al resultado le sumé los seis cuadrados que siempre habían en los lados, así obtuve 106 cuadrados grises
FRI10: Multipliqué la cantidad de cuadrados blancos por dos y le sumé seis

Las prácticas matemáticas en el aula y las formas normativas de razonamiento desarrolladas por la comunidad del aula en el problema 2 son resumidas en la Tabla 5.10. Es durante la explicación de cada forma normativa de razonamiento donde se harán explícitas las diferentes ideas matemáticas individuales reconocidas en los estudiantes a lo largo de la interacción en el aula. El conjunto de estos tres aspectos evidencian la evolución del razonamiento matemático de la comunidad de aula de quinto grado de primaria implicada en el desarrollo del problema 2.

Tabla 5.10.
Evolución del razonamiento matemático colectivo implicado en el desarrollo del problema 2

Prácticas matemáticas en el aula	**Formas normativas de razonamiento**	**Criterio cumplido**
PMA1: Extender el patrón	FNR1: Dibujé la figura y conté.	C1
PMA2: Percibir y registrar un patrón	FNR2: La sucesión va de dos en dos.	C3
	FNR3: Es que a la figura tres como vi que para llegar a la figura uno, le faltan dos, y como la constante era de dos, entonces a los 12 cuadrados de la figura tres, le resté cuatro y me dio ocho.	C3
	FNR4: Multipliqué los cuadrados blancos por dos, por lo que hay arriba y abajo. Al resultado le sumé seis, que son los tres cuadrados que hay en los dos extremos de la figura.	C2
PMA3: Generalizar aritméticamente	FNR5: $(130-3)\cdot 2+12=266$.	C1
	FNR6: Para la figura 50, multipliqué dos por 50, y me dio 100, al resultado le sumé los seis cuadrados que siempre habían en los lados, así obtuve 106 cuadrados grises	C1
PMA4: Generalizar algebraicamente	FNR7: Multipliqué la cantidad de cuadrados blancos por dos y le sumé seis	C1 y C2

5.2.1. PMA1: Extender el patrón

Esta práctica se manifestó con base en el reconocimiento de una actividad matemática invariante de los estudiantes en la forma normativa de razonamiento:

FNR1: Dibujé la figura y conté.

Esta actividad estuvo compuesta por un razonamiento dirigido a identificar y respetar las estructuras espacial y numérica del patrón para generar nuevos términos, en su mayoría consecutivos y cercanos. La práctica consistió en interpretar las condiciones de generación del patrón figural y analizar el término dado, para la construcción de sus primeros términos. Los razonamientos matemáticos de los estudiantes fueron soportados por argumentos pictóricos. Se caracterizó por el uso de argumentos intuitivos que conectan lo pictórico con el contexto del problema, y viceversa.

5.2.1.1. Dibujé la figura y conté

Fue la única forma de razonar identificada en los estudiantes para el proceso de generación de los primeros términos del patrón. Surgió en el primer episodio de interacción en el aula cuando el profesor pidió a Tania que compartiera qué fue lo que hizo en la tarea. Ella explicó (extracto 141-146) el proceso que siguió para determinar la cantidad de cuadrados grises que se colocarían en la figura, si se tiene un cuadrado blanco. Su argumento fue reconstruido en la Figura 5.12 y evidenció su trabajo en el contexto de la tarea y que reconoció que cada figura del patrón, estaba estructurada espacial y numéricamente de determinada cantidad de cuadrados blancos alineados, y a la vez rodeados de cierta cantidad de cuadrados grises. Estableció como parte de su explicación, propiedades basadas en la similitud obtenida a través de las apariencias (en el sentido de Rivera, 2018) de superficie y perímetros. Usó su contexto cercano sobre formas geométricas para establecer que los cuadrados blancos aparentan el área de la figura y los cuadrados grises aparentan su perímetro. Así dio sentido al proceso de dibujar la figura y el de contar cuadrados grises uno a uno para establecer la cantidad que se colocaría en la figura formada por un cuadrado blanco. Mismo proceso utilizado para los casos en los que se tenían dos y cuatro cuadrados blancos.

141. Profesor: Tania comparte qué fue lo que hiciste en el problema

142. Tania: El problema dice. Las figuras de una sucesión están formadas por cuadrados blancos y grises del mismo tamaño. Los cuadrados blancos se ubican de forma alineada, en el centro de cada figura y los grises, alrededor de los blancos, como se muestra en seguida.
¿Cuántos cuadrados grises se colocarían en la figura, si se tiene un cuadrado blanco?

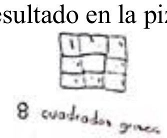
143. Profesor: ¿Qué fue lo que hiciste?

144. Tania: Vi que los cuadros blancos son el área de la figura, como si fuera el área de la figura, y los grises su perímetro, entonces me fijé cuántos cuadrados grises tiene un cuadrado blanco. Así que le hice su perímetro a un cuadrado blanco [Dibuja en la pizarra, primero un cuadrado y luego lo rodea con otros cuadrados]

Este es como si fuera el cuadro blanco [señala en la pizarra el cuadrado del centro de la figura dibujada] y esto como si fuera su perímetro [señala en la pizarra los cuadrados que rodean al cuadrado del centro de la figura dibujada].

145. Profesor: Señálame cuáles son los cuadrados grises

146. Tania: Éstos serían los [cuadrados] grises [en la figura dibujada marca con una línea los cuadrados grises y los va contando]. Un cuadrado blanco tendría ocho cuadrados grises [Escribe su resultado en la pizarra].



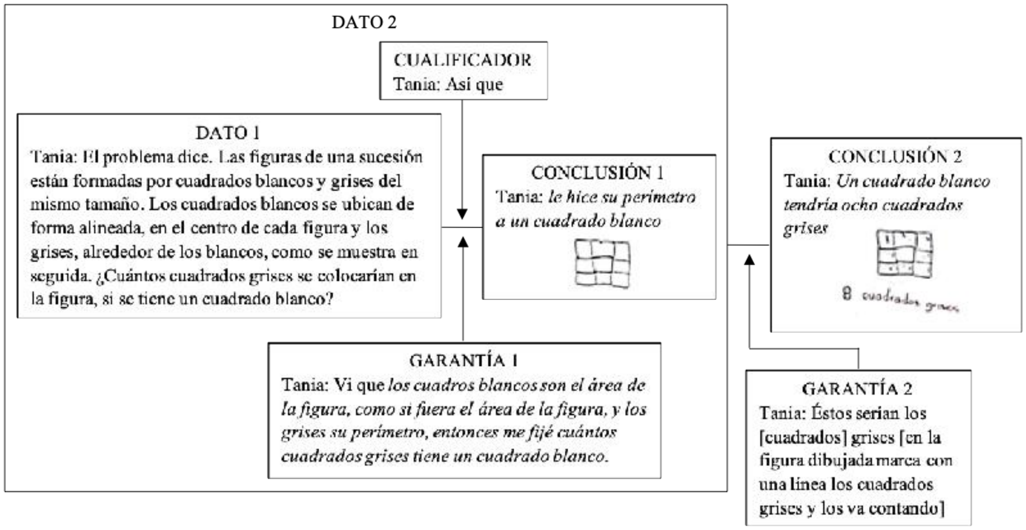


Figura 5.12. Argumento 12. Tania comparte cómo generó el primer término de la sucesión.

La idea matemática que prevaleció en la determinación de los primeros términos del patrón es *dibujé la figura y conté*. Los diferentes procesos implicados bajo esa idea fueron: 1) establecer propiedades basadas en la similitud obtenida a través de las apariencias para darle sentido al proceso de dibujar la figura y de contar uno a uno los cuadrados grises; 2) visualizar las figuras solicitadas en la figura dada (figura con tres cuadrados blancos) y contar uno a uno los cuadrados grises que les correspondan; y 3) dibujar cada una de las figuras demandadas y contar uno a uno los cuadrados grises que las conforman. Evidencia de ello, es la participación de Nadia (extracto 186-193), quien dio sentido a la forma de proceder de Tania, resaltando solo lo sustancial. De esa manera, reconoció que su forma de proceder fue igual a la de Nadia. La Figura 5.13 presenta la recontrucción de su argumento, el cual resulta de una concatenación de argumentos, al establecer como evidencia (DATO 2) el Argumento 12 para establecer nuevas tesis (CONCLUSIONES 2 y 3).

186. Profesor: ¿Quién resume lo que Tania hizo?
187. Nadia: Dibujó la figura
188. Profesor: ¿Luego que dibujó qué hizo?
189. Nadia: Fue contando
190. Profesor: ¿Qué contó?
191. Nadia: Lo de alrededor
192. Profesor: ¿Cómo lo hiciste? De igual o diferente forma
193. Nadia: Igual, dibujé y conté apoyándome de la figura

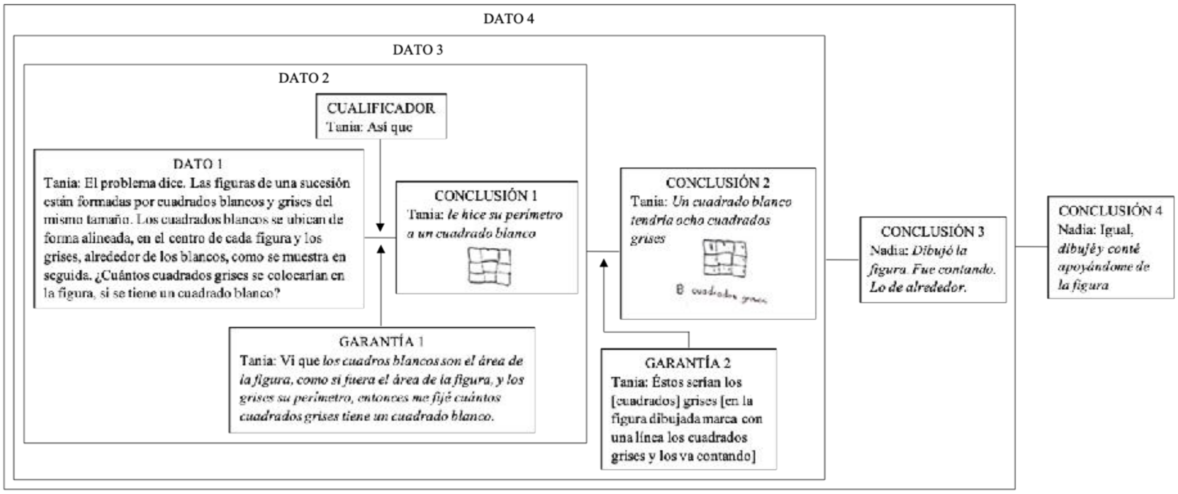
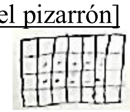


Figura 5.13. Argumento 13. Nadia establece la idea sustancial de la forma de proceder para generar los primeros términos del patrón.

En el segundo episodio de la discusión grupal, la clase discutió sobre cómo determinaron la cantidad de cuadrados grises que se colocarían, cuando se tienen 10 cuadrados blancos. Fue Brenda quien explicó su forma de proceder (extracto 258-269). Su argumento (Figura 5.14) consistió de un primer argumento centrado en el proceso de cómo dibujó la figura, el cual usó como DATO en un segundo argumento asociado con el proceso de qué contó y cuál fue su resultado. Fue en el segundo argumento, donde el profesor hizo que los estudiantes expresaran su conformidad con el dibujo propuesto por Brenda para el caso de 10 cuadrados blancos. Por tanto, los estudiantes REFUTARON el DATO y Zaida siendo más específica (REFUTACIÓN 2) mencionó que "no corresponde a la sucesión, porque nos están pidiendo que los cuadrados blancos deben estar de forma lineal, el proceso debe ser diferente al que está ahí". Evidencia de que se percató que el dibujo de la figura presentada, no respeta la estructura espacial, al ser dibujados en dos filas de a cinco los cuadrados blancos, consecuentemente no respeta la estructura numérica asociada con los cuadrados grises. De modo que, la CONCLUSIÓN 2 quedó inválida. Así, se manifestó que la forma de proceder de *dibujé la figura y conté* es válida siempre y cuando el dibujo de la figura respete la estructuras espacial y numérica establecidas como condiciones inicio del problema.

258. Profesor: Brenda explícanos que fue lo que hiciste para responder ¿Cuántos cuadrados grises se colocarían en la figura, si se tienen 10 cuadrados blancos?
259. Brenda: <u>Dibujé la figura, puse adentro los 10 cuadrados blancos y alrededor los cuadrados grises [Dibuja en el pizarrón]</u>



(…)
264. Profesor: ¿Y los cuadrados grises?
265. Brenda: <u>Son los del alrededor [cuenta], son 18</u>

266.	Profesor:	¿Qué opinan de la figura dibujada por Brenda? ¿Corresponde a la sucesión?
267.	Estudiantes:	No
268.	Profesor:	¿Quién dice que no y por qué?
269.	Zaida:	No corresponde a la sucesión, porque nos están pidiendo que <u>los cuadrados blancos deben estar de forma lineal, el proceso debe ser diferente al que está ahí</u> [figura dibujada por Brenda en la pizarra] (…)

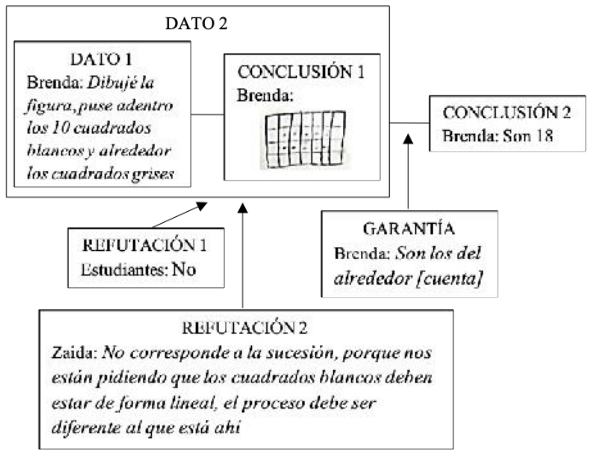
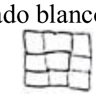
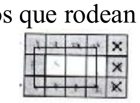


Figura 5.14. Argumento 14. Zaida refuta la estructura espacial de la figura dada por Brenda.

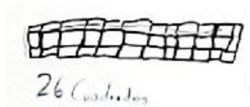
Obsérvese que el Argumento 12 (Figura 5.12) funcionó a la vez como DATO en el Argumento 13 (Figura 5.13), evidencia empírica que se cumplió C2. Y se constituyó como la *FNR1*, que funcionó como compartida por esta comunidad: *dibujé la figura y conté.* Válida siempre y cuando se respeten las estructuras espacial y numérica en las figuras (e.g. Figura 5.14).

La FNR1 fue expresada bajo diferentes ideas matemáticas individuales a lo largo de la interacción en el aula. En la Tabla 5.11 son resumidas las ideas y se evidencia su evolución.

Tabla 5.11.
Evolución del razonamiento matemático individual asociada con la FNR1

Ideas matemáticas individuales asociadas con la FNR1 en el desarrollo del problema 2
• Vi que los cuadros blancos son el área de la figura, como si fuera el área de la figura, y los grises su perímetro, entonces me fijé cuántos cuadrados grises tiene un cuadrado blanco. Así que le hice su perímetro a un cuadrado blanco [Tania, 144] 
• Ya no hice la figura, me base de la figura que me daban, lo que hice fue quitarle estos [en su producción escrita señala los cuadrados grises del extremo derecho, señalados con x] y conté su perímetro [señala los cuadrados que rodean a dos cuadrados blancos]  Me dio 10 cuadrados grises [Tania, 165]
• Primero la figura y luego conté su perímetro [Tania, 177]
• Dibujó la figura. Fue contando. Lo de alrededor [Nadia, 187;189;191]
• Dibujé y conté apoyándome de la figura [Nadia,193]
• Al principio solo fui contando [Fanny, 217]

- [Gladis, 247]



- Dibujé la figura, puse adentro los 10 cuadrados blancos y alrededor los cuadrados grises [Brenda, 259]

No corresponde a la sucesión, porque nos están pidiendo que los cuadrados blancos deben estar de forma lineal, el proceso debe ser diferente al que está ahí [Zaida, 269].

- Hice la figura para el caso de 10 cuadrados blancos, y luego fui sumando, y me dio 26. [Karen, 289]

- Aquí fui contando los cuadrados [grises] y me dio 26. Para la segunda cuestión, me dio 106, porque hice la figura para 50, y conté lo de alrededor, y me dio 106 [Karen, 289]

5.2.2. PMA2. Percibir y registrar un patrón

Esta práctica se identificó con base en el reconocimiento de una actividad matemática invariante de los estudiantes en tres formas normativas de razonamiento:

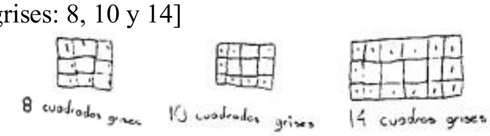
> FNR2: La sucesión va de dos en dos.
>
> FNR3: Es que a la figura tres como vi que para llegar a la figura uno, le faltan dos, y como la constante era de dos, entonces a los 12 cuadrados de la figura tres, le resté cuatro y me dio ocho.
>
> FNR4: Multipliqué los cuadrados blancos por dos, por lo que hay arriba y abajo. Al resultado le sumé seis, que son los tres cuadrados que hay en los dos extremos de la figura.

La actividad en colectivo estuvo caracterizada por la exploración, espacial y numérica, de los primeros términos del patrón figural, a fin de reconocer qué permanece y qué cambia de un término a otro. Así la práctica consistió en percibir y registrar lo que es común entre los elementos de un patrón, a fín de establecer regularidades que permitieran establecer procedimientos viables para extenderlo y generar nuevos términos, en su mayoría, términos consecutivos y cercanos. En esta práctica, los razonamientos matemáticos de los estudiantes fueron apoyados por argumentos figurales y numéricos, por tanto, se caracterizó por el uso de argumentos intuitivos asociados con el contexto del problema.

5.2.2.1. FNR2: La sucesión va de dos en dos

Después de que los estudiantes construyeron los primeros términos del patrón de forma figural y numérica, la discusión se orientó a compartir las diferentes regularidades observadas entre los téminos. Una de las primeras regularidades identificadas fue presentada por Tania (extracto 178-185), quien estableció como CONCLUSIÓN el comportamiento común del cambio entre términos consecutivos del patrón "la sucesión va de dos en dos". Estableció como DATO la representación numérica de los primeros términos del patrón y como GARANTÍA la relación de recurrencia observada "ocho más dos, me da diez" (Figura 5.15).

178. Profesor: ¿En tus hojas escribiste que observaste algo?
179. Tania: Si, que la sucesión va de dos en dos
180. Profesor: ¿Dónde observas eso que va de dos en dos?
181. Tania: Aquí [señala los resultados obtenidos de las cantidades de los cuadrados grises: 8, 10 y 14]



Ocho más dos, me da 10.
Aquí me preguntaron para cuatro cuadrados blancos [señala en la pizarra el resultado de 14 cuadrados grises], entonces para tres blancos tengo 12 grises [señala el espacio en blanco entre los resultados que corresponden cuando se tienen dos y cuatro cuadrados blancos] y para cuatro blancos tengo 14 grises, que viene de 12 más dos igual a 14.

(…)
184. Profesor: Tania ¿esa regularidad en qué momento lo percibiste?
185. Tania: En los resultados, en lo numérico

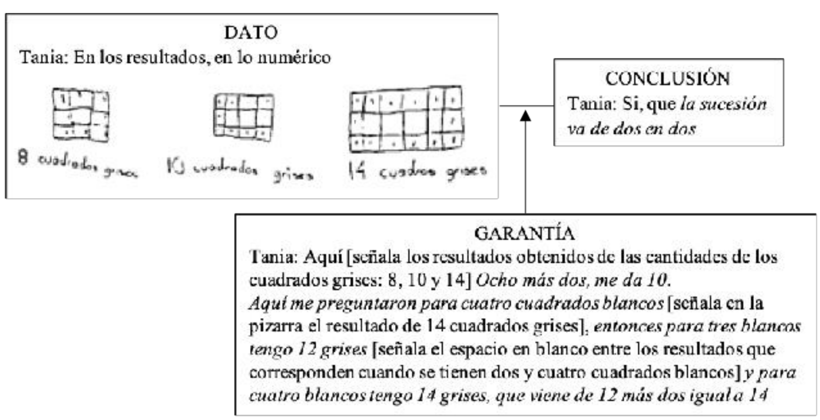


Figura 5.15. Argumento 15. Tania establece una regularidad del patrón analizado.

Regularidad que también expresó Fanny (extracto 194-207) cuando aseguró que después de encontrar los primeros términos del patrón mediante el conteo basado en la figura, ella observó regularidades en los resultados numéricos, que le conllevó a establecer un nuevo procedimiento para determinar los términos sin tener que recurrir a dibujar las figuras. Su argumento fue reconstruido en la Figura 5.16, como el resultado de una concatenación de argumentos. Lo que se desea resaltar es que la idea matemática caracterizada como "la sucesión va de dos en dos" es usada como parte de los elementos (DATO 1, GARANTÍA 2 y CONCLUSIÓN 2) de su argumento global. Evidencia empírica que se cumplió C3 y se convirtió en la *FNR2: La sucesión va de dos en dos.*

194. Profesor: Fanny, tu comentaste que procediste de forma diferente, ¿qué fue lo que hiciste?

195. Fanny: Observé que de la figura uno a la figura dos, había dos cuadros grises de diferencia. Lo otro que hice, es que a la figura tres como vi que para llegar a la figura uno, le faltan dos [Acompaña su explicación con el siguiente registro en la pizarra],

$$\begin{array}{r} 3 \\ -1 \\ \hline 2 \end{array}$$

y como la constante era de dos, entonces a los 12 cuadrados de la figura tres, le resté cuatro y me dio ocho [Acompaña su explicación con el siguiente registro en la pizarra].

$$\begin{array}{r} 12 \\ -4 \\ \hline 8 \end{array}$$

196. Profesor: Por qué le restas cuatro

197. Fanny: Le resto cuatro, porque dos es la constante de la sucesión de los cuadrados grises. Le estoy restando los dos cuadrados grises de la figura dos y otros dos cuadrados grises de la figura tres, que en total son cuatro.

(…)

206. Profesor: Este dos que da, ¿qué sería?

207. Fanny: Es la diferencia que hay entre la figura tres y la figura uno, sería como los dos cuadrados blancos que no tiene o los que hay de diferencia entre estas dos figuras

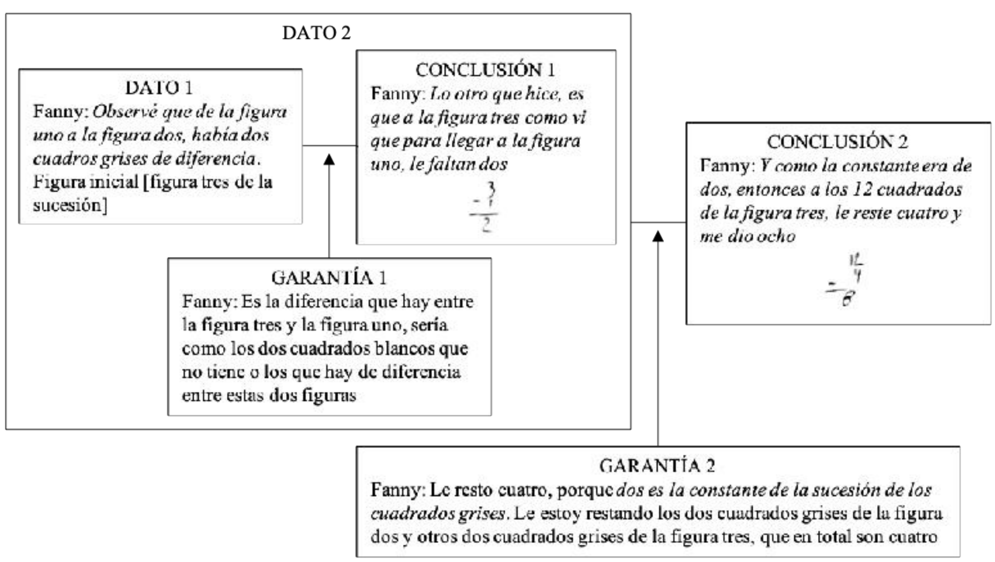
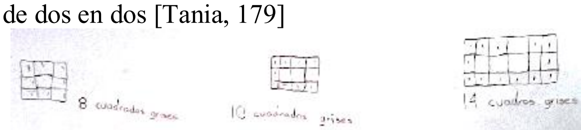


Figura 5.16. Argumento 16. Relación propuesta por Valeria para determinar los términos del patrón.

La FNR2 fue expresada bajo diferentes ideas matemáticas individuales a lo largo de la interacción en el aula. En la Tabla 5.12 son resumidas las ideas y se presenta la evolución que tuvo en su proceso de consolidación como FNR.

Tabla 5.12.
Evolución del razonamiento matemático individual asociada con la FNR2

Ideas matemáticas individuales asociadas con la FNR2 en el desarrollo del problema 2
• La sucesión va de dos en dos [Tania, 179] 
• Ocho más dos, me da 10 [Tania, 181]
• Aquí me preguntaron para cuatro cuadrados blancos, entonces para tres blancos tengo 12 grises, y para cuatro blancos tengo 14 grises, que viene de 12 más dos igual a 14 [Tania, 181]
• Observé que de la figura uno a la figura dos, había dos cuadros grises de diferencia [Fanny, 195]
• La constante era de dos [Fanny, 195]
• Dos es la constante de la sucesión de los cuadrados grises [Fanny,197]
• La constante de la sucesión era dos [Fanny, 209]
• La sucesión de cuadros grises va de dos en dos [Fanny, 319]

5.2.2.2. FNR3: Es que a la figura tres como vi que para llegar a la figura uno, le faltan dos, y como la constante era de dos, entonces a los 12 cuadrados de la figura tres, le resté cuatro y me dio ocho.

Esta forma de razonar surgió como una segunda regularidad observada entre los primeros términos del patrón. Fanny expresó (ver extracto194-207, en la sección anterior) que basada de los resultados numéricos del patrón, estableció una nueva relación centrada en la coordinación de la diferencia entre los valores de las posiciones (conocida y deseada) y de la diferencia entre los valores de sus términos. Producto de relacionar: los datos conocidos (La figura 3 está formada por tres cuadrados blancos y 12 cuadrados grises); la regularidad del patrón establecida en FNR2 (dos es la constante de la sucesión) y los datos deseados (cantidad de círculos grises que constituyen la figura con un cuadrado blanco). La reconstrucción de su argumento fue presentada en el apartado anterior en la Figura 5.16 y es el resultado de una concatenación de argumentos, que sustentan cada paso de la nueva relación, registrada de forma verbal y numérica, establecida para el caso específico de la figura 1.

Un extracto de la discusión, importante de resaltar para esta forma de razonar, es el siguiente:

212.	Profesor:	Tus respuestas, ¿concuerdan con lo que presentó tu compañera Tania?
213.	Fanny:	Si, todas.
214.	Profesor:	¿Entonces lo has estado viendo como en los problemas pasados?
215.	Fanny:	Si, así me dio ocho, luego que es 10 y para la figura cuatro que es 14
216.	Profesor:	¿Y para todos hiciste el mismo procedimiento?

217. Fanny: No, al principio solo fui contando, pero luego me di cuenta de que este procedimiento era más rápido

Del cual, se deduce que Fanny reconoció que esta nueva relación establecida, es:

1) Aplicable para los demás términos del patrón, ya que obtuvo los resultados esperados para los casos específicos de la figura 1, 2 y 4;
2) Estructuralemente semejante a la establecida en el problema 1; y
3) Matemáticamente más eficiente que el proceso de dibujar la figura y de contar.

Evidencia empírica que se cumplió con C3, ya que la idea *"es que a la figura tres como vi que para llegar a la figura uno, le faltan dos, y como la constante era de dos, entonces a los 12 cuadrados de la figura tres, le resté cuatro y me dio ocho"* fue usada repetidamente como dato (o garantía) para diferentes conclusiones, es decir, fue usada para determinar otros casos específicos del patrón, como fueron, la figura 2 y 4, obteniendo el resultado esperado. Fue así, como se constituyó en la *FNR3*.

La FNR3 fue sustentada de dos ideas matemáticas individuales (Tabla 5.13) presentes en la interacción en el aula. Presumen ser una sofisticación basada de las ideas matemáticas individuales que conformaron a la FNR2.

Tabla 5.13.
Evolución del razonamiento matemático individual asociada con la FNR3

Ideas matemáticas individuales asociadas con la FNR3 en el desarrollo del problema 2
• Observé que de la figura uno a la figura dos, había dos cuadros grises de diferencia. Lo otro que hice, es que a la figura tres como vi que para llegar a la figura uno, le faltan dos. Y como la constante era de dos. Entonces a los 12 cuadrados de la figura tres, le resté cuatro y me dio ocho [Fanny,195] $\begin{array}{r} 3 \\ -1 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ -4 \\ \hline 8 \end{array}$
• Si, así me dio ocho, luego que es 10 y para la figura cuatro que es 14 [Fanny, 215]

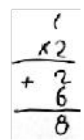
5.2.2.3. FNR4: Multipliqué los cuadrados blancos por dos, por lo que hay arriba y abajo. Al resultado le sumé seis, que son los tres cuadrados que hay en los dos extremos de la figura.

Una tercera regularidad observada entre los primeros términos del patrón, surgió al final del primer episodio de la discusión grupal, cuando Paola compartió con la clase (extracto 218-221) la relación que extrajo entre la posición y el término del patrón, al examinar de forma coordinada la estructura espacial y numérica de los primeros términos del patrón figural. La relación resultó de reconocer qué cambia y qué permanece en todos los términos conocidos. Ella reconoció que en todas las figuras:

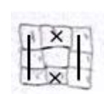
3) La cantidad de cuadros grises que están arriba y que están debajo de la cantidad de cuadrados blancos, son iguales en cantidad, y
4) Hay tres cuadrados en cada extremo de la figura.

En el Argumento 17 (Figura 5.17), Paola presentó como DATO la relación establecida para el caso específico de la figura uno mediante un registro verbal y ofreció como CONCLUSIÓN la misma relación pero de forma numérica. Su GARANTÍA estuvo centrada en cómo coordinó la estructura espacial y numérica de los primeros términos del patrón figural para el establecimiento de la relación entre la cantidad de cuadrados blancos y la de los cuadrados grises.

218. Profesor: ¿Alguien procedió de otra forma?
219. Paola: (…) <u>En la figura uno, hay un cuadrado blanco, el uno lo multipliqué por dos y le sumé seis</u>



220. Profesor: ¿Por qué multiplicaste el uno con el dos?
221. Paola: <u>Porque uno es la figura uno, que tiene un cuadrado blanco, y lo multipliqué por dos, porque aquí</u> [se soporta de la figura dibujada en la pizarra por Tania], <u>hay uno arriba y uno abajo</u> [señala en la figura los cuadrados marcados con una x]. <u>Y le sumé seis, porque aquí hay tres y aquí tres</u> [señala en la figura los cuadrados de los extremos marcados con unas líneas]



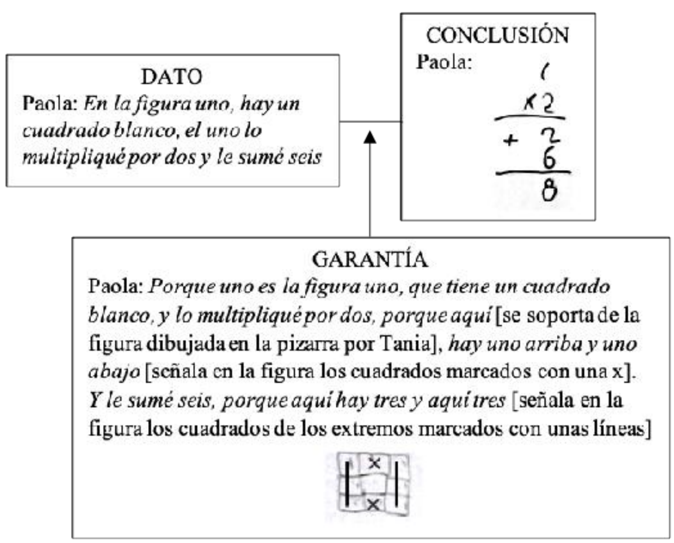
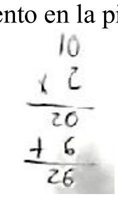


Figura 5.17. Argumento 17. Relación establecida por Paola para el caso específico de la figura 1.

Esta forma de razonar propuesta por Paola, fue retomada durante el segundo episodio de discusion grupal por su compañera Ulma (extracto 278-279), quien al ser cuestionada por el profesor sobre lo qué hizo para determinar la cantidad de cuadrados grises que se colocarían en la figura, si se tienen 10 cuadrados blancos. Ella (Figura 5.18) hizo rápidamente una operación aritmética (CONCLUSIÓN) y proporcionó como DATO que lo hizo siguiendo el método de Paola. De esta forma sustentó que para formar una figura con 10 cuadrados blancos se necesitan 26 cuadrados grises. Evidencia empírica que se cumplió con C2 y se tomó como si fuera compartida por la comunidad del aula, la *FNR4: Multipliqué los cuadrados blancos por dos, por lo que hay arriba y abajo. Al resultado le sumé seis, que son los tres cuadrados que hay en los dos extremos de la figura.*

278.	Profesor:	Ulma, ¿qué hiciste para determinar la cantidad de cuadrados grises que se colocarían en la figura, si se tienen 10 cuadrados blancos?
279.	Ulma:	[Pasa y escribe su procedimiento en la pizarra]



<u>Lo hice siguiendo el método de Paola, multiplicar 10 por dos, me da 20 y le sumé seis, me da 26.</u>

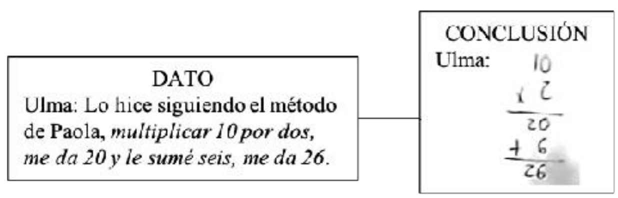
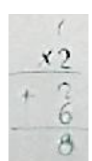
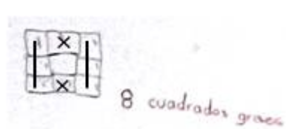


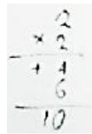
Figura 5.18. Argumento 18. Usa el método de Paola para determinar un término cercano.

La FNR4 fue expresada a través de diferentes ideas matemáticas individuales durante la interacción en el aula. En la Tabla 5.14 son presentadas las ideas y su evolución individual.

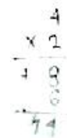
Tabla 5.14.
Evolución del razonamiento matemático individual asociada con la FNR4

Ideas matemáticas individuales asociadas con la FNR4 en el desarrollo del problema 2
• En la figura uno, hay un cuadrado blanco, el uno lo multipliqué por dos y le sumé seis [Paola, 219] 
• Porque uno es la figura uno, que tiene un cuadrado blanco, y lo multipliqué por dos, porque aquí, hay uno arriba y uno abajo. Y le sumé seis, porque aquí hay tres y aquí tres [Paola, 221] 
• Yo lo multipliqué por dos, porque aquí hay uno y uno, o sea dos cuadros, uno arriba y uno abajo, y le sumé seis, porque aquí hay tres y tres [Paola, 223]
• Lo mismo, lo multipliqué por dos y luego le sumé seis [Paola, 229]

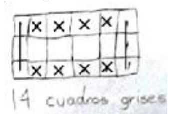
- Multipliqué los cuadrados blancos por dos, por lo que hay arriba y abajo, al resultado le sumé seis, que son los tres cuadrados que hay en los dos extremos de la figura [Paola, 231]



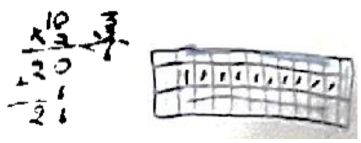
- [Paola, 239]



- Ella vio que en los lados siempre sobraban tres cuadrados grises, y esos tres y tres los agarraba, y ya no más le sumaba éstos [Gladis, 241]



- Yo sumaría los cuadrados que hay arriba, que serían los mismos que hay abajo y le sumaría lo de los lados [Hugo, 253]
- Por ejemplo, para 10 cuadrados blancos, multiplicaría 10 por dos, que serían los de arriba y los de abajo, porque son la misma cantidad de cuadrados, 10 y 10 me da 20, de ahí como esta no aumenta para arriba, no cambia, serían tres y tres, seis, y esto lo sumaría, me da 26 [Hugo, 253]



5.2.3. PMA3. Generalizar aritméticamente

Esta práctica se detectó a partir de la actividad matemática común de los estudiantes en las formas normativas de razonamiento:

FNR5: $(130 - 3) \cdot 2 + 12 = 266$.

FNR6: Para la figura 50, multipliqué dos por 50, y me dio 100, al resultado le sumé los seis cuadrados que siempre habían en los lados, así obtuve 106 cuadrados grises.

Esta actividad estuvo compuesta de razonamientos orientados a la generación de formas de representar numérica y/o verbalmente las regularidades observadas en la PMA2, para aplicarlas a todos los términos posteriores de un patrón. En esta práctica, los razonamientos de los estudiantes fueron apoyados por argumentos verbales y numéricos basados en una estructura multiplicativa del patrón. Se caracterizó por el uso de argumentos aritméticos que conectan con el contexto del problema, y viceversa.

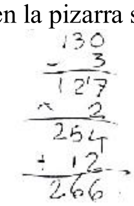
5.2.3.1. FNR5: $(130-3)\cdot 2+12=266$

La discusión continuó (Episodio 3) y se orientó a debatir si las relaciones establecidas para términos consecuivos y/o cercanos en las FNR anteriores, eran aplicables a todos los términos posteriores del patrón. En específicio, para términos lejanos como lo son las figuras formadas por 50 y 130 cuadrados blancos.

Un argumento relevante (Figura 5.19) fue el derivado de la participación de Fanny (extracto 322-323), al manifestar que la relación establecida en la FNR3 es aplicable a todos los términos del patrón, mediante comprobar que se obtiene el resultado esperado para un término lejano, como lo es la figura formada por 130 cuadrado blancos.

322. Profesor: ¿Crees que este método es aplicable para todas las figuras [de la sucesión analizada]?

323. Fanny: Yo digo que sí, por ejemplo revisemos para cuando se tienen 130 cuadrados blancos [escribe en la pizarra su procedimiento]



Si da el resultado

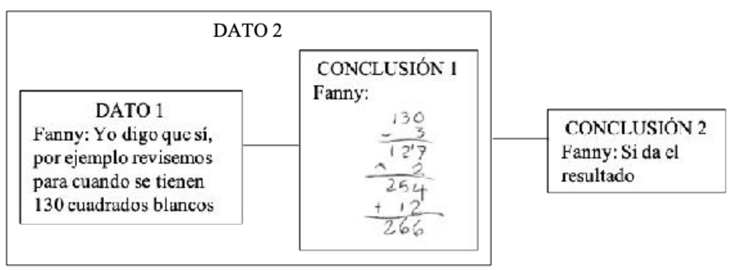


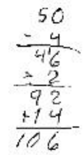
Figura 5.19. Argumento 19. Usa la relación establecia por Fanny para determinar términos lejanos.

Es de resaltar, que para esta forma de razonar, el trabajo se concentró solo en representaciones numéricas de la relación establecida. Sin indicios de una generalización algebraica (en el sentido de Radford, 2008). En cambio, Fanny (extracto 324- 325) ofreció la válidez de la relación centrada en la coordinación de la diferencia entre los valores de las posiciones (conocida y deseada) y de la diferencia entre los valores de sus términos, para un dato conocido (o de referencia) diferente al que tomó inicialmente. Así, mostró que independientemente del dato conocido que tomes de referencia (ella ejemplificó con la relación entre los cuadrados blancos y grises que forman la figura 4) el resultado dará igual. La reconstrucción de su argumento es presentada en la Figura 5.20.

324. Profesor: Lo que veo, es que tú tomas de referencia la figura 3 que fue dada en el problema. Pero, tú crees que te daría el mismo resultado, si tomas la siguiente figura de referencia, que es la figura 4 que tiene cuatro

cuadrados blancos, crees que tu procedimiento se puede aplicar con esa figura de referencia, crees que se llegará a la misma respuesta

325. Fanny: Creo que sí, veamos para la figura 50 [escribe el procedimiento en la pizarra]



Si da igual.

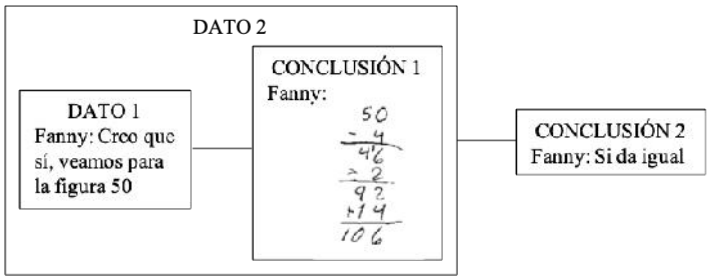
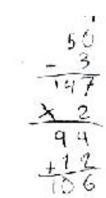
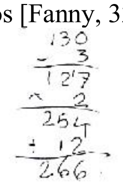


Figura 5.20. Argumento 20. Ajuste de la relación establecia por Fanny para determinar términos lejanos.

Los Argumento 19 (Figura 5.19) y Argumento 20 (Figura 5.20) son evidencia empírica de que tanto Fanny como los estudiantes ya no cuestionan esta forma de proceder, pues les es basto que los resultados obtenidos sean iguales a los determinados con alguna otra forma de razonar. Así, se cumplió con C1 y se constituyó como la *FNR5:* $(130 - 3) \cdot 2 + 12 = 266$, resultado de una sofisticación de la FNR3.

La FNR5 fue expresada bajo diferentes ideas matemáticas individuales a lo largo de la interacción en el aula. La Tabla 5.15 resume las ideas y permite mirar la evolución del razonamiento matemático individual.

Tabla 5.15.
Evolución del razonamiento matemático individual asociada con la FNR5

Ideas matemáticas individuales asociadas con la FNR5 en el desarrollo del problema 2
▪ Para 50 le quitaría tres, y da 47, lo multiplicó por dos, me da 94 y le sumaría 12, y me da 106 [Fanny, 315]  ▪ Cuando se tienen 130 cuadrados blancos [Fanny, 323] 

- Veamos para la figura 50 [Toma como dato conocido la figura 4 con cuatro cuadrados blancos]

$$\begin{array}{r} 50 \\ -\ 4 \\ \hline 46 \\ \times\ 2 \\ \hline 92 \\ +14 \\ \hline 106 \end{array}$$

Si da igual [Fanny, 325]

5.2.3.2. FNR6: Para la figura 50, multipliqué dos por 50, y me dio 100, al resultado le sumé los seis cuadrados que siempre habían en los lados, así obtuve 106 cuadrados grises

Esta forma de razonar, fue el resultado de abstraer numéricamente la relación establecida en la FNR4 y de usarla para determinar términos lejanos del patrón. Evidencia de tal proceso es el Argumento 18 (Figura 5.18), ubicado en un apartado anterior, donde Ulma presentó como CONCLUSIÓN la operación aritmética establecida para determinar la cantidad de cuadrados grises necesarios para forma una figura con 10 cuadrados blancos y como DATO “lo hice siguiendo el método de Naomi”. Otro aspecto que evidenció este argumento es que Ulma atribuye la idea inicial (FNR4) a Paola por ser quien por primera vez presentó ante el grupo (Argumento 17) la relación entre la posición y el término del patrón, que extrajo al examinar de forma coordinada la estructura espacial y numérica de los primeros términos.

Bajo ese preámbulo, un segundo argumento (Figura 5.21) relevante para esta forma de razonar fue basado en la participación de Fanny (extracto 302-303) quien solamente planteó como CONCLUSIÓN el proceso seguido para determinar la cantidad de cuadrados grises que se colocarían en la figura con 50 cuadrados blancos.

302.	Profesor:	Explica qué hiciste para determinar la cantidad de cuadrados que se colocarían en la figura, si se tienen 50 cuadrados blancos.
303.	Fanny:	<u>Para la figura 50, multipliqué dos por 50, y me dio 100, al resultado le sumé los seis cuadrados que siempre habían en los lados, así obtuve 106 cuadrados grises.</u>

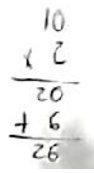
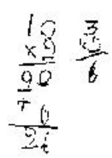
CONCLUSIÓN
Fanny: *Para la figura 50, multipliqué dos por 50, y me dio 100, al resultado le sumé los seis cuadrados que siempre habían en los lados, así obtuve 106 cuadrados grises.*

Figura 5.21. Argumento 21. Fanny usa la relación establecida en la FNR4 para determinar términos lejanos.

Los Argumentos 18 y 21 son evidencia empírica de que en las explicaciones de los estudiantes ya no hacen explícitas las garantías para una conclusión en particular, y en el caso del Argumento 21 ya ni aparecen los datos. Por tanto, la idea matemática expresada en el núcleo del argumento es evidente por sí misma. Así, se cumple con C1 y se constituyó la *FNR6*: *Para la figura 50, multipliqué dos por 50, y me dio 100, al resultado le sumé los seis cuadrados que siempre habían en los lados, así obtuve 106 cuadrados grises.*

La FNR6 fue expresada bajo diferentes ideas matemáticas individuales a lo largo de la interacción en el aula. En la Tabla 5.16 son resumidas las ideas y se evidencia su evolución.

Tabla 5.16.
Evolución del razonamiento matemático individual asociada con la FNR6

Ideas matemáticas individuales asociadas con la FNR6 en el desarrollo del problema 2
▪ Lo hice siguiendo el método de Paola, multiplicar 10 por dos, me da 20 y le sumé seis, me da 26 [Ulma, 279] 
▪ Para la figura 50, multipliqué dos por 50, y me dio 100, al resultado le sumé los seis cuadros que siempre habían en los lados, así obtuve 106 cuadrados grises [Fanny, 303]
▪ Me piden cuántos cuadrados grises se colocaría en la figura, si se tienen 10 cuadrados blancos. entonces multipliqué 10 por dos, que son las filas de arriba y abajo de cuadrados grises, me da 20, a eso le sumé las dos filas de los extremos, qué son dos filas de tres. En total son seis cuadrados grises entonces sumo 10 más seis, y me da 26  Para las otras figuras, hice lo mismo [Hugo, 327]

5.2.4. PMA4. Generalizar algebraicamente

Esta práctica fue detectada a partir de la actividad matemática común de los estudiantes en la última forma normativa de razonamiento:

> FNR7: Multipliqué la cantidad de cuadrados blancos por dos y le sumé seis.

Esta actividad estuvo compuesta de un razonamiento centrado en articular la relación funcional entre la posición y el patrón, para el término n-ésimo. La práctica consistió en la generalización de una relación matemática con cantidades indeterminadas. La expresión general fue representada en palabras y hubo indicios de un primer acercamiento al uso de variables. Los razonamientos matemáticos de los estudiantes fueron soportados por argumentos verbales y alfa-numéricos fundamentados en una estructura multiplicativa. Se caracterizó por el uso de argumentos matemáticos que conectan lo general (lo indeterminado) con lo numérico (relaciones específicas) y con el contexto del problema (significado).

5.2.4.1. FNR7: Multipliqué la cantidad de cuadrados blancos por dos y le sumé seis

Esta forma de razonar tuvo origen en el tercer episodio de la discusión grupal cuando se debatían los procesos seguidos para determinar terminos lejanos del patrón (e.g. Figura 5.19 y 5.20). Durante el episodio Fanny evidenció (extracto 306-307) una forma de expresar la FNR6 con cantidades indeterminadas. En su argumento (Figura 5.22) presentó como CONCLUSIÓN una expresión verbal de la regla general y como DATO la relación de la tesis con la idea matemática de la FNR6. De esta forma, manifestó su abstracción de la FNR6 para cualesquier término del patrón.

306.	Profesor:	¿Cómo lo hiciste para los demás?
307.	Fanny:	Igual, multipliqué la cantidad de cuadrados blancos por dos y le sumé los seis que son los cuadrados que hay en los lados.

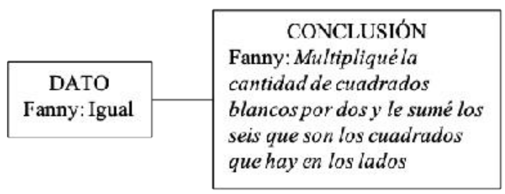


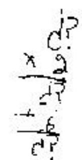
Figura 5.22. Argumento 22. Fanny expresa verbalmente una regla general del patrón.

El profesor continuó la discusión con Fanny (extracto 308-311) con el fin de indagar sobre la generalidad en su forma de razonar. Le cuestionó partes de la regla establecida (Argumento 23) y Fanny dio cuenta de lo que para ella varía y lo que no en la regla establecida.

308.	Profesor:	¿Esos seis cuadrados varían de una a otra figura?
309.	Fanny:	No
310.	Profesor:	¿Cuáles son los que varían?
311.	Fanny:	Los cuadrados grises de arriba y los de abajo

La regla articulada por Fanny, manifestó una sofisticación en su forma de razonar, ya que de expresarla para determinar términos específicos (k-ésimos) pasó a hacerlo para términos indeterminados (n-ésimos). El establecimiento de esta regla directa que permitió calcular cualquier cantidad de cuadrados grises que conforman a la figura, si se conoce la cantidad de cuadrados blancos, se reconoce como una generalización algebraica del patrón (Radford, 2008).

La discusión continuó y al cierre (extracto 328-329), Hugo compartió su explicación sobre el término general de la sucesión, expresó la regla general tanto en un registro verbal como en uno alfanumérico, que implicó un primer acercamiento al uso de variables. Su argumento es reconstruido en la Figura 5.23. El presentó como GARANTIA de su procedimiento general (CONCLUSIÓN 2) que usó los signos de interrogación para designar variables y valores desconocidos. El primer signo de interrogación representa la variable: cantidad de cuadrados blancos; y el segundo y tercer signo de interrogación representan valores desconocidos que dependen del valor asigando al primer signo de interrogación. Certeza de una generalización algebraica.

328.	Profesor:	Y para la otra cuestión, ¿qué quisiste?
329.	Hugo:	La pregunta dice, explica cómo podrías averiguar rápidamente cuántos cuadrados grises se colocan en la figura si se conoce la cantidad de cuadrados blancos que la forman. <u>Sería lo mismo, porque multiplicaría la cantidad de cuadrados blancos por dos, que son las dos filas, más seis. Este es mi procedimiento general</u> [escribe en la pizarra]  <u>Le puse los signos de interrogación, para indicar [en el primer signo] que es cualquier número, un número aleatorio</u>. Y los otros dos signos los puse porque son números que no conozco y dependen del valor que ponga aquí [señala primer signo de interrogación].

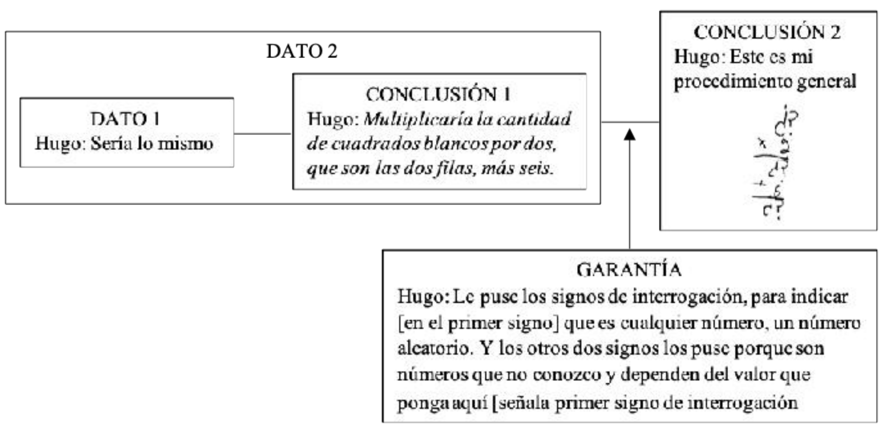
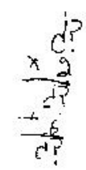


Figura 5.23. Argumento 23. Hugo expresa de forma verbal y alfanumérica una regla general del patrón.

Los Argumentos 5.22 y 5.23 son evidencia empírica que se cumplió de forma simúltanea el C1 y C2, ya que los estudiantes se basan de una FNR que ya fue tomada como compartida para establecer nuevas conclusiones, para las cuales no ofrecen garantías y tampoco sus compañeros establecen reservas. Asimismo, se hace notar que las reglas generales, expresadas de forma verbal por Fanny y Hugo, son semejantes, ya que expresan la abstracción de la FNR6. Misma que usa Hugo como DATO 2 para establecer una expresión alfanumérica de la regla general. Así, se constituyó la FNR7: "*multipliqué la cantidad de* *cuadrados blancos por dos y le sumé seis*", que se condiera como si fuera tomada como compartida por la comunidad del aula.

Esta FNR7 fue sustentada de una idea matemática individual (Tabla 5.17) presente en la interacción en el aula. Presumió ser una sofisticación de las ideas matemáticas individuales constituidas en la FNR6.

Tabla 5.17.
Evolución del razonamiento matemático individual asociada con la FNR7

Ideas matemáticas individuales asociadas con la FNR7 en el desarrollo del problema 2
• Igual, multipliqué la cantidad de cuadrados blancos por dos y le sumé los seis que son los cuadrados que hay en los lados [Fanny, 303]
• Sería lo mismo, porque multiplicaría la cantidad de cuadrados blancos por dos, que son las dos filas, más seis. Este es mi procedimiento general: 
• Le puse los signos de interrogación, para indicar que es cualquier número, un número aleatorio. Y los otros dos signos los puse porque son números que no conozco y dependen del valor que ponga aquí [señala primer signo de interrogación][Hugo, 329]

5.3. Problema 3

Este problema tuvo como meta que los estudiantes transitaran de una representación figural a una numérica del patrón, con la intensión de introducir su uso para el análisis y generalización del patrón. La interacción en el aula fue desarrollada en dos episodios orientados por las temáticas de discusión de las múltiples formas de mirar el patrón y la expresión de la regla general.

Las formas de razonamiento individual desarrolladas por la comunidad de aula durante la interacción del problema 3 son resumidas en la Tabla 5.18. Se presenta como un bosquejo inicial de todas las formas de razonamiento que emergieron a lo largo del discurso del aula, así evidenciar cuáles se convirtieron en normativas y cuáles no.

Tabla 5.18.
Formas de razonamiento individual emergentes en el desarrollo del problema 3

Formas de razonamiento individual
FRI1: Le sumé cinco, que es lo que va aumentando la cantidad de palillos de una figura a otra
FRI2: Multipliqué por cinco, porque son los palillos que se van aumentando. Le aumenté uno, porque observé que luego de contar cierta cantidad de veces cinco palillos, sobraba un palillo
FRI3: $23 \times 5 = 115$

FRI4: $(23 \times 5) + 1 = 116$
FRI5: Fui sumando de cinco en cinco hasta llegar a la cantidad solicitada
FRI6: $(23 \times 6) - (23 - 1) = 116$
FRI7: $(¿\,? \times 5) + 1$

Las prácticas matemáticas en el aula y las formas normativas de razonamiento desarrolladas por la comunidad para el problema 3 son resumidas en la Tabla 5.19. Durante la descripción de cada forma normativa de razonamiento son presentadas las diversas ideas matemáticas individuales identificadas en los estudiantes en la interacción del aula. El conjunto de estos tres aspectos evidencian la evolución del razonamiento matemático de la comunidad de aula de quinto grado de primaria implicada en el desarrollo del problema 3.

Tabla 5.19.
Evolución del razonamiento matemático colectivo implicado en el desarrollo del problema 3

Prácticas matemáticas en el aula	Formas normativas de razonamiento	Criterio cumplido
PMA1: Extender, percibir y registrar un patrón	FNR1: Le sumé cinco, que es lo que va aumentando la cantidad de palillos de una figura a otra	C3
	FNR2: Multipliqué por cinco, porque son los palillos que se van aumentando. Le aumenté uno, porque observé que luego de contar cierta cantidad de veces cinco palillos, sobraba un palillo	C1
PMA2: Generalizar aritméticamente	FNR3: $(23 \times 5) + 1 = 116$	C1
	FNR4: Fui sumando de cinco en cinco hasta llegar a la cantidad solicitada	C3
	FNR5: $(23 \times 6) - (23 - 1) = 116$	C2
PMA3: Generalizar algebraicamente	FNR6: $(¿\,? \times 5) + 1$	C1

5.3.1. PMA1: Extender, percibir y registrar un patrón

Esta práctica se identificó con base en el reconocimiento de una actividad matemática invariante de los estudiantes en las dos primeras formas normativas de razonamiento:

> FNR1: Le sumé cinco, que es lo que va aumentando la cantidad de palillos de una figura a otra.
>
> FNR2: Multipliqué por cinco, porque son los palillos que se van aumentando. Le aumenté uno, porque observé que luego de contar cierta cantidad de veces cinco palillos, sobraba un palillo.

La actividad en colectivo estuvo caracterizada por la exploración, espacial y/o numérica, de los primeros términos del patrón, ya sea en su representación figural y/o numerica, a fin de reconocer qué permanece y qué cambia de un término a otro. Así la práctica consistió en percibir y registrar lo que es común entre los primeros términos del patrón, a fín de establecer procedimientos viables para extenderlo y generar nuevos términos, en su mayoría, términos consecutivos. Los razonamientos matemáticos de los estudiantes fueron soportados por argumentos figurales y numéricos. Por consiguiente, en esta práctica mayormente se hizo uso de argumentos intuitivos y basados en el contexto del problema.

5.3.1.1. FNR1: Le sumé cinco, que es lo que va aumentando la cantidad de palillos de una figura a otra

Esta idea matemática surgió entre los estudiantes como el producto de una primera exploración a los términos dados del patrón. En donde reconocieron qué permanece y qué cambia de un término a otro. El primer argumento relevante para esta forma de razonar, ocurrió cuando Carlos explicó a la clase (extracto 334-340) qué fue lo que realizó en el problema. Su argumento (Figura 5.24) se proporciona como evidencia de una de las formas de cómo es percibido y registrado lo que es común entre los términos de un patrón.

334.	Carlos:	Para la figura 4, fui sumando de cinco en cinco, entonces para la figura 4 me da 21 palillos
335.	Profesor:	¿Qué fue lo que hiciste para obtener 21 palillos?
336.	Carlos:	[Escribe en la pizarra su procedimiento]
		$\begin{array}{r}16\\+\ 5\\\hline 21\end{array}$
337.	Profesor:	Él se da cuenta que está sucediendo algo en los valores [de cantidad de palillos], que para obtener la cantidad de palillos para formar cuatro hexágonos, que es 21, el suma 16 más cinco, ¿qué representa el número 16?
338.	Carlos:	La cantidad de palillos de la figura 3
339.	Profesor:	¿Qué representa el número cinco?
340.	Carlos:	Lo que aumenta [la sucesión] cada que agrego un hexágono

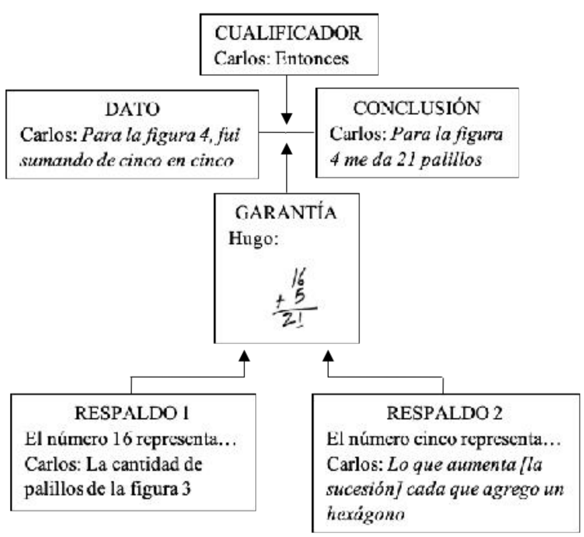


Figura 5.24. Argumento 24. Carlos describe lo que observó y realizó en el problema.

El razonamiento seguido por Carlos para extender el patrón, se sustentó de un tipo de pensamiento operacional aditivo. Él mencionó que para generar un nuevo término del patrón (figura 4), basta con sumar cinco unidades, en este caso, cinco palillos al término anterior (cantidad de palillos de la figura 3). Este tipo de pensamiento lo uso desde una representación numérica del patrón.

Esta idea matemática, también fue utilizada por Karen y Mauro, como sustento de su proceder. Ellos explicaron que la regularidad la observaron desde una visión diferente a la de Carlos. Por ejemplo, Karen (extracto 352) basada de una representación tabular de los valores del patrón, coordina el cambio entre valores consecutivos del número de hexágonos con el cambio entre valores consecutivos de la cantidad de palillos. Luego usa esa regularidad para completar la tabla.

352. Karen: Vi que los valores de número de hexágonos [señala los valores en la tabla representada en la pizarra] van aumentando de uno en uno, y los valores de cantidad de palillos [señala los valores en la tabla representada en la pizarra] van aumentando de cinco en cinco

Número de hexágonos	Cantidad de palillos
1	6
2	11
3	16
4	21
5	26
6	31

Para completar la tabla, lo que hice, fue tomar la cantidad de palillos que forman tres hexágonos, y le sumé cinco, que es lo que va aumentando la cantidad de palillos de una figura a otra [escribe en la pizarra su procedimiento].

$$\begin{array}{r} 16 \\ +5 \\ \hline 21 \end{array}$$

Así obtuve que 21 es la cantidad de palillos que se usarían para formar cuatro hexágonos.

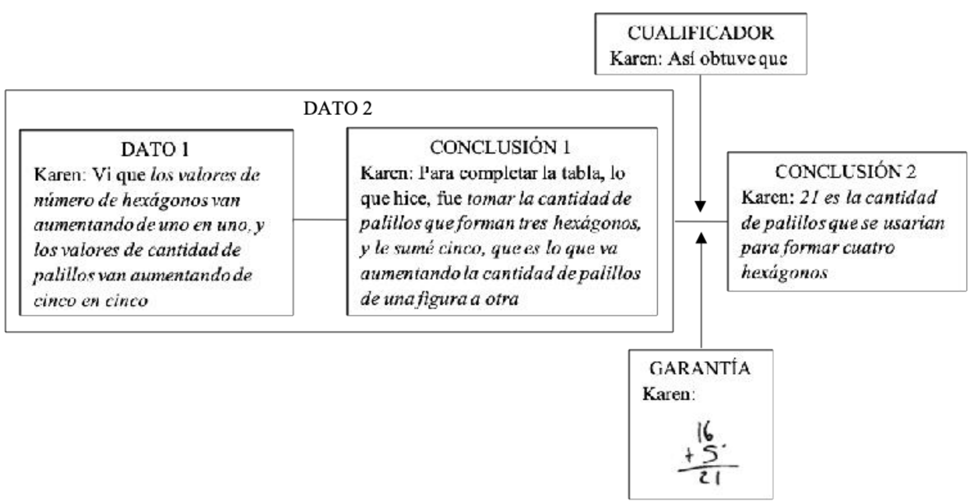


Figura 5.25. Argumento 25. Karen describió la regularidad observada en el patrón numérico-tabular.

Por su parte, Mauro resaltó que la regularidad de “agrego cinco palillos” fue percibida desde la representación figural del patrón (extracto 363-367). La cual usa para determinar la cantidad de palillos que forman las figuras con tres, cuatro y cinco héxagonos

363. Profesor: (…) ¿Cuántos palillos forman la figura 3 [señala el dibujo con tres hexágonos]?
364. Mauro: 16 [palillos], y para formar cuatro hexágonos, le agregué cinco palillos, me da 21 palillos. Para cinco hexágonos, agrego cinco palillos, me da 26
365. Profesor: (…)
¿Qué relación encontraste [entre el número de hexágonos y la cantidad de palillos]?
366. Mauro: Que cuando se juntan los hexágonos se elimina un palillo, ya no se cuenta, no cambian los palillos, va cambiando el número de hexágonos y nada más se cuentan cinco [palillos por cada hexágono que se agregue]
367. Profesor: Observen que el razonamiento es similar, solo que unos basaron su análisis desde lo numérico y otros desde lo figural (…)

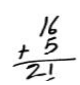
Estas tres participaciones tuvieron la particularidad de no ser cuestionadas por los demás miembros de la comunidad. De igual forma que en el problema 1 y 2, se infiere que los estudiantes solo ofrecen reservas al proceder de sus compañeros, si sus resultados son diferentes a los de ellos. De otro modo, las ideas discutidas actúan como si fueran compartidas por la comunidad. La evidencia empirica de que esta forma de razonar se convirtió en normativa, se obtiene a partir de los Argumentos 24 y 25, ya que la idea matemática estuvo funcionando repetidamente como DATO y/o GARANTÍA para diferentes CONCLUSIONES. Así, cumplió con C3 y se convirtió en la *FNR1: Le sumé cinco, que es lo que va aumentando la cantidad de palillos de una figura a otra.*

La FNR1 fue expresada bajo diferentes ideas matemáticas individuales a lo largo de la interacción en el aula. En la Tabla 5.20 son resumidas las ideas y se presenta la evolución que tuvo en su proceso de consolidación como FNR.

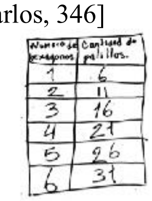
Tabla 5.20.
Evolución del razonamiento matemático individual asociada con la FNR1

<table>
<tr><th>Ideas matemáticas individuales asociadas con la FNR1 en el desarrollo del problema 3</th></tr>
<tr><td>

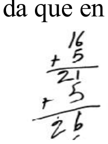
- Para la figura 4, fui sumando de cinco en cinco, entonces para la figura 4 me da 21 palillos [Carlos, 334]
- [Carlos, 340]



- Seguí sumando de cinco en cinco [Carlos, 346]



- Tomé el valor de cuatro hexágonos que son 21 palillos, y para formar cinco hexágonos, basta que le agregue cinco palillos, me da que en total son 26 palillos [Carlos, 346]



</td></tr>
</table>

- Para seis hexágonos, a 26 le sumo cinco, y me da que la cantidad de palillos necesarios son en total 31 [Carlos, 346]

$$\begin{array}{r} 16 \\ +\ 5 \\ \hline 21 \\ +\ 5 \\ \hline 26 \\ +\ 5 \\ \hline 31 \end{array}$$

- Que se le va sumando de cinco en cinco y da el resultado [Carlos, 350]
- Vi que los valores de número de hexágonos van aumentando de uno en uno, y los valores de cantidad de palillos van aumentando de cinco en cinco [Karen, 352]

Número de hexágonos	Cantidad de palillos.
1	6
2	11
3	16
4	21
5	26
6	31

- Para completar la table, lo que hice, fue tomar la cantidad de palillos que forman tres hexágonos, y le sumé cinco, que es lo que va aumentando la cantidad de palillos de una figura a otra [Karen, 352]

$$\begin{array}{r} 16 \\ +\ 5 \\ \hline 21 \end{array}$$

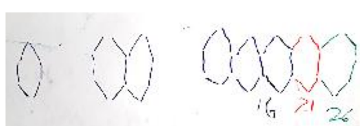
- Para cinco hexágonos, hice lo mismo [Karen, 352]

$$\begin{array}{r} 21 \\ +\ 5 \\ \hline 26 \end{array}$$

- Y para seis hexágonos [Karen, 352]

$$\begin{array}{r} {}^{1}26 \\ +\ 5 \\ \hline 31 \end{array}$$

- Mauro observó que para un hexágono son seis [palillos que lo forman], y que luego, ya no se van contando de seis en seis, si no de cinco en cinco. Es decir, que cada vez que añadía un hexágono [señala el dibujo con tres, cuatro y cinco hexágonos] tenía que agregar cinco palillos [Profesor, 363]



- 16 [palillos], y para formar cuatro hexágonos, le agregué cinco palillos, me da 21 palillos. Para cinco hexágonos, agrego cinco palillos, me da 26 [Mauro, 364]
- Que cuando se juntan los hexágonos se elimina un palillo, ya no se cuenta, no cambian los palillos, va cambiando el número de hexágonos y nada más se cuentan cinco [Mauro, 366]
- Así avanza la sucesión, de cinco en cinco [Sergio, 392]

5.3.1.2. FNR2: Multipliqué por cinco, porque son los palillos que se van aumentando. Le aumenté uno, porque observé que luego de contar cierta cantidad de veces cinco palillos, sobraba un palillo

La interacción en el aula siguió y la FNR1 fue utilizada por los miembros de la comunidad como evidencia para nuevas conclusiones. Una de ellas, surgió cuando Paola compartió con la clase (extracto 367-374) una forma más sofisticada de determinar los términos del patrón figural. Producto de conectar lo qué cambia y lo qué permanece de un término a otro del patrón figural. Ella identificó que:

1) Por cada hexágono que se aumenta, los palillos aumentan en cinco unidades.
2) Luego de contar cierta cantidad de veces cinco palillos, sobraba un palillo.

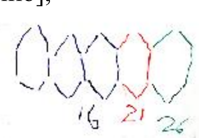
Con base en este análisis, estableció una relación matemática entre el patrón y su posición, que usó para determinar términos específicos cercanos.

El Argumento 26 (Figura 5.26) reconstruye la explicación compartida por Paola. Se puede observar que da como DATOS la conexión que hace de lo qué cambia y lo qué permanece entre los términos del patrón figural. Su CONCLUSIÓN es la relación numérica establecida para el caso específico de cuatro hexágonos. También, presentó GARANTÍAS y RESPALDOS que soportaron el tránsito de los datos a la conclusión, basándose de lo observado en el patrón figural. Al ser el primer argumento compartido sobre esta forma de razonar, se vio en la tarea de justificar paso por paso su razonamiento, de ahí que la reconstruccción de su argumento, haya presentado la mayoría de los elementos de la estructura básica del modelo argumentativo de Toulmin.

367. Profesor: (…) ¿Alguien lo hizo de una forma diferente? (…)
368. Paola: [Pasa y escribe su procedimiento en la pizarra]

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 5 \\ \hline 20 \\ +\ 1 \\ \hline 21 \end{array}$$

369. Profesor: ¿Qué representa este cuatro?
370. Paola: Cuatro hexágonos
371. Profesor: ¿Por qué lo multiplicas por cinco?
372. Paola: <u>Porque son los palillos que se van aumentando</u> [por cada hexágono que se aumente]
373. Profesor: ¿Y luego?
374. Paola: <u>Le aumenté uno, porque observé en las figuras que luego de contar cierta cantidad de veces cinco palillos, sobraba un palillo</u>, miré uno, dos, tres, cuatro, cinco [señala los palillos del primer hexágono del dibujo de cinco hexágonos presentado por Carlos], uno, dos, tres, cuatro, cinco [señala los palillos del segundo hexágono, Paola continua señalando los palillos por grupos de cinco y señala al final que sobra un palillo],



375. Profesor: Señala ese palillo que sobra en las siguientes figuras [señala los dibujos de las figuras representadas por Carlos]
376. Paola: [Encierra el palillo en cada uno de los dibujos de las figuras]

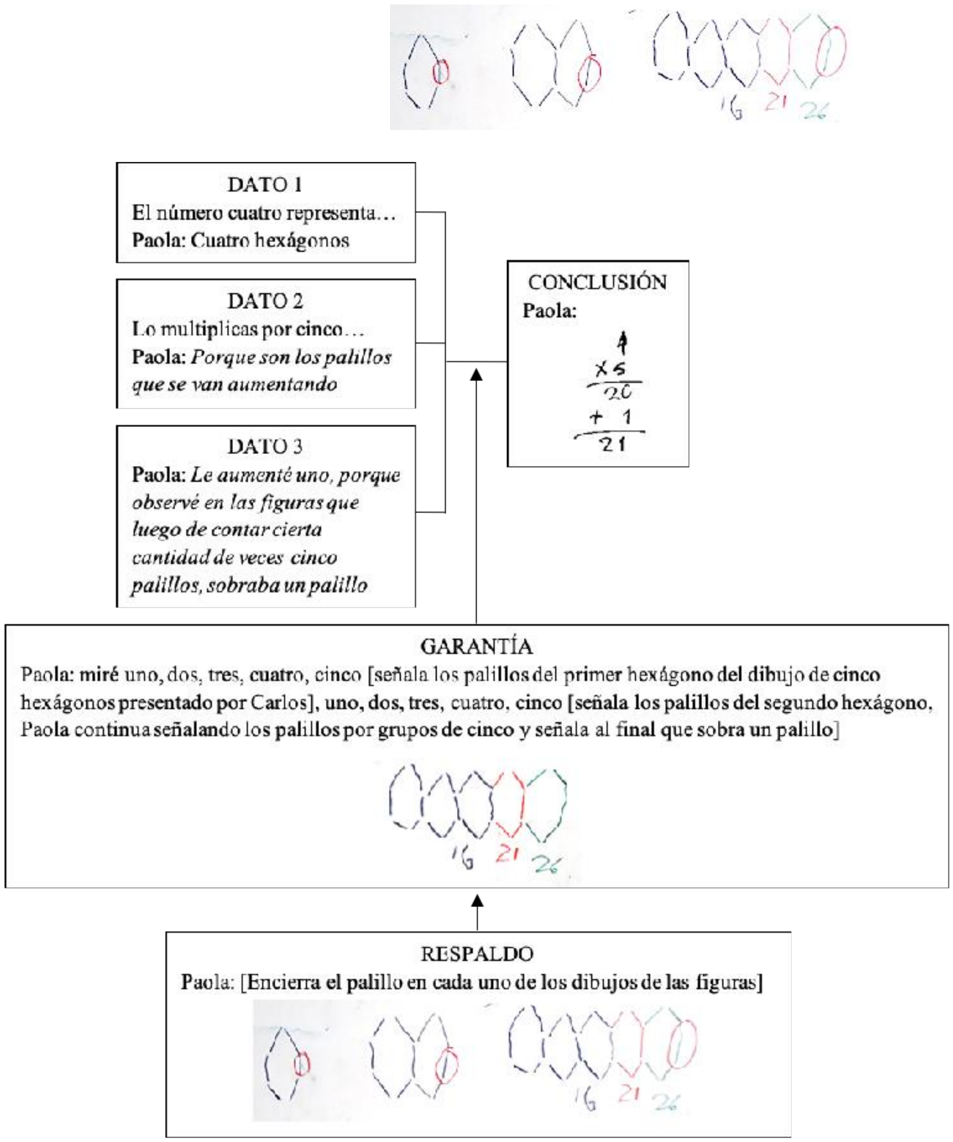


Figura 5.26. Argumento 26. Paola usa como dato la regularidad observada para establecer una nueva relación.

Paola continuó su explicación de cómo obuvo la cantidad de palillos que forman las figuras con cinco y seis héxagonos. Es presentada su explicación para el caso particular de la figura con cinco hexágonos (extracto 377-383). La Figura 5.27 presenta la reconstrucción de su argumento. Establece como tesis (CONCLUSIÓN) la relación establecidad entre el patrón y su posición en un registro numérico y como evidencia (DATO) esa misma relación establecida verbalmente. Suprimiendo las garantías que en un argumento anterior había compartido. Evidencia que se cumplió con C1 y se constituyó la *FNR2: Multipliqué por cinco, porque son los palillos que se van aumentando. Le aumenté uno, porque observé que luego de contar cierta cantidad de veces cinco palillos, sobraba un palillo.*

377. Profesor: (…) ¿Cuánto te dio para cinco hexágonos?
378. Paola: [Pasa y escribe su procedimiento en la pizarra]

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times\ 5 \\ \hline 25 \\ +\ 1 \\ \hline 26 \end{array}$$

379. Profesor: ¿Qué fue lo que hiciste? Explícanos tú procedimiento
380. Paola: <u>Multipliqué por cinco, y al resultado, le sumé uno</u>
(…)
383. Profesor: Observen, cómo son los resultados obtenidos por Paola con los que a ustedes les dio y con los que nos han presentado los otros compañeros (…)

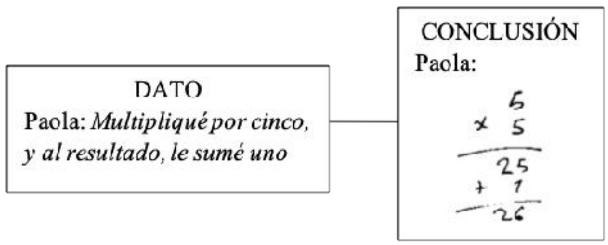


Figura 5.27. Argumento 27. Paola usa la relación establecida para determinar un nuevo término.

La FNR2 fue expresada bajo diferentes ideas matemáticas individuales durante la interacción en el aula. En la Tabla 5.21 son resumidas las ideas y es presentada su evolución individual.

Tabla 5.21.
Evolución del razonamiento matemático individual asociada con la FNR2

Ideas matemáticas individuales asociadas con la FNR2 en el desarrollo del problema 3
• [Paola,368] $\begin{array}{r} 4 \\ \times 5 \\ \hline 20 \\ +\ 1 \\ \hline 21 \end{array}$ • Le aumenté uno, porque observé en las figuras que luego de contar cierta cantidad de veces cinco palillos, sobraba un palillo [Paola, 374] • [Paola,377] $\begin{array}{r} 6 \\ \times\ 5 \\ \hline 25 \\ +\ 1 \\ \hline 26 \end{array}$ • Multipliqué por cinco, y al resultado, le sumé uno [Paola,380] • [Paola,382] $\begin{array}{r} 6 \\ \times 5 \\ \hline 30 \\ +1 \\ \hline 31 \end{array}$ • Para cuatro, son 21 palillos. Para cinco, 26 palillos [Paola,382]

5.3.2. PMA2: Generalizar aritméticamente

Esta práctica se detectó a partir de la actividad matemática común de los estudiantes en tres formas normativas de razonamiento:

FNR3: $(23 \times 5) + 1 = 116$
FNR4: Fui sumando de cinco en cinco hasta llegar a la cantidad solicitada
FNR5: $(23 \times 6) - (23 - 1) = 116$

Esta actividad estuvo compuesta de razonamientos orientados a generalizar lo qué es común a todos los términos posteriores de un patrón. Con base en el uso de cantidades determinadas, es decir, términos k-ésimos. La práctica consistió en el uso de los patrones establecidos en la PMA1, para generar términos lejanos. Los razonamientos matemáticos de los estudiantes fueron soportados por argumentos numéricos (aritmética básica). Se caracterizó por el uso de argumentos matemáticos que conectan lo numérico con el contexto del problema, y viceversa.

5.3.2.1. FNR3: $(\mathbf{23} \times \mathbf{5}) + \mathbf{1} = \mathbf{116}$

Esta idea matemática fue el resultado de abstraer numéricamente la relación establecida en la FNR2 y de usarla para determinar términos lejanos del patrón. Un argumento relevante para esta forma de razonar, ocurrió cuando Sergio presentó a la clase (extracto 26-27) qué fue lo que realizó para obtener la cantidad de palillos que forman la figura con 23 hexágonos. Su argumento (Figura 5.28) se proporciona como evidencia empírica:

1) Del uso de la relación establecida en la FNR2 (DATO 5) en un registro numérico para determinar términos lejanos del patrón (CONCLUSIÓN 5).
2) De cómo autogestiona la limitación de la primera forma de proceder “multiplicar por cinco”, para establecer una nueva forma, que resulta válida para las concidiones del patrón analizado “multiplicar por cinco y sumarle uno”.
3) De la flexibilidad en su razonar, ya que no presenta fijación por una forma de proceder y tampoco resistencia a abandorarla.

El Argumento 28 es el resultado de una concatenación de argumentos, que fueron establecidos como soporte a una conclusión final (CONCLUSIÓN 5) que se distinguió como la relación matemática entre la posición y el término del patrón para el caso particular de 23 hexágonos.

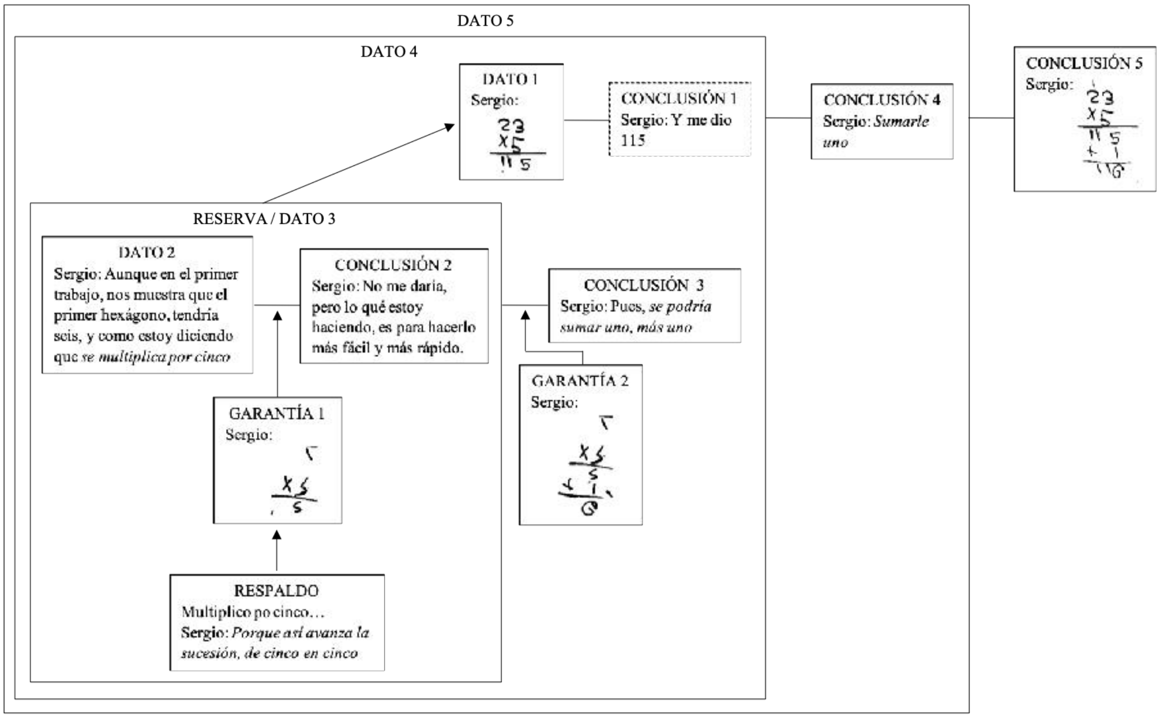
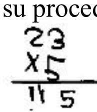


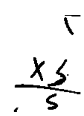
Figura 5.28. Argumento 28. Sergio establece una relación matemática para el caso especifíco de 23 hexágonos.

388. Sergio: Lo primero que hice fue determinar cuántos palillos se necesitan para formar 23 hexágonos, lo que hice fue [escribe su procedimiento en la pizarra]



Y me dio 115 (…)

aunque en el primer trabajo, nos muestra que el primer hexágono, tendría seis, y como estoy diciendo que <u>se multiplica por cinco</u> [escribe su procedimiento para el caso de un hexágono]

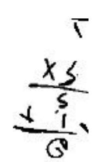


$[1 \times 5 = 5]$

No me daría, pero lo qué estoy haciendo, es para hacerlo más fácil y más rápido.

389. Profesor: ¿Harías algo más al respecto o solo multiplicarlo por cinco?

390. Sergio: Pues, <u>se podría sumar uno</u>, más uno, aquí [señala su procedimiento de $1 \times 5 = 5$ y le suma 1]



$[1 \times 5 = 5]$
$[5 + 1 = 6]$

(…)

391. Profesor: ¿Por qué multiplicar por cinco?

392. Sergio: <u>Porque así avanza la sucesión, de cinco en cinco</u>

393. Profesor: Ok, ¿y con qué te quedas? Con este procedimiento [señala el último procedimiento que consistió en multiplicar el número de hexágonos por cinco y al resultado sumarle uno] o con solo multiplicar por cinco [el número de hexágonos]
394. Sergio: Por éste [señala el último procedimiento que consistió en multiplicar el número de hexágonos por cinco y al resultado sumarle uno]
395. Profesor: ¿Por qué?
396. Sergio: Porque con este me da el resultado del primer trabajo y con este [el otro procedimiento] me da diferente
397. Profesor: ¿Qué le haría falta a este procedimiento [el de multiplicar 23 por cinco]?
398. Sergio: Sumarle uno [lo agrega al resultado]

$$\begin{array}{r} {}^{1}\\ 23 \\ \times 5 \\ \hline 115 \\ + \ \ 1 \end{array}$$

399. Profesor: ¿Cuánto te daría?
400. Sergio: [realiza la suma y escribe el resultado en la pizarra]

$$\begin{array}{r} {}^{1}\\ 23 \\ \times 5 \\ \hline 115 \\ + \ \ 1 \\ \hline 116 \end{array}$$

La dicusión continuó (extracto 401-404) y el profesor cuestionó a Sergio si “multiplicar por cinco y sumarle uno” sería todo el procedimiento o si haría algo más. También, le solicito determinar la cantidad de palillos necesarios para formar una figura con 52 hexágonos y le preguntó si esta forma de proceder era válida para cualquier término del patrón. En ese contexto, Sergio (Argumento 29) ofreció como parte de su explicación que “sí solo eso” era su procedimiento y que “haría lo mismo” para el caso de 52 hexágonos (DATO), con base en ello, planteó en la piazarra la relación matemática en un registro numérico establecida para determinar la cantidad de palillos necesarios para formar una figura con 52 hexágonos (CONCLUSIÓN).

401. Profesor: Él dice que primero había multiplicado por cinco, pero luego observó algo que sucedía con los valores de la tabla que se les había dado al inicio del problema. Sergio, ¿entonces solo ésto harías? [señala el procedimiento hecho para 23 hexágonos], ¿qué harías para el otro caso? [para 52 hexágonos]
402. Sergio: Sí solo eso y haría lo mismo para este otro caso [completa el procedimiento]

$$\begin{array}{r} {}^{1}\\ 52 \\ \times 5 \\ \hline 260 \\ + \ \ 1 \\ \hline 261 \end{array}$$

403. Profesor: ¿Ese procedimiento se estaría cumpliendo para todas las cantidades que se te piden?

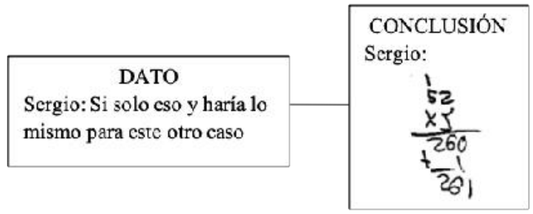
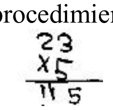
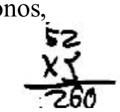
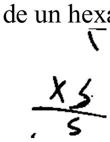
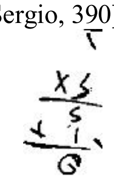


Figura 5.29. Argumento 29. Sergio usa la relación matemática para el caso especifíco de 52 hexágonos.

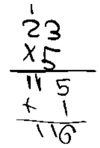
Evidencia empírica que se cumplió con C1, ya que las garantías y los respaldos que aparecieron en el Argumento 28, no aparecieron en los argumentos subsiguientes (e.g. Argumento 29) de los estudiantes al utilizar esta misma idea matemática. Así, se constituyó la *FNR3:* $(23 \times 5) + 1 = 116$.

La FNR3 fue expresada bajo diferentes ideas matemáticas individuales a lo largo de la interacción en el aula. La Tabla 5.22 resume las ideas y permite mirar la evolución del razonamiento matemático individual de la comunidad.

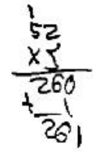
Tabla 5.22.
Evolución del razonamiento matemático individual asociada con la FNR3

Ideas matemáticas individuales asociadas con la FNR3 en el desarrollo del problema 3
• Lo primero que hice fue determinar cuántos palillos se necesitan para formar 23 hexágonos, lo que hice fue [escribe su procedimiento en la pizarra]  Y me dio 115 [Sergio, 388] • En la segunda cuando tengo 52 hexágonos,  $[52 \times 5 = 260]$ Me dió 260 [Sergio, 388] • El primer hexágono, tendría seis, y como estoy diciendo que se multiplica por cinco [escribe su procedimiento para el caso de un hexágono]  $[1 \times 5 = 5]$ No me daría, pero lo que estoy haciendo, es para hacerlo más fácil y más rápido [Sergio, 388] • Se podría sumar uno, más uno, aquí [Sergio, 390] 

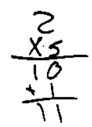
- [Sergio, 400]



- Haría lo mismo para este otro caso [Sergio, 402]



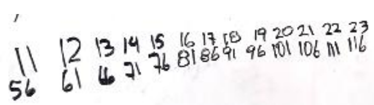
- [Sergio, 406]



5.3.2.2. FNR4: Fui sumando de cinco en cinco hasta llegar a la cantidad solicitada

Un argumento relevante para esta formar de razonar. Fue presentado por Yahir durante el episodio 2 de la discusión grupal. Basado en la idea establecida en la FNR. La variante fue el reconocimiento de su aplicación a todos los términos del patrón. El extracto 427-430 muestra su explicación para determinar la cantidad de palillos necesarios para formar una figura con 23 hexágonos. El Argumento 30 (Figura 5.30) presenta la reconstrucción de su explicación mediante el modelo de Toulmin, donde se deja ver la idea de "fui sumando de cinco en cinco hasta llegar a la cantidad solicitada" como DATO y GARANTÍA. Es de resaltar que cuando Yahir hace mención a "igual" (extracto 428) hace referencia a la FNR1.

427.	Profesor:	Explícanos, ¿qué fue lo que hiciste para poder obtener la cantidad de palillos para 23 hexágonos?
428.	Yahir:	<u>Igual, fui sumando lo que obtuve en la figura 3</u> [señala la cantidad de 16 palillos], <u>hasta llegar al valor que le corresponde a la figura 23</u> [le muestra al profesor su producción escrita]
429.	Profesor:	Preséntalo en el pizarra
430.	Yahir:	[Escribe en la pizarra]



<u>Fui sumando de cinco en cinco hasta llegar a la cantidad solicitada</u>

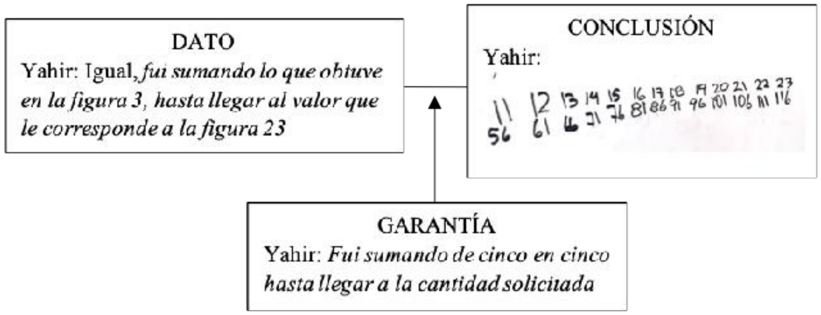
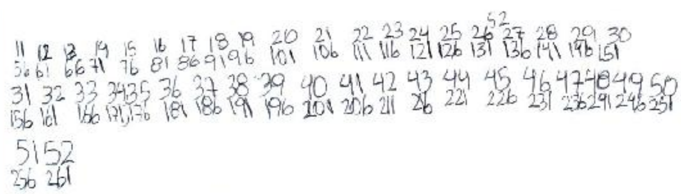


Figura 5.30. Argumento 30. Yahir usa la regularidad establecida en FNR1 para el caso específico de 23 hexágonos.

La discusión continuó y Yahir compartió (extracto 431-432) la forma en cómo determinó la cantidad de palillos necesarios para formar una figura con 52 hexágonos. La reconstrucción de su argumento se presenta en la Figura 5.31. Usó como DATO la regularidad de "fui sumando cinco al valor anterior hasta llegar a la cantidad que le corresponde a 52 hexágonos" y como CONCLUSIÓN una representación numérica de las relaciones establecidas, organizadas como un listado de valores.

431. Profesor: ¿Qué hiciste para obtener la cantidad de palillos necesarios para 52 hexágonos?
432. Yahir: Igual, <u>le fui sumando cinco al valor anterior</u> [señala la tabla] <u>hasta llegar a la cantidad que le corresponde a 52 hexágonos</u> [muestra la tabla de su producción escrita]



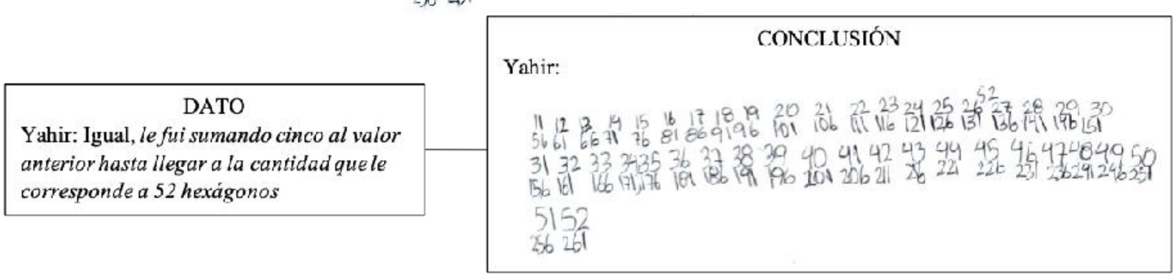


Figura 5.31. Argumento 31. Yahir usa la regularidad establecida en FNR1 para el caso específico de 52 hexágonos.

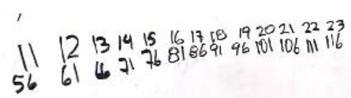
Con el fin de conocer la opinión de la comunidad del aula sobre la forma de proceder de Yahir para determinar términos lejanos, el profesor cuestionó al grupo (extracto 433-437) sobre ¿Qué opinan del procedimiento?. Fue así, que se hizo notar que los estudiantes reconocen que es un procedimiento válido, pero no viable para cantidades lejanas. Asi mismo, Yahir admitió que para cantidad muy grandes, como lo es 2000 hexágonos, tendría que determinar una forma diferente de proceder. Lo que mostró concordacia entre formas de pensar de los estudiantes de la comunidad.

433.	Profesor:	¿Qué opinan del procedimiento de Yahir?
434.	Fanny:	Es muy largo
435.	Sergio:	Muy tardado
436.	Profesor:	Si se les pide, la cantidad de palillos necesarios para formar 2000 hexágonos, ¿cómo lo determinarías Yahir? ¿Seguirías con este procedimiento? [señala la tabla en la pizarra]
437.	Yahir:	No, buscaría otra manera, encontraría otra forma, porque es un número muy lejano

Los Argumentos 30 y 31, fueron presentados como evidencia empírica de que una idea en particular es usada repetidamente como DATO o GARANTÍA para diferentes conclusiones. Así se cumplió con C3 y se constituyó en la *FNR4: Fui sumando de cinco en cinco hasta llegar a la cantidad solicitada*.

La FNR4 fue expresada bajo diferentes ideas matemáticas individuales a lo largo de la interacción en el aula. En la Tabla 5.23 son resumidas las ideas y se presenta la evolución que tuvo en su proceso de consolidación como FNR.

Tabla 5.23.
Evolución del razonamiento matemático individual asociada con la FNR4

Ideas matemáticas individuales asociadas con la FNR4 en el desarrollo del problema 3
• Yo lo hice sumando de cinco en cinco [Yahir, 416] • Yo fui sumando, la figura 1 [un hexágono], tiene seis palillos, y observe que para la figura 2 [dos hexágonos] se tienen 11 palillos, le fui sumando al seis, cinco palillos, y así me da 11 palillos y así fui sumando hasta llegar a la figura 23 [23 hexágonos] que me da 116 [Yahir, 418] • Un hexágono tiene seis palillos, más otros cinco, me da 11 [Yahir, 420] • Para obtener lo de la siguiente figura que son 11 [palillos], que son cuando se tiene dos hexágonos, hace faltan cinco, entonces le sumo cinco [Yahir, 422] • Para la figura 3. Lo hice igual, sumando otros cinco [Yahir, 426] • Igual, fui sumando lo que obtuve en la figura 3, hasta llegar al valor que le corresponde a la figura 23 [Yahir, 428]  • Fui sumando de cinco en cinco hasta llegar a la cantidad solicitada [Yahir, 430] • Igual, le fui sumando cinco al valor anterior [señala la tabla] hasta llegar a la cantidad que le corresponde a 52 hexágonos [Yahir, 432]

5.3.2.3. FNR5: $(\mathbf{23} \times \mathbf{6}) - (\mathbf{23} - \mathbf{1}) = \mathbf{116}$

Esta idea matemática emergió en la comunidad de aula, como una forma diferente de proceder a las FNR3 y FNR4. Después de llegar a la conclusión de que la FNR4 no es la mejor opción para determinar términos lejanos. Al respecto, Fanny (extracto 438-457) compartió una nueva forma de razonar, más sofisticada, resultado de analizar y coordinar la estructura espacial y numérica del patrón. Ella identificó que:

1) Orginalmente cada hexágono está formado por seis palillos, y
2) Al compartir un lado los hexágonos, los palillos que no se están considerando, son igual en cantidad, que la diferencia de la cantidad de hexágonos menos uno.

Así, estableció una relación matemática entre el patrón y su posición, que usó para determinar términos lejanos. Su argumento (Figura 5.26) se proporciona como evidencia de una de las formas de generalizar aritméticamente, lo qué es común a todos los términos posteriores de un patrón. Esta forma de proceder fue expuesta hasta el final de la sesión destinada a abordar el problema 3. Por ello, Fanny ofrece como evidencia (DATO 5) una concatenación de argumentos que sustentan cada paso de la nueva relación registrada de forma verbal y numérica. La tesis (CONCLUSIÓN 4) es la relación de correspondencia entre la cantidad de palillos y el número de hexágonos para el caso específico de 23 hexágonos.

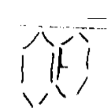
438. Profesor: ¿Alguien más que lo halla resuelto de forma diferente? [alza la mano Fanny y pasa al frente] muestranos como lo hiciste
439. Fanny: Para 23, lo que hice fue multiplicarlo por seis [escribe en la pizarra]

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 6 \\ \hline 138 \end{array}$$

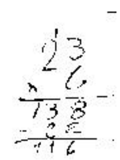
440. Profesor: ¿23 qué representa?
441. Fanny: El número de héxagonos que nos piden
442. Profesor: ¿Y seis?
443. Fanny: El número de palillos que tiene cada hexágono
444. Profesor: ¿Cuántos lados tiene un hexágono?
445. Estudiantes: Seis
446. Profesor: Ella considera que cada hexágono tiene seis lados, por tanto, considera seis palillos
447. Fanny: Y a 23 le resto uno

$$\begin{array}{r} 23 \\ -\ 1 \\ \hline 22 \end{array}$$

448. Profesor: ¿Por qué le restas uno?
449. Fanny: Porque es como el que siempre falta
450. Profesor: De donde supones que siempre falta ese uno, si lo miras de forma figural, ¿podrías explicarlo?
451. Fanny: [Dibuja en la pizarra]



452. Profesor: Ésto que nos muestras es considerando seis palillos por cada hexágono, y ese uno que es el que siempre falta, ¿cuál sería?
453. Fanny: Éste [señala en la pizarra el palillo al cual se refiere]
454. Profesor: Noten que el uno que ella está restando [señala el menos uno], es éste que estaría quitando [señala el pallilo en la figura], dado que los hexágonos comparten un lado
455. Fanny: Entonces, el 22 se lo resto a 138, 138 menos 22 me da 116



456. Profesor: 116, ¿qué?
457. Fanny: <u>116 palillos son los necesarios para formar 23 hexágonos</u>

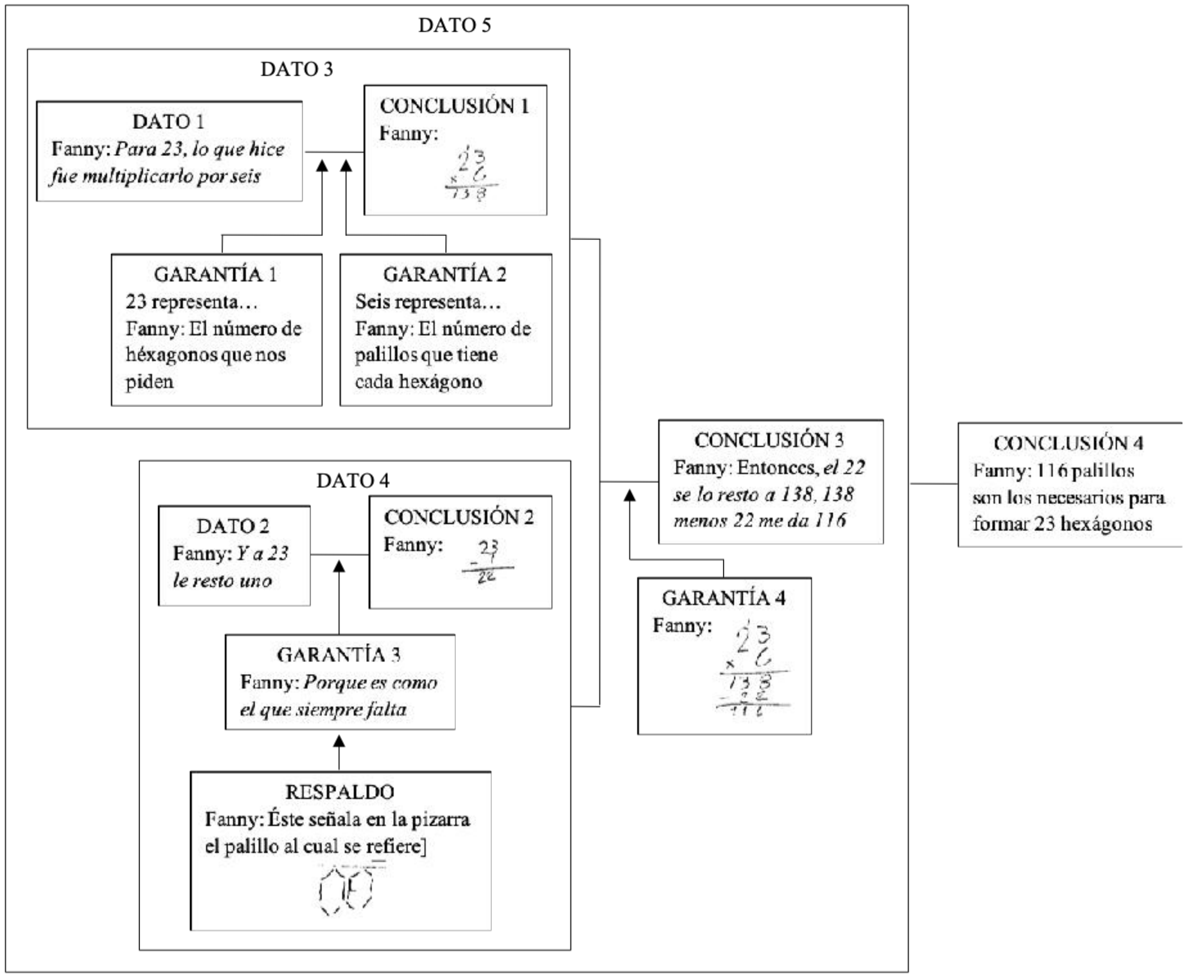
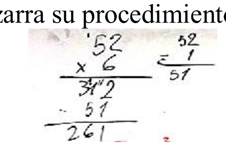


Figura 5.32. Argumento 32. Fanny establece una nueva forma de proceder para determinar términos lejanos.

La discusión continuó y Fanny (extracto 458-465) usó esta forma de razonar para determinar la cantidad de palillos necesarios para formar una figura con 52 hexágonos. Ofreció como DATO la frase “lo mismo” para hacer referencia al proceso seguido en el Argumento 32 (Figura 5-32) y como CONCLUSIÓN la relación numérica establecida para el caso específico de 52 hexágonos. Por último, proporcionó como conector entre dato y conclusión, una GARANTÍA centrada en la interpretación verbal de dicha relación.

458. Profesor: ¿Para 52 hexágonos qué fue lo que hiciste?
459. Fanny: Lo mismo [escribe en la pizarra su procedimiento]



460. Profesor: ¿Qué fue lo que hiciste?
461. Fanny: Multiplicar por seis el número de hexágono, luego a 52 le resto uno y lo que me da se lo resto al resultado de 52 por seis, entonces 312 menos 51 me da 261
(…)
465. Fanny: (…) este procedimiento lo aplico para todos los casos.

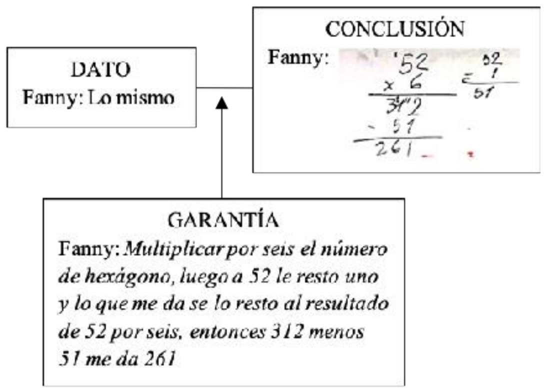
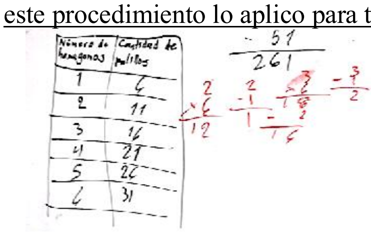


Figura 5.33. Argumento 33. Fanny usa la nueva forma de proceder para determinar el término que le corresponde al caso de 52 hexágonos.

Para desmostrar que esta forma de proceder es válida para cualquier término del patrón, Fanny (extracto 465) la aplicó para determinar los primeros términos del patrón, obteniendo los resultados esperados (conocidos). Así evidenció, que su forma de razonar se sustentó de un razonamiento abductivo que la llevó a expresar una generalización aritmética del patrón. El razonamiento abductivo, de acuerdo con Rivera (2013), implica inicialmente generar una hipótesis o reducir una gama de hipótesis que luego se verifica por inducción. Es la fuente de ideas originales.

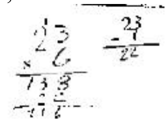
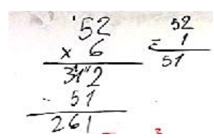
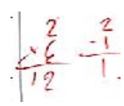
465. Fanny: (…) Si tengo dos hexágonos, lo multiplico por seis y me da 12 [acompaña su explicación con el registro de su procedimiento en la pizarra], a eso le quito el resultado de la resta, dos menos uno, que da uno [acompaña su explicación con el registro de su procedimiento en la pizarra], entonces 12 menos uno me da los 11 que es el resultado registrado en la tabla [señala el valor en la pizarra]. Esto pasa para todos los casos, por ejemplo, cuando tengo tres hexágonos, hago lo mismo [escribe en la pizarra su procedimiento], me da 16 [palillos] que corresponde con la cantidad registrada en la tabla [señala el valor en la pizarra], este procedimiento lo aplico para todos los casos.



La evidencia empírica de que la idea matemática inmersa en el núcleo del Argumento 32 (figura 5.32) fue tomada como compartida por la comunidad del aula, fue la doble función dada a dicho argumento, pues en el Argumento 33 tuvo la función de DATO y no presentó reservas por parte de alguno de los estudiantes. Lo cual significó que las conclusiones establecidas en ambos argumentos son válidas. En términos del problema, es que los resultados obtenidos para los términos determinados fueron corrextos. Así se satisfizo el C2 y se estableció la *FNR5:* $(23 \times 6) - (23 - 1) = 116$.

La FNR5 fue expresada bajo diferentes ideas matemáticas individuales durante la interacción en el aula. En la Tabla 5.24 son resumidas las ideas y es presentada su evolución individual.

Tabla 5.24.
Evolución del razonamiento matemático individual asociada con la FNR5

Ideas matemáticas individuales asociadas con la FNR5 en el desarrollo del problema 3
• Para 23, lo que hice fue multiplicarlo por seis [Fanny, 439]. Y a 23 le resto uno [Fanny, 447]. Entonces, el 22 se lo resto a 138, 138 menos 22 me da 116 [Fanny, 455] 
▪ Lo mismo [Fanny, 459] 
▪ Multiplicar por seis el número de hexágono, luego a 52 le resto uno y lo que me da se lo resto al resultado de 52 por seis, entonces 312 menos 51 me da 261 [Fanny, 461]
▪ Si tengo dos hexágonos, lo multiplico por seis y me da 12, a eso le quito el resultado de la resta, dos menos uno, que da uno, entonces 12 menos uno me da los 11 que es el resultado registrado en la tabla Fanny, 465] 
▪ Esto pasa para todos los casos, por ejemplo, cuando tengo tres hexágonos, hago lo mismo [escribe en la pizarra su procedimiento], me da 16 [palillos] que corresponde con la cantidad registrada en la tabla [señala el valor en la pizarra], este procedimiento lo aplico para todos los casos [Fanny, 465] 

5.3.3. PMA3. Generalizar algebraicamente

Esta práctica fue detectada a partir de la actividad matemática común de los estudiantes en la última forma normativa de razonamiento:

FNR6: $(¿\,? \times 5) + 1$

Estuvo compuesta de un razonamiento centrado en articular la relación funcional entre la posición y el patrón, para el término n-ésimo. La práctica consistió en la generalización de una relación matemática con cantidades indeterminadas. La expresión general fue representada en palabras y hubo indicios de un primer acercamiento al uso de variables. Los razonamientos matemáticos de los estudiantes fueron soportados por argumentos verbales y alfa-numéricos fundamentados en una estructura multiplicativa. Se caracterizó por el uso de argumentos matemáticos que conectan lo general (lo indeterminado) con lo numérico (relaciones específicas) y con el contexto del problema (significado).

5.3.3.1. FNR6: $(¿?\times \mathbf{5})+\mathbf{1}$

Esta forma de razonar emergió durante el segundo episodio de la discusión grupal cuando se debatían los procesos seguidos para determinar términos lejanos del patrón. Un primer argumento (extracto 409-412) asociado con esta idea matemática, fue dado por Karen, quien manifiestó una sofisticación de la FNR3, al interpretar el procedimiento seguido por Sergio para determinar términos específicos (k-ésimos). Ella (Figura 5.34) estableció que "lo hizo de esa forma" (DATO) y al dar sentido, lo hace expresando una regla general (CONCLUSIÓN) "la cantidad de palillos va de cinco en cinco, así que, lo que hice de primero fue multiplicar por cinco el número de figura [el número de hexágonos] y luego más uno, que el uno es el sobrante". Reconocida como una generalización algebraica del patrón al trabajar con cantidades indeterminadas.

409.	Profesor:	¿Qué opinan del procedimiento presentado por Sergio?
410.	Karen:	Lo hice de esa forma, observé que la cantidad de palillos va de cinco en cinco, así que, lo que hice de primero fue multiplicar por cinco el número de figura [el número de hexágonos] y luego más uno, que el uno es el sobrante
411.	Profesor:	¿Eso lo harías para todos los valores?
412.	Karen:	Si

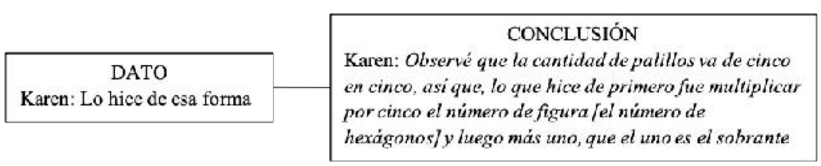
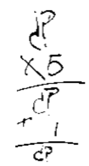


Figura 5.34. Argumento 34. Karen expresa verbalmente una regla general del patrón.

La discusión continuó y al cierre (extracto 467-470), Hugo compartió la expresión alfanumérica que construyó sobre el término general del patrón y Sergio lo cuestionó sobre por qué usó el signo de interrogación, con afán de comprender la idea matemática mostrada. Este argumento es reconstruido en la Figura 5.35. Se presentó como CONCLUSIÓN la expresión general construida y como DATO una explicación sobre por qué y cómo son usados los signos de interrogación. Es resaltado que los signos se usaron para designar variables y valores desconocidos, tal como lo hizo para el problema 3. El primer signo de interrogación representa el valor de la variable de número de hexágonos; y el segundo y tercer signo de interrogación representan valores desconocidos que dependen del valor asigando al primer signo. Siendo el tercer signo de interrogación el valor de la variable cantidad de palillos necesarios para formar cierto número de hexágonos. Certeza de una generalización algebraica.

467. Hugo: [pasa y escribe la regla en la pizarra]



468. Profesor: ¿Qué le preguntarían a su compañero sobre su procedimiento?
469. Sergio: ¿Por qué el signo de interrogación?
470. Hugo: El signo de interrogación [señala en la pizarra el primer signo de interrogación] es para multiplicar cualquier número de hexágonos, bueno el número de hexágonos pedido, por cinco, la multiplicación me daría un resultado [señala en la pizarra el segundo signo de interrogación], a este resultado le sumo uno y me daría el resultado de la cantidad de palillos [señala en la pizarra el tercer signo de interrogación]

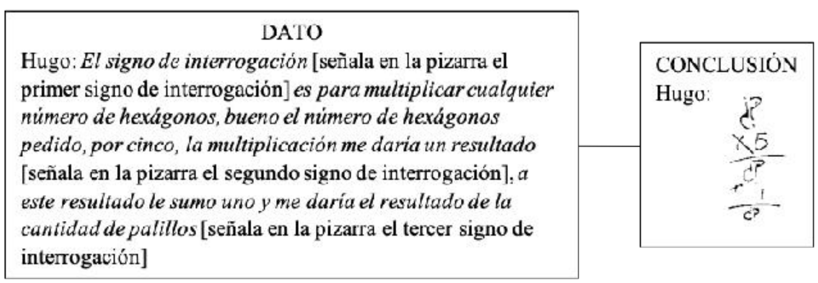


Figura 5.35. Argumento 35. Hugo expresa alfanuméricamente una regla general del patrón.

Como cierre del episodio de discusión del problema 3, el profesor centró a los estudiantes a comparar la regla general expuesta por Sergio con las reglas específicas dadas a lo largo de la interacción en el aula, con el fin de que reconocieran de cuál FNR previa resultó ésta sofisticación. Así, tomarlo de preámbulo para evidenciar sus semejanzas y diferencias, así como la importancia de la regla general del patrón.

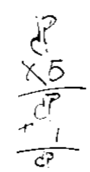
471. Profesor: Este procedimiento a cuál se parece
472. Estudiantes: A ese [señala en la pizarra el procedimiento presentado por Sergio]
473. Estudiantes: Al de Sergio
474. Profesor: Solo que él para no indicar los valores que le dan, pone signos de interrogación, que puede ser cualquier valor. Lo que él está haciendo, es expresar para cualquier caso, lo que Sergio hizo para casos particulares. Esta fue su respuesta para la última pregunta, la cual solicitaba una regla, la regla la planteó para que luego, otro compañero

> pudiera determinar la cantidad de palillos necesarios para formar cierta cantidad de hexágonos.

Los Argumentos 5.34 y 5.35 son evidencia empírica que se cumplió con C1, ya que los estudiantes reconoce que las CONCLUSIONES establecidas resultan de una interpretación más sofisticada (abstracción) de la relación expresada en la FNR3. De ahí, que no sea cuestionada su validez. Así, se constituyó la *FNR6:* $(¿?\times 5)+1$, considerada como tomada como compartida por la comunidad del aula.

Esta FNR6 fue sustentada por dos ideas matemáticas individuales presentadas en la interacción en el aula (Tabla 5.25). Presumió ser una sofisticación de las ideas matemáticas individuales constituidas en la FNR3.

Tabla 5.25.
Evolución del razonamiento matemático individual asociada con la FNR6

Ideas matemáticas individuales asociadas con la FNR6 en el desarrollo del problema 3
• Lo hice de esa forma, observé que la cantidad de palillos va de cinco en cinco, así que, lo que hice de primero fue multiplicar por cinco el número de figura [el número de hexágono] y luego más uno, el uno es el sobrante [Karen, 410] • [Hugo, 467]  • El signo de interrogación [primer signo] es para multiplicar cualquier número de hexágonos, bueno el número de hexágonos definido, por cinco, la multiplicación me daría un resultado [segundo signo de interrogación], a este resultado le sumo uno y me daría el resultado de la cantidad de palillos [tercer signo de interrogación] [Hugo, 470]

5.4. Problema 4

Este problema tuvo como propósito que los estudiantes analizaran un patrón expresado de forma verbal mediante un contexto de situación personal (de ahorro constante) y establecieran su expresión general. La discusión grupal fue desarrollada en un solo episodio centrado en debatir sobre la interpretación/aplicación de la ley de recurrencia y la expresión de la regla general.

Las formas de razonamiento individual desarrolladas por la comunidad de aula durante la interacción del problema 4 son resumidas en la Tabla 5.26. Se presenta como un bosquejo inicial de todas las formas de razonamiento que emergieron a lo largo del discurso del aula, así evidenciar cuáles se convirtieron en normativas y cuáles no.

Tabla 5.26.
Formas de razonamiento individual emergentes en el desarrollo del problema 4

Formas de razonamiento individual
FRI1: Multiplicar los días por tres, por lo que iba ahorrando, y sumar 10, qué es lo que ya tenía ahorrado
FRI2: Para obtener cuánto se ha ahorrado en cierto número de días, tenemos que multiplicar lo que ahorra cada día, por el número de días que va ahorrar, y después como dice aquí que, su alcancía tienen 10 pesos, le tengo que sumar esos diez pesos, para que me de la respuesta

Las PMA y las FNR desarrolladas por la comunidad de aula durante la interacción en el aula del problema 4 se resumen en la Tabla 5.27. Durante la explicación de cada FNR se explicitan las diferentes ideas matemáticas individuales identificadas en los estudiantes. El conjunto de estos tres aspectos evidencian la evolución del razonamiento matemático de la comunidad de aula de quinto de primaria implicada en el desarrollo del problema 4.

Tabla 5.27.
Evolución del razonamiento matemático colectivo implicado en el desarrollo del problema 4

Prácticas matemáticas en el aula	**Formas normativas de razonamiento**	**Criterio cumplido**
PMA1: Generalizar aritméticamente	FNR1: Multiplicar los días por tres, por lo que iba ahorrando, y sumar 10, qué es lo que ya tenía ahorrado	C1
PMA2: Generalizar algebraicamente	FNR2: Para obtener cuánto se ha ahorrado en cierto número de días, tenemos que multiplicar lo que ahorra cada día, por el número de días que va ahorrar, y después como dice aquí que, su alcancía tienen 10 pesos, le tengo que sumar esos diez pesos, para que me de la respuesta	C2

5.4.1. PMA1: Generalizar aritméticamente

Esta práctica fue revelada con base en el reconocimiento de una actividad matemática invariante de los estudiantes en la forma normativa de razonamiento:

> FNR1: Multiplicar los días por tres, por lo que iba ahorrando, y sumar 10, qué es lo que ya tenía ahorrado

Esta actividad estuvo compuesta de un razonamiento orientado a identificar una relación entre los aspectos cuantificables del patrón (posición y término). La práctica consistió en la interpretación del patrón recursivo y de sus condiciones iniciales dadas en el problema para trasformarlo, así establecer una relación entre los aspectos cuantificables del patrón aplicable a todos sus términos k-ésimos. Los razonamientos matemáticos de los estudiantes fueron soportados por argumentos numéricos (aritmética básica). Se caracterizó por el uso de argumentos matemáticos que conectan lo numérico con el contexto del problema, y viceversa.

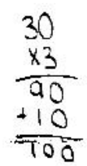
5.4.1.1. FNR1: Multiplicar los días por tres, por lo que iba ahorrando, y sumar 10, qué es lo que ya tenía ahorrado

Esta forma de razonar surgió al inicio de la discusión grupal del problema 4, cuando los estudiantes explicaron a la clase cómo determinaron términos k-ésimos del patrón analizado. En el proceso, participaron cuatro estudiantes (Xavier, Irene, Nadia y Ana), quienes se caracterizaron por compartir el mismo razonamiento, que consistió en interpretar el patrón recursivo y las condiciones iniciales dadas en el problema, y de trasformarlas en una relación matemática aplicable a todos sus términos k-ésimos del patrón.

Se presenta como ejemplo, la participación de Irene (extracto 487-488), quién argumentó la forma en que procedió para determinar la cantidad de dinero que el niño tendrá en su alcancía al cabo de 30 días de ahorrar. En la reconstrucción de su argumento (Figura 5.36) se puede apreciar que ofreció como CONCLUSIÓN un registro numérico de la relación para el caso específico de 30 días de ahorrar, y como DATO la interpretación verbal de la relación establecida. En donde, dio como evidencia que esa relación es producto de reconocer y coordinar lo que cambia "multipliqué la cantidad de días, por el dinero que iba a ahorrar por día" y qué permanece en la situación "sumé los 10 pesos que tenía en su alcancía".

487. Profesor: Quién pasa a mostrarnos lo que hizo en el inciso b, que dice, ¿Cuánto dinero tendrá su alcancía al cabo de 30 días de ahorrar?

488. Irene: Multipliqué la cantidad de días, por el dinero que iba a ahorrar por día, y me dio 90, y sumé los 10 pesos que tenía en su alcancía [Acompaña su explicación con el procedimiento escrito en la pizarra



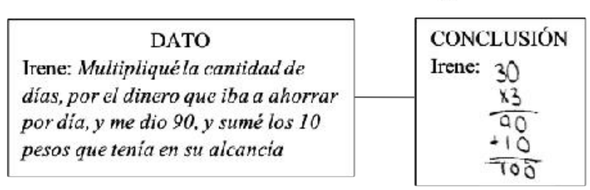


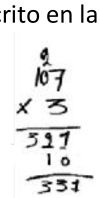
Figura 5.36. Argumento 36. Irene establece y aplica una relación matemática para determinar un término lejano.

También, en su intervención (extracto 489-492), dio evidencia de reconocer que su procedimiento fue semejante (o igual) que el de su compañero Xavier quién previamente había expuesto la forma en que procedió para determinar la cantidad de dinero que el niño tendría al cabo de una semana de ahorrar.

489.	Profesor:	¿Hay semejanza con el procedimiento que hizo Xavier?
490.	Irene:	Sí
491.	Profesor:	¿Es igual o diferente?
492.	Irene:	Igual

Otro momento importante de esta idea matemática, fue durante la participación de Nadia y Ana en la discusión grupal (extracto 493-498). El argumento de Nadia (Figura 5.37) es presentado como evidencia de la generalización aritmética establecida para el caso específico de 107 días de ahorrar. Agumento tomado por ANA como DATO para expresar una CONCLUSIÓN centrada en dar sentido a la forma de razonar de Nadia. Es así, como Ana evidenció su entendimiento y afirmó que comparte esta forma de proceder. Manifestando así, que es matemáticamente aceptable.

493.	Profesor:	Nadia, coméntanos qué fue lo que hiciste para determinar cuánto dinero tendrá su alcancía al cabo de 107 días de haber ahorrado
494.	Nadia:	Lo que hice, fue multiplicar por 3, y al resultado sumarle 10 [Acompaña su explicación con el procedimiento escrito en la pizarra]



495.	Profesor:	¿Quién puede repetirnos qué fue lo que hizo Nadia?
496.	Ana:	Multiplicó los días por tres, por lo que iba ahorrando, lo que le dio 321, y le sumó 10, qué es lo que ya tenía ahorrado, y le dio ese resultado
497.	Profesor:	Hizo el mismo procedimiento que los demás ¿tú compartes el procedimiento hecho?
498.	Ana:	Si

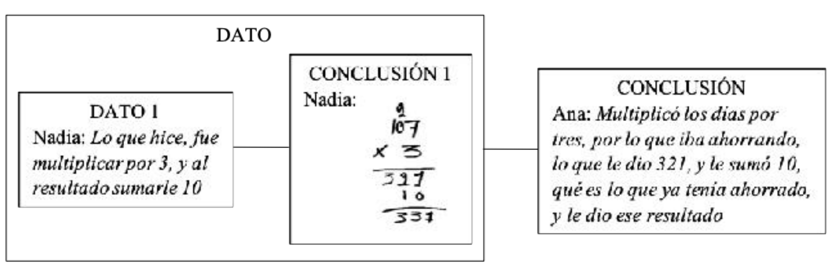


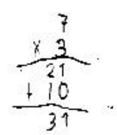
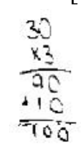
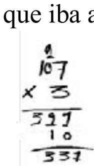
Figura 5.37. Argumento 37. Ana interpreta la relación establecida por Nadia.

Lo que se desea resaltar en los Argumentos 36 y 37 es la ausencia de GARANTÍAS y de RESERVAS en las afirmaciones compartidas por los estudiantes durante el dircurso del aula.

Por en cambio, reconocen la semejanza en sus formas de razonar (extracto 489-492 y 497-498). Manifestando así, que es matemáticamente aceptable. La idea matemática *"Multiplicar los días por tres, por lo que iba ahorrando, y sumar 10, qué es lo que ya tenía ahorrado"* funcionó en el discurso del aula como si todos tuvieran una comprensión similar, aunque existieran ligeras diferencias individuales en la comprensión. Evidencia empírica que se cumplió con C1 y se convirtió en la *FNR1*.

La FNR1 fue expresada bajo diferentes ideas matemáticas individuales a lo largo de la interacción en el aula. En la Tabla 5.28 son resumidas las ideas y se presenta la evolución que tuvo en su proceso de consolidación como FNR.

Tabla 5.28.
Evolución del razonamiento matemático individual asociada con la FNR1

Ideas matemáticas individuales asociadas con la FNR1 en el desarrollo del problema 4
• La semana tiene 7 días, y ha ahorrado por día 3 pesos, 3 por 7 igual a 21, más los 10 pesos que ya tenía antes, son 31 [Xavier, 478] 
• Los 3 pesos que va ahorrado el niño por día. Así que 3 por 7 es igual a 21, más los 10 pesos que ya tenía el niño, son 31 [Xavier, 484]
• Multipliqué la cantidad de días, por el dinero que iba a ahorrar por día, y me dio 90, y sumé los 10 pesos que tenía en su alcancía [Irene, 488] 
• Lo que hice, fue multiplicar por 3, y al resultado sumarle 10 [Nadia, 494]
• Multiplicó los días por tres, por lo que iba ahorrando, lo que le dio 321, y le sumó 10,  qué es lo que ya tenía ahorrado, y le dio ese resultado [Ana, 496]

5.4.2. PMA2: Generalizar algebraicamente

Esta práctica fue detectada a partir de la actividad matemática común de los estudiantes en la segunda forma normativa de razonamiento:

> FNR2: Para obtener cuánto se ha ahorrado en cierto número de días, tenemos que multiplicar lo que ahorra cada día, por el número de días que va ahorrar, y después como dice aquí que, su alcancía tiene 10 pesos, le tengo que sumar esos diez pesos, para que me de la respuesta

Esta actividad estuvo compuesta de un razonamiento centrado en articular la relación funcional entre la posición y el patrón, expresada con cantidades inderminadas. La práctica consistió en la generalización de la relación identificada en la PMA1, para un término n-ésimo del patrón. La expresión general fue representada en palabras. Los razonamientos matemáticos de los estudiantes fueron soportados por argumentos verbales fundamentados en una estructura multiplicativa. Se caracterizó por el uso de argumentos matemáticos que conectan lo general (lo indeterminado) con lo numérico (relaciones específicas) y con el contexto del problema (significado).

5.4.2.1. FNR2: Para obtener cuánto se ha ahorrado en cierto número de días, tenemos que multiplicar lo que ahorra cada día, por el número de días que va ahorrar, y después como dice aquí que, su alcancía tiene 10 pesos, le tengo que sumar esos diez pesos, para que me de la respuesta

Luego que Xavier, Irene, Nadia y Ana compartieran con la clase cómo determinaron los términos k-ésimos del patrón solicitados en el problema. El profesor cuestionó al grupo sobre ¿cuál sería la regla general? (extracto 499-500). Fue Tania quién expresó verbalmente una generalización algebraica de la relación matemática tratada en la FNR1.

499. Profesor: Ok. ¿Cuál sería la regla general?
500. Tania: <u>La regla es que para obtener cuánto se ha ahorrado en cierto número de días, tenemos que multiplicar lo que ahorra cada día, por el número de días que va ahorrar, y después como dice aquí que, su alcancía tiene 10 pesos, le tengo que sumar esos diez pesos, para que me de la respuesta.</u>

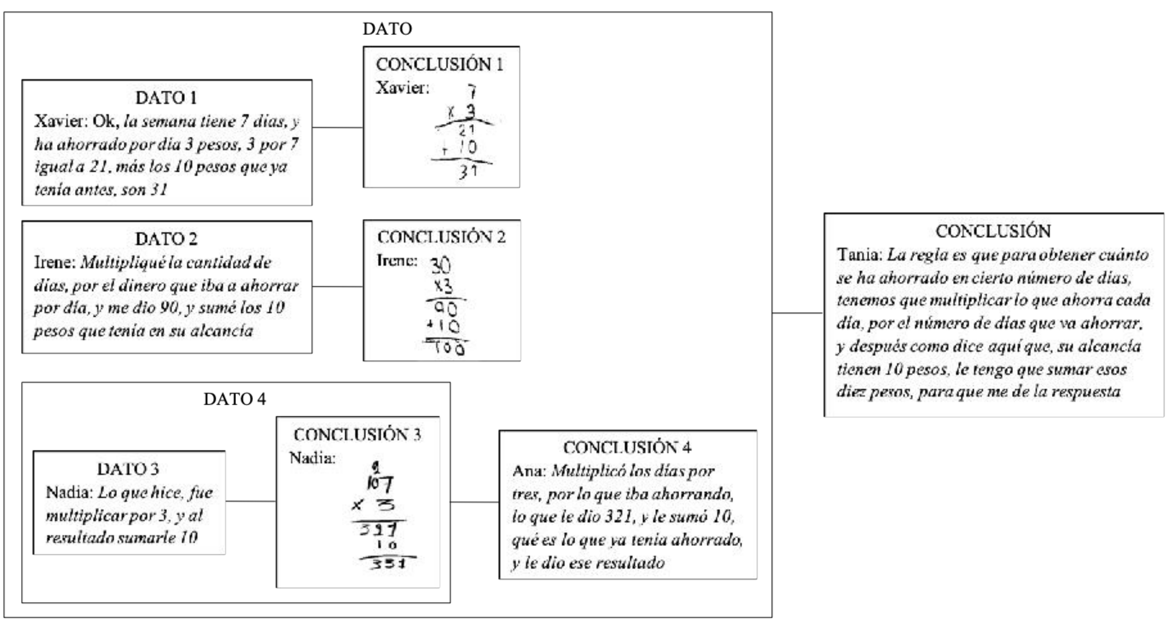


Figura 38. Argumento 38. Tania establece una regla general para el patrón.

El argumento de Tania es reconstruido en la en la Figura 5.38. El cual, se caracteriza por articular la relación funcional entre el término del patrón y su posición para cantidades inderminadas, es decir, para el término n-ésimo del patrón. Basada de las relaciones específicas establecidas en la FNR1. Certeza de que los argumentos previos de sus compañeros funcionaron como DATO para el establecimiento de una nueva CONCLUSIÓN (expresión general), la cual no fue cuestionada o rechazada. Evidencia empírica que se cumplió el C2 y se constituyó la *FNR2: Para obtener cuánto se ha ahorrado en cierto número de días, tenemos que multiplicar lo que ahorra cada día, por el número de días que va ahorrar, y después como dice aquí que, su alcancía tiene 10 pesos, le tengo que sumar esos diez pesos, para que me de la respuesta, que funcionó como compartida por esta comunidad.*

Esta FNR2 fue sustentada de una idea matemática individual (Tabla 5.29) presente en la interacción en el aula. Presumió ser una sofisticación de las ideas matemáticas individuales constituidas en la FNR1.

Tabla 5.29.
Evolución del razonamiento matemático individual asociada con la FNR2

Ideas matemáticas individuales asociadas con la FNR2 en el desarrollo del problema 4
• Para obtener cuánto se ha ahorrado en cierto número de días, tenemos que multiplicar lo que ahorra cada día, por el número de días que va ahorrar, y después como dice aquí que, su alcancía tiene 10 pesos, le tengo que sumar esos diez pesos, para que me de la respuesta [Tania, 500]

Capítulo 6. Reflexiones y conclusiones

En esta investigación se caracterizaron las prácticas matemáticas y formas normativas de razonamiento que soportan la evolución del razonamiento matemático de una comunidad de aula de quinto grado de primaria en el marco del pensamiento funcional. El estudio se sustenta de la perspectiva sociocultural de Cobb y Yackel (1996) y su marco interpretativo de los aspectos sociales e individuales que norma la actividad matemática en el aula. Desde esta perspectiva, la unidad de análisis es la argumentación que se suscita en el aula de clases. El modelo argumentativo de Toulmin es básico para la reconstrucción de los argumentos, y se enfatiza en esos razonamientos que norman el discurso en el aula.

Para el logro del objetivo, se realizaron las acciones siguientes:

a) Reconocer qué ideas matemáticas individuales expresadas en los argumentos de los estudiantes de una comunidad de aula de clases se constituyen en formas normativas de razonamiento durante una secuencia de instrucción que promueve pensamiento funcional.
b) Organizar las formas normativas de razonamiento identificadas, en torno a las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes de una comunidad de aula de primaria.

Desde el punto de vista metodológico, se diseñó y desarrolló un experimento de enseñanza con el fin de promover el pensamiento funcional y constituir una comunidad de aula. Se diseñaron cinco problemas que refieren a la generalización de patrones figurales de una sucesión con progresión aritmética. La primera, con al fin de: a) introducir al trabajo con patrones y su generalización y b) establecer a la argumentación como una norma (en lo individual y lo colectivo). El diseño de estos problemas, implicó un análisis de contenido, a fin de dilucidar acerca de la máxima demanda cognitiva que el currículo plantea a los estudiantes, el tipo de representaciones, el contexto y los usos en que se proponen las situaciones de los libros de texto de matemáticas oficiales. En ese contexto, se reconoció:

1) Que la máxima demanda cognitiva que el currículo plantea a los estudiantes es establecer la regla de recurrencia.
2) El contexto en que se estudian las progresiones artiméticas, es en el de conteo ordenado, juegos, patrones, situaciones personales y laborales.
3) El tipo de representaciones son: numérico (simple o tabular), figural y verbal.

Se revisó además, la literatura con relación a dos temáticas: problemas de generalización de patrones y principios de diseño. La primera, permitió distinguir aspectos del *proceso* de generalización que la investigación ha documentado como fundamentales, así como de la *estructura* referidas a este tipo de problemas. Se han descrito como sigue:

1) *El proceso*: a) tomar conciencia de una regularidad común, b) extender o generalizar dicha regularidad a todos los términos posteriores de la secuencia; y c) usar esa regularidad común para construir una expresión directa de cualquier término de la secuencia (Radford, 2008).
2) *La estructura*: radican en generar, a partir de los términos particulares dados o condiciones iniciales de su generación, nuevos términos particulares (que suelen ser consecutivos, cercanos o lejanos) y la expresión del término general (o regla general (Merino, Cañadas y Molina, 2013).

La segunda temática, puso en relieve los principios de diseño ha contemplar en la planificación y desarrollo de los materiales de instruccion para apoyar el razonamiento matemático. Se identificó que:

1) Para promover la argumentación en el aula, los problemas deben permitir: a) diferentes procedimientos para su resolución, b) respuestas abiertas, y c) posturas diferentes (Solar y Deulofeu, 2016).
2) Para que las problemas tengan la potencialidad de involucrar al estudiante en mayores niveles de pensamiento, incluidos el razonamiento y la creación de sentido, debe considerarse un alto nivel de demanda cognitiva (Smith y Stein, 1998).

Los problemas que constituyeron el experimento de enseñanza, se plantearon en un contexto de patrones en sus diferentes representaciones (figural, numérico y verbal). Por cuanto a la máxima demanda cognitiva, esta investigación, planteó que los estudiantes construyeran una estructura matemática plausible o regla general que explique el comportamiento del patrón en cualesquiera de sus etapas.

En el experimento de enseñanza se trazó una trayectoria hipotética de aprendizaje (Fig 6.1), que anticipó cómo el pensamiento y la comprensión de los estudiantes podrían evolucionar cuando los problemas fueran implementados en el aula.

De acuerdo con la trayectoria de aprendizaje, la comunidad de aula analizada, se centró en el desarrollo de las tres primeras prácticas matemáticas en la resolución de los problemas 1 al 3, al percibir y expresar lo qué es común entre los elementos de un patrón y generalizarlo a todos los términos posteriores. Haciéndose presentes a partir de diversas FNR. En relación con la PMA4 fue desarrollada para los problemas 2 al 4, al articular una regla general que explica el comportamiento del patrón en cualesquiera de sus etapas. Prevaleció solo una FNR basada de una estructura matemática estándar[3]: $a_n = dn + c$, donde $c \neq 0$. Para la PMA5 no hubo evidencia de formar parte de las actividades generales en las que se vió envuelta la comunidad de aula.

Identifican y respetan las estructuras espacial y/o numérica del patrón para generar nuevos elementos	**PMA1. Extender el patrón**
Exploran, espacial y/o numéricamente, qué cambia y qué permanece en los elementos de un patrón. Con ello, perciben y expresan lo qué es común entre los elementos de un patrón	**PMA2. Percibir y registrar un patrón**
Generalizan lo qué es común a todos los términos posteriores de un patrón. Usan cantidades determinadas	**PMA3. Generalizar aritméticamente**
Articulan la relación funcional lineal entre la posición y el patrón, expresan la regla general. Usan cantidades indeterminadas	**PM4. Generalizar algebraicamente**
Usan la regla general para el análisis posterior del patrón	**PM5. Predecir el comportamiento del patrón utilizando la expresión general**

Figura 6.1. Trayectoria hipotética de aprendizaje.

6.1. Formas normativas de razonamiento en el aula

Las FNR constituyen las ideas particulares o formas de razonamiento que funcionan en el discurso del aula como si todos tuviesen una comprensión similar, aun cuando podrían existir diferencias individuales en ese proceso, tal como se afirma en Rasmussen et al. (2015). Se reconocen a partir de las FRI delimitadas a través de las ideas matemáticas individuales expresadas en los argumentos de los estudiantes de una comunidad de aula.

Los criterios usados para determinar cuándo una forma de razonamiento se estableció en normativa, fueron:

> **Criterio 1 (C1):** Los respaldos y/o garantías para una conclusión en particular ya no aparecen en las explicaciones de los estudiantes y, por lo tanto, la idea matemática expresada en el núcleo del argumento es evidente por sí misma (Stephan & Rasmussen, 2002, p.462).
>
> **Criterio 2 (C2):** Cualquiera de las cuatro partes de un argumento (dato, garantía, conclusión, respaldo) cambian de posición (es decir, de función) dentro de los

[3] Una generalización es expresada de forma estándar cuando los términos en la expresión directa correspondiente están en forma simplificada. Una generalización es expresada de forma no estándar cuando contiene términos que aún pueden simplificarse (Rivera, 2013).

argumentos subsiguientes y no son cuestionadas (Stephan & Rasmussen, 2002, p.462).

Criterio 3 (C3): Cuando una idea particular es usada repetidamente como datos o como garantía para diferentes conclusiones en varios episodios de la clase (Cole et al., 2012).

Con base en este marco de ideas, el análisis de los datos evidenció que durante una secuencia de instrucción que promovió el pensamiento funcional en un aula de clases, se pusieron de manifiesto nueve FRI en el problema 1, de ellas, seis se constituyeron en FNR. En el problema 2, se manifestaron diez FRI y siete se constituyeron en FNR. Por cuanto al problema 3 se manifestaron siete FRI y seis se constituyeron en FNR. Para el problema 4, se reconocieron dos FRI, ambas se constituyeron en FNR. La Tabla 6.1 resume tanto las FRI manifestadas como las FNR, con el criterio que cumplieron y de cuáles no.

Tabla 6.1. *FRI y FNR manifestadas en el estudio*

Formas de razonamiento individual	**Formas normativas de razonamiento y criterio cumplido**
Problema 1	
FRI1: A la sucesión se le van sumando cuatro	FNR1 (C3)
FRI2: Lo que iba haciendo, era cuatro por la figura que era, y se le suman dos	FNR2 (C1)
FRI3: Para saber cuántos círculos le corresponden a la figura 5, primero a cinco le resté tres, y me dio dos, ahora a ese dos lo multipliqué por cuatro y me dio ocho, y por último le sumé 14, y me dio 22	FNR3 (C2)
FRI4: La cantidad de círculos de la parte inferior son igual al número de figura más dos. Y que en todas las figuras se tenían filas de tres círculos, y las filas iban de acuerdo al número de figura	FNR4 (C2)
FRI5: Multipliqué el número de figura por cuatro	
FRI6: Para la figura 100, multipliqué la cantidad de círculos que le corresponden a la figura 50 por dos	
FRI7: $(2150 - 3) \cdot 4 + 14 = 8602$	FNR5 (C2)
FRI8: Para la figura 100, lo que yo hice fue multiplicar 100 por tres, luego, le sumo 100 círculos más dos	
FRI9: Multiplicaría el número de figura por cuatro y le sumaría dos	FNR6 (C1)
Problema 2	
FRI1: Dibujé la figura y conté.	FNR1 (C1)
FRI2: La sucesión va de dos en dos.	FNR2 (C3)
FRI3: Es que a la figura tres como vi que para llegar a la figura uno, le faltan dos, y como la constante era de dos, entonces a los 12 cuadrados de la figura tres, le resté cuatro y me dio ocho.	FNR3 (C3)
FRI4: Multipliqué los cuadrados blancos por dos, por lo que hay arriba y abajo. Al resultado le sumé seis, que son los tres cuadrados que hay en los dos extremos de la figura.	FNR4 (C2)
FRI5: Es poner 10 arriba y 10 abajo porque son los que cubren a los 10 cuadrados blancos, más seis, porque son tres de aquí y tres de acá.	
FRI6: $(50 + 50) + (3 + 3) = 106$	
FRI7: $(130 + 2) + (130 + 2) + 2 = 266$	
FRI8: $(130 - 3) \cdot 2 + 12 = 266$	FNR5 (C1)

FRI9: Para la figura 50, multipliqué dos por 50, y me dio 100, al resultado le sumé los seis cuadrados que siempre habían en los lados, así obtuve 106 cuadrados grises	FNR6 (C1)
FRI10: Multipliqué la cantidad de cuadrados blancos por dos y le sumé seis	FNR7 (C1, C2)
Problema 3	
FRI1: Le sumé cinco, que es lo que va aumentando la cantidad de palillos de una figura a otra	FNR1 (C3)
FRI2: Multipliqué por cinco, porque son los palillos que se van aumentando. Le aumenté uno, porque observé que luego de contar cierta cantidad de veces cinco palillos, sobraba un palillo	FNR2 (C1)
FRI3: $23 \times 5 = 115$	
FRI4: $(23 \times 5) + 1 = 116$	FNR3 (C1)
FRI5: Fui sumando de cinco en cinco hasta llegar a la cantidad solicitada	FNR4 (C3)
FRI6: $(23 \times 6) - (23 - 1) = 116$	FNR5 (C2)
FRI7: $(¿? \times 5) + 1$	FNR6 (C1)
Problema 4	
FRI1: Multiplicar los días por tres, por lo que iba ahorrando, y sumar 10, qué es lo que ya tenía ahorrado	FNR1 (C1)
FRI2: Para obtener cuánto se ha ahorrado en cierto número de días, tenemos que multiplicar lo que ahorra cada día, por el número de días que va ahorrar, y después como dice aquí que, su alcancía tienen 10 pesos, le tengo que sumar esos diez pesos, para que me de la respuesta	FNR2 (C2)

6.2. Prácticas matemáticas en el aula

Las PMA refieren a las situaciones locales inmediatas del desarrollo de los estudiantes. Identificar las secuencias de tales prácticas, implica documentar la evolución de las situaciones sociales en las que los estudiantes participan y aprenden. El análisis revela las ideas y actividades matemáticas establecidas conjuntamente cuando el profesor y los estudiantes coordinan sus actividades individuales (Cobb & Yackel, 1996; Cobb, 2000). Son documentadas como colecciones de formas normativas de razonamiento en torno a una actividad matemática general (Stephan & Rasmussen, 2002; Wawro, 2011; Rasmussen et al., 2015).

El estudio empírico, documentó que cada problema integrado en la secuencia de aprendizaje manifestó ciertas FNR que son características del contexto y de las condiciones iniciales planteadas. Lo que no resulta propio son las prácticas matemáticas, ya que éstas se hicieron presentes (en cierta medida) en los cuatro problemas analizados. Un análisis global de los hallazgos (Anexo C) permite reportar tres prácticas matemáticas en el aula:

PMA1: Extender, percibir y registrar un patrón. Esta práctica estuvo caracterizada por la exploración, espacial y numérica, de los primeros términos del patrón figural, a fin de reconocer qué permanece y qué cambia de un término a otro. Así la práctica consistió en percibir y registrar lo que es común entre los elementos de un patrón, a fín de establecer regularidades que permitieran establecer procedimientos viables para extenderlo y generar nuevos términos, en su mayoría, términos consecutivos y cercanos. Las representaciones usadas fueron figurales, numéricas y verbales. Los razonamientos matemáticos de los estudiantes fueron soportados por argumentos pictóricos, gestuales y/o aritméticos. Por consiguiente, en esta práctica mayormente se hizo uso de argumentos basados en el contexto concreto del problema.

Las FNR que definieron a esta práctica, son resumidas en la Tabla 6.2.

Tabla 6.2. *FNR que constituyen la PMA1*

Problema 1
FNR1: A la sucesión se le van sumando cuatro FNR2: Lo que iba haciendo, era cuatro por la figura que era, y se le suman dos FNR3: Para saber cuántos círculos le corresponden a la figura 5, primero a cinco le resté tres, y me dio dos, ahora a ese dos lo multipliqué por cuatro y me dio ocho, y por último le sumé 14, y me dio 22 FNR4: La cantidad de círculos de la parte inferior son igual al número de figura más dos. Y que en todas las figuras se tenían filas de tres círculos, y las filas iban de acuerdo al número de figura
Problema 2
FNR1: Dibujé la figura y conté. FNR2: La sucesión va de dos en dos. FNR3: Es que a la figura tres como vi que para llegar a la figura uno, le faltan dos, y como la constante era de dos, entonces a los 12 cuadrados de la figura tres, le resté cuatro y me dio ocho. FNR4: Multipliqué los cuadrados blancos por dos, por lo que hay arriba y abajo. Al resultado le sumé seis, que son los tres cuadrados que hay en los dos extremos de la figura.
Problema 3
FNR1: Le sumé cinco, que es lo que va aumentando la cantidad de palillos de una figura a otra FNR2: Multipliqué por cinco, porque son los palillos que se van aumentando. Le aumenté uno, porque observé que luego de contar cierta cantidad de veces cinco palillos, sobraba un palillo

PMA2: Generalizar aritméticamente. Esta actividad estuvo compuesta de un razonamiento orientado a articular una relación matemática entre los aspectos cuantificables del patrón (posición y término) basada de las regularidades observadas y establecidas en la PMA1, para aplicarla a todos los términos posteriores de un patrón. Estas relaciones fueron trabajadas con cantidades determinadas y con representaciones numéricas y verbales. Fueron usadas para determinar términos k-ésimos lejanos. Los razonamientos de los estudiantes fueron apoyados por argumentos aritméticos basados en su mayoría de una estructura multiplicativa. Se caracterizó por el uso de argumentos matemáticos que conectaban lo aritmético con el contexto del problema, y viceversa.

Las FNR que definieron a esta práctica, son resumidas en la Tabla 6.3.

Tabla 6.3. *FNR que constituyen la PMA2*

Problema 1
FNR5: $(2150-3)\cdot 4+14=8602$ FNR6: Multiplicaría el número de figura por cuatro y le sumaría dos
Problema 2
FNR5: $(130-3)\cdot 2+12=266$ FNR6: Para la figura 50, multipliqué dos por 50, y me dio 100, al resultado le sumé los seis cuadrados que siempre habían en los lados, así obtuve 106 cuadrados grises.
Problema 3
FNR3: $(23\times 5)+1=116$ FRI4: Fui sumando de cinco en cinco hasta llegar a la cantidad solicitada FNR5: $(23\times 6)-(23-1)=116$
Problema 4
FNR1: Multiplicar los días por tres, por lo que iba ahorrando, y sumar 10, qué es lo que ya tenía ahorrado

PMA3: Generalizar algebraicamente. Esta actividad estuvo compuesta de un razonamiento centrado en establecer la relación funcional entre la posición y el patrón, para el término n-ésimo. La práctica consistió en la generalización de una relación matemática establecida en la PMA2, con cantidades indeterminadas. La expresión general fue representada verbalmente y hubo indicios de un primer acercamiento al uso de variables (representación algebraica). Los razonamientos matemáticos de los estudiantes fueron soportados por argumentos alfa-numéricos fundamentados en una estructura multiplicativa. Se caracterizó por el uso de argumentos matemáticos que conectan lo general (lo indeterminado) con lo numérico (relaciones específicas) y con el contexto del problema (significado).

Las FNR que definieron a esta práctica, son resumidas en la Tabla 6.4.

Tabla 6.4. *FNR que constituyen la PMA3*

Problema 2
FNR7: Multipliqué la cantidad de cuadrados blancos por dos y le sumé seis.
Problema 3
FNR6: $(¿?\times 5)+1$
Problema 4
FNR2: Para obtener cuánto se ha ahorrado en cierto número de días, tenemos que multiplicar lo que ahorra cada día, por el número de días que va ahorrar, y después como dice aquí que, su alcancía tiene 10 pesos, le tengo que sumar esos diez pesos, para que me de la respuesta.

Esta caracterización de PMA y FNR conforman el soporte de la evolución del razonamiento matemático que una comunidad de aula de quinto de primaria manifestó durante una secuencia de instrucción que promovió el desarrollo del pensamiento funcional.

Este producto compone un modelo explicativo, basado en la empírea, de la evolución del razonamiento que una comunidad de aula de nivel primaria puede desarrollar al involucrarse con problemas de generalización de patrones, que refiere al pensamiento funcional.

Este modelo basado en tres prácticas matemáticas en el aula, tiene la cualidad de ser explicativo y poder ser adaptado en caso de interacción con otras comunidades y con otros problemas de generalización de patrones. Permite documentar una ruta para el aprendizaje de ideas importantes relacionadas con el pensamiento funcional (véase Figura 6.2), que van de ideas basadas en el contexto concreto del problema como lo fue “dibujé la figura y conté”, pasa por ideas asociadas con relaciones matemáticas específicas que son usadas para determinar términos k-ésimos del patrón, hasta el establecimiento de relaciones funcionales generales para expresar el término n-ésimo del patrón. Estas ideas matemáticas fueron acompañadas del uso de diferentes tipos de representaciones (figural, gestual, numérico, verbal y alfanumérico), conexión con otras ideas matemáticas y estuvieron vinculadas con el contexto del problema; así como de argumentaciones y justificaciones que los estudiantes establecieron para explicar y sustentar su forma de razonar. Aspecto que Wawro (2011) menciona como una bondad que tiene este tipo de análisis centrado en el razonamiento matemático, ya que no se limita al manejo de ciertas categorías de análisis, si no que deja abierta la posibilidad de dar evidencia de todos los elementos que acompañan a las formas de razonar de una comunidad de aula.

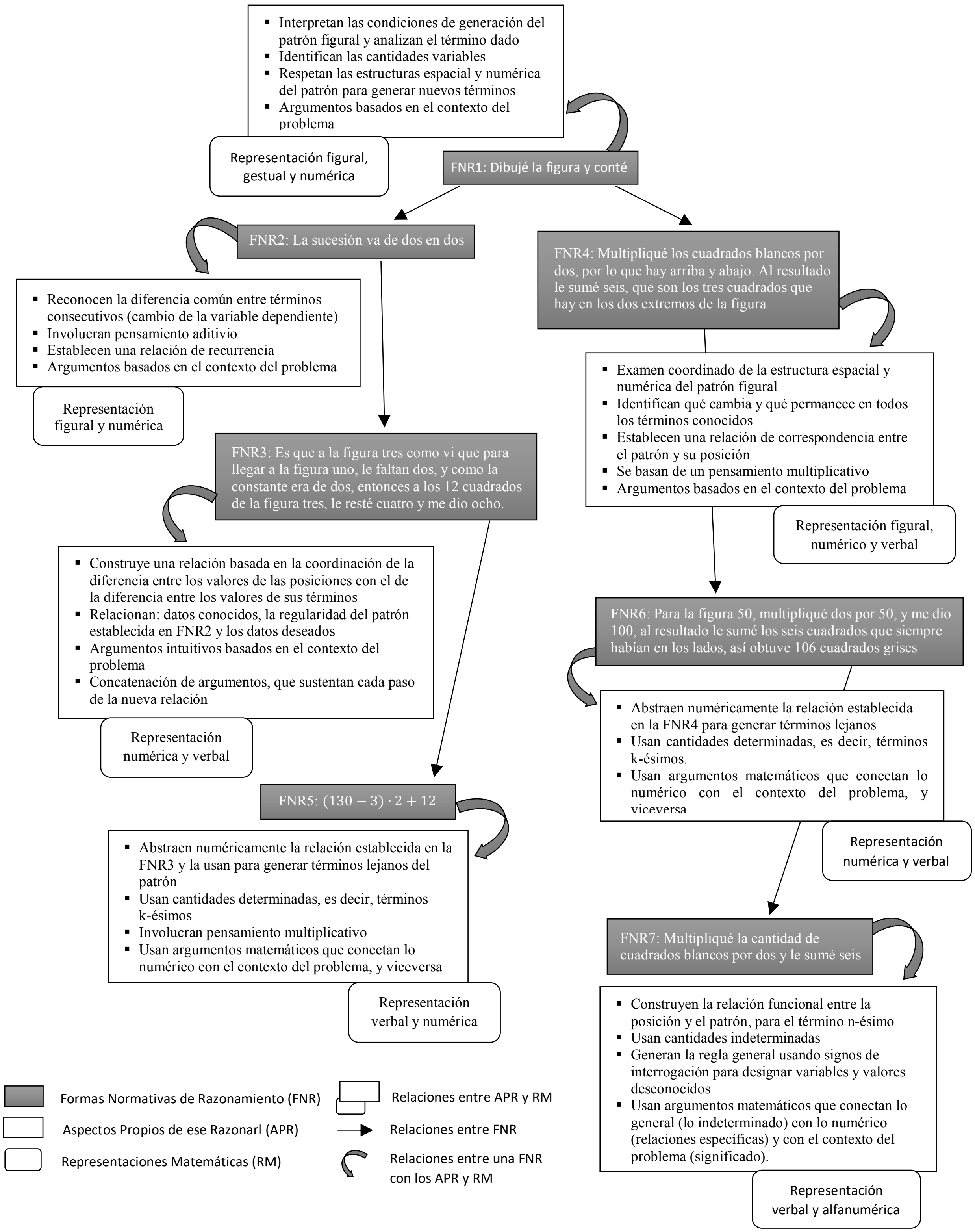


Figure 6.2. Evolución de las PMA y FNR evidenciadas para el problema 2.

6.3. Trayectoria de aprendizaje

La Trayectoria de aprendizaje que la comunidad de aula evidenció durante su actividad matemática se integró por tres PMA (Figura 6.3).

En contraste con la trayectoria hipotética de aprendizaje (Figura 6.1), algunas aspectos observados fueron:

1) La PMA1 y PMA2 (de la trayectoria hipotética) fueron consideradas de manera conjunta. El estudio empírico reflejó la relación conjunta de estas prácticas en la actividad matemáticas de los estudiantes. Queda abierta la investigación para evidenciar si otros participantes
2) La PMA5 (de la trayectoria hipotética) no fue desarrollada durante el estudio, aún cuando se consideró como parte del problema 4, ya que durante la interacción en el aula no hubo oportunidad de ser atendida. El tiempo de la aplicación se concluyó y la cuestión no pudo ser discutida con la comunidad participante.
3) El estudio empírico permitió robustecer lo que se espera en cada una de estas PMA. Esto da mayor orientación para tomar acciones con respecto al diseño de materiales de instrucción que promuevan pensamiento funcional. Así, como para guiar, introducir o seguir el aprendizaje matemático asociado con pensamiento funcional.

<table>
<tr>
<td>Exploran, espacial y numéricamente, los primeros términos del patrón figural, para reconocer qué permanece y qué cambia de un término a otro. Así, percibir lo que es común entre los elementos de un patrón y registrar regularidades que permitan establecer procedimientos viables para extender y generar nuevos términos, en su mayoría, términos consecutivos y cercanos. Involucran representaciones figurales, gestuales, numéricas y verbales. Usan argumentos basados en el contexto concreto del problema.</td>
<td>PMA1: Extender, percibir y registrar un patrón</td>
<td rowspan="2">PMA2: Generalizar aritméticamente.</td>
<td rowspan="3">PMA3: Generalizar algebraicamente</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Articulan una relación matemática entre los aspectos cuantificables del patrón (posición y término) basada de las regularidades observadas y establecidas en la PMA1, para aplicarla a todos los términos posteriores de un patrón. Estas relaciones las trabajan con cantidades determinadas (términos k-ésimos lejanos) y con representaciones numéricas y verbales. Usan argumentos matemáticos que conectan lo aritmético con el contexto del problema, y viceversa</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Establecen la relación funcional entre la posición y el patrón, para el término n-ésimo. Usan las relaciones matemáticas establecidas en la PMA2, con cantidades indeterminadas. Utilizan representaciones verbales y alfanuméricas. Disponen de de argumentos matemáticos que conectan lo general (lo indeterminado) con lo numérico (relaciones específicas) y con el contexto del problema (significado)</td>
</tr>
</table>

Figura 6.3. Trayectoria de aprendizaje basada en la empírea.

6.4 Aportes de la investigación, limitaciones y estudios futuros

El aporte de esta investigación es la caracterización de las PMA y las FNR que soportan la evolución del razonamiento matemático de una comunidad de aula de quinto grado de primaria en el marco del pensamiento funcional. Con la cual se respondió a la pregunta de investigación:

¿Qué prácticas matemáticas y formas normativas de razonamiento soportan la evolución del razonamiento matemático en una comunidad de aula de primaria a lo largo de una secuencia de instrucción que promueve el desarrollo del pensamiento funcional?

En relación con la caracterización hecha, se propuso:

1) Un modelo explicativo, basado en la empírea, de la evolución del razonamiento que una comunidad de aula de nivel primaria puede desarrollar al involucrarse con problemas de generalización de patrones, que refiere al pensamiento funcional.
2) Una ruta de aprendizaje de ideas importantes relacionadas con el pensamiento funcional (Figura 6.2), y
3) Una trayectoria de aprendizaje basada en la empíria sobre pensamiento funcional (Figura 6.3).

Sin pretender ser concluyentes, el modelo explicativo, la ruta de aprendizaje y la trayectoria hipotética podrían ser útil para orientar la acción curricular y docente en la introducción del pensamiento funcional en las aulas de clases de primaria.

Otros aportes asociados con el trabajo, son un análisis de contenido matemático escolar realizado para la sucesión matemática con progresión aritmética en la educación primaria mexicana (véase Capítulo 3) y un experimento de enseñanza en el aula construido para promover el desarrollo de pensamiento funcional (véase Capítulo 4).

Algunas limitaciones del estudio es que no hubo evidencia de si la comunidad daba cuenta de la PMA5: predecir el comportamiento del patrón utilizando la expresión general, establecida en la trayectoria hipotética. Por tanto, hace falta indagar sobre esta cuestión.

Se propone continuar con la investigación sobre, las prácticas matemáticas y formas normativas de razonamiento, para los demás grados que conforman la educación primaria, para contar con mayor información sobre la evolución del razonamiento matemático asociado con el pensamiento funcional. Así, poder constatar y/o robustecer el modelo explicativo propuesto. Esto es resaltado, al ser pocas las investigaciones sobre las prácticas matemáticas que se han centrado en el análisis de formas normativas de razonamiento en estudiantes de primaria, así como con pensamiento funcional.

Referencias bibliográficas

Aké, L. P. (2017). Una interpretación del razonamiento algebraico en la Educación Primaria desde el modelo de niveles de algebrización. En L. P. Aké y J. Cuevas (Eds.) *Pensamiento algebraico en México desde diferentes enfoques* (pp. 59-75). San Luis Potosí, S.L.P: Colección procesos educativos.

Blanton, M., & Kaput, J. (2003). Developing elementary teachers' algebra eyes and ears. *Teaching Children Mathematics, 10*(2), 70-77.

Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.) *Proceedings of the 28th international group of the psychology of mathematics education* (Vol.2, pp.135–142). Bergen University College: Bergen, Norway.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics, 95*(2), 181-202. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9745-0

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A., Isler, I., & Kim, J. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 46* (1), 39-87.

Blanton, M.L., & Kaput J.J. (2005). Helping elementary teachers build mathematical generality into curriculum and instruction. *ZDM, 37* (1), 34-42.

Bower, J., Cobb, P., & McClain, K. (1999). The evolution of mathematical practices: A case study. *Cognition and instruction, 17*(1), 25-66.

Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the "best deal" problem. En J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. Blanton (Eds.) *Algebra in the early grades* (pp. 273-301). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates.

Brodie, K. (2010). *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms*. New York, EE. UU.: Springer. doi: 10.1007/978-0-387-09742-8

Butto, C., y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática, 16*(1), 113-148.

Butto, C., y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática, 22*(3), 55-86.

Cabañas-Sánchez, G., Salazar, V., y Nolasco-Hesiquio, H. (2017). Tareas que potencian el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en libros de texto de matemáticas de primaria. En L. P. Aké y J. Cuevas (Eds.) *Pensamiento algebraico en México desde diferentes enfoques* (pp. 13-36). San Luis Potosí, S.L.P: Colección procesos educativos.

Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas* (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, Granada.

Cañadas, M., Brizuela, B., & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *Journal of Mathematical Behavior, 41*(1), 87-103.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education, 40*(1), 3–22.

Cetina-Vazquez, M., Cabanas-Sanchez, G., & Sosa-Moguel, L. (2019). Collective mathematical progress in an introductory calculus course during the treatment of the quadratic function. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology (IJEMST)*, 7(2), 155-169.

Cetina-Vázquez, M., y Cabañas-Sánchez, G. (2019). *Estrategias de generalización de patrones y sus diferentes formas de uso en quinto grado*. Artículo entregado para la publicación.

Cobb, B., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh & J. Y. Beak (Eds.), *Handbook of desing research methods in education. Innovation in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. (1999). Individual and Collective Mathematical Development: The Case of Statistical Data Analysis. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(1), 5-43. doi: 10.1207/s15327833mtl0101_1

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307–334). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist, 31*(3/4), 175–190.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, k., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in Classroom Mathematical Practices. *Journal of the Learning Sciences*, *10*(1-2), 113-163.

Cole, R., Becker, N., Towns, M., Rasmussen, C., Wawro, M., & Sweeney, G. (2012). Adapting a methodology from mathematics education research to chemistry education research: Documenting collective activity. *International Journal of Science and Mathematics Education 10*(1), 193-211.

Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P., & Francisco, R. (2014). Identifying Kinds of Reasoning in Collective Argumentation. *Mathematical Thinking and Learning, 16* (3), 181–200. doi: 10.1080/10986065.2014.921131

Demosthenous, E., & Stylianides, A. (2014). Algebra-related tasks in primary school textbooks. En C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle & D. Allan (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 369-376). Vancouver, Canadá: Psychology of Mathematics Education.

Doorman, M., & Drijvers, P. (2011). Algebra in fuction. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary Algebra Education: Revisiting Topics and Themes and Exploring the Unknown* (pp.119-136). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Douek, N. (2005). Communication in the mathematics classroom: argumentation and development of mathematical knowledge. En A. Chronaki & I.M. Christiansen (Eds.) *Challenging perspectives on mathematics classroom communication* (pp.145-172). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2015). The Nested Epistemic Actions Model for Abstraction in Context: Theory as Methodological Tool and Methodological Tool as Theory. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to cualitive research in Mathematics Education. Examples of methodologys and methods* (pp. 185-182). New York: Springer.

Drijvers, P., Dekker, T., & Wijers, M. (2011). Patterns and formulas. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary Algebra Education: Revisiting Topics and Themes and Exploring the Unknown* (pp.89-100). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Fernández, J.A. (2016). Análisis del contenido. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctico de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp.103-116). Madrid: Pirámide.

Fuller, G. (1977). *Algebra elemental*. (A. S. Bouclier). México: Continental (Trabajo original publicado en 1974).

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García. y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Erchegaray, S., y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 117-142.

Güven, N. D., & Dede, Y. (2017). Examining social and sociomathematical norms in different classroom microcultures: Mathematics teacher education perspective. *Educational Sciences: Theory & Practice*, *17*(1), 265–292.

Jurdak, M. E., & El Mouhayar, R. R. (2014). Trends in the development of student level of reasoning in pattern generalization tasks across grade level. *Educational Studies in Mathematics, 85*(1), 75-92. doi: 10.1007/s10649-013-9494-2

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.) *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum.

Kelly, A. E. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Kelly, A. E., & Lesh, R. A. (2000). Trends and Shifts in Research Methods. En A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 35–44). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Kelly, A. E., Lesh, R. A., & Baek, J. Y. (2008). *Handbook of Design Research Methods in Education.* New York: Routledge, Taylor & Francis.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *Studies in mathematical thinking and learning series. The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(1), 60-82.

Krummheuer, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.) *Approaches to Qualitative Research in*

Mathematics Education: Examples of methodology and methods (pp. 51-74). Dordrecht: Springer. doi: 10.1007/978-94-017-9181-6_3

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal, 18*(3), 3-28. https://doi.org/10.1007/BF03217440

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. En N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.) *Approaches to algebra. Mathematics Education Library* (Vol. 18, pp. 87-106). Dordrecht: Springer. doi: 10.1007/978-94-009-1732-3_6

López-Mojica, J. M., Cárdenas, C., Sánchez, Y., y Aceves, L. (2017). Pensamiento algebraico de jóvenes con síndrome de Down: la noción de patrón geométrico. En L. P. Aké y J. Cuevas (Eds.) *Pensamiento algebraico en México desde diferentes enfoques* (pp. 77-96). San Luis Potosí, S.L.P: Colección procesos educativos.

López-Mojica, J. M., y Martínez, C. (2017). Una caracterización del pensamiento algebraico en los libros de texto de educación primaria. En L. P. Aké y J. Cuevas (Eds.) *Pensamiento algebraico en México desde diferentes enfoques* (pp. 37-58). San Luis Potosí, S.L.P: Colección procesos educativos.

Markworth, K. A. (2010). *Growing and growing: promoting functional thinking with geometric growing patterns* (Tesis doctoral). University of North Carolina, Chapel Hill.

McClain, K., Cobb, P., Gravemeijer, K., & Estes, B. (1999). Developing mathematical reasoning within the context of measurement. En L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K – 12, 1999 Yearbook* (pp. 93-106). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Merino, E., Cañadas, M. C., y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24–40.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, Granada.

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75–88.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., y Gómez, P. (2016). Relaciones funcionales identificadas por estudiantes de primero de educación primaria y estrategias de resolución de problemas que involucran funcionales lineales. En J. A. Macías, A.J. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T.

Fernández y A. Berciano (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 365-376).Universidad de Mágala: SEIEM.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49. https://doi.org/10.1007/BF03217544

Pino-Fan, L., Assis, A., & Castro, W. (2015). Towards a Mathodology for the Characterization of Teachers' Didactic-Mathematical Knowledge. *Eurasia Jorurnal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1429-1456.

Pinto, E. (2016). *Relaciones funcionales, sistemas de representación y generalización en estudiantes de tercero de primaria* (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, Granada.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM, 40*(1), 83-96. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-9. doi: 10.1080/14794800903569741

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina y I. Segovia (Eds.) *Investigación en didáctica de la matemática* (pp. 3-12). Granada: Comares.

Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal, 26*(2), 257–277. http://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal, 26*(2), 257–277. https://doi.org/10.1007/s13394

Radford, L., Edwards, L. & Arzarello, F. (2009). Introduction: Beyond words. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 91-95. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9172-y

Ramirez, K. (s.f.). *Tema 3. Relaciones de recurrencia*. Recuperado de http://www.kramirez.net/Discretas/Material/Internet/Relaciones%20de%20Recurrencia/TeoriaRecurrencia.pdf

Rasmussen, C., & Stephan, M. (2008). A methodology for documenting collective activity. En A. E. Kelly, R. A. Lesh & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of innovative design research in Science, Technology, Engineering, Mathematics (STEM) education* (pp. 195–215). New York: Taylor and Francis.

Rasmussen, C., Stephan, M., & Allen, K. (2004). Classroom mathematical practices and gesturing. *Journal of Mathematical Behavior, 23*(3), 301-323.

Rasmussen, C., Wawro, M., & Zandieh, M. (2015). Examining individual and collective level mathematical progress. *Educational Studies in Mathematics, 88*(2), 259-281.

Rasmussen, C., Zandieh, M., & Wawro, M. (2009). How do you know which way the arrows go? The emergence and brokering of a classroom mathematics practice. En W.M. Roth (Ed.), *Mathematical representations at the interface of the body and culture* (pp. 171–218). Charlotte: Information Age Publishing.

Rico, L., y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis Didáctico y Metodología de Investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (pp. 1-22). Granada: Comares.

Rivera F. D., & Becker J. R. (2011) Formation of Pattern Generalization Involving Linear Figural Patterns Among Middle School Students: Results of a Three-Year Study. En J. Cai & E. Knuth (Eds.) *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education* (pp. 323-366). Berlin, Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-17735-4_18

Rivera, F. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics. Psychological and pedagogical considerations*. New York: Springer. doi: 10.1007/978-94-007-2712-0

Rivera, F. D. (2018). Pattern generalization processing of elementary students: cognitive factors affecting the development of exact mathematical structures. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(9), em1586. https://doi.org/10.29333/ejmste/92554

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2005). Figural and numerical modes of generalizing in algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 11*(4), 198-203.

Salazar, V. (2017). *Tareas que potencian el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en los libros de texto de matemáticas de primaria*. (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Guerrero, México.

SEP (2011). *Plan de estudios 2011. Educación Básica*. México: Secretaría de Educación Pública.

SEP (2016). *Propuesta curricular para la educación obligatoria 2016.* México: Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2011a). *Programa de estudios 2011.Guía para el Maestro Primaria. Primer grado*. México: Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2011b). *Programa de estudios 2011.Guía para el Maestro Primaria. Segundo grado*. México: Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2011c). *Programa de estudios 2011.Guía para el Maestro Primaria. Tercer grado*. México: Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2011d). *Programa de estudios 2011.Guía para el Maestro Primaria. Cuarto grado*. México: Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2011e). *Programa de estudios 2011.Guía para el Maestro Primaria. quinto grado*. México: Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2011f). *Programa de estudios 2011.Guía para el Maestro Primaria. Sexto grado*. México: Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2014a). *Desafíos Matemáticos Libro para el maestro*. *Primer Grado.* SEP: México.

SEP. (2014b). *Desafíos Matemáticos Libro para el maestro*. *Segundo Grado.* SEP: México.

SEP. (2014c). *Desafíos Matemáticos Libro para el maestro*. *Tercer Grado.* SEP: México.

SEP. (2014d). *Desafíos Matemáticos Libro para el maestro*. *Cuarto Grado.* SEP: México.

SEP. (2014e). *Desafíos Matemáticos Libro para el maestro*. *Quinto Grado.* SEP: México.

SEP. (2014f). *Desafíos Matemáticos Libro para el maestro*. *Sexto Grado.* SEP: México.

SEP. (2016a). *Desafíos Matemáticos Alumno*. *Libros de texto de Primaria. Primer Grado.* SEP: México.

SEP. (2016b). *Desafíos Matemáticos Alumno*. *Libros de texto de Primaria. Segundo Grado.* SEP: México.

SEP. (2016c). *Desafíos Matemáticos Alumno*. *Libros de texto de Primaria. Tercer Grado.* SEP: México.

SEP. (2016d). *Desafíos Matemáticos Alumno*. *Libros de texto de Primaria. Cuarto Grado.* SEP: México.

SEP. (2016e). *Desafíos Matemáticos Alumno*. *Libros de texto de Primaria. Quinto Grado.* SEP: México.

SEP. (2016f). *Desafíos Matemáticos Alumno*. *Libros de texto de Primaria. Sexto Grado.* SEP: México.

Simon, M. (2014). Hypothetical Learning Trajectories in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 272–275). Dordrecht: Springer.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.) *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). New York: Lawrence Erlbaum.

Smith, M. S., & Stein. M. K. (1998). Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 334-350.

Solar, H., y Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema, 30*(56), 1092-1112.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164. https://doi.org/10.1007/BF00579460

Steffe, L., & Thompson, P. W. (2000). Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and Essential Elements En A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267–305). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Steffe, L., & Thompson, P. W. (2000). Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and Essential Elements En A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267–305). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Stephan, M., & Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(4), 459-490.

Stephens, A. C., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E., & Gardiner A.M. (2017). A Learning Progression for Elementary Students' Functional Thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 19*(3), 143-166.

Stephens, A.C., Isler, I., Marum, T., Blanton, M.L., Knuth, E.J., & Gardiner A.M. (2012). From recursive pattern to correspondence rule: Developing students' abilities to engage in functional thinking. En L.R., Van Zoest, J.-J. Lo & J.L. Kratky (Eds.) *Proceedings of the 34th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 821-828). Kalamazoo, MI.: Western Michigan University.

Stewart, J. (1999). *CÁLCULO. Conceptos y contextos*. (J. H. Pérez y D. Garmendia). México: International Thomson (Trabajo original publicado en 1998).

Swan, M.(2014). Design Research in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 148–152). Dordrecht: Springer.

Tanışlı, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *Journal of Mathematical Behavior, 30*(3), 206-223.

Tanışlı, D., & Özdaş. A. (2009). The strategies of using the generalizing patterns of the primary school 5th grade students. *Educational Sciences: Theory & Practice, 9*(3), 1485-1497.

Toulmin, S., Rieke, R., & Janik, A. (1984). *Reasoning and its goals. An introduction to reasoning*. New york: Earlier.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9*(3), 193-215.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 167-181.

Vergnaud. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques, 10*(23), 133-170.

Warren, E., & Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *11*(1), 9-14.

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalizing the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67*(2), 171-185. doi: 10.1007/s10649-007-9092-2

Wawro, M.J. (2011). *Individual and collective analyses of the genesis of student reasoning regarding the invertible matrix theorem in linear algebra* (Tesis doctoral inédita). Universidad de California, San Diego.

Wilkie, K.J. (2014). Upper primary school teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking in algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(5), 397-428.

Wilkie, K.J., & Clarke, D.M. (2016). Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure. *Mathematics Education Research Journal, 28*(2), 223-243. doi: 10.1007/s13394-015-0146-y

Yackel, E., Rasmussen, C., & King, K. (2000). Social and sociomathematical norms in an advanced undergraduate mathematics course. *The Journal of Mathematical Behavior*, *19*(3), 275-287.

Zapatera, A. (2018). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(1), 87-114.

Zapatera, A. (2019). Descriptores del Desarrollo de la Mirada Profesional en el Contexto de la Generalización de patrones. *Bolema, 33* (65), 1464-1486.

Zembat, I. O., & Yasa, S. A. (2015). Using classroom scenarios to reveal mathematics teachers' understanding of sociomathematical norms. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 3*(3), 242-261.

Anexos

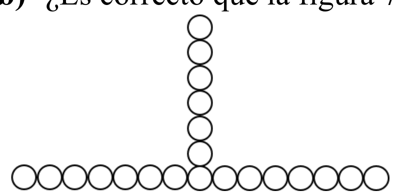
Anexo A. Secuencia de materiales de instrucción

Problema 0. Analiza la siguiente sucesión de figuras formadas por círculos de igual tamaño.

Fig. 1 Fig. 2 Fig.3 Fig. 4 Fig. 5

a) ¿Cuántos círculos se necesitan para formar la figura 4 de la sucesión? Argumenta tu respuesta.

b) ¿Es correcto que la figura 7 de la sucesión tenga la forma siguiente? ____ ¿Por qué?



c) ¿Cuántos círculos se necesitan para formar la figura 20 de la sucesión? ¿Cuántos la figura 50? Argumenta tu respuesta.

d) Escribe un mensaje a un compañero, donde le expliques cómo puede determinar rápidamente la cantidad de círculos necesarios para formar cualquier número de figura de la sucesión.

e) Determina rápidamente la cantidad de círculos necesarios para formar la figura 1500. Argumenta tu respuesta.

Problema 1. Las figuras de la sucesión siguiente están formadas por círculos de igual tamaño.

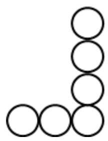


Fig. 1

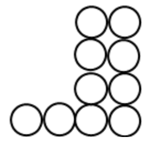


Fig. 2

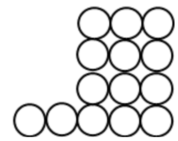


Fig. 3

a) ¿Cuántos círculos se necesitan para formar las figuras 5, 9, 12 y 100? Argumenta tu respuesta.

b) Determina rápidamente la cantidad de círculos necesarios para formar la figura 2150. Argumenta tu respuesta.

Problema 2. Las figuras de una sucesión están formadas por cuadrados blancos y grises del mismo tamaño. Los cuadrados blancos se ubican de forma alineada, en el centro de cada figura y los grises, alrededor de los blancos, como se muestra en seguida.

a) ¿Cuántos cuadrados grises se colocarían en la figura, si se tiene un cuadrado blanco? ¿Cuántos si se tienen dos cuadrados blancos? ¿Y cuántos si se tienen cuatro cuadrados blancos? Justifica tu respuesta.

b) ¿Cuántos cuadrados grises se colocarían en la figura, si se tienen 10 cuadrados blancos? ¿Cuántos si se tienen 50 cuadrados blancos? ¿Y cuántos si se tienen 130 cuadrados blancos? Justifica tu respuesta.

c) Explica cómo podrías averiguar rápidamente cuántos cuadrados grises se colocan en la figura si se conoce la cantidad de cuadrados blancos que la forman.

Problema 3. Los hexágonos de la sucesión están formados por palillos del mismo tamaño, como se muestra en seguida.

a) Organiza los datos anteriores en la tabla y complétala.

Número de hexágonos	Cantidad de palillos
1	
2	
3	
4	
5	
6	

b) Con base en los datos de la tabla, describe la relación que se establece entre el número de hexágonos y la cantidad de palillos de la sucesión.

c) ¿Cuándo el número de hexágonos es 13, cuál es la cantidad de palillos usados?

d) ¿Cuándo el número de hexágonos es 52, cuál es la cantidad de palillos usados?

e) Establece una regla para determinar la cantidad de palillos usados para construir un cierto número de hexágonos. Explica tu regla.

Problema 4. Analiza la siguiente situación y responde lo que se te solicita.

Un niño desea ahorrar de forma que cada día ahorre $3.00. Inicialmente su alcancía tiene $10.00

a) ¿Cuánto dinero tendrá su alcancía al término de una semana de ahorrar? Argumenta tu respuesta.

b) ¿Cuánto dinero tendrá su alcancía al cabo de 30 días de ahorrar? ¿Cuánto al cabo de 107 días de ahorrar? Argumenta tu respuesta.

c) Establece una regla para determinar rápidamente la cantidad de dinero que tendrá el niño en su alcancía al transcurrir cierta cantidad de días de ahorrar. Explica tu regla.

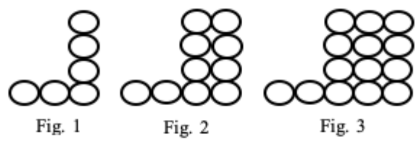
d) Usa la regla para determinar rápidamente la cantidad de dinero que tendrá el niño en su alcancía al cabo de un año de ahorrar.

Anexo B. Análisis a priori de la secuencia de materiales de instrucción

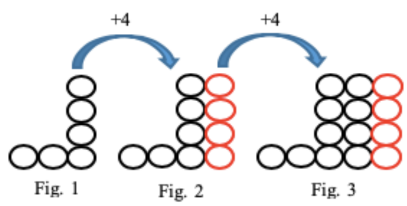
Problema 1. Las diferentes formas de pensamiento funcional que se espera puedan desarrollarse mediante su análisis y resolución, son las siguientes:

1. Relación de recurrencia

Tipo 1.1. Se basa de analizar la cantidad de círculos respecto al número de figura que forman mediante el uso de la representación figural dada.

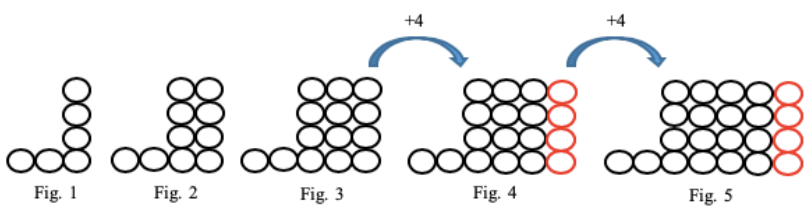


Se reconoce que la diferencia entre dos cantidades de círculos consecutivos es una constante de cuatro unidades, que expresan como:



A. *"la cantidad de círculos va aumentado de 4 en 4"*

Para obtener valores desconocidos de cantidad de círculos que le corresponde a cierto número de figura de la sucesión, el razonamiento se sustenta de un pensamiento aditivo que se aplica de forma recurrente a los valores de la cantidad de círculos, por ejemplo:



La síntesis del término general es:

B. *"al valor anterior de círculos le sumo cuatro unidades"*

C. $a_n = a_{n-1} + 4$, donde n es el número de figura, a_n la cantidad de círculos que forma la figura de la sucesión analizada y a_{n-1} la cantidad de círculos que forma la figura anterior a la analizada.

Tipo 1.2. Se basa de ordenar los valores de la cantidad de círculos respecto al número de figura que forman en una representación numérica simple:

$$6, 10, 14, \ldots$$

Se reconoce que la diferencia entre dos cantidades de círculos consecutivos es una constante de cuatro unidades, que expresan como:

$$\overset{+4}{\curvearrowright}\ \overset{+4}{\curvearrowright}$$
$$6, 10, 14, \ldots$$

A. *"la cantidad de círculos va aumentado de 4 en 4"*

Para obtener valores desconocidos de cantidad de círculos que le corresponde a cierto número de figura de la sucesión, el razonamiento se sustenta de un pensamiento aditivo que se aplica de forma recurrente a los valores de la cantidad de círculos, por ejemplo:

+4 +4

$$6, 10, 14, \mathbf{18}, \mathbf{22} \ \ldots$$

La síntesis del término general es:

B. *"al valor anterior de círculos le sumo cuatro unidades"*

C. $a_n = a_{n-1} + 4$, donde n es el número de figura, a_n la cantidad de círculos que forma la figura de la sucesión analizada y a_{n-1} la cantidad de círculos que forma la figura anterior a la analizada.

Tipo 1.3. Se basa de ordenar los valores de la cantidad de círculos respecto al número de figura que forman en una representación tabular:

Número de figura	1	2	3
Cantidad de círculos	6	10	14

Se reconoce que la diferencia entre dos cantidades de círculos consecutivos es una constante de cuatro unidades, que expresan como:

Número de figura	1	2	3
Cantidad de círculos	6	10	14

+4 +4

A. *"la cantidad de círculos va aumentado de 4 en 4"*

Para obtener valores desconocidos de cantidad de círculos que le corresponde a cierto número de figura de la sucesión, el razonamiento se sustenta de un pensamiento aditivo que se aplica de forma recurrente a los valores de la cantidad de círculos, por ejemplo:

Número de figura	1	2	3	**4**	**5**
Cantidad de círculos	6	10	14	**18**	**22**

+4 +4

La síntesis del término general es:

B. *"al valor anterior de círculos le sumo cuatro unidades"*

C. $a_n = a_{n-1} + 4$, donde n es el número de figura, a_n la cantidad de círculos que forma la figura de la sucesión analizada y a_{n-1} la cantidad de círculos que forma la figura anterior a la analizada.

2. Relación covariacional

Tipo 2.1. Se basa de analizar la cantidad de círculos respecto al número de figura que forman mediante el uso de la representación figural dada.

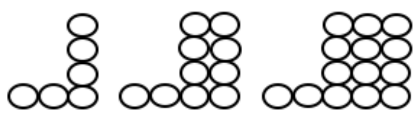
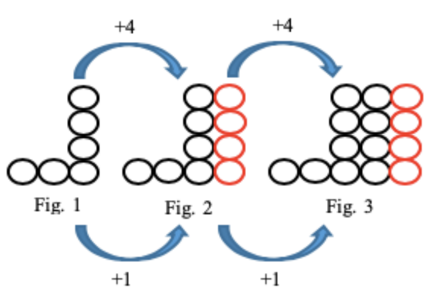


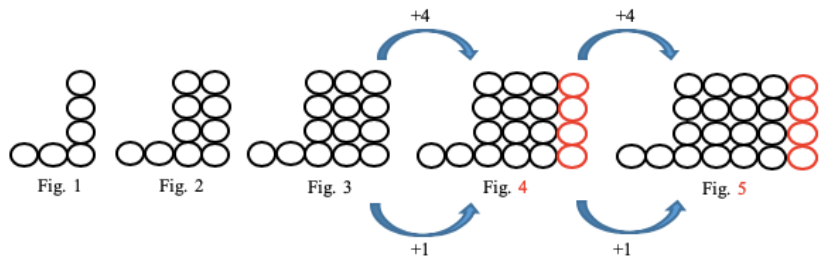
Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Se reconoce que las diferencias entre los valores consecutivos de número de figura son una constante de una unidad, al mismo tiempo que las diferencias entre los valores de las cantidades de círculos son constantes de cuatro unidades.



A. *"el número de figura va de uno en uno y la cantidad de círculos va de cuatro en cuatro"*

Para obtener valores desconocidos, el razonamiento se sustenta de un pensamiento aditivo que se aplica a ambas variables, esto es, al número de figura y a la cantidad de círculos, por ejemplo:



B. *"cuando el número de figura aumenta en uno, la cantidad de círculos aumenta en cuatro"*

La síntesis del término general es:

C. *"si al número de figura se le suma una unidad, a la cantidad de círculos se le suma cuatro unidades, y viceversa"*

D. *si* $n = (n-1) + 1$, *entonces* $a_n = a_{n-1} + 4$, donde n es el número de figura, $(n-1)$ es el número de figura anterior a la analizada, a_n la cantidad de círculos que forma la figura analizada y a_{n-1} la cantidad de círculos que forma la figura anterior a la analizada.

Tipo 2.2. Se basa de ordenar el número de figura y la cantidad de círculos, en pares ordenados, mediante una representación tabular.

Número de figura	1	2	3
Cantidad de círculos	6	10	14

Se reconoce que las diferencias entre los valores consecutivos de número de figura son una constante de una unidad, al mismo tiempo que las diferencias entre los valores de las cantidades de círculos son constantes de cuatro unidades.

+1 +1

Número de figura	1	2	3
Cantidad de círculos	6	10	14

+4 +4

A. *"el número de figura va de uno en uno y la cantidad de círculos va de cuatro en cuatro"*

Para obtener valores desconocidos, el razonamiento se sustenta de un pensamiento aditivo que se aplica a ambas variables, esto es, al número de figura y a la cantidad de círculos, por ejemplo:

+1 +1

Número de figura	1	2	3	**4**	**5**
Cantidad de círculos	6	10	14	**18**	**22**

+4 +4

B. *"cuando el número de figura aumenta en uno, la cantidad de círculos aumenta en cuatro"*

La síntesis del término general es:

C. *"si al número de figura se le suma una unidad, a la cantidad de círculos se le suma cuatro unidades, y viceversa"*

D. *si* $n = (n-1) + 1$, *entonces*$a_n = a_{n-1} + 4$, donde n es el número de figura, $(n-1)$ es el número de figura anterior a la analizada, a_n la cantidad de círculos que forma la figura analizada y a_{n-1} la cantidad de círculos que forma la figura anterior a la analizada.

3. Relación de correspondencia

Tipo 3.1. Se basa de analizar la estructura del patrón figural, por ejemplo:
La **figura 5** se forma de cuatro grupos de cinco círculos y de dos círculo ubicados a la izquierda:

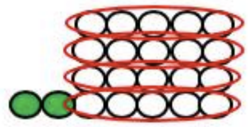


Fig. 5

O la **figura 5** se forma de cinco grupos de cuatro círculos y de dos círculos ubicados a la izquierda.

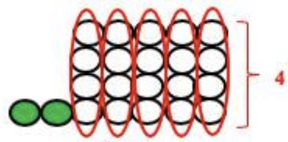


Fig. 5

O la **figura 5** se forma de un rectángulo de base igual al número de la figura y altura de cuatro unidades y de dos círculos ubicados a la izquierda.

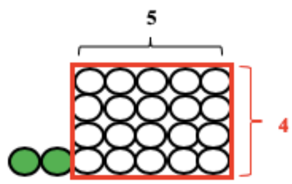


Fig. 5

Estas estructuras multiplicativas, se usan para obtener un valor desconocido de la sucesión, que a la vez se sustenta de un pensamiento multiplicativo, como sigue:

A. Si se conoce el número de figura y se desea determinar la cantidad de círculos que la forman, basta con:

Número de figura

$$4 \times \mathbf{5} = 20$$
$$20 + 2 = \mathbf{22\ círculos}$$

Síntesis del término general:

B. *"el número de figura lo multiplico por cuatro, luego le sumo dos, el resultado es la cantidad de círculos que la forman"*

C. $a_n = 4n + 2$, donde n es el número de figura y a_n la cantidad de círculos que forma la figura de la sucesión analizada.

Tipo 3.2. Otra estructura del patrón figural, es:

La **figura 5** se forma de una fila de círculos que es igual al número de figura más dos; más un rectángulo de base igual al número de la figura y altura de tres unidades.

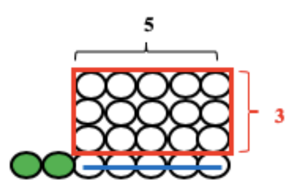


Fig. 5

Esta estructura multiplicativa, se usa para obtener un valor desconocido de la sucesión, que a la vez se sustenta de un pensamiento multiplicativo, como sigue:

A. Si se conoce el número de figura y se desea determinar la cantidad de círculos que la forman, basta con:

Número de figura

$$(5+2)+(3\times 5)=7+15=\mathbf{22\ círculos}$$

Síntesis del término general:

B. *"al número de figura le sumo dos, al resultado lo sumo con el resultado de multiplicar por tres el número de figura, así obtengo la cantidad de círculos que la forman"*

C. $a_n = (n+2)+3n$, donde n es el número de figura y a_n la cantidad de círculos que forma la figura de la sucesión analizada.

Tipo 3.3. Otra estructura del patrón figural, es:

La **figura 5** es igual a obtener el área de un rectángulo de base igual al número de la figura más dos y altura cuatro unidades; y quitarle a esa área seis unidades (círculos que no están en la figura).

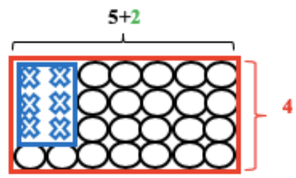


Fig. 5

Esta estructura multiplicativa, se usa para obtener valores desconocidos de la sucesión, que a la vez se sustenta de un pensamiento multiplicativo, como sigue:

A. Si se conoce el número de figura y se desea determinar la cantidad de círculos que la forman, basta con:

Número de figura

$$(5+2)\times(4)=7\times 4=28$$
$$28-6=\mathbf{22\ círculos}$$

Síntesis del término general:

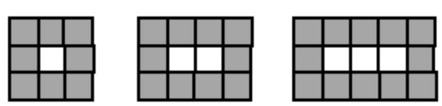
B. *"al número de figura le sumo dos, luego lo multiplico por cuatro, al resultado que me dé le resto (o quito) seis, así obtengo la cantidad de círculos que la forman"*

C. $a_n = [(n+2)\times(4)]-6$, donde n es el número de figura y a_n la cantidad de círculos que forma la figura de la sucesión analizada.

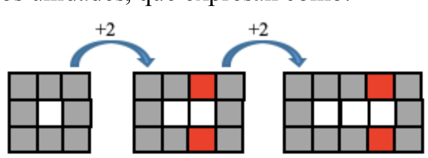
Problema 2. Las diferentes formas de pensamiento funcional que se espera puedan desarrollarse mediante su análisis y resolución, son las siguientes:

1. Relación de recurrencia

Tipo 1.1. Se basa de analizar la cantidad de cuadros grises respecto a los valores de la cantidad de cuadrados blancos empleados para formar las figuras de la sucesión analizada mediante el uso de la representación figural dada.

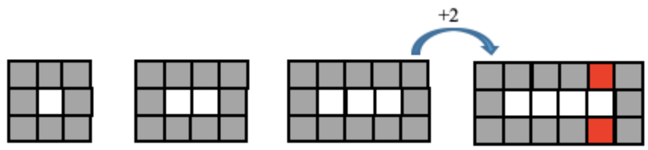


Se reconoce que la diferencia entre cantidades consecutivas de cuadrados grises empleados en dos figuras consecutivas es una constante de dos unidades, que expresan como:



A. *"la cantidad de cuadrados grises va aumentado de 2 en 2"*

Para obtener el valor de la cantidad de cuadrados grises empleados para nuevas figuras consecutivas, el razonamiento se sustenta de un pensamiento aditivo que se aplica de forma recurrente al valor anterior de la cantidad de cuadrados grises, por ejemplo:



La síntesis del término general es:

B. *“al valor anterior de cuadrados grises le sumo dos unidades”*

C. $a_n = a_{n-1} + 2$, donde n es el número de figura a_n la cantidad de círculos que forma la figura de la sucesión analizada y a_{n-1} la cantidad de círculos que forma la figura anterior a la analizada.

Tipo 1.2. Se basa de ordenar, los valores de la cantidad de cuadrados grises respecto a la cantidad de cuadrados blancos que forman cada figura en la sucesión, en una representación numérica simple:

$$8, 10, 12, \ldots$$

Se reconoce que las diferencias entre los valores consecutivos de cantidad de cuadrados grises son constantes de dos unidades, que expresan como:

$$8 \overset{+2}{,} 10 \overset{+2}{,} 12, \ldots$$

A. *“la cantidad de cuadrados grises va aumentado de 2 en 2”*

Para obtener el valor de la cantidad de cuadrados grises empleados para nuevas figuras consecutivas, el razonamiento se sustenta de un pensamiento aditivo que se aplica de forma recurrente al valor anterior de la cantidad de cuadrados grises, por ejemplo:

$$8, 10, 12 \overset{+2}{,} \mathbf{14}, \ldots$$

La síntesis del término general es:

B. *“al valor anterior de cuadrados grises le sumo dos unidades”*

C. $a_n = a_{n-1} + 2$, donde n es el número de figura, a_n la cantidad de círculos que forma la figura de la sucesión analizada y a_{n-1} la cantidad de círculos que forma la figura anterior a la analizada.

Tipo 1.3. Se basa de ordenar, los valores de la cantidad de cuadrados grises respecto a la cantidad de cuadrados blancos que forman cada figura en la sucesión, en una representación tabular:

Cuadrados blancos	1	2	3
Cuadrados grises	8	10	12

Se reconoce que las diferencias entre los valores consecutivos de cantidad de cuadrados grises son constantes de dos unidades, que expresan como:

Cuadrados blancos	1	2	3
Cuadrados grises	8	10	12

+2 +2

A. *“la cantidad de cuadrados grises va aumentado de 2 en 2”*

Para obtener el valor de la cantidad de cuadrados grises empleados para nuevas figuras consecutivas, el razonamiento se sustenta de un pensamiento aditivo que se aplica de forma recurrente al valor anterior de la cantidad de cuadrados grises, por ejemplo:

Cuadrados blancos	1	2	3	**4**
Cuadrados grises	8	10	12	**14**

+2

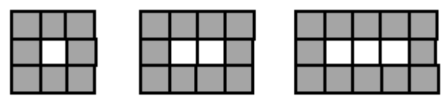
La síntesis del término general es:

B. *"al valor anterior de cuadrados grises le sumo dos unidades"*

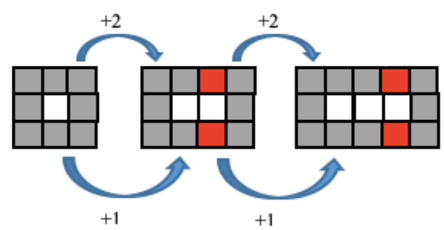
C. $a_n = a_{n-1} + 2$, donde n es el número de figura, a_n la cantidad de círculos que forma la figura de la sucesión analizada y a_{n-1} la cantidad de círculos que forma la figura anterior a la analizada.

2. Relación covariacional

Tipo 2.1. Se basa de analizar la cantidad de cuadros grises respecto a los valores de la cantidad de cuadrados blancos empleados para formar las figuras de la sucesión analizada mediante el uso de la representación figural dada.

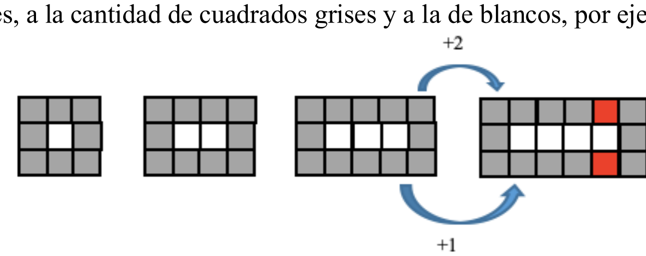


Se reconoce que las diferencias entre los valores consecutivos de cantidad de cuadrados grises son constantes de dos unidades, al mismo tiempo que las diferencias entre los valores de las cantidades de cuadrados blancos son constantes de una unidad.



A. *"la cantidad de cuadrados grises va de dos en dos y la cantidad de cuadrados blancos va de uno en uno"*

Para obtener valores desconocidos, el razonamiento se sustenta de un pensamiento aditivo que se aplica a ambas variables, esto es, a la cantidad de cuadrados grises y a la de blancos, por ejemplo:



B. *"cuando la cantidad de cuadrados grises aumenta en dos, la cantidad de cuadrados blancos aumenta en uno"*

La síntesis del término general es:

C. *"si a la cantidad de cuadrados grises se le suma dos unidades, a la cantidad de cuadrados blancos se le suma una unidad, y viceversa"*

D. *si* $n = (n-1) + 1$, *entonces* $a_n = a_{n-1} + 2$, donde n es el número de figura, $(n-1)$ es el número de figura anterior a la analizada, a_n la cantidad de círculos que forma la figura analizada y a_{n-1} la cantidad de círculos que forma la figura anterior a la analizada.

Tipo 2.2. Se basan de ordenar los valores de la cantidad de cuadrados grises y de la cantidad de cuadrados blancos usados en cada figura de la sucesión, en pares ordenados, mediante una representación tabular.

Cuadrados blancos	1	2	3
Cuadrados grises	8	10	12

Se reconoce que las diferencias entre los valores consecutivos de cantidad de cuadrados grises son constantes de dos unidades, al mismo tiempo que las diferencias entre los valores de las cantidades de cuadrados blancos son constantes de una unidad.

+1 +1

Cuadrados blancos	1	2	3
Cuadrados grises	8	10	12

+2 +2

A. *"la cantidad de cuadrados grises va de dos en dos y la cantidad de cuadrados blancos va de uno en uno"*

Para obtener un valor desconocido, el razonamiento se sustenta de un pensamiento aditivo que se aplica a ambas variables, respectivamente, por ejemplo:

+1

Cuadrados blancos	1	2	3	**4**
Cuadrados grises	8	10	12	**14**

+2

B. *"cuando la cantidad de cuadrados grises aumenta en dos, la cantidad de cuadrados blancos aumenta en uno"*

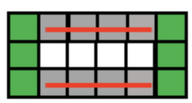
La síntesis del término general es:

C. *"si a la cantidad de cuadrados grises se le suma dos unidades, a la cantidad de cuadrados blancos se le suma una unidad, y viceversa"*

D. *si* $n = (n-1) + 1$, *entonces* $a_n = a_{n-1} + 2$, donde n es el número de figura, $(n-1)$ es el número de figura anterior a la analizada, a_n la cantidad de círculos que forma la figura analizada y a_{n-1} la cantidad de círculos que forma la figura anterior a la analizada.

3. Relación de correspondencia

Tipo 3.1. Se basan de analizar la estructura del patrón figural, por ejemplo:
Si se conoce la cantidad de cuadrados blancos que forman una de las figuras de la sucesión, la cantidad de cuadrados grises que le corresponden se pueden organizar como dos grupos con la misma cantidad de cuadrados blancos y seis cuadrados ubicados en los costados.



Esta estructura multiplicativa, se usa para obtener un valor desconocido de la sucesión, que a la vez se sustenta de un pensamiento multiplicativo, como sigue:

A. Si se conoce la cantidad de cuadrados blancos y se desea determinar la cantidad de cuadrados grises que forman la figura de la sucesión, basta con:

Cantidad de cuadrados blancos

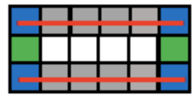
$$2 \times \mathbf{4} = 8$$
$$8 + 6 = \mathbf{14\ cuadrados\ grises}$$

Síntesis del término general:

B. *"multiplico por dos la cantidad de cuadrados blancos, luego le sumo seis unidades, el resultado es la cantidad de cuadrados grises que forman a la figura de la sucesión"*

C. $a_n = 2n + 6$, donde n es la cantidad de cuadrados blancos y a_n la cantidad de cuadrados grises que forma una figura de la sucesión analizada.

Tipo 3.2. Otra estructura del patrón figural, es:
Si se conoce la cantidad de cuadrados blancos que forman una de las figuras de la sucesión, la cantidad de cuadrados grises que le corresponde se puede organizar como dos grupos, con la misma cantidad de cuadrados blancos más dos (cuadrados en los extremos), y dos cuadrados intermedios.



Esta estructura multiplicativa, se usa para obtener un valor desconocido de la sucesión, que a la vez se sustenta de un pensamiento multiplicativo, como sigue:

A. Si se conoce la cantidad de cuadrados blancos y se desea determinar la cantidad de cuadrados grises que forman la figura de la sucesión, basta con:

Cantidad de cuadrados blancos
↓
$$2 \times (4 + 2) = 12$$
$$12 + 2 = \mathbf{14\ cuadrados\ grises}$$

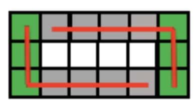
Síntesis del término general:

B. *"a la cantidad de cuadrados blancos le sumo dos, luego lo multiplico por dos, por último le sumo dos unidades, el resultado es la cantidad de cuadrados grises que forman la figura de la sucesión"*

C. $a_n = 2(n + 2) + 2$, donde n es la cantidad de cuadrados blancos y a_n la cantidad de cuadrados grises que forma una figura de la sucesión analizada.

Tipo 3.3. Otra estructura del patrón figural, es:

Si se conoce la cantidad de cuadrados blancos que forman una de las figuras de la sucesión, la cantidad de cuadrados grises que le corresponden se pueden organizar como dos grupos, formados de la cantidad de cuadrados blancos más tres cuadrados.



Esta estructura multiplicativa, se usa para obtener un valor desconocido de la sucesión, que a la vez se sustenta de un pensamiento multiplicativo, como sigue:

A. Si se conoce la cantidad de cuadrados blancos y se desea determinar la cantidad de cuadrados grises que forman la figura de la sucesión, basta con:

Cantidad de cuadrados blancos
↓
$$2 \times (4 + 3) = \mathbf{14\ cuadrados\ grises}$$

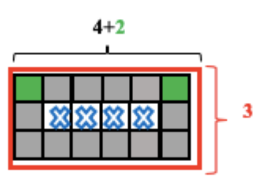
Síntesis del término general:

B. *"a la cantidad de cuadrados blancos le sumo tres, luego la multiplico por dos, el resultado es la cantidad de cuadrados grises que forman la figura de la sucesión"*

C. $a_n = 2(n + 3)$, donde n es la cantidad de cuadrados blancos y a_n la cantidad de cuadrados grises que forma una figura de la sucesión analizada.

Tipo 3.4. Otra estructura del patrón figural, es:

Si se conoce la cantidad de cuadrados blancos que forman una de las figuras de la sucesión, la cantidad de cuadrados grises que le corresponden se pueden organizar como el área de un rectángulo, con altura igual a tres unidades y base igual a la cantidad de cuadrados blancos más dos unidades; a esa área se le quitan cuatro unidades, es decir, se le quita la cantidad de cuadrados blancos que conforman dicha figura de la sucesión.



Esta estructura multiplicativa, se usa para obtener un valor desconocido de la sucesión, que a la vez se sustenta de un pensamiento multiplicativo, como sigue:

A. Si se conoce la cantidad de cuadrados blancos y se desea determinar la cantidad de cuadrados grises que forman la figura de la sucesión, basta con:

Cantidad de cuadrados blancos

$$(3) \times (\mathbf{4} + 2) = 18$$
$$18 - \mathbf{4} = \mathbf{14\ cuadrados\ grises}$$

Cantidad de cuadrados blancos

Síntesis del término general:

B. *"a la cantidad de cuadrados blancos le sumo dos unidades, luego lo multiplico tres, por último, le resto la cantidad de cuadrados blancos, el resultado es la cantidad de cuadrados grises que forman a la figura de la sucesión"*

C. $a_n = [3 \times (n + 2)] - n,$ donde n es la cantidad de cuadrados blancos y a_n la cantidad de cuadrados grises que forma una figura de la sucesión analizada

Problema 3. Las diferentes formas de pensamiento funcional que se espera puedan desarrollarse mediante su análisis y resolución, son las siguientes:

1. Relación de recurrencia

Tipo 1.1. Se basa de ordenar los valores de la cantidad de palillos respecto al número de hexágonos que forman en una representación tabular.

Número de hexágonos	Cantidad de palillos
1	6
2	11
3	16
4	
5	
6	

Se reconoce que la diferencia entre dos cantidades consecutivas de palillos es una constante de cinco unidades, que expresan como:

Número de hexágonos	Cantidad de palillos	
1	6	+5
2	11	+5
3	16	
4		
5		
6		

A. *"la cantidad de palillos va aumentado de cinco en cinco"*

Para obtener valores desconocidos de cantidad de palillos que le corresponde a cierto número de hexágonos, el razonamiento se sustenta de un pensamiento aditivo que se aplica de forma recurrente a los valores de la cantidad de palillos, por ejemplo:

Número de hexágonos	Cantidad de palillos	
1	6	
2	11	
3	16	
4	**21**	+5
5	**26**	+5
6	**31**	+5

La síntesis del término general es:

B. *“al valor anterior de palillos le sumo cinco unidades”*

C. $a_n = a_{n-1} + 5$, donde n es el número de hexágonos, a_n la cantidad de palillos que forma los hexágonos analizados y a_{n-1} la cantidad de palillos que forma los hexágonos anteriores a los analizados.

2. Relación covariacional

Tipo 2.1. Se basan de ordenar el número de hexágonos y la cantidad de palillos, en pares ordenados mediante una representación tabular.

Número de hexágonos	Cantidad de palillos
1	6
2	11
3	16
4	
5	
6	

Se reconoce que las diferencias entre los valores consecutivos de número de hexágonos son una constante de una unidad, al mismo tiempo que las diferencias entre los valores de las cantidades de palillos son constantes de cinco unidades.

	Número de hexágonos	Cantidad de palillos	
	1	6	
+1	2	11	+5
+1	3	16	+5
	4		
	5		
	6		

A. *“el número de hexágonos va de uno en uno y la cantidad de palillos va de cinco en cinco”*

Para obtener valores desconocidos, el razonamiento se sustenta de un pensamiento aditivo que se aplica a ambas variables, esto es, al número de hexágonos y a la cantidad de palillos, por ejemplo:

	Número de hexágonos	Cantidad de palillos	
	1	6	
	2	11	
	3	16	
+1	4	**21**	+5
+1	5	**26**	+5
+1	6	**31**	+5

B. *“cuando el número de hexágonos aumenta en uno, la cantidad de palillos aumenta en cinco”*

La síntesis del término general es:

C. *“si al número de hexágonos se le suma una unidad, a la cantidad de palillos se le suma cinco unidades, y viceversa”*

D. *si* $n = (n-1) + 1$, *entonces* $a_n = a_{n-1} + 5$, donde n es el número de hexágonos, $(n-1)$ es el número de hexágonos anteriores a los analizados, a_n la cantidad de palillos que forma los hexágonos analizados y a_{n-1} la cantidad de palillos que forma los hexágonos anteriores a los analizados.

3. Relación de correspondencia

Tipo 3.1 Se basan de analizar la estructura del patrón numérico, por ejemplo:
Se determina que para todos los casos, se cumple que si el número de hexágonos se multiplica por cinco y se le suma uno, se obtiene la cantidad de palillos:

Número de hexágonos	Cantidad de palillos
$1 \times 5 +$	$1 =$ 6
$2 \times 5 +$	$1 =$ 11
$3 \times 5 +$	$1 =$ 16
$4 \times 5 +$	$1 =$ 21
$5 \times 5 +$	$1 =$ 26
$6 \times 5 +$	$1 =$ 31

Esta estructura multiplicativa, se usa para obtener un valor desconocido de la sucesión, que a la vez se sustenta de un pensamiento multiplicativo, como sigue:

A. Si se conoce el número de hexágonos, por ejemplo 52 hexágonos, y se desea determinar la cantidad de palillos que los forman, basta con:

Número de hexágonos

$$\mathbf{52} \times 5 = 260$$
$$260 + 1 = \mathbf{261\ palillos}$$

Síntesis del término general:

B. *"el número de hexágonos lo multiplico por cinco, luego le sumo uno, el resultado es la cantidad de palillos que los forman"*

C. $a_n = 5n + 1$, donde n es el número de hexágonos y a_n la cantidad de palillos de la sucesión analizada.

Problema 4. Las diferentes formas de pensamiento funcional que se espera puedan desarrollarse mediante su análisis y resolución, son las siguientes:

1. Relación de recurrencia

Tipo 1.1. Se basa de ordenar en una representación numérica simple los valores de la cantidad de dinero en la alcancía al cabo de cierta cantidad de días de ahorrar:

$$13, 16, 19, \ldots$$

Se reconoce que la diferencia entre dos cantidades consecutivas de dinero es una constante de tres unidades, que expresan como:

$$13 \overset{+3}{\frown} 16 \overset{+3}{\frown} 19, \ldots$$

A. *"la cantidad de dinero en la alcancía va aumentado de 3 en 3"*

Para obtener valores desconocidos de la cantidad de dinero en la alcancía al cabo de cierta cantidad de días de ahorrar, el razonamiento se sustenta de un pensamiento aditivo que se aplica de forma recurrente a los valores de la cantidad de dinero en la alcancía, por ejemplo:

$$13, 16, 19 \overset{+3}{\frown} \mathbf{22} \overset{+3}{\frown} \mathbf{25}\ \ldots$$

La síntesis del término general es:

B. *"a la cantidad anterior de dinero en la alcancia le sumo tres unidades"*

C. $a_n = a_{n-1} + 3$, donde n es la cantidad de días de ahorrar, a_n la cantidad de dinero en la alcancía a los n días de ahorrar y a_{n-1} la cantidad de dinero en la alcancía un día anterior a la analizada.

Tipo 1.2. Se basa de ordenar, en una representación numérica simple o tabular, los valores de la cantidad de dinero en la alcancía con respecto a la cantidad de días de ahorrar:

Cantidad de días de ahorrar	Cantidad de dinero en la alcancía
1	13
2	16
3	19
4	22
5	25
6	…
7	…

Se reconoce que la diferencia entre dos cantidades consecutivas de dinero en la alcancía es una constante de tres unidades, que expresan como:

Cantidad de días de ahorrar	Cantidad de dinero en la alcancía	
1	13	+3
2	16	+3
3	19	+3
4	22	+3
5	25	
6	…	
7	…	

A. *"la cantidad de dinero en la alcancía va aumentado de 3 en 3"*

Para obtener valores desconocidos de la cantidad de dinero en la alcancía al cabo de cierta cantidad de días de ahorrar, el razonamiento se sustenta de un pensamiento aditivo que se aplica de forma recurrente a los valores de la cantidad de dinero, por ejemplo:

Cantidad de días de ahorrar	Cantidad de dinero en la alcancía	
1	13	
2	16	
3	19	
4	22	
5	25	+3
6	**28**	+3
7	**31**	

La síntesis del término general es:

B. *"a la cantidad anterior de dinero en la alcancia le sumo tres unidades"*

C. $a_n = a_{n-1} + 3$, donde n es la cantidad de días de ahorrar, a_n la cantidad de dinero en la alcancía a los n días de ahorrar y a_{n-1} la cantidad de dinero en la alcancía un día anterior a la analizada.

2. Relación covariacional

Tipo 2.1. Se basa de organizar la cantidad de días de ahorrar y la cantidad de dinero en la alcancía, en pares ordenados mediante representaciones como tabla o listado de valores, por ejemplo:

Cantidad de días de ahorrar	Cantidad de dinero en la alcancía
1	13
2	16
3	19
4	22
5	25
6	…
7	…

Se reconoce que las diferencias entre cantidades consecutivas de días de ahorrar son una constante de una unidad, al mismo tiempo que las diferencias entre las cantidades consecutivas de dinero son constantes de tres unidades.

	Cantidad de días de ahorrar	Cantidad de dinero en la alcancía	
+1	1	13	+3
+1	2	16	+3
+1	3	19	+3
+1	4	22	+3
	5	25	
	6	…	
	7	…	

A. *"la cantidad de días de ahorrar va de uno en uno y la cantidad de dinero en la alcancía va de tres en tres"*

Para obtener valores desconocidos, el razonamiento se sustenta de un pensamiento aditivo que se aplica a ambas variables, esto es, a la cantidad de días de ahorrar y a la cantidad de dinero en la alcancía, por ejemplo:

	Cantidad de días de ahorrar	Cantidad de dinero en la alcancía	
	1	13	
	2	16	
	3	19	
	4	22	
+1	5	25	+3
+1	6	**28**	+3
	7	**31**	

B. *"cuando la cantidad de días de ahorrar aumenta en uno, la cantidad de dinero en la alcancía aumenta en tres"*

La síntesis del término general es:

C. *"si a la cantidad de días de ahorrar se le suma una unidad, a la cantidad de dinero en la alcancía se le suma tres unidades, y viceversa"*

D. *si* $n = (n-1) + 1$, entonces $a_n = a_{n-1} + 3$, donde n es la cantidad de días de ahorrar, $(n-1)$ es la cantidad de días de ahorrar anterior a la analizada, a_n la cantidad de dinero en la alcancía a los n días de ahorrar y a_{n-1} la cantidad de dinero en la alcancía un día anterior a la analizada.

3. Relación de correspondencia

Tipo 3.1. Se basan de analizar la estructura del patrón numérico, por ejemplo:
Se determina que para todos los casos, se cumple que si la cantidad de días de ahorrar se multiplica por tres y se le suma diez, se obtiene la cantidad de dinero en la alcancía:

Cantidad de días de ahorrar	Cantidad de dinero en la alcancía
$1 \times 3 +$	$10 =$ 13
$2 \times 3 +$	$10 =$ 16
$3 \times 3 +$	$10 =$ 19
$4 \times 3 +$	$10 =$ 22
$5 \times 3 +$	$10 =$ 25
6	…
7	…

Esta estructura multiplicativa, se usan para obtener un valor desconocido de la sucesión, que a la vez se sustenta de un pensamiento multiplicativo, como sigue:

A. Si se conoce la cantidad de días de ahorrar, por ejemplo 7 días, y se desea determinar la cantidad de dinero en la alcancía, basta con:

Cantidad de días de ahorrar

$$\mathbf{7} \times 3 = 21$$
$$21 + 10 = \mathbf{31\ pesos}$$

Síntesis del término general:

B. *"la cantidad de días de ahorrar la multiplico por tres, luego le sumo diez, el resultado es la cantidad de dinero en la alcancia"*

C. $a_n = 3n + 10$, donde n es la cantidad de días de ahorrar y a_n la cantidad de dinero en la alcancía a los n días de ahorrar.

Anexo C. Hallazgos del estudio

<table>
<tr><th rowspan="2">PMA</th><th colspan="4">PROBLEMA</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td>Extender el patrón</td><td rowspan="2">FNR1: A la sucesión se le van sumando cuatro.
FNR2: Lo que iba haciendo, era cuatro por la figura que era, y se le suman dos.
FNR3: Para saber cuántos círculos le corresponden a la figura 5, primero a cinco le resté tres, y me dio dos, ahora a ese dos lo multipliqué por cuatro y me dio ocho, y por último le sumé 14, y me dio 22.
FNR4: La cantidad de círculos de la parte inferior son igual al número de figura más dos. Y que en todas las figuras se tenían filas de tres círculos, y las filas iban de acuerdo al número de figura.</td><td>FNR1: Dibujé la figura y conté.</td><td rowspan="2">FNR1: Le sumé cinco, que es lo que va aumentando la cantidad de palillos de una figura a otra
FNR2:Multipliqué por cinco, porque son los palillos que se van aumentando. Le aumenté uno, porque observé que luego de contar cierta cantidad de veces cinco palillos, sobraba un palillo</td><td></td></tr>
<tr><td>Percibir y registrar un patrón</td><td>FNR2: La sucesión va de dos en dos.
FNR3: Es que a la figura tres como vi que para llegar a la figura uno, le faltan dos, y como la constante era de dos, entonces a los 12 cuadrados de la figura tres, le resté cuatro y me dio ocho.
FNR4: Multipliqué los cuadrados blancos por dos, por lo que hay arriba y abajo. Al resultado le sumé seis, que son los tres cuadrados que hay en los dos extremos de la figura.</td><td></td></tr>
<tr><td>Generalizar aritméticamente</td><td>FNR5: $(2150-3)\cdot 4+14=8602$.
FNR6: Multiplicaría el número de figura por cuatro y le sumaría dos</td><td>FNR5: $(130-3)\cdot 2+12=266$.
FNR6: Para la figura 50, multipliqué dos por 50, y me dio 100, al resultado le sumé los seis cuadrados que siempre habían en los lados, así obtuve 106 cuadrados grises.</td><td>FNR3: $(23\times 5)+1=116$
FNR4: Fui sumando de cinco en cinco hasta llegar a la cantidad solicitada
FNR5: $(23\times 6)-(23-1)=116$</td><td>FNR1: Multiplicar los días por tres, por lo que iba ahorrando, y sumar 10, qué es lo que ya tenía ahorrado.</td></tr>
<tr><td>Generalizar algebraicamente</td><td></td><td>FNR7: Multipliqué la cantidad de cuadrados blancos por dos y le sumé seis.</td><td>FNR6: $(¿?\times 5)+1$</td><td>FNR2: Para obtener cuánto se ha ahorrado en cierto número de días, tenemos que multiplicar lo que ahorra cada día, por el número de días que va ahorrar, y después como dice aquí que, su alcancía tienen 10 pesos, le tengo que sumar esos diez pesos, para que me de la respuesta.</td></tr>
</table>