

El saber matemático en la formación de actitudes

*María S. García González**
*Rosa María Farfán Márquez***

Resumen

La investigación sobre actitudes tiende a considerar este último constructo como una medida de agrado caracterizada por el gusto o disgusto hacia la matemática escolar, opacando el papel que el saber matemático ocupa en la formación de actitudes. Por ello, este artículo se centra en discutir el papel del saber matemático en la formación de actitudes, considerando la proporcionalidad como objeto de actitud. Los resultados muestran que dependiendo de cómo sea presentado el saber matemático a los estudiantes a través de diseños de situaciones de aprendizaje, se desencadena la actitud.

Palabras clave: actitud, socioepistemología, saber matemático, proporcionalidad.

INTRODUCCIÓN

Dentro del dominio afectivo en matemática educativa son numerosos los estudios acerca de la actitud hacia las *matemáticas*, debido a que es un elemento que influye en el aprendizaje de los estudiantes. Gracias a los resultados de las investigaciones, se sabe que los éxitos y fracasos escolares no siempre dependen de las capacidades cognitivas de los sujetos (McLeod, 1992; Gómez-Chacón, 2000), sino también de factores inherentes al ser humano, como las emociones, las creencias y

* Centro de Investigación en Matemática Educativa, Universidad Autónoma de Guerrero. Correo electrónico: <mgargonza@gmail.com>.

** Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México. Correo electrónico: <rfarfan@cinvestav.mx>.

las actitudes. De ahí que la actitud tiene una gran tradición de investigación y un largo camino por recorrer. Hasta ahora se han hecho evidentes algunos factores que influyen en su formación, como el género, la economía, los profesores, la sociedad, la escuela, la edad, el contexto. Se han creado escalas de actitud (Fenema, 1979; Ursini, 2004), se han propuesto modelos para explicarlas teóricamente (Hart, 1989; Di Martino y Zan, 2010) y se han hecho algunas intervenciones con el fin de modificarlas (González, 2012).

De estos resultados, es notable que cuando se indaga la actitud de los estudiantes se hace en referencia a sus experiencias en las clases de matemáticas; por ejemplo, la resolución de problemas, la acreditación de asignaturas y cursos, pero no se hace mención del papel que el saber matemático juega en la formación de actitudes. Desde la perspectiva socioepistemológica (Cantoral, 2013), se propuso identificarlo. Para ello se creó un escenario en el que interactuaron aprendiz y saber matemático; fue en esta relación en donde las actitudes fueron estudiadas.

La literatura ha señalado que el aula de clases está regulada por normas socio-matemáticas que influyen en el actuar de docentes y estudiantes (Cobb y Yackel, 1996; Webel, 2013); los factores afectivos no escapan de ellas. Algunas investigaciones han señalado la influencia de éstas en las emociones y actitudes de los estudiantes (García, 2014, Martínez-Sierra y García-González, 2014, 2015). Para alejar la interacción aprendiz-saber de estas normas, se optó por realizar el trabajo de campo en un espacio diferente al salón de clases, sin perder la tesitura didáctica; dicho espacio fue un taller denominado “Trabajando con situaciones de aprendizaje en educación secundaria”.

MARCO TEÓRICO

La socioepistemología y el estudio de la actitud

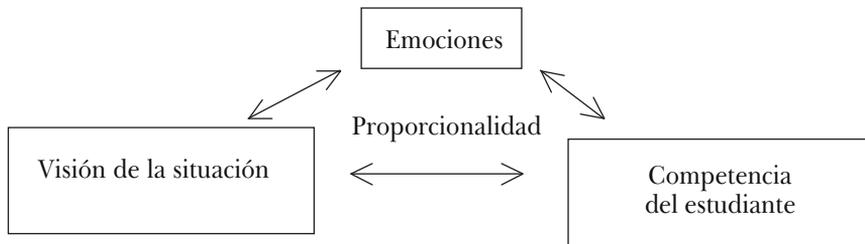
La teoría socioepistemológica al reconocer la componente social del saber matemático permite estudiar fenómenos sociales ligados a éste, de ahí la pertinencia de estudiar un fenómeno social, como lo son las actitudes hacia un saber matemático específico, la proporcionalidad.

La socioepistemología exige de saberes funcionales y transversales para poder realizar un estudio. La proporcionalidad cumple la funcionalidad en el sentido de que es cercana a la experiencia humana y muy utilizada en actividades diarias como la preparación de recetas, la utilización de mapas y las fotografías. Es transversal en los niveles básicos de educación mexicana: los niños entran en contacto con la razón en los primeros años de la escuela primaria, aun cuando no se reconocía con ese nombre; por ejemplo, en el cálculo de perímetros de figuras

geométricas aparece implícita la razón en el caso de π , hasta hacerla explícita en los últimos grados de primaria y durante la secundaria.

Para aproximarnos al estudio de la actitud, adoptamos el modelo tridimensional de actitud TMA (Di Martino y Zan, 2010) que contempla como objeto de actitud la matemática escolar. Desde este modelo la actitud se compone por tres dimensiones: 1) disposición emocional, 2) visión de la matemática y 3) competencia del estudiante. A manera de hipótesis se consideró la caracterización del TMA particularizada en un saber matemático como objeto de actitud, pero contemplando que las propiedades de sus dimensiones serían particulares de la proporcionalidad. Por ello se propuso una reformulación del TMA como se muestra en la Figura 1.

Figura 1
Caracterización *a priori* de la actitud hacia la proporcionalidad



Los componentes se consideran como sigue:

- *Las emociones* “[se refieren a las] reacciones de valencia a eventos, agentes u objetos, la naturaleza particular de las cuales viene determinada por la manera como es interpretada la situación desencadenante” (Ortony, Clore y Collins, 1988: 13).
- *La visión de la situación de aprendizaje*, se refiere a la percepción que de ella tiene el estudiante; por ejemplo, que le asigne un carácter utilitario o uno funcional. Por utilitario se refiere a que se resuelva de manera mecánica la situación de aprendizaje basándose en conocimientos memorizados, y por funcional, a que se le dé solución con base en la comprensión de ésta y en el uso de conocimientos apropiados.
- *La competencia del estudiante* se concibe desde el modelo TMA como alta o baja; desde nuestra perspectiva, identificamos en un principio a la competencia alta cuando el estudiante es capaz de realizar las actividades contenidas en la

situación de aprendizaje y los recursos o estrategias que usa para ello, y baja cuando no puede resolver la situación. Para analizar esta categoría adoptamos los modelos de pensamiento proporcional propuestos por Reyes (2011).

SITUACIONES DE APRENDIZAJE, INSTRUMENTOS PARA EL ESTUDIO DE LA ACTITUD

Las situaciones de aprendizaje fueron las herramientas que permitieron desencadenar las actitudes de los estudiantes hacia lo proporcional y estudiarlas; se resolvieron en un taller denominado “Trabajando con situaciones de aprendizaje”, que se desarrolló en las instalaciones del departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV, IPN.

Una situación de aprendizaje socioepistemológica es aquella situación problemática que nos permite favorecer el desarrollo del proceso de aprendizaje. La característica más importante de las SA es que no deben comunicar al estudiante el conocimiento del cual se espera que se apropie, y deben de tomarse en cuenta los antecedentes escolares con los que se espera que el estudiante haga frente a ella. Las SA privilegian la diversidad de las argumentaciones y se considera a la matemática como la herramienta que ayuda a la toma de decisiones. Las respuestas y argumentaciones del estudiante a las situaciones de aprendizaje se consideran válidas por el principio socioepistemológico de la racionalidad contextualizada, al igual que sus argumentos, ya que dependen de su interpretación, su relativismo epistemológico y el fomento de una resignificación progresiva de sus conocimientos previos.

Se diseñaron 10 situaciones de aprendizaje centradas en tres tipos de tareas de razonamiento proporcional: mezcla, escala y razón, y proporción. Para ello se consideraron algunos resultados de la problematización de la proporcionalidad, resultados puntuales de investigaciones sobre proporcionalidad y diferentes marcos de referencia donde éstas se contextualizaron, como la cocina, las artesanías, el armado de rompecabezas, la compraventa, el arte, la antropometría y las fotocopias.

Respecto de la problematización, la pregunta “¿de dónde proviene la proporcionalidad?” ha sido respondida desde la teoría socioepistemológica por Reyes-Gasperini, Cantoral y Montiel (2015). A decir de estos autores, la proporcionalidad surge para hacer frente a la imposibilidad de medir magnitudes incommensurables, por lo que la incapacidad de medir genera la necesidad de comparar. Acerca de la pregunta “¿qué caracteriza el pensamiento proporcional?”, ha sido respondida en la literatura sobre razonamiento proporcional (por ejemplo, Noelting, 1980; Lamon, 1993; Oller y Gairín, 2013), y se trata de la comparación multiplicativa entre dos cantidades que varían. Lamon señala:

[...] proportional reasoning means supplying reason in support of claims made about the structural relationship among four quantities, (say a , b , c , d) in a context simultaneously involving covariance of quantities and invariance of ratios or products; this would consist of the ability to discern a multiplicative relationship between two quantities as well as the ability to extend the same relationship to other pair of quantities (2007: 637-638).

Desde hace muchos años existe un gran cuerpo de investigación acerca del razonamiento proporcional. Al parecer, se ha pasado de investigar los factores que influyen en la resolución de problemas proporcionales en los estudiantes (Lamon, 2007) a fomentar su dominio (Lamon, 1993; Howe, Nunes y Bryant, 2010). Tener una gran cantidad de investigaciones sobre razonamiento proporcional en el campo de la matemática educativa representó una ventaja, debido a que en algunas de ellas se exponen diseños de tareas proporcionales. Algunos de los diseños de situaciones de aprendizaje fueron retomados de la literatura, no con el fin de replicarlos, sino más bien de indagar una variable que no ha sido considerada en ellas: las actitudes de los estudiantes hacia la proporcionalidad.

En las situaciones de aprendizaje se consideraron algunas variables de control, entre ellas el tipo de tarea proporcional. Otra de las variables fue el material empleado, algunas veces fueron materiales manipulables (P), como en el caso de la preparación de mezclas, y otras veces sólo con lápiz y papel (LP). En total se diseñaron cuatro del tipo mezcla, tres de escala y tres de razón y proporción.

Las tareas de mezcla estuvieron basadas en la toma de decisión. Se pretendía que los estudiantes decidieran cuál era la mejor entre dos mezclas propuestas, para ello tendrían que hacer uso de su pensamiento proporcional cualitativo; se consideraron razones con números enteros y no enteros. Entre ellas se encuentran las siguientes:

- $SA1$ y $SA7$ (P): sabor/color de la mezcla como criterio de elección en la preparación de aguas de sabor, café (cocina).
- $SA2$ (LP): criterios de elección centrados en las variables, agua o jugo, y la comparación numérica de las razones con números enteros (cocina).
- $SA9$ (LP): criterios de elección basados en el color de la pintura, comparación numérica de razones con números enteros y no enteros (compra-venta).

Las tareas de escala estuvieron centradas en el uso de la constante de proporcionalidad. Se trabajó con la aplicación sucesiva de la constante de proporcionalidad en la reducción y también en la reducción y la ampliación simultáneamente, en ellas esperábamos que apareciera el pensamiento proporcional aditivo o multiplicativo. Las siguientes SA fueron consideradas en este grupo de tareas.

- *SA5 (LP)*: consideraba la aplicación sucesiva de la constante de proporcionalidad en la reducción (artesanías).
- *SA6 (LP)*: centrada en la aplicación sucesiva de la constante de proporcionalidad en la reducción y la ampliación (fotocopias).
- *SA8 (P)*: consideraba el uso de la constante de proporcionalidad para ampliar o reducir el tamaño de un rompecabezas, empleando números enteros y no enteros (figuras geométricas).

Las tareas de razón y proporción estuvieron enfocadas en el reconocimiento de la razón y la proporción en diferentes situaciones. Por ejemplo, en la relación cabeza-cuerpo, a través del tiempo el tamaño de la cabeza va disminuyendo comparado con el tamaño del cuerpo, que va aumentando, y el canon, medida usada por los griegos para realizar esculturas.

- *SA3 (LP)*: centrada en la relación cabeza-cuerpo (antropometría).
- *SA4 (LP, P)*: consideraba la importancia del factor de proporcionalidad en el diseño de las esculturas, para lo cual es llamado canon (arte).
- *SA10 (P)*: centrada en la discriminación entre estrategias aditivas y estrategias multiplicativas al trabajar con relaciones de proporcionalidad (alturas).

METODOLOGÍA

Recolección de datos

Asistió al taller un grupo de 20 estudiantes (10 hombres y 10 mujeres) que se encontraban cursando el último grado de educación secundaria en una escuela pública en la Ciudad de México. Los estudiantes tenían entre 14 y 15 años de edad en el momento en que se desarrolló la investigación. La participación fue voluntaria y bajo el consentimiento de sus tutores.

Cada una de las sesiones del taller diseñado fue videograbada con el consentimiento de los estudiantes y sus tutores. Cuando los estudiantes terminaron de resolver las situaciones, se les entrevistó para tener mayor información de su resolución; estas entrevistas fueron aleatorias, sólo se entrevistaron a los tres o cinco primeros en terminar las actividades y al último o últimos en terminar. Cuando se trató de una situación resuelta de manera grupal, se realizaron preguntas directas a los participantes para profundizar en sus argumentaciones. En la primera sesión del taller los estudiantes contestaron un cuestionario de contexto, en el que se indagaba sobre su relación con las matemáticas en los grados escolares anteriores y en el actual; posteriormente, fueron entrevistados en grupos focales

(de cinco integrantes), para tener más detalles de las respuestas que dieron en el cuestionario de contexto.

Para fines de análisis, se seleccionaron cinco participantes, debido a que fueron los que asistieron a todas las sesiones del taller. Se trata de 3 hombres y 2 mujeres, que han sido nombrados de la siguiente manera: H1, M2, H3, H4 y M5 (M y H indican el sexo).

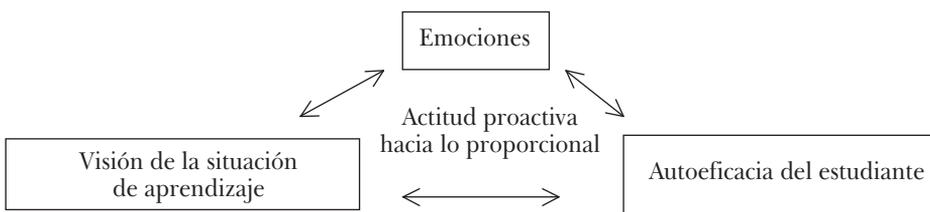
El análisis se realizó de dos formas: por cada estudiante se examinaron, de cada tipo de tarea (mezcla, escala y razón, y proporción), las actitudes que manifestaron (análisis horizontal), y en la segunda, de cada tipo de tarea se analizaron las actitudes que se manifestaron, independientemente del estudiante, ya que son analizadas en conjunto (análisis vertical). Debido a la adopción del modelo de actitud TMA, el análisis basado en el método de la teoría fundamentada (Glaser y Strauss, 1967) consistió en encontrar las propiedades que definían desde los datos los componentes del modelo.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El análisis de datos arrojó una redefinición de las dimensiones propuestas por el modelo adoptado y un solo tipo de actitud que hemos llamado actitud proactiva. La etiqueta “proactiva” que hemos asignado a la actitud identificada obedece a que todos los estudiantes aceptaron el reto de resolver las situaciones de aprendizaje; para ello se involucraron en las actividades de las sesiones, aportaban ideas acerca de las posibles soluciones y argumentaban sus respuestas.

Las actitudes proactivas identificadas en los tres tipos de tarea se caracterizan en forma global por el esquema de la Figura 2. Las componentes encontradas son las mismas, en esencia, que considera el modelo TMA; sin embargo, como anticipamos, éstas poseen propiedades específicas del saber matemático considerado.

Figura 2
Caracterización de la actitud proactiva hacia lo proporcional



Notamos tres fuentes de influencia en las actitudes: las características del estudiante, las características del saber y la interacción estudiante-saber. Estas fuentes están presentes en cada una de las dimensiones del modelo de actitud proactiva que encontramos y definimos como sigue:

- 1) Las *emociones* son las reacciones que se desencadenan en el trabajo con las situaciones de aprendizaje y con el saber puesto en juego. Esta definición es producto de una reformulación de la OCC a la luz de nuestros resultados.
- 2) La *visión de la situación de aprendizaje* es la valoración que el estudiante hace del diseño de la situación de aprendizaje y de su interacción con ésta. Esta definición es una reformulación de la propia de ATM a la luz de nuestros resultados.
- 3) A la componente competencia la llamamos autoeficacia, debido a que en los datos se encontró evidencia de por qué un estudiante contestaba o no la situación de aprendizaje; la definición de autoeficacia la retomamos de Usher y Pajares (2009): es la creencia en las habilidades personales para hacer frente a una situación planteada; dicha creencia está permeada por las concepciones que de la matemática escolar se tengan, producto de las vivencias en las clases de matemáticas, así como de la confianza que se tenga de trabajar con el saber matemático en cuestión.

La actitud proactiva en las tareas proporcionales

Emociones

Las emociones de los estudiantes en los tres tipos de tarea se desencadenaron por dos tipos de situaciones principales: el trabajo con la situación de aprendizaje y el diseño de ésta. Las emociones desencadenadas por el trabajo con la situación de aprendizaje son emociones de agrado y desagrado (Tabla 1).

El tipo de emociones expuesto en la tabla anterior es comúnmente reportado en investigaciones sobre afecto, debido a que es el resultado de la valoración del estudiante sobre la tarea matemática enfrentada; sin embargo, las emociones desencadenadas por el diseño de la situación de aprendizaje tienen una razón diferente: obedecen al tipo de tarea proporcional resuelta; por ejemplo, en las tareas de escala las situaciones desencadenantes estuvieron asociadas con la naturaleza del factor de proporcionalidad, cuando era o no un número entero (Tabla 2).

Tabla 1
Emociones desencadenadas por el diseño de la SA (mezcla)

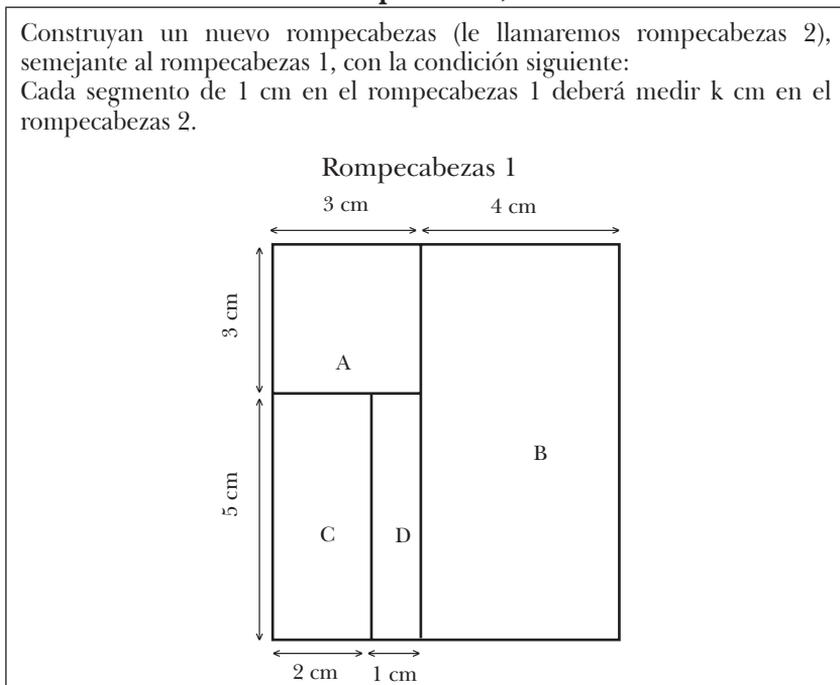
<i>Palabra emocional</i>	<i>Situación desencadenante</i>	<i>Evidencia</i>	<i>Tipo OCC</i>	<i>Definición (OCC)</i>
Gusto	Facilidad de la situación	H17: La actividad estuvo muy fácil, <i>me gustó</i> , fue entretenido el elegir las propuestas, debería de resumirse el motivo del problema.	Agrado	Agrado por un objeto atractivo
Fácil				
Diversión	La situación	M16: La actividad <i>es divertida</i> , aunque me hubiera gustado que tratara otro tema.		
Molestia	La toma de decisión	H20: La actividad fue un poco molesta por tener que decidir en las propuestas, pero <i>me sentí bien</i> .	Desagrado	Desagrado por objeto repulsivo (desagrado)

Tabla 2
Emociones desencadenadas por el diseño de la situación de aprendizaje (escala)

<i>Palabra emocional</i>	<i>Situación desencadenante</i>	<i>Evidencia</i>	<i>Tipo OCC</i>	<i>Definición (OCC)</i>
Disfrute	k fácilmente manipulable	[2] H4: ¡Ah!, está fácil sólo hay que multiplicar cada lado por punto cinco y ya [<i>Sonríe</i>].	Agrado	Agrado por un objeto atractivo
Facilidad		M19, H17 y H11: Nos sentimos bien porque estuvo <i>fácil</i> armar el rompecabezas, multiplicamos todo por 3 y quedó, un poco difícil fue dibujarlo porque nos faltó papel y unimos pedazos.		
Dificultad	k difícil de manipular	H10 y H15: Estuvo <i>un poco complicado</i> porque tuvimos que multiplicar por fracciones y eso nos hizo difícil multiplicar las medidas y dibujar el rompecabezas $\{k=3/4 \text{ cm}\}$. H1 y H3: <i>Muy complicada</i> [la actividad] por el 0.75.	Desagrado	Desagrado por objeto repulsivo (desagrado)

El factor de proporcionalidad en este caso obedeció a la facilidad del estudiante para manipular las medidas del rompecabezas 1, en SA8 dado un rompecabezas con medidas definidas, se trataba de ampliarlo o reducirlo dependiendo del valor de k , la actividad se enunciaba como sigue:

Figura 3
El rompecabezas, SA8



En el caso de SA8 la construcción del rompecabezas fue un argumento de validación de las respuestas de los estudiantes: si las piezas embonaban perfectamente, era un indicio de que habían aplicado correctamente el factor de proporcionalidad. H1 y H3 construyeron el rompecabezas 2, con $k=0.75$. Durante la sesión observamos que hubo dificultades al tratar de obtener las medidas del nuevo rompecabezas, originadas por hacer las multiplicaciones sin la ayuda de la calculadora. El no poder realizar las multiplicaciones desencadenó congoja en H1, pero logró superarla debido a su creencia de que podía hacerlo (52), dicha creencia es evidencia de su autoeficacia.

[46] H1 [*Algo nervioso*]: No me salen las multiplicaciones, *estoy muy estresado*.

[47] M: ¿Por qué?

[48] H1: No sé, es muy sencillo pero *es muy enredoso*.

[49] H3: *Es el punto setenta y cinco {0.75}*, ése es lo que complica.

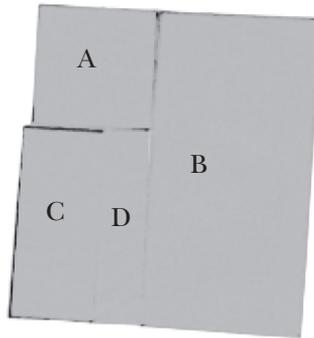
[50] M: Tranquilo, hagan los cálculos con calma, hay tiempo.

[51] H3: Yo los hago, tú cálmate.

[52] H1 [*Respira profundo*]: ¡Es un reto! Yo puedo.

Como notamos que se les dificultaba hacer los cálculos a mano, se les dejó usar la calculadora para determinar las medidas del nuevo rompecabezas. La Figura 4 muestra el rompecabezas que armaron.

Figura 4
Rompecabezas 2



Las piezas C y D no embonan con el resto de las piezas, ello se debió a las aproximaciones que hicieron al calcular las medidas. En la misma SA8 se les pedía encontrar y comparar las áreas de las piezas del rompecabezas. Sin embargo, los valores que anotaron en la tabla respecto del rompecabezas 2 no eran las verdaderas (véanse valores alineados a la derecha).

Tabla 3
Áreas de las piezas del rompecabezas

<i>Pieza</i>	<i>Área Rompecabezas 1</i>	<i>Área Rompecabezas 2</i>
A	9	5.625 5.0625
B	32	17.85 18
C	10	5.55 5.625
D	5	2.775 2.8125
Suma	56	31.8 31.5

VISIÓN DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Respecto de la visión de la situación de aprendizaje, la mayoría de las veces fue funcional, debido a que los estudiantes lograron comprender lo que se les demandaba y en consecuencia elegir la estrategia adecuada de acuerdo con su racionalidad contextualizada para dar respuesta.

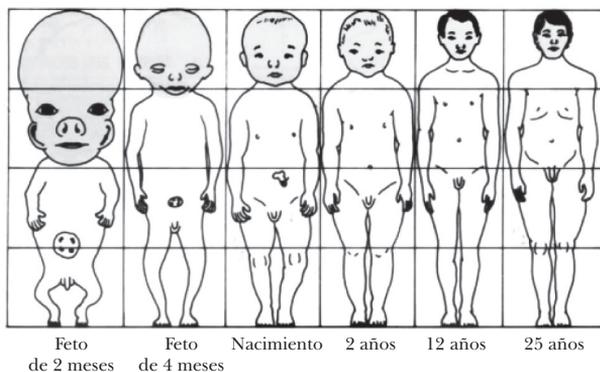
En el caso de las tareas de razón y proporción, el significado que asociaron a la razón fue de relación entre las variables. El pensamiento multiplicativo fue el que se manifestó en este tipo de tareas; el procedimiento que usaron para dar respuesta fue la identificación de esa relación mediante el factor de proporcionalidad k . Los argumentos que dieron acerca de ese k fueron las medidas de las dimensiones de las figuras involucradas. A manera de ejemplo exponemos el caso de la SA3, en donde se trataba la relación del tamaño del cuerpo y el tamaño de la cabeza. El enunciado de SA3 se muestra enseguida.

Figura 5
Relación cabeza/cuerpo, SA3

En las personas la relación entre la altura de la cabeza y la del cuerpo va variando a lo largo de las diferentes etapas de nuestro crecimiento.

La imagen de la izquierda refleja las relaciones entre el tamaño de nuestra cabeza y el resto de nuestro cuerpo, con el paso del tiempo.

Observen con detalle la imagen para responder las preguntas planteadas.



Para hacer explícita la relación cabeza-cuerpo se pidió completar la tabla siguiente, H1 lo hizo atribuyendo en cada etapa la razón cabeza/cuerpo. Él además

escribió cuántas veces cabe el tamaño de la cabeza en el cuerpo (columna derecha), en esta relación evidenciaba la razón (31-32).

Tabla 4
Producción de H1, relación cabeza-cuerpo

<i>Etapa</i>	<i>Relación tamaño cabeza-cuerpo</i>
2 meses (feto)	$\frac{1}{2}$, cabe 2 veces
4 meses (feto)	$\frac{1}{4}$, cabe 4 veces
Nacimiento	$\frac{1}{4}$, cabe 4 veces
2 años	$\frac{1}{4}$, cabe 4 veces
12 años	$\frac{1}{6}$, cabe 6 veces
25 años	$\frac{1}{6}$, cabe 6 veces

[31] f) Si pudieran nombrarle de algún modo a la relación que guarda el tamaño de la cabeza y el tamaño del cuerpo, ¿cuál sería?

[32] H1: *Razón*

AUTOEFICACIA

Definimos la autoeficacia como la creencia en las habilidades personales para hacer frente a una situación planteada; encontramos que dicha creencia está permeada por las concepciones que tienen los estudiantes de la matemática escolar y que es producto de sus vivencias en las clases, así como de la confianza que se tenga de trabajar con el saber matemático en cuestión.

De acuerdo con Usher y Pajares (2009), hay cuatro fuentes independientes de autoeficacia:

- 1) *Experiencia de dominio*: es el resultado de la interpretación de los propios logros anteriores.
- 2) *Experiencias vicarias*: son desencadenantes mediante la observación del desempeño de otros cuando realizan tareas. Los estudiantes a menudo se comparan con individuos particulares, tales como sus hermanos, sus padres o sus compañeros de clase, ya que hacen juicios sobre sus propias capacidades académicas.

- 3) *Persuaciones sociales*: se refieren a mensajes de otros sobre nuestra propia capacidad para realizar una tarea.
- 4) *Los estados emocionales y fisiológicos*: tales como la ansiedad, el estrés, la fatiga y el estado de ánimo de éxito o fracaso. Ésta se relaciona con la dimensión emoción de la caracterización previa de actitud que adoptamos.

La categoría *autoeficacia* la dividimos en dos tipos: *relativa al saber*, donde se da cuenta de los significados asociados a la proporcionalidad, los argumentos y los procedimientos usados por los estudiantes. Por otra parte, consideramos las relativas a ellos (Figura 6).

Figura 6
Tipos de autoeficacia y sus fuentes



En el caso de los cinco participantes seleccionados, si bien resolvieron todas las SA, su autoeficacia fue diferente, fue personal. Y varió dependiendo de la situación de aprendizaje demandada. Pondremos un ejemplo que nos ha parecido muy ilustrativo: el caso de H1. En la evidencia, resaltamos las fuentes de la autoeficacia personal y relativas al saber en negrita.

En la entrevista inicial que se les hizo acerca de su relación con las matemáticas él comentó:

H1 [entrevista inicial en grupo focal]: No me gustan las matemáticas [emoción], bueno, ahora, en primaria era muy bueno [experiencias de dominio], ahora se me dificultan [juicio de autoeficacia], la verdad es que desde primero casi no entiendo [experiencias

de dominio], ahora sí le echo más ganas porque ya voy de salida [motivo], pero es que la maestra casi no nos hace caso [persuasión social], sólo nos deja el libro y eso aburre y a veces no entiendo.

M: ¿Qué has hecho ante esa situación?

H1: A veces estudio por mi cuenta [juicio de autoeficacia]... casi no me gusta pedir ayuda [juicio de autoeficacia], bueno, a veces mi mamá [persuasión social] le pide a H3 que me explique y sí le entiendo, también consulto al profe [persuasión social], por eso estoy aquí, mi mamá le pidió a él que me incluyera con los demás, yo no soy del grupo pero sí me interesó venir, yo quiero ir mejor [motivo], yo sé que puedo, es sólo que me aplique.

En la valoración de la S1, H1 comentó:

H1 [acerca de SA1]: Fue un juego en el que puse a prueba mis conocimientos matemáticos no creía que estuviera haciendo matemáticas [juicio de autoeficacia]... en la escuela sólo resuelvo el libro o cuaderno no hago experimentos como este [experiencias de dominio], debería hacerlos la maestra.

En esta situación H1 señaló un error en las recetas, del que nadie se había percatado, lo cual lo hizo experimentar júbilo.

[13] H1: ¡No!, revise su hoja, [juicio de autoeficacia] que están mal {se refiere a las cantidades de vasos usados} [Voz fuerte y eufórica].

Notamos que cuando no fue capaz de argumentar una pregunta, se quedaba callado.

[45] H1: ¿Por qué sabe más a naranja? Porque le echaron más bonafina [argumento, se le sigue cuestionando pero sigue diciendo que es porque hay más naranja].

[46] M: Sí, pero cuál es la causa de que sepa más [Se sigue cuestionando pero deja de responder].

En SA9, cuando logró convencer a H4 de la respuesta correcta encontramos evidencia de su autoeficacia.

[12] H1 [a H4]: La uno es la mejor, porque hay más amarillo, si le pones poco amarillo será un verde limón y no queremos eso [argumento].

[13] H4: Es casi igual la cantidad de amarillo.

[14] H1: ¡Claro que no! [Sube tono de voz enfadado] ¡Mira!, en la uno por cada 100 de azul [procedimientos/ comparación de variables] hay 233 de amarilla y en la 4 por cada 100 de azul hay 400 de amarillo [argumento/juicio de autoeficacia].

[15] H4 [Sube tono de voz]: ¡No!, espera... hay más amarillo en la 4 comparado con la azul que en la 1 [argumento], tienes razón si ponemos más amarilla que azul se verá muy bajito el color, sería un verde limón [hace una mueca de risa].

El tener la razón en sus argumentos lo hizo sentirse bien, comentó:

H1: Fue muy emocionante porque yo tenía la razón [experiencia vicaria] y tuve que convencer a H4 de la respuesta correcta [juicio de autoeficacia]. El ejercicio es parecido a los de la escuela, pero al ser pintura me pareció muy fácil [juicio de autoeficacia] porque yo mezclo mucho colores porque me gusta dibujar y pintar [racionalidad contextualizada].

CONCLUSIONES

Considerar al saber matemático como objeto de actitud representaba para nosotras una profundización en las actitudes que pudieran ser manifestadas por los estudiantes. Consideramos que el modelo de actitud que encontramos robustece la caracterización del TMA, al explicar las propiedades de las categorías y la actitud misma, como producto de la interacción del estudiante y el saber. Centrarnos en la proporcionalidad y trabajar con diferentes tipos de tarea nos permitió ver que hay ciertos aspectos de un saber matemático que pueden desencadenar valoraciones diferentes, encontramos que las tareas de mezclas fueron más interesantes para los estudiantes por dos razones, la toma de decisión y la manipulación de las variables presentes en la relación proporcional, mediante la mezcla de líquidos o la preparación de agua de sabor. Por el contrario, las tareas de escalas fueron valoradas menos favorablemente, en algunos casos, debido al factor de proporcionalidad usado, para ellos fue difícil manipular un $k=0.75$ y reducir con él las medidas del rompecabezas, pero no ocurrió lo mismo con $k=0.5$, éste se les facilitó.

Si bien nuestro objeto de actitud fue un saber matemático, la mirada desde la que se hizo fue el sujeto, un aprendiz, por ello su identidad jugó un papel importante en la actitud proactiva que encontramos. Influyeron sus creencias hacia la matemática y sus juicios de autoeficacia respecto del trabajo con lo proporcional, también intervinieron las relaciones que fueron estableciendo a lo largo del taller con sus pares, en algunos casos estas relaciones fueron determinantes para resolver la Situación de Aprendizaje solicitada. Pero la principal razón que desencadenó esta actitud proactiva fue el motivo perseguido por los asistentes al taller:

mejorar sus habilidades en matemáticas. Esta motivación era compartida por los estudiantes asistentes y por sus madres, quienes estuvieron al pendiente de ellos llevándolos a cada una de las sesiones del taller; creemos que fue este motivo el que sostuvo la actitud proactiva de los estudiantes.

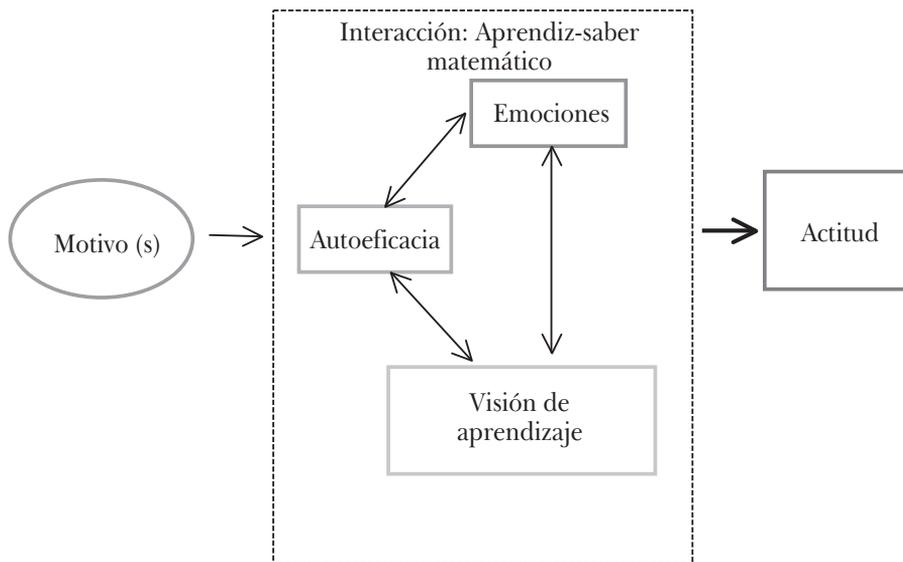
En la literatura (Grootenboer y Marshman, 2016; Gómez-Chacón, 2010, 2000,1998; Ursini, Sánchez y Orendain, 2004; Gairín, 1987; McLeod, 1992) ha quedado evidenciado que las actitudes del estudiante hacia las matemáticas se ven influenciadas por diferentes factores: personales (género, edad), familiares (estudios y profesión del padre y la madre) y escolares (tipología y normativa escolar, zona del centro, grado escolar cursado, tipología del profesor, preferencia e importancia y rendimiento académico). Además se identifica a la actitud en sus polos positivos o negativos, la actitud positiva es asociada con el gusto hacia las matemáticas y la negativa con el disgusto. En esta investigación al centrarnos en la interacción aprendiz-saber, algunos de esos factores mencionados han quedado opacados.

Hemos identificado un solo tipo de actitud, la actitud proactiva. Esta actitud ha sido etiquetada como proactiva debido a que los aprendices mostraron disponibilidad para resolver las situaciones de aprendizaje propuestas, además de que mostraron iniciativa en el desarrollo de éstas con el fin de resolverlas. Empero, la proactividad se manifestó de forma diversa, la razón fue la personalidad de cada uno de los participantes y el tipo de tarea proporcional enfrentado.

Nuestros resultados advierten un patrón general en el aprendizaje de las matemáticas, en la base se encuentran los motivos que cimientan el actuar del estudiante. Proponemos de manera hipotética el siguiente modelo de actitud hacia un saber matemático (Figura 7). En este modelo es prioritaria la interacción del aprendiz con el saber y el medio en el que lo hacen, en nuestro caso fueron las situaciones de aprendizaje pero puede ser, por ejemplo, el salón de clases.

Consideramos los motivos como fuente principal de la actitud, debido a que en nuestra evidencia mejorar en matemáticas, por parte de los estudiantes, fue lo que desencadenó en primer lugar su asistencia al taller y en segundo que resolvieran las situaciones de aprendizaje, nuestro instrumento para desencadenar las actitudes y estudiarlas. Este argumento es apoyado por la teoría de Achievement Goal, una teoría de la motivación donde las definiciones de los estudiantes tanto de sus éxitos como de su rendimiento en comparación con sus compañeros son predictivos de su comportamiento en clase. De ahí que Hannula (2012) señale a la motivación como una dimensión en su metateoría del afecto, debido a que dirige el comportamiento de las personas. La actitud como uno de los descriptores del dominio afectivo no escapa a estas consideraciones.

Figura 7
Modelo hipotético de la formación de actitud,
centrada en un saber matemático



REFERENCIAS

- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. España: Gedisa.
- Cobb, P. y Yackel, E. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education* 27(4), 458-477.
- Di Martino, P. y Zan, R. (2010). 'Me and maths': towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal Mathematics Teacher Education* 13, 27-48.
- Fennema, E. (1979). Women and girls in mathematics-equity in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 10, 389-401.
- Gairín J. (1987). *Las actitudes en Educación, un estudio sobre Matemática Educativa*. Barcelona: Editorial.
- García, M. S. (2014). *Una caracterización de actitudes hacia las matemáticas desde una perspectiva socioepistemológica*. Memoria predoctoral no publicada. Cinvestav-IPN, Ciudad de México: México.

- Glaser, B. y Strauss, A.L. (1967). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research*. Chicago: Aldine De Gruyter.
- Goldin, G. (2014). Perspectives on emotion in mathematical engagement, learning, and problem solving. In R. Pekrun & L. Linnenbrink-Garcia (Eds.), *International handbook of emotions in education* (pp. 391-414). Nueva York: Routledge.
- Gómez-Chacón, I. (2000). *Matemática Emocional*. Madrid: Narcea.
- Gómez-Chacón, I. (1998). Una metodología cualitativa para el estudio de las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias* 16(3), 431-450.
- Gómez-Chacón, I. (2010). Actitudes de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática con tecnología. *Enseñanza de las Ciencias* 28(2), 227-244.
- Gómez-Chacón, I. (2013). Prospective Teachers' Interactive Visualization and Affect in Mathematical Problem-Solving. *The Mathematics Enthusiast* 10 (1&2), 61-86.
- González, R. M. (2012). *Cambio de actitudes y creencias hacia las matemáticas. Intervención con perspectiva de género en escuelas secundarias*, México: Universidad Pedagógica Nacional (Horizontes educativos. Género).
- Grootenboer, P. y Marshman, M. (2016). *Mathematics, affect and learning. Middle school students' beliefs and attitudes about mathematics education*. Nueva York: Springer.
- Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories. *Research in Mathematics Education* 14(2), 137-161.
- Hart, L. (1989). Describing the Affective Domain: Saying What We Mean'. In D. McLeod y V. Adams (Eds.). *Affect and Mathematical Problem Solving* (pp. 37-45). Nueva York: Springer Verlag.
- Howe, C., Nunes, T. & Bryant, P. (2010). Rational number and proportional reasoning: Using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science. *International Journal of Science and Mathematics Education* 9, 391-417.
- Lamon, S. (1993). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children's Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(1), 41-61.
- Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 629-668). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

- Martínez-Sierra, G. y García-González, M. D. S. (2014). High school students' emotional experiences in mathematics classes. *Research in Mathematics Education*, 16(3), 234-250.
- Martínez-Sierra, G. y García-González, M.S. (2015). Undergraduate Mathematics Students' Emotional Experiences in Linear Algebra. *Educational Studies in Mathematics* 91(1), 87-106
- McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. In D.Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-596). New York: McMillan Publishing Company.
- Noelting, G. (1980). 'The development of proportional reasoning and the ratio concept: part I – Differentiation of stages', *Educational Studies in Mathematics* 11, 217-253.
- Oller, A. M. y Gairín, J. M. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime* 16(3), 317-338.
- Ortony, A., Clore, G.L. & Collins, A. (1988). *The cognitive structure of emotions*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Reyes, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav, México.
- Reyes, D., Cantoral, R. y Montiel. G. (2015). *Empoderamiento docente de la teoría socioepistemológica: la significación mediante el uso y las prácticas sociales*. Poster presentado en la XIX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Alicante, España.
- Ursini, S., Sánchez, G. y Orendain, M. (2004). Validación y confiabilidad de una escala de actitudes hacia las matemáticas y hacia las matemáticas enseñadas con computadora. *Educación Matemática* 16(3), 59-78.
- Usher, E. L., y Pajares, F. (2009). Sources of self-efficacy in mathematics: A validation study. *Contemporary Educational Psychology*, 34(1), 89-101.
- Webel, C. (2013). High School Students' Goals for Working Together in Mathematics Class: Mediating the Practical Rationality of Studenting. *Mathematical Thinking and Learning* 15 (enero 2015), 24-57.