Revista de História da Educação Matemática
HISTEMAT

ISSN: 2447-6447
Submetido: 12/07/2020
Aprovado: 15/07/2020

ANÁLISIS HISTÓRICO EN LA CONSTITUCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO: métodos iterativos

ANÁLISE HISTÓRICA NA CONSTITUIÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO: métodos iterativos

Flor Monserrat Rodríguez Vásquez[1]
ORCID iD: http://orcid.org/0000-0002-9596-4253

RESUMEN

El enfoque histórico en la didáctica de la matemática incide en diversos aspectos, desde conocer la constitución del conocimiento matemático hasta cómo considerar tal conocimiento para favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar. Realizar investigaciones desde este enfoque, enriquece en gran medida la visión multidisciplinar de la matemática, coadyuvando a que en la enseñanza se opte por una perspectiva más profunda al considerar al conocimiento de la matemática escolar con sus precedentes históricos. Este artículo, muestra la constitución de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales, a partir del análisis histórico de fuentes primarias. Se usó el método histórico para la organización de datos a través de las fases heurística, crítica, hermenéutica y exposición. En la tercera fase se recurrió al análisis cualitativo de textos. El análisis de libros históricos y libros de texto permitió identificar el desarrollo conceptual de los métodos iterativos, la profundización sobre su epistemología y una perspectiva más amplia de su introducción en la enseñanza, tanto teórica como metodológicamente.

Palabras clave: Investigación histórica. Transposición didáctica. Métodos iterativos.

RESUMO

A abordagem histórica na didática da matemática incide em vários aspectos, desde o conhecimento da constituição do conhecimento matemático até como considerar esse conhecimento para favorecer os processos de ensino e aprendizagem da matemática escolar. A realização de pesquisas a partir desta abordagem enriquece sobremaneira a visão multidisciplinar da matemática, ajudando o ensino a optar por uma perspectiva mais profunda ao considerar o conhecimento da matemática escolar com seus precedentes históricos. Este artigo mostra a constituição de métodos iterativos na resolução de equações não lineares, a partir da análise histórica de fontes primárias. O método histórico foi utilizado para a organização dos dados nas fases heurística, crítica, hermenêutica e expositiva. Na terceira fase, foi utilizada a análise qualitativa dos textos. A análise dos livros históricos e manuais permitiu identificar o desenvolvimento conceptual dos métodos iterativos, o aprofundamento da sua epistemologia e uma perspectiva mais alargada da sua introdução no ensino, tanto teórica como metodologicamente.

Palavras-chave: Investigação histórica. Transposição didática. Métodos iterativos.

[1] Profesora de la Universidad Autónoma de Guerrero. México. Posgrado en Matemática Educativa. Correo: flor.rodriguez@uagro.mx

INTRODUCCIÓN

El análisis histórico de textos como metodología de investigación, enriquece a la didáctica de la matemática puesto que amplia la interpretación de documentos que son la base teórica y práctica de los agentes didácticos, y además son una fuente privilegiada de información. Los textos muestran la organización de temas y algunos señalan instrucciones para una lectura con comprensión, incluso otros contienen aspectos que motivan a la lectura como son diagramas, ilustraciones y colores, entre otros factores que incitan a una lectura armónica. En particular, los libros de matemáticas actuales buscan la captación del lector para una lectura con comprensión, pues es de antemano sabido, que la matemática por su naturaleza abstracta es *difícil de comprender*.

En este sentido, uno de los objetivos del análisis histórico, en didáctica de la matemática, es buscar aspectos que potencien la comprensión de los conceptos, teoremas y procedimientos a través de la revisión de documentos no solo contemporáneos sino libros de antaño. Al respecto, se observan dos tendencias en investigación histórica, los investigadores que consideran este tipo de investigación como un fin en sí mismo y los que la consideran como un medio para favorecer en aspectos de la enseñanza y aprendizaje. Relativo a la segunda tendencia, la investigación que se genera suele realizarse a partir de un análisis histórico-epistemológico con una perspectiva didáctica, por lo que se analizan elementos de la génesis de la matemática a través de la historia de las ideas, para favorecer justamente en la didáctica de las matemáticas. Investigaciones pioneras en este campo expresan que el objetivo de realizar investigación histórica recae en:

> ... esclarecer problemas educativos, abordándolos de una manera científica. En otras palabras, desde esta perspectiva se busca encontrar fundamentos para sustentar hipótesis que ayuden a resolver los problemas observados en las matemáticas en situación escolar, en este caso, a la luz que arroja la historia de las ideas. (Gómez, 2003, p. 2).

Asímismo se considera que el análisis histórico debe proveer la integración de la historia de la matemática en su enseñanza pues ello influye no solo en profesores sino también en estudiantes. Los efectos de tal integración son la generación de un antídoto contra el formalismo y el aislamiento del conocimiento matemático, la identificación de un conjunto de medios que le permiten al profesor apropiarse mejor de dicho conocimiento y que le ayudan a ordenar la presentación de los temas currícularmente, el descubrimiento de obstáculos y dificultades que se han presentado en el desarrollo de la matemática, así como la identificación de errores cometidos por los propios matemáticos, que a veces se reproducen en los procesos de aprendizaje de los alumnos, a quienes ayuda en la motivación para el aprendizaje, y además se dota de una visión de la actividad matemática como actividad humana, es decir, la perspectiva histórica vislumbra a la matemática desde su constitución cultural y descarta su papel como edificio acabado (Sierra, 1997; Sierra, González y López, 1999, 2002). Respecto de esto último Cantoral (2016) señala que,

> …dado que el saber matemático se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares, su introducción al sistema didáctico le obliga a una serie de modificaciones sobre su estructura y su funcionamiento, lo cual afecta también a las relaciones que se establecen entre estudiantes y profesor. Al dar al objeto de saber una forma didáctica se producen discursos que facilitan la comunicación de conceptos y procedimientos matemáticos y, en consecuencia, el saber se despersonaliza y descontextualiza. Dichos consensos se alcanzan a costa de una pérdida del sentido y del significado original, y reducen el saber a temas aislados y secuenciados, a menudo denominados "contenidos" o "unidades temáticas" de una asignatura…

Evidentemente, la perspectiva histórica muestra que la matemática es un conjunto de conocimientos en evolución continua, en el cual existe una red de conexiones e interrelaciones con otros conocimientos, por lo que se considera que la génesis de la matemática es uno de los fundamentos de la enseñanza.

Sobre la potencialidad que tiene el uso de la historia de la matemática en la enseñanza, investigadores (Barbin, 1997; Bagny, 2000; Fauvel y van Maanen, 2000; Furinghetti, 2019; Heeffer, 2006; Jankvist 2009; Rendon y Guacaneme, 2016; "Autor", 2015; Torres, Guacaneme y Arboleda, 2014) señalan que la historia puede incidir en la presentación de los temas para favorecer la comprensión de los estudiantes, y en consecuencia en la investigación en Educación Matemática es un asunto legítimo de atender, por lo tanto, es consistente usar referencias históricas en el tratamiento de la matemática escolar. En este sentido, el realizar un análisis histórico permite identificar la coordinación y contraste entre diversas formas de representación, conocer las formas de representación más influyentes para un matemático en determinado periodo de tiempo y cómo las transformaba para crear, modificar y extender la actividad matemática, lo cual refleja en la actualidad suma importancia pues en el proceso de enseñanza y aprendizaje mientras más maneras de coordinar y conectar diversas formas de representación mayor es la comprensión que se logra.

Bajo los supuestos anteriores se busca responder a una problemática relacionada con el fenómeno de transposición didáctica. La hipótesis es que la enseñanza de la matemática se favorece por la investigación histórica al considerar la constitución del conocimiento como un aspecto en la construcción y apropiación del conocimiento contextualizado en aula. Cabe mencionar que una de las principales motivaciones por considerar este enfoque, es que a través de un seguimiento en la evolución de un saber nos debe servir para identificar el problema que nos atañe y asimismo iluminar nuestra actuación en el momento actual. Por ello, en este artículo se muestran aspectos de la constitución del conocimiento métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales, a partir del análisis de libros históricos y libros de texto.

REFERENTES TEÓRICOS

Por la naturaleza de la investigación, consideramos el fenómeno de transposición didáctica como sustento teórico de la investigación. Chevallard (1985) define a este fenómeno como el proceso por el que un saber sabio o científico se convierte en un saber objeto de enseñanza, es decir, es el proceso por el cual ciertos contenidos seleccionados como aquellos que se deben enseñar institucionalmente en un tiempo y lugar dados, son transformados en contenidos enseñables.

De la definición, se deduce la existencia de un objeto de saber que es sometido a un proceso de transformación que tiene como resultado un objeto de enseñanza. En la transformación mencionada es necesario operar un doble proceso, descontextualización y recontextualización, que transforma el contenido inicial en un contenido con fines pedagógicos. En otras palabras, la transformación puede interpretarse como el cambio que sufre el objeto de saber al ser reconstruido en el aula no solo por el profesor sino también por los alumnos. Ciertamente, el objeto de enseñanza que resulta no es exactamente el mismo del cual se origina, pero sí se mantienen las cualidades que lo caracterizan como tal y que permiten su validación por aquellos sujetos del ámbito educativo que lo reconstruyen. Además, la interpretación histórica cultural que hace desde la transposición didáctica, puede manifestar autonomía entre la enseñanza y aprendizaje (Díaz, 2003).

Por lo tanto, se deben distinguir dos aspectos, las características culturales de la disciplina de la cual se origina el objeto de saber y las características culturales escolares en donde se considera como objeto a ser enseñado, reconociendo que la transposición didáctica indica la evolución *estructurada* del conocimiento con fines didácticos.

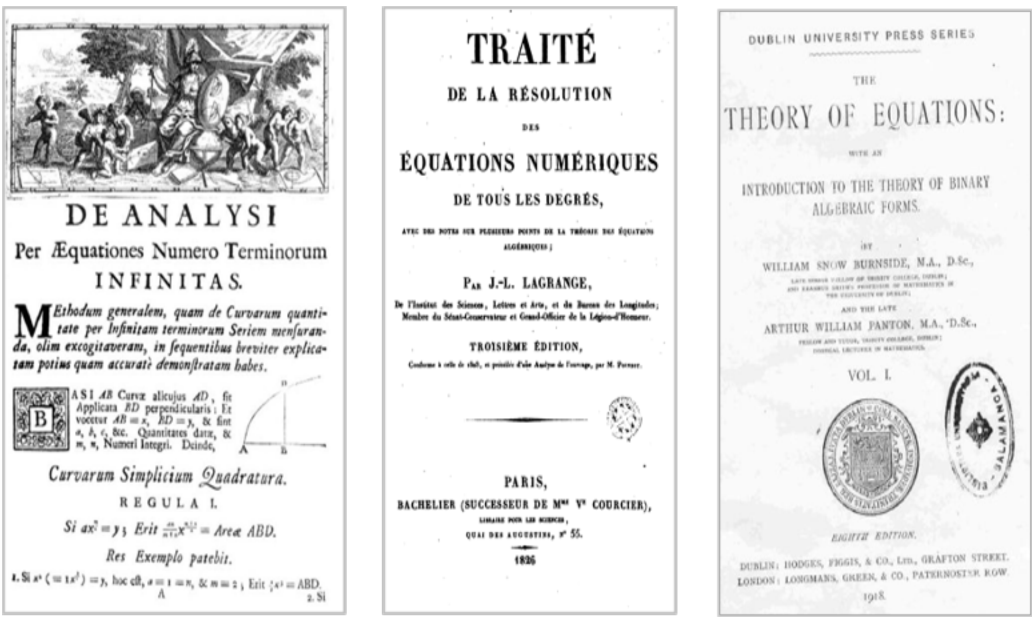
METODOLOGÍA

La investigación es cualitativa. Se usó el método histórico de Ruiz Berrio (1976) por lo que se siguieron las fases heurística, crítica, hermenéutica y exposición. En la primera fase se localizaron y clasificaron los documentos; en la segunda se determinó la autenticidad de las fuentes y se realizó una interpretación del contenido de los documentos; en la tercera fase se interpretaron los datos desde un enfoque histórico-pedagógico; finalmente la cuarta fase recae en este escrito.

Los periodos históricos se determinaron debido a su incidencia en el desarrollo de la matemática en relación al tema ecuaciones no lineales: un primer periodo marcado por el nacimiento del cálculo – mediados del siglo S. XVII-S. XVIII –, un segundo periodo a partir del nacimiento de los sistemas dinámicos – finales del S. XIX – mediados del S. XX – y un tercer periodo dado por la incorporación de tecnologías al ámbito educativo – mediados del siglo XX. La pregunta directriz para el análisis cualitativo de los libros históricos y de texto fue: ¿Qué conocimientos predominaban entre los matemáticos de los tres periodos en relación a los métodos iterativos para encontrar una solución a una ecuación? Con esta organización, se investigó sobre la constitución del conocimiento métodos iterativos en la resolución de ecuaciones bajo dos modalidades, análisis de libros históricos y análisis de libros de texto.

Los libros históricos que se analizaron por su valor histórico y por las contribuciones que tuvieron hacia la resolución de ecuaciones no lineales fueron: 1) Newton, I. (1711). *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*. Editado por William Jones; 2) Lagrange, J. L. (1808). *Traité de la Résolution des équations numériques de tous les degrés*. De L'Ecole Polytechnique; 3) Burnside, W. y Panton, A. (1881). *The theory of equations*. Dublin University Press Series. Ver Figura 1.

Figura 1 – *Libros históricos analizados.*



Con base en Ruiz Berrio (1976) y González (2002) se plantearon los siguientes campos de análisis para los libros históricos: *ficha de referencia de la obra*, que permitió enmarcar la obra en el momento en el que fue escrita; *contexto y propósitos de la obra y del autor*, que permitió enmarcar el contexto histórico-cultural de las matemáticas en general, de la estructura del material, de la secuenciación de los contenidos de la obra, de sus objetivos y de las innovaciones introducidas por el material; *tipo de proceso utilizado en la resolución de ecuaciones*, desde la perspectiva de los procesos geométricos, algebraicos y numéricos; *conclusiones*, con un enfoque en la interpretación de las componentes de conocimiento, epistemológico y socio-cultural. Ver tabla 1.

Tabla 1 – *Categorías para el análisis de los libros históricos.*

<table>
<tr><th>Campo de Análisis</th><th colspan="2">Unidades de Análisis</th><th>Descripción general de los propósitos</th></tr>
<tr><td>Ficha de referencia de la obra</td><td colspan="2">Nombre el autor
Fecha de nacimiento y fallecimiento del autor
Primera edición
Edición analizada
Localización del manuel utilizado</td><td>Enmarcar la obra en el momento en que fue escrita</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Contextos y propósitos de la obra y el autor</td><td colspan="2">Momento histórico y lugar en que fue escrita la obra</td><td rowspan="7">Contextualizar y caracterizar la obra en función de los sucesos que influyeron para su divulgación</td></tr>
<tr><td colspan="2">Contexto histórico-cultural de las matemáticas en general</td></tr>
<tr><td colspan="2">Formación del autor</td></tr>
<tr><td>Estructura general del material</td><td>Extensión y estructura del material
Secuenciación de los contenidos de la obra
Tipografía de la obra</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos generales de la obra</td></tr>
<tr><td colspan="2">Innovaciones introducidas por el material</td></tr>
<tr><td colspan="2">Otras obras publicadas</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Tipo de proceso utilizado en la resolución de ecuaciones</td><td>Geométrico (G)</td><td>Ejemplos de problemas
Tipos de expresiones utilizadas
Conceptos involucrados
Gráficas empleadas</td><td rowspan="3">Explicar el tratamiento que se le dio a los métodos iterativos en los periodos uno y dos</td></tr>
<tr><td>Algebraico (A)</td><td>Ejemplos de problemas
Tipos de expresiones utilizadas
Conceptos involucrados</td></tr>
<tr><td>Numérico (N)</td><td>Ejemplos de problemas
Tipos de expresiones utilizadas
Conceptos involucrados</td></tr>
</table>

Por otra parte, para la selección de los libros de texto que se analizaron, primero se realizó una revisión de la bibliografía sugerida en programas de estudio de Licenciaturas en matemáticas de universidades en México, de donde se identificaron libros de texto en común, que considerando su valor y las contribuciones que tienen en la enseñanza se clasificaron en libros teóricos (grupo 1), libros teóricos-tecnológicos (grupo 2) y libros teóricos-prácticos (grupo 3). Ver Tabla 2.

Tabla 2 – *Clasificación de los libros de texto de acuerdo a su enfoque.*

Grupo	Libro
Grupo 1. Libros Teóricos	Conte, S. D. y De Boor, C. (1980). *Elementary numerical analysis. An Algorithmic Approach*. McGraw-Hill Book Company. Fröberg, C. E. (1977). *Introducción al Análisis Numérico*. Traducción de Mariano Gasca González. VICENS Universidad. Hamming, R. W. (1973). *Numerical Methods for Scientists and Engineers*. 2a. Ed. McGraw-Hill, Inc. New York. Henrici, P. K. (1972). *Elementos de Análisis Numérico*. Trillas, México. Hildebrand, F. B. (1974). *Introduction to Numerical Analysis*. 2a. Ed. McGraw Hill Book Company, Inc. Shampine, L. F. & Allen Jr. R. C. (1973). *Numerical Computing: An introduction*. W. B. Saunders Company (Eds.), Philadelphia.
Grupo 2. Libros Teórico-Tecnológico	Atkinson, K. E. (1978). *An Introduction to Numerical Analysis*. John Wiley and Sons, Inc. New York. Johnston, R. L. (1982). *Numerical Methods a Software Approach*. 1st. Edition, John Wiley and Sons, New York. Kahaner, D., Moler, C. & Nash, S. (1989). *Numerical Methods and Software.* Prentice-Hall, New Jersey. Nakamura, S. (1992). *Métodos numéricos aplicados con software*. Prentice-Hall, Hispanoamericana, S. A.
Grupo 3. Libros Teórico-Práctico	Burden, R. I. y Faires, J. D. (2002). *Análisis Numérico*. Thomson Learning. Carnahan, B., Luther, H. A. & Wilkers, J. O. (1969). *Applied Numerical Methods.* John Wiley and Sons, Inc. New York. Kindcaid, D. & Cheney, W. (1990). *Numerical Analysis*. Books/Cole Publishing Company.

De cada grupo se seleccionó un libro para analizar bajo el criterio de estimación en el sistema escolar:

- Libro A. Burden, R. I. y Faires, J. D. (2002). *Análisis Numérico*. Thomson Learning.
- Libro B. Conte, S. D. y Boor, C. (1980). *Elementary numerical analysis. An Algorithmic Approach*. McGraw-Hill Book Company.
- Libro C. Nakamura, S. (1992). *Métodos numéricos aplicados con software*. Prentice Hall Hispanoamericana, S. A.

Para analizar los libros de texto se usó la metodología de análisis cualitativo de textos, por lo que se construyeron campos y unidades de análisis, que valoraran la elaboración de fichas bibliográficas con los datos fundamentales del libro (título, autor(es), editorial, año de edición, plan de estudios y resumen del contenido de los capítulos relacionados con el límite), el modo de introducción del concepto (formal, heurístico o constructivo), el tipo de definición (topológica, métrica, geométrica o por sucesiones), la secuenciación (listado de definiciones y propiedades relacionadas con el límite, numerándolas según su orden de aparición), a partir de las dimensiones de análisis conceptual, didáctico-cognitivo y fenomenológico. Ver Tabla 3.

Tabla 3 – *Categorías para el análisis de los libros de texto.*

Campo de análisis	Unidades de análisis		Descripción general de los propósitos
Ficha de referencia del texto	Nombre de los autores Título del texto 1ª. Edición (año) y editorial Edición analizada y editorial Localización del texto analizado		Conocer la ubicación del libro y el contexto en general
Análisis conceptual	Conocimientos previos		Definición y organización del concepto, tipo de representación, función de los problemas y ejercicios resueltos o propuestos
	Conceptos	Formal	
		Heurístico	
		Constructivo	
	Ejemplos y ejercicios	De aplicación o argumentación de las definiciones o conceptos	
		De la técnica de demostración de teoremas o corolarios	
	Representación del algoritmo iterativo	Gráfico	
		Algebraico	
		Numérico	
Análisis didáctico	Objetivos e intenciones del(os) autor(es)		Mostrar los objetivos que el autor pretende alcanzar
	Corriente didáctica subyacente		
	Capacidades y habilidades que se quieren desarrollar		
Análisis fenomenológico	En torno a la matemática misma		Mostrar los fenómenos que se toman en consideración con respecto al concepto en cuestión
	En torno a otras ciencias		
	Fenómenos contextualizados		

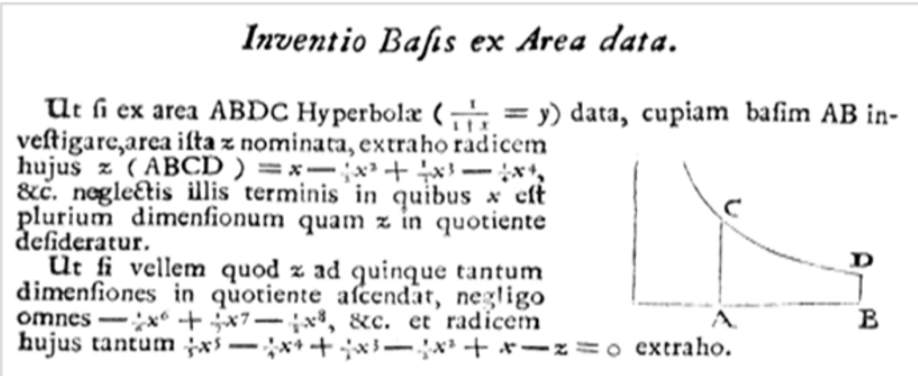
RESULTADOS

A continuación se exponen algunos aspectos que reflejan la constitución de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales. Para fines de organización, en la primera subsección se describe lo relativo a los libros históricos y posteriormente en la segunda subsección lo relativo a los libros de texto.

De los libros históricos

En primer lugar, se destaca que en esta obra de Newton se plantea una fundamentación al cálculo integral. Se observa el predominio de una contextualización geométrica. Uno de los principales problemas que trata la obra es el cálculo de la longitud de curvas. Para resolver el problema la obra plantea diferentes soluciones, una de ellas es encontrar la longitud de la base AB, a partir del área $ABCD$ de la hipérbola dada $\frac{1}{1+x} = y$, que denomina z, ver Figura 2. Debe observarse que dicha área está definida por el área $ABCD = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$, &c, en dónde el símbolo $\&c$ significa que la expresión continúa y existen más términos a considerar después del último escrito, sin embargo, el considerar únicamente algunos términos, era debido a la cantidad de términos que se deseará obtener como resultado, es decir, el total de los de los considerados más uno.

Figura 2 – *Problema: encontrar la base dada un área.*



Inventio Basis ex Area data.

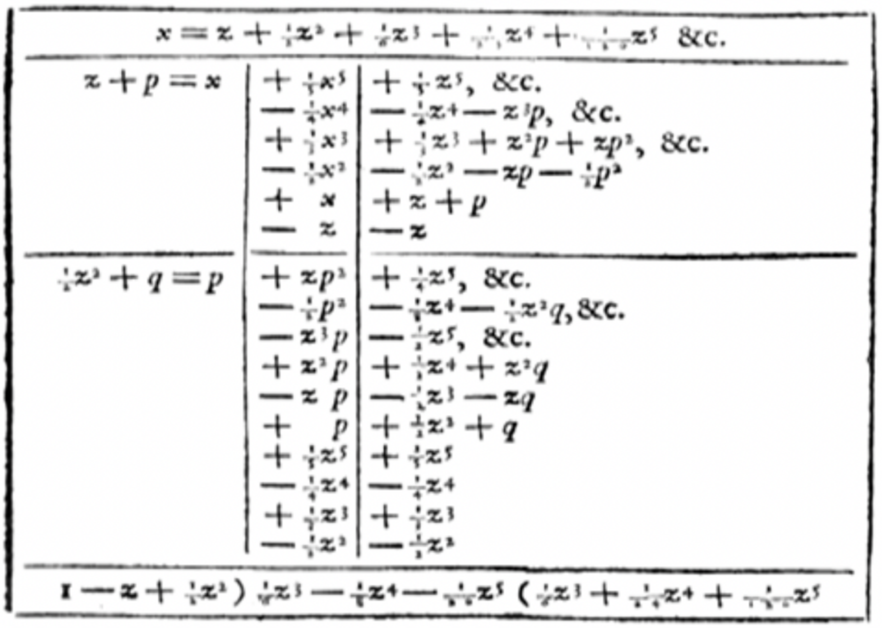
Ut si ex area ABDC Hyperbolæ ($\frac{1}{1+x} = y$) data, cupiam basim AB investigare, area ista z nominata, extraho radicem hujus z (ABCD) $= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$, &c. neglectis illis terminis in quibus x est plurium dimensionum quam z in quotiente desideratur.

Ut si vellem quod z ad quinque tantum dimensiones in quotiente ascendat, negligo omnes $- \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8$, &c. et radicem hujus tantum $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - z = 0$ extraho.

Fuente: Newton (1711).

En la obra, el método a seguir para resolver el problema, y en general el método usado para resolver los relacionados con el cálculo de longitudes de curvas y áreas, empleaba como técnica a la aproximación de raíces. En este caso, se supone la primera aproximación a la raíz como $x = z + p$ y sustituye en la expresión algebraica del área de la hipérbola, y posteriormente haciendo una selección adecuada de una primera aproximación, basada en el polígono de Newton, el cual hace referencia al argumento geométrico usado para hacer explícitas las potencias elegidas, se obtiene la siguiente aproximación y así sucesivamente hasta obtener el resultado que es $z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{6 \cdot 4} + \frac{z^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ + &c. Ver Figura 3.

Figura 3 – *Método de aproximaciones sucesivas.*



$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$ &c.		
$z + p = x$	$+ \frac{1}{5}x^5$	$+ \frac{1}{5}z^5$, &c.
	$- \frac{1}{4}x^4$	$- \frac{1}{4}z^4 - z^3p$, &c.
	$+ \frac{1}{3}x^3$	$+ \frac{1}{3}z^3 + z^2p + zp^2$, &c.
	$- \frac{1}{2}x^2$	$- \frac{1}{2}z^2 - zp - \frac{1}{2}p^2$
	$+ x$	$+ z + p$
	$- z$	$- z$
$\frac{1}{2}z^2 + q = p$	$+ zp^2$	$+ \frac{1}{4}z^5$, &c.
	$- \frac{1}{2}p^2$	$- \frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{2}z^2q$, &c.
	$- z^3p$	$- \frac{1}{2}z^5$, &c.
	$+ z^2p$	$+ \frac{1}{2}z^4 + z^2q$
	$- z\,p$	$- \frac{1}{2}z^3 - zq$
	$+ p$	$+ \frac{1}{2}z^2 + q$
	$+ \frac{1}{5}z^5$	$+ \frac{1}{5}z^5$
	$- \frac{1}{4}z^4$	$- \frac{1}{4}z^4$
	$+ \frac{1}{3}z^3$	$+ \frac{1}{3}z^3$
	$- \frac{1}{2}z^2$	$- \frac{1}{2}z^2$
$1 - z + \frac{1}{2}z^2)\ \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{20}z^5\ (\frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$		

Fuente: Newton (1711).

El proceso de iteraciones que se encuentra en la obra de Newton revela que fue usado en un momento cúspide en el descubrimiento del cálculo integral, incluso se destaca que para resolver algunos de los problemas en esta obra se debe usar el Teorema Fundamental del Cálculo, pero aplicando el método de aproximaciones sucesivas como técnica de aproximación para encontrar el área comprendida por una curva. Asimismo es relevante señalar que este proceso iterativo también se usó como técnica para la construcción de nuevas curvas, por ejemplo, la función exponencial se obtuvo como una serie de potencias.

En contraste, en el libro histórico de Lagrange, se observa el predominio de un contexto algebraico-numérico. El libro contiene un temario que va desarrollando progresivamente, es decir, siempre se explica con antelación los requerimientos que anteceden a un tema, enumerando cada procedimiento que describe. Pasó casi un siglo entre la publicación de Newton y Lagrange, y en este periodo se desarrolló un amplio trabajo sobre la resolución de ecuaciones, la obra de Lagrange por ejemplo, es un ejemplar dedicado completamente a dicho tema. El método para encontrar raíces de ecuaciones, ver Figura 4 y 5, lo propone como sigue:

Figura 4 – *Método para resolver ecuaciones de grado* m.

18. Soit l'équation

$$(a) \qquad Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + K = 0,$$

et supposons qu'on ait déjà trouvé, par la méthode précédente ou autrement, la valeur entière et approchée d'une de ses racines réelles et positives; soit cette première valeur p, en sorte que l'on ait

$$x > p \quad \text{et} \quad x < p + 1,$$

on fera

$$x = p + \frac{1}{y};$$

et substituant cette valeur dans l'équation proposée, à la place de x, on aura, après avoir multiplié toute l'équation par y^m et ordonné les termes par rapport à y, une équation de cette forme

$$(b) \qquad A'y^m + B'y^{m-1} + C'y^{m-2} + \ldots + K' = 0.$$

Fuente: Lagrange (1808).

Figura 5 – *Representación de la técnica iterativa.*

22. Soient donc $p, q, r, s, t, \ldots$ les valeurs entières approchées des racines des équations (a), (b), (c), ..., en sorte que l'on ait

$$x = p + \frac{1}{y}, \quad y = q + \frac{1}{z}, \quad z = r + \frac{1}{u}, \quad \ldots$$

Substituant successivement ces valeurs dans celle de x, on aura

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \ldots}}}$$

Fuente: Lagrange (1808).

Análogamente, aplica el procedimiento a la última ecuación (b), obteniendo el resultado aproximado (ver Figura 6):

Figura 6 – *Aplicación de la técnica iterativa.*

25. Je prendrai pour premier exemple l'équation que Newton a résolue par sa méthode, savoir,

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Je commence par chercher, par les formules du nº 8, l'équation en v qui résulte de cette équation; je fais donc

$$m = 3,\quad A = 0,\quad B = -2,\quad C = 5;$$

j'aurai

$$n = \frac{3.2}{2} = 3,$$

$$A_1 = 0,\quad A_2 = 4,\quad A_3 = 15,\quad A_4 = 8,\quad A_5 = 50,\quad A_6 = 91;$$

donc

$$a_1 = 12,\quad a_2 = 72,\quad a_3 = -1497,$$

et de là

$$a = 12,\quad b = 36,\quad c = -643;$$

de sorte que l'équation cherchée sera

$$v^3 - 12v^2 + 36v + 643 = 0.$$

Fuente: Lagrange (1808).

Luego de una explicación teórica y totalmente constructiva del método, ejemplifica su aplicación en una ecuación particular (ver Figura 7), que como dato peculiar la misma ecuación fue resuelta en el *De Analysi*, pero evidentemente con el método de Newton:

Figura 7 – *Aplicación del método de aproximaciones sucesivas de Lagrange.*

En continuant de cette manière, on trouvera les nombres

$$2,\ 10,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 12,\ \ldots,$$

de sorte que la racine cherchée sera exprimée par cette fraction continue

$$x = 2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}$$

d'où l'on tirera les fractions (nº 23)

$$\frac{2}{1},\ \frac{21}{10},\ \frac{23}{11},\ \frac{44}{21},\ \frac{111}{53},\ \frac{155}{74},\ \frac{576}{275},\ \frac{731}{349},\ \frac{1307}{624},\ \frac{16415}{7837},\ \ldots,$$

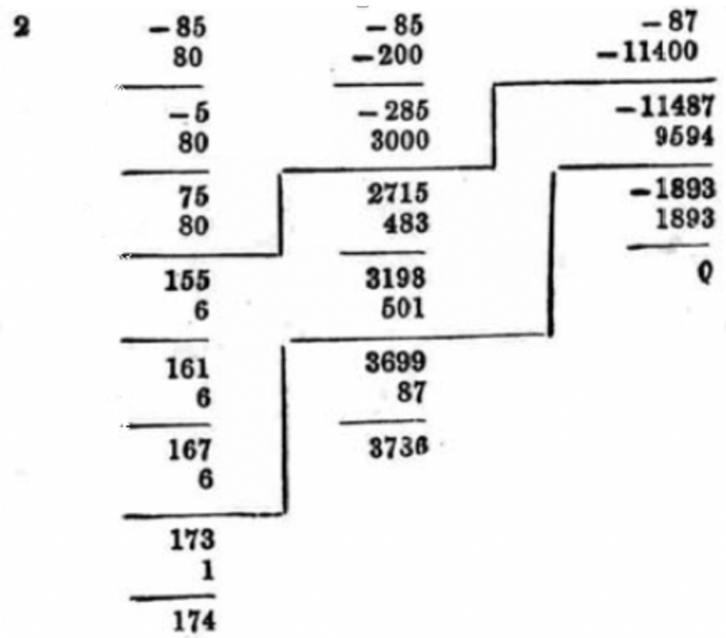
Fuente: Lagrange (1808).

Se observa claramente que el fundamento de las fracciones continuas, se encuentra en los argumentos de la resolución de ecuaciones algebraicas de cualquier orden, para encontrar una raíz de la ecuación, se propone encontrar una ecuación auxiliar que permita decidir cuántas raíces reales e imaginarias tiene la ecuación (a). Esta ecuación auxiliar se encuentra sustituyendo valores enteros sucesivos en la ecuación (a) para encontrar una aproximación inicial, el principio de justificación es el cambio de signo en el valor obtenido de dicha sustitución, es decir, se busca un x tal que $x > p$ y $x < p + 1$ o sea $x = p + \frac{1}{y}$. Por lo que sustituyendo esta estimación en la ecuación (a) se obtendrá una nueva ecuación (b) en términos de y. Así, continuando de esta manera se pueden obtener aproximaciones más cercanas al valor de la raíz buscada. Y en el caso de que cualquiera de estos números $p, q,$ ... sean una raíz exacta, entonces se tendrá que $x = p$ o $y = q, \dots$, por lo que la iteración termina en ese momento; en este caso, se encuentra para x un valor conmensurable. En todos los otros casos, el valor de la raíz será necesariamente inconmensurable, y se podrá solamente aproximar muy cerca al valor verdadero.

El método expuesto en la obra de Lagrange, presume una ventaja sobre el método de aproximación de Newton, en el sentido de que se evolucionó en la discriminación entre raíces reales y raíces imaginarias. El resultado, las fracciones continuas en la resolución de ecuaciones numéricas.

Finalmente en el libro de Burnside y Panton (1881), se observa el predominio de un contexto algebraico-numérico. En este libro propone métodos mucho más parecidos a lo que institucionalmente conocemos en el sistema escolar. El libro propone el uso del método de Newton y el de Lagrange, sin embargo, propone el método de Horner, que propone una cierta operatividad en la resolución de una ecuación no lineal, respecto a los dos anteriores métodos. Por ejemplo, se propone resolver la ecuación $2x^3 - 85x^2 - 85x - 87 = 0$. Cuya solución se presenta en la Figura 8.

Figura 8 – *Aplicación del método de Horner.*



Fuente: Burnside y Panton (1881).

El primer paso que se propone es encontrar la primera figura (que en la actualidad figura se interpreta como cifra) de la raíz, esto con base en la separación de raíces, en este caso hay una sola raíz positiva y se encuentra entre 40 y 50, por lo tanto la primera cifra aproximada a la solución es 40, por lo que hay que disminuir por 4 la ecuación, es decir, aplicar el algoritmo de la división sintética (las líneas en el lado izquierdo marcan la conclusión de cada transformación). La primera transformación resultante es $2y^3 + 155y^2 + 2715y - 11487 = 0$. Haciendo las operaciones sobre está ecuación para separar raíces se encuentra una entre 3 y 4, de donde se procede a reducir por 3, obteniendo la ecuación $2z^3 + 173z^2 + 3699z - 1893 = 0$, la cual tiene una raíz entre 0 y 1, pues al sustituir arroja valores de -1893 y 1981. El procedimiento refleja que reduciendo por 0.5 el residuo es 0, por lo tanto la raíz buscada de la ecuación es $x = 43.5$

Por la amplitud del periodo de publicación entre las obras, el análisis de los libros históricos muestra cómo se fueron constituyendo los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales, en principio considerando la aplicación y trascendencia que tuvo el método iterativo, aproximaciones sucesivas, en la obra de Newton, así como la trascendencia del tratamiento algebraico que abrió brecha para encontrar soluciones no sólo reales sino complejas, a través del proceso denominado fracciones continuas, y finalmente se distingue la integración de la matemática de la geometría con la matemática del álgebra.

De los libros de texto

Como se indicó en las categorías para el análisis de texto, se realizó un análisis conceptual, un análisis didáctico y un análisis fenomenológico. Cabe mencionar que en los libros de texto los métodos que se analizaron fueron: método de bisección, método de la falsa posición y método de la falsa posición modificada, método de Newton, método de la secante, método de la sustitución sucesiva, método de Bairstow.

Relativo al *análisis conceptual*, se identificó que el concepto método iterativo, está estrechamente vinculado con los conceptos de aproximación, límite, sucesión y convergencia, asi como que el concepto método iterativo tiene la acepción de repetición (Ver Figura 9). Es decir, el significado que generalmente se le asocia es el de la repetición de un algoritmo tantas veces como sea necesario para aproximar a un número tanto como se requiera. Se observó también, que existe una trascendencia en cuanto a las representaciones del algoritmo iterativo, por ejemplo, en el libro A se observó un tratamiento algebraico, en el libro B, el tratamiento es gráfico-numérico y en el libro C el tratamiento es gráfico-numérico y algebraico. El tratamiento diferente en los tres libros de texto señala también un cambio en la orientación pedagógica, y se trasciende a enfatizar que los aspectos visuales son esenciales y significativos para el tratamiento del concepto método iterativo.

Los ejercicios propuestos varían desde aplicaciones elementales de los algoritmos hasta generalizaciones y extensiones de la teoría. En los libros B y C las aplicaciones demuestran cómo se usan en situaciones de la vida real.

Figura 9 – *Conexión con otros conceptos.*

Algorithm 3.5: Newton's method Given $f(x)$ continuously differentiable and a point x_0.

For $n = 0, 1, 2, \ldots,$ until satisfied, do:

Calculate $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$

If this algorithm is applied to our example with $x_0 = 1$, then after four steps, one gets

$$x_4 = 1.3247181 \cdots \qquad f(x_4) = (9.24 \cdots)10^{-7}$$

Finally, we mention **fixed-point iteration,** of which Newton's method is a special example. If we set

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{3.10}$$

then the iteration formula (3.9) for Newton's method takes on the simple form

$$x_{n+1} = g(x_n) \tag{3.11}$$

If the sequence $x_1, x_2, \cdots$ so generated converges to some point ξ and $g(x)$ is continuous, then

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = g(\xi) \tag{3.12}$$

Fuente: Conte y Boor (1980).

Ahora bien, con respecto al *análisis didáctico*, en el libro A se observó la dependencia de tres fases en el proceso de resolución de un problema: la formulación, elección de un algoritmo, la programación. En este sentido, la propuesta es considerar la integración de procesos para la orientación pedagógica.

En contraste, se observó que en el libro B, la orientación es hacia el uso de ambientes microcomputacionales, empleo de software como recurso de implementación tanto didáctica como operativa, uso de los métodos iterativos para resolver problemas en las áreas de ingeniería, desarrollo de capacidades y habilidades como: entendimiento, deducción, escritura y resolución de programas, operatividad. Y en este libro se señalan los pros y los contras de operatividad, características, ventajas y desventajas de cada método iterativo.

Y finalmente en el libro C, se observó que la orientación es hacia el énfasis sobre la funcionalidad de los métodos, es decir, cómo, porqué y cuándo se espera que los métodos iterativos funcionen. Se propone el uso de CAS para el tratamiento de los métodos iterativos y el uso de tecnologías como herramientas que favorecen la operatividad, así como el desarrollo de destrezas computacionales que generan precisión en la búsqueda de la raíz. Ver Figura 10.

Figura 10 – *Resumen de los esquemas para encontrar raíces.*

Nombre	Necesidad de especificar un intervalo que contenga a la raíz	Necesidad de la continuidad de f'	Tipos de ecuaciones	Otras características especiales
Bisección	"sí"	no	cualquiera	Robusto, aplicable a funciones no analíticas
Falsa posición	"sí"	"sí"	cualquiera	Convergencia lenta en un intervalo grande
Falsa posición modificada	"sí"	"sí"	cualquiera	Más rápido que el método de la falsa posición
Método de Newton	no	"sí"	cualquiera	Rápido; se necesita calcular f'; aplicable a raíces complejas
Método de secante	no	"sí"	cualquiera	Rápido; no se requiere calcular f'
Sustitución sucesiva	no	"sí"	cualquiera	Puede no converger
Método de Bairstow	no	"sí"	polinomial	Factores cuadráticos

Fuente: Nakamura (1992).

Respecto al análisis fenomenológico, se logró situar el concepto dentro de un fenómeno contextualizado, es decir, en esta fase se obtuvieron datos acerca del concepto desde el punto de vista de su inclusión en algún fenómeno en el contexto de la física, la química, la ingeniería, entre otros. En otras palabras, se analizaron los distintos tipos de problemas en los que aparece el método iterativo, ya sea considerado como una herramienta en el contexto matemático o para resolver algún problema en un contexto diferente. En este sentido, se observó que los problemas planteados en los tres libros, trascienden de ser aplicaciones en la matemática pura a ser aplicaciones fenómenos físicos, químicos, de aplicación a la medicina, de aplicación en problemáticas relacionadas con el crecimiento de población, problemas referentes a probabilidad, fenómenos contextualizados en el campo de la computación, entre otros contextos. Ver Figura 11.

Figura 11 – *Ejemplo de aplicación del método de la secante para resolver problemas de física.*

Un proyectil de $M = 2$ gm ha sido lanzado verticalmente al aire y está descendiendo a su velocidad terminal [Shames, pág. 417]. La velocidad terminal se determina mediante $gM = F_{drag}$ donde g es la gravedad y M es la masa; toda la ecuación se puede escribir, después de evaluar todas las constantes, como

$$\frac{(2)(9.81)}{1000} = 1.4 \times 10^{-5} v^{1.5} + 1.15 \times 10^{-5} v^{2}$$

donde y es la velocidad terminal en m/seg. El primer término del lado derecho representa la fuerza de fricción y el segundo término representa la fuerza de presión. Determinar la velocidad terminal por medio del método de la secante. Una estimación imperfecta está dada por $y \simeq 30$ m/seg.

Fuente: Nakamura (1992).

CONCLUSIONES

En la primera fase de análisis, de acuerdo a los periodos analizados, se observó que en un primer momento los métodos iterativos fueron un soporte fundamental para el desarrollo del Cálculo Integral y Diferencial, asimismo fueron un eje que permitió la organización sistemática base para la explicación de los fundamentos del Cálculo de Newton; también los métodos iterativos contribuyeron para que la matemática fuera el medio que permitiera la correspondencia entre las ciencias naturales con la realidad misma. En un segundo momento, los métodos iterativos fueron parte de la fundamentación del álgebra de Lagrange, trascendieron hacia la búsqueda de la solución de ecuaciones algebraicas aunque éstas no tuvieran soluciones reales y se contribuyó en expresar algunas funciones en serie de potencias y a aproximar funciones mediante polinomios. En un tercer momento, los métodos iterativos trascendieron hacia el álgebra superior y se instauraron como objeto de estudio per se en la enseñanza.

En la segunda fase de análisis, los métodos iterativos como objeto de estudio escolar, son tratados sistemáticamente para la resolución de ecuaciones numéricas no lineales. En general, son empleados para resolver problemas en áreas de economía, biología o física, entre otras disciplinas que estudian fenómenos de la naturaleza e incluso problemas sociales. Respecto de su tratamiento, se observó que actualmente predomina el tratamiento numérico y el tratamiento gráfico sobre el algebraico, pero no están independientes el uno del otro, están conectados por los procedimientos.

En general, el proceso de transformación de los saberes, es decir, en el marco del fenómeno de transposición didáctica, se logró identificar las etapas de conceptualización (transformación de tratamientos) de dichos métodos. Esto es, a través del análisis de libros tanto históricos como de texto se observó una trascendencia de lo conceptual que va de lo lineal a lo no lineal y de lo finito a lo infinito, que pasa por procesos de exactitud, aproximación y convergencia. Cabe señalar que el desarrollo conceptual de los métodos iterativos, cambia en función de los intentos de sistematización de la matemática misma, conservando la concepción de una estimación *exacta* a la solución buscada que trascienden con el énfasis en el uso de recursos tecnológicos y en el desarrollo de habilidades visuales que optimizan el tiempo y el manejo del espacio visual del alumno.

Se constató, a partir de la investigación histórica, que para un concepto matemático, incluso para una misma idea matemática, se sucedieron una diversidad de puntos de vista sobre el mismo, y eso muestra la inter y trans disciplinariedad de la matemática. En este sentido, el papel de la epistemología es el de auxiliar en establecer la configuración de los elementos integrantes de la significación de un determinado concepto, analizando los diferentes sentidos que se le han dado en contexto y de su adaptación a la resolución de las distintas problemáticas. En este sentido, la relevancia epistemológica de la historia de la matemática radica en mostrar que tal historia está llena de oportunidades para ilustrar la pluralidad de métodos y las dinámicas de los conceptos en matemáticas. Una característica de la interpretación histórico-cultural de la transposición didáctica y su vinculación con la epistemología, el lenguaje, en discurso matemático escolar, el ambiente mismo en el que se desarrolla, es que, ello repercute en los diseños curriculares que se hacen bajo tal interpretación, ya que los procesos de selección, organización y comunicación del conocimiento escolar, a través de los cuales se encuentra respuesta al ¿qué?, ¿cómo?, ¿cuándo?, ¿para qué? y ¿para quién? enseñar, deben ser tratados a partir de una perspectiva diferente, que sea coherente con las visiones epistemológicas del conocimiento específico a enseñar y a aprender, con la didáctica y con la transposición que ella connota.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bagni, G. (2000). The role of the history of mathematics in mathematics education: reflections and examples. En I. Schwank (Ed.). *Proceedings of CERME-1*. II (pp.220-231). Osnabrueck: Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik.

Barbin, E. (1997). Histoire des mathématiques: pourquoi? comment? Bulletin AMQ 37(1), 20-25.

Burden, R. y Faires, J. D. (2002). *Análisis numérico.* 7a. Ed. S. A. de C. V: International Thomson Editores.

Burnside, W. y Panton, A. (1881). *The theory of equations: with an introduction to the theory of binary algebraic forms.* 8a. Ed. Dublin: University Press Series.

Cantoral, R. (2016). Educación alternativa: matemáticas y práctica social. *Perfiles educativos 38*(spe), 7-18. Recuperado en 11 de julio de 2020, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0185-26982016000500007&lng=es&tlng=es.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble (Francia): La Pensée Sauvage.

Conte, S. D. y Boor, C. (1980). *Elementary numerical analysis*, 3a. Ed. New York: McGraw-Hill.

Díaz, T. (2003). La Interpretación histórico-cultural de la transposición didáctica como puente de emancipación del aprendizaje y la enseñanza. *Revista Praxis 3*, 37-56.

Fauvel, J. y van Maanen, J. (Eds.) (2000). *History in mathematics education: the ICMI study*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Furinghetti, F. (2019). History and epistemology in mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-28.

Gómez, B. (2003). La investigación histórica en didáctica de las matemáticas. En E. Castro (Coord.). *Investigación en educación matemática* (pp79-85). Granada: SEIEM.

González, M. T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos.* Tesis doctoral. Universidad de Salamanca, España.

Heeffer, A. (2006). The methodological relevance of the history of mathematics for mathematics education. In G. Dhompongsa, F. Bhatti, and Q. Kitson (Eds.), *Proceedings of the International Conference on 21st Century Information Technology in Mathematics Education* (pp. 267-276).

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235-261.

Lagrange, J. L. (1808). *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés en Ouvres de Lagrange*. París: Gauthier-Villars.

Nakamura, S. (1992). *Métodos numéricos aplicados con software*. Prentice Hall Hispanoamericana, S. A.

Newton, I. (1711). *Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias; cum enumeratione linearum tertii ordinis.* Facsímil 2003. En A. J. Durány F. J. Pérez (Eds.), Sevilla(España): Real Sociedad Matemática Española.

Rendon, C. y Guacaneme, E. (2016). ¿Qué aporta la historia de las matemáticas a futuros profesores sobre el concepto de límite funcional? *Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM.* Volumen 3, año 2016. ISSN 2422-037X

Rodríguez-Vásquez, F., Romero-Valencia, J., y Henao-Saldarriaga, S. (2015). Concepciones de profesores de nivel medio superior sobre el uso de la historia de la matemática. En Fernández, C., Molina, M., y Planas, N. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIX*, 469-47. Alicante: SEIEM.

Ruiz Berrio, J. (1976). El método histórico en la investigación histórica de la educación. *Revista Española de Pedagogía 134*, 449-475.

Sierra, M. (1997). Notas de historia de las matemáticas para el currículo de secundaria. En L. Rico (Ed.). *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria.* (pp.179-194). Barcelona, España: Horsori-ICE Universitat de Barcelona

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria: 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias 17* (3), 463-476.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (2002). Una visión integradora acerca del concepto de límite. *Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas 29*, 77-94.

Torres, L., Guacaneme, E., y Arboleda, L. (2014). La Historia de las Matemáticas en la formación de profesores de Matemáticas. *Quipu 16*. 203-224.