



Universidad Autónoma de Guerrero

Unidad Académica de Matemáticas

Maestría en Matemáticas Aplicadas

Ecuaciones de evolución-difusión de
tipo Dirac
y su aplicación a vigas

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestro en Matemáticas Aplicadas

PRESENTA:

Lic. Víctor Fabián Morales Delgado

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Marco Antonio Taneco Hernández

Mayo de 2016.



Universidad Autónoma de Guerrero

Unidad Académica de Matemáticas

Maestría en Matemáticas Aplicadas

**Ecuaciones de evolución-difusión de
tipo Dirac
y su aplicación a vigas**

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestro en Matemáticas Aplicadas

PRESENTA:

Lic. Víctor Fabián Morales Delgado

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Marco Antonio Taneco Hernández

Abril de 2016.

Ecuaciones de evolución-difusión de tipo Dirac y su aplicación a vigas

Autor:

Lic. Víctor Fabián Morales Delgado

Asesor:

Dr. Marco Antonio Taneco Hernández

Sinodales:

Dra. Anel Esquivel Navarrete

Dr. José Francisco Gómez Aguilar

Dr. Jorge Sánchez Ortíz

Maestría en Matemáticas Aplicadas

Campus Chilpancingo.

Universidad Autónoma de Guerrero

Chilpancingo de los Bravo

Abril 2016

Dedicatorias y Agradecimientos

Resumen

El Cálculo Fraccionario (CF) es tan antiguo como el cálculo clásico, sin embargo, no es tan conocido en la comunidad científica ni en la ciencias aplicadas. La belleza de esta área radica en que las derivadas e integrales fraccionarias tienen propiedades no locales, por lo que considera la historia y los efectos distribuidos de cualquier sistema físico. Otra peculiaridad del CF es la inclusión de nuevos grados de libertad al sistema incrementando la información que puede obtenerse de la naturaleza del fenómeno en cuestión. En la presente tesis se analiza una ecuación diferencial en derivadas parciales de orden fraccionario desde dos enfoques diferentes; el primero está basado en la idea de Dirac y nos conduce a considerar raíces cuadradas de operadores diferenciales de orden fraccionario, asociados a la ecuación de vibración de vigas, tal enfoque produce sistemas de ecuaciones en derivadas parciales, uno acoplado y otro desacoplado. Usando la transformada de Fourier, Laplace y la transformada de Fokas se resuelven problemas de Cauchy asociados a los sistemas antes mencionados.

Y el segundo enfoque considera la ecuación de vibración de vigas como un producto (formal) de dos operadores de Schrödinger, que a través de un cambio de variable adecuado, transformamos dichos operadores, en operadores asociados a ecuaciones de difusión.

Abstract

The Fractional Calculus (CF) is as old as the classical calculation, however, is not as well known in the scientific community or the applied sciences. The beauty of this area is that the fractional derivatives and integrals have nonlocal properties, so consider the history and distributed in any physical system effects. Another peculiarity of the Fractional Calculus is the inclusion of new degrees of freedom to the system by increasing the information that can be obtained from the nature of the phenomenon in question. In this thesis analyzes a differential equation in partial derivatives of fractional order from two different approaches; the first is based on the idea of Dirac and leads us to consider square roots of fractional order differential operators associated with the vibration equation of beams, such an approach produces systems of partial differential equations, one coupled and uncoupled another. Using the Fourier transform, Laplace and Fokas transform Cauchy problems associated with the above systems are solved.

And the second approach considers the equation of vibration of beams as a (formally) product of two operators Schrodinger, which through a suitable change of variable, we transform these operators, in operadores asociados to diffusion equations.

Índice general

Introducción	1
Descripción de la Tesis	4
1. Introducción al Cálculo Fraccionario	6
1.1. Antecedentes del cálculo fraccional	6
1.2. Conceptos Básicos	10
1.2.1. Función exponencial	11
1.2.2. Transformada de Laplace y su inversa	11
1.2.3. Transformada de Fourier y su inversa	12
1.2.4. Función gama	12
1.3. Operadores de diferenciación e integración fraccionaria	13
1.3.1. Integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville	13
1.3.2. Algunas propiedades del operador fraccionario de Riemann-Liouville	14
1.3.3. Integrales y derivadas fraccionarias de Liouville	17
1.3.4. Derivada y derivada parcial fraccionaria de Caputo	18
1.4. Transformadas integrales de las derivadas e integrales fraccionarias	20
1.4.1. Integrales y Derivadas fraccionarias generalizadas en \mathcal{S}'	26
2. La ecuación de vibración de vigas: Aproximación de Dirac	28
2.1. Introducción	28
2.2. Ecuaciones de Evolución-Difusión de tipo Dirac	29
2.2.1. Teorema de Acoplamiento	33
2.2.2. Ejemplo de un problema de Cauchy con derivada temporal y espacial fraccionaria	35
2.3. La ecuación de vibración de vigas	39
2.3.1. Soluciones desacopladas de la ecuación de vibración de vigas	41

2.3.2.	Soluciones fundamentales del sistema desacoplado	43
2.3.3.	Soluciones acopladas de la ecuación de vibración de vigas	49
2.4.	Estudio de la ecuación de vibración de vigas usando la transformada de Fokas	50
2.4.1.	Problema de Cauchy generalizado para $1/2 < \beta \leq 1$	54
2.4.2.	Ejemplo: $\beta = \frac{2}{3}$	57
2.4.3.	Problema de Cauchy generalizado para $1 < \beta \leq 2$	61
2.4.4.	Ejemplo $\beta = \frac{4}{3}$	65
3.	Procesos de Fresnel en la ecuación de vibración de vigas	71
3.1.	Introducción	71
3.2.	Problemas de Cauchy con condiciones de frontera asociados a la ecuación de vibración de vigas	74
3.2.1.	Solución de la ecuación de vibración de vigas sobre toda la recta	75
3.2.2.	Solución de la ecuación de vibración de vigas sobre la semi-recta	78
4.	Conclusiones y trabajos futuros	88
4.1.	Conclusiones	88
4.2.	Trabajos futuros	89
A.	Transformada de Laplace y de Fourier clásica	91
B.	Funciones especiales asociadas al cálculo fraccional	93
B.1.	Función de Mittag-Leffler	93
B.2.	Transformada de Laplace de la función Mittag-Leffler	95
B.3.	Función de Wright	98
	Referencias	100

Índice de figuras

2.1. Mecanismo de interpolación entre las ecuaciones de tipo de difusión y de ondas. . . .	35
2.2. Superficies de la solución fundamental del problema de Cauchy (2.55)-(2.57), con $x = \pm 100$, $\alpha = 0.02$ y $\lambda = 100$	48
2.3. Superficie de la solución del Corolario 2.3.3, con $-100 \leq x \leq 100$, $t = 1500$ y $\alpha = 0.5$	51
2.4. Contorno $\partial D^+ \cup \gamma_1$ para la derivada fraccionaria $1/2 < \beta \leq 1$	58
2.5. Contorno $\partial D^+ \cup \gamma_1$ para la derivada fraccionaria $\beta = 2/3$	61
2.6. Contorno $\partial D^+ \cup \gamma_1$ para la derivada fraccionaria $\beta = 4/3$	68
3.1. Solución a la ecuación de Fresnel clásica, para $x = \pm 20$ y $t = 50$	78
3.2. Contorno ∂D^+ para la ecuación (3.24)	81
3.3. Contornos de las soluciones u_1 y u_2	83
3.4. Superficie solución de la expresión (3.36), para $x = \pm 5000$ y $t = 100$	84
3.5. Superficie de la solución del Problema 3, para $x = \pm 15$ y $\alpha = 0.8$	87
B.1. Gráfica del contorno de Hankel	94

Introducción

La ecuación de evolución es un término bastante genérico, que en física significa: cualquier dispositivo matemático es útil para describir la evolución de un sistema dinámico. Nosotros vamos adoptar este término para referirnos a una ecuación diferencial en derivadas parciales del tipo [1]

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t) = k \psi(x, t), \quad (1)$$

en donde, ψ es designada para caracterizar el estado físico del sistema dinámico y considerada como una función independiente en el “espacio” y “tiempo”. La ecuación del calor (HE) [2], la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo (SE) [3] y la ecuación de onda parcial (PWE) [4] son ejemplos clásicos de ecuaciones de evolución.

El lado izquierdo de la ecuación (1) es sólo la derivada de primer orden de ψ con respecto a la variable t , mientras que en el lado derecho pueden ser tanto lineales como no lineales, involucrando solamente las derivadas de orden entero de ψ con respecto de x y eventualmente la independencia de las variables. El significado de la “función de estado” $\psi(x, t)$ depende del problema específico en cuestión y de la forma como este definida la ecuación en el lado derecho. En fin, como la ecuación (1) sólo involucra la primera derivada de orden temporal, es de esperarse que para hallar su solución es necesario proporcionar la condición inicial

$$\psi(x, t_0) = \psi_0(x),$$

de modo que conociendo a ψ al tiempo dado t_0 , se puede conocer el “futuro” o evolución del sistema en cualquier tiempo posterior a $t > t_0$, no muy lejano.

De igual forma muchos procesos físicos son bien modelados por ecuaciones, que no son del tipo de la ecuación (1). De hecho, las ecuaciones HE, SHE y PWE pertenecen a contextos físicos muy específicos y también en aproximaciones definidas dentro de esos contextos. Así, la HE pertenece a la teoría no relativista de la difusión del calor; la SE pertenece a la mecánica cuántica no relativista al igual que la PWE.

Al tratar de ir más allá de las aproximaciones con el fin de mejorar la conexión de la ecuación de evolución con el proceso que describe, podemos tratar de usar ecuaciones que involucren derivadas de orden superior con respecto de la variable temporal t ó ecuaciones que contengan derivadas de orden fraccional (Teorías modernas de transporte en un medio poroso, por ejemplo, las ecuaciones de advención-difusión fraccionarias) u operadores pseudo-diferenciales.

Algunos ejemplos clásicos de ecuaciones que contienen derivadas de segundo orden con respecto a la variable temporal, son:

- La ecuación relativista del calor (RHE) [5]

$$\left[\frac{\alpha}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \right] u(r, t) = \alpha \nabla^2 u(r, t), \quad (2)$$

en donde α es la difusión térmica y c la velocidad del calor.

- La ecuación de Klein-Gordon (KGE) [6]

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi(r, t) = 0, \quad (3)$$

en donde m denota la masa de la partícula y c la velocidad de la luz.

- La ecuación de onda escalar homogénea (WE) [7]

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \varphi(r, t) = 0. \quad (4)$$

Cabe señalar que las ecuaciones SE y PWE pueden verse respectivamente, como el límite no relativista parcial de KGE y la WE.

Por otra parte, la ecuación relativista de Schrödinger (RSE) [6]

$$i\hbar \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} = \sqrt{m^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \nabla^2} \psi(r, t), \quad (5)$$

en donde \hbar es la constante de plank, c y m son como en (3) y ∇^2 es el operador laplaciano definido en \mathbb{R}^3 que involucra la raíz cuadrada de ∇^2 . Como es bien conocido, la ecuación (5) también se conoce como la ecuación de Salpeter [8] que ha sido objeto de investigaciones recientes [9, 10, 56].

El análisis desarrollado en [12–15] muestran el contexto de una investigación que establece, en que medida y en que forma algunas propiedades de las ecuaciones de evolución, pueden ser recuperadas de las ecuaciones que no son del tipo evolutivo como RHE, KGE, WE Y RSE mencionados anteriormente ó lidiar con operadores diferenciales fraccionarios.

Esta conexión, como se ilustra en [12, 13], muestran que el método de la factorización de Dirac proporciona una herramienta eficaz para tratar con ecuaciones que no son de evolución gobernados por operadores diferenciales fraccionarios ó operadores pseudo-diferenciales.

Esto nos permite expresar a los operadores como la suma de operadores, admitiendo una posible definición de raíz cuadrada en la suma de estos y por lo tanto, bajo condiciones apropiadas se puede evitar el problema de trabajar con operadores diferenciales fraccionarios. De la misma manera, una variedad de métodos se ha propuesto en [14, 15].

De acuerdo a estos antecedentes nosotros haremos uso del método de Dirac en conexión con los operadores de raíz cuadrada, para estudiar ecuaciones que no son de evolución ó que involucran operadores diferenciales fraccionarios u operadores pseudo-diferenciales.

A continuación daremos a conocer la estructura y organización de la presente tesis.

Descripción de la Tesis

Capítulo 1

Debido a que el cálculo fraccionario (CF) no es tan popular en la comunidad científica, en el Capítulo 1 incluimos un breve resumen de definiciones y propiedades de los operadores fraccionarios que aparecerán a lo largo de este trabajo de investigación todo esto con el fin de hacerlo mas legible y manejable.

Es importante enfatizar que en la literatura existe una gran variedad de definiciones de derivadas e integrales fraccionarias de orden α , entre ellas destacan, Riez, Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov, Caputo y la recientemente propuesta por Michele Caputo y Mauro Fabrizio, las cuales, tienen la propiedad de coincidir con los operadores clásicos cuando α toma un valor entero. Sin embargo, para valores no enteros de α , todas ellas son operadores no locales con la propiedad de memoria, debido a que estan expresados por medio de una integral definida. Esta es una característica muy importante que no poseen las derivadas de orden entero.

En esté trabajo hemos enfocado nuestra atención en las derivadas e integrales fraccionarias de Riemann-Liouville y de Caputo. El operador de Riemann-Liouville juega un papel importante en el desarrollo teórico del cálculo fraccionario y se utiliza con éxito en aplicaciones estrictamente matemáticas. Sin embargo, al tratar de realizar modelizaciones de fenómenos físicos reales por medio de ecuaciones diferenciales fraccionarias, surge el problema de las condiciones iniciales de orden fraccionario. Este tipo de condiciones no son físicamente interpretables y presentan un obstáculo considerable a la hora de hacer uso práctico del cálculo fraccionario [16].

Mientras que el operador fraccionario de Caputo, en contraste con el de Riemann-Liouville, es más idóneo en problemas de interés físico, debido a que las condiciones iniciales involucradas en los problemas se interpretan de igual forma que en el caso clásico.

Capítulo 2

En este capítulo se mostrará como usar el método de la factorización de Dirac haciendo uso del álge-

bra de Pauli y suponiendo que se cumple la propiedad de semi-grupo en los operadores fraccionarios, para estudiar ecuaciones que involucran operadores de raíz cuadrada. Se ilustra que tal método proporciona una herramienta eficaz para tratar con ecuaciones, que no son del tipo evolutivo ó que son gobernados por operadores diferenciales fraccionarios.

Mediante esta técnica de Dirac, con la que se ha construido un sistema de ecuaciones acoplados y desacoplados segun la elección de las matrices de Pauli, se buscan las raíces cuadradas de una ecuación en derivadas parciales fraccionaria de cuarto orden que describe la vibración de vigas y que surge en la descripción de modelos de membranas móviles, que en su forma mas simple esta expresada como

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x, t) - \lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

y que puede generalizarse como

$$\frac{\partial^{2\alpha}}{\partial t^{2\alpha}}u(x, t) - \lambda^2 \frac{\partial^{4\beta}}{\partial x^{4\beta}}u(x, t) = 0, \quad 0 < \alpha, \beta \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (6)$$

de modo que su raíz cuadrada represente una nueva interpolación entre las ecuaciones de difusión y de ondas clásicas.

Escribiremos y daremos solución a problemas de Cauchy definidos en todo la recta real, usando la transformada de Laplace y Fourier. Además, resolveremos problemas de Cauchy en la semi-recta asociados a los sistemas acoplado (desacoplado) usando una modificación del método de la transformada unificada de Fokas.

Capítulo 3

En este capítulo al igual que en el anterior, se analiza la ecuación de vibración de vigas fraccionaria mediante un enfoque diferente al de Dirac. Ahora se mostrará que mediante un cambio de variable apropiado resulta una conexión profunda entre la ecuación de Schrödinger y la ecuación de difusión. Este acercamiento nos lleva a resolver problemas de Cauchy con condiciones de frontera para dicha ecuación con el movimiento browniano en \mathbb{R} y \mathbb{R}^+ , usando la transformada de Laplace, Fourier y la transformada de Fokas.

Capítulo 4

Finalmente en este capítulo, se presentan las conclusiones de este trabajo y las aportaciones de futuras investigaciones.

Introducción al Cálculo Fraccionario

1.1. Antecedentes del cálculo fraccional

El cálculo fraccionario (CF) es una activa rama del análisis matemático que nace de una idea muy básica, de la misma forma que una función se puede derivar o integrar un número entero de veces. Se han desarrollado progresivamente muchas definiciones de derivada fraccionaria, D^α , que pretenden generalizar el concepto de derivada ordinaria, de manera que para $\alpha = 1$ vuelva a recuperarse el operador ordinario. Se ha ampliado también este concepto hacia órdenes de integración y derivación no sólo fraccionarios sino también reales y complejos, lo cual hace que sea más apropiado hablar de **integración y diferenciación de orden arbitrario**.

Actualmente, se ha experimentado un gran número de los conceptos del CF y constituyen un lugar de encuentro de múltiples disciplinas, como la teoría de las probabilidades y los procesos estocásticos, las ecuaciones integro-diferenciales, la teoría de las transformadas integrales, las funciones especiales, el análisis complejo y el análisis numérico.

Cabe destacar, principalmente, el gran interés sobre las ecuaciones diferenciales fraccionarias, es decir, ecuaciones que involucran derivadas de orden arbitrario real o complejo:

$$F(t, X(t), (D^{\alpha_1} X)(t), \dots, (D^{\alpha_n} X)(t)) = 0,$$

en donde $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ y D^{α_i} es una derivada fraccionaria de orden α_i (igualmente pueden definirse las ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias).

Sin embargo, al ser los operadores fraccionarios una generalización de los operadores ordinarios, se pierden propiedades fundamentales, como son:

- No existe una interpretación geométrica y física clara (aun no se tiene un consenso generalizado entre las diferentes interpretaciones).
- La ley de índices ($D^\alpha D^\beta = D^{\alpha+\beta}$) sólo es válida para espacios de funciones muy específicas.
- La derivada del producto de dos funciones es muy difícil de obtener.
- La regla de la cadena no se puede aplicar de manera directa.

Sin embargo, el CF puede representar sistemas dinámicos de orden superior y fenómenos complejos no lineales utilizando un menor número de coeficientes [21–23], ya que el orden arbitrario de la derivada le da un grado de libertad adicional que permite ajustarse a un comportamiento específico. La idea de generalizar la noción de derivada para valores no enteros, surgió con el nacimiento del propio cálculo diferencial. En aquel entonces se planteó la cuestión del sentido que tendría una derivada de orden fraccionario; por ello se le asignó originalmente el nombre de *cálculo fraccionario*. Tiempo después se amplió el alcance de la pregunta anterior: ¿Puede ser n un número cualquiera, fraccionario, irracional ó complejo?. Y sabiendo que la respuesta es afirmativa, entonces el actual término de *cálculo fraccionario* resulta ser impropio y deberíamos sustituirlo por el de diferenciación e integración de orden arbitrario.

Tras los primeros tanteos de Leibniz y L'Hôpital, el CF siguió siendo abordado por algunas de las mentes matemáticas más privilegiadas de la humanidad, entre ellos:

- L. Euler (siglo XVII),
- Laplace, Lacroix, Fourier, Riemann, (siglo XIX),
- Hardy y Littlewood (siglo XX).

Sin embargo, fue el propio Leibniz al inventar la notación $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$ y posiblemente un simple deseo de jugar con los símbolos, lo que realmente empujó en 1695 a L'Hôpital a preguntarle ¿Que pasaría en el caso de ser sustituida n por un $\frac{1}{2}$?. Leibniz le respondió de un modo muy intuitivo, que esta aparente paradoja permitiría extraer interesantes consecuencias en el futuro.

En 1697, en referencia al producto infinito de Wallis por $\frac{\pi}{2}$, Leibniz utilizó la notación $d^{\frac{1}{2}}$, y afirmó que era posible razonar con el cálculo diferencial fraccionario para alcanzar el mismo resultado.

La primera referencia en un texto de una derivada de orden arbitrario aparece en un libro del matemático francés Lacroix de 1819 [24]. Lacroix desarrolló un ejercicio puramente matemático generalizando el caso entero, a la manera típica de los formalista de aquella época.

Partiendo de $y = x^n$, procedió a determinar la derivada m -ésima:

$$\frac{d^m}{dx^m} y = \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m}$$

con m y n enteros positivos y $n \geq m$.

Utilizando la función Gama para generalizar los factoriales, sustituyendo m por un $\frac{1}{2}$, n por un número b real positivo cualquiera y suponiendo $x > 0$, obtuvo la siguiente fórmula:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} y = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b+\frac{1}{2})} x^{b-\frac{1}{2}},$$

que representa la derivada de orden $\frac{1}{2}$ de la función x^b . Y haciendo $y = x$, obtuvo

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}},$$

siendo $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

A principios del siglo XIX, las figuras de Abel y Liouville propiciaron un avance significativo, desde la prehistoria a la historia del cálculo fraccional.

Abel estaba interesado en el problema de la **Tautócrona**, es decir, determinar la forma de una curva de modo tal que el tiempo de descenso de una masa puntual que se desliza por ella sin fricción y bajo el efecto de la gravedad, sea independiente del punto de partida. Abel llegó a que dicha curva $g(t)$ debe satisfacer la ecuación:

$$\int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^{1/2}} dt = k,$$

con esto establece la primera aplicación práctica del cálculo fraccional, una *integral fraccionaria de orden $\frac{1}{2}$* ([25], [26]).

La solución de Abel fue tan elegante que atrajo la atención de Liouville, quien en 1832 ([27], [28]) hizo su primer intento de definir la derivada fraccionaria. Su punto de partida fue el conocido resultado para las derivadas de orden entero m de la función exponencial

$$D^m e^{ax} = a^m e^{ax},$$

en donde, a es una constante real, que extendió de modo natural a las derivadas de orden arbitrario

$$D^p e^{ax} = a^p e^{ax}.$$

De esta forma asumió que la derivada de orden arbitrario de una función $f(x)$, que puede ser desarrollada en una serie del tipo

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j e^{a_j x},$$

tiene la forma

$$D^p f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j a_j^p e^{a_j x}. \quad (1.1)$$

Esta fórmula es conocida como la *primera definición de Liouville*, con la obvia desventaja de ser únicamente aplicable para aquellos valores de p para los cuales la serie (1.1) converge.

Liouville adoptó un segundo método para tratar funciones del tipo x^{-a} , para valores reales de $a > 0$ y donde $x > 0$. Para ello consideró la integral

$$I = \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-xu} du,$$

que mediante el cambio de variable $xu = t$ se puede escribir como:

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} I. \quad (1.2)$$

Luego, operando con D^p en ambos lados de (1.2), obtuvo su siguiente fórmula

$$D^p x^{-a} = \frac{(-1)^p}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} u^{a+p-1} e^{-xu} du,$$

y llegó a su segunda definición de derivada fraccionaria

$$D^p x^{-a} = \frac{(-1)^p \Gamma(a+p)}{\Gamma(a)} x^{-a-p}, \quad a > 0. \quad (1.3)$$

Sin embargo, ninguna de estas dos definiciones estaba destinada a consagrarse, al ser válidas sólo para un conjunto restringido de funciones. Debido a esto, la atención se desplazó hacia la integral fraccionaria, creyendo que quizás de está se deduciría la definición de derivada como la de su operador inverso izquierdo.

En esos mismos escritos de 1832, Liouville obtuvo la siguiente expresión

$$(D^{-p} f)(x) = \frac{1}{(-1)^p \Gamma(p)} \int_0^{\infty} t^{p-1} f(x+t) dt, \quad \text{Re}(p) > 0,$$

que hoy en día, eliminando el factor $(-1)^p$, es conocida como la integral fraccionaria de Liouville de orden α por la derecha.

El primer trabajo que finalmente condujo a la actual definición de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville fue debido a N. Ya. Sonine en 1870 [29]; pero fue Laurent el que en 1884 [30] llegó a formularla de manera definitiva. Para ello, tomaron como punto inicial la fórmula de Cauchy para la integral iterada, que reduce la integral iterada hasta el orden n de una función real a una única integral de convolución

$$({}_{a+}D_{-n}^x f)(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad (1.4)$$

luego generalizando el factorial con la función Gama, obtuvieron:

$$({}_a D_{-p}^x f)(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x (x-t)^{p-1} f(t) dt, \quad \text{Re}(p) > 0. \quad (1.5)$$

Cuando $x > a$ recuperamos de nuevo la definición de la integral fraccionaria de Riemann, mientras que para $a = -\infty$, obtenemos la integral fraccionaria de Liouville.

La versión más utilizada de la expresión (1.5) es la que se obtiene haciendo $a = 0$, la cual es conocida como *Integral Fraccionaria de Riemann-Liouville*

$$({}_0 D_{-p}^x f)(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} f(t) dt, \quad \text{Re}(p) > 0. \quad (1.6)$$

En los mismos años, Wrünwald (1867) [31] y Letnikov (1868) [32] afrontaron el problema de la diferenciación no entera, generalizando la definición de derivada de orden entero, basada en el concepto de cociente de incrementos, utilizando la siguiente fórmula

$$(D_\alpha)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\nabla_h^\alpha f(x)}{h^\alpha},$$

en donde, $(\nabla_h^\alpha f)(x) = \sum_j^n (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x-jh)$, con $n = [\alpha]$ (parte entera de α).

Con la llegada del siglo XX, los desarrollos del análisis matemático y la teoría de funciones, aparecieron nuevas formas íntegro-diferenciales fraccionarias.

En 1917 Weyl [33] definió una integral fraccionaria adecuada para funciones periódicas

$$({}_x W_\infty^{-p} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_x^\infty (t-x)^{p-1} f(t) dt, \quad \text{Re}(p) > 0. \quad (1.7)$$

Entre las varias cuestiones abiertas sobre el cálculo fraccionario, ocupa un lugar prominente la de determinar si es posible encontrar una interpretación física para la derivada fraccionaria. Una posible solución a este problema ha sido propuesta por I. Poldlubny en un reciente artículo titulado “Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Differentiation” [34] en el cual la interpretación física que le da a estos operadores fraccionarios está basada en el empleo de dos tipos de tiempos, un tiempo *cósmico* y un tiempo *individual* que esta estrechamente relacionada con la teoría de la relatividad.

1.2. Conceptos Básicos

A continuación daremos algunas definiciones importantes que serán de utilidad en el transcurso de este trabajo de investigación. Para ello empezaremos definiendo algunos espacios de funciones.

Definición 1.2.1. *Definimos*

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ medibles } \left| \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty \right. \right\},$$

como el conjunto de todas las funciones absolutamente integrables.

Definición 1.2.2. *Sea $\Omega = [a, b]$, $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$. Denotamos por $L_p = L_p(\Omega)$, el conjunto de todas las funciones Lebesgue medibles para las cuales $\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$, con $1 \leq p < \infty$.*

Definición 1.2.3. *Denotaremos con $[\alpha]$ y $\lceil \alpha \rceil$ la parte real entera y la parte entera superior en los operadores fraccionarios.*

Definición 1.2.4. *Denotamos por $AC[a, b]$, el conjunto de todas las funciones que son absolutamente continuas en el intervalo $[a, b]$.*

Definición 1.2.5. *Definimos $AC^{[\alpha]}[a, b]$, en donde, $[\alpha]$ es el orden del operador fraccionario y $AC^n[a, b]$, con $n = 1, 2, \dots$, es el espacio de las funciones $f(x)$ con derivada continua hasta el orden $n - 1$ en $[a, b]$ y tales que $f^{(n-1)}(x) \in AC[a, b]$.*

Definición 1.2.6. *Denotamos por $\mathcal{L}_t(\mathbb{R}^+)$ el espacio de funciones continuas de orden exponencial $\nu > 0$, definidas en $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ para las cuales existe su transformada de Laplace.*

1.2.1. Función exponencial

Definición 1.2.7. *Una función $f(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ se dice de orden exponencial $\nu > 0$, cuando $t \rightarrow \infty$, si existen dos constantes positivas M, T , tales que*

$$|f(t)| \leq Me^{\nu t} \quad \forall t \geq T.$$

1.2.2. Transformada de Laplace y su inversa

Definición 1.2.8. [35] *Sea $f(t)$ una función continua o continua a trozos en el intervalo $(0, T)$ y exponencial de orden $\nu > 0$, entonces la transformada de Laplace de $f(t)$ esta dada por*

$$(\mathcal{L}_t f(t))(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

y existe para todo s con $\text{Re}(s) > \nu$.

Definición 1.2.9. *La función original $f(t)$ puede ser recuperada a partir de su transformada de Laplace inversa*

$$f(t) = \mathcal{L}_s^{-1}(\mathcal{L}_t f(s))(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} (\mathcal{L}_t f(t))(s) ds, \quad \gamma = \text{Re}(s) > \nu.$$

1.2.3. Transformada de Fourier y su inversa

Definición 1.2.10. *Definimos*

$$\mathcal{F}_x(\mathbb{R}) := \{f \in L^1(\mathbb{R}) \mid \widehat{f}(k) \text{ existe}\}, \quad (1.8)$$

como el espacio de funciones para las cuales la transformada de Fourier 1-dimensional existe. En donde $\widehat{f}(k)$ denotará la transformada de Fourier.

Definición 1.2.11. [35] *Dada una función $f(x)$ de variable real $-\infty < x < \infty$, $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, su transformada de Fourier está dada por*

$$(\mathcal{F}_x f(x))(k) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x) dx, \quad (1.9)$$

mientras que la transformada de Fourier inversa es:

$$\mathcal{F}_k^{-1}(\mathcal{F}_x f(k))(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} (\mathcal{F}_x f(x))(k) dk.$$

Definición 1.2.12. *Denotamos por $\mathcal{LF} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{F}(\mathbb{R})$, el conjunto de todas las funciones para las cuales existe la transformada de Laplace en el tiempo y de Fourier en el espacio.*

Antes de proseguir con mas definiciones, es necesario introducir una de las funciones básicas del cálculo fraccionario que generaliza a la función factorial y permite tomar n como un número no entero e incluso valores complejos, esta es la función Gama expresada de la siguiente manera

1.2.4. Función gama

Definición 1.2.13. *Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(z) > 0$, entonces*

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (1.10)$$

La demostración de la existencia de la integral que define a la función gama se puede consultar en [36]. Una propiedad básica de esta función es

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (1.11)$$

Demodo que si $z = n$, con $n \in \mathbb{Z}^+$ y usando la propiedad (1.11), se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n), \\ &= n(n-1)\Gamma(n-1), \\ &\vdots \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots\Gamma(1) = n!. \end{aligned}$$

En seguida se introduce los operadores fraccionarios y las propiedades básicas que utilizaremos a lo largo del desarrollo de este trabajo (véase, por ejemplo, Samko, Kilvas, Marichev [38]; Podlubny [42]).

1.3. Operadores de diferenciación e integración fraccionaria

En las definiciones siguientes, se asumen las hipótesis

$$[a, b] \subset \mathbb{R}, \quad \alpha > 0, \quad n = -[-\alpha] = [\alpha], \quad (1.12)$$

en donde $[\cdot]$ y $[\cdot]$ son definidos en la Definición 1.2.3.

1.3.1. Integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville

Definición 1.3.1. Sea $f \in L_1(a, b)$. Las integrales

$$(I_{a+}^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(z)}{(x-z)^{1-\alpha}} dz, \quad x > a, \quad (1.13)$$

$$(I_{b-}^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(z)}{(z-x)^{1-\alpha}} dz, \quad x < b, \quad (1.14)$$

son conocidas como **integrales fraccionarias de Riemann-Liouville de orden α** por la izquierda y por la derecha, respectivamente. Aquí $\Gamma(x)$ es la función gama definida como en la Definición 1.2.13.

Las integrales fraccionarias dadas en (1.13) y (1.14) siguen definidas para funciones $f \in L_p(a, b)$ con $1 \leq p \leq \infty$.

Definición 1.3.2. Sea $f \in AC^{[\alpha]}[a, b]$, entonces las expresiones

$$({}^{RL}D_{a+}^\alpha f)(x) := (D^n I_{a+}^{n-\alpha} f)(x), \quad (1.15)$$

$$({}^{RL}D_{b-}^\alpha f)(x) := ((-D)^n I_{b-}^{n-\alpha} f)(x), \quad (1.16)$$

representan las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville de orden α , por la izquierda y por la derecha respectivamente.

Aquí $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$, representa la n -ésima derivada de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville por la izquierda y por la derecha en el sentido clásico y n denota la parte entera superior de α , definida como en la ecuación (1.12).

Para el caso de una función f de dos o más variables, siempre que se verifiquen las condiciones necesarias planteadas para el caso unidimensional, sobre la existencia de los operadores fraccionarios, con respecto a la variable de integración, las integrales y derivadas parciales fraccionarias de Riemann-Liouville, se definen como

$$({}_{a+}I_x^\alpha f)(x, t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(z, t)}{(x-z)^{1-\alpha}} dz, \quad x > a, \quad (1.17)$$

$$({}_xI_{b-}^\alpha f)(x, t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(z, t)}{(z-x)^{1-\alpha}} dz, \quad x < b, \quad (1.18)$$

$$({}_{a+}^{RL}D_x^\alpha f)(x, t) := \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} {}_{a+}I_x^{n-\alpha} f \right)(x, t), \quad (1.19)$$

$$({}_{a+}^{RL}D_x^\alpha f)(x, t) := \left((-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} {}_xI_{b-}^{n-\alpha} f \right)(x, t), \quad (1.20)$$

y todas ellas coinciden con las definiciones clásicas cuando α es un entero positivo.

1.3.2. Algunas propiedades del operador fraccionario de Riemann-Liouville

Antes de adentrarnos con mas definiciones, enunciaremos algunas propiedades que satisface el operador fraccionario de Riemann-Liouville, la **propiedad de semi-grupo o ley de los exponentes**.

Proposición 1.3.1. *Sea $f \in L_1(a, b)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Entonces se cumple*

$$I_{a+}^\beta I_{a+}^\alpha f(x) = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(x), \quad (1.21)$$

para casi toda $x \in [a, b]$.

Demostración. Realizaremos la prueba para f continua y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} I_{a+}^\beta [I_{a+}^\alpha f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{I_{a+}^\beta f(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha}} \int_a^\tau \frac{f(\xi)}{(\tau-\xi)^{1-\beta}} d\xi, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(\xi) d\xi \int_\xi^x (x-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\xi)^{\beta-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_a^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{1-(\beta+\alpha)}} d\xi = I_{a+}^{\beta+\alpha} f(x). \quad \square \end{aligned}$$

En el caso en que f no sea continua pero si pertenezca a $L_1(a, b)$ basta con encontrar una sucesión de funciones continuas que converjan a f en la norma de $L_1(a, b)$ y utilizar el procedimiento anterior.

La siguiente propiedad muestra que la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville al igual que en el caso clásico es el operador inverso por la izquierda de la integral, y se escribe en la siguiente

Proposición 1.3.2. *La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville es el operador inverso izquierdo de la integral.*

Demostración. Para ello notemos que

$$({}^{RL}D^\alpha (I^\alpha f))(x) = (D^n I^{n-\alpha} (I^\alpha f))(x).$$

Luego, por la propiedad de semigrupo, llegamos a la siguiente expresión de orden entero

$$({}^{RL}D^\alpha (I^\alpha f))(x) = (D^n I^{(n-\alpha)+\alpha} f)(x) = (D^n I^n f)(x),$$

en la cual sabemos que son operadores inversos y de donde se tiene

$$({}^{RL}D^\alpha (I^\alpha f))(x) = f(x).$$

Por lo tanto, concluimos que la derivada de Riemann-Liouville de orden fraccionario, al igual que en el cálculo clásico, es el operador inverso por la izquierda de la integral. \square

Una conclusión interesante es que en general, no todas las derivadas de orden fraccionario satisfacen de forma directa la **propiedad de semigrupo**. Debido a esto, en la siguiente propiedad se muestra que bajo ciertas condiciones la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y Caputo si satisfacen está propiedad.

Proposición 1.3.3. *La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville satisface la propiedad de semigrupo si todos los términos dentro de la suma es igual a cero, es decir, si la $f^{(k)}(0) = 0$, para $k = 0, 1, 2, \dots, n$*

Demostración. En virtud de la propiedad de semi-grupo dada en la expresión (1.21) se busca bajo qué condiciones se cumple

$$({}^{RL}D^\beta ({}^{RL}D^\alpha f))(x) = ({}^{RL}D^{\beta+\alpha} f)(x). \quad (1.22)$$

Para ello expresemos $({}^{RL}D^\alpha f)(x) = (D^n I^{n-\alpha} f)(x)$ y $({}^{RL}D^\beta f)(x) = (D^m I^{m-\beta} f)(x)$ con $n-1 < \alpha \leq n$ y $m-1 < \beta \leq m$. Así de la ecuación (1.22), se tiene

$$({}^{RL}D^\beta ({}^{RL}D^\alpha f))(x) = (D^m I^{m-\beta} D^n I^{n-\alpha} f)(x). \quad (1.23)$$

Y por otro lado

$$\left({}^{RL}D^{\beta+\alpha} f \right) (x) = \left(D^m D^n I^{m-\beta} I^{n-\alpha} f \right) (x). \quad (1.24)$$

Luego, de las expresiones (1.23) y (1.24), se observa que la propiedad que estamos buscando es saber si se cumple

$$\left(I^{m-\beta} D^n f \right) (x) = \left(D^n I^{m-\beta} f \right) (x).$$

Para comprobarlo integremos por partes la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \left(I^{m-\beta} f \right) (x) &= \frac{1}{m-\beta} \int_0^x (x-\tau)^{m-\beta-1} f(\tau) d\tau, \\ &= -\frac{(x-\tau)^{m-\beta} f(\tau)}{(m-\tau)\Gamma(m-\beta)} \Big|_0^x + \frac{1}{(m-\beta)\Gamma(m-\beta)} \int_0^x (x-\tau)^{m-\beta} f'(\tau) d\tau, \\ &= \frac{f(0)x^{m-\beta}}{\Gamma(m-\beta+1)} + \frac{1}{(m-\beta+1)} \int_0^x (x-\tau)^{m-\beta} f'(\tau) d\tau, \\ &= \frac{f(0)x^{m-\beta}}{\Gamma(m-\beta+1)} + \left(I^{m+1-\beta} f' \right) (x), \end{aligned}$$

siguiendo con este proceso n -veces llegamos a que

$$\begin{aligned} \left(I^{m-\beta} f \right) (x) &= \frac{f(0)x^{m-\beta}}{\Gamma(m-\beta+1)} + \left(I^{m+1-\beta} f' \right) (x), \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)x^{m-\beta+k}}{\Gamma(m-\beta+k+1)} + \left(I^{m+n-\beta} f^{(n)} \right) (x), \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)x^{m-\beta+k}}{\Gamma(m-\beta+k+1)} + \left(I^{m+n-\beta} D^{(n)} f \right) (x). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Además, por la propiedad de semigrupo, el último término en la expresión (1.25) se puede expresar como $\left(I^n I^{m-\beta} D^n f \right) (x)$, por lo que al derivar n veces la expresión (1.25) y tomando en cuenta que la derivada de Riemann-Liouville es el operador inverso por la izquierda de la integral (Proposición 1.3.3), llegamos a que

$$\begin{aligned} \left(D^n I^{m-\beta} f \right) (x) &= D^n \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)x^{m-\beta+k}}{\Gamma(m-\beta+k+1)} + \left(D^n I^{m+n-\beta} D^n f \right) (x), \\ &= \sum_{k=0}^n D^n \frac{f^{(k)}(0)x^{m-\beta+k}}{\Gamma(m-\beta+k+1)} + \left(D^n I^n I^{m-\beta} D^n f \right) (x), \\ &= \sum_{k=0}^n D^n \frac{f^{(k)}(0)x^{m-\beta+k}}{\Gamma(m-\beta+k+1)} + \left(I^{m-\beta} D^n f \right) (x). \end{aligned}$$

Llegamos entonces a la conclusión de que la expresión

$${}^{RL}D^\beta ({}^{RL}D^\alpha f)(x) = ({}^{RL}D^{\beta+\alpha} f)(x),$$

se cumple únicamente si todos los términos dentro de la suma son iguales a cero para toda x , lo cual se cumple sólo si la función f es tal que $f^{(k)}(0) = 0$, con $k = 0, 1, 2, \dots, n$. \square

Funciones de esta clase son por ejemplo funciones de la forma $f(x) = x^{n+1} g(x)$, donde $g(x)$ es una función n veces derivable. Para el caso de la derivada de Caputo la conclusión es la misma.

1.3.3. Integrales y derivadas fraccionarias de Liouville

Las integrales fraccionarias de Riemann-Liouville dadas en (1.13) y (1.14) fueron extendidas por Joseph Liouville, de manera natural a los semiejes $(-\infty, b]$ y $(a, \infty]$ y también al eje real cuando $a = -\infty$ y $b = \infty$. Consideramos en la siguiente definición, el caso sobre el eje real.

Definición 1.3.3. Sea $f \in L_1(a, b)$. Las integrales

$$(I_{a+}^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(z)}{(x-z)^{1-\alpha}} dz, \quad -\infty < x < \infty, \quad (1.26)$$

$$(I_{b-}^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(z)}{(z-x)^{1-\alpha}} dz, \quad -\infty < x < \infty, \quad (1.27)$$

son conocidas como **integrales fraccionarias de Liouville de orden α** por la izquierda y por la derecha, respectivamente. Nuevamente $\Gamma(x)$ es la función gama definida como en la Definición 1.2.13.

Estos operadores también se denominan integrales fraccionarias de Weyl, ya que éste fue el primero en utilizarlos sobre dominios de funciones periódicas.

Cuando $\alpha = n$, las expresiones dadas en (1.26) y (1.27) devuelven las fórmulas para la integral iterada hasta el orden n de una función real (ver expresión (1.4)). Estas integrales fraccionarias siguen definidas para funciones $f \in L_p(\mathbb{R})$, con $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$.

Definición 1.3.4. Para funciones $f \in AC^{[\alpha]}(\mathbb{R})$, las siguientes igualdades

$$({}^L D_+^\alpha f)(x) := (D_+^n I_+^{\alpha-n} f)(x), \quad (1.28)$$

$$({}^L D_-^\alpha f)(x) := (-1)^n (D_-^n I_-^{\alpha-n} f)(x), \quad (1.29)$$

definen las **derivadas fraccionarias de Liouville de orden α** , por la izquierda y derecha, respectivamente. De igual manera $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$, representa la n -ésima derivada.

Las derivadas parciales fraccionarias de Liouville, se define como

$$({}^L_{-\infty}D_x^\alpha f)(x, t) := \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} {}_{-\infty}I_x^{n-\alpha} f \right)(x, t), \quad (1.30)$$

$$({}^L_{-\infty}D_x^\alpha f)(x, t) := \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} {}_{-\infty}I_x^{n-\alpha} f \right)(x, t), \quad (1.31)$$

siempre que la función f cumpla las condiciones planteadas como en el caso unidimensional, con respecto a la variable de integración.

1.3.4. Derivada y derivada parcial fraccionaria de Caputo

La derivada de Riemann-Liouville tuvo un papel muy importante en el desarrollo del cuerpo teórico del cálculo fraccionario y se utilizó con éxito en aplicaciones puramente matemáticas. Sin embargo, al tratar de realizar modelizaciones matemáticas de fenómenos físicos reales por medio de ecuaciones diferenciales fraccionarias, surgió el problema de las condiciones iniciales de orden fraccionario. Este tipo de condiciones no son físicamente interpretables y presentan un obstáculo a la hora de hacer uso práctico del cálculo fraccionario.

Por otra parte, el operador fraccionario de Caputo, en contraste con el de Riemann-Liouville, es más idóneo en problemas de interés físico, debido a que las condiciones iniciales involucradas en los problemas se interpretan de igual forma que en el caso clásico. Esta definición, representa un notable avance en el estudio de fenómenos físicos como los de tipo viscoelásticos, entre otros.

A continuación presentamos las definiciones.

Definición 1.3.5. *Para funciones $f \in L_1(a, b)$ la derivada fraccionaria de Caputo está definida como*

$$({}^C D_{a+}^\alpha f)(x) := (I_{a+}^{n-\alpha} D^n f)(x), \quad \text{para } x \geq a, \quad n = \lceil \alpha \rceil,$$

y

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} ({}^C D_{a+}^\alpha f)(x) := f(x).$$

La validez de esta definición está limitada para funciones f tales que $D^n f \in L_1(a, b)$. Esto es equivalente a decir que la n -ésima derivada de f es absolutamente integrable.

Proposición 1.3.4. *Sea $f \in L_1(a, b)$, entonces se cumple lo siguiente*

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} ({}^C D_{a+}^\alpha f)(x) := f^{(n)}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Usando la Definición 1.3.5 de la derivada fraccionaria de Caputo y la expresión (1.13) de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville e integrando por partes, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n} ({}^C D_{a+}^{\alpha} f)(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \left(\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha-1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha-1)} \int_a^x (x-\tau)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \right), \\ &= f^{(n)}(a) + \int_a^x f^{(n+1)}(\tau) d\tau, \\ &= f^{(n)}(x). \end{aligned} \quad \square$$

Según lo anterior, cuando la función f satisface, con respecto a la variable de integración, las condiciones necesarias para la existencia del operador de derivación fraccionaria, como en el caso uno dimensional, entonces la derivada parcial fraccionaria de Caputo se define como

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} f)(x, t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a+}^x \frac{\partial^n}{\partial z^n} f(z, t) (x-z)^{\alpha+1-n} dz \quad (1.32)$$

y

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} ({}^C D_{a+}^{\alpha} f)(x, t) = f(x, t). \quad (1.33)$$

En consecuencia si $\alpha = n$, resulta

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} f)(x, t) = \frac{\partial^n f(x, t)}{\partial x^n}.$$

Además, si para todo $x \in [a, b]$, $f(x)$ es $(n-1)$ -veces diferenciable, con derivada continua en $[a, b]$ y $f^{(n)} \in L_1[a, b]$, entonces se cumple lo siguiente

$$({}^{RL} D_{a+}^{\alpha} f)(x) = ({}^C D_{a+}^{\alpha} f)(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a+)}{\Gamma(1+j-\alpha)} (x-a)^{j-\alpha}. \quad (1.34)$$

De igual forma para funciones diferenciables hasta orden $n-1$ en a y para las que exista $({}^{RL} D_{a+}^{\alpha} f)(x)$, podemos presentar una nueva definición de la derivada fraccionaria de Caputo

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} f)(x) = {}^{RL} D_{a+}^{\alpha} \left(f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(a+) \frac{(x-a)^j}{j!} \right). \quad (1.35)$$

Proposición 1.3.5. *La relación existente entre las derivadas fraccionarias de Caputo y de Riemann-Liouville permite concluir que bajo las condiciones en la que vale la igualdad (1.34), la condición fraccionaria*

$$({}^{RL} D_{a+}^{\alpha} f(x))(a+) = 0, \quad (1.36)$$

equivale a las condiciones enteras

$$f^j(a+) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (1.37)$$

Demostración. Para demostrar lo anterior basta observar que, si se cumple la expresión (1.37), entonces cuando $x \rightarrow a$ en la fórmula (1.34), se obtiene directamente la condición (1.36). Por otro lado, si se cumple (1.36), entonces multiplicando ambos miembros de la identidad (1.34) por $(x - a)^{\alpha-j}$, sucesivamente con $j = n - 1, n - 2, \dots, 1, 0$, y tomando los límites cuando $x \rightarrow a$, se obtiene la sucesión de resultados $f^{(n-1)}(a) = 0, \dots, f'(a) = 0, f(a) = 0$; es decir, las condiciones de (1.37). \square

Definición 1.3.6. *Sea α un número real, tal que $n - 1 < \alpha \leq n$. Entonces el kernel singular de Riemann-Liouville esta dado por*

$$J_\alpha(t) := \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad t > 0, \quad (1.38)$$

en donde, $\Gamma(\alpha)$ es la función Gama dada en la Definición 1.2.13.

1.4. Transformadas integrales de las derivadas e integrales fraccionarias

Antes de definir la transformada de Laplace para las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo. Se enuncian algunas propiedades la cual serán de importancia en la demostración de las proposiciones subsecuentes.

La principal dificultad para resolver ecuaciones diferenciales clásicas ó fraccionarias con valores iniciales mediante la transformada de Laplace es calcular las transformadas inversas. Tal dificultad aparece cuando tenemos que descomponer un producto en la suma de dos o más términos más simples y a pesar de que el álgebra involucrada es elemental, puede llegar ser bastante complicado.

De esta manera sería factible tener una regla de productos para las transformadas inversas de Laplace, es decir, poder calcularlas a partir de las transformadas inversas de cada uno de sus factores. Estos resultados se formulan en los siguientes teoremas, pero antes una definición

Definición 1.4.1. *Sean f, g funciones continuas definidas en $[0, \infty)$. Entonces, la convolución de f y g , representada por $(f * g)(t)$ esta definida por*

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Teorema 1.4.1. *Supongamos que $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ y que existe $(f * g)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\mathcal{F}_x \left\{ (f * g)(x) \right\} (k) = (\mathcal{F}_x f(x)) (k) (\mathcal{F}_x g(x)) (k).$$

Demostración. Aplicando la transformada de Fourier, según la expresión (1.9), tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_x\{(f * g)(x)\}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)e^{-ikx} dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \right) e^{-ikx} dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-ik(x-y)}g(y)e^{-ikx} dydx.\end{aligned}$$

Luego si $z = x - y$, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_x\{(f * g)(x)\}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-ikz}g(y)e^{-iky} dzdy, \\ &= (\mathcal{F}_x f(x))(k) (\mathcal{F}_x g(x))(k).\end{aligned}$$

□

Teorema 1.4.2. Sean f y g funciones continuas a trazos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial $\nu > 0$, entonces la transformada de Laplace está dada por la expresión

$$\mathcal{L}_t\{(f * g)(t)\}(s) = (\mathcal{L}_t f(t))(s) (\mathcal{L}_t g(t))(s) \equiv F(s)G(s).$$

Demostración. Por definición de transformada de Laplace, se tiene

$$\begin{aligned}F(s)G(s) &= \left(\int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-su} g(u) du \right), \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s(\tau+u)} f(\tau)g(u) d\tau du, \\ &= \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-s(\tau+u)} g(u) du.\end{aligned}$$

Así usando el cambio de variable $t = \tau + u$, donde τ está fijo y reescribiendo los límites de integración para t obtenemos

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} g(t - \tau) dt.$$

La región de integración es $0 \leq \tau < \infty$, $\tau \leq t < \infty$. Cambiando el orden de integración, lo cual se

puede realizar haciendo uso del teorema de Fubini, obtenemos

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau \right) dt, \\ &= \int_0^{\infty} (f * g)(t)dt = \mathcal{L}_t((f * g)(t))(s). \end{aligned} \quad \square$$

Una propiedad más que es de importancia, es la que se menciona en la siguiente

Proposición 1.4.1. *Sea $f \in L_1(a, b)$ con $-\infty < a < b < \infty$. Entonces, la transformada de Laplace del operador fraccionario de Riemann-Liouville de orden $\alpha > 0$, dado en la expresión (1.13), esta dado de la siguiente manera*

$$\mathcal{L}_t(I_0^\alpha f(t))(s) = \frac{1}{s^\alpha} (\mathcal{L}_t f(t))(s).$$

Demostración. Notemos que la integral fraccionaria de Riemann-Liouville I_0^α , dada en la Definición 1.3.1, la podemos ver, haciendo uso de la definición de convolución para dos funciones, (ver Definición 1.4.1), como

$$I_0^\alpha f(x) = J_\alpha(t) * f(t),$$

en donde, $J_\alpha(t)$ esta dada por la ecuación (1.38). Para ello empezaremos calculando la transformada de Laplace de la función $J_\alpha(t)$

$$\mathcal{L}_t(J_\alpha(t))(s) = \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-st} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-st} dt. \quad (1.39)$$

Ahora haciendo el cambio de variable $u = st$, en la expresión (1.39), se tiene

$$\mathcal{L}_t(J_\alpha(t))(s) = \frac{1}{s^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du = \frac{1}{s^\alpha}.$$

Finalmente en virtud del teorema de convolución

$$\mathcal{L}_t(I_0^\alpha f(t))(s) = \mathcal{L}_t(J_\alpha * f(t))(s) = (\mathcal{L}_t J_\alpha(t))(s) \cdot (\mathcal{L}_t f(t))(s) = \frac{1}{s^\alpha} (\mathcal{L}_t f(t))(s). \quad \square$$

A continuación enunciaremos y probaremos algunos resultados sobre la aplicación de la transformada de Laplace a las derivadas de orden fraccionario, tanto de Riemann-Liouville como de Caputo.

Proposición 1.4.2. *Dada una función $f \in \mathcal{L}_t(\mathbb{R}^+)$, $\alpha > 0$, $n - 1 < \alpha \leq n$, $f \in C^{n-1}(\mathbb{R}^+)$ y suponiendo que $({}^{RL}D_0^{\alpha-k-1} f)(t)$ es exponencial de orden $\nu_k > 0$ para todo $k=0,1,\dots,n-1$, entonces se cumple que*

$$\int_0^{\infty} e^{-st} ({}^{RL}D_0^\alpha f(t)) dt := s^\alpha (\mathcal{L}_t f(t))(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k ({}^{RL}D_0^{\alpha-k-1} f)(0), \quad (1.40)$$

para todo $k=0,1,\dots,n-1$ y $\text{Re}(s) > m$, con $m = \max\{\nu_k \mid k = 0, 1, 2, \dots, n - 1\}$.

Demostración. Aplicando la transformada de Laplace a la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville dada en la Definición 1.3.2, y teniendo en cuenta la Proposición A.0.1 del Apéndice A, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t({}^{RL}D_0^\alpha f(t))(s) &= \mathcal{L}_t\left(\frac{d^n}{dt^n}I^{n-\alpha}f(t)\right)(s) \\ &= s^n \mathcal{L}_t(I^{n-\alpha}f(t))(s) - s^{n-1}(I^{n-\alpha}f)(0) \\ &\quad - s^{n-2}(DI^{n-\alpha}f)(0) - \dots - (D^{n-1}I^{n-\alpha}f)(0).\end{aligned}$$

Además notando que

$$\mathcal{L}_t(I^{n-\alpha}f(t))(s) = \frac{(\mathcal{L}_t f(t))(s)}{s^{n-\alpha}},$$

según la Proposición 1.4.1. Llegamos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t({}^{RL}D_0^\alpha f(t))(s) &= s^\alpha (\mathcal{L}_t f(t))(s) - s^{n-1}({}^{RL}D^{\alpha-n}f)(0) - s^{n-2}({}^{RL}D^{\alpha-n+1}f)(0), \\ &\quad - s^{n-3}({}^{RL}D^{\alpha-n+2}f)(0) - \dots - ({}^{RL}D^{\alpha-1}f)(0), \\ &= s^\alpha (\mathcal{L}_t f(t))(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k ({}^{RL}D^{\alpha-k-1}f)(0).\end{aligned}\quad \square$$

Proposición 1.4.3. Si $f^{(n)}(t) \in L(\mathbb{R}^+)$ y si se cumple que $f^{(k)}(t)$ es de orden exponencial $\nu_k > 0 \forall k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, entonces

$$\int_0^\infty e^{-st} ({}^C D_0^\alpha f(t)) dt := s^\alpha (\mathcal{L}_t f(t))(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (1.41)$$

para $\text{Re}(s) > m$, $m = \max\{\nu_k \mid k = 0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Demostración. Por la definición de la derivada fraccionaria de Caputo dada en la Definición 1.3.5, obtenemos

$$({}^C D_0^\alpha f)(x) = (I_0^{n-\alpha} D^n f)(x), \quad x > a, \quad (1.42)$$

luego aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (1.42) y usando la Proposición 1.4.1, obtenemos

$$\mathcal{L}_t({}^C D_0^\alpha f(x))(s) = \mathcal{L}_t\left(I_0^{n-\alpha} f^{(n)}(x)\right)(s) = \frac{\mathcal{L}_t(f^{(n)}(x))(s)}{s^{n-\alpha}} \quad (1.43)$$

Por lo tanto, haciendo usando la Proposición A.0.1 (véase Apéndice A) se tiene el resultado.

Observación 1.4.1. *Es importante resaltar que cuando $k = n - 1$ en la fórmula (1.40), resulta $\alpha - 1 < 0$ y por lo tanto, ${}^{RL}D_0^{\alpha-n} = I_0^{n-\alpha}$; es decir, esta condición inicial es proporcionada por el valor de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $n - \alpha$ de la función f , calculada en $t = 0$.*

Para definir la fórmula de la transformada de Fourier de la integral fraccionaria de Liouville para todo α , con $\alpha > 0$, es necesario introducir un espacio adecuado de funciones.

Nosotros designaremos con \mathcal{S} el espacio de Schwartz de todas las funciones infinitamente derivables en todo el eje real, las cuales, al igual que todas sus derivadas, tiendan a cero, cuando $|x| \rightarrow \infty$ de forma más rápido que cualquier potencia de x^{-1} . En otras palabras, si $C_0^\infty(\mathbb{R})$ es el espacio de todas las funciones infinitamente derivables en todo el eje real tales que $f(x)$ es idénticamente cero en un entorno de los extremos $x = -\infty$ y $x = \infty$, entonces el conjunto \mathcal{S} se compone de aquellas, y sólo aquellas, funciones infinitamente diferenciables φ para las cuales se cumple la siguiente condición

Definición 1.4.2 (Espacio de Schwartz).

$$\mathcal{S} = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n \varphi^{(m)}(x) = 0 \right\}, \quad (1.44)$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Dentro de este espacio de Schwartz, Lizorkin introdujo un subespacio de funciones $\Phi \subset \mathcal{S}$, invariante con respecto a la integración y a la derivación fraccionaria, en el sentido de que la aplicación de estos operadores fraccionarios a una función de Φ sigue perteneciendo al mismo espacio.

Definición 1.4.3. *Dado el subespacio*

$$\Psi := \left\{ \psi \in C^\infty \mid \psi \in \mathcal{S}, \quad \psi^{(k)} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \right\} \subset \mathcal{S},$$

*diremos que el conjunto de funciones de \mathcal{S} cuya transformada de Fourier pertenece al espacio Ψ se llama **espacio de Lizorkin**, es decir,*

$$\Phi := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \varphi \in \mathcal{S}, \quad \hat{\varphi} \in \Psi \right\}. \quad (1.45)$$

El espacio de Lizorkin puede caracterizarse, de forma equivalente como el espacio de las funciones de Schwartz $\varphi \in \mathcal{S}$ que resultan ser ortogonales a todos los polinomios, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \varphi(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Debido a esto se puede anunciar la siguiente

Proposición 1.4.4. *Dada una función $f(x)$ tal que $f \in \Phi$ con $\alpha > 0$ se tiene*

$$(\mathcal{F}_x (I_+^\alpha f(x))) (k) = (-ik)^{-\alpha} (\mathcal{F}_x f(x)) (k), \quad (1.46)$$

$$(\mathcal{F}_x ({}^L D_+^\alpha f(x))) (k) = (-ik)^\alpha (\mathcal{F}_x f(x)) (k). \quad (1.47)$$

Demostración. La expresión dada en (1.46), la podemos ver en virtud del teorema de convolución, como

$$(\mathcal{F}_x (I_+^\alpha f(x))) (k) = \mathcal{F}_x (J_\alpha * f(x)) (k) = \mathcal{F}_x (j_\alpha(x)) (k) \cdot \mathcal{F}_x (f(x)) (k).$$

Luego como la función $\Gamma(\alpha)$ esta definida para $\text{Re}(\alpha) > 0$, entonces haciendo $ik = s$ y cambiando a t por x en la Proposición 1.4.1, resulta

$$(\mathcal{F}_x (J_\alpha * f(x))) (k) = \frac{1}{(-ik)^\alpha},$$

del cual se obtiene el resultado de la expresión (1.46).

Para demostrar la expresión (1.47) haremos uso de la ecuaciones (A.5) (ver Apéndice A) y (1.46). Así

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_x ({}^L D_+^\alpha f(x))) (k) &= \left(\mathcal{F}_x \frac{d}{dx} I^{1-\alpha} f(x) \right) (k), \\ &= (-ik) (\mathcal{F}_x I^{1-\alpha} f(x)) (k), \\ &= (-ik)^\alpha (\mathcal{F}_x f(x)) (k). \end{aligned}$$

□

Las condiciones de existencia de la transformada de Fourier para la derivada fraccionaria se pueden suavisar de la forma siguiente

Proposición 1.4.5. *Dada una función $f(x) \in C^{n-1}(\mathbb{R})$, $n - 1 < \alpha \leq n$, y tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f^{(h)}(x) = 0, \quad h = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Entonces,

$$(\mathcal{F}_x ({}^L D_+^\alpha f)) (k) = (-ik)^\alpha (\mathcal{F}_x f)(k). \quad (1.48)$$

Debido a la validéz de esta última propiedad, será de utilidad introducir un nuevo subespacio del espacio de Schwartz, el cual lo definimos de la siguiente manera

Definición 1.4.4 (Subespacio del espacio de Schwartz).

$$\bar{S} = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi^{(m)}(x) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \right\}.$$

Sobre el espacio $\bar{\mathcal{S}}$ se puede definir la transformada de Fourier de la derivada fraccionaria de Liouville de orden α , con $\alpha > 0$.

Observación 1.4.2. *Es importante notar que cuando en el extremo inferior $a = -\infty$ y se pide que la función $f(x)$ junto con la condición de que todas sus derivadas se anulen cuando $x \rightarrow -\infty$, entonces las definiciones de Riemann-Liouville y Caputo coinciden y por lo tanto, las fórmulas de las transformadas de Fourier también.*

1.4.1. Integrales y Derivadas fraccionarias generalizadas en \mathcal{S}'

En esta sección introducimos la noción de distribución o función generalizada, que será de utilidad en el desarrollo de la misma (el lector puede consultar las referencias [37,39] para más detalles sobre las distribuciones).

Definición 1.4.5. *Un funcional lineal continuo $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ se denomina función generalizada ó distribución de crecimiento lento.*

Denotaremos con $\langle T, \varphi \rangle$ la imagen de una $\varphi \in \mathcal{S}$ bajo la acción de T y escribimos

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} T(x)\varphi(x)dx. \quad (1.49)$$

Toda función integrable $f(x)$ en valor absoluto sobre todo el eje real, genera un funcional lineal continuo sobre \mathcal{S} según la expresión (1.49) y existe debido a la desigualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)\varphi(x)dx| \leq \sup_{-\infty < x < +\infty} |\varphi(x)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

En general, una distribución puede ser diferenciada un número arbitrario de veces, según la siguiente

Definición 1.4.6. *Dada $\varphi \in \mathcal{S}$ y $k \in \mathbb{N}$, se tiene*

$$\langle T^k, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^k \rangle. \quad (1.50)$$

En efecto, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, T^k sigue siendo una distribución debido a que, si $\varphi \in \mathcal{S}$ también $\varphi^k \in \mathcal{S}$.

De esta manera, para la transformada de Fourier de una función generalizada se obtiene

Proposición 1.4.6. [37] *Dada $\varphi \in \mathcal{S}$, se tiene*

$$\langle \mathcal{F}_x T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}_x \varphi \rangle. \quad (1.51)$$

También en este caso, el funcional $\mathcal{F}_x T$ sigue siendo un elemento de \mathcal{S}' debido a que, si $\varphi \in \mathcal{S}$, entonces $\mathcal{F}_x \varphi \in \mathcal{S}$.

Si ahora consideramos el espacio de Lizorkin $\Phi \subset \mathcal{S}$ como el espacio de funciones de prueba, se definen las integrales y derivadas fraccionarias de Liouville para una función generalizada $f \in \Phi'$ por medio de los siguientes resultados

Proposición 1.4.7. [38] *Dadas $f \in \Phi'$, $\varphi \in \Phi$, y α tal que $\alpha > 0$, resulta*

$$\langle {}^L I_{\pm}^{\alpha} f, \varphi \rangle = \langle f, {}^L I_{\pm}^{\alpha} \varphi \rangle, \quad (1.52)$$

$$\langle {}^L D_{\pm}^{\alpha} f, \varphi \rangle = \langle f, {}^L D_{\pm}^{\alpha} \varphi \rangle. \quad (1.53)$$

Un ejemplo relevante de una distribución en el espacio \mathcal{S}' es la función delta. Dirac fue el primero en introducir, en 1926, una notación para esta función y en darle un sentido explícito desde el punto de vista físico como masa puntual [39].

La ecuación de vibración de vigas: Aproximación de Dirac

2.1. Introducción

La ecuación de Dirac libre puede ser considerada como la raíz cuadrada de la ecuación de Klein-Gordon, la cual surge en el ámbito de la mecánica cuántica relativista, en la búsqueda de una ecuación de ondas que modele la dinámica del electrón [47,48]. En un contexto más general Morinaga y Nono [49], analizaron la raíz de orden entero η de ecuaciones diferenciales en la forma

$$\sum_{|I|=\eta} a_I \frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I} \phi = \phi$$

y mostraron que, dicha raíz de orden entero η puede ser expresada por medio del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = \Phi,$$

en donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son matrices, que desde el punto de vista físico, describen los grados internos de libertad del sistema asociado.

Una generalización de esta naturaleza, conduce a considerar raíces cuadradas de ecuaciones diferenciales de cualquier orden, que deben ser expresadas mediante sistemas de ecuaciones diferenciales en las que intervengan derivadas de orden real. Trabajos recientes en este contexto se pueden encontrar en los artículos de Vázquez [50,51], en los cuales se introduce una definición de raíz cuadrada de la ecuación de difusión estándar 1-dimensional.

Cabe mencionar que Oldham y Spanier [53,54], fueron los primeros autores en derivar una formulación que involucraba el operador matemático de semidiferenciación en sustitución de las leyes de Fick, en un trabajo de 1970, pero en un contexto escalar y sin considerar grados de libertad internos.

En el contexto de las investigaciones antes mencionadas, en la presente tesis analizaremos la ecuación de vibración de vigas fraccionaria, vista desde el enfoque de Dirac en conexión con los operadores diferenciales fraccionarios, debido a que proporcionan una herramienta eficaz para tratar con ecuaciones que están escritas en términos de operadores diferenciales fraccionarios.

En este capítulo ilustraremos el método de Dirac haciendo uso del álgebra de matrices de Pauli para proponer una clase de interpolación entre dos de las ecuaciones más importantes de la física matemática, la *ecuación de difusión* y la de *ondas clásicas*.

2.2. Ecuaciones de Evolución-Difusión de tipo Dirac

Recordemos que la ecuación de Dirac [6, 55]

$$\left[i\hbar\gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{mc}{\hbar} I_{4 \times 4} \right] \psi = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

en donde, γ^j , $j = 0, 1, 2, 3$, son matrices de Dirac de 4×4 , $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x, t, y, z)$ e $I_{4 \times 4}$ es la matriz identidad de tamaño 4×4 ; ofrece, en cierto sentido, la evolución de ψ similar a como lo hace la ecuación de Klein-Gordon. Como es bien conocido, fue formulada originalmente por Dirac en la búsqueda de una ecuación de ondas para el electrón, en el ámbito de la Mecánica Cuántica Relativista, expresada como

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi,$$

en donde, el Hamiltoniano \hat{H} es un operador lineal hermitiano [55].

Sin embargo, puede entenderse como la factorización de dos ecuaciones de Klein-Gordon,

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] I_{4 \times 4} \psi = 0, \text{ o equivalentemente } \left[\frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{mc}{\hbar} I_{4 \times 4} \right] \left[\frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{mc}{\hbar} I_{4 \times 4} \right] \psi = 0.$$

Debido a esto uno puede trabajar con una ecuación que contiene una derivada de primer orden con respecto a la variable de evolución, a pesar de que es un sistema de 4 ecuaciones diferenciales lineales acopladas para el vector ψ de 4 componentes.

En este sentido, el método de la factorización de Dirac es muy eficaz para trabajar con ecuaciones de evolución que son gobernados por operadores diferenciales de orden fraccionario u operadores pseudo-diferenciales, permitiendo expresar a tales operadores como la suma de operadores, para admitir una solución en términos de los operadores de raíz cuadrada. Además, este acercamiento a los operadores de raíz cuadrada abre nuevas perspectivas dentro de la teoría del cálculo fraccional, lo que sugiere otras formulaciones a las definiciones y tratamientos ya establecidos.

Se mostrará como explorar este método de factorización para tratar ecuaciones que involucran operadores de raíz cuadrada.

Para ello, es conocido, que el álgebra de los operadores, es definitivamente diferente a la de los números complejos. Por ejemplo, la identidad

$$A^m + B^m = (A + B)^m = (A + B)(A + B) \cdots (A + B), \quad (2.2)$$

no se cumple si A y B son no números reales o complejos. En efecto, sólo se cumple si A y B son operadores o matrices que conmutan. La ecuación (2.2) es un procedimiento similar a la factorización de Dirac. Además, es evidente que

$$A^2 + B^2 = (A + B)^2 = (A + B)(A - B),$$

se cumple si A y B son operadores o matrices que conmutan, es decir, se satisface

$$[\widehat{A}, \widehat{B}] := \widehat{A}\widehat{B} + \widehat{B}\widehat{A} = 0. \quad (2.3)$$

Por lo tanto, uno puede escribir la función raíz cuadrada $\sqrt{A^2 + B^2}$ en la forma

$$\sqrt{A^2 + B^2} = A\alpha + B\beta, \quad (2.4)$$

en donde, α y β resultan ser objetos matemáticos, tales que

$$\alpha^2 = \beta^2 = 1, \quad \alpha\beta + \beta\alpha = 0, \quad (2.5)$$

con el fin de satisfacer la igualdad (2.4). En principio A y B pueden ser números u operadores que conmutan, siendo el segundo caso el de mayor interés.

Notemos que α y β no pueden ser simplemente números; de hecho, como una consecuencia directa de (2.5) deben ser matrices sin traza con valores propios iguales a ± 1 y por lo tanto de orden $2n \times 2n$, $n = 1, 2, \dots$ y determinante igual a $(-1)^n$.

Así, en un lado uno pierde la naturaleza de la función original, en la cual, la ecuación (2.4) se ha de entender como un múltiplo de la matriz identidad de tamaño $2n \times 2n$. En efecto, la ecuación (2.4) proporciona una matriz identidad en un espacio $2n$ -dimensional adecuado, cuyo significado y dimensiones finales son dictadas por el problema en cuestión [56].

Y por otro lado, uno adquiere una expresión en forma de raíz cuadrada que podría facilitarnos la solución del problema, aunque deben ser interpretado en función de los grados de libertad.

Como ilustración, consideremos el sistema que define la ecuación de Dirac clásica 1-dimensional y sin masa

$$(A\partial_t + B\partial_x) \psi(x, t) := 0, \quad \psi(x, t) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

en donde, A y B son matrices de Pauli de tamaño 2×2 que satisfacen

$$A^2 = I, \quad B^2 = -I, \quad AB + BA = 0, \quad (2.7)$$

note la similitud con las expresiones (2.5).

Elevando al cuadrado el **operador** que aparece en el sistema (2.6), y usando las relaciones (2.7) obtenemos

$$(A\partial_t + B\partial_x)^2 \psi(x, t) = \begin{cases} (\partial_t^2 - \partial_x^2)u_1(x, t), \\ (\partial_t^2 - \partial_x^2)u_2(x, t). \end{cases}$$

Es decir, la ecuación de Dirac (2.6) es equivalente al sistema,

$$\begin{cases} \sqrt{(\partial_t^2 - \partial_x^2)}u_1(x, t) = 0, \\ \sqrt{(\partial_t^2 - \partial_x^2)}u_2(x, t) = 0, \end{cases}$$

en el sentido de que coincide con la raíz cuadrada de la ecuación de Klein-Gordon para cada componente u_1, u_2 del vector ψ , cuando la masa del electrón es $m = 0$.

En analogía a la idea de Dirac es posible dar una definición de la raíz cuadrada de la ecuación de difusión estándar 1-dimensional. En efecto, consideremos la siguiente ecuación diferencial de orden fraccionario de tipo Dirac

$$(A\partial_t^{1/2} + B\partial_x) \psi(x, t) = 0, \quad \psi(x, t) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Elevando al cuadrado el operador de la ecuación (2.8), usando las condiciones (2.7) y suponiendo que se cumple $\partial_t^{1/2}\partial_t^{1/2}f(x, t) = \partial_t f(x, t)$ (véase [50]), obtenemos

$$\begin{cases} \sqrt{(\partial_t - \partial_x^2)} u_1(x, t) = 0, \\ \sqrt{(\partial_t - \partial_x^2)} u_2(x, t) = 0. \end{cases}$$

Lo anterior nos induce a tratar de generalizar la idea de Dirac, para considerar, ahora la raíz cuadrada de la ecuación de **difusión fraccionaria generalizada**

$$(D_t^{2\alpha}u)(x, t) = \lambda^2(D_x^{2\beta}u)(x, t), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad \beta > 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda^2 \in \mathbb{R}^+. \quad (2.9)$$

De igual manera una posible definición de la raíz cuadrada de la ecuación de difusión fraccionaria 1-dimensional (2.9), a través de una ecuación de tipo Dirac de orden fraccionario con respecto a la

variable temporal y espacial

$$\left(AD_t^\alpha + \lambda BD_x^\beta\right) \psi(x, t) = 0, \quad \psi(x, t) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0, \quad (2.10)$$

en donde, $\psi(x, t)$ es una función de difusión fraccionaria de dos componentes, cada una de las cuales, satisface la ecuación de difusión fraccionaria (2.9).

Nuevamente usando la idea de Dirac sobre el operador de la ecuación (2.10), obtenemos

$$\begin{cases} \sqrt{(D_t^{2\alpha} + D_x^{2\beta})} u_1(x, t) = 0, \\ \sqrt{(D_t^{2\alpha} + D_x^{2\beta})} u_2(x, t) = 0. \end{cases}$$

En el álgebra generada por las matrices de Pauli que verifican las condiciones de (2.7), existen seis posibilidades para elegir [57, 58]. Consideremos las siguientes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Sustituyendo esta elección en la ecuación (2.10) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones (desacoplado)

$$\begin{cases} (D_t^\alpha u_1)(x, t) - \lambda(D_x^\beta u_1)(x, t) = 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} (D_t^\alpha u_2)(x, t) + \lambda(D_x^\beta u_2)(x, t) = 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

Mientras que si elegimos la pareja

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

se tiene el sistema (acoplado)

$$\begin{cases} (D_t^\alpha u_1)(x, t) + \lambda(D_x^\beta u_2)(x, t) = 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} (D_t^\alpha u_2)(x, t) + \lambda(D_x^\beta u_1)(x, t) = 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

en el que las componentes u_1 y u_2 no están separadas.

2.2.1. Teorema de Acoplamiento

La relación que existe entre las soluciones del sistema de ecuaciones acopladas (2.15) y (2.16) que indicamos con u_1^* y u_2^* y las soluciones no acopladas u_1 y u_2 de las ecuaciones (2.12) y (2.13) se encuentra mencionada en el siguiente toerema, de forma que en lo que sigue, se pueda restringir el estudio analítico de dichas ecuaciones únicamente al sistema de ecuaciones con componentes separadas.

Teorema 2.2.1. [59] *Sean u_1 y u_2 las soluciones únicas del sistema de ecuaciones (2.12) y (2.13) y u_1^* y u_2^* , las soluciones de las ecuaciones (2.15), (2.16) respectivamente. Entonces, obtenemos*

$$u_1^* = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad (2.17)$$

$$u_2^* = \frac{u_2 - u_1}{2}. \quad (2.18)$$

Demostración. Empezaremos con buscar, si existen, dos matrices

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ l_3 & l_4 \end{pmatrix},$$

para las cuales se cumpla

$$KAL = A_1, \quad KBL = B_1. \quad (2.19)$$

Ahora desarrollando encontramos que K y L cumple las condiciones (2.19) si $k_1 = -k_3$, $k_2 = k_4$, $l_1 = -l_2 = \frac{1}{2k_2}$ y $l_3 = l_4 = \frac{1}{2k_1}$, es decir, cuando

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ -k_1 & k_2 \end{pmatrix}, \quad L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{k_2} & \frac{-1}{k_2} \\ \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} \end{pmatrix},$$

Por ejemplo, puede elegirse

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, sea $\psi(x, t)$ la solución única de la ecuación

$$AD_t^\alpha \psi(x, t) + \lambda BD_x^\beta \psi(x, t) = 0, \quad \psi(x, t) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix},$$

el cual es equivalente al sistema (2.12) y (2.13) con A y B de la forma (2.11). Buscamos la solución $\psi^*(x, t)$ del sistema de ecuaciones acopladas (2.15) y (2.16) que escribimos como

$$A_1 D_t^\alpha \psi^*(x, t) + \lambda B_1 D_x^\beta \psi^*(x, t) = 0, \quad \psi^*(x, t) = \begin{pmatrix} u_1^*(x, t) \\ u_2^*(x, t) \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

la cual es equivalente al sistema de ecuaciones acoplado (2.15) y (2.16), con A_1 y B_1 de la forma (2.14).

Entonces si se cumplen las condiciones (2.19) para A_1 y B_1 , se puede reescribir la ecuación (2.20) de la siguiente forma

$$K(ALD_t^\alpha \psi^*(x, t) + \lambda BLD_x^\beta \psi^*(x, t)) = 0, \quad \psi^*(x, t) = \begin{pmatrix} u_1^*(x, t) \\ u_2^*(x, t) \end{pmatrix},$$

por lo tanto, $\psi^*(x, t)$ tendrá que verificar las condiciones (2.17) y (2.18) para ser solución de (2.20), es decir,

$$ALD_t^\alpha \psi^*(x, t) + \lambda BLD_x^\beta \psi^*(x, t) = 0.$$

Pero esto equivale a pedir que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k_1} \left(D_t^* (u_1^*(x, t) + u_2^*(x, t)) + \lambda D_x^\beta (u_1^*(x, t) + u_2^*(x, t)) \right) &= 0, \\ \frac{1}{2k_2} \left(D_t^* (u_1^*(x, t) - u_2^*(x, t)) - \lambda D_x^\beta (u_1^*(x, t) - u_2^*(x, t)) \right) &= 0, \end{aligned}$$

y cada ecuación se hace nula si se cumplen las relaciones (2.17) y (2.18), al ser u_1 y u_2 las soluciones de las ecuaciones (2.12) y (2.13). □

Observación 2.2.1. *La idea de la ecuación Dirac expuesta anteriormente, se puede explicar fácilmente con el siguiente diagrama (véase Figura 2.1). Se puede ver, que entre la ecuación de difusión y la ecuación de ondas, existe una ecuación de por medio que las une, esta es, la ecuación de difusión fraccionaria. Luego al tratar con las matrices de Pauli, dadas en (2.7) y siendo $\alpha = 1/2$ el orden de la derivada en el tiempo, la ecuación fraccionaria de Dirac puede considerarse como la raíz cuadrada de la ecuación de difusión.*

En conclusión, la ecuación fraccionaria de Dirac, nos permite dar una posible definición de raíz cuadrada para la ecuación de ondas y la ecuación de difusión, en donde cada componente de la función $\psi(x, t)$ es solución para dichas ecuaciones. La dinámica de esta ecuación fraccionaria de Dirac, depende del orden en la derivada y de la estructura en las matrices de Pauli. Resulta ser que cuando $\alpha = 1/2$, estas soluciones se interpretan como distribuciones de probabilidad asociadas a ciertos grados de libertad internos del sistema, lo cual nos indicaría que existe cierta dinámica en la estructura interna del mismo.

A manera de ejemplo resolveremos un problema de Cauchy en todo \mathbb{R} , con derivada fraccionaria de Caputo en el tiempo y de Riemann-Liouville en el espacio, el cual es un caso particular de la ecuación (2.12) que compone el sistema de ecuaciones desacoplado. A partir de este momento se resuelven problemas de Cauchy para el sistema de ecuaciones desacoplados (2.12) y (2.13). Tales soluciones se encontrarán usando la transformada de Laplace y de Fourier

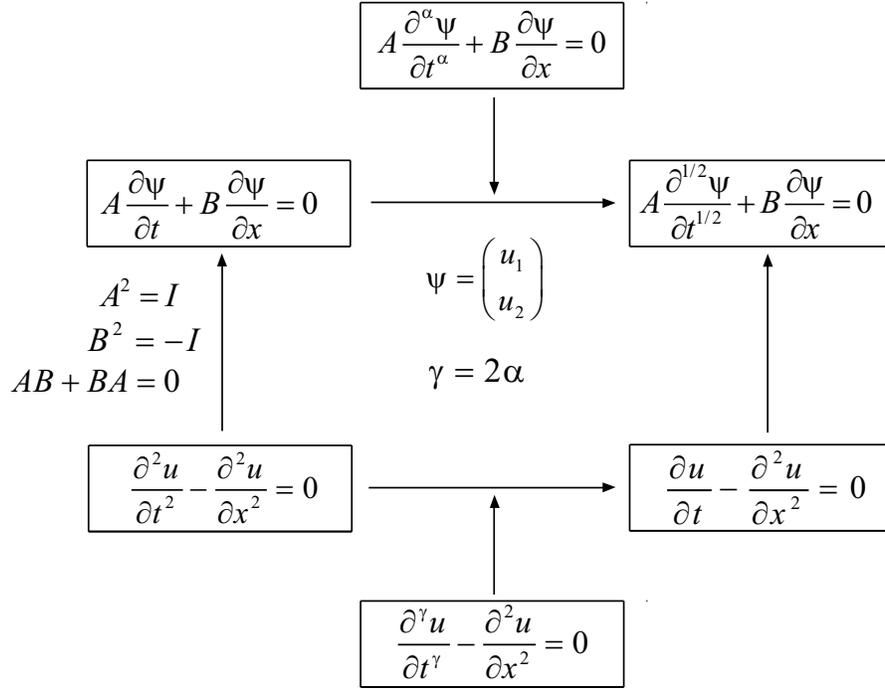


Figura 2.1: Mecanismo de interpolación entre las ecuaciones de tipo de difusión y de ondas.

2.2.2. Ejemplo de un problema de Cauchy con derivada temporal y espacial fraccionaria

Antes de relacionar la idea de Dirac con la ecuación de vibración para vigas, se analiza la solución del siguiente problema de Cauchy con derivada fraccionaria de Caputo en la variable espacial y de Riemann-Liouville en la variable temporal. Debido al buen comportamiento de estos operadores la solución se busca en el espacio $\mathcal{LF} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{F}(\mathbb{R})$ (véase Definición 1.2.12) de funciones $u(x, t)$ para las cuales existe la transformada de Laplace respecto a t para cualquier $x \in \mathbb{R}$ fijo y la transformada de Fourier respecto a x para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$ fijo. Consideremos el siguiente problema

$$\left\{ \begin{array}{l} ({}^RL D_t^\alpha u)(x, t) = \lambda ({}^C D_x^\beta u)(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad \beta > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.21) \\ ({}^RL D_t^{\alpha-1} u)(x, 0+) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.22) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = 0. \quad (2.23) \end{array} \right.$$

Es de resaltar que la definición de Riemann-Liouville definida en (1.19) tiene la clara desventaja de que las condiciones iniciales son de orden fraccionario.

La solución para el problema (2.21)-(2.23) se muestra en el siguiente

Teorema 2.2.2. *Dado el problema de Cauchy (2.21)-(2.23), con $0 < \alpha \leq 1$, $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $F(k) = (\mathcal{F}_x f)(k)$ su solución $u(x, t) \in \mathcal{LF}$ esta dada por*

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} ds \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(k)}{(s^\alpha - \lambda(-ik)^\beta)} e^{-ikx} dk, \quad (2.24)$$

ó en forma equivalente

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(-ik)^\beta t^\alpha) F(k) e^{-ikx} dk, \quad (2.25)$$

siempre que la integral en el lado derecho existan.

Demostración. Aplicando la transformada de Laplace, dada en la Definición 1.2.8, a la ecuación (2.21); utilizando las fórmulas (1.40) y (1.41) que proporciona la transformada de Laplace de la derivada parcial fraccionaria de Riemann-Liouville y de Caputo. Además, teniendo en cuenta las relaciones (2.22) y (2.23) por un lado, tenemos

$$\mathcal{L}_t \left({}^{RL}D_t^\alpha u \right) (x, s) = s^\alpha (\mathcal{L}_t u)(x, s) - \left({}^{RL}D_t^{\alpha-1} u \right) (x, 0+) = s^\alpha (\mathcal{L}_t u)(x, s) - f(x). \quad (2.26)$$

Y por otro lado,

$$\left(\lambda \mathcal{L}_t \left({}^C D_x^\beta u \right) \right) (x, s) = \lambda (\mathcal{L} u_x)(x, s) = \lambda (\mathcal{L} u_x)(x, s). \quad (2.27)$$

De este modo igualando (2.26) y (2.27) se tiene

$$s^\alpha (\mathcal{L}_t u)(x, s) - f(x) = \lambda (\mathcal{L} u_x)(x, s).$$

Ahora aplicando la transformada de Fourier a la expresión anterior y considerando la fórmula (A.5) (véase Apéndice A) resulta, de un lado

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x \left\{ s^\alpha (\mathcal{L}_t u)(x, s) \right\} - (\mathcal{F}_x f)(k) &= s^\alpha (\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u)(k, s) - F(k), \\ &= \lambda (\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u_x)(k, s), \\ &= s^\alpha \hat{u}(k, s) - F(k). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Mientras que por otro lado

$$\mathcal{F}_x \left\{ \lambda (\mathcal{L} u_x)(x, s) \right\} = \lambda (\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u_x)(k, s) = \lambda (-ik)^\beta \hat{u}(k, s). \quad (2.29)$$

Igualando las ecuaciones (2.28) y (2.29) se deduce la relación explícita de $\widehat{u}(k, s)$ expresada de la siguiente manera

$$\widehat{u}(k, s) = \frac{F(k)}{s^\alpha - \lambda(-ik)^\beta}. \quad (2.30)$$

De este modo aplicando las transformadas de Fourier y de Laplace inversas definidas en las Definiciones 1.2.9 y 1.2.11, a la ecuación (2.30) y haciendo uso de la fórmula (B.11) (véase Apéndice B), con $\alpha = \beta$, $a = \lambda(-ik)^\beta$ y $m = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_s^{-1}\widehat{u})(k, t) &= \mathcal{L}_s^{-1}\left(\frac{F(k)}{s^\alpha - \lambda(-ik)^\beta}\right), \\ &= F(k)\mathcal{L}_s^{-1}\left(\frac{1}{s^\alpha - \lambda(-ik)^\beta}\right), \\ &= F(k)t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(-ik)^\beta t^\alpha). \end{aligned}$$

Por lo tanto, aplicando la transformada de Fourier inversa, resulta

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(-ik)^\beta t^\alpha) F(k) e^{-ikx} dk.$$

Nuevamente si ahora aplicamos primero la transformada de Fourier inversa y después la transformada de Laplace inversa a la ecuación (2.30), se tiene

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} ds \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(k)}{(s^\alpha - \lambda(-ik)^\beta)} e^{-ikx} dk.$$

□

Si consideramos que la función $f \in \bar{\mathcal{S}}$ (es decir, pertenezca al subespacio del espacio de Schwartz $\bar{\mathcal{S}}$ definido en la Definición 1.4.4, la solución dada en la expresión (2.25) puede escribirse en forma explícita como sigue.

Corolario 2.2.1. *Sea $f \in \bar{\mathcal{S}}$. Entonces, la solución $u(x, t) \in \mathcal{LF}$ del problema de Cauchy (2.21)-(2.22), con $0 < \alpha \leq 1$ asume la forma*

$$u(x, t) = t^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j + \alpha)} \left({}_0^C D_x^{\beta j} f \right) (x), \quad (2.31)$$

siempre que la serie sea convergente para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

Demostración. Si en la expresión (2.25) expresamos la función Mittag-Leffler mediante su representación en serie, dada en (B.2) (véase Apéndice B) e intercambiando los símbolos de integral con el de suma, siendo esto posible, gracias a la convergencia uniforme de la función Mittag, se tiene

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(-ik)^{\beta} t^{\alpha}) F(k) e^{-ikx} dk = \frac{t^{\alpha-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda(-ik)^{\beta} t^{\alpha})^j}{\Gamma(\alpha j + \alpha)} \right] F(k) e^{-ikx} dk, \\
&= t^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^{\alpha})^j}{\Gamma(\alpha j + \alpha)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-ik)^{\beta j} F(k) e^{-ikx} dk = t^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^{\alpha})^j}{\Gamma(\alpha j + \alpha)} \left({}^C_0 D_x^{\beta j} f \right) (x). \quad \square
\end{aligned}$$

Antes de proseguir con más resultados, enunciaremos una propiedad que resulta muy importante y que corresponde a la distribución de Lévy estable, de la cual se conoce su densidad de probabilidad explícita, la llamada distribución de Cauchy-Lorentz [64]

$$p_1(x, t, 0) = (\mathcal{F}_k^{-1}(e^{-t|k|}))(x, t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{t^2}{(x^2 + t^2)}, \quad (2.32)$$

y que será de gran utilidad en la demostración del siguiente resultado.

Corolario 2.2.2. *La solución $u(x, t) \in \mathcal{LF}$ del problema de Cauchy (2.21)-(2.22), con $\beta = 2$, $0 < \alpha \leq 1$, $f(x) = \delta(x)$ y $\lambda > 0$ esta dado por la siguiente expresión*

$$u(x, t) = \frac{t^{\frac{\alpha}{2}-1}}{2\lambda^{\frac{1}{2}}} W\left(-\frac{|x|}{(t^{\alpha}\lambda)^{\frac{1}{2}}}; -\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right), \quad (2.33)$$

en donde, $W(z; \alpha, \beta)$ es la función de Wright definida como en (B.12).

Demostración. Escribiendo la función Mittag-Leffler dada en la ecuación (2.25) mediante su representación integral (B.2) (véase Apéndice B), obtenemos

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda(-ik)^2 t^{\alpha}) e^{-ikx} dk, \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \frac{t^{\alpha-1}}{2\pi i} \int_{H_a} \frac{e^{\sigma}}{\sigma^{\alpha} + (\lambda^{\frac{1}{2}} k)^2 t^{\alpha}} d\sigma dk, \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} \frac{e^{\sigma} \sigma^{-\frac{\alpha}{2}} t^{\frac{\alpha}{2}-1}}{2\lambda^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \frac{\frac{\sigma^{\frac{\alpha}{2}}}{(t^{\alpha}\lambda)^{\frac{1}{2}}}}{\pi \left[\left(\frac{\sigma^{\frac{\alpha}{2}}}{(t^{\alpha}\lambda)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 + k^2 \right]} d\sigma dk.
\end{aligned}$$

Ahora notemos que para $\lambda > 0$, la expresión interna en la última integral es la transformada de Fourier de la función $\frac{\frac{\sigma^{\frac{\alpha}{2}}}{(t^{\alpha}\lambda)^{\frac{1}{2}}}}{\pi \left[\left(\frac{\sigma^{\frac{\alpha}{2}}}{(t^{\alpha}\lambda)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 + k^2 \right]}$, con respecto a la variable k , de la densidad de distribución

de probabilidad Lévy estable de Cauchy-Lorentz dada en (2.32), entonces podemos escribir

$$u(x, t) = \frac{t^{\frac{\alpha}{2}-1}}{2\lambda^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} \frac{e^{\sigma - \frac{|x|}{(t^{\alpha}\lambda)^{\frac{1}{2}}} \sigma^{\frac{\alpha}{2}}}}{\sigma^{\frac{\alpha}{2}}} d\sigma = \frac{t^{\frac{\alpha}{2}-1}}{2\lambda^{\frac{1}{2}}} W\left(-\frac{|x|}{(t^{\alpha}\lambda)^{\frac{1}{2}}}; -\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right),$$

para $0 < \alpha \leq 1$ y $\lambda > 0$. □

Finalmente como la condición inicial es la delta de Dirac, es de esperarse que para un cierto valor de $0 < \alpha \leq 1$, el resultado obtenido sea una distribución de probabilidad. Y aunque realmente este tipo de condiciones dadas en las expresiones (2.22) y (2.23) no son físicamente interpretables en la práctica, en la siguiente observación se da una posible solución a este tipo de problemas.

Observación 2.2.2. *Una posible solución a las relaciones (2.22) y (2.23) ha sido propuesta por el matemático eslovaco Igor Podlubny en un reciente artículo titulado “Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Differentiation” [34] en el que la interpretación física y geométrica que le da a estos operadores fraccionarios está basada en el empleo de dos tipos de tiempos, un tiempo cósmico y un tiempo individual (local), el cual está estrechamente relacionada con la teoría de la relatividad [60]. Otra interpretación física y geométrica de los operadores fraccionarios se da en [61].*

Irving Ezra Segal profesor de matemáticas del Instituto Tecnológico de Massachusetts en 1972 continuó el trabajo de A. Einstein, en el campo de la teoría de la Relatividad. Ezra Segal propuso una variante de la Teoría de la Relatividad, llamada Cronometría Cosmológica (CC), la cual está basada en el análisis del tiempo [62]. De acuerdo a la CC existen dos clases de tiempo: un tiempo Cómico, y un tiempo Local, donde éste último es medido con los instrumentos actualmente existentes [62, 63]. Este tiempo Local se modela usando una semirrecta con origen en cero y con puntos equidistantes. Mientras que el tiempo Cómico se modela de igual forma, pero ahora con puntos no equidistantes.

2.3. La ecuación de vibración de vigas

De acuerdo a lo estudiado en la sección anterior, emplearemos la misma técnica con la que se han construido los sistemas anteriores con el fin de buscar raíces cuadradas de otras ecuaciones de diferentes ordenes. En nuestro caso de la **Ecuación de vibración para vigas** que en su forma más simple se escribe como

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - \lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x, t) = 0, \quad (2.34)$$

y que puede generalizarse a su contraparte de orden fraccionario

$$(D_t^{2\alpha} u)(x, t) = \lambda^2 (D_x^{4\beta} u)(x, t), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad (2.35)$$

de modo que su raíz cuadrada represente una nueva interpolación entre las ecuaciones de difusión y de ondas clásicas para $0 < \alpha, \beta \leq 1$.

De este modo y por analogía con las ideas de la sección 2.2, una posible definición de **raíz cuadrada para la ecuación de vibración fraccionaria para vigas** se encuentra definida por medio de la siguiente expresión

$$\left(AD_t^\alpha + \lambda BD_x^{2\beta}\right) \psi(x, t) = 0, \quad \psi(x, t) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.36)$$

en donde, A y B son las matrices de Pauli que satisfacen las relaciones (2.7). En concreto, para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

la ecuación (2.36) nos conduce al siguiente sistema de ecuaciones (desacoplado)

$$\begin{cases} (D_t^\alpha u_1)(x, t) - \lambda(D_x^{2\beta} u_1)(x, t) = 0, & (2.38) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (D_t^\alpha u_2)(x, t) + \lambda(D_x^{2\beta} u_2)(x, t) = 0. & (2.39) \end{cases}$$

Mientras que si elegimos la pareja

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

se obtiene un sistema (acoplado)

$$\begin{cases} (D_t^\alpha u_1)(x, t) + \lambda(D_x^{2\beta} u_2)(x, t) = 0, & (2.41) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (D_t^\alpha u_2)(x, t) + \lambda(D_x^{2\beta} u_1)(x, t) = 0, & (2.42) \end{cases}$$

en el que las componentes u_1 y u_2 de ψ no están separadas.

Observación 2.3.1. *Notemos que si $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$. Entonces (2.38) y (2.39) se convierte en el sistema:*

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) u_1(x, t) = 0,$$

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) u_2(x, t) = 0,$$

en el cual cada componente de ψ debe satisfacer una ecuación de onda.

Y si $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, resulta que (2.38) y (2.39) se transforma en

$$(\partial_t - \partial_x^2)u_1(x, t) = 0,$$

$$(\partial_t - \partial_x^2)u_2(x, t) = 0,$$

en donde, cada componente de ψ debe satisfacer una ecuación de difusión.

Ahora de acuerdo con lo expuesto para la ecuación de difusión fraccionaria definida en (2.10), y tomando $0 < \alpha \leq 1$ y $\beta = 1$ en la ecuación (2.36), consideremos el siguiente problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} ({}^C D_0^\alpha u)(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \\ u(x, 0+) = g(x), \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = 0. \end{array} \right. \quad (2.43)$$

$$\quad \quad \quad (2.44)$$

$$\quad \quad \quad (2.45)$$

Observación 2.3.2. La condición (2.45) nos indicará que la solución del problema de Cauchy esta localizada. Si $g(x) = \delta(x)$ es la función delta de Dirac, entonces la solución del problema de Cauchy será llamada solución fundamental [65]. Esto, inevitablemente, nos permite hablar de los momentos para la solución fundamental.

2.3.1. Soluciones desacopladas de la ecuación de vibración de vigas

La ecuación (2.43) corresponde a una posible especificación de las ecuaciones (2.38) y (2.39) que componen el sistema de ecuaciones de componentes separadas en relación a la ecuación (2.36) con A y B definidas en (2.37).

Teorema 2.3.1. Dado el problema de Cauchy (2.43)-(2.45), con $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $G(k) = (\mathcal{F}_x g)(k)$, su solución $u(x, t) \in \mathcal{LF}$ está dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} s^{\alpha-1} ds \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(k)}{s^\alpha + \lambda k^2} e^{-ikx} dk, \quad \gamma = \text{Re}(s) > \nu, \quad (2.46)$$

ó en la forma equivalente,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\alpha,1}(-\lambda k^2 t^\alpha) G(k) e^{-ikx} dk, \quad (2.47)$$

siempre que las integrales existan.

Demostración. Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (2.43), utilizando la fórmula que proporciona la transformada de Laplace de la derivada parcial fraccionaria de Caputo cuando

$0 < \alpha < 1$ definida en (1.41) y teniendo en cuenta la condición (2.44), resulta

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t\{ {}^C D_t^\alpha u\}(x, s) &= \int_0^\infty e^{-st} ({}^C D_t^\alpha u)(x, s) dt, \\ &= s^\alpha (\mathcal{L}_t u)(x, s) - s^{\alpha-1} u^{(0)}(0), \\ &= s^\alpha (\mathcal{L}_t u)(x, s) - s^{\alpha-1} g(x).\end{aligned}$$

Y por consiguiente,

$$s^\alpha (\mathcal{L}_t u)(x, s) - s^{\alpha-1} g(x) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mathcal{L}_t u)(x, s). \quad (2.48)$$

Luego, aplicando la transformada de Fourier para derivadas enteras dada en la fórmula (A.5) (véase Apéndice A, página 74) al lado izquierdo de la ecuación (2.48), se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_x\{s^\alpha (\mathcal{L}_t u)(x, s) - s^{\alpha-1} g(x)\}(k, s) &= s^\alpha (\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u)(k, s) - s^{\alpha-1} (\mathcal{F}_x g)(k), \\ &= s^\alpha \hat{u}(k, s) - s^{\alpha-1} G(k).\end{aligned} \quad (2.49)$$

Y para el lado derecho de (2.48) tenemos

$$\mathcal{F}_x\left\{\lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mathcal{L}_t u)\right\}(k, s) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u)(k, s) = \lambda (-ik)^2 \hat{u}(k, s). \quad (2.50)$$

Igualando (2.49) y (2.50) se deduce la relación explícita para $\hat{u}(k, s)$

$$\hat{u}(k, s) = \frac{s^{\alpha-1} G(k)}{s^\alpha + \lambda k^2}. \quad (2.51)$$

Ahora, aplicando la transformada de Fourier inversa a la ecuación (2.51) resulta

$$\tilde{u}(x, s) = (\mathcal{F}_k^{-1}(\hat{u}))(x, s) = \frac{s^{\alpha-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(k)}{s^\alpha + \lambda k^2} e^{-ikx} dk.$$

Y por último aplicando la transformada de Laplace inversa a la ecuación anterior llegamos a

$$u(x, t) = \mathcal{L}_s^{-1}(\tilde{u}(x, s))(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} s^{\alpha-1} ds \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(k)}{s^\alpha + \lambda k^2} e^{-ikx} dk.$$

También se puede aplicar la transformada de Laplace inversa a la ecuación (2.51), luego utilizando la relación (B.11) (véase Apéndice B), con $\mu = -\lambda k^2$, $h = 0$ y $\beta = 1$, obtenemos

$$E_{\alpha,1}(-\lambda k^2 t^\alpha) = G(k) \mathcal{L}_s^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda k^2}\right\},$$

en donde,

$$\mathcal{L}_t\left\{E_{\alpha,1}(-(k\lambda^{1/2})^2 t^\alpha)\right\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda k^2}, \quad (2.52)$$

ó en forma equivalente

$$(\mathcal{F}_x u)(k, t) = G(k) E_{\alpha,1}(-\lambda k^2 t^\alpha). \quad (2.53)$$

Finalmente aplicando la transformada de Fourier inversa dada en la Definición 1.2.11 a la ecuación (2.53) obtenemos

$$u(x, t) = (\mathcal{F}_k^{-1} \mathcal{F}_x u)(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\alpha,1}(-\lambda k^2 t^\alpha) G(k) e^{-ikx} dk.$$

□

En el caso de que $g(x)$ pertenezca al subespacio del espacio de Schwartz $\bar{\mathcal{S}}$ definido en la Definición 1.4.4, entonces puede escribirse en forma implícita, mediante la función especial de Mittag-Leffler, el siguiente resultado.

Corolario 2.3.1. *Sea $g(x) \in \bar{\mathcal{S}}$. Entonces la solución $u(x, t) \in \mathcal{LF}$ del problema de Cauchy (2.43)-(2.45) toma la forma*

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^{1/2} t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} g^{(2k)}(x). \quad (2.54)$$

Demostración. Teniendo en cuenta la representación (B.3) (véase Apéndice B, página 75) e intercambiando el signo de la integración con el de suma en (2.47) (lo que es posible gracias a la convergencia uniforme de la serie que representa la función de Mittag-Leffler), podemos escribir

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\alpha,1}(-\lambda k^2 t^\alpha) G(k) e^{-ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((i\lambda^{1/2} k)^2 t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} G(k) e^{-ikx} dk, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^{1/2} t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (ik)^{2k} G(k) e^{-ikx} dk = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^{1/2} t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} g^{2k}. \end{aligned} \quad \square$$

2.3.2. Soluciones fundamentales del sistema desacoplado

En esta sección se busca la solución fundamental del problema de Cauchy (2.43)-(2.45) cuando $g(x) = \delta(x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} ({}^C D_0^\alpha u)(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \end{array} \right. \quad (2.55)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0+) = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{array} \right. \quad (2.56)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = 0. \end{array} \right. \quad (2.57)$$

El primer resultado que se anuncia es un corolario del Teorema 2.3.1 y representa la solución del problema de Cauchy (2.55)-(2.57) obtenida con el método de la transformada de Fourier y de Laplace.

Corolario 2.3.2. *La solución fundamental $u(x, t) \in \mathcal{LF}$ del problema (2.55)-(2.57) está dada por*

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} s^{\alpha-1} ds \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s^{\alpha} + \lambda k^2} e^{-ikx} dk, \quad \gamma = \operatorname{Re}(s) > \nu, \quad (2.58)$$

ó en la forma equivalente,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\alpha,1}(-\lambda k^2 t^{\alpha}) e^{-ikx} dk, \quad (2.59)$$

siempre que las integrales existan.

Demostración Haciendo $G(k) = 1$ en (2.46) y (2.47), obtenemos la solución fundamental del problema de Cauchy (2.55)-(2.57) en las dos formas.

El lema siguiente nos proporciona un resultado que será de gran utilidad en la de demostración del teorema que daremos en seguida de este resultado.

Lema 2.3.1. *Sea la siguiente función*

$$z(x, t) = \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\lambda^{1/2}}{2} e^{st} s^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{\left(\frac{s^{\alpha}}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} x}, \quad \lambda > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (2.60)$$

entonces se tiene la siguiente identidad

$$z(x, t) = -\frac{\lambda^{1/2}}{2t^{\frac{\alpha}{2}}} W\left(\frac{x}{(\lambda t^{\alpha})^{1/2}}; -\frac{\alpha}{2}; 1 - \frac{\alpha}{2}\right),$$

en donde, $W(z; \alpha, \beta)$ es una función de Wright dada en la expresión (B.12).

Demostración. Para simplificar la expresión dada en (2.60), se desarrolla en serie de Taylor la función exponencial $e^{\left(\frac{s^{\alpha}}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} x}$, luego intercambiando el orden de los signos de integración con el de suma (siendo esto posible gracias a la convergencia uniforme de la serie exponencial), obtenemos

$$\begin{aligned} z(x, t) &= \frac{i}{2\pi} \frac{\lambda^{1/2}}{2} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} s^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{\left(\frac{s^{\alpha}}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} x}, \\ &= \frac{i}{2\pi} \frac{\lambda^{1/2}}{2} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} s^{\frac{\alpha}{2}-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda^{1/2}}\right)^n \frac{1}{n!} s^{\frac{n\alpha}{2}}, \\ &= -\frac{\lambda^{1/2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda^{1/2}}\right)^n \frac{1}{n!} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} s^{\frac{\alpha n + \alpha}{2} - 1} e^{st} ds, \quad \gamma \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aplicando la sustitución $st = \sigma$, transformando el contorno de Hankel y utilizando la representación de la función gama sobre dicho contorno definida en la ecuación (B.6) (véase Apéndice B, página 76), resulta

$$\begin{aligned} z(x, t) &= -\frac{\lambda^{1/2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda^{1/2}}\right)^n \frac{1}{n!} \int_C \frac{\sigma^{\frac{\alpha n + \alpha}{2} - 1}}{t^{\frac{\alpha n + \alpha}{2}}} e^{\sigma} d\sigma, \\ &= -\frac{\lambda^{1/2}}{2t^{\frac{\alpha}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{(\lambda t^{\alpha})^{\frac{1}{2}}}\right)^n \frac{1}{n!} \int_C \sigma^{\frac{\alpha n + \alpha}{2} - 1} e^{\sigma} d\sigma, \\ &= -\frac{\lambda^{1/2}}{2t^{\frac{\alpha}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha n}{2} - \frac{\alpha}{2} + 1)n!} \left(\frac{x}{(\lambda t^{\alpha})^{\frac{1}{2}}}\right)^n. \end{aligned}$$

Además tomando en cuenta la fórmula (B.12) (véase Apéndice B) deducimos la siguiente expresión explícita de $z(x, t)$ en términos de la función de Wright

$$z(x, t) = -\frac{\lambda^{1/2}}{2t^{\frac{\alpha}{2}}} W\left(\frac{x}{(\lambda t^{\alpha})^{\frac{1}{2}}}; -\frac{\alpha}{2}; 1 - \frac{\alpha}{2}\right), \quad (2.61)$$

válida para $0 < \alpha < 1$, que está en acuerdo con la propiedad (B.14) (véase Apéndice B) de la Proposición B.3.1 (véase Apéndice B). \square

Ahora usaremos el Lema 2.3.1 y el teorema de los residuos para evaluar la integral interna en la expresión (2.58) y llegar a una forma explícita para la solución fundamental $u(x, t)$ cuando $\alpha \neq 1$.

Teorema 2.3.2. *La solución fundamental $u(x, t) \in \mathcal{LF}$ del problema de Cauchy (2.55)-(2.57) cuando $\alpha \neq 1$, tiene la forma*

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ \frac{\lambda^{1/2}}{2t^{\alpha/2}} W\left(\frac{x}{(\lambda t^{\alpha})^{1/2}}; -\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right), & x \leq 0, \end{cases} \quad (2.62)$$

para $\lambda > 0$, y

$$u(x, t) = \begin{cases} -\frac{\lambda^{1/2}}{2t^{\alpha/2}} W\left(\frac{x}{(\lambda t^{\alpha})^{1/2}}; -\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (2.63)$$

para $\lambda < 0$.

Demostración. Notando que la integral interna (2.58) tiene polos en $k = \pm i\left(\frac{s^{\alpha}}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$ entonces si

$x < 0$, está puede escribirse de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s^\alpha + \lambda k^2} e^{-ikx} dk &= 2\pi i \operatorname{Res}_{k=i\left(\frac{s^\alpha}{\lambda}\right)^{1/2}} \left[\frac{1}{s^\alpha + k^2 \lambda} e^{-ikx} \right], \\ &= 2\pi i \left[\frac{\lambda^{1/2} e^{\left(\frac{s^\alpha}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} x}}{2i s^{\alpha/2}} \right]. \end{aligned}$$

De este modo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s^\alpha + \lambda k^2} e^{-ikx} dk = \begin{cases} \frac{\pi \lambda^{1/2} e^{\left(\frac{s^\alpha}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} x}}{s^{\alpha/2}}, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0, \end{cases}$$

mientras que para $x > 0$, se tiene,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s^\alpha + \lambda k^2} e^{-ikx} dk &= -2\pi i \operatorname{Res}_{k=i\left(\frac{s^\alpha}{\lambda}\right)^{1/2}} \left[\frac{1}{s^\alpha + k^2 \lambda} e^{-ikx} \right], \\ &= -2\pi i \left[-\frac{\lambda^{1/2} e^{\left(\frac{s^\alpha}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} x}}{2i s^{\alpha/2}} \right]. \end{aligned}$$

Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s^\alpha + \lambda k^2} e^{-ikx} dk = \begin{cases} 0, & \lambda > 0, \\ -\frac{\pi \lambda^{1/2} e^{\left(\frac{s^\alpha}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} x}}{s^{\alpha/2}}, & \lambda < 0, \end{cases}$$

sustituyendo estas expresiones en (2.58), llegamos a escribir la solución del problema (2.55), (2.56) como sigue

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ -\frac{i}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\lambda^{1/2}}{2} e^{st} s^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{\left(\frac{s^\alpha}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} x}, & x < 0, \end{cases} \quad (2.64)$$

para $\lambda > 0$, mientras que para $\lambda < 0$, resulta

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\lambda^{1/2}}{2} e^{st} s^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{\left(\frac{s^\alpha}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (2.65)$$

estás fórmulas demuestran que el problema (2.55) tiene solución fundamental nula $u(x, t) = 0$ para los casos $x > 0, \lambda > 0$ y $x < 0, \lambda < 0$.

Por consiguiente sustituyendo $z(x, t)$ dada en la expresión (2.61), en las expresiones (2.64) y (2.65) estas asumen la siguiente forma

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ \frac{\lambda^{1/2}}{2t^{\alpha/2}} W\left(\frac{x}{(\lambda t^\alpha)^{1/2}}; -\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right), & x < 0, \end{cases}$$

$$u(x, t) = \begin{cases} -\frac{\lambda^{1/2}}{2t^{\alpha/2}} W\left(\frac{x}{(\lambda t^\alpha)^{1/2}}; -\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right), & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

para $\lambda > 0$ y $\lambda < 0$, respectivamente. \square

Observación 2.3.3. *A fin de determinar el valor de las soluciones en $x = 0$, punto en el cual se pierde el carácter analítico, hay que imponer la condición inicial $u(x, 0) = \delta(x)$. Para que tal condición se verifique, $u(x, t)$ tendrá que tomar la forma de las expresiones (2.62) y (2.63). De modo que si se utiliza la representación integral de la función de Wright dada en (B.12) (véase Apéndice B) sobre el contorno de Hankel, se puede evaluar $u(x, 0)$ como*

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} \frac{e^\sigma}{(\lambda t^\alpha)^{1/2} \sigma^{1-\frac{\alpha}{2}}} e^{\frac{x\sigma^{\alpha/2}}{(\lambda t^\alpha)^{1/2}}} d\sigma \Big|_{t=0}, & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ +\infty, & x = 0, \end{cases}$$

si $\lambda > 0$, mientras que para $\lambda < 0$, resulta

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} \frac{e^\sigma}{(\lambda t^\alpha)^{1/2} \sigma^{1-\frac{\alpha}{2}}} e^{\frac{x\sigma^{\alpha/2}}{(\lambda t^\alpha)^{1/2}}} d\sigma \Big|_{t=0}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Las superficies solución de las expresiones (2.62) y (2.63) se muestran en la Figura 2.2.

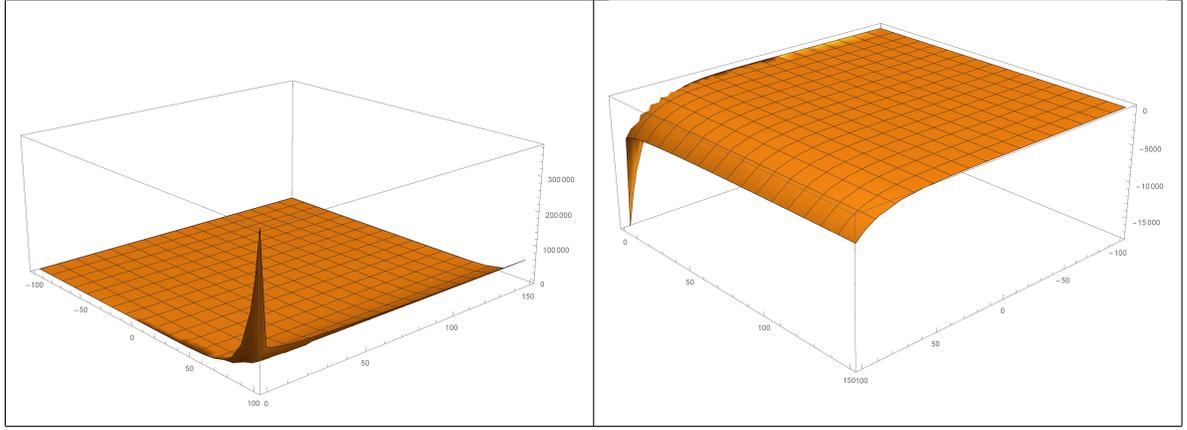


Figura 2.2: Superficies de la solución fundamental del problema de Cauchy (2.55)-(2.57), con $x = \pm 100$, $\alpha = 0.02$ y $\lambda = 100$.

En el Teorema que sigue se proporcionan los momentos de la solución fundamental de $u(x, t)$.

Para ello, antes de seguir vamos a introducir la siguiente función

$$u(x, t; \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\alpha,1}(-\lambda k^2 t^\alpha) e^{-ikx} dk, \quad (2.66)$$

que serán de utilidad para los desarrollos posteriores. Y también la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n u(x, t; \alpha, \beta) dx = (-i)^n \left[\frac{\partial^n}{\partial k^n} (\mathcal{F}_x u)(k, t) \right]_{k=0}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.67)$$

De esta manera, el siguiente resultado nos proporciona los momentos de la solución fundamental $u(x, t)$ del problema de Cauchy (2.55)-(2.57), sólo cuando n es un número par.

Teorema 2.3.3. *Los momentos de la solución fundamental $u(x, t) \in \mathcal{LF}$ del problema (2.55)-(2.57) valen*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n u(x, t) dx = (-i\lambda^{1/2} t^\alpha)^{2n} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \quad n = 0, 2, 4, \dots$$

Demostración. Los momentos de la solución fundamental del problema (2.55)-(2.57), se calculan aplicando la relación (2.67), (2.53) y teniendo en cuenta la expresión de la función Mittag-Leffler en forma de suma (expresión (B.3)).

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x^n u(x, t) dx &= (-i)^n \left[\frac{\partial^n}{\partial k^n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i^2(\lambda^{1/2}k)^2)^j t^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j + 1)} \right]_{k=0}, \\
&= (-i)^n \left[\sum_{j=n}^{\infty} \frac{(i\lambda^{1/2})^{2j} (k^2)^{j-n} t^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j + 1)} \frac{\Gamma(j + 1)}{\Gamma(j - n + 1)} \right]_{k=0}, \\
&= \frac{(-i)^n (i\lambda^{1/2})^{2n} t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} \Gamma(n + 1), \\
&= (-i\lambda^{1/2} t^\alpha)^{2n} \frac{\Gamma(n + 1)}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \quad n = 0, 2, 4, \dots \quad \square
\end{aligned}$$

2.3.3. Soluciones acopladas de la ecuación de vibración de vigas

Como consecuencia del Teorema 2.2.1, vamos a obtener las soluciones u_1^* y u_2^* del sistema de ecuaciones de componentes acopladas (2.41) y (2.42) cuando $D_t^\alpha = ({}^C D_t^\alpha)$ y $D_x^\beta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. A saber

$$\begin{cases} ({}^C D_t^\alpha u_1^*)(x, t) + \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_2^*(x, t) = 0, & 0 < \alpha \leq 1, \\ ({}^C D_t^\alpha u_2^*)(x, t) + \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1^*(x, t) = 0, \end{cases} \quad (2.68)$$

$$\begin{cases} ({}^C D_t^\alpha u_1^*)(x, t) + \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_2^*(x, t) = 0, \\ ({}^C D_t^\alpha u_2^*)(x, t) + \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1^*(x, t) = 0, \end{cases} \quad (2.69)$$

junto con las condiciones iniciales y de frontera

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_1^*(x, t) = 0, \quad u_1^*(x, 0+) = g(x), \quad t > 0, \quad (2.70)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_2^*(x, t) = 0, \quad u_2^*(x, 0+) = g(x), \quad t > 0. \quad (2.71)$$

Si indicamos con $u_1(x, t) = u_1^\lambda$ a la solución de la ecuación (2.43), entonces la solución para la ecuación

$$({}^C D_t^\alpha u_2)(x, t) = -\lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1(x, t),$$

será

$$u_2(x, t) = u_1^{-\lambda}(x, t),$$

ó bien

$$u_2(x, t) = u_1^{-\lambda}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\alpha,1}(\lambda k^2 t^\alpha) G(k) e^{-ikx} dk.$$

Corolario 2.3.3. *Dados los problemas de Cauchy (2.68), (2.70) y (2.69), (2.71) con $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $G(k) = (\mathcal{F}_x g)(k)$, las soluciones $u_1^* \in \mathcal{LF}$ y $u_2^* \in \mathcal{LF}$ están dadas por*

$$u_1^*(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{2\alpha, 1}(\lambda^2 k^4 t^{2\alpha}) e^{-ikx} G(k) dk, \quad (2.72)$$

$$u_2^*(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda k^2 t^\alpha) E_{2\alpha, \alpha+1}(\lambda^2 k^4 t^{2\alpha}) e^{-ikx} G(k) dk, \quad (2.73)$$

siempre que las integrales existan.

Demostración. Como $u_2(x, t) = u_1^{-\lambda}$ y $u_1(x, t) = u_1^\lambda$, entonces podemos expresar u_1 y u_2 de la siguiente manera

$$u_1(x, t) = u_1^\lambda(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} E_{\alpha, 1}(-\lambda k^2 t^\alpha) G(k) dk,$$

$$u_2(x, t) = u_1^{-\lambda}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} E_{\alpha, 1}(\lambda k^2 t^\alpha) G(k) dk.$$

Además, observando que las expresiones que están en términos de la función Mittag-Leffler se pueden expresar, como

$$E_{\alpha, 1}(-\lambda k^2 t^\alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\lambda k^2 t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j + 1)},$$

$$E_{\alpha, 1}(\lambda k^2 t^\alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda k^2 t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j + 1)}.$$

Entonces, haciendo uso de la fórmula de duplicación dada en la expresión (B.5) (véase Apéndice B, página 76) y del teorema de acoplación 2.2.1, obtenemos el resultado. \square

La superficie solución para la expresión (2.72) se muestra en la Figura 2.3.

2.4. Estudio de la ecuación de vibración de vigas usando la transformada de Fokas

En 1967 un nuevo método llamado método de la transformada de dispersión inversa (IST) se introdujo para resolver problemas de valor inicial para ciertas ecuaciones en derivadas parciales no lineales, incluyendo la ecuación célebre de Korteweg de Vries y la de Schrödinger. La extensión de este método (IST) para problemas de valores iniciales y de frontera, fue lograda por Fokas en 1997, introduciendo un método unificado para la resolver problemas de valor inicial y de frontera no lineales integrables y EDP lineales [68].

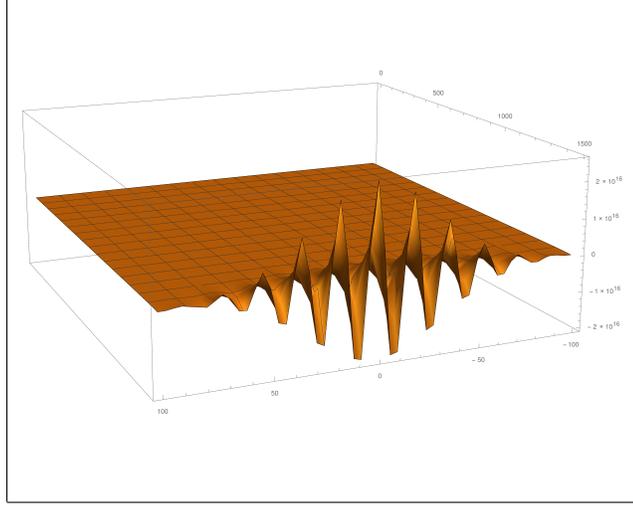


Figura 2.3: Superficie de la solución del Corolario 2.3.3, con $-100 \leq x \leq 100$, $t = 1500$ y $\alpha = 0.5$

Este método es más general que los métodos clásicos, debido a que podemos encontrar una representación integral como solución a problemas en los que los métodos clásicos no se pueden aplicar. Esto es particularmente claro para problemas que contienen derivadas superiores. Además para aquellos casos en los que un método clásico produce una solución explícita, el método de Fokas también lo hace y nos permite determinar de manera directa cuántas y cuales condiciones de frontera son necesarias para que el problema este bien planteado.

En esta sección analizaremos problemas de Cauchy para el sistema de ecuaciones desacoplado (2.38) y (2.39), solo que en este caso consideraremos las ecuaciones en la semi-recta (\mathbb{R}^+). Resulta ser que en este caso no es posible usar la transformada de Fourier, ya que solo esta definida sobre todo \mathbb{R} . Y aunque se podrian usar las transformadas del seno o coseno en su lugar, utilizaremos una modificación del método de Fokas para resolver ecuaciones en diferenciales parciales a través de la transformada que lleva su nombre.

A continuación definimos la transformada de Fokas, la cual es una especie de generalización de la transformada de Fourier en algún sentido.

Definición 2.4.1. [69] Sea $u(x, t)$ suave y con decaimiento suficiente definida en $(0, \infty) \times (0, \infty)$. Entonces la transformada de Fokas esta dado mediante la expresión

$$\widehat{u}(k, t) := \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} u(x, t) dx, \quad \text{Im}(k) \leq 0, \quad (2.74)$$

y su transformada inversa a través de

$$u(x, t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \widehat{u}(k, t) dk. \quad (2.75)$$

Esta transformada esta bien definida si $|u(x, t)| \leq Me^{\nu t}$ con $\nu < \text{Im}(k)$.

Antes de iniciar con el estudio de problemas de Cauchy en \mathbb{R}^+ , enunciaremos dos resultados que serán de importancia en los análisis de dichos problemas.

Lema 2.4.1. *Sea $u(x, t)$ una función suave y β un número real positivo. Entonces la transformada de Fokas del operador integral fraccionario de Riemann-Liouville para la función $u(x, t)$ esta dado de la siguiente manera*

$$\widehat{I}^\beta u(k, t) = \frac{1}{(ik)^\beta} \widehat{u}(k, t). \quad (2.76)$$

Demostración. Notemos que la integral fraccionaria de Riemann-Liouville, $I_0^\beta u(x, t)$ dada en la Definición 1.3.1, se puede escribir, haciendo uso del teorema de convolución definido en el Teorema 1.4.1, como

$$I_0^\beta u(x, t) = J_\beta(x) * u(x, t),$$

en donde, $J_\beta(x)$ esta dada en la fórmula (1.38). Luego haciendo $ik = s$ en la ecuación (2.74) y teniendo en cuenta que la transformada de una convolución es el producto de las transformadas (véase Teorema 1.4.2) se tiene

$$\widehat{I}^\beta u(k, t) = \widehat{J}_\beta(k) \cdot \widehat{u}(k, t), \quad (2.77)$$

en donde,

$$\widehat{J}_\beta(k) = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} dx = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty e^{-sx} x^{\beta-1} dx. \quad (2.78)$$

A través del cambio de variable $w = sx$ la ecuación (2.78) se escribe como

$$\widehat{J}_\beta(k) = \frac{1}{(s)^\beta \Gamma(\beta)} \int_0^\infty e^{-w} w^{\beta-1} dw = \frac{1}{(ik)^\beta}. \quad (2.79)$$

Luego sustituyendo la ecuación (2.79) en (2.77), obtenemos

$$\widehat{I}^\beta u(k, t) = \widehat{J}_\beta(k) \cdot \widehat{u}(k, t) = \frac{1}{(ik)^\beta} \widehat{u}(k, t).$$

□

Observación 2.4.1. *Notemos que el factor $\frac{1}{(ik)^\beta}$ con $\beta > 0$ es una función multivaluada, por lo que debe especificarse una rama analítica adecuada.*

Lema 2.4.2. Dada una función $u(x, t) \in C^{n-1}(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{F}(\mathbb{R}^+)$, $\beta > 0$, tal que $n - 1 < \beta \leq n$, con $n \in \mathbb{N}$, para la cual existe la transformada de Fokas con respecto a x , entonces se cumple

$$\int_0^{\infty} e^{-ikx} ({}^{RL}D^{\beta}u(x, t)) dx = (ik)^{\beta} \widehat{u}(k, t) - \sum_{j=0}^{n-1} (ik)^j (D^{n-j-1} {}^{RL}I^{n-\beta}u)(0, t),$$

ó de forma equivalente

$$\int_0^{\infty} e^{-ikx} ({}^{RL}D^{\beta}u(x, t)) dx = (ik)^{\beta} \widehat{u}(k, t) - \sum_{j=0}^{n-1} (ik)^j ({}^{RL}D^{\beta-j-1}u)(0, t).$$

Demostración. Haciendo $ik = s$ y cambiando a t por x en la expresión (1.40) de la Proposición 1.4.2, obtenemos el resultado, ya que $u(x, t)$ es una función de orden exponencial ν y se cumple que $\text{Im } s > \nu$. \square

En lo que sigue consideraremos la rama analítica de la función k^{β} , definida por

$$k^{\beta} = |k|^{\beta} e^{i \arg(k)}, \quad 0 \leq \arg(k) < 2\pi,$$

en donde, $\arg(k)$ es el argumento principal de k .

Es bien conocido que dada una ecuación de evolución se requiere una cantidad suficiente de datos y/o condiciones en la frontera para que el correspondiente problema de Cauchy este bien planteado. A continuación escribimos una receta de cómo saber cuántas y de que orden deben ser las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville en un problema de Cauchy.

Consideremos $\alpha = 1$ y $\beta > 1/2$, entonces a partir de la ecuación (2.36) con $D_x^{2\beta}$ la derivada de Riemann-Liouville y $D_t^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial t}$, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = {}^{RL}D_x^{\beta} u(x, t), \quad x, t > 0, \quad (2.80)$$

la cual es una posible especificación de las ecuaciones (2.38) y (2.39) que componen el sistema de ecuaciones de componentes desacopladas en relación a la ecuación (2.36) con A y B definidas en (2.37). Y consideremos la condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (2.81)$$

El Lema 2.4.2 nos permite determinar que se necesitan n condiciones de frontera de acuerdo a la suposición de que $n - 1 < \beta \leq n$, $n \in \mathbb{N}$.

Es de resaltar que tales condiciones involucran derivadas de orden fraccionario del tipo Riemann-Liouville. Supongamos que asignamos funciones (datos) $g_j(t)$ suaves a las condiciones de frontera a

$D^{\beta-j-1}u(0, t)$, dadas por

$${}^{RL}D_x^{\beta-1}u(0, t) = g_0(t), \quad j = 0, \quad (2.82)$$

$${}^{RL}D_x^{\beta-2}u(0, t) = g_1(t), \quad j = 1, \quad (2.83)$$

\vdots

$${}^{RL}D_x^{\beta-j-1}u(0, t) = I^{1+j-\beta}u(0, t) = g_j(t), \quad j = 2, \dots, n-1, \quad (2.84)$$

en donde, la derivada parcial fraccionaria de Riemann-Liouville es como la definida en (1.19). A este tipo de problemas constituido por (2.80)-(2.84) les llamaremos **problemas de Cauchy generalizados**.

Observación 2.4.2.

1. Notemos que la condición (2.84) ocurre cuando $j = n - 1$, ya que en este caso resulta que $\beta - n < 0$, y por lo tanto, se tiene que ${}^{RL}D_x^{\beta-n} = {}^{RL}I_x^{n-\beta}$ (véase ecuación (1.15)).

2. Las condiciones que aparecen en (2.82)-(2.84) son todas necesarias cuando $2 < \beta \leq 3$ para $j = 0, 1, 2$. Mientras que sólo se necesitan las condiciones (2.82) y (2.84) cuando $1 < \beta \leq 2$ para $j = 0, 1$. Y sólo es necesaria la condición (2.84) para el caso $0 < \beta \leq 1$.

En general, si $n - 1 < \beta \leq n$ se requieren $n - 1$ condiciones de frontera para tener un problema de Cauchy generalizado bien planteado.

2.4.1. Problema de Cauchy generalizado para $1/2 < \beta \leq 1$

Si $1/2 < \beta \leq 1$ entonces β se encuentra entre cero y uno. Luego (2.84) implica que solo se requiere la condición de frontera

$${}^{RL}D_x^{\beta-1}u(x, t) = g_0(t). \quad (2.85)$$

Teorema 2.4.1. Dada la ecuación (2.80) con condición inicial (2.81) y condición de frontera (2.85). La solución a este problema de Cauchy generalizado esta dada por

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^+} G_1(x, t, y)u_0(y)dy + \int_0^t G_2(x, t, y)g_0(s)ds,$$

en donde,

$$G_1(x, t, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ik(x-y)+(ik)^\beta t} dk, \quad G_2(x, t, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+ \cup \gamma_1} e^{ikx+(ik)^\beta(t-s)} dk.$$

Demostración. Derivando la expresión (2.74) respecto de t obtenemos

$$\widehat{u}_t(k, t) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} u_t(x, t) dx. \quad (2.86)$$

Luego sustituyendo la ecuación (2.80) en (2.86) tenemos

$$\widehat{u}_t(k, t) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} u_t(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} {}^{RL}D_x^\beta u(x, t) dx.$$

Ahora integrando por partes, usando la relación ${}^{RL}D_x^\beta u(x, t) = D^n I^{n-\beta} u(x, t)$ (véase expresión (1.15)), y el decaimiento de $u(x, t)$ hacia cero cuando $x \rightarrow \infty$, se tiene

$$\widehat{u}_t(k, t) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} D_x^n I^{n-\beta} u(x, t) dx = -D_x I^{n-\beta} u(0, t) + ik \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} I^{n-\beta} u(x, t) dx.$$

Notando que la última integral es la transformada de Fokas de $I^{n-\beta} u(x, t)$, luego en virtud del Lema 2.4.1 y la condición de frontera (2.85), obtenemos

$$\widehat{u}_t(k, t) = -g_0(t) + (ik)^\beta \widehat{u}(k, t). \quad (2.87)$$

Multiplicando por el factor integrante $e^{-(ik)^\beta t}$, en donde ya se eligió la rama analítica adecuada para $(ik)^\beta$, e integrando por partes en la ecuación (2.87) tenemos, por un lado

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-(ik)^\beta s} \widehat{u}_s(k, s) ds &= \int_0^t e^{-(ik)^\beta s} d\widehat{u}(k, s) = e^{-(ik)^\beta t} \widehat{u}(k, t) - \widehat{u}(k, 0) + (ik)^\beta \int_0^t e^{-(ik)^\beta s} \widehat{u}(k, s) ds, \\ &= e^{-(ik)^\beta t} \widehat{u}(k, t) - \widehat{u}_0(k) + (ik)^\beta \int_0^t e^{-(ik)^\beta s} \widehat{u}(k, s) ds, \end{aligned}$$

en donde, hemos usado la condición inicial (2.81).

Es decir,

$$\int_0^t e^{-(ik)^\beta s} \widehat{u}_s(k, s) ds = e^{-(ik)^\beta t} \widehat{u}(k, t) - \widehat{u}_0(k) + (ik)^\beta \int_0^t e^{-(ik)^\beta s} \widehat{u}(k, s) ds. \quad (2.88)$$

Y por el otro lado

$$- \int_0^t e^{-(ik)^\beta s} g_0(s) ds + (ik)^\beta \int_0^t e^{-(ik)^\beta s} \widehat{u}(k, s) ds, \quad (2.89)$$

De esta forma de las ecuaciones (2.88) y (2.89), obtenemos la siguiente relación

$$e^{-(ik)^\beta t} \widehat{u}(k, t) = \widehat{u}_0(k) - \tilde{g}_0(-(ik)^\beta, t), \quad \text{Im}(k) \leq 0, \quad (2.90)$$

en donde,

$$\tilde{g}_j(k, t) = \int_0^t e^{ksRL} D_x^{\beta-j-1} u(0, s) ds, \quad j = 0, \quad \text{Im}(k) \leq 0. \quad (2.91)$$

Ahora (2.90), implica

$$\hat{u}(k, t) = e^{(ik)^\beta t} \hat{u}_0(k) - e^{(ik)^\beta t} \tilde{g}_0(-(ik)^\beta, t).$$

de donde aplicando la transformada inversa de Fokas definida en la ecuación (2.75), se tiene una expresión integral para $u(x, t)$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - (ik)^\beta t} \hat{u}_0(k) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - (ik)^\beta t} \tilde{g}_0(-(ik)^\beta, t) dk, \quad (2.92)$$

en donde, $\text{Re}(ik) < 0$ y $\text{Re}(-(ik)^\beta) > 0$ para que las integrales existan, ya que $x > 0$ y $t > 0$.

A continuación realizaremos un análisis detallado para determinar en donde son seccionalmente analíticos los integrandos de cada integral que aparece en la representación de la solución $u(x, t)$. Esto con el fin de asegurar la existencia de tales integrales. Y lo más importante es que deformaremos los límites de integración sobre todo \mathbb{R} a una curva adecuada en el plano complejo.

Si $k = k_{\mathbb{R}} + ik_{\mathbb{I}}$ entonces $ik = ik_{\mathbb{R}} - k_{\mathbb{I}}$. Luego, e^{ikx} tiene decaimiento si $k_{\mathbb{I}} > 0$ pues $x > 0$.

Por otro lado, $e^{-(ik)^\beta t}$ tendrá decaimiento si $\text{Re}(-(ik)^\beta) > 0$ puesto que $t > 0$.

Sea $D := \{k \in \mathbb{C} : \text{Re}(-(ik)^\beta) < 0\}$. Además, sea $D^+ := D \cap \mathbb{C}^+$ y $D^- := D \cap \mathbb{C}^-$, en donde $\mathbb{C}^+ := \{k \in \mathbb{C} : \text{Im}(k) > 0\}$ y $\mathbb{C}^- := \{k \in \mathbb{C} : \text{Im}(k) < 0\}$. Luego si $0 \leq \arg(k) < 2\pi$, entonces

$$\begin{aligned} -(ik)^\beta &= |k|^\beta \left[\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \cos(\beta \arg(k)) + \text{sen}\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \text{sen}(\beta \arg(k)) \right] \\ &\quad - i \left[\text{sen}\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \cos(\beta \arg(k)) + \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \text{sen}(\beta \arg(k)) \right]. \end{aligned}$$

Que $\text{Re}(-(ik)^\beta) < 0$ es equivalente a escribir que $\cos\left(\beta \arg(k) + \frac{\beta\pi}{2}\right) < 0$. Ahora si β es de la forma $\beta = \frac{n}{n+1}$, con $n > 1$, encontramos una región D , dada por

$$D = \left\{ k \in \mathbb{C} : \arg(k) \in \left(0, \frac{2\pi}{n}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2n}(2n+3), 2\pi\right) \right\},$$

es decir, D son todos los números complejos k cuyo argumento hace que $\text{Re}(-(ik)^\beta) < 0$, (véase Figura 2.4).

Luego, haciendo el cambio de variable $k \rightarrow -k$ en la expresión (2.90), encontramos que ahora esta es válida cuando $\text{Im}(k) \geq 0$. Además el integrando de la segunda integral en (2.92) es entera y tiene

decaimiento cuando $k \rightarrow \infty$ para $k \in \mathbb{C}^+ \setminus D^+$. Ahora, consideremos el contorno $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ como se muestra en la Figura 2.4. Usando la analiticidad del integrando $e^{ikx - (ik)^\beta t} \tilde{g}_0(-ik)^\beta, t$, obtenemos por el teorema de Cauchy

$$\int_{\Gamma} e^{ikx - (ik)^\beta t} \tilde{g}_0(-ik)^\beta, t dk = \left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} \right) e^{ikx - (ik)^\beta t} \tilde{g}_0(-ik)^\beta, t dk = 0.$$

En virtud del lema de Jordan resulta que la integral a lo largo de γ_3 desaparece debido al decaimiento de la función $e^{ikx - (ik)^\beta t}$ en la región $\mathbb{C}^+ \setminus D^+$. De este modo, obtenemos que la integral a lo largo de la línea real puede ser reemplazada por $\partial D^+ \cup \gamma_1$.

Por lo tanto, integrando sobre $\partial D^+ \cup \gamma_1$ (véase Figura 2.4) en la segunda integral de la expresión (2.92), obtenemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - (ik)^\beta t} \hat{u}_0(k) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+ \cup \gamma_1} e^{ikx - (ik)^\beta t} \tilde{g}_0(-ik)^\beta, t dk,$$

ó bien de la forma

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^+} G_1(x, t, y) u_0(y) dy + \int_0^t G_2(x, t - s) g_0(s) ds,$$

en donde,

$$G_1(x, t, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ik(x-y) - (ik)^\beta t} dk, \quad G_2(x, t - s) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+ \cup \gamma_1} e^{ikx + (ik)^\beta (s-t)} dk. \quad \square$$

2.4.2. Ejemplo: $\beta = \frac{2}{3}$

A manera de ejemplo, consideremos el problema de Cauchy generalizado

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t(x, t) = {}^{RL}D_x^{\frac{2}{3}} u(x, t), \quad x, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+ \\ {}^{RL}D_x^{-\frac{1}{3}} u(0, t) = g_0(t), \quad t > 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.93) \\ (2.94) \\ (2.95) \end{array}$$

La solución de este problema se da en el siguiente

Corolario 2.4.1. *La solución del problema de Cauchy (2.93) con condición inicial (2.94) y condición de frontera (2.95) para $\beta = \frac{2}{3}$, esta dada por*

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^+} G_1(x, t, y) u_0(y) dy + \int_0^t G_2(x, t - s) g_0(s) ds,$$

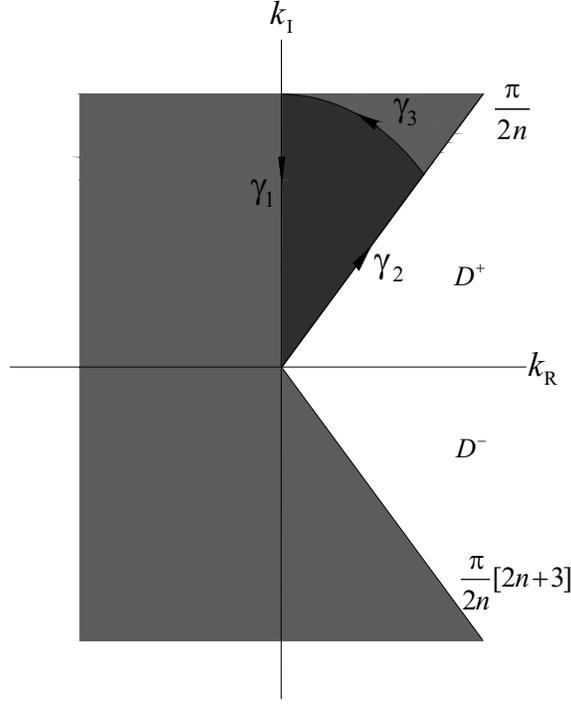


Figura 2.4: Contorno $\partial D^+ \cup \gamma_1$ para la derivada fraccionaria $1/2 < \beta \leq 1$.

en donde,

$$G_1(x, t, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ik(x-y) - (ik)^{\frac{2}{3}}t} dk, \quad G_2(x, t-s) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+ \cup \gamma_1} e^{ikx + (ik)^{\frac{2}{3}}(s-t)} dk.$$

Demostración. Derivando la expresión (2.74) respecto de t obtenemos

$$\widehat{u}_t(k, t) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} u_t(x, t) dx. \quad (2.96)$$

Luego substituyendo la expresión (2.93) en la ecuación anterior, se tiene

$$\widehat{u}_t(k, t) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} u_t(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} {}^{RL}D_x^{\frac{2}{3}} q(x, t) dx.$$

Ahora integrando por partes, usando la relación ${}^{RL}D_x^\beta u(x, t) = D^n I^{n-\beta} u(x, t)$ (véase expresión (1.15)), y usando el decaimiento de $u(x, t)$ hacia cero cuando $x \rightarrow \infty$, se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{u}_t(k, t) &= \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} D_x I^{\frac{1}{3}} u(x, t) dx = -I^{\frac{1}{3}} u(0, t) + ik \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} I^{\frac{1}{3}} u(x, t) dx, \\ &= -D_x^{-\frac{1}{3}} u(0, t) + ik \widehat{I^{\frac{1}{3}} u}(k, t). \end{aligned}$$

Notando que la última integral es la transformada de Fokas de $I^{\frac{1}{3}}u(x, t)$, entonces usando el Lema 2.4.1 y la condición de frontera (2.95), se tiene

$$\widehat{u}_t(k, t) = -g_0(t) + (ik)^{\frac{2}{3}} \widehat{u}(k, t). \quad (2.97)$$

Luego multiplicando por el factor integrante $e^{-(ik)^{\frac{2}{3}}t}$, en donde ya se eligió la rama analítica adecuada para $(ik)^{\frac{2}{3}}$, e integrando por partes en la ecuación (2.97) se tiene por un lado

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-(ik)^{\frac{2}{3}}s} \widehat{u}_s(k, s) ds &= \int_0^t e^{-(ik)^{\frac{2}{3}}s} d\widehat{u}(k, s) = e^{-(ik)^{\frac{2}{3}}t} \widehat{u}(k, t) - \widehat{u}(k, 0) + (ik)^{\frac{2}{3}} \int_0^t e^{-(ik)^{\frac{2}{3}}s} \widehat{u}(k, s) ds, \\ &= e^{-(ik)^{\frac{2}{3}}t} \widehat{u}(k, t) - \widehat{u}_0(k) + (ik)^{\frac{2}{3}} \int_0^t e^{-(ik)^{\frac{2}{3}}s} \widehat{u}(k, s) ds, \end{aligned}$$

en donde hemos usado la condición inicial (2.81).

Es decir,

$$\int_0^t e^{-(ik)^{\frac{2}{3}}s} \widehat{u}_s(k, s) ds = e^{-(ik)^{\frac{2}{3}}t} \widehat{u}(k, t) - \widehat{u}_0(k) + (ik)^{\frac{2}{3}} \int_0^t e^{-(ik)^{\frac{2}{3}}s} \widehat{u}(k, s) ds. \quad (2.98)$$

Y por otro lado,

$$- \int_0^t e^{-(ik)^{\frac{2}{3}}s} g_0(s) ds + (ik)^{\frac{2}{3}} \int_0^t e^{-(ik)^{\frac{2}{3}}s} \widehat{u}(k, s) ds. \quad (2.99)$$

De esta forma de las ecuaciones (2.98) y (2.99), se tiene la relación

$$e^{-(ik)^{\frac{2}{3}}t} \widehat{u}(k, t) = \widehat{q}_0(k) - \widetilde{g}_0(-(ik)^{\frac{2}{3}}, t), \quad \text{Im}(k) \leq 0, \quad (2.100)$$

en donde,

$$\widetilde{g}_0(k, t) = \int_0^t e^{ksRL} D_x^{-\frac{1}{3}} u(0, s) ds, \quad j = 0, \quad \text{Im}(k) \leq 0. \quad (2.101)$$

Ahora (2.100), implica

$$\widehat{u}(k, t) = e^{(ik)^{\frac{2}{3}}t} \widehat{u}_0(k) - e^{(ik)^{\frac{2}{3}}t} \widetilde{g}_0(-(ik)^{\frac{2}{3}}, t),$$

de donde aplicando la transformada inversa de Fokas definida en la ecuación (2.75), se tiene una expresión para $u(x, t)$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - (-(ik)^{\frac{2}{3}})t} \widehat{u}_0(k) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - (-(ik)^{\frac{2}{3}})t} \widetilde{g}_0(-(ik)^{\frac{2}{3}}, t) dk, \quad (2.102)$$

en donde $\operatorname{Re}(ik) < 0$ y $\operatorname{Re}(-(ik)^{\frac{2}{3}}) > 0$ para que las integrales existan.

Nuevamente realizaremos un análisis detallado para determinar donde son seccionalmente analíticos los integrandos de cada integral que aparece en la representación de la solución $q(x, t)$. Esto con el fin de asegurar la existencia de tales integrales. Y lo más importante es que deformaremos los límites de integración sobre todo \mathbb{R} a una curva adecuada en el plano complejo.

Notese que si $k = k_{\mathbb{R}} + ik_{\mathbb{I}}$ entonces $ik = ik_{\mathbb{R}} - k_{\mathbb{I}}$. Luego, e^{ikx} tiene decaimiento si $k_{\mathbb{I}} > 0$ pues $x > 0$. Por otro lado $e^{-(ik)^{\frac{2}{3}}t}$ tiene decaimiento si $\operatorname{Re}(-(ik)^{\frac{2}{3}}) > 0$ puesto que $t > 0$.

Sea $D = \{k \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(-(ik)^{\frac{2}{3}}) < 0\}$. Y D^+ y D^- como antes. Luego si $0 \leq \arg(k) < 2\pi$, se obtiene

$$\begin{aligned} -(ik)^{\frac{2}{3}} &= |k|^{\frac{2}{3}} \left[\left[-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2}{3} \arg(k)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3} \arg(k)\right) \right] \right. \\ &\quad \left. - i \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{2}{3} \arg(k)\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3} \arg(k)\right) \right] \right]. \end{aligned}$$

Que $\operatorname{Re}(-(ik)^{\frac{2}{3}}) < 0$ es equivalente a escribir que $\left[-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2}{3} \arg(k)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3} \arg(k)\right) \right] < 0$. Este último es equivalente a escribir cuando $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} \arg(k)\right) < 0$. Y como β es de la forma $\beta = \frac{n}{n+1}$, encontramos que D , esta dada por

$$D = \left\{ k \in \mathbb{C} : \arg(k) \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right) \right\},$$

es decir, D son todos los números complejos k cuyo argumento hace que $\operatorname{Re}(-(ik)^{\frac{2}{3}}) < 0$ (véase Figura 2.5).

Realizando el cambio de variable $k \rightarrow -k$ en la expresión (2.100) esta ahora es válida cuando $\operatorname{Im}(k) \geq 0$. Además el integrando de la segunda integral en (2.102) es entera y tiene decaimiento cuando $k \rightarrow \infty$ para $k \in \mathbb{C}^+ \setminus D^+$. Consideremos el contorno $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ como se muestra en la Figura 2.5, entonces usando la analiticidad de la función $e^{ikx - (ik)^{\frac{2}{3}}t} \tilde{g}_0(-(ik)^{\frac{2}{3}}, t)$ y el teorema de Cauchy, se tiene

$$\int_{\Gamma} e^{ikx - (ik)^{\frac{2}{3}}t} \tilde{g}_0(-(ik)^{\frac{2}{3}}, t) dk = \left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} \right) e^{ikx - (ik)^{\frac{2}{3}}t} \tilde{g}_0(-(ik)^{\frac{2}{3}}, t) dk = 0.$$

Luego por el lema de Jordan resulta que la integral a lo largo de γ_3 desaparece debido al decaimiento de la función $e^{ikx - (ik)^{\frac{2}{3}}t}$ en la región $\mathbb{C}^+ \setminus D^+$. De este modo, nosotros obtenemos que la integral a lo largo de la línea real puede ser reemplazada por ∂D^+ y por la curva γ_1 .

Por lo tanto, integrando sobre $\partial D^+ \cup \gamma_1$ (véase Figura 2.5) en la segunda integral de la ecuación (2.102), se obtiene

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^+} e^{ikx - (ik)^{\frac{2}{3}}t} \hat{u}_0(k) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+ \cup \gamma_1} e^{ikx - (ik)^{\frac{2}{3}}t} \tilde{g}_0(-(ik)^{\frac{2}{3}}, t) dk,$$

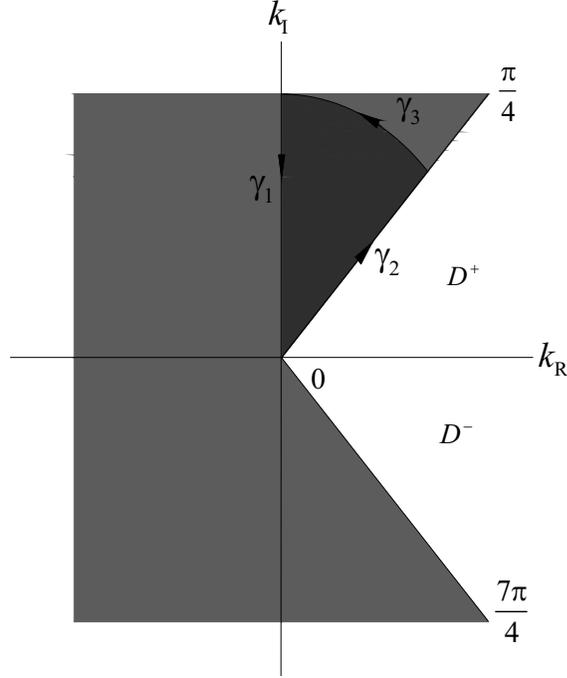


Figura 2.5: Contorno $\partial D^+ \cup \gamma_1$ para la derivada fraccionaria $\beta = 2/3$

ó de forma equivalente,

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^+} G_1(x, t, y) q_0(y) dy + \int_0^t G_2(x, t-s) g_0(s) ds,$$

en donde,

$$G_1(x, t, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ik(x-y) - (ik)^{\frac{2}{3}} t} dk, \quad G_2(x, t-s) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+ \cup \gamma_1} e^{ikx + (ik)^{\frac{2}{3}} (s-t)} dk. \quad \square$$

2.4.3. Problema de Cauchy generalizado para $1 < \beta \leq 2$

Si β se encuentra entre los enteros positivos 1 y 2, entonces a partir de (2.84) obtenemos que se requieren 2 condiciones en la frontera,

$${}^R D_x^{\beta-1} u(0, t) = g_0(t), \quad t > 0, \quad (2.103)$$

$${}^R D_x^{\beta-2} u(0, t) = g_1(t), \quad t > 0. \quad (2.104)$$

Teorema 2.4.2. Dada la ecuación (2.80), con condición inicial (2.81) y condiciones de frontera (2.103),(2.104). La solución del problema de Cauchy generalizado esta dado por

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^+} G_1(x, t, y) u_0(y) dy + \int_0^t G_2(x, t-s) g_1(s) ds,$$

en donde,

$$G_1(x, t, y) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{ik(x-y) - (ik)^\beta t} dk - \int_{\partial D^+ \cup \gamma_j} e^{ik(x-y e^{i\frac{\pi}{\beta}}) + (ik)^\beta t} dk \right),$$

$$G_2(x, t-s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+ \cup \gamma_j} e^{ikx - (ik)^\beta (t-s)} k (e^{i\frac{\pi}{\beta}} - 1) dk.$$

Demostración. Derivando la expresión (2.74) respecto de t se obtiene

$$\widehat{u}_t(k, t) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} u_t(x, t) dx. \quad (2.105)$$

Luego substituyendo la expresión (2.80) en la ecuación (2.105) resulta

$$\widehat{u}_t(k, t) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} u_t(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} {}^{RL}D_x^\beta u(x, t) dx.$$

Ahora integrando por partes, usando la relación ${}^{RL}D_x^\beta u(x, t) = D^n I^{n-\beta} u(x, t)$ (véase expresión (1.15)), y usando el decaimiento de $u(x, t)$ hacia cero cuando $x \rightarrow \infty$, se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{u}_t(k, t) &= \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} D_x^n I^{n-\beta} u(x, t) dx, \\ &= -{}^{RL}D_x^{\beta-n+1} u(0, t) + ik \left[-I^{n-\beta} u(0, t) + ik \widehat{I^{n-\beta} u}(k, t) \right]. \end{aligned}$$

La última expresión de la igualdad es la transformada de Fokas de $I^{n-\beta} u(x, t)$, entonces usando el Lema 2.4.1 y las condiciones de frontera (2.103) y (2.104) se tiene

$$\widehat{u}_t(k, t) = -g_0(t) - ik g_1(t) + (ik)^\beta \widehat{u}(k, t). \quad (2.106)$$

Multiplicando por el factor integrante $e^{-(ik)^\beta t}$, en donde ya se eligió la rama analítica adecuada para $(ik)^\beta$, e integrando por partes en la ecuación (2.106) se tiene por un lado

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-(ik)^\beta s} \widehat{u}_s(k, s) ds &= \int_0^t e^{-(ik)^\beta s} d\widehat{u}(k, s) ds = e^{-(ik)^\beta t} \widehat{u}(k, t) - \widehat{u}(k, 0) + (ik)^\beta \int_0^t e^{-(ik)^\beta s} \widehat{u}(k, s) ds, \\ &= e^{-(ik)^\beta t} \widehat{u}(k, t) - \widehat{u}_0(k) + (ik)^\beta \int_0^t e^{-(ik)^\beta s} \widehat{u}(k, s) ds, \end{aligned}$$

en donde ya hemos usado la condición inicial. Es decir,

$$\int_0^t e^{-(ik)^\beta s} \widehat{u}_s(k, s) ds = e^{-(ik)^\beta t} \widehat{u}(k, t) - \widehat{u}_0(k) + (ik)^\beta \int_0^t e^{-(ik)^\beta s} \widehat{u}(k, s) ds. \quad (2.107)$$

Y por el otro lado,

$$-\int_0^t e^{-(ik)^\beta s} g_0(s) ds - ik \int_0^t e^{-(ik)^\beta s} g_1(s) ds + (ik)^\beta \int_0^t e^{-(ik)^\beta s} \widehat{u}(k, s) ds. \quad (2.108)$$

De esta forma de las ecuaciones (2.107) y (2.108), se tiene la siguiente relación

$$e^{-(ik)^\beta t} \widehat{u}(k, t) = \widehat{u}_0(k) - \tilde{g}_0(-(ik)^\beta, t) - ik \tilde{g}_1(-(ik)^\beta, t), \quad \text{Im}(k) \leq 0, \quad (2.109)$$

en donde,

$$\tilde{g}_j(k, t) = \int_0^t e^{ksRL} D_x^{\beta-j-1} u(0, s) ds, \quad j = 0, 1., \quad \text{Im}(k) \leq 0. \quad (2.110)$$

Ahora (2.109), implica

$$\widehat{u}(k, t) = e^{(ik)^\beta t} \widehat{u}_0(k) - e^{(ik)^\beta t} \tilde{g}_0(-(ik)^\beta, t) - ik e^{(ik)^\beta t} \tilde{g}_1(-(ik)^\beta, t),$$

de donde aplicando la transformada inversa de Fokas definida en la ecuación (2.75), se tiene una expresión para $u(x, t)$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - (ik)^\beta t} \widehat{u}_0(k) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - (ik)^\beta t} \tilde{g}_0(-(ik)^\beta, t) dk \\ &\quad - \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - (ik)^\beta t} k \tilde{g}_1(-(ik)^\beta, t) dk. \end{aligned} \quad (2.111)$$

en donde $\text{Re}(ik) < 0$ y $\text{Re}(-(ik)^\beta) > 0$ para que las integrales existan.

Determinemos las regiones de analiticidad de los integrandos y busquemos invarianza en algún sentido de dichas funciones en regiones adecuadas.

Sea $D = \{k \in \mathbb{C} : \text{Re}(-(ik)^\beta) < 0\}$, con D^+ y D^- como antes. Luego si $0 \leq \arg(k) < 2\pi$, se obtiene

$$\begin{aligned} -(ik)^\beta &= |k|^\beta \left(\left[\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \cos(\beta \arg(k)) + \text{sen}\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \text{sen}(\beta \arg(k)) \right] \right. \\ &\quad \left. - i \left[\text{sen}\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \cos(\beta \arg(k)) + \cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \text{sen}(\beta \arg(k)) \right] \right). \end{aligned}$$

Que $\text{Re}(-(ik)^\beta) < 0$ es equivalente a escribir que $\cos\left(\beta \arg(k) + \frac{\beta\pi}{2}\right) < 0$. De donde, encontramos que la región D esta dada por

$$D = \left\{ k \in \mathbb{C} : \arg(k) \in \left(0, \frac{\pi}{\beta}(1 - \beta)\right) \cup \left(\frac{\pi}{2\beta}(3 - \beta), 2\pi\right) \right\}.$$

Hasta este momento solo hemos encontrado una representación integral para el problema de Cauchy generalizado en cuestión y las regiones de decaimiento de la función $e^{ikx+(ik)^\beta t}$. Sin embargo, la representación integral (2.111) no representa una solución para $u(x, t)$, ya que dependen de los datos de frontera los cuales no todos son conocidos siempre y que en nuestro caso son $\tilde{g}_j(t)$ para $j = 0, 1$, para $t > 0$. Es bien conocido que en la práctica no se dispone de todos los datos en la frontera. Para librar este obstáculo resolvemos la relación (2.109) para un dato desconocido, en este caso \tilde{g}_0 el cual es válido en \mathbb{C}^- (véase expresión (2.110)); mientras que (2.111) requiere una expresión para \tilde{g}_0 válida a lo largo de ∂D^+ . Con este fin se busca una transformación que transforme el contorno ∂D^+ a un contorno en el semi-plano inferior \mathbb{C}^- , dejando a $\tilde{g}_0(w(k), t)$ invariante. Para tal fin estudiaremos la simetría de $w(k) := -(ik)^\beta$ (llamada también relación de dispersión). No es difícil comprobar que la relación de dispersión $w(k)$ es invariante bajo el cambio $k \rightarrow ke^{i\frac{\pi}{\beta}}$. Es decir, si $\nu(k) = ke^{i\frac{\pi}{\beta}}$ entonces se cumple que $w(k) - w(\nu(k)) = 0$.

Por lo tanto, aplicando esta transformación en la expresión (2.109) y despejando \tilde{g}_0 , se tiene

$$\tilde{g}_0(- (ik)^\beta, t) = -e^{-(ik)^\beta t} \widehat{u}(ke^{i\frac{\pi}{\beta}}, t) + \widehat{u}_0(ke^{i\frac{\pi}{\beta}}) - (ike^{i\frac{\pi}{\beta}}) \tilde{g}_1(- (ik)^\beta, t), \quad \text{Im} \geq 0, \quad (2.112)$$

relación válida en \mathbb{C}^+ .

Considerando un contorno apropiado de la forma $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ y usando la analiticidad de la función $e^{ikx - (ik)^\beta t} \tilde{g}_j(w(k), t)$ para $j = 0, 1$ y el teorema de Cauchy, se tiene

$$\int_{\Gamma} e^{ikx - (ik)^\beta t} \tilde{g}_j(w(k), t) dk = \left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} \right) e^{ikx - (ik)^\beta t} \tilde{g}_j(w(k), t) dk = 0.$$

Además por el lema de Jordan resulta que la integral a lo largo de alguna de las γ_j desaparece debido al decaimiento de la función $e^{ikx - (ik)^\beta t}$ en la región $\mathbb{C}^+ \setminus D^+$. De este modo, obtenemos que la integral a lo largo de la línea real puede ser reemplazada por ∂D^+ y por alguna curva γ_j .

Por lo tanto, sustituyendo la ecuación (2.112) en (2.111) e integrando sobre $\partial D^+ \cup \gamma_j$, obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - (ik)^\beta t} \widehat{u}_0(k) dk \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+ \cup \gamma_j} e^{ikx - (ik)^\beta t} \left[-e^{-(ik)^\beta t} \widehat{u}(ke^{i\frac{\pi}{\beta}}, t) + \widehat{u}_0(ke^{i\frac{\pi}{\beta}}) - (ike^{i\frac{\pi}{\beta}}) \tilde{g}_1(- (ik)^\beta, t) \right] dk \\ &\quad - \frac{i}{2\pi} \int_{\partial D^+ \cup \gamma_j} e^{ikx - (ik)^\beta t} k \tilde{g}_1(- (ik)^\beta, t) dk. \end{aligned}$$

Esta expresión ya no depende del dato de frontera $g_0(t)$. Sin embargo, la función $u(x, t)$ también aparece en la segunda integral del lado derecho. Este problema se resuelve haciendo uso de la analiticidad de la función $e^{ikx} \widehat{u}(ke^{i\frac{\pi}{\beta}}, t)$ de la siguiente manera. Notemos que la función $\widehat{u}(ke^{i\frac{\pi}{\beta}}, t)$

es analítica y acotada en \mathbb{C}^+ , es decir, $\widehat{u}(ke^{i\frac{\pi}{\beta}}, t) \rightarrow 0$ uniformemente cuando $k \rightarrow \infty$. Esto implica que la integral de $e^{ikx} \widehat{u}(ke^{i\frac{\pi}{\beta}}, t)$ a lo largo de una curva cerrada y acotada en \mathbb{C}^+ desaparece en virtud del teorema de Cauchy. De modo que

$$\int_{\partial D^+ \cup \gamma_j} e^{ikx} \widehat{u}(ke^{i\frac{\pi}{\beta}}, t) dk = 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - (ik)^\beta t} \widehat{u}_0(k) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+ \cup \gamma_j} e^{ikx - (ik)^\beta t} \widehat{u}_0(ke^{i\frac{\pi}{\beta}}) dk \\ &\quad - \frac{i}{2\pi} \int_{\partial D^+ \cup \gamma_j} e^{ikx - (ik)^\beta t} k (e^{i\frac{\pi}{\beta}} - 1) \tilde{g}_1(-(ik)^\beta, t) dk. \end{aligned}$$

Luego haciendo uso de la definición de $\widehat{u}_0(y)$ dada en (2.75) y simplificando un poco, resulta

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^+} u_0(y) \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - (ik)^\beta t} dk dy - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^+} u_0(y) \int_{\partial D^+ \cup \gamma_j} e^{ik(x - ye^{i\frac{\pi}{\beta}}) + (ik)^\beta t} dk dy \\ &\quad - \frac{i}{2\pi} \int_0^t g_1(s) \int_{\partial D^+ \cup \gamma_j} e^{ikx - (ik)^\beta t} k (e^{i\frac{\pi}{\beta}} - 1) dk ds. \end{aligned}$$

Y en términos de las funciones de Green, escribimos

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^+} G_1(x, t, y) u_0(y) dy + \int_0^t G_2(x, t - s) g_1(s) ds,$$

en donde,

$$G_1(x, t, y) := \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{ik(x-y) - (ik)^\beta t} dk - \int_{\partial D^+ \cup \gamma_j} e^{ik(x - ye^{i\frac{\pi}{\beta}}) + (ik)^\beta t} dk \right),$$

$$G_2(x, t - s) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+ \cup \gamma_j} e^{ikx - (ik)^\beta (t-s)} k (e^{i\frac{\pi}{\beta}} - 1) dk. \quad \square$$

2.4.4. Ejemplo $\beta = \frac{4}{3}$

Ahora encontraremos la solución del problema de Cauchy para $\beta = \frac{4}{3}$, el cual cumple que $1 < \beta \leq 2$.

Consideremos el siguiente problema de Cauchy generalizado

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t(x, t) = {}^{RL}D_x^{\frac{4}{3}}u(x, t), \quad x, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ {}^{RL}D_x^{\frac{1}{3}}u(0, t) = g_0(t), \quad t > 0, \\ {}^{RL}D_x^{-\frac{2}{3}}u(0, t) = I^{\frac{2}{3}}u(0, t) = g_1(t). \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.113) \\ (2.114) \\ (2.115) \\ (2.116) \end{array}$$

Corolario 2.4.2. Dado el problema de Cauchy (2.113) con condición inicial (2.114) y las condiciones de frontera (2.115) y (2.116), su solución esta dada por

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^+} G_1(x, t, y)u_0(y)dy + \int_0^t G_2(x, t-s)g_1(s)ds,$$

en donde,

$$G_1(x, t, y) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{ik(x-y) - (ik)^{4/3}t} dk - \int_{\partial D^+ \cup \gamma_1} e^{ik(x-ye^{i\frac{3\pi}{4}}) + (ik)^{4/3}t} dk \right),$$

$$G_2(x, t-s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+ \cup \gamma_1} e^{ikx - (ik)^{4/3}(t-s)} k (e^{i\frac{3\pi}{4}} - 1) dk.$$

Demostración. De igual manera derivando la expresión (2.74) respecto de t obtenemos

$$\widehat{u}_t(k, t) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} u_t(x, t) dx \quad (2.117)$$

Luego substituyendo la expresión (2.113) en la ecuación (2.117) se tiene

$$\widehat{u}_t(k, t) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} u_t(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} {}^{RL}D_x^{4/3}u(x, t) dx.$$

Ahora integrando por partes, usando la relación ${}^{RL}D_x^\beta u(x, t) = D^n I^{n-\beta} u(x, t)$ (véase expresión (1.15)), usando el decaimiento de $u(x, t)$ hacia cero cuando $x \rightarrow \infty$ y las condiciones (2.115), (2.116), se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{u}_t(k, t) &= \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} {}^{RL}D_x^2 I^{2/3}u(x, t) dx = e^{-ikx} {}^{RL}D_x I^{2/3}u(x, t)|_0^\infty + ik \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} {}^{RL}D_x I^{2/3}u(x, t) dx, \\ &= -D_x {}^{RL}I^{2/3}u(0, t) + ik \left[e^{-ikx} I^{2/3}u(x, t)|_0^\infty + ik \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} I^{2/3}u(x, t) dx \right], \\ &= -D_x^{1/3}u(0, t) + ik \left[-I^{2/3}u(0, t) + ik \widehat{I^{2/3}u}(k, t) \right]. \end{aligned}$$

Notando que la última integral es la transformada de Fokas de $I^{\frac{2}{3}}u(x, t)$, y usando el Lema 2.4.1, se tiene

$$\widehat{u}_t(k, t) = -g_0(t) - ikg_1(t) + (ik)^{4/3}\widehat{u}(k, t). \quad (2.118)$$

Resolviendo la ecuación diferencial ordinaria no homogénea, multiplicando por el factor integrante $e^{-(ik)^{4/3}t}$, en donde ya se eligió la rama analítica adecuada para $(ik)^\beta$, e integrando por partes en la ecuación (2.118) se tiene, por un lado

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-(ik)^{4/3}s} \widehat{u}_s(k, s) ds &= \int_0^t e^{-(ik)^{4/3}s} d\widehat{u}(k, s) ds = e^{-(ik)^{4/3}t} \widehat{u}(k, t) - \widehat{u}(0, k) + (ik)^{4/3} \int_0^t e^{-(ik)^{4/3}s} \widehat{u}(k, s) ds, \\ &= e^{-(ik)^{4/3}t} \widehat{u}(k, t) - \widehat{u}_0(k) + (ik)^{4/3} \int_0^t e^{-(ik)^{4/3}s} \widehat{u}(k, s) ds, \end{aligned}$$

en donde ya hemos sustituido la condición inicial. Es decir,

$$\int_0^t e^{-(ik)^{4/3}s} \widehat{u}_s(k, s) ds = e^{-(ik)^{4/3}t} \widehat{u}(t, k) - \widehat{u}_0(k) + (ik)^{4/3} \int_0^t e^{-(ik)^{4/3}s} \widehat{u}(k, s) ds. \quad (2.119)$$

Y por el otro lado,

$$- \int_0^t e^{-(ik)^{4/3}s} g_0(s) ds - ik \int_0^t e^{-(ik)^{4/3}s} g_1(s) ds + (ik)^{4/3} \int_0^t e^{-(ik)^{4/3}s} \widehat{u}(k, s) ds. \quad (2.120)$$

De esta forma de las ecuaciones (2.119) y (2.120), se tiene la siguiente relación

$$e^{-(ik)^{4/3}t} \widehat{u}(k, t) = \widehat{u}_0(k) - \tilde{g}_0(-(ik)^{4/3}, t) - ik\tilde{g}_1(-(ik)^{4/3}, t), \quad \text{Im}(k) \leq 0, \quad (2.121)$$

en donde,

$$\tilde{g}_j(k, t) = \int_0^t e^{ksRL} D_x^{4/3-j-1} u(0, s) ds, \quad j = 0, 1 \quad \text{y} \quad \text{Im}(k) \leq 0. \quad (2.122)$$

Ahora (2.121), implica

$$\widehat{u}(k, t) = e^{(ik)^{4/3}t} \widehat{u}_0(k) - e^{(ik)^{4/3}t} \tilde{g}_0(-(ik)^{4/3}, t) - ik e^{(ik)^{4/3}t} \tilde{g}_1(-(ik)^{4/3}, t).$$

Aplicando la transformada inversa de Fokas definida en la ecuación (2.75), se tiene una expresión para $u(x, t)$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - (ik)^{4/3}t} \widehat{u}_0(k) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - (ik)^{4/3}t} \tilde{g}_0(-(ik)^{4/3}, t) dk \\ &\quad - \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - (ik)^{4/3}t} k \tilde{g}_1(-(ik)^{4/3}, t) dk. \end{aligned} \quad (2.123)$$

en donde $\operatorname{Re}(ik) \leq 0$ y $\operatorname{Re}(-ik)^{\frac{4}{3}} > 0$ para que las integrales tengan sentido.

Sin embargo, la representación integral (2.123) no representa una solución para $u(x, t)$, ya que dependen de todos los datos de frontera los cuales no todos son conocidos.

En seguida determinaremos las regiones de analiticidad de los integrandos de las integrales y busquemos invarianza en algún sentido de dichas funciones en regiones adecuadas.

Sea $D = \{k \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(-ik)^{\frac{4}{3}} < 0\}$. Luego si $0 \leq \arg(k) < 2\pi$, se obtiene

$$-(ik)^{\frac{4}{3}} = |k|^{\frac{4}{3}} \left(\left[\frac{1}{2} \cos\left(\frac{4}{3} \arg(k)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{4}{3} \arg(k)\right) \right] - i \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{4}{3} \arg(k)\right) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{4}{3} \arg(k)\right) \right] \right).$$

Que $\operatorname{Re}(-ik)^{\frac{4}{3}} < 0$ es equivalente a escribir que $\left[\frac{1}{2} \cos\left(\frac{4}{3} \arg(k)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{4}{3} \arg(k)\right) \right] < 0$. Luego, esta última expresión es equivalente a escribir cuando $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3} \arg(k)\right) < 0$. De este modo la región D esta dada por

$$D = \left\{ k \in \mathbb{C} : \arg(k) \in \left(\frac{5\pi}{8}, \frac{11\pi}{8} \right) \right\},$$

es decir, D son todos los números complejos k cuyo argumento hace que $\operatorname{Re}(-ik)^{\frac{4}{3}} < 0$.

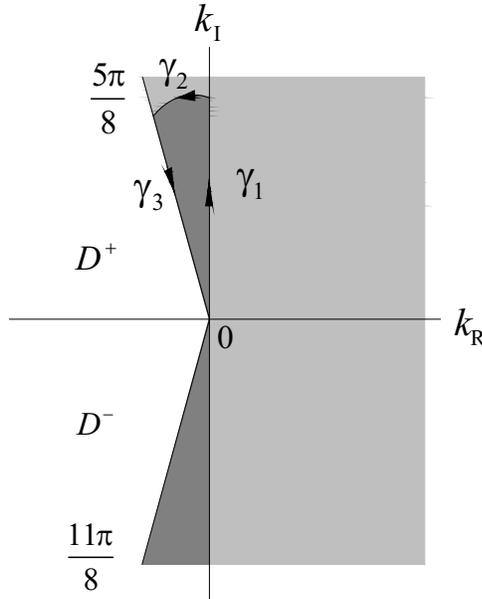


Figura 2.6: Contorno $\partial D^+ \cup \gamma_1$ para la derivada fraccionaria $\beta = 4/3$.

Ahora usando la simetría de $w(k) = -(ik)^{\frac{4}{3}}$, obtenemos que $\nu(k) = ke^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Luego, despejando \tilde{g}_0 en la ecuación (2.121) y teniendo en cuenta la transformación $k \rightarrow ke^{i\frac{3\pi}{4}}$, se

tiene

$$\tilde{g}_0(- (ik)^{4/3}, t) = -e^{-(ik)^{4/3}t} \widehat{u}(ke^{i\frac{3\pi}{4}}, t) + \widehat{u}_0(ke^{i\frac{3\pi}{4}}) - (ike^{i\frac{3\pi}{4}}) \tilde{g}_1(- (ik)^{4/3}, t), \quad \text{Im}(k) \geq 0. \quad (2.124)$$

Consideremos el contorno $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ como se muestra en la Figura 2.6. Entonces, usando la analiticidad de la función $e^{ikx - (-ik)^{\frac{4}{3}}t} \tilde{g}_j(w(k), t)$ para $j = 0, 1$ y el teorema de Cauchy, se tiene

$$\int_{\Gamma} e^{ikx - (-ik)^{\frac{4}{3}}t} \tilde{g}_j(w(k), t) dk = \left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} \right) e^{ikx - (-ik)^{\frac{4}{3}}t} \tilde{g}_j(w(k), t) dk = 0.$$

Luego por el lema de Jordan resulta que la integral a lo largo de γ_2 desaparece debido al decaimiento de la función $e^{ikx - (-ik)^{\frac{4}{3}}t}$ en la región $\mathbb{C}^+ \setminus D^+$. De este modo, obtenemos que la integral a lo largo de la línea real puede ser reemplazada por ∂D^+ y por la curva γ_1 .

Por lo tanto, sustituyendo la expresión (2.124) en (2.123) e integrando sobre $\partial D^+ \cup \gamma_1$ se tiene

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - (-ik)^{4/3}t} \widehat{u}_0(k) dk \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+ \cup \gamma_1} e^{ikx - (-ik)^{4/3}t} \left[-e^{-(ik)^{4/3}t} \widehat{u}(ke^{i\frac{3\pi}{4}}, t) + \widehat{u}_0(ke^{i\frac{3\pi}{4}}) - (ike^{i\frac{3\pi}{4}}) \tilde{g}_1(- (ik)^{4/3}, t) \right] dk \\ &\quad - \frac{i}{2\pi} \int_{\partial D^+ \cup \gamma_1} e^{ikx - (-ik)^{4/3}t} k \tilde{g}_1(- (ik)^{4/3}, t) dk. \end{aligned}$$

Esta expresión ya no depende del dato de frontera $\tilde{g}_0(t)$. Sin embargo, la función $u(x, t)$ también aparece en la segunda integral del lado derecho. Este problema se resuelve haciendo uso de la analiticidad de la función $e^{ikx} \widehat{u}(ke^{i\frac{3\pi}{4}}, t)$ de la siguiente manera. Notemos que la función $\widehat{u}(ke^{i\frac{3\pi}{4}}, t)$ es analítica y acotada en \mathbb{C}^+ , es decir, $\widehat{u}(ke^{i\frac{3\pi}{4}}, t) \rightarrow 0$ uniformemente cuando $k \rightarrow \infty$. Esto implica que la integral de $e^{ikx} \widehat{u}(ke^{i\frac{3\pi}{4}}, t)$ a lo largo de una curva cerrada y acotada en \mathbb{C}^+ desaparece en virtud del teorema de Cauchy. Así,

$$\int_{\partial D^+ \cup \gamma_1} e^{ikx} \widehat{u}(ke^{i\frac{3\pi}{4}}, t) dk = 0;$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - (-ik)^{4/3}t} \widehat{u}_0(k) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+ \cup \gamma_1} e^{ikx - (-ik)^{4/3}t} \widehat{u}_0(ke^{i\frac{3\pi}{4}}) dk \\ &\quad - \frac{i}{2\pi} \int_{\partial D^+ \cup \gamma_1} e^{ikx - (-ik)^{4/3}t} k (e^{i\frac{3\pi}{4}} - 1) \tilde{g}_1(- (ik)^{4/3}, t) dk. \end{aligned}$$

Finalmente por la definición de la transformada inversa definida en (2.75) para $\widehat{q}_0(y)$, obtenemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - (ik)^{4/3}t} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-iky} u_0(y) dy dk, -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+ \cup \gamma_1} e^{ikx - (ik)^{4/3}t} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-iky e^{i\frac{3\pi}{4}}} u_0(y) dy dk$$

$$- \frac{i}{2\pi} \int_{\partial D^+ \cup \gamma_1} e^{ikx - (ik)^{4/3}t} k (e^{i\frac{3\pi}{4}} - 1) \int_0^t e^{-(ik)^{4/3}s} \tilde{g}_1(s) ds dk.$$

Intercambiando las integrales nos queda

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^+} u_0(y) \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - (ik)^{4/3}t} dk dy - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^+} u_0(y) \int_{\partial D^+ \cup \gamma_1} e^{ik(x - ye^{i\frac{3\pi}{4}}) + (ik)^{4/3}t} dk dy$$

$$- \frac{i}{2\pi} \int_0^t g_1(s) \int_{\partial D^+ \cup \gamma_1} e^{ikx - (ik)^{4/3}t} k (e^{i\frac{3\pi}{4}} - 1) dk ds.$$

Y en términos de las funciones de Green tenemos que

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^+} G_1(x, t, y) u_0(y) dy + \int_0^t G_2(x, t - s) g_1(s) ds$$

en donde,

$$G_1(x, t, y) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{ik(x-y) - (ik)^{4/3}t} dk - \int_{\partial D^+ \cup \gamma_1} e^{ik(x - ye^{i\frac{3\pi}{4}}) + (ik)^{4/3}t} dk \right),$$

$$G_2(x, t - s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+ \cup \gamma_1} e^{ikx - (ik)^{4/3}(t-s)} k (e^{i\frac{3\pi}{4}} - 1) dk. \quad \square$$

Procesos de Fresnel en la ecuación de vibración de vigas

3.1. Introducción

Los procesos de Fresnel, están relacionados con los diferentes tipos de ondas, debido a que tienen una amplia gama de aplicaciones en la teoría de difracción electromagnética [70].

En este último capítulo hablaremos de la ecuación de Fresnel ó ecuación de vibraciones de vigas que no es mas que una ecuación de la forma (ecuación de de vigas del capítulo anterior). La diferencia entre ambas ecuaciones solo esta en el signo de la derivada fraccionaria espacial de la ecuación (2.35)

Las dos primeras soluciones de este capítulo son encontradas en \mathbb{R} y \mathbb{R}^+ en el sentido clásico, usando la transformada de Fourier (véase Definición 1.2.11) y una extensión impar en el caso de \mathbb{R}^+ . La última solución es encontrada en \mathbb{R} es en sentido fraccionario usando la transformada de Laplace y de Fourier. Estos resultados estan basados en el manuscrito [71], en los cuales hemos echo una extensión de la solución del problema 2, asignando datos $(\tilde{g}_j(t))$ suaves como condiciones de frontera, obteniendo como solución particular la reportada en [71] cuando dichos datos son nulos, usando el método de Fokas.

Antes de iniciar con los problemas de Cauchy asociados a la ecuación de Fresnel, daremos a conocer algunas definiciones de la teoría de la probabilidad que serán de gran utilidad en el desarrollo de este último capítulo.

Definición 3.1.1. *Un espacio de probabilidad es una terna ordenada (Ω, \mathcal{F}, P) , en donde Ω es un conjunto arbitrario no vacío que convenientemente puede ser interpretado como el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Al conjunto Ω se le llama espacio muestral, y a un elemento típico de él se le denotará por ω . El segundo elemento es una colección*

no vacía \mathcal{F} de subconjuntos de Ω , llamada σ -álgebra, que es cerrada bajo las operaciones de tomar complementos y uniones numerables. A los elementos de \mathcal{F} , subconjuntos de Ω , se les llama **eventos o conjuntos medibles**. Finalmente el tercer elemento es una función $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, llamada medida de probabilidad, que cumple los siguientes axiomas establecidos en 1933 por A. Kolmogorov

1. $P(\Omega) = 1$;
2. $P(A) \geq 0$ para cualquier $A \in \mathcal{F}$;
3. P es σ -adictiva, es decir, si A_1, A_2, \dots es una sucesión de eventos disjuntos dos a dos, entonces

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

A la pareja (Ω, \mathcal{F}) se le llama *espacio medible*. En particular, si $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ denota la σ -álgebra más pequeña que contiene a todos los intervalos abiertos de \mathbb{R} , entonces se tiene el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. A los elementos de la σ -álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se les llama Borelianos o conjuntos Borel medibles.

Definición 3.1.2. *Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in \mathbb{T}\}$ parametrizada por un conjunto \mathbb{T} , usualmente interpretado como un conjunto de tiempos y llamado espacio parametral.*

Se dice que el proceso es a tiempo discreto en caso de que el conjunto de parámetros sea un conjunto discreto, por ejemplo $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$. En este caso el proceso consiste de una sucesión de variables aleatorias. Se dice en cambio que el proceso es a tiempo continuo cuando el conjunto de parámetros consiste de un subintervalo de \mathbb{R} , por ejemplo $\mathbb{T} = (a, b)$.

Definición 3.1.3. *Un proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ se dice que es un proceso de movimiento Browniano si*

1. $X_0 = 0$;
2. $\{X_t : t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios e incrementos independientes;
3. Para cada $t > 0$, X_t tiene distribución normal con media cero y varianza $\sigma^2 t$.

La definición del movimiento Browniano es la que damos a continuación.

Definición 3.1.4. *Un movimiento Browniano unidimensional de parámetro σ^2 es un proceso estocástico $\{B_t : t \geq 0\}$ con valores en \mathbb{R} que cumple las siguientes propiedades*

1. $B_0 = 0$ casi siempre (es casi seguro con probabilidad uno);
2. Las trayectorias $t \rightarrow B_t$ son continuas;
3. El proceso tiene incrementos independientes;

4. Para cualesquiera tiempos $0 < t_1 < \dots < t_n$, y para cualesquier conjuntos de Borel A_1, \dots, A_n de \mathbb{R} , se cumple que la probabilidad

$$\Pr(B_{t_1} \in A_1, \dots, B_{t_n} \in A_n) = \int_{A_1} \dots \int_{A_n} p(t_1, 0, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) dx_n \dots dx_1,$$

en donde,

$$p(x, t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2 t}}. \quad (3.1)$$

Si $\sigma = 1$ el proceso dado en la Definición 3.1.4 es llamado movimiento Browniano estándar. En este caso las variables $B_t - B_s$ tienen distribución $N(0, t - s)$ para $0 \leq s < t$.

Definición 3.1.5. Sea B_t un movimiento browniano estandar positivo, con valor inicial $B_0 = x$ y sea τ la primera vez que el proceso llega (visita) a cero. Entonces el proceso estocástico

$$X_t = \begin{cases} B_t, & t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau \end{cases}$$

es llamado movimiento Browniano adsorvente.

Este tipo de movimientos brownianos adsorventes son utilizados para modelar el precio de una acción de las acciones de una empresa que se declara en quiebra en un futuro inmediato.

La tercera propiedad que aparece en la Definición 3.1.4, tiene la ventaja de que proporciona una expresión explícita para la probabilidad del conjunto de trayectorias brownianas que cumplen las condiciones de encontrarse en el conjunto A_1 al tiempo t_1 , de hallarse en el conjunto A_2 al tiempo posterior t_2 , etcétera. La condición de que el movimiento browniano inicie en el origen no es absolutamente necesaria. Pueden considerarse trayectorias brownianas que inicien en un punto x cualquiera a través del proceso $\{x + B_t : t \geq 0\}$, el cual se denota a veces por $\{B_t^x : t \geq 0\}$ para recordar la posición de origen.

A la función $p(x, t, y)$ dada en la expresión (3.1) se le llama **función de probabilidad de transición** del movimiento browniano de parámetro σ^2 . En particular, la probabilidad de que un movimiento Browniano que inicia en x (posición de la partícula) se encuentre en un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ (apropiadamente medible) después de t unidades de tiempo es

$$\Pr(B_t^x \in A) = \int_A p(x, t, y) dy. \quad (3.2)$$

En uno de sus trabajos de 1905 y a través de consideraciones teóricas físicas, Einstein encontró que la probabilidad de transición $p(x, t, y)$ satisface la ecuación de difusión y a partir de allí dedujo la

expresión Gaussiana para esta probabilidad.

Debido a esto, existe una profunda conexión entre la teoría del movimiento Browniano y las ecuaciones diferenciales parciales como lo es la ecuación del calor o difusión. El origen de esta conexión es el kernel de Gauss, que es la función de transición para el movimiento Browniano.

3.2. Problemas de Cauchy con condiciones de frontera asociados a la ecuación de vibración de vigas

En esta sección se estudia la ecuación de Fresnel ó ecuación de las vibraciones de vigas o ejes; se muestra que existe una conexión entre la ecuación de Schrödinger y la ecuación de difusión, através de un cambio de variable adecuado. Este acercamiento nos conduce inevitablemente a relacionar el problema de Cauchy con condiciones en la frontera para la vibración de varillas ó vigas con el movimiento Browniano ya que aparecen ecuaciones de difusión. En su forma más simple la ecuación de vibración de vigas fraccionaria que se considera en este capítulo es

$$\frac{\partial^{2\alpha}}{\partial t^{2\alpha}} u(x, t) = -\lambda^2 \frac{\partial^{4\beta}}{\partial x^{4\beta}} u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (3.3)$$

en donde, la constante λ^2 representa la estructura física de la vibración en la varilla ó viga. Notemos que la única diferencia con la ecuación (2.35) es un signo en la derivada fraccionaria espacial.

Podemos escribir la ecuación (3.3), como

$$\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} + \frac{i}{2} \frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}} \right) \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} - \frac{i}{2} \frac{\partial^{2\beta}}{\partial x^{2\beta}} \right) u(x, t) = 0, \quad (3.4)$$

en donde, cada factor es una ecuación de Schrödinger fraccional. Si $\alpha = \beta = 1$, esta misma ecuación se convierte en

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) = 0, \quad (3.5)$$

en donde, ahora cada operador representa un operador de Schrödinger clásico.

Cada operador de la expresión (3.5), puede reducirse fácilmente a través del cambio de variable $t' = \pm it$ a una ecuación de difusión.

Observación 3.2.1. *La expresión (3.4) y (3.5) nos demuestra una conexión estricta entre la ecuación de Schrödinger y por lo tanto con la ecuación del calor mediante el cambio de variable $t' = \pm it$. Esta relación implica que problemas con valores iniciales y de frontera relativos a la ecuación (3.3) tienen soluciones que pueden ser construidas mediante soluciones de problemas relacionados con la ecuación del calor y por lo tanto, relacionarse con el movimiento browniano.*

A continuación se examina algunas relaciones entre las soluciones de la ecuación de difusión y procesos que involucran al movimiento Browniano. Todos estos resultados se refieren a ecuaciones de orden $0 < \alpha \leq 1$.

3.2.1. Solución de la ecuación de vibración de vigas sobre toda la recta

Consideremos los siguientes problemas de valor inicial y de frontera:

1. El primero es el construido por la ecuación (3.3) cuando $\alpha = \beta = 1$, junto con las condiciones iniciales y de frontera siguientes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = -\lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

$$(3.7)$$

$$(3.8)$$

2. El segundo problema que se analiza es el siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = -\lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x, t), \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ u(0, t) = g_0(t), \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ u_x(0, t) = g_1(t), \quad t \in \mathbb{R}^+. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

$$(3.10)$$

$$(3.11)$$

$$(3.12)$$

3. Por último se analiza el problema para la ecuación (3.3) con derivada fraccionaria en el tiempo ($0 < \alpha \leq 1$) y $\beta = 1$, expresado como

$$\frac{\partial^{2\alpha}}{\partial t^{2\alpha}} u(x, t) = -\lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x, t), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (3.13)$$

sujeta a la condición inicial

$$u(x, 0) = \delta(x), \quad (3.14)$$

y condición de frontera

$$u_t(x, 0) = 0. \quad (3.15)$$

Una regla para encontrar la solución fundamental a cada uno de estos problemas de Cauchy se da en la siguiente

Observación 3.2.2. *La solución fundamental de la ecuación de Fresnel se obtiene mediante la siguiente regla*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left[\Pr\{B(s) \in dx\} \Big|_{s=it} + \Pr\{B(s) \in dx\} \Big|_{s=-it} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\mu\{dx, it\} + \mu\{dx, -it\} \right], \end{aligned} \quad (3.16)$$

en donde la medida μ debe entenderse en el sentido de que

$$\mu\{dx, \pm it\} = \Pr\{B(s) \in dx\} \Big|_{s=\pm it}.$$

La expresión (3.16) se interpreta como la probabilidad de dos movimientos Brownianos ajenos, uno que se encuentre en un conjunto dx después de un tiempo it y otro que se encuentre en el conjunto dx pero ahora con tiempo $-it$. La idea anterior es que en el tiempo $t = 0$ el movimiento Browniano se ubica saliendo de $x = 0$, ya sea con incrementos o decrementos con tiempo imaginario. La elección del tiempo se hace una sola vez y no cambia. Este proceso puede considerarse como el límite de una caminata aleatoria generada por funciones escalón simétricas separados por intervalos de tiempo imaginario. Por lo tanto, cada término en (3.16) está relacionado con un tipo de movimiento browniano donde el tiempo toma valores imaginarios [71].

En seguida se enuncia el primer resultado referente a el caso $\alpha = \beta = 1$.

Teorema 3.2.1. [71] *Dado el problema de Cauchy (3.6) con condición inicial (3.7) y condición de frontera (3.8) con $\lambda = 1/2$, la solución está dada por*

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cos\left(\frac{x^2}{2t} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (3.17)$$

conocida como función de Fresnel.

Demostración. Aplicando la transformada de Fourier dada en la Definición 1.2.11, a la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t'} u(x, t') = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t'),$$

el cual, es un factor de la ecuación (3.6), obtenemos

$$(\mathcal{F}_x u_{t'}) (k, t') = -\frac{k^2}{2} (\mathcal{F}_x u) (k, t'), \quad (3.18)$$

y como (3.18) es una ecuación diferencial ordinaria (EDO) en t' , entonces resulta

$$(\mathcal{F}_x u) (k, t') = c(k) e^{-\frac{k^2 t'}{2}}.$$

Además notando que

$$(\mathcal{F}_x u)(k, 0) = c(k) = \mathcal{F}_x\{\delta(x)\} = 1, \quad (3.19)$$

según la condición (3.7), obtenemos

$$\widehat{u}(k, t') = e^{-\frac{k^2 t'}{2}}. \quad (3.20)$$

Luego aplicando la transformada de Fourier inversa dada en la Definición 1.2.11 a la ecuación (3.20)

y haciendo el cambio de variable $k = \frac{w}{\sqrt{2t'}}$, obtenemos

$$\begin{aligned} u_1(x, t') &= \mathcal{F}_k^{-1} \left(e^{-\frac{k^2 t'}{2}} \right) (x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-\frac{k^2 t'}{2}} dk, \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t'}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{4\pi} e^{-\frac{w^2}{4}} e^{-iw \left(\frac{x}{\sqrt{2t'}} \right)} dw, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t'}} \mathcal{F}_k^{-1} \left(\sqrt{2\pi} e^{-\frac{w^2}{4}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{2t'}} \right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t'}} e^{-\frac{x^2}{2t'}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, cambiando $t' = -it$, obtenemos la solución para u_1 , expresado como

$$u_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{-2i\pi t}} e^{\frac{x^2}{2it}} = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi t}} \left[\cos \left(\frac{x^2}{2t} \right) - i \operatorname{sen} \left(\frac{x^2}{2t} \right) \right].$$

De manera análoga para u_2 , la solución se encuentra, como

$$u_2(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2i\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2it}} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi t}} \left[\cos \left(\frac{x^2}{2t} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{x^2}{2t} \right) \right].$$

Por lo tanto, en virtud de la Observación 3.2.2, la solución fundamental de la ecuación (3.6) sujeta a las condiciones (3.7) y (3.8) esta dada como

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left[u_1(x, t) + u_2(x, t) \right], \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi t}} \left[\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right] \left[\cos \left(\frac{x^2}{2t} \right) - i \operatorname{sen} \left(\frac{x^2}{2t} \right) \right] + \left[\cos \left(\frac{x^2}{2t} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{x^2}{2t} \right) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right] \right], \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cos \left(\frac{x^2}{2t} - \frac{\pi}{4} \right), \quad \square \end{aligned}$$

conocida como función de Fresnel.

La superficie de la solución se muestra en la Figura 3.1.

Proposición 3.2.1. *La función $u(x, t)$ dada en el Teorema 3.2.1, cumple que*

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = 1. \quad (3.21)$$

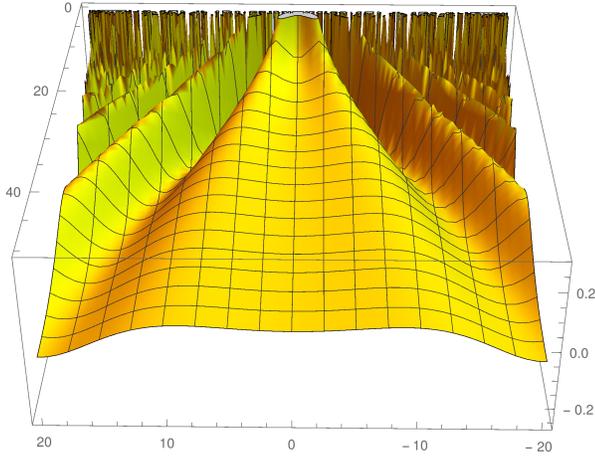


Figura 3.1: Solución a la ecuación de Fresnel clásica, para $x = \pm 20$ y $t = 50$.

Demostración. Notemos que

$$\int_0^{\infty} e^{-ix^2} dx = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx + i \int_0^{\infty} \text{sen}(x^2) dx. \quad (3.22)$$

Así haciendo el cambio de variable $x = wt$ con $w = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, en la primer integral de la ecuación (3.22), obtenemos

$$\int_0^{\infty} e^{-ix^2} dx = w^{-1} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = w = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Separando la parte real de la imaginaria llegamos a

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{\infty} \text{sen}(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Por lo tanto, el resultado de la ecuación (3.21) se cumple. □

3.2.2. Solución de la ecuación de vibración de vigas sobre la semi-recta

A continuación daremos a conocer la solución fundamental del Problema 2, usando la transformada de Fokas.

Teorema 3.2.2. *Dado el problema de valor inicial y de frontera (3.9)-(3.12), la solución está dada*

por

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx+i\lambda k^2 t} \widehat{u}_0(k) dk + \frac{\lambda}{4\pi} \int_{\partial D_1^+} e^{ikx+i\lambda k^2 t} \widehat{u}_0(-k) dk - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\partial D_1^+} e^{ikx+i\lambda k^2 t} \widetilde{g}_1(k^2, -it) dk \\
& + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx-i\lambda k^2 t} \widehat{u}_0(k) dk + \frac{\lambda}{4\pi} \int_{\partial D_2^+} e^{ikx-i\lambda k^2 t} \widehat{u}_0(-k) dk + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\partial D_2^+} e^{ikx-i\lambda k^2 t} \widetilde{g}_1(k^2, it) dk,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

en donde, ∂D_1^+ y ∂D_2^+ son curvas adecuadas en \mathbb{C}^+ respectivamente.

Demostración. Primero notemos que la ecuación (3.9) se puede escribir como en la expresión (3.5). Luego haciendo el cambio de variable $t' = \pm it$ se tiene

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t'} u_1(x, t') = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1(x, t'), \\ \frac{\partial}{\partial t'} u_2(x, t') = -\lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_2(x, t'). \end{cases} \tag{3.24}$$

$$\tag{3.25}$$

Usando las ideas de la sección 2.4 del capítulo 2, resolveremos la primera ecuación del sistema anterior.

Derivando la expresión (2.74) respecto de t' (vamos a considerar a t como t'), obtenemos

$$\widehat{u}_{t'}(k, t') = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} u_{t'}(x, t') dx. \tag{3.26}$$

Luego sustituyendo la ecuación (3.24) en (3.26) tenemos

$$\widehat{u}_{t'}(k, t') = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} u_{t'}(x, t') dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} u_{xx}(x, t') dx.$$

Ahora integrando por partes y usando el decaimiento de $u(x, t)$ hacia cero cuando $x \rightarrow \infty$, se tiene

$$\widehat{u}_{t'}(k, t') = \lambda \left[-u_x(0, t') - ik u(0, t') + (ik)^2 \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ikx} u(x, t') dx \right].$$

Notando que la última integral es la transformada de Fokas de $u(x, t')$ y usando las condiciones de frontera (3.11) y (3.12), obtenemos

$$\widehat{u}_{t'}(k, t') = \lambda \left[-g_1(t') - ik g_0(t') + (ik)^2 \widehat{u}(k, t') \right]. \tag{3.27}$$

Multiplicando por el factor integrante $e^{-\lambda(ik)^2 t'}$ e integrando por partes en la ecuación (3.27) tene-

mos, por un lado

$$\begin{aligned} \int_0^{t'} e^{-\lambda(ik)^2 s} \widehat{u}_s(k, s) ds &= \int_0^{t'} e^{-\lambda(ik)^2 s} d\widehat{u}(k, s) = e^{-\lambda(ik)^2 t'} \widehat{u}(k, t') - \widehat{u}(k, 0) + \lambda(ik)^2 \int_0^{t'} e^{-\lambda(ik)^2 s} \widehat{u}(k, s) ds, \\ &= e^{-\lambda(ik)^2 t'} \widehat{u}(k, t') - \widehat{u}_0(k) + \lambda(ik)^2 \int_0^{t'} e^{-\lambda(ik)^2 s} \widehat{u}(k, s) ds, \end{aligned}$$

en donde, hemos usado la condición inicial (3.10).

Es decir,

$$\int_0^{t'} e^{-\lambda(ik)^2 s} \widehat{u}_s(k, s) ds = e^{-\lambda(ik)^2 t'} \widehat{u}(k, t') - \widehat{u}_0(k) + \lambda(ik)^2 \int_0^{t'} e^{-\lambda(ik)^2 s} \widehat{u}(k, s) ds. \quad (3.28)$$

Y por el otro lado

$$-\lambda \int_0^{t'} e^{-\lambda(ik)^2 s} g_1(s) ds - \lambda ik \int_0^{t'} e^{-\lambda(ik)^2 s} g_0(s) ds + \lambda(ik)^2 \int_0^{t'} e^{-\lambda(ik)^2 s} \widehat{u}(k, s) ds, \quad (3.29)$$

De esta forma de las ecuaciones (3.28) y (3.29), obtenemos la siguiente relación

$$e^{\lambda k^2 t'} \widehat{u}(k, t') = \widehat{u}_0(k) - \lambda \tilde{g}_1(k^2, t') - \lambda ik \tilde{g}_0(k^2, t'), \quad \text{Im}(k) \leq 0, \quad (3.30)$$

en donde,

$$\tilde{g}_j(k, t') = \int_0^{t'} e^{ks} \partial_x^j u(0, s) ds, \quad j = 0, 1, \quad \text{Im}(k) \leq 0. \quad (3.31)$$

Aplicando la transformada inversa de Fokas definida en la ecuación (2.75) a la ecuación (3.30), se tiene una representación integral para $u(x, t')$

$$u(x, t') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - \lambda k^2 t'} \widehat{u}_0(k) dk - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - \lambda k^2 t'} [\tilde{g}_1(k^2, t') + ik \tilde{g}_0(k^2, t')] dk, \quad (3.32)$$

en donde, $\text{Re}(ik) < 0$ y $\text{Re}(k^2) > 0$ para que las integrales existan, ya que $x > 0$ y $t' > 0$.

Hasta este momento solo hemos encontrado una representación integral para el problema de Cauchy en cuestión. A continuación realizaremos un análisis detallado para determinar en donde son seccionalmente analíticos los integrandos de cada integral que aparece en la representación de la solución $u(x, t')$. Esto con el fin de asegurar la existencia de tales integrales. Y lo más importante es que deformaremos los límites de integración sobre todo \mathbb{R} a una curva adecuada en el plano complejo.

Sea $D = \{k \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(k^2) < 0\}$ Y $D^+ = D \cap \mathbb{C}^+$ y $D^- = D \cap \mathbb{C}^-$ (como en la sección 2.4 del capítulo anterior). Luego si $0 \leq \arg(k) < 2\pi$, se obtiene

$$k^2 = |k|^2 [\cos(2 \arg(k)) + i \operatorname{sen}(2 \arg(k))].$$

Luego que $\operatorname{Re}(k^2) < 0$ es equivalente a escribir cuando $\cos(2 \arg(k)) < 0$. Así encontramos que D , esta dada por

$$D = \left\{ k \in \mathbb{C} : \arg(k) \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right) \right\},$$

Realizando el cambio de variable $k \rightarrow -k$ en la expresión (3.30) se tiene

$$e^{\lambda k^2 t'} \hat{u}(-k, t') = \hat{u}_0(-k) - \lambda \left[\tilde{g}_1(k^2, t') - ik \tilde{g}_0(k^2, t') \right], \quad \operatorname{Im}(k) \geq 0, \quad (3.33)$$

Notemos que el integrando de la segunda integral en (3.32) es entera y tiene decaimiento cuando $k \rightarrow \infty$ para $k \in \mathbb{C}^+ \setminus D^+$. Consideremos el contorno $\Gamma = [-R, R] \cup \gamma_1 \cup \partial D^+ \cup \gamma_2$ como se muestra en la Figura 3.2, entonces usando la analiticidad de la función $e^{ikx - \lambda k^2 t'} \tilde{g}_j(k^2, t')$, para $j = 0, 1$ y el teorema de Cauchy, se tiene

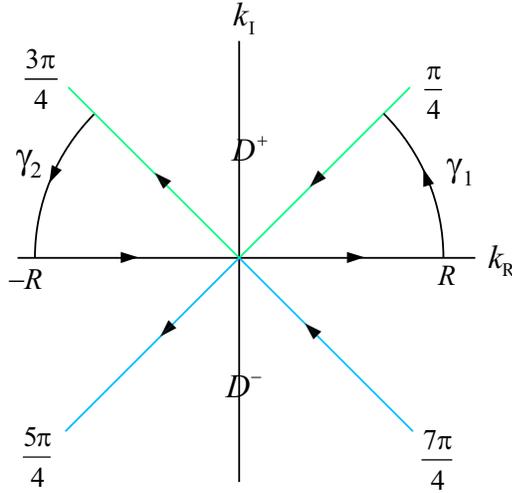


Figura 3.2: Contorno ∂D^+ para la ecuación (3.24)

$$\int_{\Gamma} e^{ikx - \lambda k^2 t'} \tilde{g}_j(k^2, t') dk = \left(\int_{-R}^R + \int_{\gamma_1} + \int_{\partial D^+} + \int_{\gamma_2} \right) e^{ikx - \lambda k^2 t'} \tilde{g}_j(k^2, t') dk = 0.$$

Luego por el lema de Jordan resulta que la integral a lo largo de γ_1 y γ_2 desaparece debido al decaimiento de la función $e^{ikx - \lambda k^2 t'}$ en la región $\mathbb{C}^+ \setminus D^+$. De este modo, obtenemos que la integral a lo largo de la línea real puede ser reemplazada por ∂D^+ .

Por lo tanto, despejando $g_0(t')$ de la expresión (3.33) y sustituyendo en (3.32) e integrando sobre ∂D^+ se tiene

$$u(x, t') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - \lambda k^2 t'} \widehat{u}_0(k) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{ikx - \lambda k^2 t'} [e^{\lambda k^2 t'} \widehat{u}(-k, t') + 2\tilde{g}_1(k^2, t') - \widehat{u}_0(-k)] dk$$

Esta expresión ya no depende del dato de frontera $\tilde{g}_0(t')$. Sin embargo, la función $u(x, t')$ también aparece en la segunda integral del lado derecho. Este problema se resuelve haciendo uso de la analiticidad de la función $e^{ikx} \widehat{u}(-k, t')$ de la siguiente manera. Notemos que la función $\widehat{u}(-k, t')$ es analítica y acotada en \mathbb{C}^+ , es decir, $\widehat{u}(-k, t') \rightarrow 0$ uniformemente cuando $k \rightarrow \infty$. Esto implica que la integral de $e^{ikx} \widehat{u}(-k, t')$ a lo largo de una curva cerrada y acotada en \mathbb{C}^+ desaparece en virtud del teorema de Cauchy. Así,

$$\int_{\partial D^+} e^{ikx} \widehat{u}(-k, t') dk = 0;$$

por lo tanto,

$$u(x, t') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - \lambda k^2 t'} \widehat{u}_0(k) dk + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{ikx - \lambda k^2 t'} \widehat{u}_0(-k) dk - \frac{\lambda}{\pi} \int_{\partial D^+} e^{ikx - \lambda k^2 t'} \tilde{g}_1(k^2, t') dk.$$

Pero como $t' = \pm it$, entonces la región D , sobre la cual se tomará ∂D^+ estará dada de la siguiente manera

$$D_1 = \left\{ k \in \mathbb{C} : \arg(k) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right) \right\} \quad y \quad D_1^+ = \left\{ k \in \mathbb{C} : \arg(k) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right) \right\}.$$

Así la solución $u_1(x, t)$ está dada como

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx + i\lambda k^2 t} \widehat{u}_0(k) dk + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\partial D_1^+} e^{ikx + i\lambda k^2 t} \widehat{u}_0(-k) dk - \frac{\lambda}{\pi} \int_{\partial D_1^+} e^{ikx + i\lambda k^2 t} \tilde{g}_1(k^2, -it) dk.$$

De manera análoga se tiene que la solución $u_2(x, t)$ de la ecuación (3.25), está dada por

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - i\lambda k^2 t} \widehat{u}_0(k) dk + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\partial D_2^+} e^{ikx - i\lambda k^2 t} \widehat{u}_0(-k) dk + \frac{\lambda}{\pi} \int_{\partial D_2^+} e^{ikx - i\lambda k^2 t} \tilde{g}_1(k^2, it) dk,$$

en donde ahora,

$$D_2 = \left\{ k \in \mathbb{C} : \arg(k) \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2} \right) \right\} \quad y \quad D_2^+ = \left\{ k \in \mathbb{C} : \arg(k) \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \right\}.$$

Las regiones para $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ se pueden ver en la Figura 3.3. Por lo tanto, en virtud de la Observación 3.2.2 se obtiene la expresión (3.23) del Teorema 3.2.2. \square

Algunas observaciones importantes, relacionadas con el Teorema 3.2.2, son la que se mencionan a continuación

Observación 3.2.3. En la relación (3.33) también se pudo haber despejado el dato $\tilde{g}_1(t)$. Y en este caso, la solución del Teorema 3.2.2 estará dada por

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx+i\lambda k^2 t} \hat{u}_0(k) dk - \frac{\lambda}{4\pi} \int_{\partial D_1^+} e^{ikx+i\lambda k^2 t} \hat{u}_0(-k) dk - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\partial D_1^+} e^{ikx+i\lambda k^2 t} ik \tilde{g}_0(k^2, -it) dk \\
 & + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx-i\lambda k^2 t} \hat{u}_0(k) dk - \frac{\lambda}{4\pi} \int_{\partial D_2^+} e^{ikx-i\lambda k^2 t} \hat{u}_0(-k) dk + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\partial D_2^+} e^{ikx-i\lambda k^2 t} ik \tilde{g}_0(k^2, it) dk,
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

en donde, ∂D_1^+ y ∂D_2^+ siguen siendo curvas adecuadas en \mathbb{C}^+ respectivamente (véase Figura 3.3).

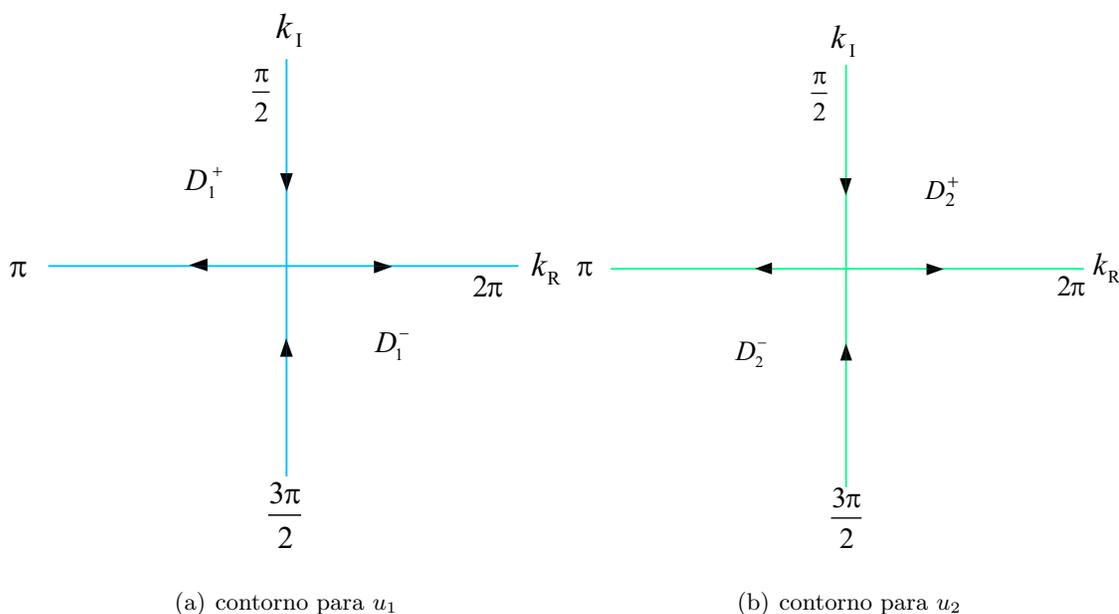


Figura 3.3: Contornos de las soluciones u_1 y u_2

Observación 3.2.4. Si suponemos que $\tilde{g}_j(t) = 0$, para $j = 0, 1$, $u_0(x) = \delta(x - y)$ y $\lambda = \frac{1}{2}$. Entonces por el teorema anterior $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ están dadas por

$$\begin{aligned}
 u_1(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ik(x-y)+i\lambda k^2 t} dk = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi t}} e^{-i\frac{(x-y)^2}{2t}}, \\
 u_2(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ik(x-y)-i\lambda k^2 t} dk = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi t}} e^{i\frac{(x-y)^2}{2t}}.
 \end{aligned}$$

Luego, en virtud de la Observación 3.2.2, podemos escribir la solución general como

$$u(x, t; y, 0) = \frac{1}{2} \left[p(x, it; y, 0) + p(x, -it; y, 0) \right], \tag{3.35}$$

en donde, cada $p(x, \pm it; y, 0)$ es la función de transición de un movimiento browniano absorbente y $u(x, t; y, 0)$ representa la probabilidad de que los dos movimientos brownianos inicien en cero (véase expresión (3.2)). Así,

$$u(x, t; y, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[\cos \left(\frac{(x-y)^2}{2t} - \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(\frac{(x+y)^2}{2t} - \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (3.36)$$

la cual coincide con la solución del Teorema 2.1 reportada en [71].

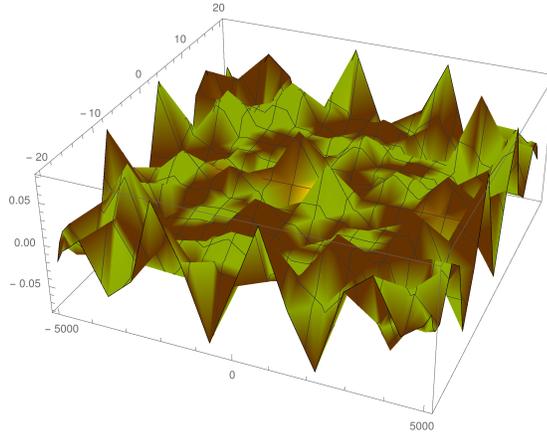


Figura 3.4: Superficie solución de la expresión (3.36), para $x = \pm 5000$ y $t = 100$

Por último encontramos la solución del tercer problema.

Teorema 3.2.3. [71] *Dada la ecuación (3.13) con condición inicial (3.14) y condición de frontera (3.15), la solución esta dada por*

$$u_{2\alpha}(x, t) = \frac{1}{\pi\sqrt{2t^\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\sqrt{2} \frac{|x|}{\sqrt{t^\alpha}} \right)^n \cos \left(\frac{n+1}{4} \pi \right) \times \operatorname{sen} \left(\frac{n+1}{2} \pi \alpha \right) \Gamma \left(\frac{n+1}{2} \alpha \right),$$

conocida como solución fundamental fraccionaria de Fresnel.

Demostración. Aplicando la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo dada en la expresión (1.41) para $0 < \alpha \leq 1$, a la ecuación

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t'^\alpha} u(x, t') = \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t'),$$

y utilizando la fórmula para la derivada ordinaria cuando $\alpha = 1$; además teniendo en cuenta la

condición $u(x, 0) = g(x)$, resulta,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{t'} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial t'^\alpha} \right) (x, s) &= \int_0^\infty e^{-st'} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial t'^\alpha} \right) (x, t') dt', \\ &= s^\alpha (\mathcal{L}_{t'} u) (x, s) - s^{\alpha-1} u^{(0)}(0), \\ &= s^\alpha (\mathcal{L}_{t'} u) (x, s) - s^{\alpha-1} g(x),\end{aligned}$$

y por tanto,

$$s^\alpha (\mathcal{L}_{t'} u) (x, s) - s^{\alpha-1} g(x) = \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mathcal{L}_{t'} u) (x, s).$$

Ahora, si a esta expresión le aplicamos la transformada de Fourier para derivadas enteras, dada en la fórmula (A.5) (véase Apéndice A), obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_x \left\{ s^\alpha (\mathcal{L}_{t'} u) (x, s) - s^{\alpha-1} g(x) \right\} (k, s) &= s^\alpha (\mathcal{F}_x \mathcal{L}_{t'} u) (k, s) - s^{\alpha-1} (\mathcal{F}_x g) (k) \\ &= s^\alpha \hat{u}(k, s) - s^{\alpha-1} G(k).\end{aligned}\tag{3.37}$$

Por otro lado tenemos

$$\mathcal{F}_x \left\{ \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mathcal{L}_{t'} u) \right\} (k, s) = \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mathcal{F}_x \mathcal{L}_{t'} u) (k, s) = \lambda^2 (-ik)^2 \hat{u}(k, s).\tag{3.38}$$

Luego igualando (3.37) y (3.38) se deduce la relación explícita $\hat{u}(k, s)$

$$\hat{u}(k, s) = \frac{s^{\alpha-1} G(k)}{s^\alpha + \lambda^2 k^2}.\tag{3.39}$$

Ahora aplicando la transformadas de Laplace y de Fourier inversas a la ecuación (3.39), obtenemos

$$\tilde{u}(x, s) = (\mathcal{F}_k^{-1}(\hat{u}))(x, s) = \frac{s^{\alpha-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(k)}{s^\alpha + \lambda^2 k^2} e^{-ikx} dk.$$

Nuevamente aplicando la transformada de Laplace inversa a la ecuación anterior llegamos a

$$u(x, t') = \mathcal{L}_s^{-1} \{ \tilde{u}(x, s) \} (x, t') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st'} s^{\alpha-1} ds \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(k)}{s^\alpha + \lambda^2 k^2} e^{-ikx} dk.$$

También se puede aplicar la transformada de Laplace inversa a la ecuación (3.39) y utilizando la relación (B.11) (véase Apéndice B) con $a = -(k\lambda)^2$, $m = 0$ y $\beta = 1$, obtenemos

$$\mathcal{L}_{t'} \left\{ E_{\alpha,1}(-(k\lambda)^2 t'^\alpha) \right\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda^2 k^2}.\tag{3.40}$$

Así aplicando la transformada de Laplace inversa a la ecuación (3.40), llegamos a

$$E_{\alpha,1}(-(k\lambda)^2 t'^\alpha) = G(k) \mathcal{L}_s^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda^2 k^2} \right\},$$

ó en forma equivalente

$$(\mathcal{F}_x u)(k, t') = G(k)E_{\alpha,1}(-(k\lambda)^2 t'^{\alpha}). \quad (3.41)$$

Por lo tanto, aplicando la transformada de Fourier inversa dada en la Definición 1.2.11 a la ecuación (3.41) y teniendo en cuenta $g(x) = \delta(x)$ llegamos a

$$u(x, t') = (\mathcal{F}_k^{-1} \mathcal{F}_x u)(x, t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\alpha,1}(-(k\lambda)^2 t'^{\alpha}) e^{-ikx} dk,$$

siempre que la integral exista.

Escribiendo la función Mittag-Leffler mediante su representación integral (B.2) (véase Apéndice B), se tiene

$$\begin{aligned} u(x, t') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\alpha,1}(-(\lambda^2 k^2) t'^{\alpha}) e^{-ikx} dk, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} \frac{e^{\sigma} e^{\alpha-1}}{\sigma^{\alpha} + (\lambda k)^2 t'^{\alpha}} d\sigma dk, \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} \frac{e^{\sigma} \sigma^{\alpha-1} \sigma^{-\frac{\alpha}{2}} t'^{\frac{\alpha}{2}}}{2\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \frac{t'^{\frac{\alpha}{2}} \lambda}{\pi \left[\left(\frac{\sigma^{\frac{\alpha}{2}}}{t'^{\frac{\alpha}{2}} \lambda} \right)^2 + \lambda^2 \right]} dk d\sigma. \end{aligned}$$

Ahora observando que para $\lambda > 0$ la expresión interna en la última integral es la transformada de Fourier con respecto a la variable k , de la densidad de distribución de probabilidad Lévy estable de Cauchy dada en (2.32), podemos escribir

$$u_1(x, t') = \frac{t'^{-\frac{\alpha}{2}}}{2\lambda} \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} \frac{e^{\sigma - \frac{|x|}{t'^{\frac{\alpha}{2}} \lambda} \sigma^{\frac{1}{2}}}}{\sigma^{1-\frac{\alpha}{2}}} d\sigma = \frac{1}{2\lambda t'^{\frac{\alpha}{2}}} W\left(-\frac{|x|}{t'^{\frac{\alpha}{2}} \lambda}; -\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right). \quad (3.42)$$

Luego, haciendo el cambio de variable $t'^{\alpha} = \pm i t^{\alpha}$ en la ecuación (3.42), obtenemos

$$u_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2^3 t^{\alpha}}} \left[\frac{1}{\sqrt{-i}} W\left(-\sqrt{-\frac{2}{i}} \frac{|x|}{\sqrt{t^{\alpha}}}; -\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right]. \quad (3.43)$$

De manera similar, encontramos que la solución para u_2 esta dada como

$$u_2(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2^3 t^{\alpha}}} \left[\frac{1}{\sqrt{i}} W\left(-\sqrt{\frac{2}{i}} \frac{|x|}{\sqrt{t^{\alpha}}}; -\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right]. \quad (3.44)$$

Por lo tanto, en virtud de la Observación 3.2.2, la solución general esta expresada como

$$\begin{aligned} u_{2\alpha}(x, t) &= \frac{1}{2} \left[u_1(x, t) + u_2(x, t) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^3 t^{\alpha}}} \left[\frac{1}{\sqrt{-i}} W\left(-\sqrt{-\frac{2}{i}} \frac{|x|}{\sqrt{t^{\alpha}}}; -\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{i}} W\left(-\sqrt{\frac{2}{i}} \frac{|x|}{\sqrt{t^{\alpha}}}; -\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^3 t^{\alpha}}} \left[e^{i\frac{\pi}{4}} W\left(-\sqrt{2} \frac{|x|}{\sqrt{t^{\alpha}}} e^{i\frac{\pi}{4}}; -\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right) + e^{-i\frac{\pi}{4}} W\left(-\sqrt{2} \frac{|x|}{\sqrt{t^{\alpha}}} e^{-i\frac{\pi}{4}}; -\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Luego, escribiendo a la función de Wright en forma de serie (véase fórmula (B.12) Apéndice B) y usando la fórmula (B.7) (véase Apéndice B), se tiene

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2^3 t^\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[e^{i\frac{\pi}{4}} \left(-\sqrt{2} \frac{|x|}{\sqrt{t^\alpha}} e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^n + e^{-i\frac{\pi}{4}} \left(-\sqrt{2} \frac{|x|}{\sqrt{t^\alpha}} e^{i\frac{-\pi}{4}} \right)^n \right] \frac{1}{n! \Gamma(-\frac{\alpha n}{2} + 1 - \frac{\alpha}{2})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^3 t^\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\sqrt{2} \frac{|x|}{\sqrt{t^\alpha}} \right)^n \frac{e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{4}n} + e^{-i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{4}n}}{n! \Gamma(-\frac{\alpha n}{2} + 1 - \frac{\alpha}{2})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2 t^\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\sqrt{2} \frac{|x|}{\sqrt{t^\alpha}} \right)^n \frac{\cos(\frac{n+1}{4}\pi)}{n! \Gamma(-\frac{\alpha n}{2} + 1 - \frac{\alpha}{2})} \\
&= \frac{1}{\pi \sqrt{2 t^\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\sqrt{2} \frac{|x|}{\sqrt{t^\alpha}} \right)^n \cos\left(\frac{n+1}{4}\pi\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}\pi\alpha\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right). \quad \square
\end{aligned}$$

La gráfica superficie de la solución se muestra en la Figura 3.5.

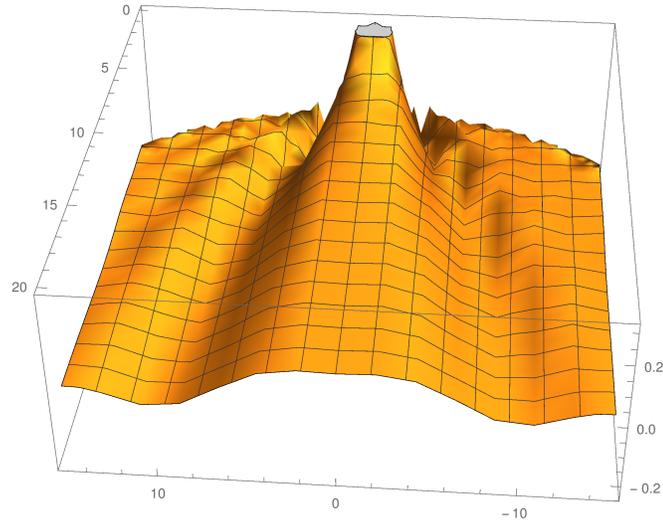


Figura 3.5: Superficie de la solución del Problema 3, para $x = \pm 15$ y $\alpha = 0.8$

Conclusiones y trabajos futuros

A continuación se presentan las conclusiones y las recomendaciones para la elaboración de futuras investigaciones.

4.1. Conclusiones

- Generalizando el método utilizado por Dirac para obtener su ecuación a partir de la ecuación de Klein-Gordon, se ha considerado una posible definición de raíz cuadrada de la ecuación de vibración fraccionaria de vigas expresión (2.35), definida por medio del sistema de ecuaciones (2.36). La interpretación física de este sistema depende de la estructura de las matrices y en el orden de las derivadas.
- El sistema (2.36) puede ser interpretado como una interpolación desde el “interior” de las ecuaciones clásicas de difusión y de ondas, cuando $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$ y $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, que en efecto, tienen como solución a las componentes u_1 y u_2 .
- Dependiendo de la forma que tomen las matrices de Pauli A y B dadas en la expresión (2.7), la ecuación (2.36) tiene dos expresiones posibles. Luego, con el fin de asignar un significado físico a las componentes que resuelven el sistema, en el álgebra formada por las matrices de Pauli se ha restringido el estudio a aquellas parejas de matrices A y B reales, dentro de las cuales solo dos parejas de matrices dan lugar a dos sistemas de ecuaciones no equivalentes, uno de componentes separadas y otro de componentes acopladas.
- Realmente aunque nos encontramos con dos sistemas de ecuaciones no equivalentes, se ha

demostrado que a través de una transformación, se pueden obtener las soluciones acopladas como semi-suma de las soluciones no acopladas. Así, si encontramos las soluciones analíticas del sistema de ecuaciones desacoplado (2.38)-(2.39), estaremos encontrando las del sistema acoplado de una manera muy sencilla.

- Encontramos las soluciones a problemas de Cauchy relacionados con los sistemas desacoplado (acoplado) (2.38), (2.39) y (2.41), (2.42) en \mathbb{R} y \mathbb{R}^+ , usando la transformada de Fourier y Laplace
- Mediante el método de Fokas para resolver ecuaciones diferenciales parciales, encontramos soluciones explícitas de los sistemas de ecuaciones desacoplado (2.38) y (2.39) en la semi-recta, en donde se deforma el eje real a un contorno apropiado del plano complejo.
- Al tratar con la delta de Dirac como condición inicial, se espera que las soluciones obtenidas, en términos de la función de Wright, para estos sistemas de ecuaciones acoplado (desacoplado) resulten ser una función de densidad para un cierto valor de los parámetros de α y β .
- En cuanto a la ecuación de Fresnel o de vibración de vigas vista como un producto de dos ecuaciones de Schrödinger y después, a través del cambio de variable $t' = \pm it$, como un producto de ecuaciones de difusión, usando la regla dada en la Observación 3.2.2 nos enfocaremos a resolver problemas de Cauchy con diversas condiciones de frontera y considerando a la función Delta de Dirac como condición inicial. De esta forma las soluciones se interpretan como la probabilidad de dos movimientos brownianos ajenos, uno que se encuentre en un conjunto dx después de un tiempo it y otro que se encuentre en el conjunto dx pero ahora con tiempo $-it$. Se probó además que para $\alpha = \beta = 1$ la solución al primer problema de Cauchy es una densidad de probabilidad.
- En este mismo enfoque se consideró un problema de valor inicial y/o de frontera con datos que no son nulos (problema 2). Usando la transformada de Fokas, se obtuvo su solución, la cual coincide con la solución reportada en [71] cuando dichos datos son nulos. Este resultado no tiene precedentes.

4.2. Trabajos futuros

En cuanto a los trabajos futuros podemos incluir los siguientes tópicos:

- La discusión de las soluciones acopladas del sistema de ecuaciones (2.41) y (2.42) sobre la semi-recta (\mathbb{R}^+) haciendo uso del método de Fokas para resolver ecuaciones en derivadas parciales a través de la transformada que lleva su nombre.
- Un análisis detallado al problema de valor inicial y/o de frontera considerando datos no nulos (problema 3) asociado a la ecuación de Fresnel o de vibración de vigas del capítulo 3, usando la transformada de Fokas para encontrar soluciones sobre la semi-recta (\mathbb{R}^+).
- Obtener fórmulas más simples de las soluciones encontradas para los sistemas de ecuaciones desacoplado (2.38) y (2.39), en donde se uso el método de Fokas.
- En cuanto a los momentos de las soluciones fundamentales para los problemas de Cauchy asociados a los sistemas desacoplados (acoplados) realizar un estudio más detallado para darle una interpretación física.

Transformada de Laplace y de Fourier clásica

Proposición A.0.1. Sea $f(t)$ una función de orden exponencial $\nu > 0$ y continua o continua a trozos en $[0, \infty]$ tal que $f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ son continuas en $[0, \infty]$ y de orden exponencial y $f^{(n)}$ continua a trozos en $[0, T]$, $T > 0$. Entonces la transformada de Laplace esta dada por

$$\mathcal{L}_t \left(f^{(n)}(t) \right) (s) = s^n \mathcal{L}_t (f(t)) (s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0), \quad (\text{A.1})$$

y existe para todo $s > \nu$.

Demostración. La demostración la haremos por inducción matemática sobre n .

Así, para $n = 1$ integrando por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t (f'(t)) (s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= s \mathcal{L}_t (f(t)) (s) - f(0). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Ahora supongamos que se cumple para $n - 1$, es decir

$$\mathcal{L}_t \left(f^{(n-1)}(t) \right) (s) = s^{n-1} \left(\mathcal{L}_t (f(t)) (s) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k)}(0)}{s^{k+1}} \right). \quad (\text{A.3})$$

Probaremos que la expresión (A.1) es válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, por definición de transformada de Laplace y haciendo uso de la hipótesis de inducción en (A.3), se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t \left(f^{(n)}(t) \right) (s) &= \mathcal{L}_t \left(f^{(n-1)}(t) \right)' (s) = s \mathcal{L}_t \left(f^{(n-1)}(t) \right) (s) - f^{(n-1)}(0), \\ &= s \left(s^{(n-1)} \left[\mathcal{L}_t (f(t)) (s) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k)}(0)}{s^{k+1}} \right] \right) - f^{(n-1)}(0), \\ &= s^n \left(\mathcal{L}_t (f(t)) (s) - \left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k)}(0)}{s^{k+1}} + \frac{f^{(n-1)}(0)}{s^n} \right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= s^n \left(\mathcal{L}_t(f(t))(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{s^{k+1}} \right), \\
&= s^n \mathcal{L}_t(f(t))(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0).
\end{aligned}$$

□

Una propiedad más, se enuncia en la siguiente

Proposición A.0.2. *Dada una función $f(x)$ derivable con derivada continua hasta el orden n y tal que*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f^{(h)}(x) = 0, \quad h = 0, 1, \dots, n-1, \quad (\text{A.4})$$

entonces

$$\left(\mathcal{F}_x f^{(n)}(x) \right) (k) = (-ik)^n (\mathcal{F}_x f(x)) (k). \quad (\text{A.5})$$

Demostración. La demostración la haremos por inducción matemática sobre n .

Así, para $n = 1$, integrando por partes y usando la condición (A.4), obtenemos

$$\left(\mathcal{F}_x f'(x) \right) (k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f'(x) dx = e^{ikx} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - ik \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x) dx = -ik (\mathcal{F}_x f(x)) (k).$$

Ahora supongamos que se cumple para $n-1$, es decir

$$\left(\mathcal{F}_x f^{(n-1)}(x) \right) (k) = (-ik)^{n-1} (\mathcal{F}_x f(x)) (k). \quad (\text{A.6})$$

Probaremos que la expresión (A.5) es válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la definición de transformada de Fourier y haciendo uso de la hipótesis de inducción en (A.6), obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{F}_x f^{(n)}(x) \right) (k) &= \left(\mathcal{F}_x \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f'(x) \right) = (-ik)^{n-1} (\mathcal{F}_x f'(x)) (k), \\
&= (-ik)^{n-1} (-ik) (\mathcal{F}_x f(x)) (k) = (-ik)^n (\mathcal{F}_x f(x)) (k).
\end{aligned}$$

□

Funciones especiales asociadas al cálculo fraccional

En este apéndice se introduce brevemente las funciones especiales de Mittag-Leffler y de Wright, que juegan un papel muy relevante en las aplicaciones del cálculo fraccionario, debido a que aparecen de forma natural en la resolución de ecuaciones íntegro-diferenciales fraccionarias.

B.1. Función de Mittag-Leffler

La función exponencial es un caso particular de la función Mittag-Leffler y es de importancia en la teoría de ecuaciones diferenciales de orden entero, la cual la definimos mediante la siguiente serie

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)}, \quad (\text{B.1})$$

en donde $\Gamma(k+1)$ esta definida como en la Definición 1.2.13.

Las generalizaciones de está función son llamadas funciones de tipo Mittag-Leffler en uno y dos parámetros, y desempeñan un papel importante en la teoría de ecuaciones diferenciales fraccionarias. En primer lugar introduciremos la función $E_\alpha(z)$, con $\alpha > 0$, $z \in \mathbb{C}$, introducida por el matemático sueco G. M. Mittag-Leffler [40] a principios del siglo pasado y se define por medio de la siguiente expresión en serie y en forma de integral

$$E_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_\alpha} \frac{e^\sigma \sigma^{\alpha-1}}{\sigma^\alpha - z} d\sigma, \quad (\text{B.2})$$

en donde H_α es el contorno de Hankel (Figura 1.1), es decir, una curva que empieza y termina en $-\infty$ y que rodea al disco $|\sigma| \leq |z|^{\frac{1}{\alpha}}$ en el sentido positivo $|\arg \sigma| \leq \pi$. Esta definición sigue siendo válida para $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}(\alpha) > 0$ (véase [41])

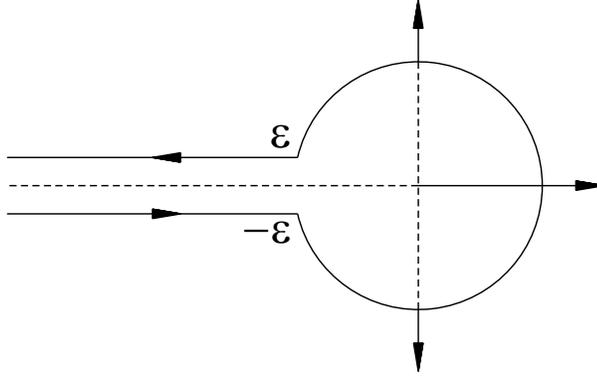


Figura B.1: Gráfica del contorno de Hankel

Esta función es una generalización de la función exponencial y coincide cuando $\alpha = 1$, es decir $E_1(z) = e^z$.

En su forma más general la función Mittag-Leffler se escribe como

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_\alpha} \frac{e^\sigma \sigma^{\alpha-\beta}}{\sigma^\alpha - z} d\sigma, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (\text{B.3})$$

Claramente se cumple que $E_\alpha(z) = E_{\alpha,1}(z)$. Luego, para algunos valores de los parámetros α y β , obtenemos

$$\begin{aligned} E_{1,1}(z) &= e^z, & E_{1,2}(z) &= \frac{e^z - 1}{z}, \\ E_{2,1}(z) &= \cosh(z), & E_{2,2}(z) &= \frac{\sinh(z)}{z}. \end{aligned}$$

Otra propiedad que será de gran importancia [42], es la siguiente

$$mz^n E_{m\alpha,\beta+n\alpha}(z^m) = \sum_{k=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i k(m-k)}{m}} \cdot E_{\alpha,\beta}\left(ze^{\frac{2\pi i k}{m}}\right), \quad (\text{B.4})$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y enteros $m \geq 1$, $n \geq 0$. Una consecuencia de la expresión (B.4), es la llamada fórmula de duplicación, que asume la siguiente forma

$$E_{2\alpha,\beta}(z^2) = \frac{1}{2} \left[E_{\alpha,\beta}(z) + E_{\alpha,\beta}(-z) \right]. \quad (\text{B.5})$$

A continuación, utilizaremos la representación de la función gama a lo largo del contorno de Hankel.

Proposición B.1.1. *La representación integral de la función gama sobre el contorno de Hankel esta dada mediante la siguiente expresión .*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+0} e^t t^{-z} dt. \quad (\text{B.6})$$

Demostración. Consideramos las siguientes trayectorias

$$\gamma_0(\theta) = \theta e^{-i\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq \infty, \quad \gamma_1(\theta) = \epsilon e^{i\theta}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad \gamma_2(\theta) = \theta e^{i\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq \infty,$$

en donde $C = \gamma_0(\theta) + \gamma_1(\theta) + \gamma_2(\theta)$.

Entonces

$$\int_C t^{-z} e^t dt = \int_{+\infty}^0 (\theta e^{-i\pi})^{-z} e^{\theta e^{-i\pi}} e^{-i\pi} d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} (\epsilon e^{-i\theta})^{-z} e^{\epsilon e^{i\theta}} \epsilon i e^{i\theta} d\theta + \int_0^{\infty} (\theta e^{i\pi})^{-z} e^{\theta e^{i\pi}} e^{i\pi} d\theta.$$

Así al tomar el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$, resulta

$$\int_{\gamma_1} t^{-z} e^{-t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} (\epsilon e^{it})^{-z} i \epsilon e^{it} e^{\epsilon e^{it}} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \epsilon^{-z} e^{-itz} (i \epsilon e^{it}) e^{\epsilon e^{it}} dt = 0.$$

Así,

$$\begin{aligned} \int_C t^{-z} e^t dt &= \int_{+\infty}^0 (\theta e^{-i\pi})^{-z} e^{\theta e^{-i\pi}} e^{-i\pi} d\theta + \int_0^{\infty} (\theta e^{i\pi})^{-z} e^{\theta e^{i\pi}} e^{i\pi} d\theta, \\ &= \int_0^{\infty} t^{-z} e^{i\pi z} e^{-t} dt - \int_0^{\infty} t^{-z} e^{-i\pi z} e^{-t} dt, \\ &= (e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}) \int_0^{\infty} t^{-z} e^{-t} dt, \\ &= 2i \sin(\pi z) \int_0^{\infty} t^{-z} e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Luego notando que

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad (\text{B.7})$$

obtenemos la fórmula (B.6). □

Una prueba de la fórmula se puede consultar en [42].

B.2. Transformada de Laplace de la función Mittag-Leffler

En la aplicación del método de la transformada de Laplace para solucionar ecuaciones diferenciales fraccionarias, resultará esencial conocer las relaciones existentes entre la función Mittag-Leffler y la transformada de Laplace. Algunas de ellas son las siguientes:

Proposición B.2.1. *La transformada de Laplace de la función Mittag-Leffler definida en (B.2) con $\alpha > 0$ esta dada por la siguiente expresión*

$$\mathcal{L}_t (E_\alpha(at^\alpha)) (s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - a}, \quad s > |a|^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (\text{B.8})$$

Demostración. Partiendo del lado derecho de la ecuación (B.8) y usando la expansión en serie de la función Mittag-Leffler e intercambiando el signo de la suma con la integral, lo cual es válido gracias a la convergencia uniforme de la serie que define a la función Mittag-Leffler, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t(E_\alpha(at^\alpha))(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{s^{\alpha k + 1}}, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{s^{\alpha k + 1}} = s^{\alpha - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{(s^\alpha)^{k+1}} = \frac{s^{\alpha - 1}}{s^\alpha - a}.\end{aligned}\quad \square$$

Una segunda propiedad es la que se menciona a continuación

Proposición B.2.2. *La transformada de Laplace de la función $t^{\beta-1}$ por la función Mittag-Leffler definida en (B.3), con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ esta dada mediante la siguiente expresión*

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^\alpha) dt = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - 1}, \quad \text{Re}(s) > 1.$$

Demostración. Aplicando la transformada de Laplace dada en la Definición 1.2.8 e intercambiando el límite con la integral, siendo esto posible gracias a la convergencia uniforme de la serie que define a la función Mittag-Leffler, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-st} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^\alpha) dt &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\beta + k\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\beta-1} t^{\alpha k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\beta + k\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\beta+\alpha k-1} dt, \\ &= s^{\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(s^\alpha)^{k+1}} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - 1}.\end{aligned}\quad \square$$

Otras de las propiedades importantes es la derivada m -ésima de la función Mittag-Leffler en dos parámetros definida en (B.3), la cual escribimos en seguida

Proposición B.2.3. *La derivada m -ésima de la función $E_{\alpha,\beta}^{(m)}(at^\alpha)$ para $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ está dada por*

$$E_{\alpha,\beta}^{(m)}(at^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \cdot \frac{a^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta)}. \quad (\text{B.9})$$

Demostración. Procedemos por inducción matemática sobre m . Así, para $m = 1, 2$ obtenemos

$$\begin{aligned}E_{\alpha,\beta}^{(1)}(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k z^{k-1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1) z^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha + \beta)}, \\ E_{\alpha,\beta}^{(2)}(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1) z^{k-1}}{\Gamma(\alpha k + \alpha + \beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2) z^k}{\Gamma(\alpha k + 2\alpha + \beta)}.\end{aligned}$$

Ahora supongamos que se cumple para $m - 1$, es decir

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}^{(m-1)}(at^\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1)z^k}{\Gamma(\alpha k + (m-1)\alpha + \beta)}, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m-1)!}{k!} \cdot \frac{a^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha(m-1) + \beta)}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Mostremos que se cumple para m . De este modo, usando la hipótesis de inducción resulta

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}^{(m)}(z) &= \frac{d}{dz} \left(E_{\alpha,\beta}^{(m-1)}(z) \right) = \frac{d}{dz} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1)z^k}{\Gamma(\alpha k + (m-1)\alpha + \beta)} \right), \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)z^k}{\Gamma(\alpha k + m\alpha + \beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \cdot \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + m\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

Así, sustituyendo z por at^α en la ecuación anterior obtenemos

$$E_{\alpha,\beta}^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \cdot \frac{a^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + m\alpha + \beta)}.$$

□

Otra propiedad que es de uso importante en el cálculo fraccional es la siguiente

Proposición B.2.4. *La transformada de Laplace de la m -ésima derivada de la función Mittag-Leffler calculada en (B.9) por la función $t^{\alpha m + \beta - 1}$ esta dada mediante la siguiente expresión*

$$\mathcal{L}_t \left(t^{\alpha m + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(m)}(at^\alpha) \right) (s) = \frac{m! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha - a)^{m+1}}, \quad \alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \text{Re}(s) > |a|^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (\text{B.11})$$

Demostración. Aplicando la transformada de Laplace dada en la Definición 1.2.8 e intercambiando el límite con la integral, siendo esto posible gracias a la convergencia de la función Mittag-Leffler, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t \left(t^{\alpha m + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(m)}(at^\alpha) \right) (s) &= \mathcal{L}_t \left(t^{\alpha m + \beta - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \cdot \frac{a^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta)} \right), \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)! a^k}{k! \Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta)} \cdot \mathcal{L}_t \left(t^{\alpha m + \alpha k + \beta - 1} \right), \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)! a^k}{k! \Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta)} \cdot \frac{k! \Gamma(\alpha k + \alpha m + \beta)}{s^{\alpha k + m\alpha + \beta}}, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \cdot \frac{a^k}{s^{\alpha k + \alpha m + \beta}}, \\ &= s^{-\alpha m - \beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} \left(\frac{a}{s^\alpha} \right)^k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= s^{-\alpha m - \beta} \frac{m!}{\left(1 - \frac{a}{s^\alpha}\right)^{m+1}}, \\
&= s^{-\alpha m - \beta} \frac{m!}{(s^\alpha - a)^{m+1}} s^{\alpha m + \alpha}, \\
&= \frac{m! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha - a)^{m+1}}.
\end{aligned}$$

□

Pasaremos ahora a definir la segunda función especial, la llamada función de Wright, que resulta fundamental en la resolución de las ecuaciones fraccionarias de evolución y difusión y que, como veremos, está relacionada con la función de Mittag-Leffler.

B.3. Función de Wright

La función de Wright, llamada así por el matemático británico E. M. Wright [43] puede ser definida por medio de las siguientes fórmulas en serie e integral (véase [44] fórmula 18.1(27) y 18.1(29))

$$W(z; \alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} \frac{e^{\sigma + z\sigma^{-\alpha}}}{\sigma^\beta} d\sigma, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \alpha > -1, \quad \beta > 0, \quad (\text{B.12})$$

en donde H_a es el contorno de Hankel.

En realidad, la expresión (B.12) sigue definida cuando $\beta = 0$. En efecto

$$W(z; \alpha, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n)n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n)n!}, \quad (\text{B.13})$$

ya que $\Gamma(0) = 0$.

La función de Wright, así como la de la Mittag-Leffler, también representa una generalización de la función exponencial, siendo $W(z; 0, 1) = e^z$. Otro caso particular de esta función que será muy útil conocer, es el que fue considerado por Mainardi [45]

$$W\left(-z; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}.$$

Como habíamos anunciado, existe una interesante relación, expresada vía la transformada de Laplace, entre las funciones de Mittag-Leffler y de Wright.

Proposición B.3.1. *La transformada de Laplace de la función $t^{\beta-1}$ por la función de Wright para $\alpha > -1$ y $\beta > 0$ esta dada por la siguiente fórmula*

$$\mathcal{L}_t\left(t^{\beta-1}W(\gamma t^\alpha; \alpha, \beta)\right)(s) = s^{-\beta} e^{\gamma/s^\alpha}. \quad (\text{B.14})$$

Demostración. Usaremos la expresión en forma de serie de la función de Wright dada en la ecuación (B.12). Por la definición de la transformada de Laplace, e intercambiando el símbolo de la suma con el de la integral, lo cual puede efectuarse por la convergencia uniforme, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t \left(t^{\beta-1} W(\gamma t^\alpha; \alpha, \beta) \right) (s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\beta-1} \gamma^k t^{\alpha k} dt, \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha k + \beta - 1} dt, \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!} \frac{\Gamma(\beta + \alpha k)}{s^{\beta + \alpha k}}, \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma^k}{k!} \frac{1}{s^{\beta + \alpha k}}, \\
&= s^{-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma s^{-\alpha})^k}{k!}, \\
&= s^{-\beta} e^{\gamma/s^\alpha}.
\end{aligned}$$

□

Referencias

- [1] Olver, P. J. (2014). *Introduction to partial differential equations*. Springer.
- [2] Widder, D. V. (1976). *The heat equation (Vol. 67)*. Academic Press.
- [3] Ballentine, L. E. (1990). *Quantum Mechanics*, Prentice Hall: Englewood Cliffs, New Jersey.
- [4] Marcuse, D. (1972). *Light transmission optics*.
- [5] Morse, P. M., and Feshbach, H. (1953). *Methods of theoretical physics*. International Series in Pure and Applied Physics, New York: McGraw-Hill, 1953, 1.
- [6] Bjorken, J. D., and Drell, S. D. (1964). *Relativistic quantum mechanics*.
- [7] Jackson, J. D. (1975). *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York, 2nd ed.
- [8] Salpeter, E. E. (1952). *Mass corrections to the fine structure of hydrogen-like atoms*. Physical Review, 87(2), 328.
- [9] Lämmerzahl, C. (1993). *The pseudodifferential operator square root of the Klein-Gordon equation*. Journal of mathematical physics, 34(9), 3918-3932.
- [10] Kowalski, K., Rembieliński, J. (2011). *Salpeter equation and probability current in the relativistic Hamiltonian quantum mechanics*. Physical Review A, 84(1), 012108.
- [11] Dattoli, G., Sabia, E., Górska, K., Horzela, A., Penson, K. A. (2015). *Relativistic wave equations: an operational approach*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 48(12), 125203.
- [12] Babusci, D., Dattoli, G., Quattromini, M., and Ricci, P. E. (2011). *A note on the extension of the Dirac method*. Applied Mathematics and Computation, 218(4), 1495-1497.
- [13] Babusci, D., Dattoli, G., Quattromini, M., and Ricci, P. E. (2012). *Dirac factorization and fractional calculus*. arXiv preprint arXiv:1209.2276.

- [14] Babusci, D., Dattoli, G., and Quattromini, M. (2011). *Relativistic equations with fractional and pseudodifferential operators*. Physical Review A, 83(6), 062109.
- [15] Dattoli, G., and Torre, A. *Root operators and evolution equations*.
- [16] Ozores, A. L. (1 de abril del 2014). *Cálculo fraccionario y dinámica newtoniana*.
- [17] Fokas, A. S. (2002). *Integrable nonlinear evolution equations on the half-line*. Communications in mathematical physics, 230(1), 1-39.
- [18] Fokas, A. S. (2002). *A new transform method for evolution partial differential equations*. IMA Journal of Applied Mathematics, 67(6), 559-590.
- [19] Fokas, A. S. (2002). *A new transform method for evolution partial differential equations*. IMA J. Appl. Math., 67(6), pp. 1-39.
- [20] Fokas, A. S., and Pelloni, B. (2005). *A transform method for linear evolution PDEs on a finite interval*. IMA journal of applied mathematics, 70(4), 564-587.
- [21] De Espíndola, J. J., Bavastri, C. A., and Lopes, E. M. D. O. (2008). *Design of optimum systems of viscoelastic vibration absorbers for a given material based on the fractional calculus model*. Journal of Vibration and Control, 14(9-10), 1607-1630.
- [22] Duarte, F. B., and Machado, J. T. (2006, July). *Fractional dynamics in the describing function analysis of nonlinear friction*. In Fractional Differentiation and its Applications (Vol. 2, No. 1, pp. 218-223).
- [23] Torvik, P. J., and Bagley, R. L. (1984). *On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials*. Journal of Applied Mechanics, 51(2), 294-298.
- [24] Lacroix, S. F. (1819). *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*. 3 ed., Paris Courcier.
- [25] Abel, N. H. (1823). *Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies*. Mag. Naturvidenskaberne, 2, 63-68.
- [26] Abel, N. H. (1826). *Auflösung einer mechanischen Aufgabe*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1, 153-157.
- [27] Liouville, J. (1832). *Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions*. J. l'École Roy. Polytechn., 13, sect. 21, 1-69.
- [28] Liouville, J. (1832). *Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconque*. Ibid., 71-162.

- [29] Sonine N. Ya. (1870). *Report on differentiation with an arbitrary index (Russian)*, Proc. Second Congress of Russian Naturalists, 2, 18-21.
- [30] Laurent, H. (1884). *Sur le calcul des dérivées à indices quelconques*. Nouvelles annales de mathématiques, journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, 3, 240-252.
- [31] Grünwald A. k. (1867). *Über "begrenzte" Derivationen and deren Anwendung*, Zeit. angew. Math. Physik, 12, 441-480.
- [32] Letnikov, A. V. (1868). *Theory of differentiation with an arbitrary index*. Math. Sb, 3, 1-66.
- [33] Weyl, H. (1917). *Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung*. Zürich. Naturf. Ges, 62, 296-302.
- [34] Podlubny, I. (2001). *Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation*. arXiv preprint math/0110241.
- [35] Debnath, L., Bhatta, D. (2014). *Integral transforms and their applications*. CRC press. p. 1-3
- [36] Silverman, R. A. (1972). *Special functions and their applications*. Courier Corporation.
- [37] Vladimirov, V. S. (2002). *Methods of the theory of generalized functions*. CRC Press. p. 89-91.
- [38] Samko, S. G., Kilbas, A. A., y Marichev, O. I. (1993). *Fractional integrals and derivatives*. Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon. p. 145-156.
- [39] Gelfand, I. M., y Shilov, G. F. (1964). *Generalized functions*. Vol.1, Academic Press, New York-London.
- [40] Mittag-Leffler, G. (1902). *Sur l'intégrale de Laplace-Abel*. CR Acad. Sci. Paris, 135, 937-939.
- [41] Mittag-Leffler, G. M. *Sopra la funzione $E_\alpha(x)$* . Rend. Accad. Lincei, ser, 1904, vol. 5, no 13, p. 3-5.
- [42] Podlubny, I. (1999). Fractional Differential Equations, *Mathematics in Science and Engineering* (Vol. 198). Academic Press, San-Diego.
- [43] Wright, E. M. (1933). *On the coefficients of power series having exponential singularities*. Journal of the London Mathematical Society, 1(1), 71-79.
- [44] Erdelyi, A ., Magnus, W., Oberhettinger F., y Tricomi, F. G. (1953). *Higher transcendental functions*, vol.3, McGraw-Hill Book Corp., New York.

- [45] Mainardi, F. (1994). *On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation*. Waves and Stability in Continuous Media, World Scientific, Singapore, 246-251.
- [46] Feller, W. (1952). *On a generalization of Marcel Riesz's potentials and the semi-groups generated by them*. Meddelanden Lunds Universitets Matematiska Seminarium (Comm. Sém. Mathém. Université de Lund), 73-81.
- [47] Messiah A. (1965). *Mecánica Cuántica*. Tomo II, Editorial Tecnos, Madrid.
- [48] Schweber S. S. (1966). *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*. Harper Int. Ed. New York.
- [49] Morinaga, K., and Nono, T. (1952). *J. Sci. Hiroshima Univ. (A)*, 16, 13-41.
- [50] Vázquez L. (2003). *Fractional diffusion equation with internal degrees of freedom*. Journal of Computational Mathematics, 21, 491-494.
- [51] Vázquez L. (2005). *Una Panorámica del Cálculo Fraccionario y sus Aplicaciones*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 98, 17-25.
- [52] Woit, P. (2015). *Quantum Theory, Groups and Representations: An Introduction*. Department of Mathematics, Columbia University.
- [53] Oldham, K. B., and Spanier, J. (1970). *The replacement of Fick's laws by a formulation involving semidifferentiation*. Journal of Electroanalytical Chemistry and Interfacial Electrochemistry, 26(2), 331-341.
- [54] Oldham K.B., and Spanier J. (1974). *The Fractional Calculus*. Academic Press, New York-London, 1974.
- [55] Dirac, P. A. (1928, February). *The quantum theory of the electron*. In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences (Vol. 117, No. 778, pp. 610-624). The Royal Society.
- [56] Dattoli, G., and Torre, A. (2015). *Root operators and "evolution" equations*. Mathematics, 3(3), 690-726.
- [57] Babusci, D., Dattoli, G., Quattromini, M., and Ricci, P. E. (2012). *Dirac factorization and fractional calculus*. arXiv preprint arXiv:1209.2276.

- [58] Gilmore, R. (2012). *Lie groups, Lie algebras, and some of their applications*. Courier Corporation.
- [59] Pierantozzi, T. (2007). *Estudio de generalizaciones fraccionarias de las ecuaciones estandar de difusion y de ondas*. [Universidad Complutensa], Servicio de Publicaciones.
- [60] Muñoz, J. M. S. *Historias de Matemáticas Génesis y desarrollo del Cálculo Fraccional*.
- [61] Moshrefi-Torbati, M., and Hammond, J. K. (1998). *Physical and geometrical interpretation of fractional operators*. Journal of the Franklin Institute, 335(6), 1077-1086.
- [62] Carroll, S. M. (2004). *An introduction to general relativity*. Spacetime and Geometry.
- [63] Daigneault, A., and Sangalli, A. (2001). Einstein's static universe: an idea whose time has come back. Notices of the AMS, 48(1), 9-16.
- [64] Lukacs, E. (1969). *Stable distributions and their characteristic functions*. Jahreshbericht DMV, 71, Washington, 84-114.
- [65] Al-Gwaiz, M. A. (2012). *Theory of distributions*. CRC Press.
- [66] Brown, R. (1828). XXVII. *A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies*. The Philosophical Magazine, or Annals of Chemistry, Mathematics, Astronomy, Natural History and General Science, 4(21), 161-173.
- [67] Nelson, E. (1967). *Dynamical theories of Brownian motion*. Princeton University Press.
- [68] Spence, E. A. (2011). *Boundary value problems for linear elliptic PDEs* (Doctoral dissertation, University of Cambridge).
- [69] Fokas, A. S. (2008). *A unified approach to boundary value problems* (Vol. 78). Siam.
- [70] García, J. R., Virgós, J. M., and Rovira, J. M. V. (1999). *Fundamentos de óptica ondulatoria*. Universidad de Oviedo.
- [71] Orsingher, E., and D'Ovidio, M. (2011). *Vibrations and fractional vibrations of rods, plates and Fresnel pseudo-processes*. Journal of Statistical Physics, 145(1), 143-174.