UAGro
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
Unidad Académica de Matemáticas

*Centro de Investigación en Matemática Educativa*

*Maestría en Ciencias, Área Matemática Educativa*

# TESIS

Que para obtener el grado de:

*Maestro en Ciencias Área Matemática Educativa*

Presenta:
*Lic. Jonathan Alberto Cervantes Barraza*

Directora de tesis:
*Dra. Guadalupe Cabañas-Sánchez*

Codirector:
*Dr. Jose María Sigarreta Almira*

*Chilpancingo-Guerrero, México, Julio del 2017*

# *ARGUMENTOS EN LA REFUTACIÓN DE ASERCIONES EN TORNO A LA CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS*

*Lic. JONATHAN ALBERTO CERVANTES BARRAZA*

Agradecimientos a:

*Dios,* por presentarme esta oportunidad de realizar mi estudio de posgrado en México y por colocar en mi camino personas que me contribuyeran en mi formación profesional y personal.

***RUBY BARRAZA LLINAZ y ARISTARCO JAVIER CERVANTES VIZCAINO***

Mis padres

**Horacio Solar Bezmalinovic**
**Armando Morales Carballo**
Lectores del trabajo de tesis

**HERMES NOLASCO HESIQUIO**
Profesor colaborador

**TATIANA RUIZ AFANADOR**

Mi compañera sentimental

***JOAN SEBASTIAN ORDOÑEZ***

***ANTONIA HERNADEZ***

***VIANA GARCÍA***

***MELBY CETINA***

Mis Compañeros

*De forma especial agradezco al* ***Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología, México*** *por apoyarme a realizar el sueño de estudiar la maestría en ciencias área Matemática Educativa y poder formarme profesionalmente en el campo de la Educación matemática.*

# Contenido

# *Índice de figuras*



# *Índice de tablas*

# Introducción

El interés de llevar a cabo este proyecto de investigación, fue con el fin de promover la argumentación a través de la refutación en el salón de clase de primaria, y con ello, comprender la naturaleza de los argumentos de garantía que dan estudiantes de quinto grado de primaria al validar o refutar aserciones. Teóricamente, el estudio se fundamentó en los conceptos de argumentación, argumentación colectiva desde la postura de Krummheuer (1995), refutación de argumentos y tipos de argumentos que emergen en la argumentación.

Para el logro del objetivo de investigación, se llevó a cabo un experimento de enseñanza, el cual permitió analizar la argumentación suscitada entre los estudiantes a través de una secuencia de tareas matemáticas. El análisis se sustentó en la reconstrucción de la argumentación colectiva (Conner, 2008), suscitada entre estudiantes-profesor y la clasificación de los argumentos establecidos por los estudiantes con base en el contenido de la garantía (Macagno, Mayweg-Paus & Kuhn, 2015).

En los resultados de esta investigación se caracterizan los tipos de argumentos que emergen en los estudiantes de quinto grado de primaria, en el marco de la refutación de aserciones mientras discuten desde lo colectivo propiedades y características invariantes de triángulos. Asimismo, se evidencian los tipos de argumentos que caracterizan la refutación de aserciones.

El estudio se reporta en cinco capítulos, el primer capítulo presenta una revisión de la literatura especializada: artículos científicos, actas de congresos internacionales y libros referentes a la argumentación matemática a nivel primaria, secundaria-bachillerato y universidad. Además, señala qué se ha estudiado en relación con la refutación a nivel primaria y la clasificación de triángulos en el contexto de la argumentación colectiva. Asimismo, se plantea la problemática, la pregunta de investigación junto con el objetivo general y específicos.

En el segundo capítulo se encuentra el cuerpo teórico que sostiene la investigación en el campo de la Educación Matemática. Constituido por un marco conceptual que integra los conceptos de: argumentación, razonamiento, argumentación colectiva, refutación de argumentos, y tipos de argumentos. Este marco es una integración de conceptos relacionados con el estudio de la argumentación colectiva, cuyo objetivo es, facilitar la comprensión de la naturaleza de los argumentos de los estudiantes al validar o refutar aserciones.

En el tercer capítulo, se presenta la metodología implementada para el desarrollo de la investigación, se explica detalladamente el cómo se llevó a cabo la investigación, el enfoque investigativo adoptado, método de reconstrucción de la argumentación, implementos para la toma de datos, y se detalla en qué consistió el análisis retrospectivo de los datos.

El cuarto capítulo, presenta los resultados de la investigación, se muestra la caracterización de los argumentos que emergen a la hora de refutar aserciones en la argumentación colectiva. Asimismo, se muestra una breve reflexión en torno a los aspectos matemáticos que de manera transversal, tuvieron presencia en las respuestas de la tarea matemática resuelta por los estudiantes, el uso de ciertas propiedades matemáticas y cómo éstas fueron implementadas por los estudiantes en sus argumentos.

En el quinto capítulo, se discuten los resultados de la investigación, con base en los siguientes aspectos: el contenido y estructura de la argumentación, así también sobre los argumentos que caracterizan la refutación de aserciones y cómo promovieron la configuración de las características invariantes de los triángulos. En el mismo capítulo, se dan conclusiones relativas a la metodología, limitaciones de la investigación y sobre todo, se responde a la problemática planteada.

# CAPÍTULO 1

# Problema de investigación: Contextualización y objetivos

## 1.1. Contexto y problema de investigación

En general, se acepta que la argumentación y la prueba son fundamentales en el estudio de las matemáticas (Conner, 2017; Komatsu, 2016), pues contribuyen a que los estudiantes aprendan y participen en matemáticas, explorando, conjeturando y justificando sus ideas (Rumsey & Langrall, 2014). La *prueba* es la forma en que se establece la validez de las afirmaciones matemáticas; como tal, es la piedra angular de la actividad matemática (Conner, 2007), de ahí que *probar* se constituya en una actividad matemática básica, asimismo, el que se acepte que la justificación y la prueba deben ser centrales en el aprendizaje de la matemática en todos los niveles escolares (Komatsu, 2016).

> La elaboración de pruebas es sólo uno de los aspectos del procedimiento de validación. Otro de estos aspectos lo constituye el análisis crítico de las pruebas, es decir, la exploración de los objetos matemáticos, cuya verdadera naturaleza es siempre cuestionada (Balacheff, 2000, p. 32).

Por cuanto a la argumentación, la investigación ha evidenciado que a través de ello, los estudiantes tienen la oportunidad de conectar conceptos nuevos con conocimiento previo (e.g., Wagner, Smith, Conner, Singletary & Francisco, 2014), y a desarrollar una comprensión conceptual más profunda de la materia de enseñanza (Andriessen, 2006, en Conner, et al., 2014). Además, que en particular la argumentación, es importante para el aprendizaje de las matemáticas, a través de la interacción social (e.g., Conner, 2017; Krummheuer, 2015; Rumsey & Langrall, 2014; Whitenack & Knippinig, 2002). Varios autores han implicado en ese proceso a la participación, como un aspecto útil en las discusiones (e.g., Conner, Singletary, Smith, Wagner, Francisco, 2014; Krummheuer, 2015).

> Participar en discusiones de manera distintivamente matemática puede ser enmarcado como argumentación colectiva, donde la argumentación colectiva involucra a múltiples personas que llegan a una conclusión, a menudo por consenso (Conner, et al., 2014).

En este tipo de discusiones, el rol del profesor es fundamental, ya que una de las actividades centrales en que los profesores de matemáticas se ven involucrados en su práctica cotidiana, es en interpretar las respuestas o preguntas de los estudiantes y darles respuestas matemáticas y pedagógicamente apropiadas (Giannakoulias, Mastorides, Potari & Zachariades, 2010), incluso cuando no actúa como un árbitro de la verdad matemática (Conner, et al., 2014).

De otra parte, desde los objetivos de los currículos contemporáneos se plantea el desafío de contribuir en la formación de ciudadanos reflexivos y críticos (Goizueta & Planas, 2013; Shiakalli & Zacharos, 2014; Zacharos, Pournantzi, Moutsios-Rentzos & Shiakalli, 2016; Van de Walle, 2007), y con capacidad de análisis y argumentación (Goizueta & Planas, 2013). El desarrollo de un pensamiento crítico permite a las personas buscar y construir significados fundados lógicamente (Zacharos, et al., 2016), a justificar con base en evidencias, convencerse a sí mismo y persuadir a otros de la validez o de la insuficiencia de sus argumentos. Entre los propósitos del estudio de las matemáticas de educación básica en México por ejemplo, se argumenta específicamente, que deben desarrollarse en los estudiantes, *formas de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas* (SEP, 2011, p. 69).

Schwarz (2009), plantea que los esfuerzos de la escuela deben dirigirse precisamente hacia el diseño de contextos adecuados para la argumentación y hacia el planteamiento de escenarios dialógicos, a fin de que los estudiantes se involucren desde el reconocimiento no sólo de sus objetivos personales, sino también a partir de la identificación de los objetivos y metas de todos los participantes en las interacciones comunicativas. En este marco institucional, la argumentación es una habilidad básica que se desarrolla de manera progresiva a lo largo de las etapas de la educación obligatoria (Goizueta & Planas, 2013). El papel de los profesores es fundamental en ese proceso, ya que además de poner en funcionamiento el currículo, deben diseñar, desarrollar y valorar ambientes de aprendizaje que favorezcan en los estudiantes la formulación de conjeturas (o aserciones), preguntas y controversias. Ello, a fin de que desarrollen las habilidades necesarias para generar argumentos, para confrontarlos y evaluarlos, ya sea los propios y/o los presentados por otros. Los profesores por tanto, deben dar oportunidades a los estudiantes de aprender a plantear aserciones, respaldarlas con evidencias, responder a críticas y revisarlas, basados en una nueva evidencia, de cuestionarlas o bien contra argumentarlas. Pues como sostienen Conner y colaboradores (Conner, et al., 2014, p. 403), comprender, reconocer y construir argumentos matemáticos son partes importantes de las prácticas disciplinarias de matemáticas. Lo anterior está planteado como uno de los objetivos de la educación matemática; ayudar a los estudiantes a aprender a participar en la producción de argumentos matemáticos. Estas oportunidades de aprendizaje (NCTM, 2000, p.1), deben estar disponibles desde el inicio de la escolarización, que no estén reservados para los estudios "avanzados".

En matemáticas, uno argumenta cuando establece una afirmación (o aserción o conjetura) o quiere convencer a alguien (uno mismo, un compañero de clase, al profesor) de su validez. Los argumentos no tienen una forma específica; deben también organizarse en una secuencia de acuerdo con reglas y procedimientos generales (Toulmin, 1958, p.43). Macagno, Mayweg-Paus y Kuhn (2014) sostienen, que los argumentos y su estructura pueden revelar aspectos distintos e interdependientes de la argumentación, esto es, si refieren a una conclusión, garantía, apoyo a puntos de vista, refutación, entre otros.

Cuando se construyen argumentos, los contenidos evolucionan, las ideas toman forma, los valores epistémicos cambian, progresan o se debilitan (Pedemonte & Balacheff, 2016, p. 105), a partir de las refutaciones. En educación matemática, varios estudios han implicado a la refutación y a la argumentación en las discusiones de la actividad en el salón de clases (e.g., Giannakoulias, Mastorides, Potari & Zachariades, 2010; Ko & Knuth, 2009; Komatsu, 2017) por la posibilidad que plantea a estudiantes a que desarrollen habilidades argumentativas, comprendan ideas matemáticas y también, en revelar algo acerca de la lógica de las prácticas del salón de clases (Reid, Knipping & Crosby, 2011).

En varios estudios centrados en las refutaciones (e. g., Ko & Knuth, 2009; Komatsu (2016; 2017); Larsen & Zandieh, 2008), la epistemología que subyace de algún modo es la visión de la matemática de Lakatos (1976) en la cual la matemática no procede por un proceso de probar los teoremas concluyentemente, sino más bien a través de un ciclo de pruebas y refutaciones, con pruebas siempre provisionales y refutaciones que proporcionan el mecanismo para la mejora de los teoremas y sus pruebas (Reid, Knipping & Crosby (2011). En su libro *Pruebas y refutaciones, la lógica del descubrimiento matemático*, Lakatos (1986) ilustra el funcionamiento de la matemática desde la formulación de conjeturas, hasta la confirmación o refutación de las mismas. Narra cómo van apareciendo ejemplos que no encajan con la conjetura o con la prueba (contraejemplos), mostrando su función de falsación o refutación (Siñeris, Ferraris & Ferraro, 2008), y se sitúa en una fase de validación, enfocando la crítica de la conjetura o de la prueba mediante contraejemplos globales y locales. Con base en esta epistemología, es posible generar controversia respecto de una afirmación o conjetura, y a la vez, generar un ambiente de discusión mediador para descubrir o redescubrir conocimiento matemático.

Es en el contexto de la argumentación y la refutación que se ubica la presente investigación. Se enmarca en la relación entre la argumentación, la refutación y la aserción, visto desde la perspectiva de Toulmin (Toulmin, 1958/2003). Se reconstruye la argumentación y con base en ello, se analiza esta relación.

## 1.2. Pregunta y objetivo de la investigación

Dado que la argumentación y la refutación, son importantes en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en general, nuestro trabajo se enmarca en la relación entre argumentación, refutación y aserción. En particular interesa responder la siguiente pregunta de investigación:

> *¿Qué argumentos caracterizan la refutación de aserciones cuando se invalida la garantía?*

El contexto es un experimento de enseñanza que se desarrolla con niños de primaria, y que tiene como **objetivo**:

> *Comprender la naturaleza de los argumentos de garantía que usan estudiantes de quinto grado de primaria al validar o refutar aserciones.*

El objetivo general se particulariza en los siguientes **objetivos específicos**:

**Oe1**: Identificar los argumentos que ponen en juego los estudiantes de quinto grado de primaria para validar o refutar aserciones.

**Oe2**: Caracterizar los argumentos que usan estudiantes de quinto grado de primaria al validar o refutar aserciones.

Los argumentos en esta investigación se analizan a partir del modelo ampliado de Toulmin, propuesto en (Conner, 2008). La caracterización de los argumentos por su parte, toma como base los estudios de Macagno, Mayweg-Paus y Kuhn (2015) y Toulmin, Rieke y Janik (1984).

## 1.3. Pertinencia de la investigación

Reconociendo el potencial de la argumentación y la refutación en el aprendizaje de la matemática en general, y en el desarrollo del pensamiento crítico en particular de los estudiantes, varios autores señalan entre otras cuestiones, acerca de la importancia por: a) estudiar cómo los profesores refutan aserciones no válidas de los estudiantes, a fin de ayudarles a desarrollar una comprensión de situaciones matemáticas, b) investigar en el marco de las pruebas y refutaciones, cómo una prueba puede ser utilizada no sólo para establecer la verdad de una aserción dada, sino también para generar nuevos conocimientos matemáticos, c) examinar cómo los profesores pueden apoyar la argumentación colectiva y el tipo de apoyo que dan en ese proceso a los estudiantes, d) que la argumentación deber ser promovida desde los primeros años de escolaridad, a fin de ayudar a los estudiantes a aprender a participar en la producción de argumentos matemáticos.

Varias cuestiones han sido reportadas. Sin embargo, pocos estudios se han enfocado en estudiar desde la refutación, el tipo de argumentos que construyen niños de primaria para validar una aserción dada. Esta investigación toma como objeto de estudio a la refutación para estudiar los argumentos usados por estudiantes de quinto grado de primara, al validar una aserción desde la argumentación colectiva.

# CAPÍTULO 2

# Fundamentos teóricos

El estudio se enmarca en la relación entre la argumentación, la aserción y la refutación desde la participación colectiva. En ese contexto, los elementos teóricos se sitúan en un marco conceptual que refiere a los conceptos de: argumentación, razonamiento, argumentación colectiva, refutación y tipologías de argumentos.

La argumentación relaciona los razonamientos empleados por los estudiantes de primaria en un sentido colectivo mientras refutan aserciones que su ubican fundamentalmente en los argumentos de garantía. De modo que, el concepto fundamental en esta investigación es la refutación, dado que promueve la argumentación colectiva y la configuración de características invariantes del triángulo.

## 2.1. Argumentación y razonamiento

La argumentación es una actividad racional que cualquier persona puede realizar mediante el uso de razones con el propósito de construir un resultado final llamado argumentación (Corcoran, 1989). En el mismo sentido, Goizueta y Planas (2013) afirman que la argumentación es el acto de producir razones y un argumento es una razón o razones ofrecidas en favor o contraposición de una afirmación establecida por el argumentador.

En esta investigación el concepto de argumentación refiere a toda la actividad de hacer aserciones, producir razones, criticar esas razones, refutar las críticas y así sucesivamente. Además, tomamos el concepto de argumento en el sentido de cadenas de razonamientos, siendo la secuencia de afirmaciones vinculadas entre sí y razones que entre ellas establecen el contenido y la fuerza de la posición de un hablante, en particular del argumentador (Toulmin, 1958/2003). Argumento y argumentación refieren a aspectos distintos. Un argumento, consiste de una cadena enlazada de afirmaciones y razones que conforman la posición del argumentador con respecto a una situación, mientras que, la argumentación es el conjunto global de actividades: presentar evidencias, establecer afirmaciones junto con sus razones, refutar esas razones y soportar las razones.

En vista de que los argumentos en este trabajo se analizan a partir de los razonamientos dados por los estudiantes de primaria mientras discuten características invariantes de los triángulos (con base en la medida de sus ángulos), el concepto de razonamiento refiere al uso de argumentos en la interacción (Schnell, 2014). En el que la estructura básica (núcleo: dato, garantía y aserción) del modelo argumentativo de Toulmin es útil en la reconstrucción de la argumentación desde lo colectivo (Krummheuer, 1995), y el razonamiento evidente en aquellos argumentos que refieren a una serie de proposiciones de las cuales una aserción se infiere de los datos, apoyada por la garantía. Es decir, de la relación entre los datos y garantía (Toulmin et al., 1984).

## 2.2. Argumentación colectiva

La argumentación colectiva es un concepto útil para analizar la naturaleza de la actividad dentro del aula de matemáticas, caracterizada por la resolución colaborativa de problemas en ambientes de discusión con toda la clase (*e. g.,* Yackel, 2002; Whitenack & Knipping, 2002; Krummheuer, 2015; Reid, Knipping & Crosby, 2011). A su vez, la argumentación colectiva puede ser catalogada como la acción en la que participan grupos de personas en los debates, de una manera matemática (Wagner et al., 2014). Estos mismos autores implementaron el modelo de Toulmin como método que facilita la reconstrucción-análisis de la argumentación en clase de matemáticas.

El modelo argumentativo propuesto por Toulmin (1958/2003), está constituido por una estructura que esquematiza la argumentación dentro de la lógica informal y en cualquier campo (*e. g.,* medicina, derecho, ciencias, matemáticas, física entre otros). Este modelo, es una manera diferente para analizar y reconstruir la argumentación. Así también, utilizado para analizar y comparar las fases de crear, explorar, cadenas de razonamientos presentes en la argumentación (Toulmin et al., 1984).

La argumentación se reconstruye a partir del reconocimiento de seis elementos que constituyen la estructura argumentativa (Inglis, Mejia-Ramos & Simpson, 2007) (Véase figura N° 2.1). La información en que se basa la aserción o conclusión se denota como el dato (**D**), con base en éste se establece la aserción (**C)**, la cual es la tesis del argumentador. La garantía (**W**), justifica la conexión entre los datos y la aserción, además, ésta cuenta con un apoyo, el respaldo (**B)** que tiene la función de presentar un respaldo de manera general a través de fórmulas, teoremas, reglas relacionadas con la garantía. El calificador modal (**Q)**, especifica la fuerza de la aserción, denotada en frases como: sin duda, siempre, probablemente entre otros. Y la refutación (**R),** se caracteriza por presentar las excepciones de la aserción, en otras palabras las condiciones en que la garantía no soporta la conexión entre los datos y la aserción.

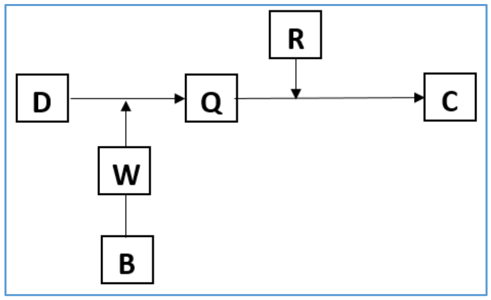



**Figura 2.1.** Modelo argumentativo de Toulmin en (Inglis, Mejia-Ramos & Simpson, 2007).

El modelo de Toulmin ha sido adaptado con el fin de estudiar la argumentación colectiva en el salón de clase de matemáticas. Krummheuer (1995) sostiene que la reconstrucción de la argumentación desde la actividad colectiva en el salón de clases, con base en el modelo de Toulmin, los elementos necesarios son: *datos, garantías, y aserción*, elementos que conforman el núcleo. Señala además, que es posible estudiar el rol del profesor mediante las interacciones en el salón de clases y considerar sus intervenciones como partes de la argumentación (Krummheuer, 1995, 2015). En el mismo sentido, Conner (2008) hace adaptaciones al modelo de Toulmin, que consiste en incorporar la participación del profesor en la estructura argumentativa. Justifica esta incorporación, porque es el profesor quien promueve la argumentación en clase de matemáticas a través de preguntas orientadoras, exposición de elementos de la argumentación (e, g., datos y/o garantía), entre otras actividades (Conner et al., 2014).

El modelo extendido de Toulmin planteado en Conner (2008), consiste en presentar las partes de la argumentación mediante diagramas de colores con estilos de líneas (Ver figura N° 2.2). Las siguientes son las formas de presentar el modelo extendido de Toulmin: los datos **D** se presenta con un rectángulo verde y estilo de línea normal, la garantía **W** con un rectángulo morado con estilo de línea guión-punto, la aserción **C** se representa con un rectángulo azul con estilo de línea guión y la refutación **R** con rectángulos rojos con estilo de línea normal. Además, las nubes de dialogo rojas son especialmente para los comentarios del el profesor en la discusión con los estudiantes e indica el momento donde participó.

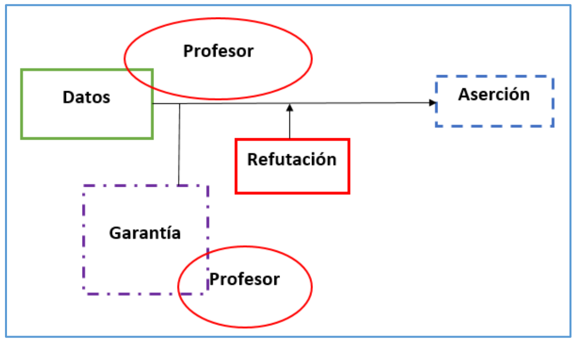



**Figura 2.2.** Modelo extendido de Toulmin en (Conner, 2008).

## 2.3. Refutación de argumentos

El concepto de refutación se ha estudiado en dos sentidos, en un primer lugar, la refutación desde la postura de Lakatos (1976) adoptada por numerosas investigaciones (Reid, 2002; Larsen & Zandieh, 2008; Yopp, 2015; Komatzu & Jones, 2017) hace referencia a los factores epistemológicos de la prueba, en términos de contra ejemplos el contexto de la matemática.

Por otro lado, el concepto de refutación en el sentido de Toulmin (1958/2003), enmarca las excepciones que presenta la aserción/conclusión presente en la argumentación. En otras palabras, la refutación evidencia los casos donde la garantía no justifica los datos con la aserción. Es en el sentido de Toulmin, que se estudia la refutación de aserciones en la presente investigación, puesto que en el contexto escolar a nivel primaria es nulo el estudio de la prueba matemática y no da cabida para abordar este concepto desde la postura de Lakatos (1976).

Hay que mencionar además en el sentido de Toulmin, la refutación niega totalmente una parte de la argumentación; ya sea la aserción, la garantía o el dato (Reid, Knipping & Crosby, 2011). Asimismo, Walton (2009) estableció que una refutación está destinada a mostrar que el argumento presentado por el argumentador es cuestionable o insostenible. En línea con lo anterior, las tres maneras en que un argumento puede implicar una refutación son: 1) los datos del argumento pueden ser refutados, y se deja la conclusión en duda, 2) continuando con la garantía del argumento que puede ser refutada, dejando otra vez la conclusión en duda o 3) la conclusión misma puede ser refutada, lo que implica que los datos o la garantía son inválidos, pero sin decir cuál (Reid, Knipping & Crosby, 2011). Así, la refutación puede tener el papel como en el modelo de Toulmin, ya que según Pedemonte y Balacheff (2016) la refutación podría provenir del solucionador del problema, él o ella misma, pero en general es la huella de la naturaleza dialógica de la argumentación y funciona como un motor de la discusión matemática que puede depender de uno o más conceptos o la manera de los estudiantes entienden los conceptos (P.107).

## 2.4. Tipología de argumentos

El estudio de los tipos de argumentos consiste en la clasificación desde el contenido de la garantía (Toulmin et al., 1984). La clasificación se sustenta desde el funcionamiento básico de la garantía, puesto que sustenta el proceso de argumentación y permite la conexión entre los datos y la aserción. Además, la clasificación de los argumentos desde la postura de Toulmin et al. (1984) señalan tipos de razonamientos. (Ver tabla 2.1)

**Tabla 2.1.** Clasificación de argumentos en (Toulmin, Rieke & Janik, 1984).

| Argumentos | Descripción |
|---|---|
| *La analogía* | se asumen similitudes suficientes entre los objetos de estudios con el propósito de apoyar una aserción verdadera |
| La *generalización* | involucra una aserción fundamentada en comparar una variedad de casos específicos que contienen características similares |
| *Los signos* | consisten en soportar una aserción basada en signos presentes en los objetos de estudio |
| Las *causas* | se identifican desde una generación causal de un objeto o situación que provoca un efecto esperado |
| *La autoridad* | consiste en fundamentar una aserción desde un juicio emitido por una entidad o experto en el tema de estudio |
| Lo *opuesto* | los objetos que son conocidos para ser radicalmente diferentes en un aspecto dado son presumidos para ser diferentes en otro sentido |
| El *dilema* | fundamenta una aserción en una garantía que contiene dos elecciones o explicaciones pero ambas son falsas |
| *De grado* | propiedades de un objeto dado son presumidas para variar en comparación con otro |
| *La clasificación* | las propiedades o características de los objetos de estudios son usadas para soportar la aserción establecida con base en el objeto |

En el marco de esta clasificación Macagno, Mayweg-Paus y Kuhn (2015) presentan otra tipología de argumentos en un contexto más general, en el campo de la educación. (Ver tabla 2.2)

**Tabla 2.2.** Argumentos propuestos por Macagno, Mayweg-Paus y Kuhn (2015).

| Argumentos | Descripción |
|---|---|
| de consecuencia | una decisión es apoyada para evidenciar su buena o mala consecuencia |
| de valor | se elige una acción, ya que se clasifica como bueno o malo basado en un valor positivo o negativo |
| práctico | los posibles medios para lograr un estado de cosas comparados y se selecciona la mejor manera |
| basado en la mejor explicación | la causa más razonable de un evento o un estado de cosas se encuentra mediante la comparación de las explicaciones alternativas posibles |
| basados en reglas | se toma una decisión basada en una regla que se aplica a un caso específico |
| de clasificación | un estado de cosas se clasifica en cierto modo sobre la base de un criterio de definición o de clasificación |

Con base en la clasificación de argumentos propuesta por Macagno, Mayweg-Paus y Kuhn (2015), los argumentos en esta investigación están ubicados en el contexto escolar de la matemática, por ello se hizo una adaptación a la descripción de cada tipo de argumento, de forma específica en relación con los objetos matemáticos. En esta adaptación se buscó el conservar las ideas centrales (Ver tabla 2.3).

**Tabla 2. 3.** Tipos de argumentos adaptados de (Macagno, Mayweg-Paus & Kuhn, 2015).

| Argumentos | Descripción |
|---|---|
| Práctico | Se comparan características invariantes de los objetos matemáticos pertenecientes a una misma clase y se selecciona el adecuado |
| Basado en la mejor explicación | Sustenta una afirmación con base en la comparación de explicaciones de posibles casos |
| Basado en reglas | Se sustenta de una regla o propiedad matemática que se aplica a un caso específico de los objetos matemáticos en estudio. |
| De clasificación | Se sustenta en la tipificación de objetos matemáticos con base en las características invariantes del objeto en estudio. |

De forma general, el argumento práctico se fundamenta desde una comparación de objetos y sus características, el argumento de la mejor explicación fundamenta una aserción desde las posibles explicaciones que relacionan el objeto matemático en estudio, el argumento basado en reglas justifica la aserción desde la formalidad matemática y el argumento de clasificación categoriza un objeto matemático con base en sus características invariantes.

# CAPÍTULO 3

# Metodología:
# Experimento de enseñanza

La metodología de esta investigación se fundamenta en el paradigma de investigación de diseño, designada por ser de naturaleza cualitativa en vista de que tiene como objetivo analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, de la enseñanza y de la evaluación (Molina, Castro, Molina & Castro, 2012**;** Steffe & Thompson, 2000**).**

Dentro de este paradigma de investigación, se enmarca el experimento de enseñanza (*Teaching Experiment*), que consiste en una secuencia de episodios de enseñanza, el cual incluye un agente de enseñanza (investigador-profesor), uno o más estudiantes, un testigo de los episodios, y un método de grabación (audio y/o video) de lo que sucede durante el episodio (Steffe & Thompson, 2000). En el ambiente a observar, ya sean habitaciones laboratorios, salones de clases, o pequeñas oficinas, el objeto de estudio puede ser: el desarrollo de los estudiantes frente una tarea, las interacciones entre el profesor y el estudiante o la combinación de todas (Kelly, 2004).

El objetivo del experimento de enseñanza es la experimentación de primera mano por parte de los investigadores sobre el aprendizaje y razonamiento matemático de los estudiantes durante los episodios de enseñanza (Steffe & Thompson, 2000). La secuencia de episodios de enseñanza gira en torno de la aplicación de tareas (T), denominadas según Watson y Thompson (2013) en el sentido completo de cosas para hacer, incluye ejercicios repetitivos, la construcción de los objetos, que ejemplifican las definiciones, la solución de problemas de una sola etapa y de múltiples etapas, para decidir entre dos posibilidades, o llevar a cabo un experimento o investigación.

Es el marco de las tareas de un experimento de enseñanza que se analizaron los argumentos que dan estudiantes de primaria en el estudio de las propiedades y características invariantes de los triángulos a fin de categorizarlos. Las tareas, como puede verse más adelante, promovieron la refutación de aserciones en los estudiantes. Con base en ello, se promovió la evolución de argumentos, y se reconoció qué argumentos de garantía y/o soporte usan en ese proceso, para validar una aserción dada.

### 3.1. Participantes

Participaron en el estudio 22 estudiantes (10-12 años de edad) matriculados en quinto grado de una escuela primaria urbana de la ciudad y puerto de Acapulco, Gro. México. En las intervenciones que comprendió el desarrollo del experimento de enseñanza, participó el total de los estudiantes. En las intervenciones en el salón de clases, consecuentemente en la recogida de datos, participaron cuatro investigadores. Dos en el rol de profesor (uno de ellos el autor de este trabajo) y dos a cargo de la grabación en video y audio de las sesiones. Estos dos investigadores cumplieron a la vez, el rol de participante como observador, durante la toma de datos. Por cuanto al profesor responsable académico del grupo de quinto grado, en que se llevó a cabo el estudio, su participación en el experimento de enseñanza, fue nula.

### 3.2. Organización del trabajo en el salón de clases

En la recogida de datos, se capturó en detalle las interacciones que se suscitaron en el salón de clases, por medio de dos métodos de obtención de datos: el participante como observador y las tareas del experimento de enseñanza. El participante como observador, se concibe en el sentido de Junker (1960, en Álvarez-Gauoy, 2003, p. 105), la cual refiere a los casos en los que el investigador se vincula con la situación que observa, este papel resulta mucho más naturalista; incluso puede adquirir responsabilidades en las actividades del grupo que observa. Sin embargo, no se convierte completamente en un miembro del grupo ni comparte la totalidad de los valores ni de las metas del grupo.

### 3.2.1. Temporalización de las sesiones

El experimento de enseñanza se desarrolló durante cuatro sesiones al inicio del ciclo escolar 2016-2017. Tres sesiones se realizaron de manera consecutiva y la otra, después de un día de receso. La primera con una duración de una hora, y el resto, de 2.5 horas cada una. Cada investigador (en el rol de profesor), tuvo a su cargo dos sesiones. La tabla N° 3.1 describe las tareas y su descripción por sesión y fechas en que se implementaron.

**Tabla 3. 1.** Fecha, descripción y tiempo de las sesiones.

| Sesión | Fecha | Tipo de tarea | Descripción | Intervención | Tiempo empleado |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 19/09/2016 | Asegurar condiciones previas | **Tarea i:** Características invariantes de los triángulos equilátero, isósceles y escaleno con base en sus lados | Individual<br>Colectivo | 10 min<br>20 min |
| | | | **Tarea ii:** Clasificación de los triángulos equiláteros, isósceles y escaleno con base en sus lados | Individual<br>Colectivo | 10 min<br>20 min |
| 2 | 20/09/2016 | Estudio de características invariantes de los triángulos con base en ángulos y lados | **Tarea 1:** Existencia o no de triángulos equiláteros con ángulo igual a 90°. | Individual<br>Colectivo | 20 min<br>40 min |
| | | | **Tarea 2:** Existencia o no de triángulos equiláteros con ángulo mayor que 90°. | Individual<br>Colectivo | 20 min<br>40 min |
| | | | **Tarea 3:** Existencia o no de triángulos equiláteros con ángulo menor que 90°. | Individual<br>Colectivo | 10 min<br>20 min |
| 3 | 21/09/2016 | | **Tarea 4:** Existencia o no de triángulos isósceles con ángulo igual a 90°. | Individual<br>Colectivo | 30 min<br>30 min |
| | | | **Tarea 5:** Existencia o no de triángulos isósceles con ángulo mayor que 90°. | Individual<br>Colectivo | 40 min<br>20 min |
| | | | **Tarea 6:** Existencia o no de triángulos isósceles con ángulo menor que 90°. | Individual<br>Colectivo | 10 min<br>20 min |
| 4 | 23/09/2016 | | **Tarea 7:** Existencia o no de triángulos escalenos con ángulo igual a 90°. | Individual<br>Colectivo | 20 min<br>40 min |
| | | | **Tarea 8:** Existencia o no de triángulos escalenos con ángulo mayor que 90°. | Individual<br>Colectivo | 20 min<br>40 min |
| | | | **Tarea 9:** Existencia o no de triángulos escalenos con ángulo menor que 90°. | Individual<br>Colectivo | 10 min<br>20 min |
| | | | | **Total** | **8.5 hrs** |

### 3.2.2. Organización de la actividad en el salón de clases

La actividad en el salón de clases se organizó de modo tal, que permitió a los estudiantes trabajar en tres momentos: individual, en equipo y grupal (o colectivo). Los equipos se constituyeron por tres estudiantes, organizados al azar. Por invitación expresa, los estudiantes presentaron por escrito las justificaciones de la respuesta dada por tarea, tanto en lo individual, como en equipo. Estas se tomaron como base para la discusión grupal, con la que se promovieron argumentaciones colectivas (Ver tabla N° 3.2).

**Tabla 3.2.** Tareas y formas de interacción.

| Tarea (s) | Tipo de intervención |
|---|---|
| Tarea i | Individual y colectivo |
| Tarea ii | Equipo |
| Tareas 1 a 9 | Individual y colectivo |

## 3.3. Etapas del experimento de enseñanza

El experimento de enseñanza fue guiado por tres etapas (E): E1: La preparación del experimento de enseñanza, E2: ejecución del experimento y E3: análisis de los datos planteadas según Molina et al. (2011).

### 3.3.1. E1: Preparación del experimento de enseñanza

a) *Consideraciones teóricas*

En concordancia con los referentes teóricos, el experimento de enseñanza se fundamenta en conceptos de la teoría de la argumentación desde la perspectiva de Toulmin (1958/2003), en el de argumentación colectiva (Krummheuer, 1995), en las formas en la cual los argumentos pueden ser refutados (Reid, Knipping & Crosby, 2011) y en la tipología que para clasificar argumentos proponen Toulmin et al. (1984) y Macagno, Mayweg-Paus y Kuhn (2015).

Articulado el sustento teórico del experimento de enseñanza y la problemática planteada en el capítulo 1, el grupo de investigación enmarcó el estudio en un tema curricular que refiere a la clasificación de triángulos según las medidas de lados y ángulos, y diseñó una secuencia de tareas (T), con el objetivo de: *Comprender la naturaleza de los argumentos de garantía que dan estudiantes de quinto grado de primaria al validar o refutar aserciones.*

b) *Aspectos metodológicos*

b.1) Principios que fundamentan el diseño de las tareas

El diseño de las tareas se sustenta en tres principios, asociado al logro de los objetivos. Estos principios buscan promover el que los estudiantes:

1) Reconozcan y describan características invariantes de los triángulos: equilátero, isósceles y escaleno con base en sus lados y sus ángulos,
2) Confronten y refuten aserciones, a partir de ello, revisar la garantía de los argumentos, y;
3) Reconozcan contradicciones en las garantías a fin de favorecer la evolución de los argumentos.

Con base en ello, se busca además, reconocer tipos de argumentos y su evolución a lo largo del estudio.

*b.2) Antecedentes académicos*

El diseño de las tareas, consideró el que los estudiantes ya habían sido instruidos en el estudio de la clasificación de triángulos equiláteros, isósceles y escalenos, analizando características invariantes acerca de sus lados y sus ángulos, en cuarto grado de primaria. Información obtenida del programa matemáticas (SEP, 2011, p. 69), del libro de texto de matemáticas para el estudiante (SEP, 2015, pp. 35-37) y el del profesor, para ese grado (SEP, 2016, pp. 59-66).

*b.3) Preparación de las tareas del experimento de enseñanza*

Tomando en consideración los antecedentes académicos básicos de los estudiantes, desde la perspectiva curricular, y con el fin de diagnosticar y asegurar ese conocimiento como punto de partida, se diseñaron dos tareas (Ti y Tii). Así también, las tareas con las que se buscaba que los estudiantes configuraran las características invariantes de los triángulos respecto de sus ángulos, a partir de la refutación de aserciones (T1 a T9). Las tareas se plantearon en términos de preguntas que dieran lugar a respuestas cerradas del tipo SI o NO (véase tabla No. 3.3) y con ello a la refutación de aserciones.

En el diseño de las tareas participó el equipo de investigación, las que se sometieron a un proceso de validación con cinco estudiantes matriculados en quinto grado de primaria, el propósito de validar las tareas es obtener un diseño óptimo para que los estudiantes comprendan de una manera sencilla qué y cómo hacer en cada tarea, además facilitar el desarrollo de éstas y el cumplimiento del objetivo del experimento de enseñanza. Como resultado de ello, se reconocieron dificultades para comprender desde las preguntas por ejemplo, qué es un triángulo obtusángulo y el acutángulo, en razón de que curricularmente el estudio de este tipo de polígonos no está previsto. Estos conceptos aparecen implícitos en el estudio de las características invariantes del triángulo equilátero, isósceles y el escaleno.

Por ello se rediseñaron las tareas atendiendo a aspectos curriculares, establecidos en términos de: ángulo mayor de 90° y ángulo menor de 90° respectivamente. Ese hecho llevó a reconfigurar las preguntas. En la tabla No. 3.3 se muestran a modo de ejemplo, tres de las tareas modificadas con base en el proceso de validación.

**Tabla 3.3.** Ejemplo de tareas modificadas en el proceso de validación.

| Tareas a validar | Tareas modificadas |
|---|---|
| ¿Será posible dibujar un triángulo rectángulo equilátero? ¿SI o NO? Realice un dibujo en el caso de ser posible. | ¿Existen triángulos equiláteros con un ángulo de 90°? Justifica tu respuesta |
| ¿Será posible dibujar un triángulo acutángulo isósceles? ¿SI o NO? Realice un dibujo en el caso de ser posible. | ¿Existen triángulos isósceles con un ángulo menor a 90°? Justifica tu respuesta |
| ¿Será posible dibujar un triángulo obtusángulo escaleno? ¿SI o NO? Realice un dibujo en el caso de ser posible. | ¿Existen triángulos escalenos con un ángulo mayor a 90°? Justifica tu respuesta |

*b.3.1). Tareas del experimento de enseñanza*

En su mayoría, las tareas fueron presentadas en un ambiente de lápiz y papel, excepto *Tii*, que combinó la manipulación de triángulos de diferentes formas, tamaños y colores diseñados en papel cartulina.

*b.3.1.1.) Tareas para diagnosticar y asegurar conocimientos previos (Ti y Tii).*

El objetivo de la tarea *Ti* es doble: diagnosticar y recuperar conocimiento previo, la cual refiere a características invariantes de los triángulos equilátero, isósceles y escaleno en función de sus lados y ángulos. En ella se ubicó a los estudiantes a describir en un recuadro a partir de lo que sabían, sobre cada tipo de triángulo (en dos etapas: individual y colectivo).

En lo individual, se les pidió escribir sobre los recuadros lo que sabían acerca de cada tipo de polígono, acompañado de un dibujo (véase tarea *Ti* en figura N° 3.1).

Los argumentos que resultaron de la fase de trabajo individual, se analizaron en lo colectivo, con el propósito de que fuesen capaces de configurar las características invariantes de cada tipo de triángulo basados en sus lados y ángulos y con ello asegurar este tipo de conocimiento.

La tarea *Tii* se constituyó de dos partes. La primera, ubicó a los estudiantes a analizar de manera individual, triángulos equiláteros, isósceles, y escalenos de diferentes tamaños, formas y colores, elaborados sobre papel cartulina (Figura N° 3.2). El propósito, es que aislaran características comunes, en términos de la medida de los lados y tangencialmente, reconocieran que aspectos como color y el tamaño de la figura son irrelevantes en este caso. Posteriormente, se les invitó a analizar en equipo, las características que reconocieron acerca de estos polígonos. En la segunda parte, se pidió agrupar los triángulos sobre el mapa adaptado del libro de texto del estudiante (Figura N°3. 3), considerando si las medidas de los lados son iguales, desiguales o un lado desigual y dos iguales a fin de clasificarlos en equiláteros, isósceles y escaleno. Seguidamente, se le pidió compartir argumentos de por qué los habían agrupado en determinada clase de triángulos.

**Tarea i**

**Nombre__________________________________Edad:_______**

**Escribir todo lo que sepas de los siguientes triángulos y realiza un dibujo:**

**Triángulo equilátero:**

**Triángulo isósceles:**

**Triángulo escaleno:**

**Figura 3.1.** Tarea *Ti*

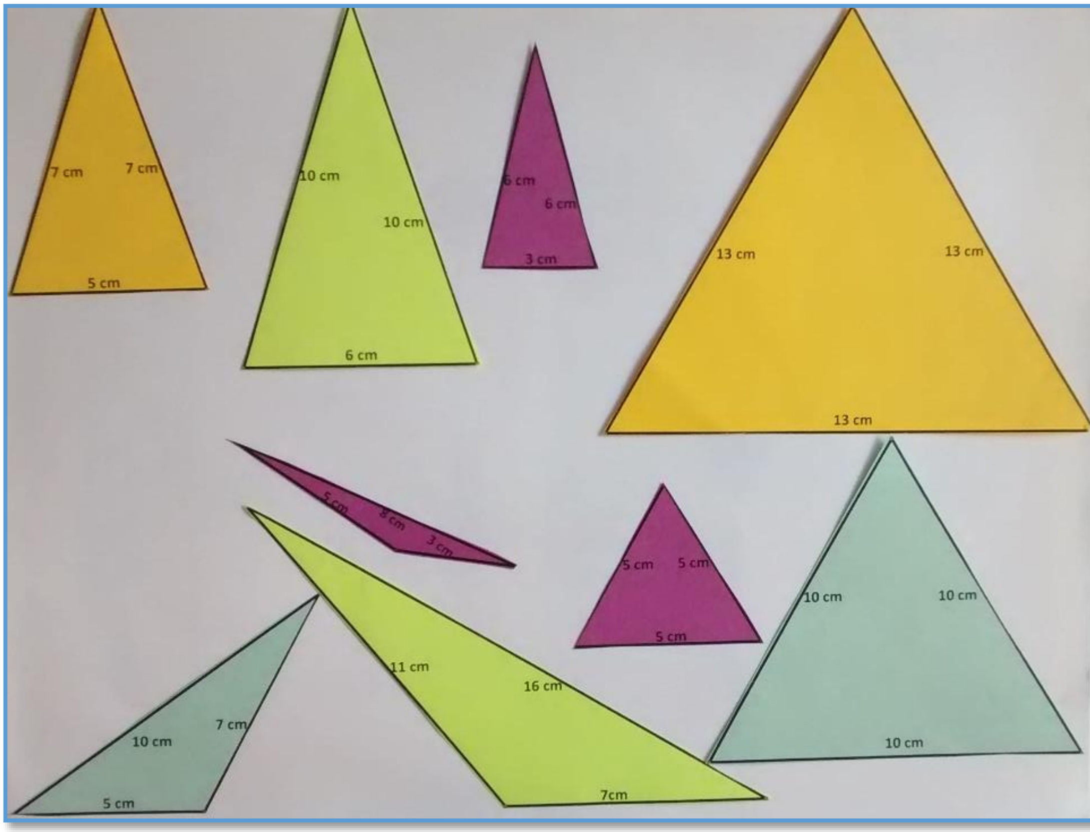



**Figura 3.2.** Muestra de triángulos isósceles, equiláteros y escalenos recortados sobre papel cartulina.

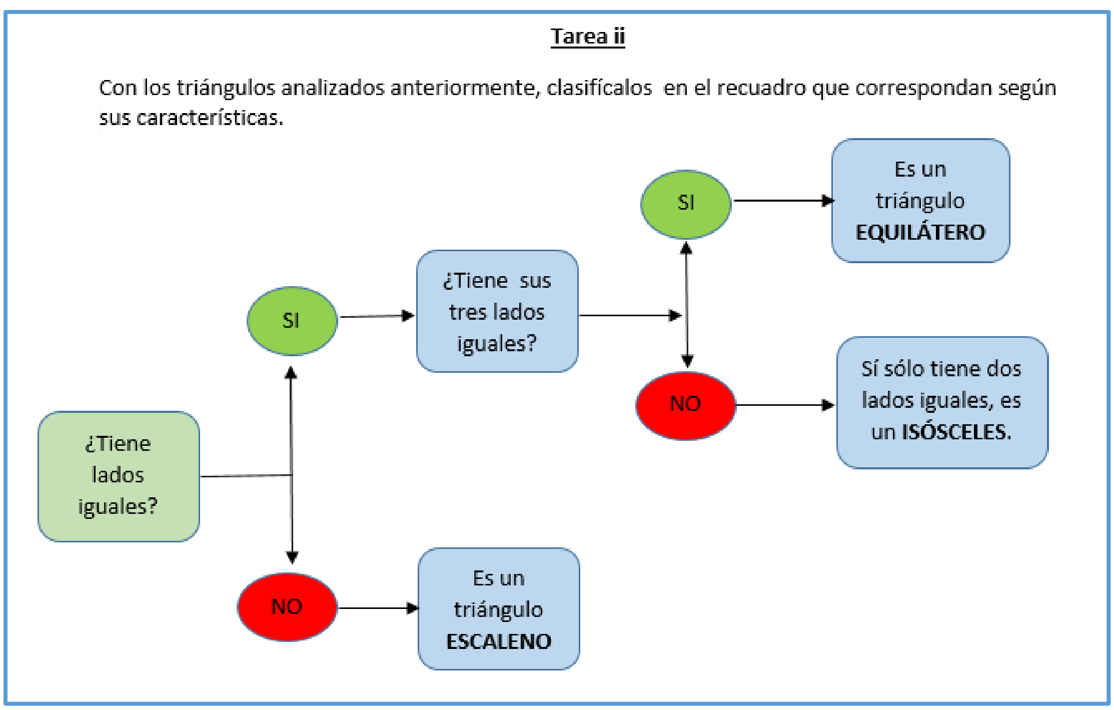



**Figura 3.3.** Tarea ii: Mapa para clasificar triángulos (adaptado de SEP, 2015, p. 35).

b.3.1.2.) *Tareas que promueven la configuración de las características invariantes de los triángulos en función de sus ángulos (T1 a T9).*

Las tareas se rediseñaron en los términos del diseño inicial, a modo de preguntas, las que cuestionan la existencia de triángulos: isósceles, equiláteros, escalenos que tienen por lo menos en casos diferentes, un ángulo mayor a noventa grados, un ángulo menor a noventa grados o un ángulo igual a noventa grados. Para cada tipo de triángulo se propusieron tres tareas (Ver tabla N° 3.4).

**Tabla 3. 4.** Tareas del experimento de enseñanza.

| **Bloque 1** Triángulo Equilátero | **Bloque 2** Triángulo Isósceles | **Bloque 3** Triángulo Escaleno |
|---|---|---|
| **T1**: ¿Existen triángulos equiláteros con un ángulo de 90°? | **T4**: ¿Existen triángulos isósceles con un ángulo de 90°? | **T7**: ¿Existen triángulos escaleno con un ángulo de 90°? |
| **T2**: ¿Existen triángulos equiláteros con un ángulo menor a 90°? | **T5**: ¿Existen triángulos isósceles con un ángulo menor a 90°? | **T8**: ¿Existen triángulos escaleno con un ángulo menor a 90°? |
| **T3**: ¿Existen triángulos equiláteros con un ángulo mayor a 90°? | **T6**: ¿Existen triángulos isósceles con un ángulo mayor a 90°? | **T9**: ¿Existen triángulos escaleno con un ángulo mayor a 90°? |

### 3.3.2. E2: Desarrollo de las tareas

El desarrollo de las tareas del experimento de enseñanza inició con la presentación del grupo de investigación a los estudiantes de quinto grado de la escuela primaria, por el profesor titular, quien en sesiones previas les había informado de las tareas que analizarían con ellos. Seguidamente, dejó el grupo a cargo de los investigadores, quienes invitaron a los estudiantes a presentarse, a fin de llamarlos por su nombre durante las sesiones de trabajo. Uno de los investigadores explicó el objetivo de las tareas a desarrollar y las reglas para intervenir en cada fase por parte de estudiantes e investigadores, en tanto que el resto, ubicó dos cámaras de video, una con orientación hacia la pizarra y la otra, enfocando al grupo de estudiantes.

El proceso de solución y análisis de las tareas en condiciones de enseñanza, transcurrió como sigue:

a) Se resolvieron y discutieron por tarea, con cierres por bloque. Se dio en dos momentos: individual y colectivo (o grupal).

b) Al concluir la fase individual, los estudiantes entregaban sus argumentos escritos a los investigadores, para seguidamente dar paso al análisis colectivo de las aserciones y garantías presentadas en la fase previa ante cada tarea.

c) El análisis colectivo dio cabida a la revisión de la aserción y las garantías en que los estudiantes sustentaban sus argumentos. Ello dio lugar a la vez, a la revisión y configuración de las características invariantes de cada tipo de triángulo (equilátero, escaleno e isósceles) en términos de sus lados y sus ángulos.

Al término de cada sesión, los investigadores se reunían con el propósito de realizar un recuento de lo que había pasado y discutir aspectos a tener en cuenta para la ejecución de las demás tareas de la sesión siguiente.

### 3.3.3. E3: Análisis de los datos

El análisis de los datos fue de corte cualitativo, dado que en éste el investigador ve el escenario y a los participantes desde una perspectiva holística, éstos no son reducibles a variables sino considerados como un todo. En este sentido, el análisis de los datos consiste de un proceso de lectura, reflexión, escritura y reescritura, lo que permite al investigador transformar la experiencia vivida en una expresión textual (Álvarez-Gauoy, 2003).

Los datos provienen de las argumentaciones de la fase individual y de las colectivas, así también, de las notas de campo de los investigadores. El análisis de los datos se sustenta de las argumentaciones en la fase individual y colectiva, que tuvieron lugar en el desarrollo de las tareas, a lo largo de las cuatro sesiones del experimento de enseñanza. Estas se transcribieron en una tabla de tres columnas que contiene: orden de intervención, nombre del participante y transcripción del dialogo (ver anexo N° 3.1). En segundo lugar, los investigadores se familiarizaron con los datos transcritos basados en el análisis continuado de los videos, comparándolos con las transcripciones de las tareas, con el propósito de reconstruir la argumentación con base en la adaptación de Conner (2008) al modelo de Toulmin (1958/2003).

De este modo, el análisis está centrado en las argumentaciones que tienen lugar en la interacción en el salón de clases entre los estudiantes y el profesor en torno a las tareas. Los argumentos de la fase individual con la colectiva, fueron fundamentales para reconocer el progreso de los estudiantes por cuanto al estudio de las características invariantes de los triángulos con base en sus ángulos y clasificarlos en tipos de argumentos según el contenido de la garantía (Macagno, Mayweg-Paus & Kuhn, 2015).

# CAPÍTULO 4

# Resultados de la Investigación

Los datos del estudio se analizan con base en la reconstrucción de la argumentación colectiva suscitada en una clase de matemáticas de quinto grado de primaria durante el desarrollo de las tareas (T1 a T9) del experimento de enseñanza. La reconstrucción de la argumentación colectiva toma como base el modelo ampliado de Toulmin (1958/2003) adaptado por Conner (2008). La argumentación y su análisis, se presenta en este capítulo.

## 4.1. Análisis de la argumentación en el salón de clases

El proceso de argumentación colectiva en el salón de clases fue expresado de forma oral y en conjunto por estudiantes y profesor. Los argumentos producidos por los estudiantes estuvieron guiados a través de preguntas realizadas por el profesor (Kinpping & Reid, 2013). Además, la argumentación suscitada en la resolución de cada una de las tareas del experimento de enseñanza, se originó a partir de la refutación de aserciones por parte de diferentes estudiantes, ello evidenció los diferentes puntos de vista y el nivel de comprensión de los estudiantes respecto del contenido matemático en estudio (Solar & Deloufeu, 2016). De este modo, se presentan tres bloques que refieren a la clasificación de los triángulos equilátero, isósceles y escaleno con respecto a la medida de sus ángulos. Cada bloque está conformado por tres tareas denominados “casos”, y en cada caso se analiza el rol que cumplió la refutación en las argumentaciones colectivas en el contexto de la clasificación de triángulos.

### 4.1.1. Bloque de tareas referentes al triángulo equilátero (T1, T2, T3)

Los casos presentados a continuación hacen alusión al primer bloque conformado por las tareas (T1, T2, T3).

### *4.1.1.1. El caso del triángulo equilátero con un ángulo de 90°*

En el desarrollo de la T1, se analizó la argumentación colectiva con base en el trabajo individual de cada estudiante. La argumentación inicialmente fue propiciada por el profesor a través de las siguientes preguntas dirigidas a toda la clase: ¿quién escribió que existen?, ¿Quién dijo sí? Estas cuestiones detonaron el intercambio de argumentos, a la vez, hizo que emergiera la refutación de argumentos por parte de los estudiantes.

**Profesor, D1:** ¿Existen triángulos equiláteros con un ángulo de 90°?

El estudiante René levantó su mano y expuso su argumento, éste inició con su aserción

**René, C1:** ¡Sí!

Además, presentó su argumento de garantía

**René, W1:** … Porque sus tres ángulos miden 90°. [1]

El argumento de garantía presentado por René, se centró solamente en la característica invariante del triángulo equilátero, en este caso la medida de los ángulos interiores de un triángulo equilátero son iguales. Aunque consideró esta característica sin tener en cuenta que la medida de los ángulos de estos triángulos es estrictamente de 60°. Se reconoce que el argumento de René, es parte de las características invariantes de los triángulos (la medida de los ángulos internos de los triángulos equiláteros tienen la misma medida), la cual es presentada de forma incompleta para clasificar el triángulo, como equilátero con ángulos de 90°, por lo tanto, el argumento expuesto por este estudiante es un argumento de clasificación puesto que implementó un criterio de definición para tipificar el triángulo.

Una vez que René presentó su argumento, intervino Ezequiel de forma inmediata.

**Ezequiel, R1:** Pero si tenemos un ángulo de 90° se pasaría de 180°

En esta intervención, Ezequiel refutó **R1** de forma directa la garantía **W1** del argumento de René, con expresiones positivas que mostraran la excepción de la garantía dada por el estudiante René. La excepción que presenta el estudiante Ezequiel, refiere a la combinación de la característica invariante del triángulo equilátero empleada por René y además, la propiedad de la suma de los ángulos interiores del triángulo es 180°. Debido a

[1] Las letras junto con los números en negrita representan elemento de la argumentación, en el orden establecido por los estudiantes (**D1**: dato, **C1**: aserción, **W3:** garantía**, R2:** refutación**, W2R1:** garantía de la refutación.)

que esta refutación **R1** enmarcó la [propiedad 1: La suma de los ángulos internos del triángulo es 180°], el argumento de Ezequiel es clasificado como un argumento basado en reglas.

Seguidamente, el profesor intervino a fin de promover la participación de los estudiantes. Lo que dio lugar a que Julieta también refutara el argumento de René.

**Profesor:** ¿Qué puedes decir tú, Julieta?
**Julieta, R2:** No, que no existen!

La intervención de Julieta **R2** refutó de forma directa la aserción **C1** presentada por el estudiante René en el inicio. Seguidamente, la estudiante presentó su garantía.

**Julieta, W2R2:** Porque sus ángulos son de 60 y ahí viene siendo que son de 90 y no existen porque sus ángulos son de 60.

El argumento de garantía presentado por Julieta, refiere a la característica invariante del triángulo equilátero, de forma puntual, la medida de cada ángulo del triángulo equilátero es de 60°. Asegura esta estudiante que los ángulos del triángulo equilátero son de 60° y no de 90°; característica que el estudiante René pasó por alto en su argumento. Además, en la garantía **W2R2** expuesta por esta estudiante manifiesta que si el triángulo equilátero tiene tres ángulos de 90°, éste no existe. Por consecuente, el argumento de Julieta es un argumento basado en la clasificación del triángulo como equilátero, esto con base en la medida de los ángulos interiores del triángulo, lo cual permite tipificar su argumento en uno de clasificación.

Seguido de la intervención de Julieta, la estudiante Mía intervino con su respuesta a la tarea T1.

**Mía, R3:** ¡No!
**Mía, W3R3:** porque no da 180 y 3 por 90 da 270

En primer lugar, el argumento de refutación **R3** de Mía estuvo dirigida a la aserción **C1** de René, a fin de invalidarla, en vista de que la garantía **W3R3** presentada por Mía se centró en la propiedad 1 (la suma de los ángulos interiores del triángulo es 180°) pero esta propiedad fue obviada por el estudiante René en su argumento y Mía multiplicó los ángulos propuestos por René para evidenciar que no existen triángulos equiláteros con ángulos de 90°. El hecho de tener en cuenta la propiedad 1 en el argumento de Mía y las características del triángulo propuesto por René, hace que su argumento se sustente en una regla, y el hecho de retomar el valor de los ángulos y aplicar la propiedad 1, permite clasificar su argumento en uno de tipo práctico. Esto debido a que retoma la propiedad mencionada con anterioridad, las aplica con las medidas de los ángulos dados con el propósito de evidenciar la inexistencia de triángulo equilátero con ángulos de 90°.

En la (Figura 4.1) se muestra la reconstrucción de la argumentación colectiva durante el desarrollo de la primera tarea T1. La estructura de la argumentación colectiva es la recopilación de los argumentos establecidos por los estudiantes de forma continua mientras discutían las respuestas de la T1 junto con las intervenciones del profesor.

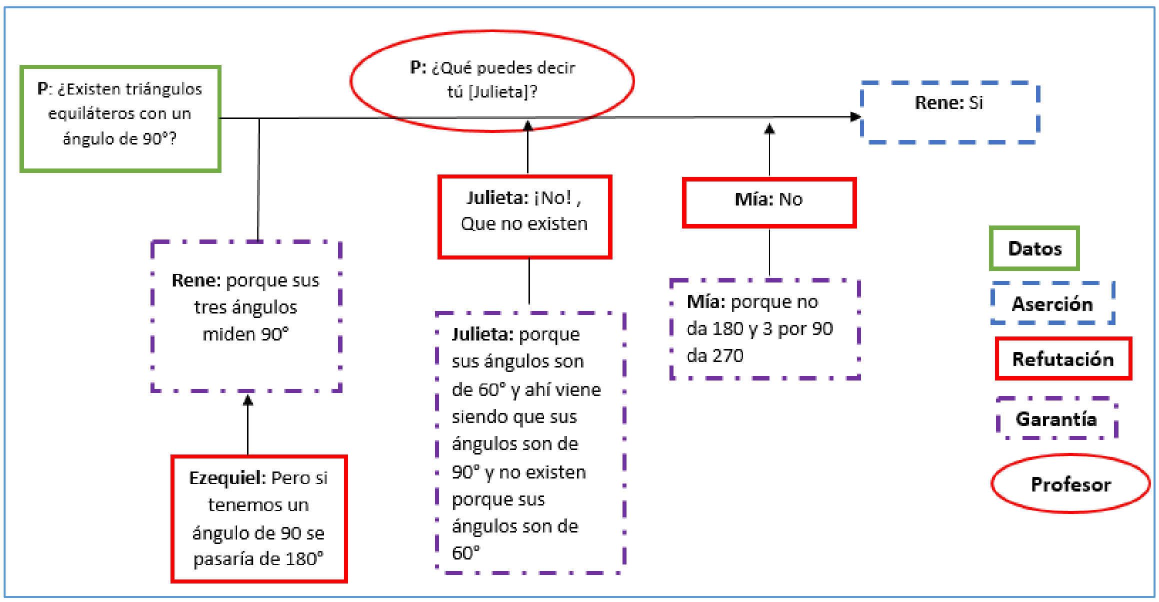



**Figura 4. 1**. El caso del triángulo equilátero con un ángulo de 90°, Tarea 1.

Con el objetivo de concluir la tarea 1 el profesor intervino, ya que observó que los estudiantes habían pasado por alto la existencia de triángulos equiláteros con ángulos de 90°, además estos consideraban la existencia de triángulos equiláteros con ángulos de 90°, aun cuando la suma de los ángulos interiores superaba los 180°. En el cierre de la tarea, el profesor realizó preguntas con el objetivo de guiar a los estudiantes.

| | |
|---|---|
| **Profesor:** | La pregunta estaba centrada en el triángulo equilátero y cuando se preguntó del triángulo equilátero ¿ahí fue sobre sus…? |
| **Estudiantes:** | Ángulos… |
| **Profesor:** | Y se les preguntó: ¿qué sabían ustedes del triángulo equilátero?, y ¿de qué habían hablado en la actividad previa?, ¿Agustín? |
| **Agustín:** | Que sus tres ángulos tiene los mismo grados |

Intervino el estudiante Agustín, quien presentó de forma incompleta la característica invariante del triángulo equilátero con respecto a sus ángulos, pero no con la restricción de que las medidas de los ángulos interiores son de 60°. Posteriormente, Ezequiel interviene en el mismo sentido de lo dicho por el estudiante Agustín.

**Ezequiel:** Y que no importaba cuanto se agrandaba [las medidas de los lados] los triángulos siempre iban a ser iguales

El argumento del estudiante alude a la característica invariante del triángulo equilátero de forma general, en el que resalta que el tamaño del triángulo no importa. Con base en la argumentación de este episodio, el profesor cuestiona acerca de las medidas de los ángulos de triángulos equiláteros:

**Profesor:** Ahora… ¿podemos saber cuánto miden sus ángulos?
**Estudiantes:** ¡60!

Los estudiantes dicen cuánto debe ser la medida de estos y para afirmar, pregunta nuevamente.

**Profesor:** ¿Puede medir más de 60?
**Estudiantes:** ¡No!
**Agustín:** ¡Porque se pasa de 180! [La suma de los ángulos interiores]

Los estudiantes dieron como repuesta ¡no!, acompañada de la propiedad de la suma de los ángulos. Por último, una acción pedagógica por parte del profesor quien realizó la pregunta:

**Profesor:** ¿Quién más puede dar otra respuesta?
**Julieta:** Que los ángulos son de 60 y que sí son de 90 ya no sería una triángulo equilátero.

Julieta expuso su argumento en término de una característica del triángulo equilátero, sus ángulos interiores son de 60°, además hace énfasis en que un triángulo equilátero tiene ángulos de 90°, entonces éste no sería una triángulo y alude a la definición de triángulo con base en la suma de los ángulos interiores.

#### *4.1.1.2. El caso del triángulo equilátero con un ángulo menor de 90°*

Este caso giró en torno a los argumentos y respuestas de los estudiantes frente la tarea 3. El profesor inició la fase colectiva mediante la pregunta que hace referencia a la tarea.

**Profesor, D1:** ¿Existen triángulos equiláteros con un ángulo menor de 90°?

**Ulises, C1:** ¡No!

**Profesor:** ¿Por qué dices que no?

**Ulises, W1:** Porque no importa su tamaño … tendrá el mismo ángulo de 60°

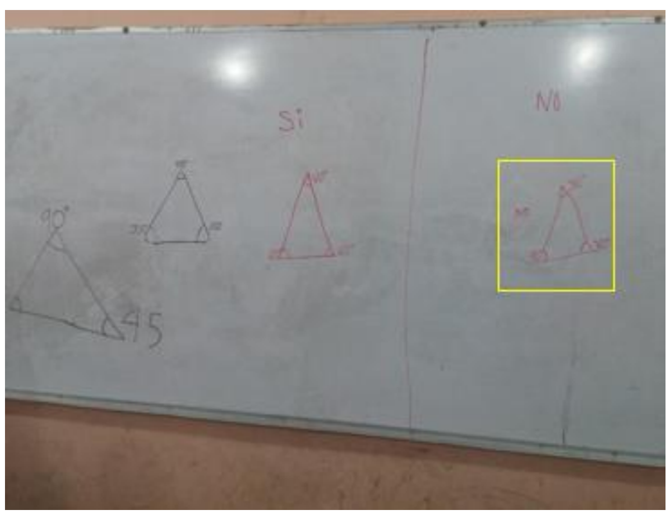
La aserción **C1** de Ulises la fundamentó con la garantía **W1**, en términos de la característica invariante del triángulo equilátero respecto de sus ángulos y resaltó que no importa el tamaño del triángulo [hace referencia a las medidas de los lados], ya que los triángulos equiláteros tendrán siempre ángulos de 60°. Este argumento de garantía expuesto por Ulises, caracteriza su argumento como un argumento de clasificación, en vista de que implementó una característica invariante del triángulo equilátero como criterio de clasificación del objeto matemático en estudio.

Luego de la intervención de Ulises, el profesor intervino con la pregunta:

**Profesor:** ¿Quién dijo que no?

**Julieta, R1:** yo digo que sí y no

**Julieta, W2R1:** si porque 60 es menor que noventa [se refiere a los ángulos del triángulo equilátero] y no porque 60° no es el único ángulo menor de 90° que hay, hay muchos ángulos que le siguen [Julieta pasa al tablero y dibuja un triángulo para explicar el caso del sí y del no]




La refutación **R1** de Julieta se plantea en doble sentido, en razón de que tiene claridad en que puede ser sí y no. En el caso en que si es posible, su argumento de garantía **W2R1** refiere a que los ángulos de los triángulos equiláteros son de 60° y éstos son menores de 90°, consecuentemente cumplen con la exigencia de la tarea. Respecto del no, reconoce que los ángulos de 60° no son los únicos menores de 90°. Sabe que hay un conjunto de ángulos cuya medida es menor que 90°. Por lo cual, la excepción del caso es el sí y está dirigido tanto a la aserción de Ulises e invalida la garantía expuesta presentada por él. Los argumentos esgrimidos por Julieta en este episodio, refieren uno *basado en la mejor explicación*, dado que compara casos específicos para sustentar su afirmación.

En el mismo sentido, el estudiante Agustín interviene.

| | |
|---|---|
| **Agustín, R2:** | Yo digo que si |
| **Agustín, W3R2:** | Como Julieta dijo 60 es como el normal [se refiere a los ángulos del triángulo equilátero]. Sobre todo la suma debe tener 180° para ser llamado triángulo |

La refutación **R2** realizada por parte del estudiante Agustín va dirigida a la aserción **C1** del estudiante Ulises y al mismo tiempo al argumento de garantía **W2** expuesto por éste, ya que Agustín resaltó la propiedad 1: la suma de los ángulos interiores del triángulo es 180° como condición que debe cumplir todo triángulo y de forma implícita la definición de triángulo la tuvo en cuenta. Así, con base en lo anterior, el argumento de garantía de Agustín enmarca la implementación de una propiedad con el propósito de fundamentar su aserción, lo cual implica que su argumento sea un *argumento basado en una regla* y a la vez *un argumento práctico*.

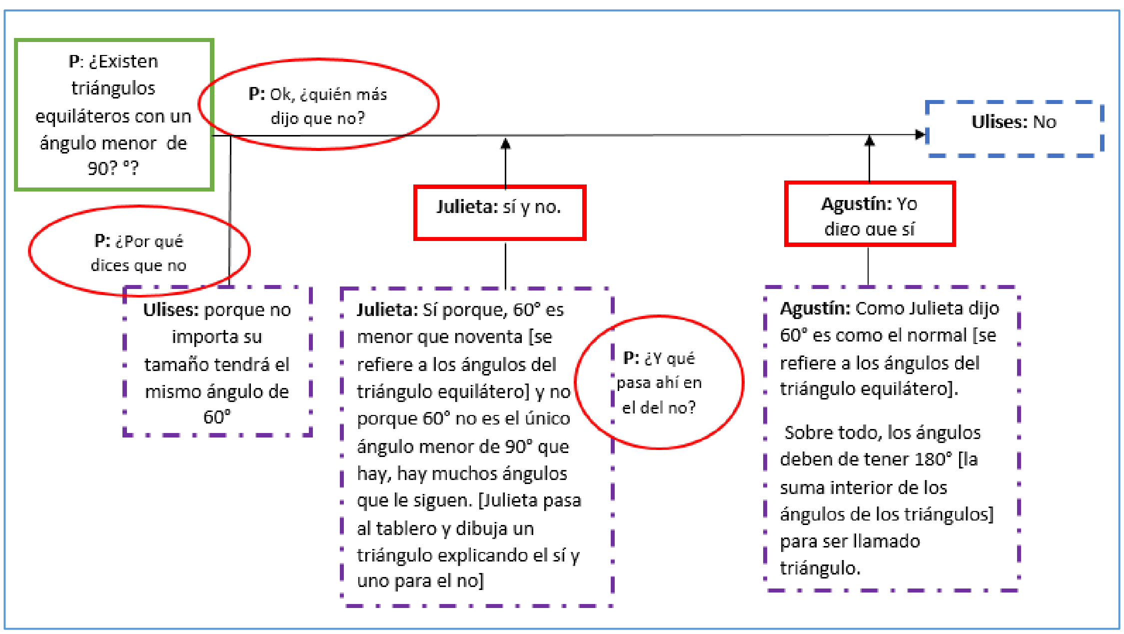



**Figura 4. 2.** El caso del triángulo equilátero con un ángulo menor de 90°, Tarea 2.

En la figura 4.2 se reconstruye la argumentación con base en los argumentos establecidos por los estudiantes en el proceso de solución de la tarea 2.

### *4.1.1.3. El caso del triángulo equilátero con un ángulo mayor de 90°*

En este caso se presentan los argumentos establecidos por los estudiantes a modo de respuesta a la tarea 2.

El profesor inició la discusión de los resultados referente a la tarea 2, luego de que los estudiantes respondieran de forma individual sobre su hoja de trabajo. El profesor retomó la pregunta para toda la clase y preguntó:

| | |
|---|---|
| **Profesor, D1:** | ¿Existen triángulos equiláteros con un ángulo mayor de 90°? |
| **Profesor:** | ¿Quién dijo que si? |
| **Javier, C1:** | ¡Sí! |
| **Javier, W1:** | Si aumenta un grado más del ángulo no va a afectar el triángulo |

El argumento de garantía **W1** del estudiante Javier, sustenta su argumento en una concepción con respecto a la medida de los ángulos, considerando que sí aumenta unos ciertos grados a la medida de los ángulos, no afectará la existencia del triángulo. Es notorio que este estudiante en su argumento, manifiesta la característica de la medida de los ángulos de un triángulo equilátero en un sentido inadecuado, esto da cabida para que sea considerada la existencia de triángulos equiláteros con un ángulo mayor de 90°.

Después de que Javier presentara su argumento de garantía, intervino Julieta, quien refutó su argumento.

| | |
|---|---|
| **Julieta, R1:** | ¡No! |
| **Julieta, W2R1:** | Porque el ángulo del triángulo equilátero es de 60 y por eso no se puede. |

La refutación **R1** de Julieta fue directa hacia la aserción **C1** de Javier, presentando a modo de excepción, la inexistencia del triángulo equilátero con un ángulo mayor a 90, puesto que el argumento de garantía de Julieta **W2R1** se centró en una de las características invariantes del triángulo equilátero (los triángulos equiláteros tienen ángulos internos iguales a 60°). Esta característica mencionada por Julieta la pasó por alto el estudiante Javier, ya que expuso en su argumento que pueden tener ángulos mayores de

90°. Visto anteriormente, la estudiante Julieta en su garantía, presentó un criterio de definición para establecer que no es un triángulo equilátero, así al implementar criterios o definiciones, el argumento de esta estudiante es clasificado como un argumento de clasificación.

Posteriormente, el estudiante Agustín refutó el argumento de Javier**:**

| | |
|---|---|
| **Agustín, R2:** | Que al menos no con un triángulo equilátero |
| **Agustín, W3R2:** | Porque se pasaría a 300° y lo máximo que se puede tener es de 180°. |

La refutación **R2** que estableció Agustín se dirigió a la aserción del estudiante Javier **C1**, este hecho de refutar la aserción hizo que la refutación **R2** se centrara en presentar una excepción del argumento de Javier. Además, el argumento de garantía **W3R2** de Agustín recae en la propiedad 1 (la suma de los ángulos interiores del triángulo es 180°) evidenciada a través del resultado obtenido al sumar tres ángulos de 100°. Dado que el argumento de Agustín se basa en una propiedad, se tiene que el argumento de este estudiante es un argumento basado en reglas.

En la figura 4.3 se muestra la reconstrucción de los argumentos de los estudiantes a nivel colectivo con base en sus respuestas establecidas en la tarea 3.

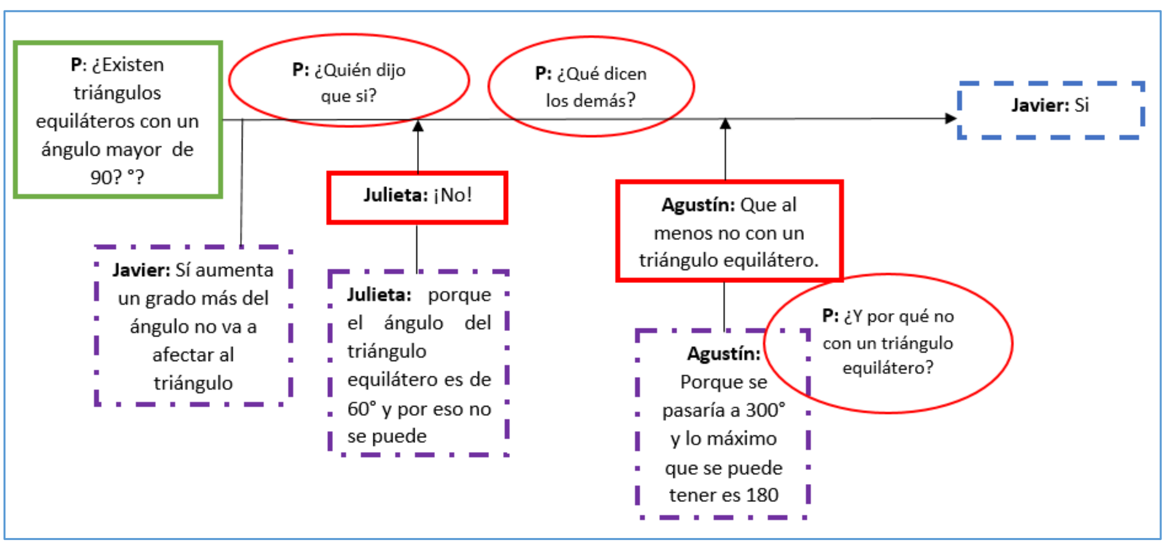



**Figura 4. 3.** El caso del triángulo equilátero con un ángulo mayor de 90°, tarea 3.

### 4.1.2. Bloque de tareas referentes al triángulo isósceles (T4, T5, T6)

Esta sección abarca el bloque dos de tareas que hacen referencia a los argumentos suscitados en términos de la clasificación del triángulo isósceles con los casos especiales que incluyen variaciones en sus ángulos.

#### *4.1.2.1. El caso del triángulo isósceles con un ángulo de 90°*

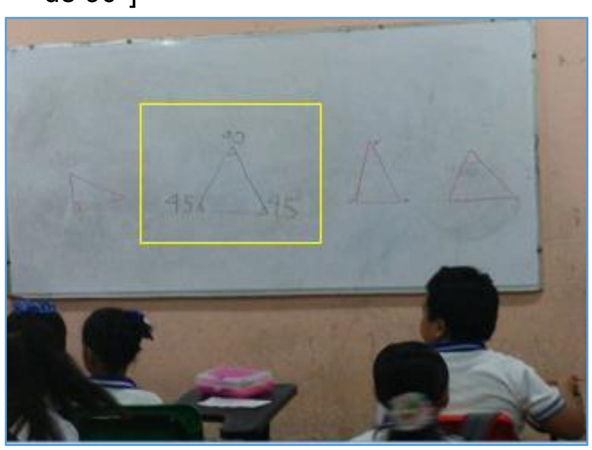
En el primer caso de este bloque de tareas, el profesor hace referencia a la T4 mediante la pregunta:

| | |
|---|---|
| **Profesor, D1:** | ¿Existen triángulos isósceles con un ángulo de 90°? |
| **Leonel, C1:** | ¡No! |
| **Leonel, W1:** | Porque sus ángulos serán iguales y no importa cuánto crezca [el triángulo] |

El primer estudiante en intervenir fue Leonel, éste aseveró que no existen triángulos isósceles con un ángulo de noventa, ya que en su garantía **W1**, tiene en cuenta la característica invariante relacionada con la medida de los ángulos internos del triángulo isósceles. Con base en el argumento de garantía expuesto por Leonel, su argumento está determinado dentro de las categorías puestas en estudio en la presente investigación como un argumento de clasificación, debido a que tiene en cuenta cómo deben ser las medidas de los ángulos.

Luego de haber presentado Leonel su argumento de garantía, Naomi intervino.

| | |
|---|---|
| **Naomi, R1:** | ¡No! |
| **Naomi, W2R1:** | Porque hay dos ángulos iguales y uno desigual [pasa al tablero y dibuja un triángulo con dos ángulos de 45° y un de 90°] |



Naomi refutó **R1** el argumento de garantía del estudiante Leonel teniendo en cuenta que en su garantía **W2R1** presentó de forma general la característica invariante del triángulo isósceles en relación con los ángulos (dos de los ángulos interiores son iguales y uno diferente), con el objetivo de hacer explícito que si existen. Así, con base en el argumento de garantía expuesta por Naomi su argumento es caracterizado por clasificar el triángulo según la definición de este tipo de triángulo y relacionado con la medida de los ángulos interiores, por consecuente el argumento de Naomi es un argumento de clasificación.

Seguidamente de la intervención de Naomi, Mía en función de presentar su argumento de garantía **W2**, pasó al tablero y dibujó un triángulo isósceles con medidas de los ángulos internos igual a: 90°, 45° y 50°. Este ejemplo en el fondo relaciona la característica invariante con respecto a las medidas de los ángulos interiores del triángulo isósceles y la propiedad de la suma de los ángulos interiores es igual a 180° no referenciadas por parte de Mía. Lo cual motivó al profesor a realizar una pregunta con base en el ejemplo presentado por Mía.

**Profesor:** ¿Mía, es un triángulo isósceles?

**Estudiantes, R2:** ¿Mía, es un triángulo isósceles?

**Mía, W4R2:** si porque la suma da 180°

Los estudiantes presentaron la refutación **R2** con base en el dibujo de Mía, el cual no es un triángulo isósceles. Este hecho dio lugar para que una tercera refutación emergiera.

**Jennifer, R3:** ¡No!

**Jennifer, W5R3:** Porque tiene sus ángulos diferentes

El argumento de garantía **W5R3** de Jennifer tuvo en cuenta la característica invariante relacionada con las medidas internas del triángulo isósceles. El argumento expuesto por Jennifer se caracteriza como un argumento basado en la clasificación según la definición del triángulo isósceles en relación con la medida de los ángulos, por lo tanto el argumento emitido por esta estudiante es un argumento de clasificación.

En la figura 4.4 se presenta la argumentación colectiva, la cual sucedió en el transcurso de la tarea 4.

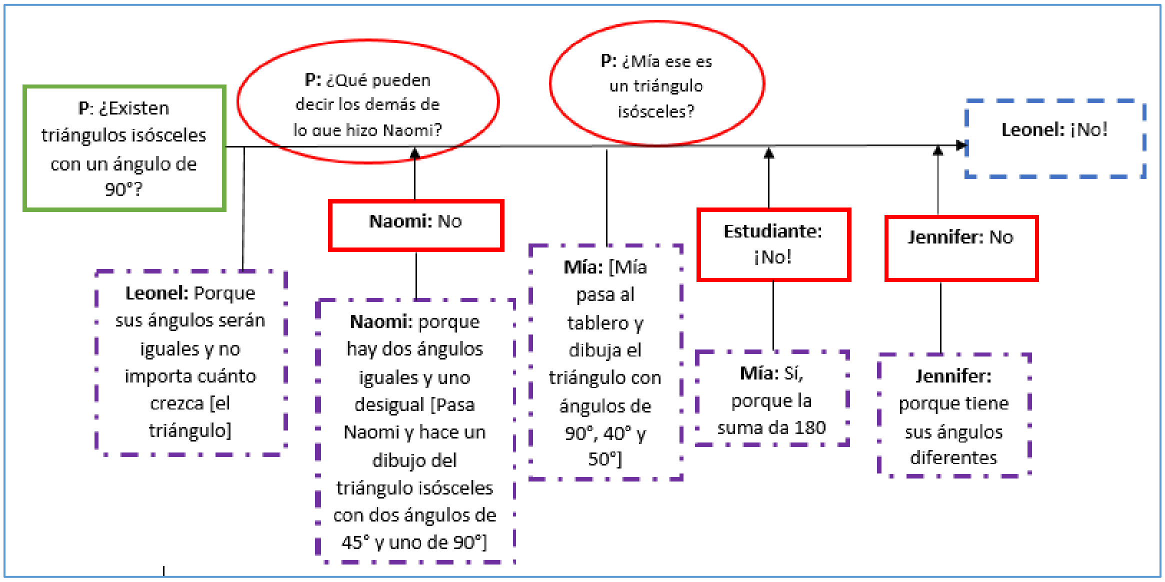



**Figura 4. 4.** El caso del triángulo isósceles con un ángulo de 90, Tarea 4.

### *4.1.2.2. El caso del triángulo isósceles con un ángulo menor de 90°*

En este caso se presentan los argumentos de los estudiantes en torno a la tarea T5, propuesta por el docente, quien preguntó:

**Profesor, D1:** ¿Existen triángulos isósceles con un ángulo menor de 90°?

**Manu, C1:** ¡No!

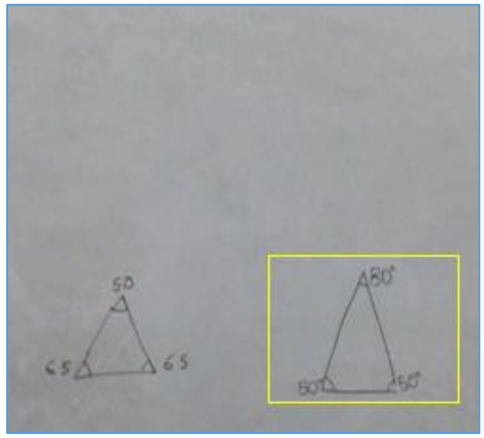
**Manu, W1:** porque no daría 180 [lo dice en un tono muy bajo]

Este estudiante aseveró **C1** que no existen triángulos isósceles con un ángulo menor de 90° y fundamentó su argumento **W1** en la propiedad del triángulo que hace referencia a la suma de sus ángulos interiores de forma incompleta sin hacer alusión a un caso en específico. El argumento de garantía está en términos de la propiedad que hace referencia a la suma de los ángulos, lo cual permite categorizar el argumento como un argumento basado en reglas.

**Profesor:** levante la mano quien escribió que no existe [levanta la mano Julieta, Agustín, Jennifer, David, Manú, Mía, Naomi, Constanza]

**Jennifer, R1:** ¡Sí!

**Jennifer, W2R1:** porque hay otro que es de 50° [pasa al tablero y dibuja un triángulo con dos ángulos de 50° y uno de 80°]




La refutación de Jennifer R1 fue directa hacia la aserción **C1** de Manú, debido a que contrarresta la afirmación de Manu. Además, la garantía del argumento de Jennifer presenta un ejemplo donde se cumple la característica invariante del triángulo isósceles y la condición de tener un ángulo menor de 90°. En el fondo del argumento de garantía **W2R1** está la propiedad de la suma de los ángulos internos del triángulo que implica que el argumento de garantía de Jennifer sea un argumento basado en reglas. En la figura 4.5 e presenta la reconstrucción de la argumentación colectiva suscitada en el desarrollo de T5.

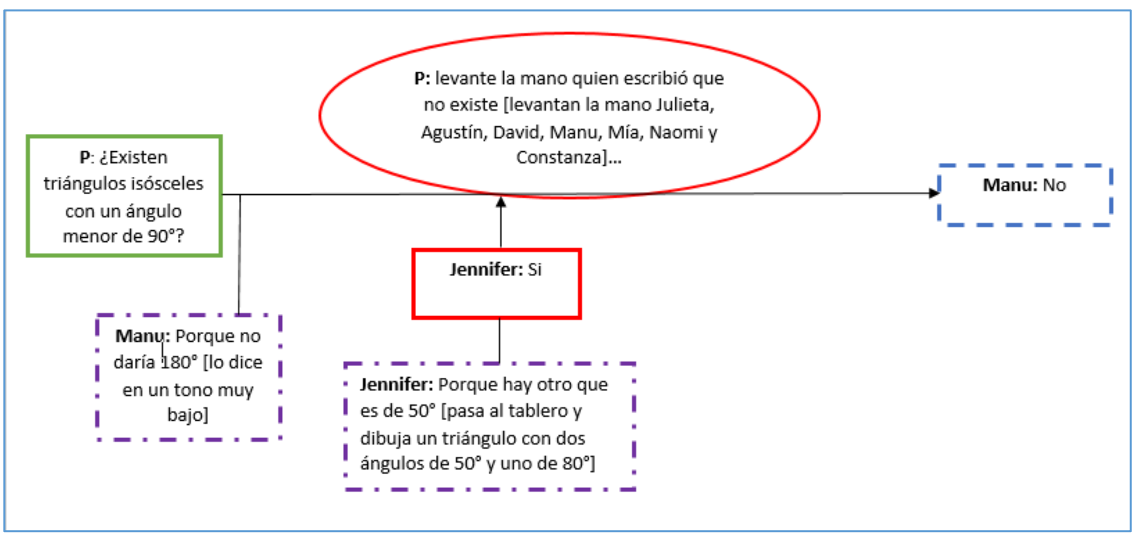



**Figura 4. 5.** El caso del triángulo isósceles con un ángulo menor de 90°, tarea 5.

### *4.1.2.3. El caso del triángulo isósceles con un ángulo mayor de 90°*

La tarea 5 inició con la puesta en escena por parte del profesor, gestionó la participación de los estudiantes a través de preguntas:

**Profesor, D1:** ¿Existen triángulos isósceles con un ángulo mayor de 90?

**Profesor:** ¿Quién escribió que no?

**Galilea, C1:** ¡No existen!

**Galilea, W1:** Porque si fuera 95° y 95° [se refiere a los ángulos iguales del triángulo isósceles] daría 190° y se pasaría

Galilea en su aserción **C1** alude a la inexistencia de los triángulos isósceles con un ángulo mayor de 90° sustentado en su argumento de garantía **W1**. En ella, se reconoce la característica invariante del triángulo isósceles respecto de la medida de los ángulos internos, ya que toma dos ángulos iguales de 95° y además, alude a la propiedad de la suma de los ángulos interiores del triángulo, lo cual sólo hizo referencia con los dos ángulos propuestos y evidenciar que no existen. Por consiguiente, su garantía demuestra el uso inadecuado de la característica y la propiedad al mismo tiempo. Así, el argumento de Galilea se fundamenta en la propiedad 1, lo que conlleva a caracterizar el argumento en *uno basado en reglas*. Seguidamente, el profesor preguntó para toda la clase.

**Profesor:** ¿Quién tiene otro ejemplo diferente a ése, dónde si se pueda?

**Julieta, R1:** ¡Si se puede!

**Julieta, W2R1:** Porque sólo reduces a los ángulos iguales y le sumas al ángulo de arriba [hace la comparación del triángulo isósceles con un ángulo de 90° (tarea 4) y dos de 45°]

Julieta presentó su refutación sostenida el argumento de garantía **W2R1,** el cual hace referencia a las operaciones sobre el caso presentado por Galilea, con el propósito de mostrar la existencia de un caso. Esta garantía está en términos de una explicación de procedimientos matemáticos, por lo cual es caracterizado este argumento como un argumento de tipo práctico, dado que opera con los ángulos del ejemplo propuesto en el caso anterior (tarea 4) para mostrar la existencia del triángulo propuesto.

Por último, la refutación de Ulises se centró en mostrar otro ejemplo que cumpla las condiciones pedidas por la tarea.

**Ulises, R2:** ¡No!

**Ulises, W3R2:** porque sus ángulos miden 90° y dos de 45°

Este presentó en su argumento de garantía **W3R2** la combinación correcta entre la característica invariante y la propiedad para presentar su ejemplo, todo debido a que menciona los dos ángulos iguales y uno desigual y las sumas de estos son iguales a 180°. El argumento presentado por Ulises está fundamentado en la caracterización de los triángulos según el criterio de las medidas de sus ángulos, por consiguiente es un argumento de clasificación.

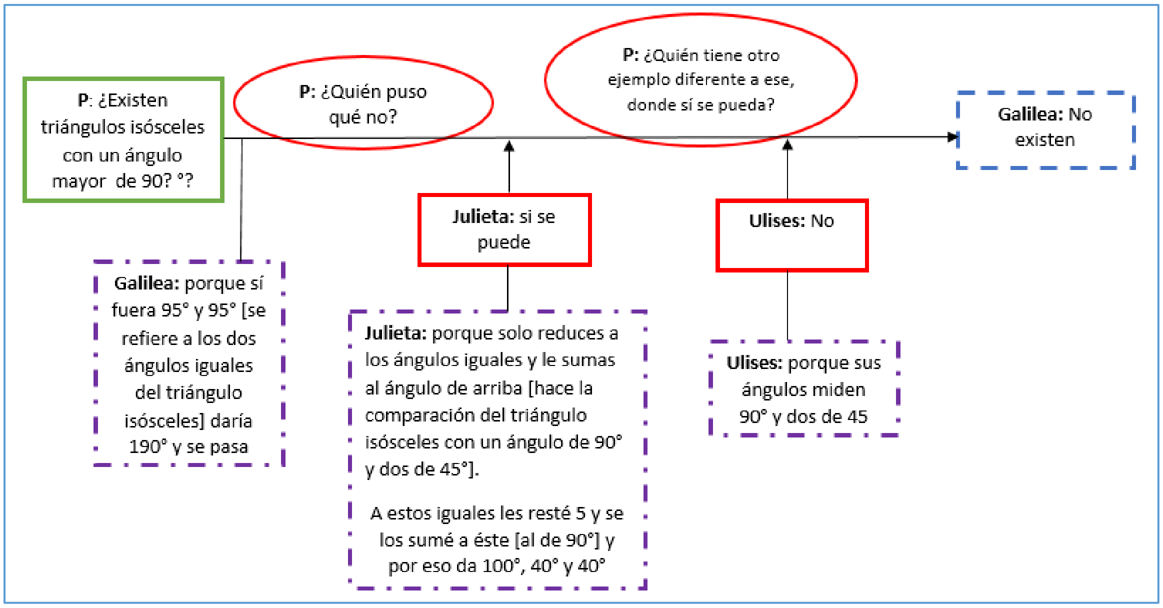



**Figura 4. 6.** El caso del triángulo isósceles con un ángulo mayor de 90°, tarea 6.

### 4.1.3. Bloque de tareas referentes al triángulo escaleno (T7, T8, T9)

En este último bloque de tareas, se analizan los argumentos presentados por los estudiantes ante las tareas relacionadas con la existencia de triángulos escalenos con sus respectivas variantes en sus ángulos.

#### *4.1.3.1. El caso del triángulo escaleno con un ángulo de 90°*

En la tarea 7, el profesor inició la fase colectiva mediante la pregunta de la tarea con el propósito de que los estudiantes comentaran sus respuestas.

**Profesor, D1:** ¿Existen triángulos escalenos con un ángulo de 90°?
**Ezequiel, C1:** ¡No!
**Ezequiel, w1:** Porque el triángulo escaleno tiene sus lados desiguales

La intervención inicial por parte del estudiante Ezequiel, quien respondió a la pregunta y dio a conocer su aserción **C1**: “no”, no existen triángulos escalenos con un ángulo de 90° y posteriormente presenta su garantía **W1.** Esta tiene que ver con la característica invariante del triángulo escaleno y las medidas de los lados. El argumento de garantía expuesto por este estudiante permite caracterizar su argumento, en un argumento de clasificación, dado a que en éste se recurre a la característica invariante del triángulo con el propósito de clasificarlo.

Seguidamente, el estudiante Javier refutó **R1** lo dicho por Ezequiel.

**Javier, R1:** Yo digo que sí

**Javier, W2R1:** porque todos sus lados son desiguales… siempre y cuando al sumarlos [los ángulos]… de 180

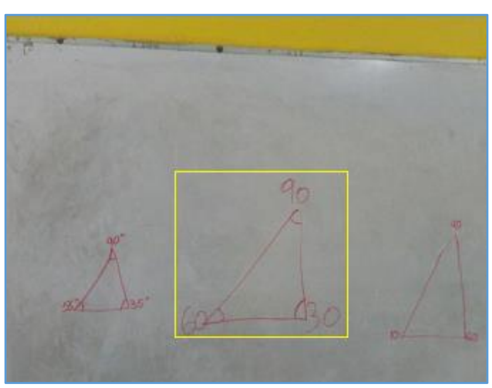
Muestra Javier en su argumento de garantía **W2R1** que sí existe un triángulo con las condiciones pedidas pero siempre y cuando los lados sean desiguales y al mismo tiempo la suma de los ángulos internos sean igual a 180°. Estas dos, son características invariantes del triángulo escaleno y la propiedad de los triángulos respectivamente. Así, se puede categorizar este argumento presentado por Javier como un argumento basado en reglas y al mismo tiempo de clasificación.

Enseguida, la intervención del estudiante Agustín quien refutó **R3** el argumento de garantía de Ezequiel.

**Agustín, R2:** Si se puede…

**Agustín, W3R2:** porque cambiando los números a otros ángulos [se refiere a las medidas de los ángulos]… y sumándoles… hay otros resultados [pasa al tablero y dibuja un triángulo con ángulos de 90°, 60° y 30°] 90 más 60… da 150 más 30… 180

En el argumento de garantía **W3R2,** el estudiante recurre a una estrategia implementada por éste con el propósito de encontrar las mediadas de los ángulos y cumplan la propiedad de la suma de los ángulos internos. Con base en lo anterior, el argumento de Agustín es categorizado como un argumento basado en la mejor explicación.



La figura 4.7 muestra la argumentación suscitada en término de los argumentos establecidos por los estudiantes en la resolución de la tarea 7.

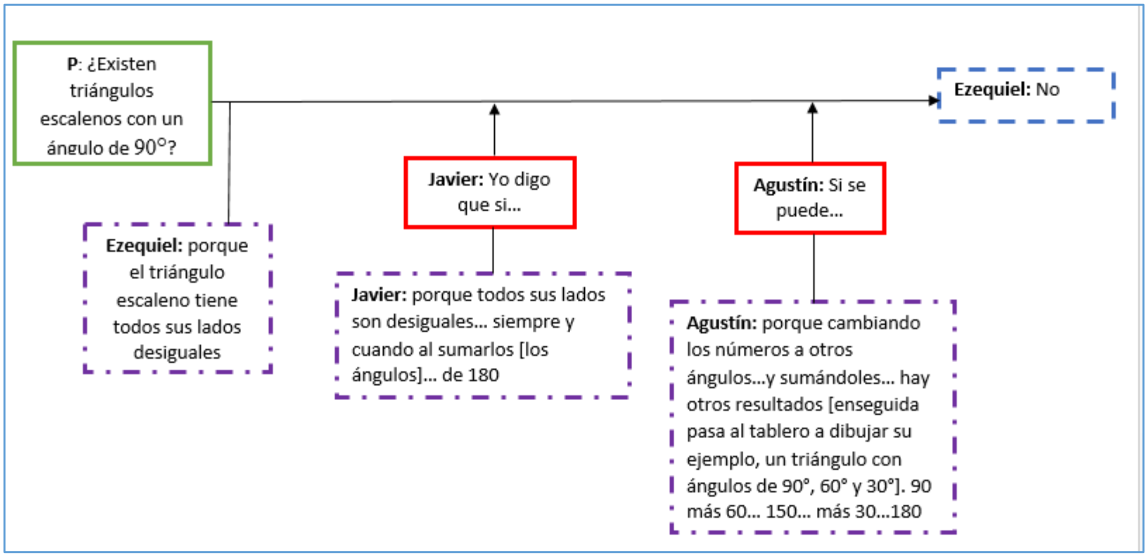



**Figura 4. 7.** El caso del triángulo escaleno con un ángulo de 90°, tarea 7.

### *4.1.3.2. El caso del triángulo escaleno con un ángulo menor de 90°*

En este caso, la tarea 8 estaba relacionada con la existencia de triángulos escalenos con un ángulo mayor a 90°. Los estudiantes en la fase colectiva, presentaron sus argumentos a modo de respuestas a la tarea planteada por el profesor, sin embargo los estudiantes presentaron argumentos sin dar cabida a la refutación de aserciones.

| | |
|---|---|
| **Profesor:** | Ahora… una pregunta… esta tarea decía: ¿existen triángulos escalenos con un ángulo menor a 90°? |
| **Estudiantes:** | siiiii |
| **Profesor:** | ¿Quién me da un ejemplo? |
| **Julieta:** | 90… 30 y 60 |
| **Profesor:** | ¿Quién dice que no se puede? |
| **Estudiantes:** | Yo digo que si |
| **Profesor:** | ¿Todos dicen que si? |
| **Estudiantes:** | siii |
| **Profesor:** | A ver Agustín ¿por qué dices que si? |
| **Agustín:** | Porque 80… 85… y 25… algo así |
| **Profesor:** | 80 y 85 son 165… y 25… no… 15 |
| **Agustín:** | No… ya se… me salió mal |
| **Profesor:** | 80 y 85 son 165… para 180… 15… ¡listo! |

| | |
|---|---|
| **Mía:** | Maestro yo le digo por qué si |
| **Profesor:** | ¿Por qué si?... Mía |
| **Mia:** | Porque dice menor… y le está haciendo menor… y el chiste es que te de 180 |
| **Profesor:** | Ok |

Además, en los argumentos presentados por los estudiantes, recurrieron a ejemplos donde implementaban las características invariantes del triángulo escaleno con base en sus ángulos y la propiedad de la suma de los ángulos de forma adecuada y sin ningún problema.

### *4.1.3.3 El caso del triángulo escaleno con un ángulo mayor a 90°*

En este caso, la tarea giró en torno a la tarea 9, y el profesor inició la etapa colectiva mediante la pregunta:

**Profesor, D1**: ¿Existen triángulos escalenos con un ángulo mayor de 90°?

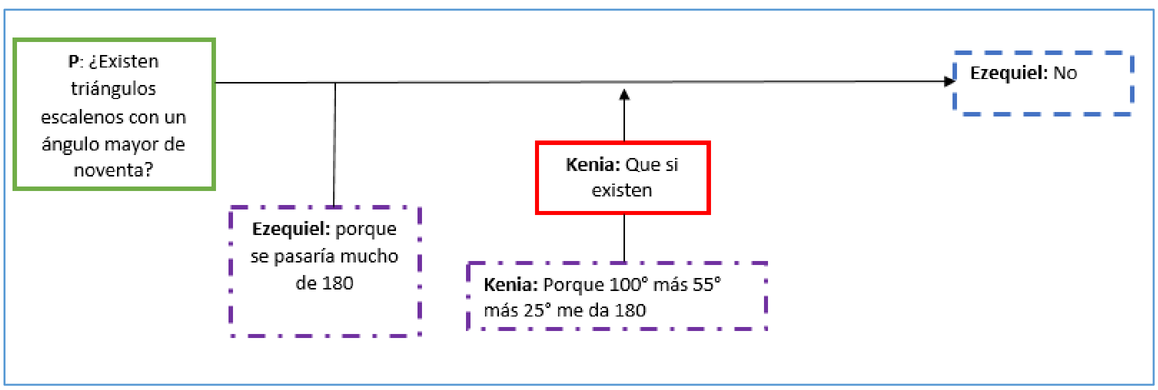



**Figura 4. 8.** El caso del triángulo escaleno con un ángulo mayor de 90°, tarea 9.

Intervino el estudiante Ezequiel, quien dio a conocer su punto de vista.

| | |
|---|---|
| **Ezequiel, C1:** | ¡No! |
| **Ezequiel, W1:** | porque se pasaría mucho de 180 |

Primero Ezequiel aseveró **C1** y luego, sustentó su argumento de garantía **W1,** en la propiedad relacionada con la suma de los ángulos internos del triángulo es 180°. El hecho de tener en cuenta la propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo hace que este argumento sea un argumento basado en reglas y como lo visto en los casos anteriores al mismo tiempo implementó esta propiedad como un criterio con el fin de clasificar el triángulo.

Con base en lo dicho por Ezequiel, Kenia refutó **R1** su aserción **C1**.

**Kenia, R1:** que sí existen
**Kenia, W2R1:** porque 100 más 55 más 25 me da 180

La estudiante Kenia presentó un ejemplo fundamentado en la propiedad que tiene que ver con la suma de los ángulos internos del triángulo. Así, el argumento de Kenia es un *argumento basado en reglas* puesto que tiene en cuenta la suma de los ángulos internos del triángulo escaleno para establecerlo.

# CAPÍTULO 5

# Discusión y Conclusiones

La investigación que se ha plasmado en este documento, se realizó dentro del campo de la Educación Matemática, dedicada a identificar y analizar la naturaleza de los argumentos establecidos por un grupo de estudiantes de 5° grado a partir de la refutación de aserciones en el contexto de la clasificación de triángulos.

En este capítulo se pone cierre al escrito que detalla la investigación realizada, iniciando con la discusión de los resultados, se da respuesta de forma puntual a la pregunta-objetivo de investigación, se indican conclusiones relativas a la metodología, además, señala algunas limitaciones y algunos aportes referentes al campo de la Educación Matemática.

## 5.1. Discusión de los resultados

Los resultados del estudio refieren a la reconstrucción de la argumentación matemática en el salón de clase en un sentido colectivo (Krummheuer, 1995). Se contribuye con ello a promover mediante las tareas, la argumentación en el salón de clases mientras los estudiantes y un profesor analizan características invariantes de triángulos, con base en preguntas cerradas que propiciaron la refutación de las aserciones de los estudiantes. Además, la refutación de aserciones evidenció los diferentes puntos de vista de los estudiantes en relación con las respuestas a las tareas, permitió analizar el nivel de comprensión que tenían éstos con respecto al objeto matemático en estudio (Solar & Deulofeu, 2016) y en el mismo sentido, resaltó el razonamiento matemático empleado por los estudiantes durante el desarrollo de las tareas (Rumsey & Langrall, 2016).

En la argumentación matemática existen tres formas en la se involucra la refutación, una es que se refuten los datos, la garantía y/o la aserción (Reid, Knipping & Crosby, 2011).

Cabe señalar, que en el desarrollo de las tareas la refutación de aserciones fue la forma de refutar más frecuente, pero no la única, hubo un caso en la T1 donde apareció la refutación de la garantía. La refutación de aserciones prevaleció debido al diseño de las tareas con preguntas cerradas, mientras que la refutación de la garantía emerge en un caso específico con el propósito de invalidar la aserción o afirmación inadecuada planteada por un estudiante.

A partir de la argumentación suscitada al refutar aserciones, los estudiantes tuvieron la oportunidad de aprendizaje desde el punto de vista constructivista (Godino, 2003), esto a través de la gestión del error promovida por el profesor, puesto que éste no evaluaba los argumentos de los estudiantes, sino que permitía asegurar a los estudiantes que sus respuestas equivocadas son importantes, y dar lugar a que se refutaran o contrapusieran con el propósito de construir conocimiento (Solar & Deulofeu, 2016).

Los argumentos de refutación suscitados durante la resolución de las tareas, generó un espacio de interacción donde los estudiantes argumentaban sus resultados desde la matemática en estudio. En las respuestas de los estudiantes un aspecto a tener en cuenta, es el nivel de autenticidad que tuvieron los estudiantes al momento de argumentar. Puesto que este nivel, indica que tan auténticos son los argumentos de los estudiantes, ya que pudieron retomar lo dicho por otros para presentar sus argumentos (Krummheuer, 2015).

Por otra parte, en la argumentación suscitada entre los estudiantes durante el desarrollo del experimento de enseñanza, éstos retomaban conocimientos previo (e. g. características de los tipos de triángulos) en relación con el tema en estudio (e. g. propiedad de la suma de los ángulos internos del triángulo es 180°) con el propósito de fundamentar sus argumentos, de igual forma como lo establecen Wagner, Smith, Conner, Singletary y Francisco (2014), la argumentación matemática es entonces una oportunidad de aprendizaje para los estudiantes.

En relación con las estructuras argumentativas reconstruidas con base en los resultados de la investigación, se identificaron los elementos que conforman la argumentación colectiva. Estos elementos reconocidos incluyen el núcleo (datos, garantía y aserción) y la refutación. Con base en los elementos reconocidos, cabe mencionar que los estudiantes fundamentaron sus aserciones netamente en argumentos de garantía, y el papel del respaldo como apoyo a la garantía en la reconstrucción de la argumentación colectiva fue nula (Krummheuer, 2015).

Se debe resaltar que en la actividad previa (*Ti)* del experimento de enseñanza, los estudiantes clasificaron los triángulos teniendo en cuenta sólo las medidas de los lados, sin recurrir a la medida de los ángulos interiores (Kaur & Sinclair, 2014). Por lo contrario, en la resolución de las tareas del experimento de enseñanza, en los argumentos de clasificación identificados, los estudiantes recurrieron inicialmente a la clasificación de triángulos con base en las características de las medidas correspondientes a los ángulos internos, y en una segunda instancia tenían presente de forma general las características de los tipos de triángulos para clasificar.

En el desarrollo del experimento de enseñanza, se identificaron cuatro tipos de argumentos a partir de la refutación de los argumentos de garantía presentados por los estudiantes: *prácticos*, *basado en reglas, basado en la mejor explicación y de clasificación* (Ver Tabla 5.1).

**Tabla 5.1.**Tipos de argumentos en las tareas del experimento de enseñanza.

| **Tipo de Argumento** | **B1: Triángulo Equilátero** | | | **B2: Triángulo isósceles** | | | **B3: Triángulo escaleno** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | T1 | T2 | T3 | T4 | T5 | T6 | T7 | T8 | T9 |
| Práctico | 1 | 1 | | | | 1 | | | |
| Basado en reglas | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| Basado en la mejor explicación | | 1 | | | | 1 | 1 | | |
| De clasificación | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | |

El argumento práctico, presenta una forma en la que los estudiantes sustentaban sus argumentos con base en la comparación de características invariantes o una propiedad del objeto matemático en estudio, esto con el propósito de seleccionar el objeto que tuviese las características requeridas de acuerdo al enunciado de la tarea. En este tipo de argumento, los estudiantes recurrían a estrategias aritméticas y retomaban resultados de casos anteriores con el propósito de dar solución al caso en estudio. Este tipo de argumento se identificó tres veces durante el desarrollo del experimento de enseñanza.

El argumento basado en reglas, se reconoció en todas las tareas del experimento de enseñanza, en este tipo de argumento los estudiantes recurrían a la propiedad de la suma de los ángulos internos del triángulo es 180°. Durante las primeras tareas, los estudiantes presentaban dificultades con la propiedad, puesto que seleccionaban las medidas de los ángulos internos sin tener en cuenta que la suma de los ángulos es igual a 180°. Esto implicó que los estudiantes durante las primeras tareas validaran la existencia de triángulos cuya suma de los ángulos internos era mayor que 180°, pero además una oportunidad para que el profesor interviniera y orientara a los estudiantes con el propósito de que reconocieran la inexistencia de triángulos cuya suma de los ángulos internos sobrepasara los 180°.

El argumento basado en la mejor explicación, se identificó en tres tareas del experimento de enseñanza, en estas tareas, los estudiantes sustentaron sus argumentos en explicaciones relacionadas con las medidas de los ángulos interiores y en el mismo sentido, retomaban características de triángulos estudiados para modificarlos y validar el tipo de triángulo en estudio.

El argumento de clasificación, fue el argumento que se implementó con más frecuencia en las tareas del experimento de enseñanza. Este argumento se caracteriza por tipificar el triángulo con base en sus características invariantes (e, g. medida de sus ángulos internos y/o medida de los lados).

## 5.2. Respuesta a la pregunta de investigación

Como se expuso primeramente en el primer capítulo, la problemática que se abordó en este trabajo de investigación tiene que ver con la cuestión *¿Qué argumentos caracterizan la refutación de aserciones cuando se invalida la garantía?* Con el propósito de responder la pregunta de investigación, el objetivo trazado que orientó teórica y metodológicamente el desarrollo de la investigación es:

> ***O:*** *Comprender la naturaleza de los argumentos que dan estudiantes de quinto grado de primaria al validar o refutar aserciones.*

Atendiendo a la pregunta de investigación junto con el objetivo trazado, está se aborda con base en el análisis de la argumentación colectiva suscitada en el salón de clase. Se clasificaron los argumentos establecidos por los estudiantes con base en el contenido de las garantías identificadas en sus argumentos. De forma que, los argumentos empleados por los estudiantes durante las tareas son de naturaleza: de clasificación, basado en reglas, prácticos, y basado en la mejor explicación.

Los argumentos que caracterizan la refutación de aserciones, en el contexto de la clasificación de triángulos, son los argumentos de clasificación y basados en reglas. En los argumentos de clasificación, las características invariantes de los triángulos se implementaron en términos de sus ángulos y se reconocieron en las tareas T1 a T8 en 13 ocasiones, en el inicio del experimento de enseñanza los estudiantes seleccionaban las medias de los ángulos con base en el criterio que ellos conocían (e. g., si es equilátero, tienen todos ángulos iguales, o si es isósceles dos de sus ángulos son iguales) pero pasaban por alto la propiedad que debe cumplir la suma de las medidas de los ángulos. Además, en el análisis de los resultados se muestra cómo los estudiantes hacían alusión a las definiciones de los tipos de triángulos, esto a través de expresiones que relacionaban la inexistencia de triángulos, puesto que no se cumplía la propiedad de la suma de los ángulos internos.

El otro argumento que caracteriza la refutación de aserciones, es el argumento basado en reglas, este tipo de argumento se reconoció en todas la tareas del experimento de enseñanza en once ocasiones, pero no con la mayor frecuencia. Este tipo de argumento hace alusión a la regla relacionada con la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°, ésta propiedad se reconoció en frases como: se pasa de 180°, la suma no da 180°, supera el límite que es 180°.

## 5.3. Conclusiones relativas a la metodología

La metodología del experimento de enseñanza orientó la ejecución de la investigación mediante las fases de: planteamiento de las tareas, ejecución y análisis de los datos. En el planteamiento y diseño de las tareas, los principios de diseños fueron esenciales para que se propiciara la refutación de aserciones, y la identificación de contradicciones en las garantías expuestas por los estudiantes en la fase colectiva de cada tarea. Así también, la organización de la totalidad de tareas en grupos, facilitó la clasificación de los argumentos de los estudiantes a partir de la refutación de aserciones referente al tipo de triángulo. Además, la evolución de los argumentos establecido por los estudiantes fue analizada con facilidad, puesto que se analizaban por grupos de tareas y finalmente de forma parcial.

El diseño de las tareas junto con la orientación del profesor en el desarrollo de las tareas del experimento de enseñanza, promovió la refutación de aserciones por parte de los estudiantes y la organización de las sesiones conformadas por bloques de tareas facilitó el análisis en lo colectivo, y contribuyó a que los estudiantes de primaria configuraran las características invariantes de los triángulos con base en sus ángulos, así como definiciones de los respectivos tipos de triángulos y propiedades.

## 5.4. Limitaciones de la investigación

Las limitaciones que posee este trabajo de investigación están relacionadas en un primer lugar con la metodología de la investigación, de forma puntual los participantes involucrados fueron 22 estudiantes de grado quinto de primaria, seleccionados por cuestiones de permiso y disposición de tiempo en un colegio de la ciudad de Acapulco. Asimismo, la participación de los investigadores-docentes en la toma de datos por ser personas externas al contexto diario de los estudiantes en el salón de clases, intervino en que la producción verbal de ciertos estudiantes no se hiciera notable o de forma natural durante la ejecución del experimento de enseñanza.

En segundo lugar, los resultados obtenidos y plasmados en este documento no son generalizables para todos los estudiantes de grado quinto de primaria. Puesto que, se debe tener en cuenta el conocimiento previo del grupo, asegurase que el nivel de partida con respecto al objeto de estudio sea adecuado para la ejecución del experimento de enseñanza como el aplicado en esta investigación, si es el caso de obtener resultados similares.

## 5.5. Aportes de la investigación

Los aportes que realiza esta investigación están dirigidos tanto a los profesores de primaria como a los investigadores educativos cuyo foco de atención es el estudio de la promoción de la argumentación matemática en el salón de clases y la comprensión de conceptos matemáticos. Estos, en relación con un contexto matemático específico, la clasificación de triángulos, y sobre éste los argumentos establecidos por los estudiantes dan una idea de cómo el profesor puede diseñar tareas con el propósito de configurar las características invariantes de los triángulos y promover en los estudiantes el uso de propiedades matemáticas de forma adecuada que refieran a la clasificación.

La refutación de aserciones además de manifestar las excepciones de la aserción, permite identificar el nivel de comprensión que tienen los estudiantes sobre las propiedades y/o reglas matemáticas implementadas en sus argumentos. Esto mediante la señalización de la ausencia de alguna característica del objeto en estudio, o el incumplimiento de relaciones entre las características invariantes del triángulo (e, g., propiedad de los ángulos internos). Asimismo, la refutación es un medio por el cual se promueve el progreso en los argumentos de garantía presentados por los estudiantes, esto a través de la validación y configuración de características invariantes de los triángulos.

Con base en la refutación de aserciones, identificamos que los argumentos de clasificación y basados en reglas, son los tipos de argumentos que caracterizan la refutación de aserciones en un contexto de la clasificación de triángulos. Evidencian el nivel de compresión que tienen los estudiantes referentes a las propiedades matemáticas implementadas. El hecho de que los estudiantes pueden establecer argumentos fundamentados desde propiedades matemáticas, reglas o definiciones permite consolidar que los estudiantes de primaria pueden emplear de forma adecuada propiedades matemáticas en este nivel de educación.

Sobre la clasificación de los triángulos, la refutación de aserciones se presentó en los tres bloques de tareas relacionados con los triángulos equiláteros, isósceles y escaleno, pero la refutación emergió con mayor frecuencia en el bloque relativo al triángulo equilátero y en el bloque del triángulo isósceles, puesto que es el caso donde se generó la contraposición de respuestas por parte de los estudiantes, además emplearon argumentos de garantía basado en la reglas que evidenciaban el cumplimiento o incumplimiento de una regla o propiedad necesaria para clasificar triángulos.

En general, esta investigación aportó al campo de la argumentación matemática escolar, puntualizando cómo puede ser promovida la argumentación colectiva y de forma contundente la comprensión de las características invariantes del objeto matemático en estudio, en este caso el triángulo y la clasificación de éste con base en la medida de sus ángulos. En síntesis, dentro de la argumentación matemática, la refutación de aserciones en la resolución de tareas es una oportunidad de aprendizaje, que sucede durante la interacción entre estudiantes, promovida por la gestión del error, tipos de preguntas y la orientación adecuada por parte del profesor.

# Referencias bibliográficas

Álvarez-Gayou, J. L. (2003). *Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamento y metodología*, México: Paídos Educador.

Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., & Presmeg, N. (2015), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: Examples of methodology and methods* (pp. 75-101). Dordrecht: Springer. Doi: 10.1007/978-94-017-9181-6

Cañadas, M.C., Deulofeu, J.; Figueiras, L.; Reid, D. & Yevdokimov, O. (2005). The Conjecturing Process: Perspectives in Theory and Implications in Practice. *Journal of Teaching and Learning, 5*(1), 55-72.

Cramer, J. (2011). Everyday argumentation and knowlegde construction in mathematical tasks. In: M. Pytlak, T. Rowland, E. Swoboda (Eds) *Proceedings of Seventh Congress of European Research in Mathematics Education, 1*(1), 141-150 Poland:CERME 7

Corcoran, J. (1989). *Argumentation and logic*. KluwerAcademic Publishers*,* New York. *3(1),* 17-43.

Conner, M. (2008). Expanded Toulmin diagrams: a tool for investigating complex activity in classrooms. En O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T Rojano, & A. Sepúlveda (Eds). *Proceedings of International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 2,* 361-368, *México, Morelia.*

Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P., & Francisco, R. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities, *Educational Studies Mathematics*, *86*(2), 401–429

Conner, A. (2007). *Student teachers' conceptions of proof and facilitation of argumentation in secondary mathematics classrooms* (PhD. Dissertation Thesis). E.U.A.: The Pennsylvania State University

Conner, M. (2008). Expanded Toulmin diagrams: a tool for investigating complex activity in classrooms. En O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T Rojano, & A. Sepúlveda (Eds). *Proceedings of International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 2,* 361-368, México, Morelia.

Gal, H. & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics, 74*:163–183, DOI 10.1007/s10649-010-9232-y

Goizueta, M., & Planas, N. (2013). Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. *Enseñanza de la ciencia*. *31*(1), 61-78

Godino, J. D. (2003). *Matemáticas y su didáctica para maestros*. Recuperado de: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Giannakoulias, E., Mastorides, E., Potari, D., & Zachariades, T. (2010). Studying teachers' mathematical argumentation in the context of refuting students' invalid claims. *Journal for mathematical Behavior*, *29*(3), 160-168.

Harel, G., (2007). 'Students' proof schemes revisited: historical and epistemological considerations'. In: P. Boero (ed.): *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice.* Rotterdam*: Sense*, pp. 65–78.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modeling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 3–21.

Inglis, M., & Mejia-Ramos, J. P. (2009). On the persuasiveness of visual arguments in mathematics. *Foundations of Science, 14,* 97-110

Inglis, M., & Mejia-Ramos, J. P. (2005). La fuerza de la aserción y el poder persuasivo en la argumentación en matemáticas. *Revista EMA: Investigación e Innovación en Educación Matemática, 10,* 327-352.

Kaur, H. & Sinclair, N. (2014). Young children's thinking about various types of triangles in a dynamic geometry environment. In C. Nicole, S. Oesterle, P. Lijedahl, & D. Allan, (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, Vol. 5*, pp. 113-120. Vancouver, Canada: PME 38.

Kelly, A. E. (2004) Design Research in Education: Yes, but is it Methodological?. *Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 115-128, DOI: 10.1207/s15327809jls1301_6

Komatsu, K. (2016). A framework for proofs and refutations in school mathematics: Increasing content by deductive guessing. *Educational Studies in Mathematics 92*(1), 147–162. DOI: 10.1007/s10649-015-9677-0

Komatzu, K., & Jones, K. (2017). Proofs and refutations in school mathematics: A task design in dynamic geometry environments. In T. Dooley, V. Durand-Guerrier, & G, *Proceedings of Congress of European Research in Mathematics Education CERME 10: Vol 1*, 1-8, Dublin.

Kosko, W. (2016). Making use of what's given: Children's detailing in mathematical argumentative. *Journal of Mathematical Behavior 41*, 68–86

Ko, Y.Y. & Knuth, E. J. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *Journal of Mathematical Behavior, 28(1), 68–77.*

Krummheuer, G. (1995). The ethnology of argumentation. In: P. Cobb and H. Bauersfeld (Eds.). *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures.* pp. 229–269, Hillsdale: Erlbaum.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom. Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior, 26*(1), 60–82.

Krummheuer, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. *In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping., & N. Presmeg (Eds.), Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: Examples of methodology and methods (pp. 75-101). Dordrecht: Springer. Doi:10. 1007/978-94-017-9181-6_4*

Knipping, C., & Reid, D. (2013b). Reconstructing argumentation structures: A Perspective on proving Processes in Secondary Mathematics Classroom Interactions. *In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: Examples of methodology and methods (pp. 75-101). Dordrecht: Springer. Doi: 10. 1007/978-94-017-9181-6_4*

Lakatos, I. (1986). *Pruebas y refutaciones: La lógica del descubrimiento matemático* (trad. C. Solis). Madrid: Alianza

Larsen, S., & Zandieh, M. (2008). Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom. *Educational Studies Mathematics, 67*:205–216. DOI 10.1007/s10649-007-9106-0

Lin, Y. & Hung, Y. (2016): The analysis and reconciliation of students' rebuttals in argumentation activities, *International Journal of Science Education*. In http://dx.doi.org/10.1080/09500693.2015.1134848

Macagno, F. Walton, D. (2015). Classifying the patters of natural arguments. *Philosophy and Rhetoric, 48*(1), 26-53

Macagno, F., Mayweg-Paus, E., & Kuhn, H. (2015). Argumentation Theory in Education Studies: Coding and Improving Students' Argumentative Strategies, *Educational Studies in Mathematics*, *34*:523–537, DOI 10.1007/s11245-014-9271-6

Mercer, N. (2009). The analysis of classroom talk: methods and methodologies. *British Journal of Educational Psychology, 80*, 1-14

Molina, M., Castro, E., Molina, J., & Castro, E. (2012). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de la ciencia*, *29*(1), 075–088

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Pedemonte, B., & Balacheff, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the ck¢-enriched Toulmin model, *Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 104–122

Potari, D., Zachariades, T. & Zaslavsky, O. (2010). In V. Durand-Guerrier, France S. Soury-Lavergne, F. Arzarello (Eds). Mathematics teachers' reasoning for refuting students' invalid claims, *of Sixth Congress of European Research in Mathematics Education, pp.281-290,* Lyon France: CERME 6

Prusak, N., Hershkowitz, R. & Schwarz, B. (2012). From visual reasoning to logical necessity through argumentative design. *Educational Studies in Mathematics 7(1) 9*, 19–40. DOI: 10.1007/s10649-011-9335-0

Rumsey, C., & Langrall, C. W. (2016). Promoting mathematical argumentation. *Teaching children mathematics*, *22*(7), 413-419

Reid, D., (2002). Conjectures and Refutations in Grade 5 Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(1), 5–29

Reid, D., Knipping, C., & Crosby, M. (2011). Refutations and the logic of practice. *PNA*, *6*(1), 1-10.

Secretaria de Educación Pública, (SEP). 2011, *Plan de estudios*, México, Distrito federal

Schnell (2014). Types of arguments when dealing with chance experiments. In C. Nicole, S. Oesterle, P. Lijedahl, & D. Allan, (Eds*.) Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, Vol. 5*, pp. 113-120. Vancouver, Canada: PME 38.

Siñeris, L., Ferraris, C. & Ferrero, M. (2008). La trastienda de la matemática. II REPEM – Memorias, 58-62.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum

Solar, H., & Deulofeu, J. (2016) Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema, Rio Claro (SP), v. 30(56), p. 1092 – 1112*

Toulmin, S. (1958/2003). *The uses of argument*. New York: Cambridge University Press.

Toulmin, S. E., Rieke, R. D., & Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning* (2nd ed.). New York London: Macmillan

Walton, D. "*Objections, Rebuttals and Refutations*" (June 3, 2009).OSSA Conference Archive. Paper151.Recuperadode:http://scholar.uwindsor.ca/ossaarchive/OSSA8/papersandcommentaries/151

Wagner, P., Smith, R., Conner, A., Singletary, M., & Francisco, R. (2014). Using Toulmin's Model to Develop Prospective Secondary Mathematics Teachers' Conceptions of Collective Argumentation. *Mathematics Teacher Educator*, *3(1),* pp. 8-26.

Whitenack, J., & Knipping, N. (2002). Argumentation, instructional design theory and student's mathematical learning: a case for coordinating interpretive lenses. *Journal of Mathematical Behavior*, *24(4)*, 441-457.

Yackel. E., (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of Mathematical Behavior 21*, 423–440.

Yopp, D. (2015). Prospective elementary teachers' claiming in responses to false generalizations. *Journal of Mathematical Behavior 39*, 79–99.

Zacharos, K.; Pournantzi, V.; Moutsios-Rentzos, A. & Shiakalli, M.A. (2016). Forms of argument used by pre-school children. *Educational Journal of the University of Patras UNESCO Chair 3(2),* 167-178.

# Anexos

**Anexo, 3.1 1.** Transcripción de las escenas

| SESIÓN 1, Ti | | |
|---|---|---|
| **Momento** | **Participante** | **Dialogo** |
| 1. | Pg | Bueno, vamos a compartir algunas de las respuestas para que todos veamos lo que dijeron y logremos tener una sola respuesta en función de lo que son esos tipos de triángulos. Primero, ¿qué saben de los triángulos?, ¿por qué se llaman triángulos?, |
| 2. | Estudiantes | Porque tienen tres lados… |
| 3. | Pg | Pero los triángulos pertenecen como nosotros, a familias. En una familia uno tiene un nombre, otro tiene otro nombre… entonces los triángulos. Entonces nosotros hicimos esas preguntas, que digan qué es lo que saben acerca de un tipo de triángulo que tiene un nombre, sí vamos a ver una de las respuestas. Vamos a ver cuáles… por ejemplo Kenia nos va a compartir lo que dijo apenas del primer tipo de triángulo… a ver ¿cómo se llama el primer tipo de triangulo? |
| 4. | Estudiantes | Equilátero… |
| 5. | Pg | Vamos a escuchar a Kenia por favor |
| 6. | Kenia | Triángulo equilátero tiene todos sus lados iguales |
| 7. | Pg | A ver dice Kenia que tiene todos los lados iguales |
| 8. | Pj | Ahora vamos a escuchar al compañero Alexander |
| 9. | Alexander | Tiene dos lados desiguales |
| 10. | Pj | ¿Qué entiendes por desigual? |
| 11. | Naomi | Que tiene sus lados diferentes |
| 12. | Pj | A ver, de lo que han escuchado están hablando de lados, Kenia dijo que tiene tres lados iguales, ¿qué quiere decir que tiene sus tres lados iguales? |
| 13. | Kenia, Leonel | Que tienen la misma medida dice Kenia, pero Alexander dice que tiene dos lados desiguales… |
| 14. | Pg | ¿Qué dicen los demás? |
| 15. | Estudiantes | Lo que dijo Kenia… |
| 16. | Pj | O sea el equilátero tiene… |
| 17. | Estudiantes | Tres lados iguales … |
| 18. | Pj | ¿Qué más recuerdan?, sí tiene tres lados iguales… |
| 19. | Leonel | Miden 90 grados… |
| 20. | Pj | ¿Qué mide noventa grados? |
| 21. | Leonel | Los tres lados |

| | | |
|---|---|---|
| 22. | Pj | ¿Los tres lados? |
| 23. | Estudiantes | No… Los tres ángulos… |
| 24. | Julieta | Son triángulos que miden más de 180°pero menos de 90°… |
| 25. | Jennifer | Son triángulos que miden más de 90° pero menos de 180°… |
| 26. | Pj | Ya hablamos de que el triángulo equilátero tiene sus tres lados iguales… veamos un ejemplo [ se dibujó un triángulo equilátero con lados 10 cm, 10 cm y 10cm] |
| 27. | Estudiantes | Su perímetro mide 30 cm |
| 28. | Pj | Muy bien el perímetro es 30, excelente… ahora mismo no estamos hablando de perímetro pero muy bien.<br>Pero vamos a analizar algo más del triángulo equilátero, |
| 29. | Ulises | Altura y base |
| 30. | Pj | Muy bien, son partes del triángulo… yo pregunté, sí tienen los tres lados iguales… nuestro compañero [Leonel] mencionó la palabra ángulo. |
| 31. | Pg | Pasa y ubica los ángulos en el tablero, ¿dónde están? [Leonel pasa y marca los ángulos, de forma adecuada].<br>¿Están de acuerdo que ese es el ángulo? |
| 32. | Estudiantes | Si… |
| 33. | Pj | ¿Cómo creen ustedes que son esos ángulos? |
| 34. | Naomi | Rectos, |
| 35. | Naomi | con curva |
| 36. | Jennifer | Agudos… |
| 37. | Pj | ¿Quién apoya el comentario de Jennifer?, sí son agudos, ¿cuánto creen que miden?... [Silencio]… ¿Cuánto mide este ángulo [se refiere a un ángulo del triángulo equilátero]? |
| 38. | Jennifer | Como 90° |
| 39. | Estudiantes | No |
| 40. | Kenia | Como 180 |
| 41. | Estudiantes | No manches, estás loca… |
| 42. | Kenia | 45 |
| 43. | Pj | Se aproxima… |
| 44. | Kenia | ¿Lo medimos? |
| 45. | Pj | Ayúdenme a pasar y medimos con el trasportador Julieta, más o menos ¿cuantos grados mide aquí [ángulo del triángulo equilátero dibujado en el tablero]? |
| 46. | Julieta | 60… |
| 47. | Pj | Ahora, ¿cuánto creen que mide este otro ángulo? |
| 48. | Estudiantes | 60… |
| 49. | Pj | ¿Y este…?[ se refiere al otro triángulo] |
| 50. | Estudiantes | 60… |
| 51. | Pj | O sea que el triángulo equilátero tiene tres lados … |
| 52. | Estudiantes | Iguales |
| 53. | Pj | Y tiene tres ángulos…. |
| 54. | Estudiantes | Iguales… |

| | | |
|---|---|---|
| 55. | Eugenio | 180 cm [ se refiere a la suma de los ángulos internos del triángulo] |
| 56. | PJ | 180 que!.... |
| 57. | Estudiantes | Grados… |
| 58. | Pj | ¿Y por qué 180? |
| 59. | Kenia | Porque sumamos tres veces 60, o multiplicar 3 por 60 |
| 60. | Pj | Sumamos… ¿60 más 60? |
| 61. | Estudiantes | 120 |
| 62. | Pj | Mas 60 |
| 63. | Estudiantes | 180 |
| 64. | Leonel | También hacer una multiplicación… de 3 por 60 |
| 65. | Pg | Y entonces a ver, si hablamos de un triángulo equilátero, ¿cómo son sus ángulos? |
| 66. | Estudiantes | Son iguales |
| 67. | Pg | Las medidas de los ángulos son iguales, pero ahora ¿cuánto mide cada uno de sus ángulos? |
| 68. | Kenia | 60° |
| 69. | Pg | ¿Puede llegar a medir más de 60? |
| 70. | Kenia | Si… |
| 71. | Pg | ¿Sí? |
| 72. | Pj | ¿Seguros? |
| 73. | Julieta | No |
| 74. | Pj | ¿Por qué? |
| 75. | Agustín | Los triángulos pueden ser más grande pero los ángulos seguirán siendo del mismo tamaño |
| 76. | Pj | Ahora en otro triángulo [el profesor dibujó un triángulo equilátero más grande que el anterior], suponemos que es un triángulo equilátero, sus lados miden igual.<br>¿Cómo serán los ángulos? |
| 77. | Naomi | Iguales |
| 78. | Pj | Iguales y ¿la suma?, ¿cuánto sería la medida de los ángulos y lo volvemos a medir? |
| 79. | Estudiantes | 60… |
| 80. | Pj | ¿Cuánto mide este [señala otro ángulo del triángulo equilátero dibujado]? |
| 81. | Estudiantes | 60… |
| 82. | Pj | Y ¿este? |
| 83. | Estudiantes | 60… |
| 84. | Pj | ¿Y la suma de todo cuánto da? |
| 85. | Estudiantes | 180° |
| 86. | Pj | ¿Será que para todos los triángulos? |
| 87. | Eugenio, Leonel | Si, son iguales |
| 88. | Ezequiel | Que aunque hagas el Triángulo más grande o más pequeño los ángulos son iguales y no cambia. |

| | | |
|---|---|---|
| 89. | Pg | Lo que dice Ezequiel es que no importa cuánto miden los lados del triángulo equilátero siempre los ángulos van a ser iguales, Aunque sea grande o chico sí.<br>¿Y Siempre la suma cuando va a dar? |
| 90. | Estudiantes | 180 |
| 91. | Pg | Ahora vamos a ver que dijeron del triángulo isósceles, vamos a escuchar a Ulises |
| 92. | Ulises | Es un polígono de 3 lados, dos iguales y uno desigual |
| 93. | Pg | Dice que es un polígono de 3 lados y porque tiene tres lados por eso se llama… |
| 94. | Estudiantes | Triángulo… |
| 95. | Pj | ¿Quién tiene una respuesta diferente a la del compañero Ulises?, él dice dos lados iguales y uno diferente… |
| 96. | Estudiantes | [Silencio entre los estudiantes…] |
| 97. | Pj | Por ahí vi que algunos hablaban de sus ángulos, ¿quién habló de sus ángulos?, ¿Quién habló de los ángulos?, Todo escribieron que tiene dos lados iguales y uno diferente. |
| 98. | Julieta | Que miden 180 grados… |
| 99. | Pj | ¿Qué mide 180 grados? |
| 100. | Pg | Pero si hablamos de los lados, ¿qué podemos decir? |
| 101. | Estudiantes | Que tiene dos lados iguales y uno desigual… |
| 102. | | … |
| 103. | Pj | Que valores le<br>daríamos, acá un ejemplo [sobre el dibujo en el tablero de triángulo isósceles], ¿qué valor le daríamos acá, a este lado? |
| 104. | Julieta | Como 10 cm… |
| 105. | Pj | Y ¿cuánto mide este? |
| 106. | Estudiantes | 10 cm |
| 107. | Pj | ¿Y este? [Se refiere al lado desigual del triángulo isósceles], tenemos dos lados iguales y uno desigual… ahora una pregunta, me levantan la mano; ¿cómo son los ángulos? |
| 108. | Agustín | Son diferentes… |
| 109. | Kenia | Dos son iguales y uno es desigual |
| 110. | Pj | Puedes mostrar los ángulos en el tablero |
| 111. | Julieta | No, todos son iguales… |
| 112. | Estudiantes | NO…[ dicen en voz alta y al mismo tiempo] |
| 113. | Pj | Vamos a ver cuáles son los ángulos iguales… ¿Por qué dices que son iguales estos ángulos Kenia? |
| 114. | Kenia | Porque los lados son iguales |
| 115. | Pj | Ok, vamos a escuchar otra opinión |
| 116. | Julieta | Porque esos dos ángulos son los que unen al más grande [se refiere al lado desigual] y unen los lados iguales… |
| 117. | Pj | Buenos muchachos otra pregunta, ¿cuánto aproximadamente en grados mide este ángulo? |
| 118. | Julieta | Como de 30 |
| 119. | Pj | Puedes pasar al tablero y medir… |

| | | |
|---|---|---|
| 120. | Julieta | Como de 40 |
| 121. | Pj | Cuanto debe medir este [ se refiere al otro ángulo igual del triángulo isósceles] |
| 122. | Estudiantes | 40 |
| 123. | Pj | ¿Y este como cuánto debe medir? |
| 124. | Estudiantes | Como 30, 60 o 90 |
| 125. | Pj | Escuchen, cuantos grados llevamos, 40° y 40° |
| 126. | Naomi | 80° |
| 127. | Kenia | No se ve chiquito, como unos 20° |
| 128. | Julieta | Sí, como unos 30° |
| 129. | Pj | Veamos esto, qué paso en el triángulo equilátero; 60°, 60° y 60° |
| 130. | Julieta | 180 |
| 131. | Pj | ¿180 qué? |
| 132. | Estudiantes | Grados… |
| 133. | Julieta | Es la suma de todo |
| 134. | Pj | Ok… y ahora acá [en el ejemplo del triángulo isósceles], ¿40 y 40? |
| 135. | Julieta | 80 |
| 136. | Pj | ¿Cuánto falta? |
| 137. | Kenia | Pero el otro triángulo está más ancho, debe medir como 60 |
| 138. | Pj | ¿Y cuánto sería 40, 40 y 60°? |
| 139. | Kenia | 140° |
| 140. | pj | ¿Y cuánto dio la suma acá [ se refiere al ejemplo del triángulo equilátero] |
| 141. | Estudiantes | 180 |
| 142. | Pj | ¿Y acá? [Se refiere al triángulo isósceles]? |
| 143. | Kenia | 140° |
| 144. | Pj | Los ángulos acá eran de 60° [ triángulo equilátero], o sea 180° ¿Y acá? [Se refiere al triángulo isósceles]? |
| 145. | Julieta | 40 más 40 más 60 |
| 146. | Kenia y Julieta | Son 140 |
| 147. | Pm | Vamos a escuchar al compañero Agustín |
| 148. | Agustín | 100° |
| 149. | Pj | Agustín dice 100°, ¿por qué? |
| 150. | Agustín | Porque 40 más 40 es 80 más 100 da 180 |
| 151. | Pj | ¿Qué dicen de lo que dijo el compañero Agustín? |
| 152. | | … |
| 153. | Pj | Entonces cuanto debe medir este ángulo, el compañero Agustín dice 100° porque 40 más 40 |
| 154. | Estudiantes | 80 y más 100 es 180° |
| 155. | Pj | Ah entonces, el equilátero 180° y en el isósceles la suma de los ángulos internos también da |
| 156. | Estudiantes | 180° |

| | | |
|---|---|---|
| 157. | Pg | Bueno, vamos con la otra actividad. ¿Cómo se llama el último triángulo? |
| 158. | Estudiantes | Escaleno |
| 159. | Pg | Ok, vamos a escuchar a Jennifer |
| 160. | Jennifer | Tiene todos sus lados desiguales |
| 161. | Pg | Dice que el triángulo escaleno tiene todos sus lados desiguales, estamos hablando de sus lados |
| 162. | Pm | ¿Cómo son los lados del escaleno? |
| 163. | Estudiantes | Desiguales |
| 164. | Pg | ¿Qué más?, a ver Ulises ¿qué respuestas tienes? |
| 165. | Ulises | Es un triángulo que tiene todos sus lados desiguales |
| 166. | Pg | Ver que dice Kenia |
| 167. | Kenia | Tiene todos sus lados desiguales, es como decir que uno tiene una medida de 90cm otra de 30 cm y otra 20 cm |
| 168. | Pg | ¿Nos puedes hacer un dibujo? |
| 169. | | … [ Kenia pasa y hace un dibujo del triángulo escaleno] |
| 170. | Pg | Miren las medidas que puso, revisen… |
| 171. | Estudiantes | Están bien |
| 172. | Pg | A ver ¿cuál el número más grande de los que tiene ahí? |
| 173. | Estudiantes | 90 |
| 174. | Pj | Como ya todos vimos, Kenia nos dio un ejemplo de un triángulo escaleno donde todos sus lados son… |
| 175. | Estudiantes | Desiguales |
| 176. | Pj | O sea no miden igual, son diferentes.<br>Ahora si ya hablamos de los lados, ahora vamos a hablar de los… |
| 177. | Estudiantes | ángulos |
| 178. | Pg | Ulises nos va a marcar los ángulos... [Pasa Ulises y marca los ángulos del triángulo escaleno en el tablero].<br>¿Cuál tiene mayor abertura? |
| 179. | Ulises | El de 90 y 20 [ se refiere a los ángulos correspondientes a los lados que miden 90 cm y 20 cm] |
| 180. | Pj | Ok, Leonel dice que el ángulo mayor es el que está entre los lados de 90cm y 10 cm, ¿por qué? |
| 181. | Leonel | Porque como sus lados son desiguales, entonces como conectan más se tiene que estirar el ángulo [o sea tener una abertura mayor] |
| 182. | Julieta | No, yo digo que es el de 20 |
| 183. | Kenia | yo digo que es el que conecta el de 90 y 20 ya que son los más grandes |
| 184. | Pj | Ok, Julieta ayúdame a medir los ángulos |
| 185. | Julieta | 105° [ midió el ángulo más grande] |
| 186. | Pj | Y El otro ángulo, |
| 187. | Julieta | 40° |

| | | |
|---|---|---|
| 188. | Pj | Vamos a ver, ya observamos que el ángulo más amplio es el del lado de 90 cm.<br>Ahora vamos a cambiar, ¿cuánto debe medir este ángulo? [se refiere al ángulo faltante del triángulo escaleno] |
| 189. | Ulises | Como 55 |
| 190. | Agustín | 75 |
| 191. | Pj | ¿Por qué 75? |
| 192. | Agustín | Porque 5 para 80 más 100 es 180 |
| 193. | David, Kenia | 35 |
| 194. | Pj | ¿Por qué 35? |
| 195. | Pg | ¿Cómo lo encontraste Kenia? |
| 196. | | Es que yo sumé primero 140 con 45, pero primero pensé que era 45 pero me dio más [más de 180°], pero disminuí 10 y me dio 180 |
| **SESIÓN 2, T1** | | |
| 197. | Pj | La pregunta es: ¿Existen triángulos equiláteros con un ángulo de 90°?, responden cada uno en su hoja y luego hablamos entre todos. |
| 198. | | …[ pasa unos minutos mientras responden la actividad] |
| 199. | Pj | ¿Ahora levanten la mano los estudiantes que en su respuesta colocaron que sí existen triángulos equiláteros con un ángulo de 90°?<br>¿René porque existen? |
| 200. | René | Sí, porque sus tres ángulos miden 90° |
| 201. | Estudiantes | ¡Ora! [ Expresión donde se admiran de la respuesta] |
| 202. | Pj | ¿Qué puedes decir tú [Julieta]? |
| 203. | Julieta | No, Que no existen porque sus ángulos son de 60° y ahí viene siendo que sus ángulos son de 90° y no existen porque sus ángulos son de 60° |
| 204. | Kenia | Son menos de 90 |
| 205. | Ezequiel | Pero si tenemos un ángulo de 90 se pasaría de 180° |
| 206. | Pj | Miren lo que dice la estudiante Mía |
| 207. | Mía | No, porque no da 180, y 3 por 90 da 270 |
| 208. | Kenia | Se pasa profe |
| 209. | Pj | ¿Se pasa de cuánto? |
| 210. | Estudiantes | De 180 |
| 211. | Pj | Entonces, pregunto: ¿Existen o no existe? |
| 212. | | … pausa |
| 213. | Pg | La pregunta estaba centrada en el triángulo equilátero y cuando se preguntó del triángulo equilátero ahí fue sobre sus |
| 214. | Estudiantes | Ángulos… |
| 215. | Pg | Y se les preguntó: ¿qué sabían ustedes del triángulo equilátero?, y ¿ de qué habían hablado en la actividad previa?, Agustín |
| 216. | Agustín | Que sus tres ángulos tiene los mismo grados |

| | | |
|---|---|---|
| 217. | Ezequiel | Y que no importaba cuanto se agrandaba el triángulo siempre iban a ser iguales |
| 218. | Pg | Bueno ya sabemos que sus lados son… |
| 219. | Estudiantes | Iguales |
| 220. | Pg | Ahora, ¿podemos saber cuánto miden sus ángulos? |
| 221. | Estudiantes | 60° |
| 222. | Pg | ¿Puede medir más de 60? |
| 223. | Estudiantes | No |
| 224. | Agustín | Porque se pasa de 180! [ la suma de los ángulos interiores] |
| 225. | Pg | Entonces cuando les preguntaron; ¿existen triángulos equiláteros con un ángulo de 90°?, ¿Existe un triángulo? |
| 226. | Estudiantes | No |
| 227. | Pg | Bueno los que me dijeron que no, díganme una justificación. Vamos a escuchar a Leonel. |
| 228. | Leonel | No, porque si ponemos una multiplicación de 90 por 3 nos da 270 |
| 229. | Pg | ¿Y por qué multiplicar por tres? |
| 230. | Leonel | Porque son tres ángulos … |
| 231. | Pg | Entonces si uno midiera 90 el otro me debería medir 90, sí y entonces se pasaría dicen ustedes… ¿cuánto seria? |
| 232. | Estudiantes | 270 |
| 233. | Pg | Y ¿cuánto mide la suma de los ángulos? |
| 234. | Estudiantes | 180° |
| 235. | Pg | ¿Quién más puede dar otra respuesta? |
| 236. | Julieta | Que los ángulos son de 60 y que sí son de 90 ya no sería una triángulo equilátero… |
| | | **SESIÓN 2, T2** |
| 237. | Pg | A ver la pregunta dice: ¿Existen triángulos equiláteros con un ángulo mayor de noventa?, ¿Quién dijo que si? |
| 238. | Estudiantes | Nadie |
| 239. | Pj | Javier ¿qué dices tú? |
| 240. | Javier | Sí aumenta un grado más del triángulo no va a afectar al triángulo |
| 241. | Pj | ¿Qué dicen los demás? |
| 242. | Estudiantes | ¡Que no! |
| 243. | Agustín | Que al menos no con un triángulo equilátero |
| 244. | Pj | ¿Y por qué no con un triángulo equilátero? |
| 245. | Agustín | Porque se pasaría a 300°, y lo máximo que se puede tener es 180° |
| 246. | Pj | ¿Quién más puede decir otra respuesta? |
| 247. | Naomi | No, porque el ángulo de 90 es recto y el triángulo equilátero no mediría 180° |
| 248. | Julieta | No, porque el ángulo del triángulo equilátero es de 60° y por eso no se puede |
| 249. | Pj | A ver, ¿qué dicen los demás?, Michel |

| | | |
|---|---|---|
| 250. | Michel | No, porque no se puede pasar de 90°, ya sería mucho más si se pasa de 60° a 90° |
| **SESIÓN 2, T3** | | |
| 251. | Pg | Vamos a revisar la otra tarea; ¿Existen triángulos equiláteros con un ángulo menor de 90 °?, ¿quién dijo que no? |
| 252. | Ulises | yo |
| 253. | Pj | ¿Por qué dices que no existen? |
| 254. | Ulises | No existe porque no importa su tamaño tendrá el mismo ángulo de 60° |
| 255. | Pj | Pero entonces, ¿Existen o no existe? |
| 256. | Ulises | No existe |
| 257. | Pj | Ok, ¿quién más dijo que no?[ Mía levanta la mano] |
| 258. | Mía | No porque tienen la misma medida, 90°, 90° y 90° |
| 259. | Pm | ¿Existen triángulos con tres ángulos de 90°? |
| 260. | Estudiantes | No |
| 261. | Pm | ¿Por qué? |
| 262. | Estudiantes | Porque se pasa de 180° |
| 263. | Pj | Vamos a escuchar a Julieta |
| 264. | Julieta | Si y no |
| 265. | Pj | ¿Por qué si y no? |
| 266. | Julieta | Sí porque, 60° es menor que noventa [se refiere a los ángulos del triángulo equilátero], y no porque 60° no es el único ángulo menor de 90° que hay, hay muchos ángulos que le siguen. [Julieta pasa al tablero y dibuja un triángulo explicando el sí y uno para el no] |
| 267. | Pj | Ya vimos y escuchamos lo que dijo la compañera Julieta, ahora ¿los compañeros que pueden decir? Uno que dice que sí y hay uno que dice no.<br>Vamos a escuchar a Agustín |
| 268. | Agustín | Yo digo que sí, como Julieta dijo 60° es como el normal [ se refiere a los triángulos del triángulo equilátero] |
| 269. | Pj | Pero que pasa, acá [se refiere al triángulo que dibujó Julieta para el caso del no] también hay ángulos menores que 90°; 30°, 30°, y 30° |
| 270. | Agustín | Sobre todo, los ángulos deben de tener 180° para ser llamado triángulo |
| 271. | Pj | ¿Y qué pasa ahí en el del no? |
| 272. | Agustín | En el de no pasa que no alcanza los 180° |
| 273. | Pj | No alcanza, ¿cuánto da? |
| 274. | Agustín | Da 90° |
| 275. | Pg | ¿Qué pueden decir los demás?, ¿qué faltaría ahí Agustín? |
| 276. | | … |
| 277. | Agustín | Faltaría otro de 60° |
| 278. | Leonel | Faltaría otro triángulo para hacer 180° |
| 279. | Pj | Vamos a escuchar a Leonel, ¿cuál es tu respuesta? |
| 280. | Leonel | Si |

| | | |
|---|---|---|
| 281. | Pj | ¿Por qué si se puede? |
| 282. | Leonel | Porque 60° más 60° más 60° da 180° |
| 283. | Pj | ¿Agustín qué decías sobre los ángulos? |
| 284. | Agustín | Qué sí, pero en otro triángulo diferente con un ángulo de 90° |
| 285. | Pj | A ver ¿sí se puede con otro triángulo?, porque Agustín dice que si se puede pero con otro tipo de triángulo, ya no sería equilátero |
| 286. | | … |
| 287. | Pg | ¿Entonces cómo sería Julieta? |
| 288. | Julieta | Sí porque 60° es el ángulo que debe de ser, que es equilátero y ese ángulo es menor de 90° por eso sí se puede. Pero no se puede porque 60° no es el único ángulo que hay menor de 90°, también hay ángulos de 30°, 20°, 50° entonces por eso no se puede. |
| **SESIÓN 3, T4** | | |
| 289. | Pj | Bueno, vamos a empezar, con Leonel, cuál fue tu respuesta a tu pregunta ¿Existen triángulos isósceles con un ángulo de 90°? |
| 290. | Leonel | No |
| 291. | Pj | ¿Por qué? |
| 292. | Leonel | Porque sus ángulos serán iguales y no importa cuánto crezca [ el triángulo] |
| 293. | | … |
| 294. | Pj | Vamos a escuchar a nuestra compañera Naomi, ¿cuál fue tu respuesta? |
| 295. | Naomi | No, porque hay dos ángulos iguales y uno desigual |
| 296. | Pj | Tú hiciste un dibujo, lo puedes hacer en el tablero.<br>Vamos a ver, porque ella dice que no y muestra un dibujo para explicar. [ Pasa Naomi y hace un dibujo del triángulo isósceles con dos ángulos de 45° y uno de 90°] |
| 297. | Pj | ¿Qué pueden decir los demás de lo que hizo Naomi? |
| 298. | Estudiantes | Que está mal |
| 299. | Pj | Vamos a escuchar al compañero Agustín, ¿qué puedes decir? |
| 300. | Agustín | Se puede, porque si no pusiera el ángulo de 90° ahí arriba se puede colocar un ángulo diferente. [dibujó un triángulo con ángulos internos de 45°, 45° y 90°] |
| 301. | Pj | ¿El triángulo que dibujó Agustín es isósceles? |
| 302. | Leonel | No, porque tiene sus lados diferentes |
| 303. | Pj | ¿Por qué? |
| 304. | Leonel | Porque tiene ángulos diferentes |
| 305. | Pj | ¿Agustín es isósceles? |
| 306. | Agustín | Es isósceles, porque no importa que estos ángulos [se refiere a los dos ángulos de 45°] den lo mismo de allá [se refiere al ángulo de 90°]. |
| 307. | Pj | Ok, vamos a escuchar a Alejandro, ¿cuál fue tu respuesta? |
| 308. | Alejandro | Sí, porque pueden tener ángulos de 90°, 45° y 45° |

| | | |
|---|---|---|
| 309. | Pj | Pero, ¿por qué dos ángulos de 45°?, ¿por qué no dos de 40°? |
| 310. | Alejandro | Porque después no da 180°, daría 170° y faltarían 10° |
| 311. | Pj | Ok, vamos a escuchar a Jennifer |
| 312. | Jennifer | Sí, no más uno de 90° y los demás de 45° |
| 313. | Pj | Acá Naomi tenía dos de 90°, ¿Jennifer y por qué dos de 45°? |
| 314. | Jennifer | Porque 90° más 90° da 180° |
| 315. | Pj | Vamos a escuchar a Mía, ella tiene otra suma |
| 316. | Mía | [Mía pasa al tablero y dibuja el triángulo con ángulos de 90°, 40° y 50°] |
| 317. | Pj | ¿Mía ese es un triángulo isósceles? |
| 318. | Mía | Si |
| 319. | Estudiantes | No |
| 320. | Pj | Vamos a escuchar por qué |
| 321. | Mía | Sí, porque la suma da 180 |
| 322. | Pj | ¿Qué pueden decir? |
| 323. | Jennifer | No, porque tiene sus ángulos diferentes |
| 324. | Pj | Ese tiene sus ángulos diferentes entonces no es isósceles |
| 325. | Estudiantes | Si |
| 326. | Kenia | Es un triángulo escaleno |
| 327. | Pj | ¿Por qué? |
| 328. | Kenia | Porque tiene todos sus lados diferentes |
| | | **SESIÓN 3, T5** |
| 329. | Pm | ¿A ver qué decía la pregunta? |
| 330. | Estudiantes | ¿Existen triángulos isósceles con un ángulo mayor de 90°? |
| 331. | Pm | ¿Quién puso qué no? [ varios niños levantaron su mano]<br>A ver Galilea |
| 332. | Galilea | No existen, porque sí fuera 95° y 95° [ se refiere e los dos ángulos iguales del triángulo isósceles] daría 190° y se pasa |
| 333. | Pj | ¿Alguien más?<br>¿Ulises qué pusiste? |
| 334. | Ulises | No, porque sus ángulos miden 90° y dos de 45° |
| 335. | Pm | ¿Qué dicen los demás? |
| 336. | Estudiantes | No, está mal |
| 337. | Pm | ¿Por qué está mal Julieta? |
| 338. | Julieta | Porque se pasa |
| 339. | Jennifer | Si se puede, yo puse un ángulo de 100° uno de 40° y otro de 40°. |
| 340. | Pj | ¿Quién tiene otro ejemplo diferente a ese, donde sí se pueda?<br>Vamos a escuchar a Julieta |
| 341. | Julieta | Sí existe porque solo reduces a los ángulos iguales y le sumas al ángulo de arriba [ hace la comparación del triángulo isósceles con un ángulo de 90° y dos de 45°] |
| 342. | Pg | ¿Cuánto le quitaste? |
| 343. | Julieta | A estos iguales les reste 5 y se los sumé a este [ al de 90°] y por eso da 100°, 40° y 40° |
| 344. | Pj | ¿Están de acuerdo? |

| | | |
|---|---|---|
| 345. | Estudiantes | Si |
| 346. | Pj | ¿Alguien lo hizo de forma diferente? |
| 347. | Agustín | Yo lo hice igual al dibujo de Julieta pero de otra forma |
| 348. | Pm | Cuéntanos cómo lo determinaste y lo dibujas en el tablero. [Dibujó un triángulo con ángulos de: 160° 10° Y 10°] |
| 349. | Agustín | Tenemos 160 más 20 suma 180, parto 20 y me da 10 |
| 350. | Pm | ¿Y ese es un triángulo isósceles? |
| 351. | Estudiantes | Si |
| 352. | Jennifer | Si, ´porque tiene dos lados iguales y uno desigual |
| 353. | Pm | ¿Y cumple con lo que le estaban pidiendo? |
| 354. | Estudiantes | Si |
| **SESIÓN 3, T6** | | |
| 355. | Pj | Vamos a empezar, ayúdenme a leer la pregunta, todos, ¿cuál es la pregunta? |
| 356. | Estudiantes | ¿Existen triángulos isósceles con ángulos menores de noventa grados? Justifica tu respuesta. |
| 357. | Pj | Vamos hacer silencio… vamos a escuchar a nuestro amigo Manu. Ok, bueno antes de escuchar a Manu… levante la mano quien escribió que no existe [levantan la mano Julieta, Agustín, David, Manu, Mía, Naomi y Constanza]… Ahora los escuchamos… vamos a escuchar a Manu… Manu ¿qué nos dices? |
| 358. | Manu | No, porque no daría 180° [lo dice en un tono muy bajo] |
| 359. | Pj | Él dice que no, porque no daría 180°… ¿tienes un ejemplo más para dibujar y explicar a tus compañeros que no se puede? [Pasa Manu al tablero y hace un dibujo del triángulo isósceles con tres ángulos de 40°] |
| 360. | Pj | ¿Por qué colocaste 40, 40 y 40? ¿Qué recuerdas? [Manu es tímido y no se animó a hablar] |
| 361. | Pj | [el profesor mira la hoja de respuesta de Manu y lo que hizo en el tablero, le pregunta cosas y comunica a los demás su interpretación] Este es el ejemplo de Manu [señala el pizarrón]… y él hace la suma [vuelve a señalar la pizarra]… ¿Cuánto te da la suma? [Manu señala su resultado en la pizarra]… no da 180° entonces… tu concluyes que no se puede… ok gracias Manu… vamos a escuchar a Julieta… ¿Cuál fue tu respuesta a la pregunta? |
| 362. | Julieta | No hay porque sus ángulos no son… son mayores de 90 |
| 363. | Pj | No son… porque sus ángulos son mayores de 90… ¿qué pueden decir los demás? |
| 364. | Ulises | Esta mal |
| 365. | pj | Ulises… ¿por qué está mal?… Ella dice que todos son mayores… |
| 366. | Estudiantes | Ora… |
| 367. | Ulises | No todos |
| 368. | Pj | ah… no todos… a ver Jennifer |

| | | |
|---|---|---|
| 369. | Pj | Jennifer dice que sí, ¿por qué? |
| 370. | Jennifer | Sí, porque hay otro que es de 50° [pasa al tablero y dibuja un triángulo con dos ángulos de 50° y uno de 80°] |
| 371. | Pj | Ochenta, cincuenta y cincuenta [se refiere a los ángulos del triángulo dibujado en el pizarrón por Jennifer] ¿es un triángulo isósceles? |
| 372. | Estudiantes | no |
| 373. | Estudiantes | Si |
| 374. | Pj | ¿Sí o no? |
| 375. | Estudiantes | Sí… porque tiene dos lados iguales |
| 376. | Pj | Tiene dos lados iguales y… |
| 377. | Estudiantes | Dos ángulos iguales |
| 378. | Pj | Y dos ángulos iguales… pero… pregunto… ¿cumple con la condición… que dice con un ángulo menor a 90? |
| 379. | Estudiantes | Si |
| 380. | Estudiantes | nooo |
| 381. | Pj | ¿Solo tiene un ángulo menor de 90? |
| 382. | Ezequiel | No… tiene tres menores de 90 |
| 383. | Pj | ¿Quién tiene un ejemplo diferente? |
| 384. | Camaliel | Yo… yo… yo |
| 385. | Pj | Me puedes ayudar a pasar [pasa Camaliel y dibuja un triángulo con ángulos de 70°, 70° y 40°]… él tiene 70, 70 y 40 grados… |
| 386. | Julieta | Si… si da 180 |
| 387. | Pj | ¿Da 180? |
| 388. | estudiantes | Siii |
| 389. | Julieta | Siii… ya hice la suma |
| 390. | Pj | ¿Cumple con la condición… de un ángulo menor a 90°? |
| 391. | Julieta | Claro, claro |
| 392. | Pj | ¿Cuantos ángulos menores de 90? |
| 393. | | Tres |
| 394. | Pg | ¿y el otro?... El ejemplo de Ulises… a ver |
| 395. | | 50, 65 y 75 |
| 396. | Pg | Si… ¿entonces si es posible? |
| 397. | | Si |
| 398. | Pg | A ver de los que dijeron que no… pueden revisar los ejemplos de sus compañeros |
| 399. | Mía | No… porque todos están menores de 90 |
| 400. | Pj | Y ustedes dijeron que no… por ejemplo Julieta dijo que no… Agustín |
| 401. | Agustín | Dije que si |
| 402. | Pj | Habías dicho que no |
| 403. | Agustín | Pero lo cambie |
| 404. | Pj | Ok… a ver… ¿algún otro ejemplo? |
| 405. | Alexander | Yo |

| | | |
|---|---|---|
| 406. | Pj | Alexander nos va a mostrar uno… igual Kenia [Pasan ambos al pizarrón y dibujan su ejemplo. Alexander realiza un triángulo con tres ángulos de 60° y Kenia con dos de 80° y uno de 20° ] |
| 407. | Pj | Miren el ejemplo de Kenia… ¿está bien? ¿Cumple con la condición? |
| 408. | Mía | No… ninguno cumple |
| 409. | Pj | ¿Ninguno está bien? ¿Por qué? |
| 410. | Mía | Porque… [la interrumpen los demás] |
| 411. | Estudiantes | Siii… si… están bien |
| 412. | Pj | A ver, vamos a escuchar a Mía… dice que todos los que están ahí… están mal… ¿Por qué Mía? |
| 413. | Mía | Porque aquí dice menor a 90°… y todos están menores |
| 414. | Pj | Todos están en menores… ¡y ahí dice menor! [refiriéndose a la pregunta] |
| 415. | Mía | ¡Dice con un ángulo menor!… y ahí están los tres menores |
| 416. | Julieta | No Mía…están bien esos… nosotros estamos mal |
| 417. | Mía | Nooo… están mal… porque ahí dice… existen triángulos isósceles con un ángulo menor de 90° y ellos están poniendo los tres |
| 418. | Pj | Nooo… si… pero… ya hay uno |
| 419. | Julieta | Pero… todos están menores a 90°… qué más podemos hacer… al menor hay uno |
| 420. | Pj | A ver Alexander dibujó este triángulo [señala el dibujo del tablero]… ¿qué pueden decir? |
| 421. | Estudiantes | Que está mal |
| 422. | Pj | Está mal… ¿por qué está mal?... a ver Kenia |
| 423. | Kenia | Porque… tiene dos lados iguales y uno desigual… |
| 424. | Pj | ¿Y qué pasa acá? |
| 425. | Estudiantes | Que es un triángulo equilátero |
| 426. | Pj | Pero… ¿no cumple con la condición? |
| 427. | Estudiantes | noooo |
| 428. | Camaliel | siiiiii |
| 429. | Pj | Acá dicen que si |
| 430. | Camaliel | No… no… no… me confundí |
| 431. | Pj | ¿Quiénes dicen que si? |
| 432. | Estudiantes | No, no lo cumple |
| 433. | Pj | ¿Por qué no la cumple?... Agustín |
| 434. | Agustín | Porque… dice… existen triángulos isósceles… no equilátero |
| 435. | Kenia | El triángulo que Alexander dibujo es un triángulo equilátero |
| 436. | Julieta | Aja… nooo… isósceles |
| 437. | Ulises | Equilátero… porque tiene sus tres lados iguales |
| 438. | Pj | Alexander… tiene sus tres lados iguales [señala su dibujo en el tablero]<br>Alexander… ¿Por qué tu dibujaste éste?... cumple con la condición… cumple con lo que dice acá arriba |
| 439. | Alexander | Si |

| | | |
|---|---|---|
| 440. | Pj | Si… verdad… pero tus compañeros dicen que ¡no! |
| 441. | Julieta | No lo cumple Alexander… porque es un triángulo equilátero… y ahí te piden un triángulo isósceles |
| 442. | Pj | ¿Qué les puedes decir? |
| 443. | Julieta | [interrumpe] Y el equilátero tiene todos sus lados iguales… y el isósceles tiene dos lados iguales y uno desigual… ¿Por qué dibujaste ese? |
| 444. | Alexander | (hace ademanes que no sabe que decir) |
| 445. | Mia | Ya lo pusiste nervioso |
| 446. | Alexander | Ya me confundieron |
| 447. | Pj | ¿Quién más? |
| 448. | Mia | Ulises dice que tiene un ejemplo |
| 449. | Pj | ¿Alguien más dibujo un triángulo con ángulos de 60? |
| 450. | Julieta | Nadie |
| 451. | Pj | Si… allá Valeria… ¿tu dibujaste este mismo ejemplo? |
| 452. | Valeria | Si |
| 453. | Pj | ¿Por qué lo dibujaste? |
| 454. | Valeria | Porque sus ángulos miden 60 |
| 455. | Pj | Porque sus ángulos son de 60… y cumplen con la condición… ¿ustedes que dicen? |
| 456. | Estudiantes | Que no lo cumple |
| 457. | Pj | Una pregunta en general…es una pregunta que se enmarca en este ejemplo [señala el triángulo dibujado en el tablero por Alexander] ¿un triángulo equilátero puede ser al mismo tiempo un triángulo isósceles? |
| 458. | Estudiantes | Nooo |
| 459. | Pj | ¡No! ¿Por qué dices que no Ezequiel?... fuiste el primero en decir que no… y después Agustín |
| 460. | Ezequiel | No, porque un triángulo isósceles tiene dos lados iguales y uno desigual |
| 461. | Pj | ¡Ah pero un equilátero también tiene dos lados iguales! |
| 462. | Agustín | Yo digo que si… pero todos son iguales |
| 463. | Pj | ¿Y el isósceles? |
| 464. | Agustín | Dos lados completamente iguales y uno desigual |
| 465. | Ezequiel | Así que no puede ser |
| 466. | Agustín | No puede |
| 467. | Julieta | Y si cambiamos ese ángulo [refiriéndose a uno de los ángulos del triángulo equilátero dibujado por Alexander en el tablero]… se convertiría en isósceles y ya no podría ser equilátero… Así que de ninguna manera se puede |
| 468. | Pj | Ok… que más pueden decir |
| 469. | Julieta | Que no se puede |
| 470. | Pj | Que no se puede |
| 471. | Kenia | Si se puede |
| 472. | Pj | A ver Kenia |

| | | |
|---|---|---|
| 473. | Kenia | Si se puede, se puede cambiar la base… se puede cambiar un lado |
| 474. | Pj | Se puede cambiar un lado |
| 475. | Julieta | Pero ya sería isósceles… ¿dónde quedaría el equilátero? |
| **SESIÓN 4, T7** | | |
| 476. | Pj | Vamos a empezar… vamos a escuchar a Ezequiel… a ver cuéntame cuál es tu respuesta |
| 477. | Ezequiel | No, porque el triángulo escaleno tienen todos sus lados desiguales |
| 478. | Pj | ¿Qué pueden decir de lo que dijo Ezequiel? [varios estudiantes levantan la mano] |
| 479. | Estudiantes | Que está mal |
| 480. | Camaliel | Que está bien |
| 481. | Pj | Vamos a ver el ejemplo… él dice que no se puede y hace un ejemplo tratando de explicar [pasa Ezequiel al tablero para realizar su ejemplo, el cual es un triángulo con ángulos de 90°, 60° y 10°] |
| 482. | Julieta | Pero porque dices que no se puede… si estas poniendo un ángulo de 90° |
| 483. | Ezequiel | Que si se puede aquí [señala en el tablero el ángulo de 90°]… pero en estos otros no [señala los ángulos de 60° y 10°] porque son desiguales… |
| 484. | Estudiantes | Por eso… todos son desiguales |
| 485. | Julieta | Por eso… estas poniendo un ángulo de 90° |
| 486. | Pj | Ezequiel dice se puede colocar aquí [refiriéndose al ángulo de 90 y señalando en el tablero ese ángulo]… pero en estos otros no [señala los ángulos de 60° y 10°]… a ver vamos a escuchar por qué si se puede [varios estudiantes levantan la mano y le seden la palabra a Agustín] |
| 487. | Agustín | Si se puede… porque cambiando los números a otros ángulos…y sumándoles… hay otros resultados [enseguida pasa al tablero a dibujar su ejemplo, un triángulo con ángulos de 90°, 60° y 30°] |
| 488. | Pj | Explícanos Agustín |
| 489. | Agustín | Lo explico… 90 más 60… [interrumpe Julieta] |
| 490. | Julieta | Debes acomodar bien los ángulos [refiriéndose a la correspondencia entre las medidas de los lados y de los ángulos de un triángulo] |
| 491. | Agustín | Aja está mal acomodado… pero… es ejemplo |
| 492. | Julieta | Pero debes acomodarlo bien |
| 493. | Agustín | [Enseguida Agustín cambia las medidas de los ángulos del triángulo que dibujo, atendiendo la observación de Julieta] |
| 494. | Pj | Vamos a escuchar la explicación de Agustín |
| 495. | Agustín | 90 más 60… 150… más 30…180 |
| 496. | Pj | Javier nos ibas a comentar algo… ¿si se puede o no se puede? |
| 497. | Javier | Yo digo que si… porque todos sus lados son desiguales… siempre y cuando al sumarlos… de 180 |

| | | |
|---|---|---|
| 498. | Pj | Y tú ejemplo, ¿cuál fue?... pasa Javier [Pasa y dibuja en el tablero un triángulo con ángulos de 90°, 40° y 50°] |
| 499. | Pj | ¿Se puede con este triángulo? |
| 500. | Jennifer | Si se puede |
| 501. | Valeria | Nooo… |
| 502. | Pj | No se puede Valeria… ¿Por qué? |
| 503. | Valeria | Si se puede |
| 504. | Pj | ¡ha! Si se puede y porque dijiste que no |
| 505. | Valeria | [se ríe] Pero… si se puede |
| 506. | Pj | Ok… Kenia… vamos a ver el triángulo de Kenia [Kenia dibuja en el tablero un triángulo con ángulos de 90°, 55° y 35°] |
| 507. | Pj | ¿Se puede o no se puede? [pregunta al grupo] |
| 508. | Estudiantes | siiiii |
| 509. | Pj | A ver otro ejemplo…Ulises |
| 510. | Ulises | 90… 70… y más 20 |
| 511. | Pj | ¿Se puede o no se puede? |
| 512. | Estudiantes | Siiii, si está bien |
| 513. | Pj | ¿Cuál otro?... vamos a escuchar a Mía |
| 514. | Mía | 90… 10 y 80 |
| 515. | Pj | 90… 10 y 80… hay muchos… vamos a escuchar a Ámbar |
| 516. | Ámbar | 90 más 60 más 30 |
| 517. | Pj | ¿Otro diferente? |
| 518. | Agustín | 70… 90… y 20 |
| **SESIÓN 4, T8** | | |
| 519. | Pj | Vamos a empezar… Ezequiel ayúdame a leer la actividad… ¿qué dice? |
| 520. | Ezequiel | Existen triángulos escalenos con un ángulo mayor a 90°… Justifica tu respuesta |
| 521. | Pj | Ok, ¿cuál fue tu respuesta? |
| 522. | Ezequiel | No, porque se pasaría mucho de 180 |
| 523. | Pj | No… porque se pasaría muchísimo de 180°… ¿Qué ejemplo colocaste? [Ezequiel pasa a dibujar su ejemplo, un triángulo con ángulos de 90°, 10° y 12°] |
| 524. | Pj | Ezequiel dice que no… a ver Kenia… ¿qué puedes decir? |
| 525. | Kenia | Que si existen |
| 526. | Pj | ¿Por qué existe Kenia? |
| 527. | Kenia | Porque 100° más 55° más 25° me da 180 |
| 528. | Pg | ¿Y cuál es el ángulo mayor? |
| 529. | Kenia | El de 100 |
| 530. | Pg | El ángulo mayor es de 100 |
| 531. | Pj | Ezequiel… ¿qué pasa?... dices que no… porque se pasaría de la suma de 180 |
| 532. | Ezequiel | Si… si.. si yo pongo valores mayores a estos [señala los ángulos 10° y 12°] se pasaría de 180… podría dar valores más altos |
| 533. | Pj | Julieta ¿se puede o no se puede? |

| | | |
|---|---|---|
| 534. | Julieta | Si se puede… |
| 535. | Pj | Y cuál es tu triangulo… dime tus valores |
| 536. | Julieta | Un ángulo de 100°… uno de 50° y un ángulo de 30° |
| 537. | Pj | Otro más y ya… |
| 538. | Jennifer | Uno de 100… uno de 60 y uno de 20 |
| 539. | Pg | ¿Por qué son desiguales los ángulos? |
| 540. | Jennifer | Porque es un triángulo escaleno |
| 541. | Pg | ¿Y qué característica tienen además? ¿Cómo es? |
| 542. | Jennifer | Tiene tres lados desiguales y ángulos desiguales |
| 543. | Pj | Otro ejemplo… [varios estudiantes levantan la mano, por lo que el profesor les va dando la palabra a cada uno] |
| 544. | Camaliel | 101 más 39 más 40 |
| 545. | Mia | 120 más 40 más 20 |
| 546. | David | 100… 50 y 30 |
| 547. | Agustín | 35... 45… y 100 |
| 548. | Leonel | 40 más 70 más 65… que diga… 75 más 40 más 65 |
| 549. | Kenia | 100 más 10 más 70 |
| **SESIÓN 4, T9** | | |
| 550. | Pj | Ahora… una pregunta… esta tarea decía existe triángulos escalenos con un ángulo mayor a 90°… mi pregunta es… ¿existen triángulos escalenos con un ángulo menor a 90°? |
| 551. | Estudiantes | siiiii |
| 552. | Pj | ¿Quién me da un ejemplo? |
| 553. | Julieta | [alza la mano] yo... yo… yo |
| 554. | Pj | Rápidamente… uno menor |
| 555. | Julieta | 90… 30 y 60 |
| 556. | Pj | ¿Quién dice que no se puede? |
| 557. | Estudiantes | Yo digo que si |
| 558. | Pj | ¿Todos dicen que si? |
| 559. | Estudiantes | si |
| 560. | Pj | A ver Agustín ¿por qué dices que si? |
| 561. | Agustín | Porque 80… 85… y 25… algo así |
| 562. | Pj | 80 y 85 son 165… y 25… no… 15 |
| 563. | Agustín | No… ya se… me salió mal |
| 564. | Pj | 80 y 85 son 165… para 180… 15… ¡listo! |
| 565. | Mia | Maestro yo le digo por qué si |
| 566. | Pj | ¿Por qué si?... Mía |
| 567. | Mia | Porque dice menor… y le está haciendo menor… y el chiste es que te de 180 |
| 568. | Pj | Ok |