UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
MAESTRÍA EN CIENCIAS ÁREA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Compresión del concepto de fracción como razón a través del modelo de Pirie y Kieren

TESIS

Qué para obtener el grado de Maestría en Ciencias Área Matemática Educativa

Presenta:
JHONATAN ANDRES ARENAS PEÑALOZA

Directora de tesis
Dra. Flor Monserrat Rodríguez Vásquez

Co-directora
María Teresa González Astudillo

Chilpancingo, Guerrero Julio, 2018

Compresión del concepto de fracción como razón a través del modelo de Pirie y Kieren

Jhonatan Andrés Arenas Peñaloza

Agradecimientos

Agradezco enormemente a Dios por permitir una vez más un triunfo en mi carrera profesional, por permitir que cada día la vida me enseñe nuevas condiciones y oportunidades. También, por permitir cursar mi Maestría en otro país. *"Porqué el señor da sabiduría, de su boca vienen el conocimiento y la inteligencia"*.

A mis padres, gracias por el apoyo y motivación que a diario me brindan, hoy este triunfo no solo es mío, su acompañamiento y formación me ha traído hasta donde hoy estoy. Por tanto, confió en sus esfuerzos realizados y sé que en cada decisión que emprenda su apoyo estará conmigo.

A mi hermana, que sin su apoyo y motivación constante que me brinda no fuera posible haber alcanzado este logro. A mis amigos Mayra, Karina, Romario, Gustavo y Camilo, que en pocas palabras fueron como hermanos en este proceso y experiencia vivida en otro país.

A mi directora de tesis, por su dedicación, esfuerzo, conocimientos y sus orientaciones. Sin duda fueron fundamentales para mi formación profesional y para la culminación de mi trabajo.

A mi co-directora, por sus aportes realizados y permitirme realizar una estancia académica con ella, apoyada por la beca mixta CONACYT; sin duda fue una hermosa experiencia personal y profesional, que ayudó al desarrollo del informe final.

A mis revisores, por leer mi trabajo y por haberlo enriquecido con su experiencia, sin duda fueron grandes aportes que hicieron de este trabajo de investigación algo más sólido.

A mis profesores y compañeros de la maestría, por sus experiencias, conocimientos y enseñanzas compartidas, que de una u otra forma contribuyeron a mi formación profesional.

Gracias a Todos

*Agradezco al **Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología** por el apoyo financiero otorgado para la realización de mis estudios de maestría en el país de México.*

*Becario Nº. **602986***

Índice de Contenido

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Introducción

Este trabajo de investigación titulado *Compresión del concepto de fracción como razón a través del modelo de Pirie y Kieren*, tiene el interés especial de contribuir al campo investigativo en Matemática Educativa, respecto del tópico *fracciones*. Se parte de la problemática de qué los estudiantes de educación primaria muestran una endeble comprensión del concepto de fracción. Al respecto, Cortina y Cardoso (2009) reportan que los estudiantes no han logrado interpretar rápida y correctamente algunas notaciones de las fracciones en situaciones comunes, como en el caso de un cuarto de leche o un tercio del pastel. Teóricamente, el estudio se fundamentó en el modelo teórico de Pirie y Kieren (1994), el cual permitió describir el proceso de construcción de conocimiento que realizan estudiantes de primaria en México.

Para el logro del objetivo de investigación *Analizar el proceso de comprensión de los estudiantes de sexto grado de educación básica (primaria), cuando resuelven tareas sobre el concepto de fracción como razón*, se llevó a cabo un estudio de caso con cuatro estudiantes de sexto grado de la básica primaria mexicana, lo cual permitió conocer el proceso de comprensión que presentan dichos estudiantes al resolver tareas específicas, es decir, se conoció el proceso continuo de sus estructuras de conocimiento. El análisis de su comprensión se llevó a cabo en relación a las características de los ocho niveles que presenta el modelo teórico mencionado. En consecuencia, en los resultados de investigación se describen los procesos de las estructuras de conocimiento que presentaron los estudiantes del caso en estudio. Asimismo, se realizó una confrontación de ambos casos en relación a sus producciones y discusiones mientras resolvían las tareas aplicadas.

La tesis se estructura en cinco capítulos seguidos del listado de referentes bibliográficos y de anexos. A continuación, se describe brevemente el contenido de cada uno de los capítulos y por último se presenta un mapa conceptual que aborda de manera resumida la perspectiva global de la investigación.

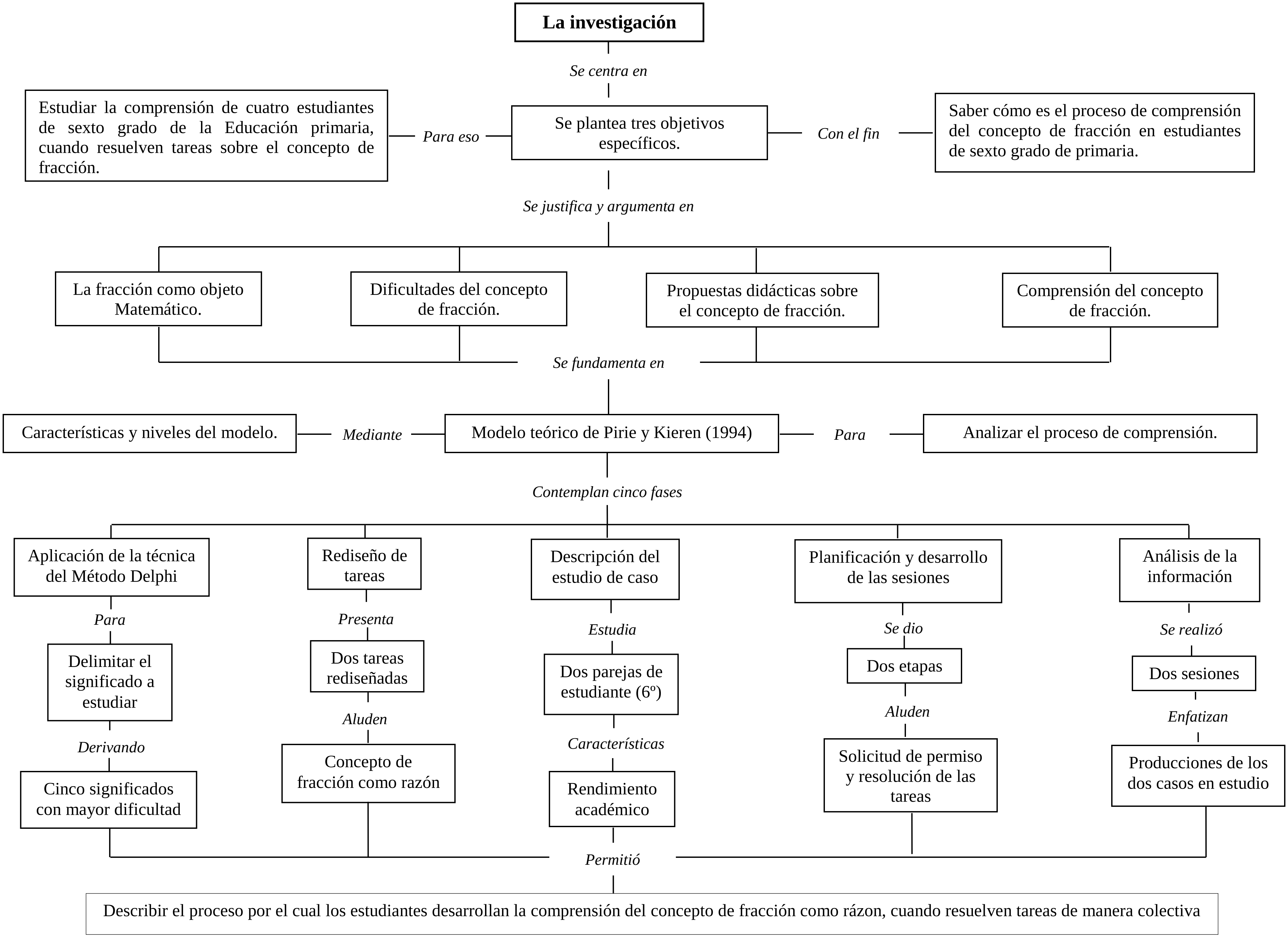
Capítulo 1. Antecedentes y problema de investigación. Recoge la problemática que la literatura especializada ha reportado sobre el concepto de fracción. Se encuentra organizado en cinco apartados, donde se presentan las posturas de diferentes investigaciones sobre el objeto matemático en mención. Este capítulo concluye con el planteamiento del problema y la pregunta de investigación.

Capítulo 2. Fundamentos teóricos. Se aborda el modelo teórico que fundamenta el desarrollo de la investigación. Se presenta de manera detallada el modelo teórico de la comprensión matemática de Pirie y Kieren (1994). El modelo ayuda a describir las estructuras de conocimiento matemático que tienen los estudiantes sobre un concepto matemático, y finalmente se indica el objetivo general y los particulares del estudio.

Capítulo 3. Metodología de la investigación. Se encuentra dividida en cinco fases: *aplicación del método Delphi*, que se realizó para delimitar la interpretación asociada al concepto de fracción a estudiar; *rediseño de las tareas*, se presentan las dos tareas rediseñadas; *descripción del estudio de caso*, se presenta todo lo concerniente a la elección de los participantes y el contexto del estudio; *planificación y desarrollo*, atiende lo relativo a la recogida de los datos y la organización de las sesiones trabajadas y por último; *el análisis de la información*, aborda los aspectos metodológicos que se tuvieron en cuenta para el análisis de las datos en relación con el modelo teórico.

Capítulo 4. Análisis del desarrollo de la compresión. Se presenta el análisis retrospectivo de la experimentación con los estudiantes. Con ayuda de los instrumentos de recolección de datos (notas de campo, grabaciones de video y audio, hojas de trabajo de los estudiantes y entrevistas) los investigadores triangularon la información obtenida, utilizando como referencia las características principales del modelo teórico y los niveles de comprensión del mismo. El análisis se ha organizado para cada caso y cada una de las tareas propuestas.

Capítulo 5. Conclusiones y aportes de la investigación. Se presentan las conclusiones que se derivaron de la investigación. Se atienden cada uno de los objetivos particulares propuestos en el capítulo 2 para dar respuesta a la pregunta planteada en el capítulo 1. Sucesivamente se presentan las reflexiones respecto a la metodología de la investigación. Y finalmente, las implicaciones educativas del estudio, así como las limitaciones y perspectivas de futuro.


La investigación
Se centra en
Estudiar la comprensión de cuatro estudiantes de sexto grado de la Educación primaria, cuando resuelven tareas sobre el concepto de fracción.
Para eso
Se plantea tres objetivos específicos.
Con el fin
Saber cómo es el proceso de comprensión del concepto de fracción en estudiantes de sexto grado de primaria.
Se justifica y argumenta en
La fracción como objeto Matemático.
Dificultades del concepto de fracción.
Propuestas didácticas sobre el concepto de fracción.
Comprensión del concepto de fracción.
Se fundamenta en
Características y niveles del modelo.
Mediante
Modelo teórico de Pirie y Kieren (1994)
Para
Analizar el proceso de comprensión.
Contemplan cinco fases
Aplicación de la técnica del Método Delphi
Para
Delimitar el significado a estudiar
Derivando
Cinco significados con mayor dificultad
Rediseño de tareas
Presenta
Dos tareas rediseñadas
Aluden
Concepto de fracción como razón
Descripción del estudio de caso
Estudia
Dos parejas de estudiante (6º)
Características
Rendimiento académico
Planificación y desarrollo de las sesiones
Se dio
Dos etapas
Aluden
Solicitud de permiso y resolución de las tareas
Análisis de la información
Se realizó
Dos sesiones
Enfatizan
Producciones de los dos casos en estudio
Permitió
Describir el proceso por el cual los estudiantes desarrollan la comprensión del concepto de fracción como rázon, cuando resuelven tareas de manera colectiva

Capítulo 1

Antecedentes y Problema de Investigación

Capítulo 1. Antecedentes y Problema de Investigación

En este capítulo se presenta una revisión de la literatura que se ha organizado en cinco apartados referentes a los siguientes temas: la fracción como objeto matemático; las interpretaciones asociadas al concepto; las dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje del tema; la comprensión del concepto de fracción, por último, las propuestas didácticas para la enseñanza y aprendizaje de las fracciones. En cada apartado, se presentan las posturas de diferentes investigaciones, señalando lo que se ha investigado en cada una de ellas, cómo se ha estudiado y que resultados han reportado, con la finalidad de englobar la problemática que dio paso a esta investigación.

Los resultados de la literatura internacional de investigación sobre el concepto fracción, muestran que ha sido un tema de investigación y enseñanza privilegiado, y que sus resultados han contribuido a grandes modificaciones de los programas escolares (Fandiño, 2009). Pero estas aportaciones del pasado no implican que hoy en día no se siga investigando este tema y, como lo menciona Fandiño (2009) "una reflexión sobre las fracciones tiene mucho que ofrecer a la comunidad de la Educación Matemática" (p.11). Aportes como: la creación de modelos de enseñanza-aprendizaje del concepto; el desarrollo de recursos educativos; el diseñar secuencias de enseñanza para apoyar el aprendizaje del concepto, entre otros.

Según Cortina (2014), el concepto de fracción ha sido uno de los temas más investigado en el campo de la Educación Matemática por diversos autores (Kieren, 1976; Freudenthal, 1983; Behr et al., 1983; Ball, 1993; Thompson y Saldanha, 2003; Brousseau et al., 2004; Fandiño, 2009; Valdemoros, 2010; González, 2015; Sanz y Gómez, 2015). Además, también menciona que en la literatura sobre las fracciones se han identificado, cuatro preocupaciones principales que han motivado la realización de estudios en este campo.

La primera preocupación, ha consistido en puntualizar la naturaleza didáctica del concepto, buscando especificar las nociones matemáticas que están o deberían estar presentes, al aprender y al enseñar fracciones; la segunda, proviene desde un punto de vista cognitivo, ha implicado identificar y describir los esquemas mentales relativos al aprendizaje de las fracciones, así como los procesos que llevan a que estos esquemas se desarrollen; la tercera preocupación, esta más vinculada a la didáctica, y ha sido la de generar propuestas de enseñanza que favorezcan el aprendizaje del concepto. Como última preocupación se tiene la vinculada al campo de la evaluación y ha implicado documentar los niveles de comprensión de las fracciones que logran estudiantes (Cortina, 2014, p.271-272). Preocupación que también despertó el interés por realizar la investigación. Por tanto, el contexto investigativo se encuentra en el campo de la comprensión en Educación Matemática.

La importancia de investigar las fracciones, se presenta desde diferentes perspectivas como las teóricas, educativas, psicológicas y prácticas (Behr et al.,1983; George, 2017):

- ***Desde un punto de vista teórico,*** las fracciones son importantes porque brindan a los alumnos la primera oportunidad de aprender que muchas propiedades de números enteros no se extienden a todos los tipos de números.

- ***Desde una perspectiva práctica***, la capacidad de tratar eficazmente el concepto de fracción mejora enormemente la capacidad de entender y manejar situaciones y problemas en el mundo real.

- ***Desde un punto de vista psicológico***, las fracciones proporcionan un rico ámbito dentro del cual, los niños pueden desarrollar y expandir las estructuras mentales necesarias para el desarrollo intelectual.

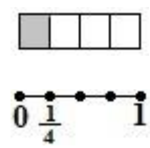
- ***Desde una perspectiva matemática***, la comprensión de las fracciones proporcionan la base sobre la cual pueden basarse las operaciones algebraicas elementales más tarde.

1.1. La fracción como objeto matemático

En este apartado, se presenta una explicación de lo concerniente al concepto de fracción como objeto matemático en estudio.

Las fracciones, históricamente fueron utilizadas por primera vez por los babilónicos y egipcios, que las descubrieron en sus acciones de fraccionar, repartir y medir. “Los primeros registros de uso de las fracciones aparecen en el papiro de Ahmes, que muestra que los egipcios trabajaron con fracciones desde el año 2000 a. C" (Carrillo et al., 2016, p.75). Además, se menciona que hasta el siglo XVII, los números escritos de la forma $^{a}/_{b}$ llamados quebrados, fueron admitidos con el mismo estatus que los números enteros. De manera general, las fracciones poseen cinco representaciones básicas (Carrillo et al., 2016), como se ilustran en la tabla 1.

Tabla 1
Diversas representaciones de las fracciones.

Representación	Fracción	Número decimal	Porcentaje	Lenguaje verbal	Lenguaje pictórico
Ejemplos	$\frac{1}{4}$	0,25	25%	$Una\ de\ cuatro$ $Cuarta\ parte$	

Los números fraccionarios hacen parte de los números racionales y la primera representación que tuvieron dichos números, fue la fracción (Flores y Torralbo, 2011).

Los símbolos de las fracciones son símbolos bipartitos. En primer sentido, son una forma determinada para escribir números. Como sistema de notación (un símbolo) se representa mediante dos números enteros con una barra entre ellos $\left(^{a}/_{b}\right)$. En segundo lugar, las fracciones son números racionales no negativos. Son aquellas que se pueden escribir de la forma de la forma $^{a}/_{b}$, donde $a\ y\ b$ son números enteros, y a, indica el numerador y b, el denominador, siendo este último distinto de cero $(b \neq 0)$ (Lamon, 2007).

Por otra parte, el diccionario ya distingue en su significado dos acepciones bien diferenciadas de la palabra fracción. La primera, se presenta como la división de un todo en sus partes o las partes de un todo. La segunda acepción, que se encuentra dentro de los significados propios de la Aritmética, es vista como número quebrado o expresión que indica una división que no puede efectuarse (Llinares y Sánchez, 1988).

Las fracciones se pueden clasificar de diferentes formas, dependiendo de la relación entre su numerador y denominador (Peláez, 2013). Así se pueden establecer los siguientes tipos de fracciones (tabla 2).

Tabla 2
Tipos de fracciones según la relación de su numerador y denominador.

Relación	**Tipo**	**Descripción**	**Ejemplo**
Numerador y denominador	Propias	Numerador menor que el denominador.	$\frac{4}{7}$
	Impropias	Numerador mayor que el denominador.	$\frac{7}{4}$
Numerador	Unitarias	Su numerador es el número 1.	$\frac{1}{4}$
Denominador	Homogéneas	Dos o más fracciones con igual denominador	$\frac{4}{9}\ y\ \frac{7}{9}$
	Heterogéneas	Dos o más fracciones con distintos denominador	$\frac{4}{9}\ y\ \frac{7}{12}$

Por su parte, Carrillo et al. (2016) menciona que aparte de los tipos de fracciones presentados en la tabla 2 se tienen los siguientes: número mixto, aparente numerador, irreducible y decimal (tabla 3).

Tabla 3
Principales tipos de fracciones (tomada de Carrillo et al., 2016, p.76).

Número mixto Parte entera y fraccionaria	**Aparente: numerador** Múltiplo del denominador	**Irreducible** Numerador y denominador primos entre si	**Decimal** Equivalente a otra con denominador potencia de 10
$1\frac{3}{4}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{16}{200}$

De los tipos de fracciones presentes en las tablas 2 y 3, se puede deducir que el tipo de fracción aparente numerador, es a su vez una fracción impropia. En cuanto a las fracciones irreducibles, estas pueden ser también fracciones propias e impropias. Una fracción unitaria, en cambio, siempre será una fracción propia. Por último, las fracciones de tipo decimal, pueden ser a su vez fracciones propias e impropias. Se puede concluir que a partir de los dos tipos de fracciones propias e impropias se pueden considerar los otros tipos de fracciones, a excepción de las fracciones que se han clasificado como números mixto.

Hasta el momento, se interpreta que la fracción indica la medida de una parte respecto de un todo, pero cuando dos fracciones diferentes $\left(\frac{2}{6}\ y\ \frac{3}{9}\right)$ representan la misma cantidad (dan lugar a la misma parte de un todo) se conocen como fracciones equivalentes, puesto que expresan la misma cantidad de medida de determinada parte respecto de un mismo todo (Flores y Torralbo, 2011). Para determinar si dos fracciones son equivalentes, se debe de cumplir la igualdad de los productos cruzados (Cid et al., 2004). Si tenemos las fracciones $\frac{2}{6}\ y\ \frac{3}{9}$ y se realizan los productos cruzados, se tiene que $2 \times 9 = 3 \times 6$ y, como se cumple la igualdad, esas dos fracciones son equivalentes, como se percata el resultado del producto es $18 = 18$. Por tanto $\frac{2}{6}\ y\ \frac{3}{9}$ son fracciones equivalentes.

Cid et al. (2004) mencionan que la relación de equivalencia de fracciones cumple las tres condiciones (propiedades) exigidas a las llamadas relaciones de equivalencias. Estas propiedades son: la *reflexiva*, según la cual toda fracción es equivalente a sí misma $\left(\frac{2}{6}\ es\ equivalente\ a\ \frac{2}{6}\right)$; *simétrica*, con la que si una fracción cualquiera $\left(\frac{2}{6}\right)$ es equivalente a otra fracción $\left(\frac{3}{9}\right)$ entonces, esta última fracción $\left(\frac{3}{9}\right)$ es equivalente a la primera $\left(\frac{2}{6}\right)$ y por último, *transitiva*, que establece que si una fracción $\left(\frac{2}{6}\right)$ es equivalente a otra fracción $\left(\frac{3}{9}\right)$ y si esta última es equivalente a otra fracción $\left(\frac{6}{18}\right)$, diferente de la primera, entonces la primera fracción $\left(\frac{2}{6}\right)$ y la última $\left(\frac{6}{18}\right)$ son equivalentes.

Por tanto, el conjunto de las fracciones se encuentra dividido en "clases de equivalencia", y cada una de esas clases, se encuentra conformada por todas aquellas fracciones equivalentes entre sí (Cid et al., 2004). Por ejemplo, se tiene que la fracción $\frac{1}{2}$ representa la clase de equivalencia correspondiente a las siguientes fracciones $\left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{4}; \frac{3}{6}; \frac{4}{8}; \frac{5}{10}; \ldots; \frac{n}{2n}; \ldots\right\}$. Esta relación se puede ver también en la figura 1.

El número racional $\left[\frac{1}{3}\right] = \left\{\frac{2}{6}; \frac{3}{9}; \frac{4}{12}; \ldots; \frac{n}{3n}; \ldots\right\}$ se identifica con la fracción $\frac{1}{3}$, usándola como representante de cualquier otro miembro de la clase de fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$

Figura 1. Ejemplo de número racional como clase de equivalencias de fracciones.

Esta claro que existen infinitas clases de equivalencias de las fracciones y cada una de esas clases, es un número racional, por tanto existen también infinitos números racionales. Todo ellos constituyen el conjunto de los números racionales, que se representa con la letra Q.

Así como el conjunto de los números enteros tienen un orden, los números fraccionarios también lo tienen, por tanto se pueden comparar entre ellas. "Si se toman las fracciones como porciones, sucede que cuando el *todo* se divide en mayor número de partes, cada una de ellas es más pequeña" (Flores y Torralbo, 2011, p.205). Así, cuanto mayor sean los denominadores cada parte va a ser menor en relación con el todo. Luego sí el orden se establece en función de los denominadores sí el numerador es el mismo, será menor la fracción con mayor denominador. De esta forma, se puede expresar que el orden en las fracciones es opuesto al tamaño de los denominadores; contrario con lo que ocurre con los números enteros positivos, en los cuales el orden se establece en cuanto a la cantidad que representa ese número. Por ejemplo, el número 36 es mayor que el número 2.

Estas reflexiones se pueden realizar con facilidad, siempre y cuando la comparación de fracciones se realice con una fracción unitaria, puesto que siempre serán menores conforme aumenten sus denominadores. Por tanto, comparar y ordenar fracciones no siempre es fácil si se realizan con otros tipos de fracciones (A no ser que tengan el mismo denominador). Por ejemplo, al comparar y ordenar fracciones con distintos denominador $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{8}$ manteniendo el criterio anterior (entre mayor sea el denominador menor será la fracción), se puede deducir que la fracción $\frac{3}{5}$ es mayor que la fracción $\frac{6}{8}$. Esta afirmación en este caso es errónea. Existen diferentes estrategias para comparar fracciones, pero la más conocida es expresar ambas fracciones mediante fracciones con común denominador.

Utilizando la estrategia anterior para comparar las fracciones, se tiene que la fracción $\frac{6}{8}$ es mayor que la fracción $\frac{3}{5}$ (el proceso se ilustran en la figura 2). Por tanto, para comparar y ordenar fracciones, se tiene qué tener presente que tipo de fracciones se está trabajando.

La fracción $\frac{3}{5}=\frac{3\times 8}{5\times 8}=\frac{24}{40}$ y la fracción $\frac{6}{8}=\frac{6\times 5}{8\times 5}=\frac{30}{40}$ expresadas como fracciones con común denominador $\frac{24}{40}$ y $\frac{30}{40}$, se puede concluir que la fracción $\frac{30}{40}$ tiene mayor porciones por tanto es mayor que la fracción $\frac{24}{40}$.

Figura 2. Ejemplo de comparación y orden de fracciones con distintos denominador.

Como conclusión de la comparación y orden de fracciones se presenta en la tabla 4 un resumen detallado y comparativo de las misma.

Tabla 4
Comparación de fracciones.

Relación	**Descripción**	**Ejemplo**
Fracciones con igual numerador	Dadas dos o mas fracciones que tienen el mimo numerador, es menor la que tiene mayor denominador.	$\frac{4}{12}<\frac{4}{7}$
Fracciones con igual denominador	Dadas dos o mas fracciones que tienen el mismo denominador, es menor la que tiene menor numerador.	$\frac{4}{6}<\frac{5}{6}$
Con numeradores y denominadores distintos	Dada dos o mas fracciones que tienen numeradores y denominador distintos, en primer lugar se expresan a común denominador (o numerador), para luego determinar que la tiene menor numerador es la fracción menor.	$\frac{2}{3}=\frac{24}{36};\frac{5}{12}=\frac{15}{36};\frac{1}{9}=\frac{4}{36}$ $\frac{1}{9}<\frac{5}{12}<\frac{2}{3}$

Por otra parte, se pueden realizar las cuatro operaciones básicas con las fracciones (suma, diferencia, producto y división).

> La suma y diferencia de fracciones se justifica a partir del mismo tipo de situaciones que daban sentido a la suma y diferencia de naturales, es decir, situaciones de parte-todo, de reunión, de transformación o de comparación. Por tanto, el sentido de la suma y diferencia no cambia, cambian únicamente las cantidades que intervienen, que ahora son medidas o partes de un todo, mientras que antes eran cardinales u ordinales (Cid et al., 2004, p.113).

Tanto la suma como la diferencia de dos o más fracciones, se plantean en dos contextos (manera de proceder) y esto depende del denominador que poseen. Se ilustran en la tabla 5.

Tabla 5
Suma y diferencia de fracciones

Denominador	Operación	Descripción	Ejemplo
Iguales	Suma	Es el resultado de sumar los numeradores y dejar invariante el denominador. $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$	$\frac{3}{5}+\frac{6}{5}=\frac{3+6}{5}=\frac{9}{5}$
	Diferencia	Es el resultado de restar los numeradores y mantener el mismo denominador. $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$ Para que una diferencia de fracciones positivas sea posible tiene que ser el primer numerador mayor o igual que el segundo.	$\frac{6}{5}-\frac{3}{5}=\frac{6-3}{5}=\frac{3}{5}$
Distintos	Suma y diferencia	Primero se reducen a común denominador y se aplican las definiciones anteriores (ya sea cuál de las dos operaciones este realizando).	$\frac{6}{4}-\frac{1}{2}$ se encuentran el m.c.m de $(4{,}2)=4$ que será el denominador en común $\frac{6}{4}-\frac{2}{4}=\frac{6-2}{4}=\frac{4}{4}=1$

Flores y Torralbo (2011) señalan que "Sumar es reunir partes y restar es retirar partes" (p.211); algo similar con lo que se interpreta en la suma y resta de números naturales en relación al concepto, pero en el proceso de operar se diferencian. Esta relación cambia con el producto de las fracciones en relación al producto de los números naturales, donde el producto significa una suma repetitiva. En el caso de multiplicar fracciones, no se puede interpretar como resultado de sumar varias veces, porque el número de veces no puede ser fraccionario; el sentido del producto con fracciones es el de una fracción de fracción, pero sí tienen similitud en el proceso de operar con los números naturales. Es el caso también de la división de fracciones que no se puede interpretar como reparto o diferencia repetitiva como es entendida en la división con números naturales sino, como la operación inversa del producto de fracciones (Cid et al., 2004). La descripción de estas dos operaciones se ilustran en la tabla 6.

Tabla 6
Producto y división de fracciones

Operación	Descripción	Ejemplo
Producto	El procedimiento para calcular el producto de dos fracciones, se define como el producto de los numeradores y denominadores de la manera siguiente: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{2 \times 3}{5 \times 7} = \frac{6}{35}$
División	El procedimiento para calcular el cociente de fracciones, se define como el producto de la primera fracción por el inverso de la segunda: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$	$\frac{2}{5} \div \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{2 \times 7}{5 \times 3} = \frac{14}{15}$

Todo lo anterior deja plasmado el objeto matemático a trabajar en la investigación.

1.2. Interpretaciones asociadas al concepto de fracción

En este apartado, se presentan los reportes de investigaciones relativas a las interpretaciones asociadas al concepto de fracción y las consecuencias de la existencia de las mismas en el aprendizaje del concepto.

Los resultados de numerosas investigaciones, han identificado distintas interpretaciones de las fracciones (Kieren, 1976, 1980; Post et al., 1982; Behr et al., 1983, 1992; Llinares y Sánchez, 1988; Fandiño, 2009). Para obtener una comprensión completa de los números fraccionarios, no solo se deben estudiar por separado las distintas interpretaciones sino relacionarlas entre ellas (Kieren, 1976). El primero en distinguir a las fracciones en cuatro categorías interrelacionadas fue Kieren (1976). La primera categoría, *la fracción como relación (razón)*, expresa la noción de una comparación entre dos cantidades de una magnitud o de magnitudes diferentes; la segunda, *la fracción como operador*, se considera como una función aplicada a objetos, números o conjuntos, logrando ampliar o reducir una cantidad a un nuevo valor. La categoría de *la fracción como cociente*, se refiere al resultado de una división; y por último, *la fracción como medida*, considerada como número que indica la magnitud de una fracción y también se asocia con la medida de un intervalo (Gabriel et al., 2013).

Posteriormente, Behr et al. (1983; 1992) consideraron adicionar dos categorías a las expresadas por Kieren, o como ellos las llamaron subconstructos del megaconcepto. El primer subconstructo es *la fracción como parte-todo*, que se presenta tanto en situaciones continuas (longitud, área y volumen) como discretas (contando) y consiste en la capacidad de dividir una cantidad ya sea continua o un conjunto de objetos discretos en subpiezas o conjuntos de igual tamaño. El otro subconstructo, *la fracción como decimal*, cuando se expresa como un número decimal exacto, periódico o no periódico.

Por su parte Fandiño (2009), presenta un estudio detallado de las fracciones, donde habla tanto de los aspectos conceptuales como los didácticos de este concepto. Es así, como recopila las diferentes formas de entender el concepto de fracción. Utiliza la literatura específica sobre el tema para mencionar nueve formas más de entender el concepto de fracción (ya sea interpretación o uso) en relación a las seis ya mencionadas, recopilando así catorces formas (no presenta explícitamente la fracción como decimal).

Las diferentes formas en que Fandiño considera el concepto de fracción son: *La fracción como probabilidad*, cuando se describe con que probabilidad ocurrirá un evento estadístico; *la fracción como número racional*, cuando se presenta de manera general, dando particular atención a lo referente con la operatividad, especialmente la equivalencia entre fracciones; *la fracción como punto de una recta orientada*, cuando indica una distancia relativa (depende de la unidad de medida) entre el origen y el punto-fracción; *la fracción como indicador de cantidad de elección*, cuando se realiza una elección con la relación 1 cada 10, no limitada como la fracción que pretende dividir una unidad-todo en 10 partes iguales. Esta última forma como Fandiño (2009) entiende las fracciones, se puede relacionar con la interpretación de la fracción como decimal.

Otra forma de entender la fracción es *como porcentaje*, cuando se realiza la comparación relativa de un número respecto a otro, adoptando 100 como base de comparación. Con respecto al uso que se tiene de la fracción (no como interpretación), se puede encontrar que se usa en *el lenguaje cotidiano*, cuando los términos que tienen o parecen tener relación con las fracciones, se presentan en la práctica o lenguaje cotidiano; *la fracción en los puntajes*, se relaciona con la interpretación de las fracciones como relación (razón) y como operador.

Además, Fandiño (2009) distingue que en la enseñanza se puede realizar, *la conceptualización de las fracciones y la teoría de Vergnaud*, cuando se conceptualiza la fracción a través de todas sus interpretaciones y no sólo en la elección de uno o dos de ellos; y, *la conceptualización de la fracción: signo-objeto de Duval*, cuando se realiza el aprendizaje conceptual por medio de sus múltiples funciones y la multiplicidad de sus sistemas de signos (representación semiótica). De esta manera se resalta en esta investigación que Fandiño (2009) realiza una clasificación con respecto a algunas interpretaciones del concepto de fracción y algunos otros según el uso que se tienen del mismo, no siendo estos últimos interpretaciones de las fracciones.

Entre las investigaciones realizadas en México, conviene destacar algunas como la de Calderón (2012) que llevó a cabo la revisión y análisis del plan y los programas de estudio de la educación básica (primaria y secundaria) y de los libros de textos de educación primaria (edición 2011). En dicha investigación se trataron de identificar las interpretaciones asociadas al concepto de fracción relacionados a los de Fandiño (2009) que aparecen en dichos libros. Se encontraron nueve interpretaciones asociadas al concepto de fracción (la fracción como parte de un todo a veces continuo, a veces discreto; como cociente; como razón; como operador; como porcentaje; como indicador de una cantidad de elección en el todo (decimal); como número racional; como punto de una recta orientada; como medida). Se observó que se prioriza el trabajo con las interpretaciones: racional y medida y, el uso más frecuente de la fracción es en el lenguaje cotidiano. Esto conlleva un aprendizaje puramente memorístico, basado en la adquisición del algoritmo y no del concepto de fracción, ya que los textos no promueven la comprensión conceptual del tema, sino la resolución de problemas mediante procesos algoritmicos comunes y repetitivos (Calderón, 2012).

Las diferentes interpretaciones que se tiene del concepto de fracción, pueden estar asociadas con una falta de comprensión del tema, tanto en profesores como en estudiantes. Fandiño (2007) menciona que esto sorprende a los profesores en los cursos de formación, puesto que una definición aparentemente intuitiva de la fracción da lugar al menos una docena de diferentes interpretaciones del término. Las interpretaciones asociadas al concepto de fracción no deben considerarse por separadas, sino que deben fluir juntos en un único proceso de aprendizaje, ya que el aprendizaje conceptual es la primera etapa del aprendizaje matemático (Fandiño, 2007, p.18). Por otra parte, Fandiño (2009) menciona, que cada una de las diferentes aceptaciones de las interpretaciones asociadas al concepto de fracción deben ser exploradas y puestas en relación entre sí, con el objetivo de intentar encontrar algún principio unificador, aunque existan diferencias considerables entre algunas de ellas.

1.3. Dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de fracción

Las dificultades que presentan los estudiantes cuando trabajan con las fracciones, usualmente son derivadas de una falta de comprensión conceptual (Fazio y Siegler, 2011). A continuación se enuncian las principales dificultades que la literatura en Educación Matemática ha reportado sobre el concepto de fracción.

Fandiño (2009) presenta las que son más frecuentes en el aprendizaje de las fracciones, enumerando los errores más habituales en los estudiantes. También, presenta algunas propuestas didácticas, que buscan remediar esos errores típicos de los estudiantes. Las dificultades típicos de los estudiantes identificados en el contexto internacional por Fandiño (2009) son: *dificultad en el ordenamiento*, cuando el estudiante realiza de manera errónea la ordenación (mayor que, menor que o igual que) entre fracciones, números decimales o los dos mezclados; *dificultad en la realización de las operaciones*, cuando el estudiante presenta dificultad conceptual para realizar operaciones (adición, sustracción, multiplicación y división) entre fracciones; *dificultad en el reconocimiento de esquemas*, cuando el estudiante interpreta erróneamente el esquema de una fracción, el hecho radica que el estudiante no sabe decidir cuál es la unidad que está en juego; *dificultad en la gestión del adjetivo "igual"*, cuando el estudiante no sabe cómo interpretar la exigencia de que las unidades fraccionarias deben ser iguales.

Otra dificultad es la relativa a *la gestión de la equivalencia*, cuando el estudiante no sabe operar la equivalencia entre fracciones, ya sea encontrar una fracción equivalente a otro o completar ya sea el numerador o denominador en dos fracciones que son equivalentes; *dificultad en la gestión de la "fracción irreducible", la reducción a los mínimos términos*, cuando el estudiante confunde la expresión "cancelar arriba y abajo" en relación a la operación matemática y no saber expresar el resultado de dicha operación como fracción; *dificultad en la gestión de figuras no estándar*, cuando el estudiante tiene que hallar o representar fracciones con figuras no estándar. Esta dificultad puede ser el resultado de las actividades rutinarias que proponen los docentes, en las que habitualmente se recurre al uso de figuras estándar (rectángulos, círculos, cuadrados, entre otras). Otra dificultad es la relativa a, *determinar a partir de una fracción la unidad que la generó*, es común encontrar que el estudiante teniendo un conjunto-unidad o figura-unidad discreto de objetos, busque o represente una fracción. Pero, realizar la actividad contraria resulta de gran dificultad para ellos. Y, *la dificultad en la gestión autónoma o espontánea de esquemas, figuras o modelos*. El estudiante presenta falta de autonomía, cuando debe utilizar modelos o esquemas de manera espontánea para representar las fracciones, ya que solo se limita a los estándar o presentados en la clase (Fandiño, 2009).

Por otra parte, Butto (2013) presentó las dificultades que han reportado diferentes investigadores sobre el aprendizaje del concepto de fracción, estando muy relacionadas a las mencionadas por Fandiño (2009). Posteriormente analiza las dificultades que los estudiantes de sexto grado de una escuela primaria de la Ciudad de México tenían del aprendizaje de las fracciones. Revela que algunos estudiantes se encuentran en la transición del campo de los números enteros hacia los racionales; también, menciona que los estudiantes presentan dificultades con algunas actividades que requieren poner en práctica las ideas matemáticas de fraccionamiento en cantidad discreta, equivalencia de fracciones, ubicación de fracciones propias e impropias en la recta numérica (Butto, 2013).

Para analizar las dificultades de los alumnos en torno al concepto de fracción, Gabriel et al. (2013) proponen una distinción entre conocimiento conceptual y procedimental; entendiendo el primero como el conocimiento de conceptos y principios centrales, y sus interrelaciones en un dominio particular; y el segundo, como secuencias de acciones que son útiles para resolver problemas (p.2). El conocimiento conceptual de las fracciones, lo evaluaron a través de pruebas sobre algunas interpretaciones de las fracciones (parte-todo y proporción) y las diferentes representaciones de las fracciones (figura, numérica y verbal). El conocimiento procedimental sobre las fracciones, lo evaluaron mediante operaciones con fracciones y tareas de simplificación de las misma.

La prueba fue aplicada a estudiantes de cuarto, quinto y sexto grado de la comunidad francesa de Bélgica. Los resultados mostraron que los estudiantes trataron de entender el concepto de fracción, puesto que en las operaciones con fracciones presentaron dificultades (Gabriel et al., 2013, p.10). Además, los estudiantes aplicaron procedimientos que no comprenden plenamente. Mencionan, que la práctica de la enseñanza de las fracciones se centra más en los procedimientos que en la comprensión conceptual de las mismas. Pero con el estudio realizado por Gabriel et al., muestra que los procedimientos no son suficientes (para realizar operaciones con fracciones) y que, la comprensión conceptual es esencial para asegurar una comprensión eficaz de las fracciones. Concluyen explicando por qué las fracciones están entre los temas matemáticos más difíciles en la educación primaria, ofreciendo también una serie de recomendaciones sobre cómo enseñar fracciones en este nivel educativo.

Cada una de las dificultades mencionadas en este apartado, pueden estar asociadas con la falta de comprensión del concepto fracción que manifiestan los estudiantes de la educación primaria. Colocando en relación los niveles del modelo teórico de Pirie y Kieren (1994) con algunas de las dificultad enunciadas. Como por ejemplo, la dificultad para representar una fracción; la de identificar la unidad de partida y la exigencia de que las unidades fraccionarias deben ser iguales, podrían ser las causantes de que los estudiantes presenten un proceso de comprensión erróneo. Puesto que, no lograrían relacionar el concepto de fracción con la creación de una imagen, ya sea, mental, pictórica, simbólica entre otras, para posteriormente trabajar en esa imagen. Por eso, sería pertinente precisar, cuáles de las dificultades mencionadas u otras, están presente cuando los estudiantes resuelven tareas que aludan a la interpretación del concepto de fracción como razón. Siendo esta la interpretación objeto de estudio de la investigación.

1.4. Comprensión del concepto de fracción

En este apartado, se presentan algunos resultados de investigaciones relacionadas con la compresión del tema de fracción en el campo de la Educación Matemática.

Tanto en la enseñanza como en el aprendizaje, el tema de fracción en la educación básica, específicamente en la primaria, sigue siendo un tema difícil para que los profesores y estudiantes logren una buena comprensión. La endeble comprensión del concepto, se debe a muchos factores, como por ejemplo, en la enseñanza de las fracciones algunas veces, se limitan a usar situaciones de la vida real y muchas veces, se implementan tareas abstractas en contextos desconocidos por los estudiantes. Por tanto, conlleva a que estos manifiesten escasos conocimientos previos cuando estudian este contenido matemático en la escuela primaria (Perera y Valdemoros, 2009).

Algunas investigaciones centradas en la comprensión del concepto de fracción, como la de Kieren (1980), mencionan que la interpretación como parte-todo constituye los cimientos para el desarrollo de la comprensión del concepto. De esta manera, Lewis (2016) dice que sería oportuno promover actividades informales de partición en los niños (dividir un todo en partes iguales) a la hora de abordar la temática, a pesar de que, las habilidades partitivas (parte-todo) las llegarían a dominar en una infancia tardía (9 a 12 años).

En este sentido, en los libros de texto para la enseñanza primaria, es común que se presente el concepto de fracción en términos de la relación de dos acciones: dividir/tomar (Butto, 2013). Pero, está sola acción podría involucrar una endeble comprensión del concepto en niños de temprana edad. Ya que, no implica todas las características propias del tema. Por ejemplo, cuando la idea de fraccionamiento de la unidad o el todo inicial, no es suficientemente claro para el estudiante. Como el caso de las fracciones impropias, puesto que se tendría que el número de partes tomadas es mayor que el número de partes divididas, según la acción dividir/tomar. De esta manera, los estudiantes presentarían una dificultad típica al momento de interpretar una fracción impropia ($\frac{5}{3}$ representa dividir un todo en tres partes iguales y tomar cinco).

Esta manera de abordar el concepto de fracción, solo con la relación parte-todo, no posibilita la comprensión adecuada del concepto. Kieren (1980) enfatizó que la mejor manera de introducir el concepto es con la interpretación parte-todo, pero que ésta, no podía ser independiente por sí misma, ya que es la única interpretación que se relaciona con todas las demás, puesto que cada una de las otras interpretaciones implican un aspecto diferente del concepto. De acuerdo con Fandiño (2009) y Butto (2013) la mejor manera de enseñar el concepto para garantizar una comprensión del mismo es, exponer a los estudiantes a establecer relaciones entras las diversas interpretaciones que involucran el concepto, de tal manera que puedan resolver cualquier situación relacionada con el tema sin dificultad. Lo anterior posibilitó encaminar las dos tareas matemáticas aplicadas a promover conexiones con otras interpretaciones, como la fracción como porcentaje, parte-todo, proporción entre otras.

La enseñanza de las fracciones, se introduce en los currículos educativos a temprana edad, en México se evidencia desde el primer año escolar con la introducción de temas relacionados. Ya que, a la edad de 4 años los estudiantes pueden distribuir un conjunto de objetos en partes iguales, pero entre un pequeño número de personas, por ejemplo, los estudiantes logran compartir 12 caramelos entre 3 personas. Es ya, a la edad de 5 años, cuando pueden compartir un único objeto entre varias personas. A los 6 años de edad, los estudiantes tienen la capacidad de hacer coincidir proporciones equivalentes, representadas por figuras geométricas sencillas o formas cotidianas, por ejemplo, $\frac{1}{2}$ de una pizza es igual que $\frac{1}{2}$ de un pan (Fazio y Siegler, 2011). Se puede ver reflejado que el aprendizaje del concepto de fracción en las situaciones presentadas, se relacionan con diferentes interpretaciones del concepto (parte-todo, cociente, relación) desde una temprana edad.

A partir de los 6 años de edad, los estudiantes necesitan comprender que las fracciones son números con magnitudes, las cuales pueden ser ordenadas de menor a mayor y tener un valor equivalente (Fazio y Siegler, 2011). Una manera de asegurar que comprenda esto, es utilizando rectas numéricas durante la enseñanza del concepto. Como lo mencionan Cramer et al., (2018) los beneficios de usar en este tipo de representación es que deja ver, que una fracción representa un único número racional con un valor único como punto en una línea y además se requiere la notación de fracciones y de longitudes.

Cuando un estudiante tiene una comprensión conceptual de las fracciones, puede desarrollar con éxito los procedimientos de cálculo y, colocando en correlación ambas cuestiones, tiene la posibilidad de tener éxito en la resolución de problemas que involucren situaciones con fracciones (Fazio y Siegler, 2011). En México Cortina y Cardoso (2009), realizaron un estudio que consistió en la administración de exámenes a 297 estudiantes de sexto grado de 13 escuelas diferentes. Se pedía a los estudiantes que identificaran la cantidad representada por fracciones comunes (por ejemplo, 1/2, 1/4, 1/3, 3/4) puesto que estaban interesados en reportar las diferentes formas en que los estudiantes daban sentido a una notación de fracciones del tipo "a / b", como un número que expresa la cantidad. Los resultados indicaron que muchos estudiantes están terminando la escuela primaria con una comprensión deficiente de las fracciones, no han desarrollado comprensiones que les permitan interpretar rápida y correctamente el significado cuantitativo de las notaciones de fracciones más comunes, incluyendo 1/2 (Cortina y Cardoso, 2009).

Con relación a esto, Peláez (2013) también realizó un estudio exploratorio, donde se interesó por estudiar qué conocimientos tienen sobre el concepto de fracción, un grupo de estudiantes recién matriculados en séptimo grado. Para ello, primero realiza un análisis de los libros de textos de matemáticas, correspondientes a la formación de la educación básica (primaria) de estos estudiantes; y mediante un instrumento de exploración, analizó el nivel de comprensión presentado por los estudiantes en el proceso de resolución de situaciones. Como resultado obtuvo, que el nivel de compresión alcanzado sobre el concepto fracción por los estudiantes hasta su etapa de formación en primaria, es muy escaso; porqué no están acordes con los aprendizajes esperados al culminar esta etapa escolar; una de sus tantas dificultades es que no conocen procedimientos para comparar y ordenar números fraccionarios y decimales.

Todo lo mencionado en este apartado, ponde de manifiesto la endeble comprensión que tiene los estudiantes de la educación básica, particularmente en primaria cuando empiezan a abordar la temática. Por tanto, es primordial investigar el proceso de comprensión de los estudiantes en este grado escolar, para conocer los conocimientos empleados a la hora de resolver tareas que aludan al concepto, su manera de proceder y detallar las dificultades que les imposibilitan la buena comprensión de la temática. Posteriormente sería pertinente realizar investigaciones que ayuden a fortalecer las dificultades que manifiesten los estudiantes en el proceso de comprensión y así, lograr una buena adquisición del concepto de fracción.

1.5. Propuestas didácticas para la enseñanza y aprendizaje de las fracciones

En la Educación Matemática se han generado y aplicado propuestas de enseñanza para ayudar en el aprendizaje o comprensión del concepto de fracción (Ríos, 2007; Pescador, 2009; Meza y Barrios, 2010; Fuentes, 2010; Pérez, 2011; Lee y Boyadzhiev, 2016), algunas de ellas, han reportado los resultados obtenidos de su aplicación mientras que otras, solo han realizado el diseño de dichas propuestas didácticas.

Hincapié (2011) realizó una experiencia de formación con los docentes de una escuela de primaria de Colombia, sobre el concepto de fracción y algunas de sus interpretaciones como parte-todo, como cociente, como operador, como razón y como medida. Se trataba de favorecer la comprensión en los docentes de primaria en lo relativo al concepto de fracción y sus diferentes interpretaciones. Este proyecto se apoya en la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1994). Además, con base a la literatura consultada y la teoría cognitiva adoptada (campos conceptuales), diseña e implementa unas guías de trabajo basadas en situaciones problema, con el fin de fortalecer las prácticas de enseñanza de los docentes y provocar reflexiones en ellos.

La experiencia de enseñanza se llevó a cabo en tres fases, una de ellas *diagnóstica*, indagó por medio de situaciones de enseñanza y aprendizaje relacionadas con el concepto de fracción y sus interpretaciones (como parte-todo, como cociente, como operador, como razón y como medida) el grado de comprensión que tenían los docentes de dicho concepto. La segunda fase de *diseño e implementación*, se desarrolló con base al análisis de los resultados que se obtuvieron en la fase anterior, planteándose cinco situaciones problemas (sujetas al análisis y reflexión de cada encuentro), que se llevaron a cabo en cinco sesiones de trabajo. Las situaciones problemas estaban orientadas a fortalecer cada una de las diferentes interpretaciones de fracción, implementando diferentes materiales manipulativos (hojas, colores, regla, cartulina, entre otros).

La última fase de *análisis*, se realizó de manera descriptiva, apoyándose en la teoría utilizada (campos conceptuales), la información recogida en cada encuentro a través de los registros de video, de voz (grabaciones) y escritos tanto los producidos por los docentes como las notas del investigador. Hincapié (2011) propone un plan de mejoramiento institucional aprovechando las reflexiones de los docentes sus concepciones, sus prácticas habituales en la enseñanza de los números racionales positivos para contribuir en la calidad de la educación a nivel institucional.

Por otra parte, Perera y Valdemoros (2007), diseñan una propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria de una escuela pública. Dicha propuesta estuvo integrado por tareas que estaban vinculadas a la vida real del estudiante. Se trataba de establecer si una enseñanza matemática realista y lúdica, realizada bajo un enfoque constructivista, proporcionaría en los estudiantes la adquisición de la noción de fracción y las interpretaciones de medida, cociente intuitivo y la idea embrionaria de operador multiplicativo (p.210).

Para ello aplicaron dos cuestionarios, uno antes y el otro después de impartir la propuesta de enseñanza. Aplicaron entrevistas individuales a tres estudiantes. Como resultado del estudio, Perera y Valdemoros (2007) afirman que durante el programa de enseñanza se promovió en los estudiantes que ellos mismos construyeran sus propios conocimientos. Además, mencionan que los estudiantes lograron realizar de manera exitosa repartos equitativos de la fracción tanto en el contexto discreto como continuo, y que en las situaciones de reparto propiciaron en los estudiantes, la anticipación de tener una imagen mental de las acciones de la partición de un todo.

Hurtado (2012) diseñó y aplicó una propuesta didáctica para la enseñanza de fracciones en el grado sexto, basándose en los aportes realizados por algunos autores sobre el tema y un estudio exploratorio. La propuesta didáctica de enseñanza de las fracciones como parte-todo, se realiza mediante la resolución de problemas, apoyándose en la teoría de Polya. Se trataba de desarrollar capacidades de los estudiantes para comprender textos, hacer estimaciones en situaciones que involucran las fracciones, para que ellos propongan soluciones en diferentes contextos.

Para implementar esta propuesta se consideraron cuatro momentos. En el primer momento, se diseñaron y aplicaron cinco talleres orientados a superar las dificultades observadas en el estudio exploratorio realizado. En el segundo momento, se socializaron los procedimientos empleados por los estudiantes para resolver los problemas, verificar la viabilidad de cada solución presentada y las dificultades encontradas. Después de analizar las soluciones y dificultades encontradas, se presentaron las explicaciones necesarias, se generalizaron procesos y se unificaron conceptos, siendo este el tercer momento. Por último, para verificar la viabilidad de la propuesta didáctica, se realizó una evaluación escrita a los estudiantes, consistió en resolver tres problemas relacionados con los contextos trabajados en los talleres.

En los resultados del estudio exploratorio se mostró la dificultad en la comprensión y desarrollo de problemas relacionados con la interpretación de fracción parte-todo, que confundían el numerador con denominador, no representaban unidades de igual proporción, ni representaban las partes de igual tamaño (Hurtado, 2012, p.19). Con su propuesta de actividades para superar las dificultades de aprendizaje de los estudiantes, obtiene como resultado, que el 80% de los estudiantes lograron argumentar los procedimientos empleados en la solución de problemas. Además, menciona que la metodología que implementó, permitió a los estudiantes participar y ser protagonistas de su propio aprendizaje, ya que ellos tenían que leer, analizar, proponer y argumentar las soluciones a cada uno de los problemas que se le planteaba (Hurtado, 2012, p.31).

Por su parte, Bautista (2013) diseñó una propuesta para la enseñanza de fracciones en primaria usando aspectos históricos, ya que las prácticas educativas no dan cuenta de la historia de los conceptos en la generación de conocimiento y solo se limitan a procesos algorítmicos. Su pregunta de investigación fue ¿Cómo podría plantearse una propuesta de actividades que tomen argumentos históricos para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de las fracciones? Para dar respuesta a este interrogante, el diseño de su metodología se basó en el método de investigación histórica descrito por Cohen y Manion utilizando fuentes secundarias.

Diseña y plantea cuatro actividades, en cada una de las cuales narra anécdotas del pasado, introduciendo conceptos históricos (agrimensores, impuestos, diezmo, faraón, entre otros) relacionados con la fracción que serían nuevos para los estudiantes. También, presenta ejemplos del pasado para ilustrar técnicas y métodos (particiones del pan, medida no convencionales, entre otras). Cada actividad, describe el propósito y grado de escolaridad para el que están diseñadas, presentan los materiales manipulables a utilizar, una pequeña descripción sobre la interpretación del concepto de fracción que se trabajará y su relación con la historia del mismo; y por último unas sugerencia de implementación dirigidas al docente.

Al igual que Bautista (2013), López (2013) diseñó y aplicó una propuesta histórico-didáctica, en donde las tareas se diseñaron a la luz de la teoría de la actividad, y fueron implementadas en el aula, con el objetivo de analizar el proceso de aprendizaje del concepto de fracción, a un grupo de seis estudiantes de grado cuarto de educación básica primaria de una institución educativa colombiana.

La propuesta se basa en que la perspectiva histórico-cultural permite mediar, interpretar y comprender la fracción como un movimiento conceptual que proviene del pensamiento y el lenguaje en la actividad social e histórica de la humanidad (López, 2013). Con los fundamentos teóricos que hace referencia en su investigación, se plantea la siguiente pregunta de investigación ¿cómo analizar el proceso de aprendizaje del concepto de fracción, en estudiantes de un grado cuarto de básica, desde la perspectiva histórico-cultural?

Para responder esta pregunta, el procedimiento metodológico utilizado en esta investigación, fue la metodología cualitativa con enfoque crítico-dialéctico y un abordaje de investigación participante. Los datos que analizaron son producto de las elaboraciones colectivas, de socializaciones y de las discusiones en el aula de clase con los estudiantes al realizar las actividades. Los resultados permiten entender cómo las reflexiones realizadas desde las subjetividades y las apropiaciones hechas por los estudiantes quienes interactuaban entre ellos y fueron los protagonistas de la investigación, les posibilitó expresar el movimiento conceptual de la fracción y hacer un aprendizaje del mismo.

Estas dos últimas investigaciones mencionadas (Bautista, 2013; López, 2013), consideran la historia de las Matemáticas como fuente de actividades para mejorar la comprensión de alumnos, dejando ver claramente que los estudios en el campo de las fracciones ha abarcado sin duda numerosas investigaciones y que cada una de ellas busca dar aportes al campo en mención. Asimismo, la revisión de las dificultades y las propuestas didácticas, ofreció algunos aspectos que caracterizaron el rediseño de las tareas del instrumento de recolección de datos.

1.6. El problema de investigación

El interés de esta investigación, nace de la necesidad de conocer el proceso de comprensión que manifiestan los estudiantes de primaria, cuando resuelven tareas matemáticas que aludan al concepto de fracción. Como una forma de sustentar y contribuir a la comprensión de la competencia matemática de los estudiantes, respecto del tópico *fracciones*, partiendo de la problemática de qué los estudiantes de educación primaria muestran una endeble comprensión del concepto de fracción (Petit, Laird, y Marsden, 2010).

La Matemática generalmente se ha considerado como una asignatura difícil de entender y transmitir. En la enseñanza de nivel básico, uno de los conceptos que genera más dificultad en los alumnos es el de fracción (Fandiño, 2007; Cortina y Cardoso, 2009; Calderón, 2011; Butto 2013; Gabriel et al., 2013; Peláez, 2013; Tsung-Lung & Hui-Chuan, 2017). Una de esas dificultades para alcanzar una buena comprensión del concepto, está relacionado con las distintas interpretaciones que éste presenta (Kieren, 1976, 1980; Post et al., 1982; Behr et al., 1983, 1992; Llinares y Sánchez, 1988; Fandiño, 2009) causando problemas cognitivos tanto en profesores como estudiantes. Estas dificultades sin duda se han venido tratando en el diseño y aplicación de algunas propuestas didácticas (e.g., Ríos, 2007; Pescador, 2009; Meza y Barrios, 2010; Fuentes, 2010; Pérez, 2011), pero esto no ha sido una solución definitiva a la problemática que aún existe en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones.

En los resultados de pruebas estandarizadas de matemática, tanto a nivel internacional como nacional, se tiene que, en México el 57% de los estudiantes no alcanza el nivel básico de competencias en matemáticas, se encuentran por debajo del promedio (490 puntos) de la OCDE. Estos resultados se obtienen del el informe de la organización para la cooperación y el desarrollo económicos (OCDE), a raíz de la pruebas PISA 2015. La OCDE (2016) menciona que los estudiantes que no alcanzan el nivel básico en matemáticas, pueden realizar procedimientos rutinarios (operaciones aritméticas en situaciones simples) pero presentan dificultades para identificar cómo una situación sencilla del mundo real puede ser representada matemáticamente.

A nivel nacional, es conveniente destacar los resultados de las pruebas del plan nacional para la evaluación de los aprendizajes (PLANEA), aplicados a estudiantes de sexto grado de primaria en el año 2015. Los resultados manifiestan que al término de dicho ciclo escolar, 6 de cada 10 estudiantes no han logrado adquirir los aprendizajes clave de Matemáticas. El 60% de los estudiantes de sexto grado de primaria alcanzaron el nivel I de logro (insuficiente) en Matemáticas, nivel donde se trabaja con el conjunto de los números naturales. Particularmente, la mayoría de los estudiantes de sexto grado no lograron alcanzar el nivel IV de logro sobresaliente, nivel donde se trabajan con los números fraccionarios (INEE, 2015).

Si los resultados de ambas pruebas estandarizadas (PISA y PLANEA) dan a conocer que los estudiantes de la educación básica (primaria) no han logrado adquirir aprendizajes que les permita interpretar correctamente el concepto de fracción en situaciones simples y complejas, connlleva a preguntar, por ejemplo, ¿la falta de comprensión a qué se debe?, ¿cuáles son los factores que impiden una buena comprensión del concepto?, ¿un estudio empírico sobre los conocimientos utilizados por los estudiantes cuando resuelven tareas que aludan al concepto de fracción, ayudaría a conocer los causas que les impide una buena comprensión del concepto?

En el ámbito de la investigación, se tiene que Cortina y Cardoso (2009) mencionan que los estudiantes mexicanos terminan la escuela primaria con una comprensión deficiente de las fracciones y no han desarrollado comprensión que les permitan interpretar rápida y correctamente algunas notaciones de las fracciones, como en el caso de un cuarto o un medio. Esta investigación y las interpretaciones de los resultados de las pruebas estandarizadas, han puesto de manifiesto la endeble comprensión del concepto de fracción en estudiantes mexicanos de la educación primaria, sin embargo, no han especificado lo que interviene en el proceso de comprensión, para así, saber por qué los estudiantes manifiestan una baja comprensión del concepto. Por tanto, es necesario profundizar en el estudio de la compresión del concepto de fracción, para identificar las causas que impide la comprensión del tema en los estudiantes.

En ese sentido, la escasa comprensión del concepto de fracción en educación primaria (Petit et al., 2010) debe ser un asunto prioritario, puesto que un buen conocimiento del tema es predictor de un buen rendimiento académico en el área de matemática (Bailey et al., 2012; Siegler et al., 2012). Las fracciones son un tema transcendental que facilita la comprensión de otros conceptos matemáticos. "El dominio de las fracciones se considera esencial para acceder al plan de estudios de matemática en secundaria, en particular en los dominios de medida, álgebra y geometría, así como de probabilidad" (Department for Education, 2011, p.72). Además, las fracciones juegan un papel fundamental en diversas áreas de la vida profesional de una persona y son de gran utilidad en muchas profesiones (George, 2017). En una perspectiva más práctica, las fracciones son una parte integral de la vida cotidiana y se utilizan en situaciones cotidianas como la de estimar un descuento, comparar precios o leer un mapa (Tsung-Lung y Hui-Chuan, 2017).

En resumen, esta investigación está centrada en estudiar el proceso de la comprensión de los estudiantes de educación primaria sobre el concepto de fracción como razón, apoyándose en los ocho niveles del modelo teórico propuesto por Pirie y Kieren (1994). Se trata de ofrecer una respuesta a la siguiente pregunta de investigación*: ¿Cuál es el proceso de comprensión de los estudiantes de sexto grado de educación primaria cuando resuelven tareas relacionadas con el concepto de fracción como razón?*

1.7. Pertinencia de la investigación

Reconociendo la importancia que tiene el estudio del concepto de fracción en el aprendizaje de la matemática en general, y en la vida cotidiana y profesional de una persona, se enmarcan estudios desde diferentes perspectivas, por ejemplo, una perspectiva epistemológica, didáctica, cognitiva, entre otras. Dentro de las cuales, se han reportado varias cuestiones, como se presenta en la revisión literaria presentada previamente. Sin embargo, pocos estudios se han enfocado en estudiar el proceso de comprensión que manifiestan los estudiantes cuando resuelven tareas que aludan al concepto de fracción.

Con esta investigación se busca estudiar el proceso de la comprensión que tienen los estudiantes de primaria sobre el concepto de fracción, puesto que como dice Skemp (1980) “Cuando poseemos una mejor comprensión de la comprensión misma, nos encontramos en una posición más humilde, tanto para comprender matemáticas nosotros mismos, como para ayudar a otros a que las comprendan” (p.18). Además, una finalidad del proceso de enseñanza, es que los estudiantes alcancen la comprensión de los objetos matemáticos que se están tratando en el salón de clases (Visnovska y Cortina, 2017). Estudiar el proceso de comprensión, permite conocer la forma cómo los estudiantes construyen su conocimiento e identificar dondé presentan dificultades.

Es así como esta investigación, busca por medio del modelo teórico de compresión de Pirie y Kieren (1994), conocer el proceso de comprensión del concepto de fracción. Los resultados podrán ser utilizados por los docentes para entender cómo aprenden los estudiantes este concepto matemático y, de este modo, puedan buscar o crear métodos innovadores y estrategias que permitan la comprensión de este concepto matemático. Como señala Codes et al. (2013) “Un conocimiento profundo de los procesos de comprensión de los alumnos puede ser usado por el profesor para mejorar los métodos de enseñanza de forma que sean más efectivos” (p.152). Por otra parte, conocer el proceso de comprensión de un concepto matemático que presenta un estudiante ayuda a resolver algunos problemas cognitivos ligados al aprendizaje del concepto de fracción. Como menciona Skemp (1980) “Los problemas de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas son de carácter psicológico, por tanto se debe profundizar más acerca de cómo se aprenden” (p.18).

Este estudio es una contribución a la búsqueda de soluciones acerca de la comprensión del concepto de fracción. “Comprender el conocimiento construido por los estudiantes acerca de un concepto durante determinada etapa de su formación académica, cobra relevancia cuando el interés va más allá de identificar dificultades, sino más bien, de conocer su nivel de comprensión” (García y Cabañas-Sánchez, 2013, p.214). Por tanto, este estudio no se centra en identificar las dificultades que presentan los estudiantes al momento de adquirir este saber matemático, sino en conocer el proceso de su comprensión cuando resuelven tareas de manera grupal, encaminadas a la interpretación del concepto de fracción que presentan mayor dificultad para aprender.

La población de estudio estuvo formada por estudiantes de sexto grado de educación primaria, ya que es donde el tema de fracción se termina de desarrollar en este ciclo escolar. El trabajo con fracciones en las escuelas de primaria en México, se realiza desde primer (se introducen temas relacionados a la fracción) hasta sexto grado de educación primaria. Es en cuarto grado de la educación básica (primaria) mexicana, donde se empieza a profundizar el trabajo con las fracciones, haciendo más complejo su uso a través de la resolución de problemas (Perera y Valdemoros, 2007). En el currículo y en los libros de texto, el concepto de fracción está distribuido en 3 ejes: sentido numérico y pensamiento algebraico; forma, espacio y medida; y manejo de la información, identificando que en el eje sentido numérico y pensamiento algebraico, es en el que tiene mayor presencia el concepto de fracción (Calderón, 2012).

Específicamente se trabajó en una de las interpretaciones del concepto de fracción que se ha mencionado en el capítulo 3: fracción como razón. Se ha seleccionado esta interpretación como consecuencia de un estudio realizado con el método Delphi de Landeta (2002), el cual es explicado detalladamente en el capítulo de metodología. No obstante, se reconoce que hay otras interpretaciones asociadas al concepto de fracción que son difíciles de adquirir (la fracción como indicador de una cantidad (decimal) y la fracción como número racional) por los estudiantes de primaria, abriendo campo a investigaciones futuras para llegar a principios más amplios de la comprensión del concepto de fracción.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

Capítulo 2. Fundamentos Teóricos

Dado el papel que juega la comprensión de un concepto matemático en el aprendizaje, se han desarrollado modelos y teorías para describir el proceso de comprensión, así como para establecer categorías o niveles que tienen los estudiantes sobre algún concepto matemático en particular. "Durante las últimas tres décadas, se han desarrollado nuevas e integradoras perspectivas, con el objetivo de realizar una descripción significativa de la comprensión cognitiva" (Meel, 2003, pág. 221). Entre otros, esos aportes los han realizado Skemp (1980); Sierpinska (1990); Duninsky (1991); Pirie y Kieren (1994); Kastberg (2002).

Primero, se presenta una breve explicación de lo concerniente a la comprensión de un concepto en el campo de la Educación Matemática. Como menciona Cortina (2014), una de las preocupaciones que la literatura sobre las fracciones ha puesto de manifiesto y que han motivado la realización de estudios en este campo, está vinculada al campo de la evaluación, lo que implica documentar los niveles de comprensión de las fracciones que logran estudiantes de diferentes edades logran. Esto es lo que motiva también la realización de este estudio. Luego, se describe el modelo teórico de comprensión propuesto por Pirie y Kieren (1994), que es el utilizado en la investigación. Puesto que, permite describir las estructuras de conocimiento matemático que manifiestan los estudiantes sobre un concepto matemático.

2.1. La noción de comprensión en la Educación Matemática

Antes de presentar las investigaciones que han dotado de teorías y modelos el campo de la comprensión en Educación Matemática, se hace referencia a la evolución de la noción de comprensión matemática, para posteriormente presentar algunos modelos que ayudan a documentar los niveles de comprensión que logran estudiantes de diferentes edades sobre algún concepto matemático.

Desde hace medio siglo, se ha buscado una descripción significativa de la comprensión cognitiva y, en este devenir, se han desarrollado nuevas e integradoras perspectivas. Desde el trabajo sobre la comprensión matemática realizado por Skemp (1978), en el que se diferencia entre comprensión instrumental y comprensión relacional esta noción ha ido evolucionando y revolucionando el campo en mención. Desde entonces se han desarrollados diversos marcos teóricos.

Es de resaltar que dos años después de la publicación del articulo de Skemp en el año de 1978, presenta su libro Psicología del aprendizaje de las Matemáticas, en donde expresa detalladamente el proceso de enseñanza y aprendizaje de un concepto matemático, refiriendo que "comprender algo significa asimilarlo dentro de un esquema adecuado" (Skemp, 1980, p.50).

Meel (2003) considera que históricamente se ha asociado la comprensión con el conocimiento, pero desde que Skemp (1978) diferenciara entre la comprensión instrumental (utilizar las reglas sin razones) y la relacional (saber qué hacer y por qué), se han desarrollado diferentes estudios que consideran estas diferenciación y categorización de la comprensión. Esto ha ayudado a incrementar la brecha entre las nociones de comprensión y conocimiento.

En relación con la evolución de este concepto, Meel (2003) menciona que antes de 1978 estaba relacionada con el desarrollo de las conexiones en el contexto de la realización de operaciones algorítmicas y la resolución de problemas; mientras que después de 1978 se empezó hablar de categorías de comprensión y se empezó a considerar el desarrollo de conexiones entre ideas, hechos o procedimientos.

Por otra parte, Meel (2003) también menciona que a pesar de que actualmente los investigadores distinguen entre comprensión y conocimiento, la comunidad de Educación Matemática no ha alcanzado un acuerdo respecto al significado de comprensión (p.227), emergiendo así diferentes puntos de vista pero casi todos ligados a modelos constructivistas. A continuación se presentan algunos modelos teóricos que se han emergido desde diferentes puntos de vistas.

Un caso particular, es el considerado por Sierpinska (1990) quien ofrece un modelo para la comprensión de los conceptos matemáticos, concibiendo a la comprensión como un acto donde se va captando poco a poco el significado para convertirse en un proceso de interpretación que cada vez se hace más elaborado. Así clasifica los actos de comprensión de un concepto matemático en cuatro categorías. *La identificación*, es la operación principal involucrada en los actos de comprensión, y tiene que ver con el descubrimiento o reconocimiento de un objeto entre otros objetos; *Discriminación*, está presente al momento en que se reconocen diferencias entre dos o más objetos, ya sea por sus características o propiedades que antes se confundían; *Generalización*, consisten en tomar conciencia de la no-esencialidad de alguna suposición, o de la posibilidad de ampliar el campo de aplicación; y por último *Síntesis,* se entiende como la búsqueda de una relación común, un principio de unificación entre varias generalizaciones y organizarlas en un todo coherente.

Por su parte, Kastberg (2002) define la comprensión como la colección de creencias que tiene los estudiantes acerca de un concepto matemático. Presenta cuatro categorías. *El diseño,* es la concepción o idea que comunica un estudiante de un concepto matemático; *la representación*, consiste en los símbolos que utiliza el estudiante para comunicarle a otros el concepto matemático; *la conexión*, es cuando el estudiante puede relacionar una representación del concepto matemático con otra representación del mismo; y *la aplicación*, se refiere cuando el estudiante implementa un concepto matemático para ayudarse a resolver un problema.

Los modelos teóricos de Sierpinska (1990) y Kastberg (2002) desde el punto de vista del investigador se han utilizado de manera exploratoria, mostrando en qué nivel de comprensión se encuentra un estudiante referente algún concepto matemático. En este estudio trataremos de describir el desarrollo de la comprensión cuando los estudiantes solucionan tareas grupales, donde dialoguen y expresen sus conocimientos del concepto matemático a estudiar. Por ello se recurre al modelo expuesto por Pirie y Kieren (1994) quienes expresan que la comprensión es un proceso continuo de organización de las estructuras de conocimiento y como lo mencionan Codes et al., (2013) se ha mostrado eficiente para describir y analizar cómo se produce el crecimiento de la comprensión matemática de los estudiantes en diferentes situaciones (p.136). Este modelo “se centra en cómo los estudiantes reflexionan acerca de su conocimiento matemático en un entorno de aprendizaje en el que cada uno realiza su interpretación personal mediante una actividad que resuelven en grupo" (Delgado et al., 2014, p.28). El modelo teórico se describirá en el capítulo 2 de la investigación.

Es así, como desde esta investigación se busca por medio de tareas matemáticas inferir el proceso de comprensión de los estudiantes de primaria hoy día. Esta revisión de la literatura acerca de las dificultades y las propuestas de enseñanza y aprendizaje fueron de apoyo en el rediseño de las tareas de este estudio. También, se busca particularizar las dificultades que los estudiantes tienen en relación al concepto de fracción como razón. Se trata de describir el proceso de comprensión de los estudiantes con la ayuda del modelo propuesto por Pirie y Kieren (1994) cuando resuelven tareas en grupo y que están diseñadas teniendo en cuenta las dificultades señaladas en la literatura sobre fracción.

2.2. El modelo teórico de Pirie y Kieren

En la literatura de Educación Matemática se ha intentado buscar o unificar una definición concisa del término comprensión. Brownell y Sims (1946) expresaron que la comprensión era un concepto difícil de definir, diciendo "Es muy difícil de encontrar o formular una definición técnicamente exacta de comprender o comprensión" (p.163). A pesar de ello han surgido diversos modelos que intentan acercarse a la noción de comprensión. A continuación se presenta en detalle un modelo teórico sobre el concepto de comprensión y la comprensión matemática que trata de describir su proceso en los aprendices.

2.2.1. Descripción general del modelo teórico

Este modelo teórico fue desarrollado por dos profesores norteamericanos, Susan Pirie y Thomas Kieren. La primera publicación donde se describe el modelo es del año 1989. Es un modelo que describe el proceso de la comprensión matemática, de manera dinámica, recursiva, nivelada pero no lineal (Pirie y Kieren, 1989). El modelo se encuentra estructurado en ocho niveles (ver figura 3), en los cuales se puede circular, no sólo adelantado, sino también retrocediendo a un nivel interior, con el objetivo de reflexionar, o volver a trabajar acerca de comprensiones previas sobre un concepto matemático (Delgado et al., 2014).

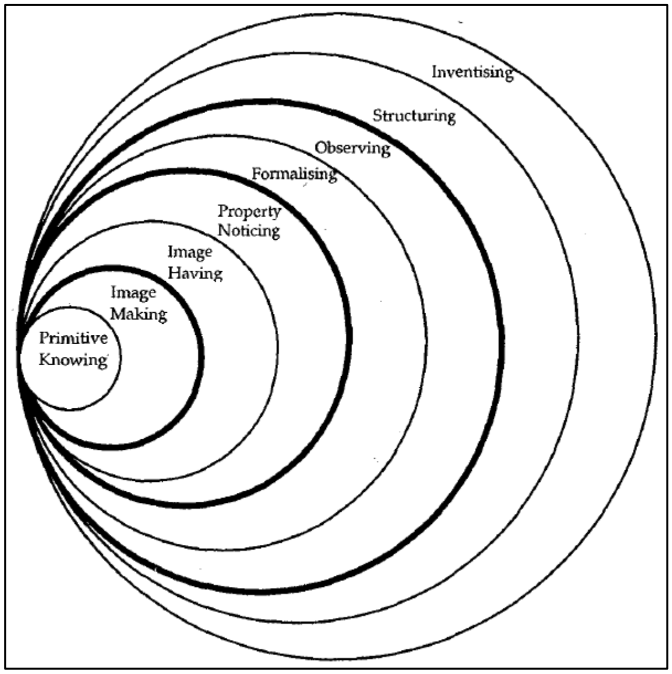


Figura 3. El modelo de Pirie y Kieren de 1994.

El modelo presenta cuatro características fundamentales que serán descritas en su momento como: *fractal-like quality* (cualidad parecida a una fractal); *Folding back* (redoblar o volver hacia atrás); *'Don't need' Boundaries* (fronteras no necesarias); y *the complementarities of acting and expressing* (la complementariedad de la acción y la expresión).

2.2.2. Origenes del modelo teórico

El modelo teórico de Pirie y Kieren (1994) surge desde una perspectiva constructivista, adoptando inicialmente la postura de Glasersfeld (1987) sobre la comprensión, quien la definió como:

> El organismo de la experiencia se convierte en un constructor de estructuras comunicativas, que pretende resolver dichos problemas conforme el organismo los percibe o los concibe… entre los cuales se encuentra el problema interminable de las organizaciones consistentes [de dichas estructuras] que podemos llamar comprensión (p.7).

En pocas palabras, Pirie y Kieren detallan la definición de comprensión desde un enfoque constructivista y es definida desde el modelo teórico como un "Proceso continuo de organización de las estructuras de conocimiento" (Pirie y Kieren, 1994, p.166). Estos autores mencionan que existe mucho interés práctico en la comprensión matemática; diferentes perspectivas atienden a la necesidad de enseñar matemáticas con comprensión. Así se puede observar en las actas de conferencias en el campo de la Educación Matemática o en, la literatura en el campo de la Psicología que muestran el interés en que se debe aprender y enseñar con comprensión (Pirie y Kieren, 1994).

De esta manera para Pirie y Kieren, la concepción teórica de comprensión matemática es entendida como:

> La comprensión matemática se puede definir como nivelada (estable) pero no lineal. Es un fenómeno recursivo, y la recursión se observa cuando el pensamiento se mueve entre niveles de sofisticación. De hecho, cada nivel de comprensión se encuentra contenido dentro de los niveles subsiguientes. Cualquier nivel particular depende de las formas y procesos del mismo y, además, se encuentra restringido por los que están fuera de él (p.8).

Enunciada la definición de comprensión y la comprensión matemática en este modelo, se entiende que la comprensión es un proceso continuo que realiza un sujeto para concretar un objeto, este proceso se construye a partir de sus experiencias y se realiza de una manera iterativa, para así construir, fortalecer o modificar su conocimiento.

El modelo teórico se desarrolló mediante experimentos de enseñanza con niños de 7 a 9 años de edad con el tema de las fracciones (Pirie y Kieren, 1989; 1992; 1994) y con niños de 14 años de edad con el tema de funciones cuadráticas (Pirie y Kieren, 1989; 1994), todos ellos en ambientes constructivistas. Se recogieron datos mediante grabaciones de video y audio de las actividades que desarrollaban los estudiantes. También se realizaron entrevistas individuales a los estudiantes, para luego analizar las respuestas escritas e interpretarlas con las entrevistas en función de los ochos niveles de comprensión que presenta el modelo teórico.

2.2.3. Niveles de acción para describir el proceso de la comprensión

Los ocho niveles de acción que tiene el modelo, se representan en un diagrama en dos dimensiones, en el que cada círculo corresponde a un nivel y estos están anidados uno dentro de otro (figura 3). Se expresa de esta manera que cada capa contiene todas las capas anteriores y se incrusta en todas las capas sucesivas. “El diagrama es sólo un intento de representar nuestras ideas en una forma bidimensional. No es el modelo en sí, y de hecho, tiene muchos inconvenientes, aunque con estas advertencias en mente el diagrama es una herramienta útil" (Pirie y Kieren, 1994, p.171).

Se observa que las capas del modelo tal y como están esbozadas, dan una percepción de crecimiento hacia fuera, pero en realidad es un movimiento continuo (hacia delante y hacia atrás) a través de los diferentes niveles. A continuación se presenta en orden ascendente la descripción de cada uno de los niveles que permiten conocer la forma como un estudiante construye su conocimiento:

- ***Primitive Knowing (PK)***, se refiere a todo lo que el estudiante conoce y sabe hacer antes de confrontarse con el nuevo concepto matemático a estudiar. Esta actividad es asumida por el observador (profesor o investigador). Pirie y Kieren (1994) mencionan que es en este nivel, donde se empieza el proceso de la comprensión matemática y además la palabra *Primitive Knowing* no se debe confundir con un nivel bajo de conocimiento matemático. "Primitivo aquí no implica matemáticas de bajo nivel, sino que es más bien el punto de partida para el crecimiento de cualquier comprensión matemática particular" (Pirie y Kieren, 1994, p.170).

- ***Image Making (IM)***. El estudiante es capaz de hacer distinciones del concepto u objeto matemático con base en sus capacidades y conocimientos anteriores. Realiza acciones (físicas o mentales) con el fin de crear una idea del nuevo concepto matemático. Las imágenes no siempre son representaciones pictóricas, sino que se pueden expresar mediante el lenguaje o acciones específicas de los estudiantes.

- ***Image Having (IH)***. El estudiante es capaz de emplear una construcción mental sobre el concepto matemático, pero sin la necesidad de trabajar con ejemplos particulares o realizar una abstracción del concepto mismo. Por tanto, el estudiante se ve en la necesidad de reemplazar las imágenes asociadas al concepto por una imagen mental del mismo.

- ***Property Noticing (PN).*** Se alcanza cuando el estudiante puede utilizar o combinar aspectos de las imágenes mentales que ya posee, para construir propiedades específicas del concepto y tratar de generalizarlas.

- ***Formalising (F)***. Cuando el estudiante conoce las propiedades y es capaz de abstraer características comunes de esa imagen. Aquí ya el estudiante trabaja el concepto matemático como un objeto formal y no hace referencia a una acción o imagen particular. "El lenguaje usado para describir un concepto no tiene que ser un lenguaje matemático formal; sin embargo, las descripciones generales suministradas por los estudiantes deben ser equivalentes a la definición matemática apropiada" (Villa, 2011, p.47).

- ***Observing (O)***. El estudiante ya utiliza su pensamiento y lenguaje matemático formal, realizando reflexiones sobre enunciados formales y estableciendo conexiones entre conceptos matemáticos que le permitan deducir patrones y regularidades al momento de expresar algoritmos y teoremas.

- ***Structuring (S)***. Cuando el estudiante comienza o trata de pensar en sus observaciones formales como una teoría y justifica o verifica una declaración a través de un argumento lógico o metamatemático.

- ***Inventising (I)***. Cuando el estudiante lo ha alcanzado tiene la capacidad de desvincularse de las situaciones concretas y determinadas del concepto, ya que tendrá una comprensión completa del mismo, para luego emprender otras perspectivas que lo conduzcan a realizar hipótesis de otro problema o concepto. "Una persona en este nivel tiene una comprensión estructurada completa y por lo tanto puede ser capaz de romper con los preconceptos que provocaron esta comprensión y crear nuevas preguntas que podrían convertirse en un concepto totalmente nuevo" (Pirie y Kieren, 1994, p. 171).

Para Pirie y Kieren, es importante que cada lector del modelo, entienda que para ellos la comprensión es un proceso de crecimiento y no, ubica o categoriza a una persona en alguno de los niveles que presenta el modelo ya que los niveles ilustran modos de comprensión más que fases aparentemente monótonas. Además, Delgado et al. (2014) mencionan que un estudiante va creciendo en su conocimiento mientras resuelve una tarea, puesto que su comprensión se vuelve cada vez más sólida a medida que avanzan en el desarrollo de la misma. Aunque todo depende del diseño y la complejidad de la tarea, puesto que algunos estudiantes no avanzarán significativamente, o no cruzan fronteras entre niveles cuando resuelvan algunas tareas.

2.2.4. Características principales del modelo teórico

El modelo teórico de Pirien y Kieren, plantea cuatro características principales que hacen de este, un modelo dinámico. Una de esas característica es la ***fractal-like quality*** (cualidad parecida a una fractal). Se puede expresar que es una de las características que permite deducir que la comprensión no es limitada, ni tampoco finita, sino "recursiva" como la reportan los autores. Su estructura básica (primer nivel) puede reincidir a diferentes escalas (figura 4). "La inspección de cualquier conocimiento primitivo particular, revelará las capas de los conocimientos internos" (Pirien y Kieren, 1994, p.172). Esta característica, se presenta en el nivel *Primitive Knowing* y puede ser la estructuración de la comprensión de un concepto matemático previo que fue desarrollado con anterioridad.

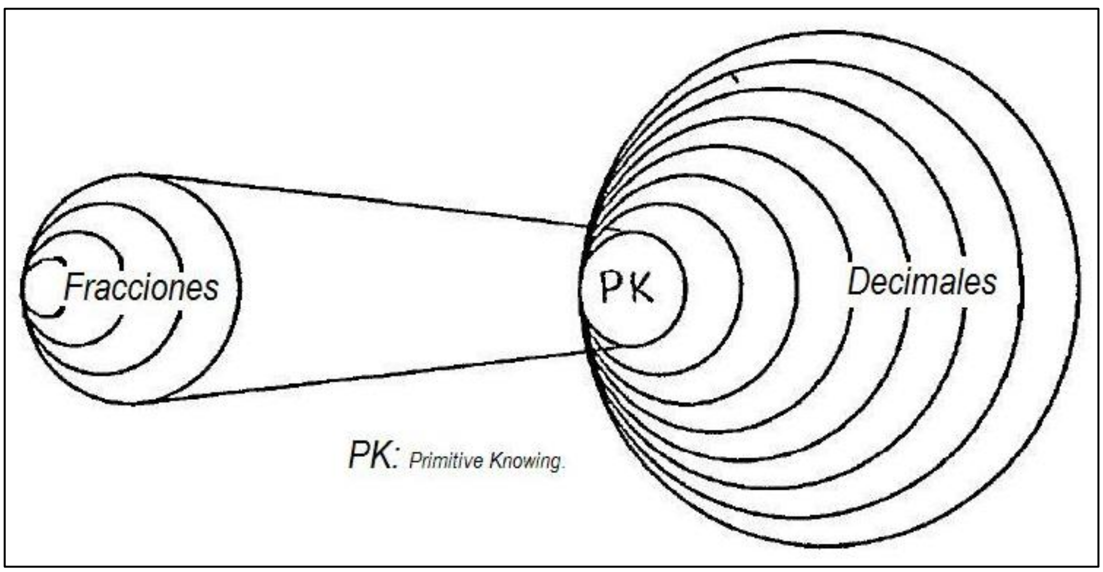


Figura 4. Diagrama de la característica Fractal del modelo de Pirie Kieren.

Utilizando la representación que presenta Pirien y Kieren del modelo, se puede ilustrar cuando un estudiante hace uso de la comprensión actual que tiene de las fracciones (una comprensión correcta) como su *Primitive Knowing* (conocimiento primitivo) para desarrollar la comprensión de los decimales (Pirien y Kieren, 1994, p.172).

La característica más importante del modelo teórico es el proceso dinámico de redoblar (Meel, 2003). El ***Folding back*** (redoblar o volver hacia atrás), se identifica cuando una persona que está en un nivel de comprensión exterior del modelo, vuelve a un nivel interior al que ya estaba, para realizar una reexaminación de la comprensión, pero de una forma mas enriquecida a la que tenia cuando trabajó en ese nivel (figura 5). Pirien y Kieren (1994) refieren que esta actividad de devolverse a un nivel interno, no es idéntica a las acciones originales de ese nivel; ahora la persona está estimulada y guiada por el conocimiento que ha adquirido en el nivel externo de donde retrocedió.

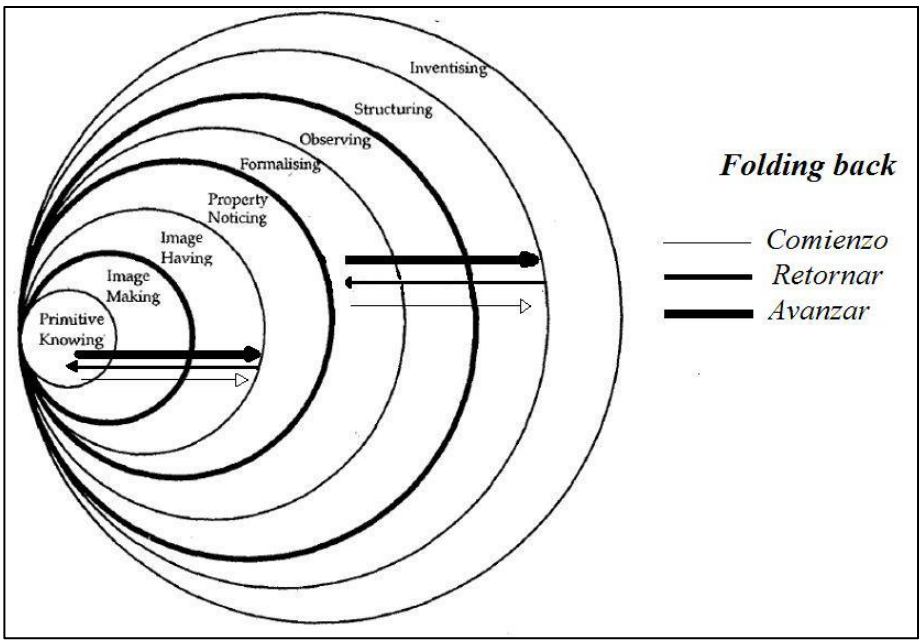


Figura 5. Característica del folding back del modelo de Pirie y Kieren.

Para Pirie y Kieren (1994) esta es la actividad vital del modelo que representa el crecimiento de la comprensión de una persona. Además, revela la naturaleza no unidireccional de llegar a comprender la matemática. “Cuando una persona se enfrenta a un problema o una pregunta en cualquier nivel, que no es inmediatamente solucionable, hay que retroceder a un nivel interno para extender la propia comprensión inadecuada actual” (Pirie y Kieren, 1994, p.173). De esta forma, la comprensión matemática es un fenómeno recursivo y dinámico.

Esta característica del modelo teórico, promueve la evolución de la comprensión ya que, de esta forma, el avance se presenta cada vez que el estudiante retroceda repetidamente para reconstruir y reorganizar el conocimiento del nivel interior y, de esta manera, extienda o amplíe la comprensión para lograr el nivel exterior donde se encuentra. Es de resaltar, que los estudiantes se moverán con velocidades o de maneras diferentes en cada uno de los niveles (Pirie y Kieren, 1994).

Pirie y Kieren (1994) afirman que “Una de las fortalezas de las matemáticas es la capacidad de funcionar en un nivel simbólico sin referencia a conceptos básicos” (p.172). Esta afirmación se refleja en otra de las características del modelo teórico; se encuentra ilustrada por tres anillos resaltados en negrita (figura 6). En el modelo son llamados ***'Don't need' Boundaries*** (fronteras no necesarias). Cuando un estudiante avanza en cada uno de los anillos o fronteras, ya no se encuentra en la capacidad de estar pensando en la construcción del concepto que realizó en los niveles anteriores a la frontera, sino que posee la capacidad de pensar mediante la parte simbólica del concepto, puesto que lo ha superado y comprendido.

> Más allá de la frontera uno no necesita la comprensión interna específica que dio lugar al conocimiento externo. Uno puede trabajar a un nivel o abstracción sin la necesidad de referirse mental o físicamente a imágenes específicas. Esto no implica, por supuesto, que uno no pueda volver a la comprensión de antecedentes específicos si es necesario (Pirie y Kieren, 1994, p.173).

Esta característica, no se interpreta como la capacidad de no realizar el *Folding back,* sino simplemente señala el hecho de que una persona no necesita ser consciente constantemente de los niveles internos de comprensión, sino que puede simbolizar lo comprendido en ellos y al realizar el *Foding back* sea notorio su comprensión de los niveles internos y presente un fácil acceso en el caso de ser necesario.

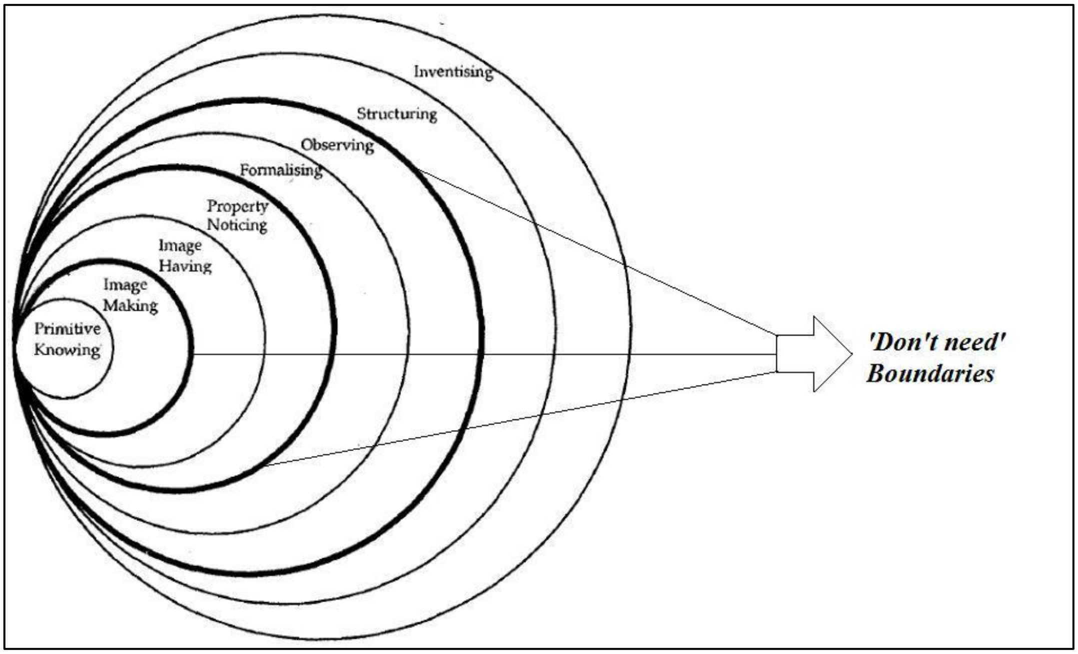


Figura 6. Característica de las fronteras no necesarias del modelo de Pirie y Kieren.

Tomando el esquema del modelo teórico, la primera *'Don't need' Boundaries*, ocurre entre los niveles *image making* y *image having*, lo que quiere decir que cuando una persona ya tiene una imagen de una idea matemática, no necesita acciones o las instancias específicas de cómo creó de la imagen. Lo mismo ocurre en la segunda *'Don't need' Boundaries,* esta se encuentra entre los niveles *property noticing* y *formalising*, lo que quiere decir que una persona que ya tiene una idea formal matemática no necesita de una imagen. En consecuencia, ocurre lo mismo con la última *'Don't need' Boundaries,* puesto que una persona con una estructura matemática bien desarrollada, no necesita el significado traído a ella por ninguno de los niveles internos (Pirie y Kieren, 1994).

La ultima característica del modelo teórico es ***the complementarities of acting and expressing*** (la complementariedad de la acción y la expresión). Esta característica refiere que cada nivel (excepto el primero y último), se encuentra estructurado para que el crecimiento de la comprensión, se produzca al menos a través de la primera acción y luego de la expresión (figura 7). Pirie y Kieren (1994) mencionan "Creemos que cada nivel más allá del conocimiento primitivo está compuesto por una complementariedad de actuar y expresar y cada uno de estos aspectos del crecimiento de la comprensión es necesario antes de pasar de cualquier nivel" (p.175).

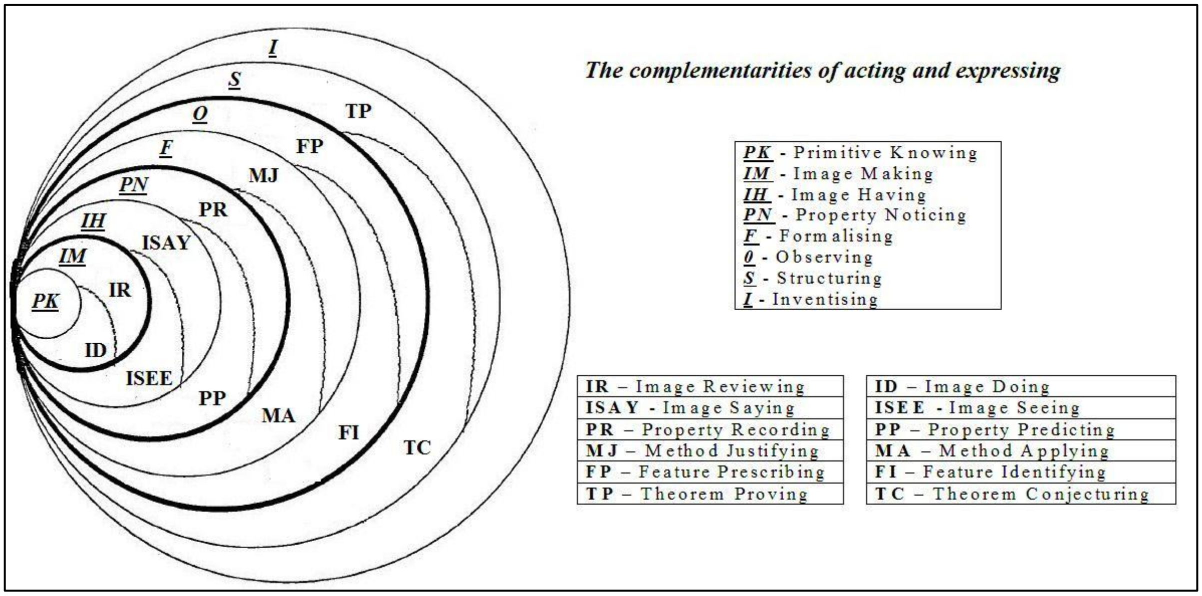


Figura 7. Característica de la complementariedad de la acción y la expresión del modelo de Pirie y Kieren.

Se refiere a que los estudiantes en cada uno de los niveles internos (excepto el primero y último) se ven en la necesidad de mostrar los progresos que tienen en dichos niveles, antes de avanzar al siguiente, realizando primero el actuar antes de expresar. Entendidas estas dos ultimas como lo mencionan Pirie y Kieren (1994) “En cualquier nivel, *actuar* abarca todo entendimiento previo, proporcionando continuidad con los niveles internos, y *expresar* da la naturaleza distinta a ese nivel particular” (p.175).

2.2.5. Aplicaciones del modelo teórico en la Educación Matemática

Desde que el modelo teórico fue propuesto, se ha utilizado para estudiar la comprensión matemática de diferentes conceptos como de: cálculo, estadísticos, algebraicos, geométricos, entre otros (Villa, 2011). Se ha utilizado como una herramienta para observar el comportamiento y organización de las estructuras de conocimiento matemático de los estudiantes frente al desarrollo de tareas matemáticas, en un periodo de tiempo determinado. Martin y Pirie (2003) discutieron sobre el crecimiento de la comprensión matemática de dos estudiantes, para lo que utilizaron un programa informático de representación gráfica que permitía explorar las propiedades de las ecuaciones cuadráticas. Consideraron que el estudio daría el mismo resultado si se utilizaran calculadoras gráficas.

En la misma línea, Villa (2011) indagó el proceso de comprensión de cuatro estudiantes, sobre la noción de tasa de variación como una manera de aproximación al concepto de derivada. Para ello, utilizó el software GeoGebra y el Modellus. Alude que a través de la interacción entre los software, los estudiantes y el investigador se promovió la comprensión matemática en las estudiantes.

Warner (2008) analizó la relación entre el comportamiento de los estudiantes en relación al crecimiento de sus ideas matemáticas. Este análisis lo realizó a través de un estudio de casos con estudiantes de diferentes niveles educativos en la resolución de problemas de combinatorias (estadística). Concluyó que a medida que la comprensión matemática del estudiante crece, hay un cambio general de sus comportamientos, ya que se cuestiona, explica y usa sus propias ideas y las de otros, implicando la creación de situaciones hipotéticas.

Por ultimo, Delgado et al. (2014) caracterizaron el proceso que seguían estudiantes universitarios para construir una serie numérica y determinar su convergencia. Para eso, analizan la actividad de los estudiantes cuando resuelven una tarea, comprobando la necesidad que presentan los estudiantes, para realizar un retroceso a niveles inferiores mediante el mecanismo "folding back". Encontraron que este mecanismo se puede presentar de diferentes formas.

Como se percibe, las aplicaciones del modelo teórico no se a utilizado como una herramienta para categorizar o ubicar al estudiante en un nivel de comprensión sino para conceptualizar, caracterizar y describir las estructuras de conocimiento matemático que tienen los estudiantes sobre un concepto matemático. Motivos de interés en utilizar el modelo como base teórica del estudio.

2.3. Uso del modelo y objetivos de la investigación

La investigación utiliza como base teórica el modelo de Pirie y Kieren (1994) puesto que, permite conocer la manera de proceder de los estudiantes. Permite describir el proceso de comprensión de un concepto matemático, cuando los estudiantes resuelven tareas de manera individual o colectiva (en grupos), ayudando de esta manera ha alcanzar el objetivo investigativo, que es *analizar el proceso de comprensión de los estudiantes de sexto grado de educación básica (primaria), cuando resuelven tareas sobre el concepto de fracción como razón*. Este objetivo se ha dividido en tres específicos que son:

- Conocer cuáles son las interpretaciones asociadas al concepto de fracción de mayor dificultad en el aprendizaje de los estudiantes de la educación básica (primaria).

- Identificar las dificultades que manifiestan los estudiantes de la educación básica (primaria) cuando resuelven tareas que aluden al concepto de fracción como razón.

- Analizar, por medio del modelo propuesto por Pirie y Kieren, el proceso que siguen cuatro estudiantes de sexto grado de educación básica (primaria), cuando resuelven dos tareas que aluden al concepto de fracción como razón.

Capítulo 3

Metodología de la Investigación

Capítulo 3. Metodología de la Investigación

Este capítulo contempla todo lo concerniente al diseño de la investigación, para dar respuesta a cada uno de los objetivos específicos en el que se dividió el objetivo general y a su vez dar respuesta a la pregunta de investigación plasmada. Se encuentra dividido en cinco fases: *la primera*, hace alusión a la delimitación de la interpretación asociada al concepto de fracción estudiada; *la segunda*, al rediseño de las tareas aplicadas; *la tercera*, hace referencia a la descripción del estudio de casos realizado, como la descripción de los participantes y los criterios de selección de los mismo; *la cuarta*, a la planificación y desarrollo de las sesiones trabajadas y *la quinta*, hace alusión a los aspectos metodológicos del análisis de la información. Antes de presentar en detalle cada una de las fases, se realiza un descripción general de la metodología implementada en el estudio.

3.1. Descripción general

La metodología de la investigación empleada en este estudio fue de tipo cualitativa, apoyada del método de estudio de caso lo que “Significa que el análisis de los datos se centra en un fenómeno seleccionado por el investigador para entenderlo, independientemente del número de escenarios o de participantes en el estudio” (McMillan y Schumacher, 2005, p.403). De esta manera se exploró, describió y explicó el desarrollo de la comprensión del concepto de fracción de dos parejas (cada pareja será un caso) de estudiantes de sexto grado de educación primaria mexicana.

La técnica empleada en la investigación fue la observación de campo, permitió realizar una observación directa y presencial de las acciones de los estudiantes en el aula de clases, plasmadas en notas de campo detalladas de dichos sucesos (McMillan y Schumacher, 2005). Las notas de campo fueron recolectadas teniendo como base una guía de observación diseñada por el investigador.

Para el cumplimiento del primer objetivo específico planteado, se hizo uso de la técnica del método de Delphi, que ayudó a determinar cuáles son las interpretaciones asociadas al concepto de fracción que presentan mayor dificultad para los estudiantes, desde la opinión de los docentes. Para el segundo objetivo específico, se rediseñaron dos tareas con base a las indicaciones que han reportado la literatura sobre una tarea matemática escolar. Para la realización del último objetivo específico se utilizó el modelo teórico de Pirie y Kieren (1994) con base en las características y niveles de acción del mismo.

De esta forma, se hace alusión al objetivo general de la investigación especificado en el capítulo 2, que permite dar respuesta a la pregunta de investigación que se plasmó en el capítulo 1. A continuación se detallan las cinco fases metodológicas empleadas en la investigación.

3.2. Aplicación de la técnica del método Delphi

En esta primera fase, se realizó un estudio en el año 2017 con el método Delphi (Landeta, 2012). Para determinar con qué interpretaciones asociadas al concepto de fracción se diseñaría el cuestionario a trabajar. Se recurrió a diversas investigaciones realizadas en México (Calderón, 2012; Bautista, 2013; Peláez, 2013). Se trataba de delimitar qué interpretaciones asociadas al concepto de fracción son más difíciles para los estudiantes de educación básica (primaria). A continuación se detalla paso a paso lo concerniente al estudio realizado que dio como resultado el cumplimiento del objetivo específico 1 de esta investigación.

3.2.1. Utilización del método Delphi

Para obtener una opinión grupal de alguna problemática en particular y que dicha opinión sea veraz, se puede acudir a la técnica del método Delphi. Linstone y Turoff (1975) definieron la técnica como un “Método de estructuración de un proceso de comunicación grupal que es efectivo a la hora de permitir a un grupo de individuos, como un todo, tratar un problema complejo” (p.3). Para Landeta (2002) “Es un proceso sistemático e iterativo encaminado hacia la obtención de las opiniones, y es posible del consenso, de un grupo de expertos” (p.32).

Este método, tiene cuatro características que lo hace ser una técnica grupal única a diferencia de otras; *el proceso iterativo*, las opiniones de los expertos se emiten en más de una ocasión; *anonimato de los participantes (expertos)*, los participantes del grupo se mantienen en completa discreción y ninguno de ellos debe conocer las respuestas particulares del otro (para guardar este anonimato y evitar confrontaciones entre ellos se recurre principalmente a un cuestionario); *retroalimentación o feedback controlado*, interacción de los resultados con todos participantes antes de continuar con un nuevo proceso de la problemática tratada y, *respuesta estadística de grupo*, se requiere para realizar y consolidar una estimación de cantidad numérica (fechas, puntuaciones, número de unidades, entre otras) de las respuestas de los participantes (Landeta, 2002).

El método Delphi tiene su propia metodológica que se caracteriza por ser flexible para el investigador, siendo éste autónomo en el desarrollo de la misma, siempre y cuando mantenga las características principales de la técnica, por lo menos el anonimato y el feedback controlado. "Esta técnica puede ser aplicada a diversos objetos de estudio, admitiendo adecuaciones de la dinámica habitual en función de los objetivos que en cada caso requieran alcanzarse mediante su utilización" (Landeta, 2002, p.49). El proceso o metodología habitual de la técnica nace con una problemática que el o los investigadores quieren abordar (grupo coordinador). Para ello, buscan el apoyo de un grupo de participantes (expertos) para exponerles la problemática del objeto de estudio a resolver. Luego, se procede con las característica de *proceso iterativo* y *feedback,* analizando las participaciones de los expertos para culminar con la estimación de los mismos frente al problema. Este proceso se puede ver también en la figura 8.

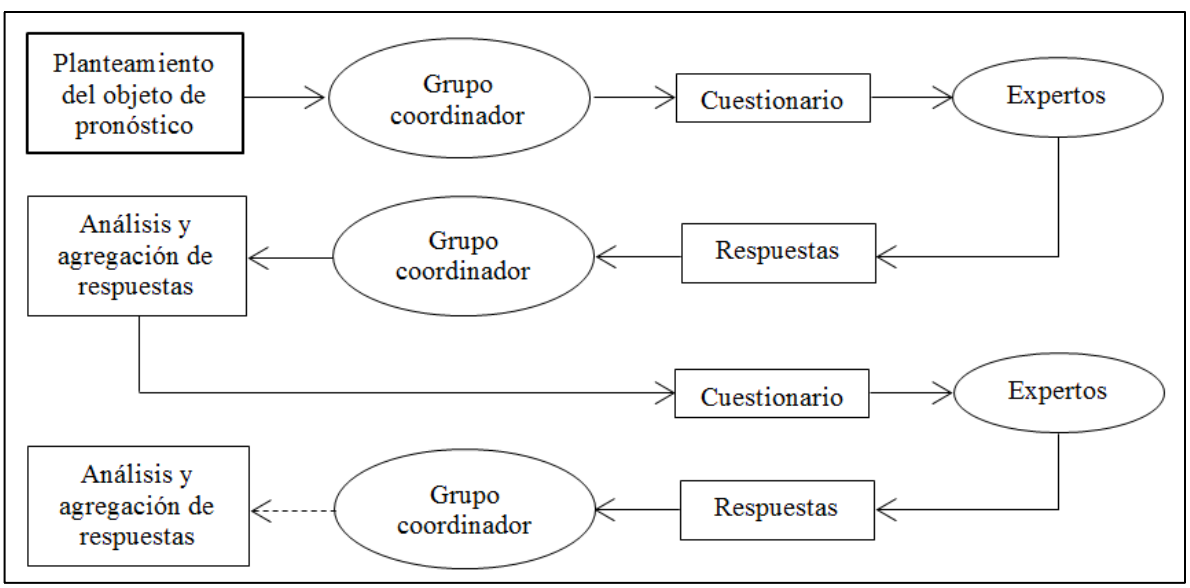


Figura 8. Proceso Delphi, esquema global (Tomado de Landeta, 2002, p.51)

El proceso descrito anteriormente, se realizó en la presente investigación para determinar cuáles son las interpretaciones asociadas al concepto de fracción que mayor dificultad presentan los estudiantes de la educación básica (primaria). Para eso, el grupo coordinador conformado por la directora de tesis y el autor de la misma, diseñaron un primer cuestionario (descrito en el apartado 3.2.2) que fue aplicado a un grupo de expertos (16 docentes en ejercicios de educación primaria). Al obtener las respuestas del cuestionario aplicado por primera vez, el grupo coordinador las analizó y con base en eso, reestructuraron el cuestionario (descrito en el apartado 3.2.3), que fue nuevamente aplicado al mismo grupo de expertos. Después de esta última recogida de información, el grupo coordinador analizó y realizó sus inferencias finales sobre el objetivo plasmado al inicio.

3.2.2. Diseño del cuestionario

Para el diseño del cuestionario, se tomaron como base los resultados de la investigación realizada por Calderón (2012) quien encontró nueve interpretaciones asociadas al concepto de fracción (parte todo, cociente, razón, operador, porcentaje, número racional, punto de una recta orientada, medida, decimales) presentes en los planes de estudios y libros de textos mexicanos 2011 de la educación básica (primaria). Algunas de esas interpretaciones, su definición no se encuentra presente de forma explícita, sino presentan una noción intuitiva o acercamiento al mismo.

El cuestionario presenta primero una introducción referente a la importancia del proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de fracción. Luego da a conocer el objetivo del mismo *"Obtener un mayor conocimiento intersubjetivo y prospectivo acerca de las fracciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje"*. También, presenta los resultados obtenidos en la investigación de Calderón (2012). Dando paso a la pregunta principal del cuestionario *¿Desde tu experiencia como docente, cuál de las siguientes interpretaciones asociadas al concepto de fracción has percatado que sean más difíciles de aprender por parte de los estudiantes?* Los docentes (expertos) tenían que calificar las nueve interpretaciones que se encontraban listados por medio de una escala de valores del 1 al 3 según el grado de dificultad, siendo 1 muy difícil, 2 de dificultad media y 3 poco difícil.

Estas escalas de valores fueron tomadas como referencia para que los docentes (expertos) no dejaran sin calificar ninguna de las interpretaciones y además porque el estudio realizado con la técnica del método Delphi tiene futuras repercusión en otra investigación a diferencia con el uso que se le dio en ésta. En la presente investigación solo se tendrán presentes los resultados que arroje la escala 1 de valores (muy difícil) puesto que hace alusión al objetivo con que se utiliza en esta investigación (objetivo específico 1).

El cuestionario (anexo A) incluía las definiciones y ejemplos de cada uno de las nueve interpretaciones, con el objetivo que los docentes (expertos) tuvieran alguna referencia a la hora de contestar el cuestionario, en caso que no recordaran dichas definiciones.

3.2.3. Rediseño del cuestionario

Con base en los resultados obtenidos de la aplicación del primer cuestionario al grupo de expertos (16 docentes de educación primaria), el grupo coordinador analizó las respuestas dadas y, rediseñaron el cuestionario (anexo B) manteniendo solo aquellas interpretaciones que fueron mayormente seleccionadas por el grupo de docentes. Se consideró el mismo interrogante del cuestionario anterior y las mismas escalas de valores pero para calificar esta vez sólo cinco interpretaciones (razón, operador, número racional, indicador de una cantidad (decimal), recta orientada) según la selección realizada.

3.2.4. Resultados del estudio realizado con el método Delphi

Los resultados obtenidos con la técnica Delphi se presentan en dos apartados correspondientes a cada una de las dos aplicaciones realizadas del cuestionario. Se han utilizado diagramas de barras que muestran las distribuciones de las frecuencias en función de la escala de valoración.

3.2.4.1. Resultados del primer cuestionario

En la siguiente gráfica (figura 9) se presentan los resultados del primer estudio. En ella se puede observar las tres escalas de valoración correspondientes a las respuestas de los docentes (expertos) en relación con el número de docentes que han utilizado cada una de estas respuestas. Hay que tener en cuenta que un mismo docente podía responder con un 3 en varias de las opciones (interpretaciones). En este estudio solo se van a utilizar los resultados obtenidos con la primera escala de valoración (muy difícil).

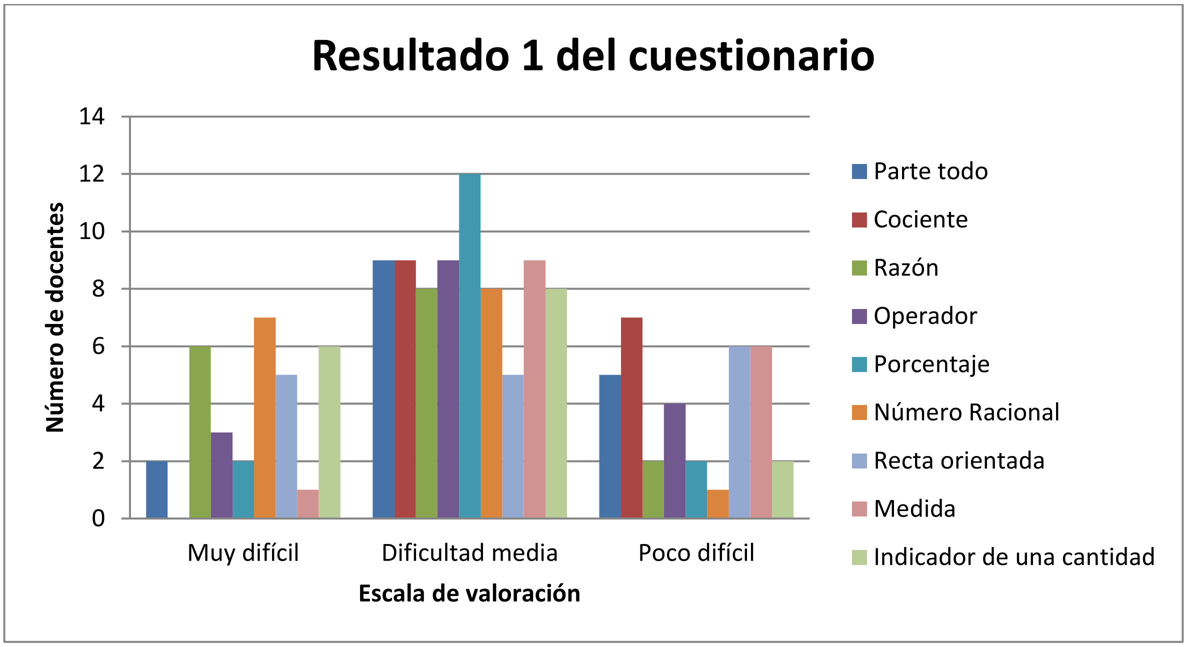


Figura 9. Primeros resultados del cuestionario.

Tomando solo la primera escala de valores (muy difícil) de la figura 9 se obtiene que de las nueve interpretaciones, cinco de ellas presentan mayor dificultad según los docentes de primaria, siendo la interpretación de la fracción como número racional el de mayor dificultad (7 docentes). Las interpretaciones de la fracción como razón y como indicador de una cantidad (decimal) fueron las dos siguientes (6 docentes). La siguiente interpretación con mayor dificultad es la fracción como recta orientada (5 docentes). Y por último, se tiene la interpretación de la fracción como operador (3 docentes).

Estos resultados se utilizaron para el rediseño del cuestionario. Es de resaltar que los cuestionarios aplicados a los 16 docentes fueron contestados de manera individual y que cada uno de ellos no conocía la respuesta o criterio de los otros docentes, cumpliendo así con una de las características de la técnica del método Delphi (anonimato).

3.2.4.2. Resultados del segundo cuestionario

El segundo cuestionario se realizó utilizando sólo las cinco interpretaciones en los que los docentes habían considerado que había más dificultad. Los resultados de esta segunda aplicación se pueden ver en la figura 10.

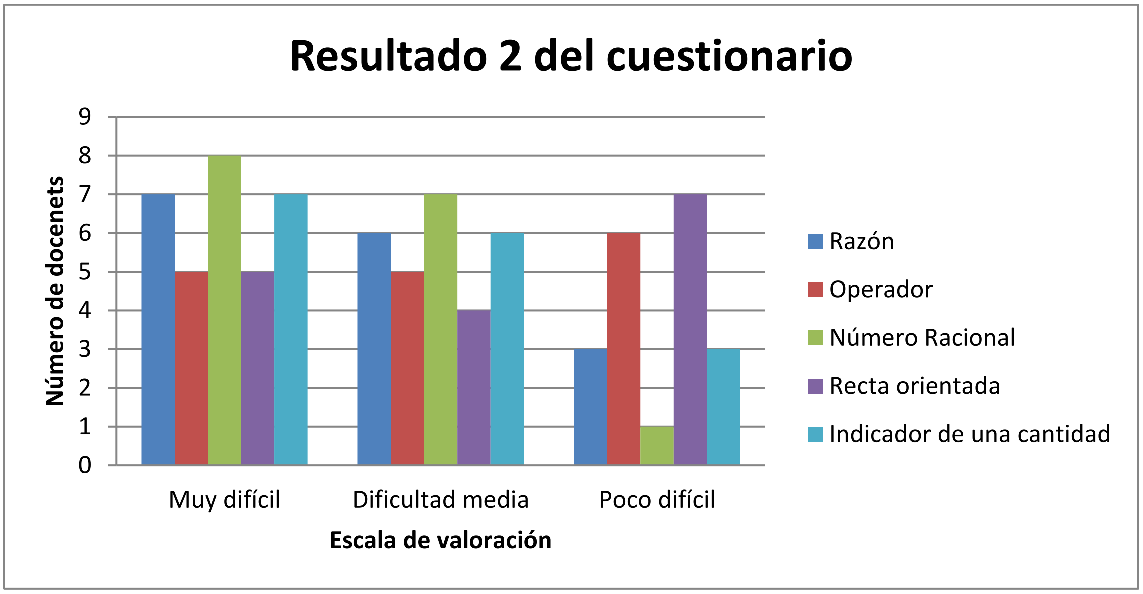


Figura 10. Segundos resultados del cuestionario.

Tomando solo la primera escala de valores (muy difícil) de la figura 10, se obtiene que de las cinco interpretaciones los docentes consideran que en tres de ellas los estudiantes presentan mayor dificultad. En primer lugar aparece la interpretación de la fracción como número racional con una frecuencia esta vez de 8 docentes de los 16 encuestados. Las interpretaciones de la fracción como razón y como indicador de una cantidad (decimal) también siguieron siendo las otras interpretaciones que se encuentran en segundo lugar con una misma frecuencia (7 docentes). Esta vez las interpretaciones de la fracción como recta orientada y como operador presentan también la misma frecuencia (5 docentes).

Se puede deducir que tres de las interpretaciones asociadas al concepto de fracción según los docentes encuestados, los estudiantes de primaria encuentran mayor dificultad: la fracción como número racional, la fracción como razón y la fracción como indicador de una cantidad (decimal).

3.2.5. Interpretación asociada al concepto de fracción utilizada para el estudio

Una vez determinados usando el método Delphi, las tres interpretaciones asociadas al concepto de fracción que mayor dificultad tienen los estudiantes mexicanos de la educación primaria según los docentes: como número racional, como razón y como indicador de una cantidad (decimal) se procedió a revisar el plan y programas de estudio 2011 y los libros de textos sexto grado (tanto para el estudiante como el maestro) en su segunda reimpresión en el año 2015 para el ciclo escolar 20016-2017, para determinar cuáles de las tres interpretaciones seleccionadas se iban a considerar en esta investigación.

Como resultado de la revisión realizada a los programas de estudios (tercero a sexto grado de primaria), se encontró que hasta el grado quinto no se especifica el uso del concepto de fracción como número racional. Es en el grado sexto de primaria cuando el programa de estudio en su bloque III, dentro del eje sentido numérico y pensamiento algebraico (tema número y sistema de numeración), hace alusión al concepto de fracción como número racional en uno de sus contenidos “Acercamiento a la propiedad de densidad de los racionales, en contraste con los números naturales” (p.77). Al encontrar este contenido se realiza una revisión de los libros de textos (distribución gratuita) de sexto grado de primaria (educación pública) tanto para el alumno como para el maestro y se tiene que no se define el concepto de fracción como número racional, sino que, como indica el contenido, se presenta es una noción intuitiva o acercamiento al mismo.

Al encontrar estos resultados también se opta por revisar el programa de estudio de 2011 de la educación básica secundaria (Matemáticas) y se encuentra que al concluir el tercer grado de secundaria (estudiantes de 14 y 15 años de edad) los estudiantes deben saber efectuar cálculos con expresiones algebraicas cuyos coeficientes sean números racionales, por tanto es evidente que es en la secundaria cuando los estudiantes trabajan formalmente la interpretación de fracción como número racional y no en la educación básica (primaria), en la cual solo se evidencia un acercamiento del mismo (sin definirlo) en el último año escolar (sexto grado). Por tanto, la interpretación de fracción como número racional no se tiene en cuenta para realizar en esta investigación.

En relación a las interpretaciones de la fracción como razón y como indicador de una cantidad (decimal), aparecen en los programas de estudios de educación primaria de manera formal. Por tanto se realizó una revisión del libro de sexto grado de la educación primaria (para el alumno y para el maestro), ya que a este grado va a corresponder la población a estudiar. Las dos interpretaciones aparecen definidas en el libro de texto versión para el maestro. La fracción como decimal, aparece en el bloque I en el tema números y sistemas de numeración. El libro de texto (para el maestro) presenta una característica de número decimal y también presenta la relación con los números fraccionarios "Los números decimales pueden ser representados mediante la expresión que usa el punto decimal o en forma de fracción decimal, cuyo denominador es o puede convertirse en una potencia de 10" (p.20). Algunos ejemplos que presentan son: el número decimal 0.25 puede expresarse así $\frac{25}{100}$ o $\frac{1}{4}$ (Rosales et al., 2015).

El concepto de fracción como razón, se presenta en el bloque III en el tema proporcionalidad y funciones. Su contenido hace referencia a la comparación de razones en casos simples. El libro de texto (para el maestro) presenta una característica de una razón y también presenta la relación con los números fraccionarios "Una razón puede representarse con un número entero, fraccionario, decimal o mediante un porcentaje" (p.162). Algunos ejemplos que presentan son: 2 de cada 5 estudiantes son hombres, la cantidad de hombres puede representarse como $\frac{2}{5}$, 0.4 o 40% (Rosales et al., 2015).

Las dos interpretaciones asociadas al concepto de fracción como razón e indicador de una cantidad (decimal) se presentan de manera explícita tanto en el programa de estudio como en los libros de texto del grado sexto de la educación básica (primaria). Además, como se ha visto, estas dos interpretaciones son los que mencionan los docentes de primaria en cuanto a que presentan mayor dificultad para los estudiantes (resultado del método Delphi).

Esta investigación se limita a estudiar el concepto de fracción como razón puesto que, como se quiere conocer el proceso de comprensión de los estudiantes, es conveniente analizarlo cuando los estudiantes lo estén tratando; y fue esta interpretación la que se encontraban estudiando en el bloque III del programa de estudio (SEP, 2011). De esta manera se deja espacio para futuras investigaciones tanto para el estudio de otras interpretaciones (como decimal), así como también para las otras tres (operador, número racional y recta orientada) que se seleccionaron para la aplicación de la segunda fase del método Delphi.

La fracción como razón, simboliza una relación de magnitud relativa entre dos magnitudes de la misma clase, esto es, dadas dos magnitudes (M_1 y M_2) y, dos cantidades de esas magnitudes a_1 y b_1 respectivamente, con b_1 como la unidad de medida. La razón de a_1 a b_1 puede entenderse como una especie de cuantificación o relación parte todo: la cantidad de magnitud a_1 expresa cuántas veces está contenida en la cantidad de magnitud b_1. En este sentido la fracción como razón, expresa una forma de comparación entre estas dos cantidades (Sánchez, 2013). Por ejemplo:

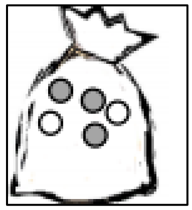


Figura 11. Ejemplo de la fracción como razón (Tomado de Rojas, 2010, p.24)

Dada una colección de objetos (canicas), presentados en la figura 11, se puede decir que: presenta dos magnitudes (canicas blancas y negras) y, dos cantidades de esas magnitudes (2 canicas blancas y 3 canicas negras) respectivamente. Las razones o relaciones que se pueden interpretar de la situación son:

- Con 3 como la unidad de medida se tiene que: las canicas blancas son $\frac{2}{3}$ de las canicas negras.
- Con 2 como la unidad de medida se tiene que: las canicas negras son $\frac{3}{2}$ de las canicas blancas.

3.3. Rediseño de las tareas

Una vez concluida la fase 1. Se seleccionaron dos tareas matemáticas, la primera de Rosales et al. (2015) y la segunda de Valverde (2012). El criterio de selección de cada una, se hizo en relación a la demanda del contenido curricular de México, específicamente tareas que aludieran a la comparación de razones matemáticas en casos simples. Posteriormente, ambas tareas fueron rediseñadas bajo el contexto educativo mexicano. Las adaptaciones realizadas, se presentan en los apartados 3.3.1 y 3.3.2 respectivamente de cada tarea.

Se entiende una tarea matemática escolar como una propuesta que realiza el docente o investigador (Cáceres et al., 2015), la cual solicita la actividad de los estudiantes en relación con algún tema o tópico matemático (Sullivan et al., 2015). La actividad es la acción que realiza el estudiante con respecto a la tarea (Moreno y Ramírez, 2016).

El papel de los docentes o investigadores es el de seleccionar, modificar, diseñar, rediseñar, proponer, implementar y evaluar tareas matemáticas (Sullivan et al., 2015). Los objetivos de las tareas deben guiar el aprendizaje matemático de los estudiantes, promover la comprensión de algún concepto matemático o favorecer el desarrollo de su pensamiento matemático y además, motivar el interés de los estudiantes por las matemáticas (Cáceres et al., 2015; Moreno y Ramírez, 2016).

Con el estudio y análisis del modelo teórico de Pirie y Kieren (1994), se concluye que las tareas que se les planteen a los estudiantes, deben ser un reto para los mismos y no deben ser evidentes, esto con el fin de obtener resultados óptimos sobre el proceso de comprensión de los estudiantes cuando las resuelven.

Para la complejidad cognitiva de las tareas se tuvo en cuenta el marco teórico de PISA (OCDE, 2006) adaptando los tres grupos de capacidades que describen las actividades cognitivas que los estudiantes puedan desarrollar al resolver una tarea: *el grupo de reproducción*, se encuentran aquellos ejercicios de reproducción de conocimientos, que permitan la realización de operaciones rutinarias que los estudiantes practican en clases; *el grupo de conexiones*, se abordan problemas cuyas situaciones no son rutinarias, presentan mayor exigencia para interpretarlos y muchas veces requieren que se establezcan conexiones entre las representaciones que presente la situación. Por último *el grupo de reflexión*, hace alusión a aquellos ejercicios que requieren que los estudiantes aporten elementos de reflexión sobre los procesos que utilizan al solucionar un problema, ya sea para justificar o llegar a alguna generalización de los resultados.

Antes de aplicar las dos tareas matemáticas rediseñadas a la población en estudio, se realizó una prueba piloto con dos grupos de estudiantes. Primeramente por un grupo de estudiantes de último grado de maestro en educación primaria de la Universidad de Salamanca, España. El otro fue un grupo de estudiantes de sexto grado de educación primaria de la ciudad de Chilpancingo diferente de la población estudiada en la investigación. Esta prueba piloto se realizó con dos objetivos, primero para estimar el tiempo de duración de la aplicación de las mismas y para verificar la redacción de las preguntas, ya que se busca que estas sean de fácil entendimiento para los estudiantes.

A continuación se presentan las dos tareas rediseñadas que hacen alusión al contenido matemático en estudio (concepto de fracción como razón), planteándose en situaciones públicas y personales de los estudiantes. Las tareas presentan conexiones con otros conceptos o procesos matemáticos que el estudiante ya ha estudiado (unidades de medida, cálculo de porcentaje, entre otros). El rediseño de las tareas se realizó bajo el conocimiento de las dificultades que la literatura ha reportado en relación al aprendizaje del concepto de fracción, de esta manera se hace alusión al objetivo específico dos de la investigación.

3.3.1. Tarea 1 "Qué cantidad de naranjas quiero"

Esta tarea fue tomada del libro *desafíos matemáticos, sexto grado* edición para el maestro (Rosales et al., 2015) y está presente en el bloque III desafío 49 (figura 12). La intención didáctica a la que hace referencia es que los estudiantes resuelvan el problema determinando una comparación entre las razones sin necesidad de realizar cálculos numéricos.

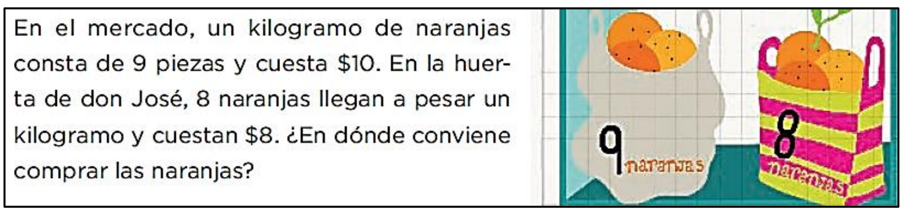

En el mercado, un kilogramo de naranjas consta de 9 piezas y cuesta $10. En la huerta de don José, 8 naranjas llegan a pesar un kilogramo y cuestan $8. ¿En dónde conviene comprar las naranjas?

Figura 12. Tarea original 1, seleccionada de Rosales et al. (2015).

Se realizaron cuatro cambios a la tarea original, uno ha sido adaptar la situación al contexto del estudiante, mencionando el nombre del mercado central de la ciudad de Chilpancingo. Otro fue cambiar una de las razones que va a ser objeto de comparación: en principio era $8:8$ y se sustituyó por $7:8$, debido a que si el estudiante decidiera buscar el valor en forma de fracción de la razón mediante una división, no tuviese confusión al elegir la mejor razón. En este caso $(8:8)$ el valor de cada naranja costaría $1 peso, pero el precio se ha dado por kilos y no por unidades de naranjas. El nombre de la tarea también se ha cambiado, puesto que el objetivo en esta investigación es diferente y no se quiere generar evidencias a los estudiantes a partir del nombre de la tarea. Como último cambio, en la tarea original solo había una pregunta general al problema; en cambio para el rediseño de la misma, se crearon seis preguntas más con el objetivo de hacerla más compleja para el estudiante.

La tarea (figura 13) presenta una situación que tiene conexión con la realidad que pueden encontrar los estudiantes fuera del aula de clase (plaza de mercado). La finalidad es que los estudiantes evalúen situaciones para elegir la razón más favorable en una comparación con la misma unidad de partida. La tarea se presenta en texto escrito (impreso). Los materiales y recursos que utilizaran los estudiantes para resolverla son: hojas de papel, lápiz grafito, goma (borrador) y sacapuntas.

Como se ha comentado, la tarea consta de siete preguntas. Con la (a), se busca que el estudiante identifique que ambas situaciones se expresan con la misma unidad de partida, por tanto se puede realizar una comparación de razones para poder elegir la mejor. Este ejercicio hace referencia a la dificultad que reporta la literatura que los estudiantes no saben interpretar o decidir cuál es la unidad de medida en juego en una comparación.

En el mercado Baltazar, un kilo de naranjas consta de 9 piezas y cuesta $10. Mientras que en la huerta de don José, un kilo consta de 7 piezas de naranjas y cuestan $8.

a) ¿Son comparables las dos situaciones? ¿Por qué?

b) Representen gráficamente las dos situaciones.

c) ¿Dónde comprarían las naranjas teniendo en cuenta la representación anterior? ¿Por qué?

d) Expresen verbalmente la relación entre las cantidades de cada una de esas situaciones y escriban en forma de fracción ambas relaciones.

e) Comparen las fracciones anteriores para determinar dónde es preferible comprar las naranjas. Justifiquen la respuesta.

Si en el mercado Baltazar el kilo de naranjas se oferta con un 20% de descuento en su precio normal.

f) ¿Cuál sería el nuevo costo de un kilo de naranjas? Describan paso a paso su respuesta.

g) Con ese descuento realizado en el mercado Baltazar ¿Dónde comprarían ahora el kilo de naranjas, huerta de don José o en el mercado? ¿Por qué?

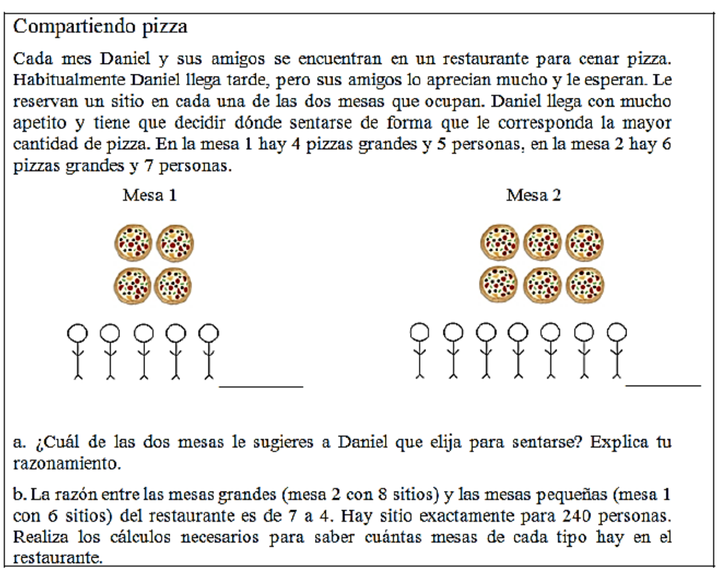
Figura 13. Tarea 1 “Qué cantidad de naranjas quiero”

Con la (b) se quiere comprobar si los estudiantes tienen dificultad para representar las fracciones con figuras estándar y además que trasciendan de la representación verbal del enunciado a la representación pictórica o gráfica utilizada por ellos. La (c) se diseñó con la finalidad de que los estudiantes a partir de representaciones creadas por ellos mismos, interpreten y comparen situaciones para elegir la mejor opción entre las razones.

La pregunta (d) se diseñó con la finalidad de que los estudiantes logren traducir una situación de la vida real a un lenguaje matemático (representación fraccionaria). La (e) para que los estudiantes pongan en juego sus habilidades, interpreten y argumenten las estrategias de comparación utilizadas para elegir la fracción mayor. En el caso de la (f), el estudiante debe utilizar operaciones rutinarias de conocimientos que ya ha estudiado (cálculo de porcentajes) para construir nuevas fracciones y la pregunta (g), se plantea para verificar la superación o no de la dificultad en la comparación de fracciones cuando se refieren a la misma unidad de medida y el costo en ambas es el mismo.

3.3.2. Tarea 2 “Comparto, disfruto y aprendo”

La tarea fue tomada de una investigación doctoral del departamento de didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, España. Fue adaptada por Valverde (2012) de otras investigaciones realizadas, las cuales se mencionan en su tesis doctoral. El objetivo de la misma, era que los estudiantes disciernan entre las situaciones planteadas cual ofrece más ventaja para comer pizza.


Compartiendo pizza

Cada mes Daniel y sus amigos se encuentran en un restaurante para cenar pizza. Habitualmente Daniel llega tarde, pero sus amigos lo aprecian mucho y le esperan. Le reservan un sitio en cada una de las dos mesas que ocupan. Daniel llega con mucho apetito y tiene que decidir dónde sentarse de forma que le corresponda la mayor cantidad de pizza. En la mesa 1 hay 4 pizzas grandes y 5 personas, en la mesa 2 hay 6 pizzas grandes y 7 personas.

Mesa 1 Mesa 2

a. ¿Cuál de las dos mesas le sugieres a Daniel que elija para sentarse? Explica tu razonamiento.

b. La razón entre las mesas grandes (mesa 2 con 8 sitios) y las mesas pequeñas (mesa 1 con 6 sitios) del restaurante es de 7 a 4. Hay sitio exactamente para 240 personas. Realiza los cálculos necesarios para saber cuántas mesas de cada tipo hay en el restaurante.

Figura 14. Tarea original 2, seleccionada de Valverde (2012).

En el rediseño se realizaron seis cambios a la tarea original, uno es el nombre de la tarea, otro la sustitución del nombre del personaje principal que menciona la situación y además, se anexa un nombre al restaurante. Otro cambio, es que se adecuó al contexto mexicano para un mayor entendimiento del enunciado por parte de los estudiantes. También, se elimina la representación gráfica de las dos situaciones que planteaba la tarea, ya que se busca que sean los estudiantes los que generen esas representaciones. Como último cambio, se adicionaron siete preguntas a las dos propuestas en la tarea original.

La tarea (figura 15) presenta una situación que tiene conexión con la realidad que pueden encontrar los estudiantes fuera del aula de clase (restaurante de pizza) y se establece en un contexto menos familiar. La finalidad es que los estudiantes apliquen estrategias de comparación entre razones matemáticas para elegir la mejor opción. La tarea se presenta en texto escrito (impreso). Los materiales y recursos que utilizarán los estudiantes para resolverla son: hojas de papel, lápiz grafito, goma (borrador) y sacapuntas.

La tarea consta de nueve preguntas. La (a) requiere que los estudiantes representen gráficamente las dos situaciones de cada mesa antes que María elija donde sentarse, lo cual busca que el estudiante tenga una idea general y deduzca a partir de eso que pasaría si María se decide por alguna de las mesas. También, fue pensada para identificar la dificultad de utilización de figuras estándar que los estudiantes presentan según el reporte de la literatura. En el (b) se les pide que representen gráficamente la situación de la mesa 1 pero con la condición que María haya elegido dicha mesa. Se busca que los estudiantes utilicen su razonamiento y comparen las dos situaciones mediante la representación que realizaron en el ejercicio anterior.

Cada mes María y sus amigos se encuentran en el restaurante la Alamedilla para cenar pizza. Habitualmente María llega tarde, pero sus amigos la aprecian mucho y la esperan. Le reservan un sitio en cada una de las dos mesas que ocupan. . En la mesa 1 hay 4 pizzas grandes (sin partir) y 5 personas, en la mesa 2 hay 6 pizzas grandes (sin partir) y 7 personas.

a) Representen gráficamente la situación de cada mesa antes de que llegue María.

María llega con mucho apetito (hambre) y tiene que decidir dónde sentarse de forma que le corresponda la mayor cantidad de pizza

b) Representen gráficamente la situación que resulta si María decide sentarse en la mesa 1.

c) ¿Qué cantidad de pizza le corresponden a cada uno, si María eligió sentarse en la mesa 1? Justifiquen su respuesta.

d) Ahora, representen gráficamente la situación que resulta si María decide sentarse en la mesa 2.

e) Siendo así, ¿Qué cantidad de pizza le corresponden a cada uno, si María eligió sentarse en la mesa 2? Justifiquen su respuesta.

f) ¿Cuál de las dos mesas le sugieren a María que elija para sentarse? Expliquen su razonamiento.

g) Supongan que María seleccionó la mesa 1, en la cual agregan 2 pizzas a las 4 que ya tenían. Para mantener el mismo reparto que tenían anteriormente ¿Cuál será el número de personas que deberían agregarse? Expliquen su razonamiento.

h) Si María eligió la mesa 2, llegaron 4 amigos más y quieren comer la misma cantidad de pizza que antes ¿Cuántas pizzas más deben comprar? Expliquen su respuesta.

i) Si se quiere colocar 240 personas en mesas grandes (para 8 personas) y mesas pequeñas (para 6 personas) manteniendo una proporción de 7 mesas grandes a 4 pequeñas ¿Cuántas mesas de cada tipo se necesitan?

Figura 15. Tarea 2 “Comparto, disfruto y aprendo”

Con la (c) se busca que los estudiantes establezcan la razón matemática que resulta de la situación de la mesa 1 si María la eligió, con relación a la cantidad de pizza por el número de personas. En la (d) y (e) se les plantean las mismas preguntas que en los ejercicios (b) y (c) respectivamente, pero en relación a la situación que resulta de la mesa 2 si María se decide sentar en la misma. En los cuatro ejercicios anteriores se busca que los estudiantes por medio de representaciones establezcan relaciones entre las cantidades que se presentan en cada una de las situaciones planteadas.

La pregunta (f) requiere que los estudiantes razonen y argumenten cual es la mejor opción que tiene María para sentarse y pueda comer más pizza. La idea principal es que la determinen por medio de las representaciones que construyeron anteriormente o que utilicen alguna estrategia de comparación de razones.

Las preguntas (g) y (h) requieren por parte de los estudiantes una mayor comprensión de la noción de razón, mostrando igualmente un pensamiento proporcional de mayor nivel, ya que el estudiante debe reconocer que si en la mesa 1 se agregan 2 pizzas se deben agregar 3 personas para mantener la misma proporción inicial que tenían $\left(\frac{2}{3}\right)$. Lo mismo pasaría con el ejercicio (h) que se les plantea lo contrario. Al llegar 4 personas más a la mesa 2 se debería agregar 3 pizzas más para mantener el mismo reparto que tenían anteriormente $\left(\frac{3}{4}\right)$.

Con la (i) se busca que los estudiantes interpreten, razonen y argumenten la situación que se les planteó, utilizando estrategias de repartos para determinar el número de personas que se deben de sentar en cada una de las mesas (grandes y pequeñas), manteniendo una proporción de 7 mesas grandes a 4 pequeñas.

Con relación a las dificultades que se quieren identificar en los estudiantes se encuentran: el reconocimientos de esquemas en los ejercicios (c) y (e), la gestión autónoma o espontánea de esquemas, figuras o modelos con los ejercicios (a), (b) y (d). Y la realización de operaciones con números fraccionarios en (g), (h) y el (i).

3.4. Descripción de los participantes del estudio de caso

Esta tercera fase, comprende la descripción de los participantes, los criterios de selección de los mismos y el contexto del estudio. A continuación se presentan detalladamente estos apartados.

3.4.1. Participantes

En el estudio de caso, han participado cuatro estudiantes inscritos al grado sexto de la educación básica (primaria) mexicana de una escuela de la ciudad de Chilpancingo de los Bravo, Guerrero. Dos de ellos presentaban desempeño académico alto (pareja 1) y los otros dos (pareja 2) rendimiento académico bajo (evidencia por la parte académica de la institución), criterios por el cual fueron seleccionados y además por su disposición y por su actitud de participación en el aula de clases. Cada pareja de estudiante es un caso estudiado, la pareja 1 corresponde al primer caso (C1) y la pareja 2 al segundo (C2). Fueron asignados códigos para cada estudiante según el caso que conformaban, al caso 1 se les asignó los códigos E1 (estudiante 1) y E2 (estudiante 2), para el caso 2 fueron E3 (estudiante 3) y E4 (estudiante 4). La tabla 7 recopila una descripción general de los casos a estudiar.

Tabla 7
Descripción de los participantes del estudio de caso.

Participantes	Código	Caso	Característica	Edad	Sexo
Estudiante 1	E1	C1	Rendimiento académico alto	11 años	Masculino
Estudiante 2	E2			11 años	Femenino
Estudiante 3	E3	C2	Rendimiento académico bajo	11 años	Masculino
Estudiante 4	E4			11 años	Femenino

3.4.2. Contexto del estudio

El estudio de caso se realizó en el grado sexto de la educación básica que es el último grado del 3er periodo escolar y con él se da por culminada la educación básica (primaria) en México. Los participantes estaban cursando el ciclo escolar 2017-2018, y se encontraban trabajando el bloque III del programa de estudio de 2011, el cual presenta la definición formal del concepto de fracción como razón. Uno de los contenidos que abordaron hace referencia a la comparación de razones en casos simples. Por tanto, se espera que los estudiantes tengan conocimiento del tema a estudiar.

El aula habitual de clases de los cuatro participantes, tiene un total de 41 estudiantes y el docente que les imparte sus clases es licenciado en educación primaria, el cual cuenta con 12 años de experiencia en el área.

3.5. Descripción de la planificación y el desarrollo de las sesiones

En esta cuarta fase, se presentan los aspectos metodológicos para la planificación de la experimentación, la recogida de la información y se da a conocer la fiabilidad y validez de la investigación, en referencia a la recogida de los datos y los instrumentos utilizados. A continuación se presentan detalladamente estos apartados.

3.5.1. Planificación y desarrollo de las sesiones

Este aparado hace referencia a la planificación y desarrollo de las sesiones a trabajar con los dos casos en estudio (dos parejas). La planificación se llevó a cabo en dos etapas que se desarrollaron de la siguiente manera: primero, se solicitó permiso de colaboración a la institución con sus respectivos estudiantes y cuerpo de docentes. De acuerdo con los docentes y una observación participante realizada por el investigador durante una semana dentro del aula de clases, se seleccionan los dos casos que son objeto de estudio y que van a resolver dos tareas.

La observación realizada por el investigador hace alusión a la primera etapa de la planificación y dicha observación tuvo como objetivo identificar en los estudiantes una buena actitud de dialogo e intervención durante las clases para la selección de los dos casos a estudiar. La segunda etapa consta de la resolución de las tareas y se desarrolló en dos sesiones correspondientes a la resolución de cada tarea por cada pareja de estudiantes. Además, cada sesión se dividió en dos momentos asociados a la pareja que estaba resolviendo la tarea. A continuación se describe la segunda etapa de la planificación correspondiente a la sesión uno de la resolución de las tareas.

En el primer momento, se aplicó la tarea 1 a la pareja (E1 y E2) correspondiente al primer caso. Durante la recogida de datos se encontraban presente en la sala, el docente encargado del aula, los dos estudiantes y el investigador. A cada estudiante se le asignó una escarapela (gafete) con su código (E1 y E2) con el fin de identificarlos durante la recogida y análisis de los datos por parte del investigador. El segundo momento, corresponde a la aplicación de la misma tarea 1, pero esta vez a la pareja (E3 y E4) correspondiente al segundo caso, realizando el mismo proceso descrito anteriormente. Cada momento se había planificado para una hora de duración, en la cual los estudiantes tenían que resolver la tarea en las hojas de trabajo suministradas por el investigador.

La segunda sesión, constaba de la resolución de la tarea 2 por parte de las dos parejas, desarrollándose en los mismos dos momentos de la sesión uno. En el aula que designó la institución para el desarrollo del estudio, se colocaron estratégicamente las cámaras de videos y audio que utilizaron los investigadores para la recogida de la información. Durante el desarrollo de cada una de las sesiones de resolución el investigador tomaba sus notas de campos registradas en la guía de observación diseñada. En la figura 16 se presenta de manera resumida la perspectiva global de la planificación y el desarrollo de las sesiones.

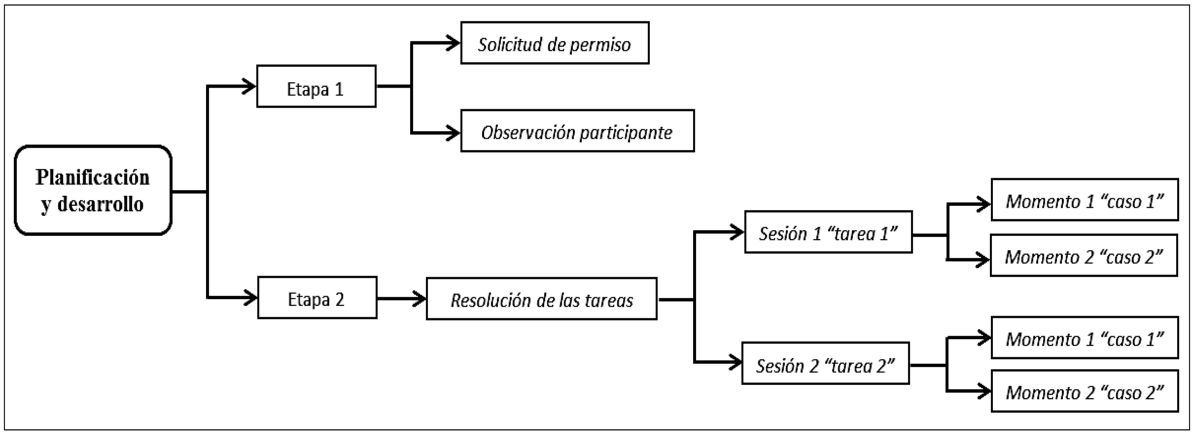


Figura 16. Planificación y desarrollo de las sesiones.

3.5.2. Recogida de la información

Para obtener la información de las actuaciones de los estudiantes cuando resolvían las tareas planteadas, se realizó una observación de campo y se realizó una grabación en video y audio de la interacción en cada pareja. Esta grabación se transcribió en su totalidad para posteriormente poder analizar las intervenciones de los estudiantes. También, se recogieron las hojas de trabajo de los estudiantes. Durante el proceso de aplicación se toman notas de campo orientadas por una guía de observación diseñada por el investigador. A continuación (tabla 8) se describe la técnica e instrumentos de recogida de la información durante el estudio de caso.

Tabla 8
Descripción de la técnica y los instrumentos de la recogida de la información.

Técnica o instrumento	Descripción
Observación de campo	Permitió realizar una observación directa y presencial de las acciones de los estudiantes durante el desarrollo de las tareas, recopilando en la guía de observación (anexo E) aquellas acciones que tal vez las grabaciones y las hojas de trabajo no pueden captar de las acciones de los estudiantes.
Grabaciones de video y audio y su transcripción	Contiene las evidencias visuales y auditivas de las acciones de los estudiantes durante el desarrollo de las tareas, respaldan los datos obtenidos en las hojas de trabajo, con el fin de profundizar en los procesos utilizados por los estudiantes durante el desarrollo de las tareas.
Hojas de trabajo	Contienen la información escrita de los estudiantes sobre su proceso a la hora de resolver las tareas plasmadas.
Entrevista	Permitió indagar a los estudiantes sobre las conclusiones que abordaron en cada una de las resoluciones de las tareas, con base en los escritos de sus hojas de trabajos.

Se realizaron las transcripciones de los videos. En esta tarea se designó el mismo código a los casos estudiados (pareja 1: C1; pareja 2: C2) al igual que a los estudiante, colocando la letra E seguida del número 1 al 4 según correspondía al estudiante (E1; E2; E3; E4), de esta manera se asociaba a cada caso de estudio con los miembros del mismo. Por ejemplo, estudiante E2 del C1. Luego, se organizan en tablas las transcripciones realizadas por cada uno de los casos, con el fin de obtener una imagen global de los datos obtenidos de las producciones de videos.

Los datos que se recogieron informan sobre: el proceso de desarrollo del conocimiento matemático que muestran los estudiantes en relación con el concepto de fracción como razón, así como la pertinencia o no pertinencia de las tareas escolares matemáticas implementadas.

3.5.3. Fiabilidad y validez de la investigación

En relación con la fiabilidad y validez de la investigación, se indica que el estudio realizado presenta la descripción detallada de todos los procesos de planificación, la puesta en práctica y análisis de los datos recolectados. En relación al análisis de los datos, se realizó una triangulación tanto de las fuentes de recolección de datos como de investigadores.

De fuentes porque se utilizaron tres fuentes de datos: las grabaciones de audio y vídeo, las hojas escritas de cada pareja de estudiantes y las notas de campo. De investigadores porque se contrastó con las directoras de la investigación dicho análisis. De esta manera se realiza la validez de todas las intervenciones de los estudiantes cuando resolvían las tareas, dejando plasmado la veracidad de la investigación.

3.6. Aspectos metodológicos del análisis de la información

Esta quinta fase, presenta los aspectos metodológicos que se utilizaron para el análisis de los datos recogidos durante la implementación de las tareas. Para ello se tuvieron en cuenta los resultados obtenidos con la técnica (observación de campo) y cada uno de los instrumentos utilizados (grabaciones de video y audio, hojas de trabajos de los estudiantes, entrevistas y guía de observación). Estos datos, se confrontaron, interpretaron y se analizaron en relación con las características y niveles de acción del modelo teórico de Pirie y Kieren. Todo ese proceso se realizó conjuntamente con las asesoras de la investigación y el estudiante investigador (triangulación de la información).

Para analizar cada uno de los datos recolectados (hojas de trabajos, notas de campo, entrevistas, transcripciones de audio y la visualización de las grabaciones) teniendo en cuenta las características y niveles de acción del modelo propuesto por Pirie y Kieren, se realizaron de forma separada en relación con cada una de las tareas, analizando cada caso por separado. El análisis de la tarea 1 se organizó en 2 partes diferenciadas que se corresponden con: *elección de la mejor razón* y *comparación de razones*. Mientras que el análisis de la tarea 2 se organizó en 3 partes correspondiente con: *elección de la mejor razón*, *identificación de la razón* y *estrategias de reparto*. Dichas categorías de análisis, se obtuvieron de acuerdo a las respuestas dadas por los estudiantes durante el desarrollo de las tareas y los objetivos de las mismas. Por último, se contrastan los análisis realizados para comparar los dos casos por cada una de las tareas (tabla 9), presentado en una síntesis general.

Tabla 9
Análisis de la información recolectada

Sesiones	Tarea	Casos	Fechas (Individual)	Fechas (Contraste)
1	"Qué cantidad de naranjas quiero"	C1	14/02/18	02/03/18
		C2	22/02/18	
2	"Comparto, disfruto y aprendo"	C1	05/03/18	23/04/18
		C2	02/04/18	

El análisis de las dos sesiones se organizó en una tabla de análisis (anexo F) diseñada por el investigador. En ella se presenta el extracto de la producción con indicación del momento temporal correspondiente a su grabación, el nivel que se asigna en relación al modelo teórico y por último la justificación del mismo. Se presenta el proceso de la comprensión de los estudiantes (capítulo 4) en torno al concepto de fracción en cuanto su interpretación como razón en relación a cada uno de los dos casos con sus respectivas tareas. Por ejemplo, caso 1, tarea 1 y tarea 2.

Capítulo 4

Análisis del proceso de compresión a través del modelo de Pirie y Kieren

Capítulo 4. Análisis del proceso de compresión a través del modelo de Pirie y Kieren

El análisis de la discusión de las dos parejas que resolvieron las tareas descritas en el apartado 3.3 de la metodología, se ha organizado en dos apartados por caso de estudio (C1 y C2). En cada uno de ellos, se presenta el análisis de las actividades desarrolladas por cada pareja respectivamente. Para organizar y describir mejor el trabajo realizado por los estudiantes en relación al desarrollo de cada tarea matemática, estas se dividen en partes diferenciadas de acuerdo a las respuestas dadas por los estudiantes y los objetivos de las tareas, las cuales se presentan en cada una de las tareas. Por último, se presenta una síntesis en relación al proceso realizado por los estudiantes, extrayendo conclusiones comparativas y semejantes de ambos casos en estudio.

4.1. Estudiantes del caso 1 (C1)

Este primer apartado hace referencia al análisis realizado a los estudiantes del caso 1 en estudio, los cuales presentaban rendimiento académico alto (E1 y E2). A continuación se presenta el análisis de la comprensión, es decir, se presenta el análisis del proceso de las estructuras del conocimiento de los estudiantes del caso 1, con base en el modelo teórico de Pirie y Kieren (1994) al resolver las dos tareas en torno al concepto de fracción como razón.

4.1.1. Tarea 1 "Qué cantidad de naranjas quiero"

El análisis de la tarea 1 se organizó en 2 partes diferenciadas: elección de la mejor razón y comparación de razones.

4.1.1.1. Elección de la mejor razón.

La pareja de estudiantes (caso 1) inicialmente leen por separado y con detenimiento el enunciado de la tarea, fijándose en los datos que plantean las dos situaciones presentadas:

> En el mercado Baltazar, un kilo de naranjas consta de 9 piezas y cuesta \$10. Mientras que en la huerta de don José, un kilo consta de 7 piezas de naranjas y cuestan \$8.

Todo con el objetivo de fijarse que las dos situaciones son comparables, puesto que comparten la misma unidad de medida. Los estudiantes no logran identificar o interpretar dicha unidad de partida de ambas situaciones. Lo primero que establecen es encontrar el valor por unidad de naranja en cada una de las dos situaciones, por lo que comienzan enfrentándose al problema desde el nivel *Image Making*.

E2: *Tenemos que saber qué cuesta cada naranja aquí y aquí…* [Señala los datos que se presenta en la tarea en relación con las dos situaciones].

E1: ¡*Sí! Tenemos que hacer las fracciones* [se refieren a estas representaciones $\frac{9}{10}$ y $\frac{7}{8}$].

Con este diálogo que los estudiantes establecen entre ellos, se dan cuenta de cómo pueden representar las dos situaciones, utilizando sus capacidades y conocimientos para realizar acciones físicas que les permite crear una nueva idea de las situaciones que se les plantea en la tarea. Estas imágenes que los estudiantes expresan mediante el lenguaje les permite acceder a un nivel exterior de comprensión *Image Having*, en el que van a ser capaces de actuar sobre sus representaciones mentales, sin necesidad de objetos concretos puesto que ya tienen la imagen de la construcción.

Los estudiantes, realizaron primero una representación simbólica de las dos situaciones, pero como se percibe en la figura 17, no logran identificar la unidad de partida (unidad de medida: kilo), sino que buscaban conocer el valor de cada unidad de naranja, por eso expresan la relación del costo total por el número de naranjas.

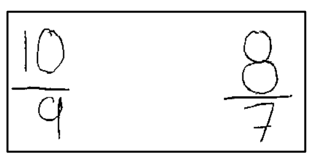


Figura 17. Representación simbólica de los estudiantes caso I, tarea 1, categoría 1.

En este momento ya saben cuáles son los datos de los que disponen, cómo los están relacionando y pueden escoger la estrategia que les permita resolver la tarea. Dicha estrategia que utilizan es la realización de la operación de división para encontrar el valor de cada unidad de naranjas en cada caso. Este procedimiento da evidencia que han alcanzado el nivel *Property Noticing*.

E1: *Hay que dividir 10 entre 9 y 8 entre 7.*

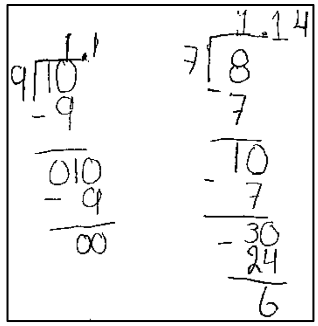


Figura 18. Proceso matemático de los estudiantes caso I, tarea 1, categoría 1.

E1: Y*o digo que en el mercado Baltazar es más económica, porque cada naranja cuesta $1,1 y en la huerta de don José cada naranja cuesta $1,14. Así que creo que conviene más esta* [señala la operación realizada con 10/9]

E2: *¡Sí! es que cada naranja está más barata aquí* [señala el proceso realizado con la situación del mercado] *que acá* [señala proceso realizado con huerta de don José].

Los estudiantes empiezan a realizar abstracciones sobre el proceso matemático que utilizaron, lo que indica que empiezan a avanzar hacia el nivel de *Formalising*, pero nuevamente van a crear una figura de las situaciones *(Image Having)*, una representación pictórica que asocian al resultado encontrado en el proceso matemático utilizado. Se puede identificar que se desencadenó un *Folding Back*, ya que los estudiantes retroceden a un nivel inferior que ya habían superado, pero como se percibe se regresan con una comprensión más sólida y lo que hacen es asociarlo a las abstracciones realizadas.

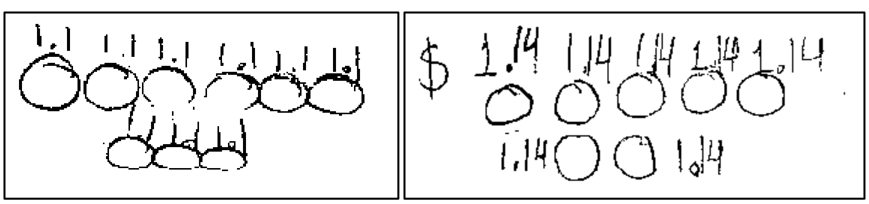


Figura 19. Representación pictórica de los estudiantes caso I, tarea 1, categoría 1.

Se observa que los dos estudiantes trabajan sobre la misma hoja de trabajo. E2 representa la situación del mercado Baltazar y E1 la situación de la huerta de don José.

E1: *Cada uno hagamos una representación* [se refieren a la figura 17].

E1: *Yo hago está…* [Señala el proceso realizado con la situación de la huerta de don José].

E2: *Son solo siete naranjas* [expresó al observar que E1 había representado ocho circunferencias que utilizaron para representar las naranjas].

E1: *¡Ah sí son siete!...* [E1 empieza a borrar una circunferencia (naranja) cuando E2 le expresa que dibujó una de más].

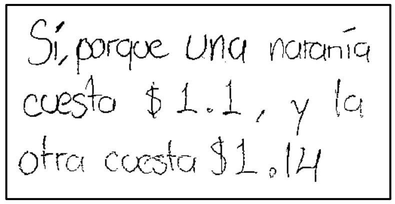


Figura 20. Abstracciones realizada por los estudiantes caso I, tarea 1, categoría 1.

E1: *Mira cada una cuesta $1,1* [señalando la representación que había realizado E2 de la situación del mercado Baltazar, arriba de las circunferencias (naranjas) los estudiantes le colocaron el valor de cada naranja que encontraron en el proceso anterior].

Los estudiantes abstraen información de la nueva representación pictórica. Lo que da evidencia que vuelven al nivel *Property Noticing*. Determinan que el mercado Baltazar conviene comprar las naranjas. Los estudiantes no logran alcanzar el nivel *Formalising*, puesto que las conclusiones que obtienen son erróneas. Los estudiantes desde un principio no identificaron la unidad de partida en las que se daban ambas situaciones.

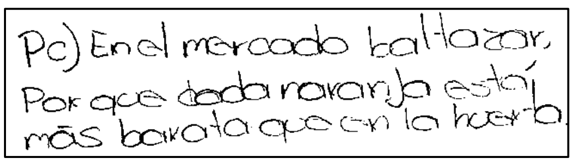


Figura 21. Conclusión de los estudiantes caso I, tarea 1, categoría 1.

En la siguiente figura se puede ver el proceso que han seguido los estudiantes en la categoría de análisis 1 de la tarea 1 "elección de la mejor razón matemática".

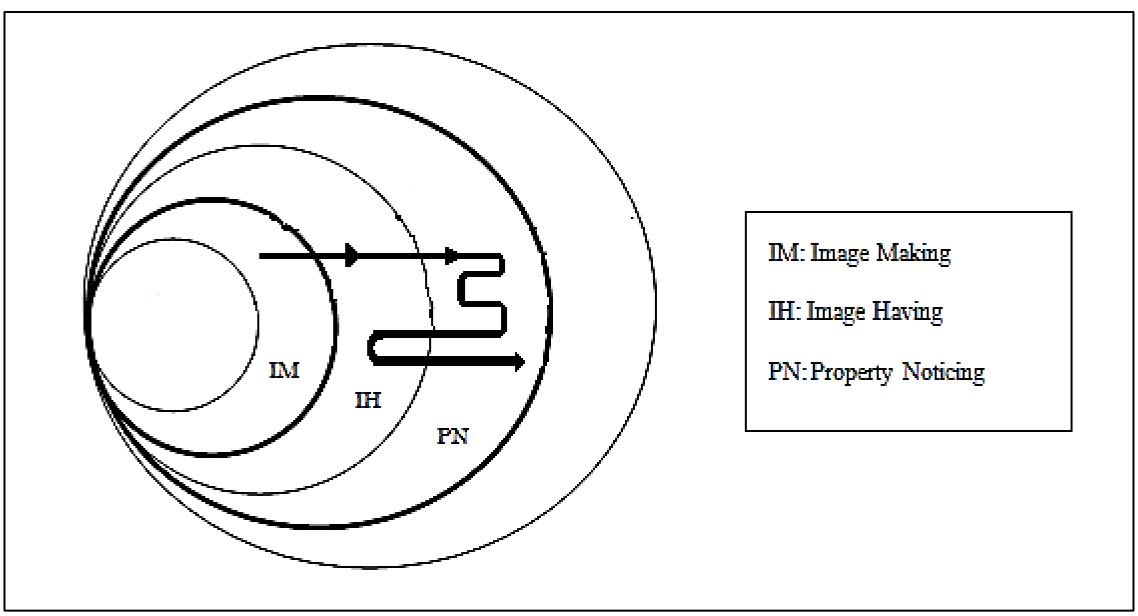


Figura 22. Estructura de conocimiento de los estudiantes caso I, tarea 1, para elegir la mejor razón.

4.1.1.2. Comparación de razones

Una de las finalidades de la tarea 1 era que los estudiantes identificaran la unidad de partida de las dos situaciones, que en este caso sería el kilo de naranja en ambas, lo que las convertiría en dos situaciones comparables. Siendo así, los estudiantes decidieran según sus estrategias de comparación elegir la mejor razón matemática que les convendría. Además, se quiso mantener la misma unidad de medida en ambas situaciones, es decir, que ambas situaciones ofrecieran su kilo de naranjas al mismo precio, manteniéndose las cantidades de naranjas del planteamiento inicial.

Para eso, se consideró un descuento del kilo de naranjas en el mercado Baltazar. Los estudiantes son cuestionados con la siguiente condición:

> Si en el mercado Baltazar el kilo de naranjas se oferta con un 20% de descuento en su precio normal ($10) ¿Cuál sería el nuevo costo de un kilo de naranjas? Con ese descuento realizado en el mercado Baltazar ¿Dónde comprarían ahora el kilo de naranjas, huerta de don José o en el mercado? ¿Por qué?

Lo primero que establecen los estudiantes es encontrar el valor del descuento que se realizaría con la oferta, por lo que comienzan enfrentándose al problema desde el nivel *Primitive Knowing*, ya que utilizan sus conocimientos en relación a dicho proceso.

E1: *Lo primero que tenemos que hacer es…*
E2: *Sacar el porcentaje del precio anterior.*
E1: *Si ajá… ¿De este precio?* [Señala el costo de la huerta de don José $8].
E2: *No, ¿De diez no? Por qué dice: si en el mercado Baltazar el kilo de naranjas se oferta con un 20%...*
E1: *Entonces es esta* [señala el costo del mercado Baltazar] *¡Ah! Sí. Es diez*.

Inmediatamente la pareja de estudiantes, como ya sabían cuáles eran los datos a utilizar, escogen una estrategia para calcular el 20% de $10. Durante la entrevista realizada a los estudiantes, ellos expresan que este proceso utilizado fue explicado por su profesor para obtener el porcentaje de una cantidad numérica, el cual consiste en realizar una descomposición aditiva en porcentajes más fácil de calcular, tal como se evidencia en la figura 23. Este proceso realizado por los estudiantes da evidencia que han alcanzado el nivel *Property Noticing*, sin pasar por los dos niveles anteriores (*Image Making & Image Having).*

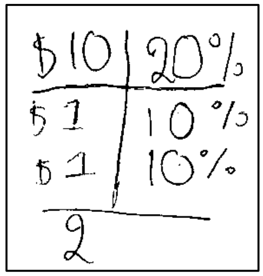


Figura 23. Proceso para calcular el 20% de $10 de los estudiantes caso I, tarea 1, categoría 2.

Después que los estudiantes realizaron el proceso aprendido en clase para calcular el porcentaje de una cantidad numérica, empiezan a abstraer información de dicho proceso, en donde obtienen el nuevo costo de las naranjas en el mercado Baltazar con el descuento ofertado.

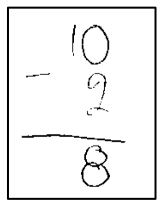


Figura 24. Operación realizada por los estudiantes caso I para saber el nuevo costo, tarea 1, categoría 2.

E1: *Es $2 el descuento… ¿y luego se lo restamos?*
E2: *Sí, a diez le restamos dos.*
E1: *El nuevo precio es $8.*

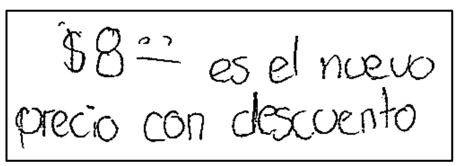


Figura 25. Respuesta de los estudiantes caso I, con base al nuevo costo del kilo de naranjas, tarea 1, categoría 2.

Con el nuevo precio del kilo de naranjas ofertadas en el mercado Baltazar, los estudiantes tenían que decidir dónde comprar ahora las naranjas, si en la huerta de don José o en el mercado. Para eso, realizan una representación simbólica de la nueva situación con descuento en el mercado, donde expresan una relación del costo del kilo de naranjas con el número total de naranjas. Para ello, realizan un *Folding Back*, para representar la nueva situación que obtuvieron con el descuento realizado en el mercado Baltazar. Encontrándose ahora en el nivel de *Image Having*, mediante la representación simbólica de la situación.

E1: *En el mercado Baltazar nuevamente ¿no? Porque ya tendríamos un descuento.*

E2: *Pero tenemos que hacer esto* [señala el proceso que realizaron anteriormente para conocer el valor de cada unidad de naranja] *porque aquí ya cuesta esto* [señala el nuevo costo del kilo de naranjas con el descuento realizado] *y aquí cuesta menos.*

E2: *Entonces sería ocho noveno ¿no? Volvamos hacer la fracción y la división.*

E1: *Ajá.*

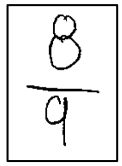


Figura 26. Representación simbólica de la nueva situación de los estudiantes caso I, tarea 1, categoría 2.

Inmediatamente, los estudiantes relacionaron la actividad con la realizada anteriormente para encontrar el valor por unidad de cada naranja y utilizan la misma estrategia para resolver la tarea. Dicha estrategia es la realización de la operación de división. Este proceso realizado por los estudiantes da una evidencia de que han alcanzado nuevamente el nivel *Property Noticing*.

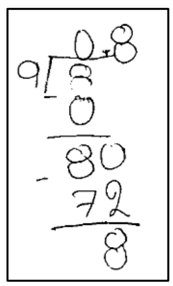


Figura 27. Proceso matemático para calcular el costo de las naranjas por unidad de los estudiantes caso I, tarea 1.

Finalmente, los estudiantes sintetizan la información del proceso realizado y se desligan por completo de la imagen concreta considerando el concepto como objeto formal, determinando dónde les conviene comprar las naranjas después del descuento realizado en el mercado Baltazar, lo que indica que se encuentran en el nivel *Formalising*.

E1: *Ahora cuesta cada naranja $0,8 así que…*

E2: *En el mercado la naranja está más abarata que antes.*

E1: *Ajá. Sí. En el mercado.*

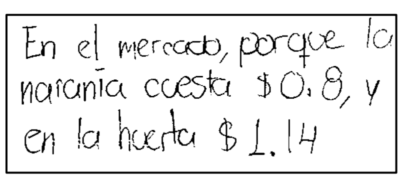


Figura 28. Respuesta de los estudiantes del caso I en relación a su proceso realizado, tarea 1, categoría 2.

En la siguiente figura se ilustra el proceso seguido por los estudiantes en este último apartado de la tarea 1.

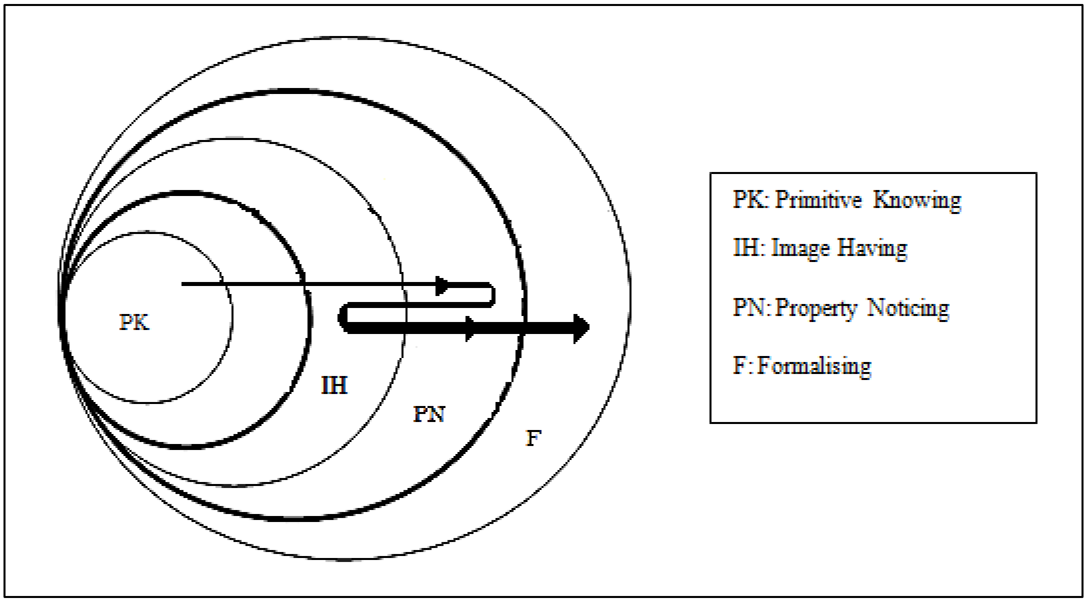


Figura 29. Estructura de conocimiento para elegir la mejor razón con el descuento realizado, caso I, tarea 1.

4.1.2. Tarea 2 "Comparto, disfruto y aprendo"

El análisis de la tarea 2 se organizó en 3 partes diferenciadas: elección de la mejor razón, identificación de la razón y estrategias de reparto. A continuación se presentan dichos análisis.

4.1.2.1. Elección de la mejor razón.

La pareja de estudiantes (caso 1) se notaban tranquilos y confiados en la resolución de la tarea 2, se organizan como equipo y es E2 quien lee en voz alta el enunciado de la tarea:

> Cada mes María y sus amigos se encuentran en el restaurante la Alamedilla para cenar pizza. Habitualmente María llega tarde, pero sus amigos la aprecian mucho y la esperan. Le reservan un sitio en cada una de las dos mesas que ocupan. En la mesa 1 hay 4 pizzas grandes (sin partir) y 5 personas, en la mesa 2 hay 6 pizzas grandes (sin partir) y 7 personas. María llega con mucho apetito (hambre) y tiene que decidir dónde sentarse de forma que le corresponda la mayor cantidad de pizza.

Lo primero que hacen los estudiantes es analizar detalladamente las dos situaciones (mesa 1 y mesa 2) que les brinda la tarea.

E1: *Lee tú.*
E2: *Ok, yo leo…* [Empieza a leer].
E1: *¿Tenemos que hacer la fracción?*
E2: *Tenemos que representar gráficamente.*

Empiezan resolviendo la tarea relacionando cada situación de las mesas con alguna representación. Esto da evidencia, según el modelo de Pirie y Kieren, que los estudiantes relacionaron el objeto matemático con la creación de una representación pictórica de las dos situaciones, por tanto empiezan resolviendo la tarea desde el nivel *Image Making*.

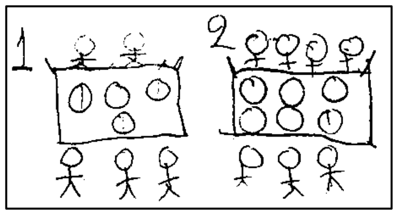


Figura 30. Representación pictórica de los estudiantes caso I, tarea 2, categoría 1.

E1: *Así* [dibujan dos rectángulos que para ellos representan las mesas].
E2: *Sí. Aquí van cuatro pizzas* [señala la representación de la mesa 1].
E1: *¿Y aquí?* [Señala la representación de la mesa 2].
E2: *Seis* [se refiere a las pizzas de la mesa 2].
E2: *Aquí van cinco personas* [señala la representación que construyen de la mesa 1].
E1: *¿Incluyendo a María?*
E2: *No, sin María.*
E2: *En la otra son siete* [se refiere al número de personas en la mesa 2, sin María].

Los estudiantes se percatan que teniendo la representación pictórica de las dos situaciones tenían que anexar en cada una de ellas a María y fraccionar cada una de las pizzas de tal manera que a cada persona le correspondiera la misma cantidad de pizzas. Todo con la finalidad de determinar cuál de las dos mesas es la más conveniente para María. Antes de fraccionar las pizzas en cada mesa y agregar a María en ellas, los estudiantes realizaron otro tipo de representación en este caso una representación simbólica de las dos situaciones. Se puede interpretar en relación al modelo de Pirie y Kieren que los estudiantes avanzaron al nivel *Image Having*, estas primeras representaciones que realizaron los estudiantes la hacen considerando que María no había seleccionado ninguna de las dos mesas todavía.

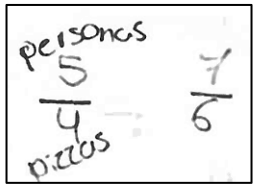


Figura 31. Representación simbólica de los estudiantes caso I, tarea 2, categoría 1.

E1: *Tenemos que… operar. Para saber dónde nos conviene para comer más pizza.*
E2: *Sí, dónde nos conviene para comer más pizza.*
E1: *Hay que hacer las fracciones.*
E1: *Realiza las fracciones* [le entrega el lápiz a E2].
E2: *¿Cinco cuartos?* [Se refiere a la situación de la mesa 1].
E1: *Sí.*
E1: *Estas serían las pizzas* [se refiere al denominador].
E2: *Y arriba las personas* [se refiere al numerador].

Se observa que los estudiantes deciden realizar una división, lo que es una evidencia que han alcanzado el nivel *Property Noticing*, ya que trabajan sobre la representación que ya poseen.

Sin embargo, como se puede ver en la figura 31, los estudiantes en lugar de distribuir a las personas (denominador) con relación al número de pizzas (numerador) $\frac{4}{5}$ y $\frac{6}{7}$, lo hacen al revés.

E1: *¡Ya! ¿Tenemos que dividir no?*
E1: *¿Cuántas personas serían?*
E2: *Aquí serían seis con ella* [se refiere al número de personas de la mesa 1 agregando a María].
E1: *Ajá, pero en cuánto la vamos a dividir* [se refiere a fraccionar la pizza de la mesa 1].
E1: *Hay que dividir. Divídelas tú* [se refiere a fraccionar la pizza de la mesa 1].
E2: *Dividir está* [señala la representación de la mesa 1].
E1: *Sí.*

Es así como los estudiantes realizan el algoritmo de dividir 6 entre 4 (ya incluyen a María en la mesa 1), se percatan que el cociente de la misma es 1,5. Lo que conlleva a que los estudiantes expresen que no puede ser así, ya que le tocaría a cada persona una pizza y media, y solo tienen cuatro pizzas para seis personas. Por tanto, se dan cuenta que la razón debe realizarse al contrario, 4 entre 6 (ya incluyendo a María en la mesa 1). Borran el proceso algorítmico que trabajaron y realizan una nueva división.

E1: *Dividamos así* [realiza la operación aritmética de división de 4 entre 6].
E2: *Sí. Cuatro entre seis.*

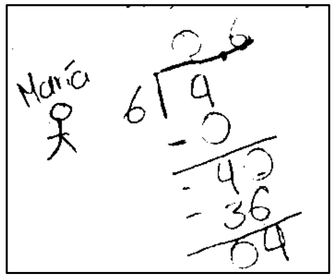


Figura 32. Proceso matemático de los estudiantes caso I, tarea 2, mesa 1, categoría 1.

Los estudiantes obtienen información del proceso matemático que utilizaron anteriormente, encontrando la cantidad en que deben de fraccionar cada pizza de la mesa 1. Después, los estudiantes realizan otra representación de la situación de la mesa 1, esta vez con base al resultado obtenido, representando las cuatro pizzas con una circunferencia y cada una de ellas las fraccionan en seis partes iguales. Se puede identificar que se desencadenó un *Folding Back*, ya que los estudiantes retroceden a un nivel inferior que ya habían superado, pero se percibe que regresan con una comprensión más sólida y lo que hacen es asociarlo a las abstracciones realizadas. Encontrándose ahora en el nivel de *Image Having.*

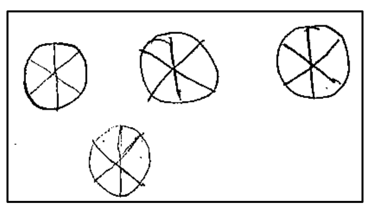


Figura 33. Representación pictórica de los estudiantes caso I, tarea 2, mesa 1, categoría 1.

E2: *Habría que partir cada pizza entre seis* [se refiere a fraccionar cada pizza en seis partes].
E1: *Sí. Hay que partirla.*
E1: *¿Hacemos las cuatro?* [Se refiere a representar las cuatro pizzas].
E2: *Sí, las cuatro.*

Los estudiantes determinan el total de porciones que obtienen al fraccionar cada pizza entre seis partes iguales. Determinan cuántas porciones de pizza le corresponderían a cada persona en la mesa 1, si María decidiera sentarse en dicha mesa. Para eso vuelven a utilizar la operación aritmética de división para obtener este valor. Esto da evidencia que los estudiantes se encuentran nuevamente en el nivel *Property Noticing*, ya que obtienen información de su representación y trabajan sobre ella.

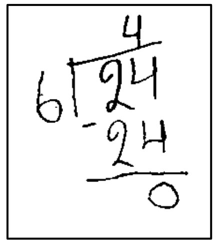


Figura 34. Segundo proceso matemático de los estudiantes caso I, tarea 2, mesa 1, categoría 1.

E1: *Seis por cuatro, veinte. ¿Dividimos veinte entre seis personas?* [El estudiante realiza esta operación al observar la representación que construyeron de la mesa 1 ya fraccionada].
E2: *No, seis por cuatro es veinticuatro.*
E1: *Seis, doce, dieciocho, veinticuatro* [el estudiante suma cada pizza fraccionada].
E1: *¿Dividimos veinticuatro entre seis no?* [Se refiere al total de porciones de pizzas entre el total de personas de la mesa 1].
E2: *Sí entre seis.*

Los estudiantes han avanzado hacia el nivel de *Formalising*, puesto que dejan de inferir en relación a la imagen que crearon y presentan sus conjeturas finales.

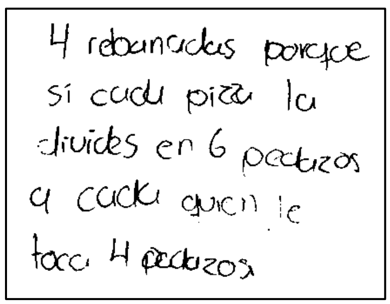


Figura 35. Abstracciones realizada por los estudiantes caso I, tarea 2, mesa 1, categoría 1.

E1: *¿La pizza tiene seis porciones?*
E2: *No es así, les tocaría de cuatro porciones a cada uno.*
E1: *Entonces sería está* [señala la representación de la mesa 1].
E2: *Sí. En la mesa 1 le tocaría a cada persona de cuatro porciones.*

Después que los estudiantes realizaron su proceso de comprensión en relación a la situación de la mesa 1, optan por realizar el mismo proceso para la mesa 2. Realizan el proceso de dividir 6 pizzas entre 8 personas (ya incluyendo a María en la 2) para saber cómo fraccionar cada pizza, encontrándose en el nivel *Property Noticing*. Realizan la representación pictórica de las 6 pizzas fraccionadas entre sietes partes iguales. Se evidencia que realizan el *Folding Back* y vuelven al nivel *Image Having*. Los estudiantes han interpretado mal la fracción, lo correcto sería fraccionar las seis pizzas en ocho partes iguales.

E2: *Lo mismo que hicimos con la mesa 1.*
E1: *Sí hay que dividir las personas…*
E2: *No, primero se dividen las pizzas entre las ocho personas.*
E1: *Bueno, se divide seis pizzas entre… ¿Qué?*
E2: *Entre ocho.*
E1: *Pero ¿no son siete personas?*
E2: *Entre ocho, porque si María se sienta en la mesa 2.*
E1: *Sí. Entonces seis entre ocho.*

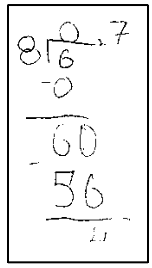


Figura 36. Proceso matemático de los estudiantes caso I, tarea 2, mesa 2, categoría 1.

E1: *Las pizzas se dividen en siete partes* [se refiere a fraccionarlas en siete partes iguales]. *Hay que hacer las pizzas* [se refiere a representarlas].

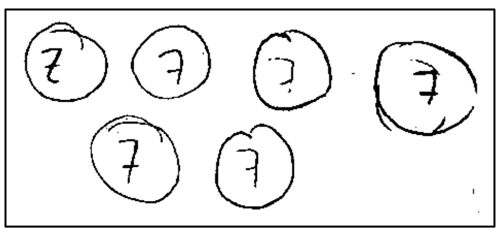


Figura 37. Representación pictórica de los estudiantes caso I, tarea 2, mesa 2, categoría 1.

Posteriormente, los estudiantes empiezan a obtener información de sus procesos utilizados y saben el total de porciones que tienen si fraccionan cada pizza de la mesa 2 en siete partes iguales. Después buscan conocer cuántas porciones de pizza de tocaría a cada persona de la mesa 2 si María decide sentarse en ella. Para eso, utilizan el proceso de dividir 42 porciones de pizzas entre las 8 personas. Ahora se puede interpretar que los estudiantes vuelven al nivel *Property Noticing*. Se observa que los estudiantes utilizan el *mismo proceso de comprensión* utilizado en la situación de la mesa 1.

E2: *Entonces siete por seis son cuarenta y dos* [se refiere al total de porciones que obtiene al fraccionar cada una de las seis pizzas en siete partes].
E1: *Sí* [mientras realiza la operación de multiplicar siete por seis].

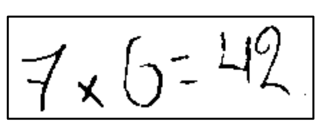


Figura 38. Proceso multiplicativo de los estudiantes caso I, tarea 2, mesa 2, categoría 1.

E2: *Eso lo dividimos entre ocho.*

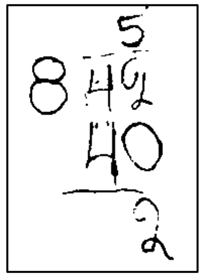


Figura 39. Segundo proceso matemático de los estudiantes caso I, tarea 2, mesa 2, categoría 1.

Finalmente, se observa que los estudiantes abstraen información del proceso de división y determinan cuantas porciones de pizza le corresponde a cada persona en la mesa 2 si María decidiera sentarse en ella.

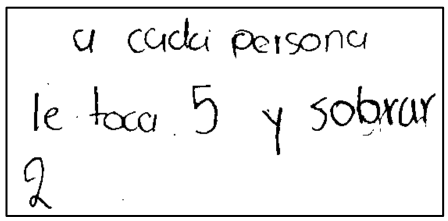


Figura 40. Abstracciones realizada por los estudiantes caso I, tarea 2, mesa 2, categoría 1.

E1: *Entonces cada quien va a tomar cinco porciones.*
E2: *Sí, pero tenemos que ver si son cinco.*
E1: *¿Cinco por cuantos son?*
E2: *Sería por ocho, entonces les sobran dos porciones.*
E1: *Sí, porque cinco por ocho son cuarenta… tenemos cuarenta y dos porciones, por tanto sobran dos. 20*
E1: *Entonces a cada uno le tocan cinco porciones y sobran dos.*

Se puede observar que a los estudiantes, al obtener la distribución de las 6 pizzas para 8 personas, les sobran dos porciones si fraccionan cada pizza en 7 partes, ya que interpretaron mal la fracción. Esto se debe a que los estudiantes tienen marcado los procesos matemáticos y no matematizan con la realidad de la situación que se les presenta (6 pizzas para 8 personas).

Después de obtener la distribución de las pizzas en relación a las personas en ambas mesas si María eligiera sentarse en alguna de ellas, los estudiantes debían de responder a la siguiente pregunta *¿Cuál de las dos mesas le sugieren a María que elija para sentarse?* Deduciendo cuál sería la mejor razón en dicho caso para María. Los estudiantes dan su respuesta con base a los procesos realizados en ambas mesas. Eligiendo ahora la mesa que más le conviene a María para poder comer más pizza. Los estudiantes no alcanzaron el nivel *Formalising.* Ya que, a pesar de que seleccionaron la mejor situación para que María comiera más pizza. El proceso de comparación entre las dos razones matemáticas, no lo han hecho bien. Puesto que, interpretaron mal la fracción de la situación de la mesa 2 y por tanto, comparan número de trozos de diferentes tamaños.

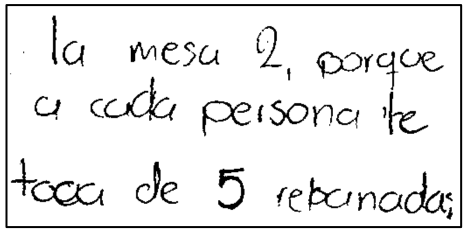


Figura 41. Respuesta final de los estudiantes caso I, tarea 2, categoría 1.

E2: *Entonces, en la mesa número dos le conviene sentarse a María.*
E1: *Ajá en la mesa dos.*

En la siguiente figura se puede ver el proceso que han seguido los estudiantes en la categoría de análisis 1 "elección de la mejor razón matemática" tarea 2.

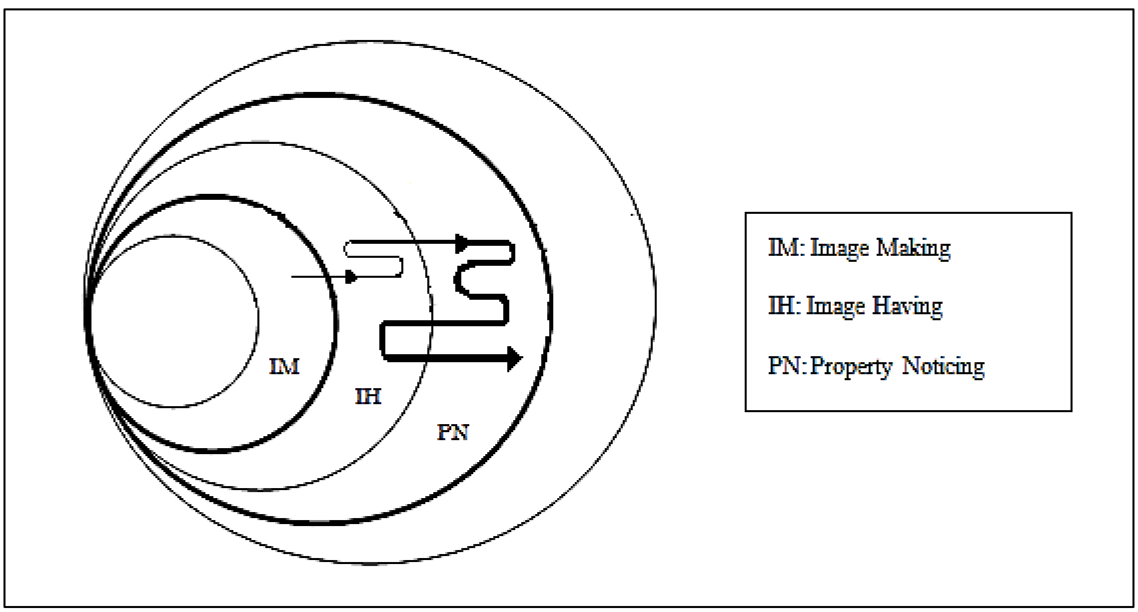


Figura 42. Estructura de conocimiento de los estudiantes para elegir la mejor razón, caso I, tarea 2.

4.1.2.2. Identificación de la razón

Al culminar con uno de los propósitos de la tarea 2 (comparar razones matemáticas para elegir la mejor opción) se quiso, que los estudiantes identificaran la relación que presentan ambas razones matemáticas. Se requiere lograr una mayor comprensión de la noción de razón, mostrando igualmente un pensamiento proporcional de mayor nivel, ya que el estudiante debe reconocer que si en la mesa 1 se agregan 2 pizzas se deben agregar 3 personas para mantener la misma proporción inicial que tenían $\left(\frac{2}{3}\right)$. En la mesa 2 al llegar 4 personas más a la mesa 2 se debería agregar 3 pizzas más para mantener el mismo reparto que tenían $\left(\frac{3}{4}\right)$.

Para eso, se les presenta la siguiente situación a los estudiantes, en el caso de la mesa 1:

> Supongan que María seleccionó la mesa 1, en la cual agregan 2 pizzas a las 4 que ya tenían. Para mantener el mismo reparto que tenían anteriormente ¿Cuál será el número de personas que deberían agregarse? Expliquen su razonamiento.

Lo primero que realizan los estudiantes es una representación pictórica de la nueva situación, lo que hacen es agregar dos pizzas más a las cuatro que ya tenía, como se los indica la tarea. Esto da evidencia de que los estudiantes empiezan a resolver esta nueva interrogante desde el nivel *Image Having*. Luego, empiezan a abstraer información de la imagen y deciden fraccionar las dos pizzas agregadas en las mismas seis partes que lo habían realizado.

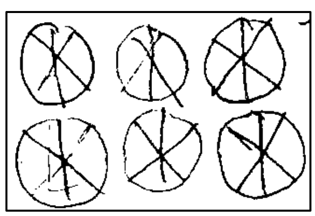


Figura 43. Representación pictórica de los estudiantes caso I, tarea 2, mesa 1, categoría 2.

E2: *Agrégale ahora dos pizzas a está* [señala la representación que habían realizado de la mesa 1 ya fraccionada].

E1: *Seis por seis es treinta y seis* [se refiere a las seis unidades de pizzas fraccionadas cada una en seis partes].

E2: *Se agregan tres personas* [lo expresa al contar las doce porciones agregadas].

E1: *Porque le toca cuatro porciones a cada persona ¿no?* [Lo expresa con base al resultado obtenido].

E2: *Sí.*

De inmediato los estudiantes demuestran saber cuántas personas deben de agregarse deduciendo esto de sus abstracciones realizadas con base a la representación pictórica, pero realizan el proceso matemático de división para poder asegurar sus deducciones. Esto da evidencia que los estudiantes se encuentran ahora en el nivel *Property Noticing*, ya que trabajan con la imagen que poseen. En la entrevista realizada, los estudiantes expresan que con ayuda de la representación y el tanteo obtuvieron sus resultados.

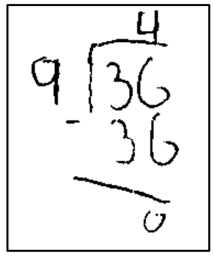


Figura 44. Proceso matemático de los estudiantes caso I, tarea 2, mesa 1, categoría 2.

E1: *¿Dividimos?* [Lo expresa para comprobar la respuesta que ya habían deducido].
E2: *Sí.*
E1: *¿Cuánto es? Treinta y seis entre nueve ¿no?*
E2: *Sí.*
E1: *Pero todavía no sabíamos cuántas personas teníamos que agregar.*
E2: *No… por eso, para ver si son las tres personas que tenemos que agregar, si ya sabemos cuántas porciones son.*

Finalmente, los estudiantes se desprenden de la imagen con que representaron la relación de la mesa 1 y fueron capaces de formalizar su comprensión en relación a que se deben de agregar tres personas a las seis que ya se tienen incluyendo a María, para poder mantener el mismo reparto (cuatro porciones cada persona) que tenían anteriormente, pero ahora con seis pizzas. Se puede interpretar que los estudiantes alcanzaron el nivel de *Formalising*.

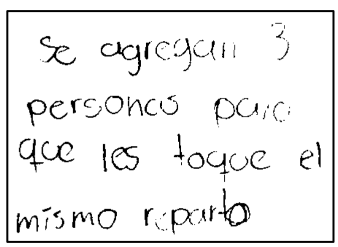


*Figura 45.*Respuesta final de los estudiantes caso I, tarea 2, mesa 1, categoría 2.

E1: *Si así es* [lo expresa al terminar el proceso de división].
E1: *Entonces se agregarían tres personas.*

En el caso de la mesa 2 para que los estudiantes identificaran la relación entre números de pizzas y personas, se les presenta la siguiente situación:

> Si María eligió la mesa 2, llegaron 4 amigos más y quieren comer la misma cantidad de pizza que antes ¿Cuántas pizzas más deben comprar? Expliquen su respuesta.

Los estudiantes empezaron a resolver este interrogante de la misma manera que procedieron con la situación de relación de la mesa 1. Primero los estudiantes analizaron el enunciado que les proporcionó la tarea para determinar cuántas pizzas se debían agregar a las seis que se tienen, pero con la condición de un total de doce personas. Para ello, los estudiantes deciden realizar el mismo proceso que utilizaron en la relación de la mesa 1, pero esta vez sería determinar lo contrario. Realizan una representación pictórica de la situación de la mesa 2, dibujando las doce personas e inicialmente las seis pizzas con las que contaban. Esto da evidencia que los estudiantes empiezan a resolver la tarea desde el nivel *Image Having*.

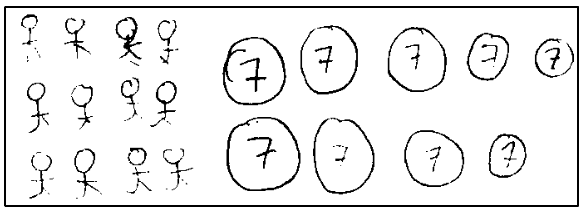


Figura 46. Representación pictórica de los estudiantes caso I, tarea 2, mesa 2, categoría 2.

E1: *Se tienen que agregar a los amigos para saber cuántas pizzas son.*
E2: *No las pizzas, porqué se tiene que saber cuántas pizzas más se tiene que comprar.*
E1: *¿Entonces serían doce personas verdad?*
E2: *Sí. Doce personas.*
E1: *Si en la mesa 2 estaban siete personas…*
E2: *En la mesa 2 son siete personas y con María serian ocho.*
E1: *Entonces siete más cuatro serian once, once más una serian doce* [realiza la suma de las personas de la mesa 2 con la condición de agregar cuatro y a María].
E2: *Serían doce personas entonces, porque aquí dice que "si María eligiera la mesa 2..."*

Se puede evidenciar que los estudiantes mantienen el mismo fraccionamiento de cada pizza en siete partes iguales, ya que les pide que se mantenga la misma cantidad de pizza para cada persona. Los estudiantes tiene presente que deben de utilizar el proceso de división para verificar el número de pizzas a agregar. Primero utilizan el tanteo y después aseguran sus deducciones con la división. Esto da evidencia que los estudiantes han avanzado al nivel *Property Noticing.*

E1: *Hay que hacer como se hizo con la anterior* [se refiere a la relación de pizza por personas de la mesa 1, realizada anteriormente].
E2: *Sí ¿pero cuantas pizzas debemos de agregar?*
E1: *Inicialmente son seis pizzas* [representa las seis pizzas con circunferencias y a cada una la fracciona en siete partes].
E1: Las seis pizzas partidas entre siete partes, se tienen 42 porciones.

Ahora, los estudiantes empiezan a trabajar en la representación que ya poseen y agregan pizzas a las seis iniciales, no logran identificar inicialmente la relación que existe entre el número de personas y la cantidad de pizza. Primero agregan dos pizzas, por tanto realizan la operación de dividir 56 porciones que daría la suma de 8 pizzas fraccionadas cada una en 7 partes, entre el número de personas que serían 12. Lo que les arroja como cociente entero 4. Logran deducir que a cada persona le corresponde 4 porciones de pizzas y no concuerda con la distribución inicial (5 porciones cada persona y sobran 2).

E1: *Serían cuatro porciones.*
E2: *Entonces no, porque tiene que salir a cinco porciones como antes.*

Ahora los estudiantes aumentan la cantidad de pizzas y agregan 4 pizzas a las 6 iniciales que ya se tienen, por tanto serían 70 porciones que las dividen entre 12 personas, dándole como cociente el número entero 5, pero con un resto de 10. Logran deducir que deben de quitar una pizza y solo agregar 3 para ver cómo les resulta.

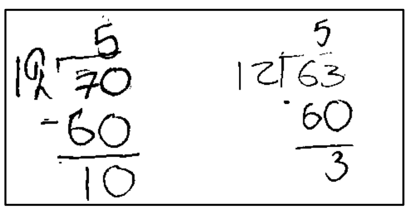


Figura 47. Proceso matemático de los estudiantes caso I, tarea 2, mesa 2, categoría 2.

E1: *Se tiene que agregar cuatro pizzas, porque salen a 5 porciones pero sobran diez.*
E2: *Yo opino que quitemos una pizza.*
E1: *Entonces sería agregar tres pizzas.*
E2: *Con estas dos pizzas serían cincuenta y seis porciones* [señala la representación de las pizzas cuando se agregan dos].
E2: *Si le agregamos otra más* [un total de nueve pizzas] *serían sesenta y tres porciones* [fraccionada cada una en siete partes].
E2: *Entonces serían sesenta y tres porciones entre doce personas.*
E2: *Sobran tres porciones, serían menos.*

Se evidencia que los estudiantes presentaron mayor dificultad al momento de proceder con la situación de la mesa 2, tanto en la primera categoría de análisis como la segunda, con relación a la tarea 2, ya que no lograron interpretar bien la fracción de la mesa 2. Finalmente los estudiantes se desprenden de la imagen que crearon y del proceso matemático, realizando sus conjeturas finales. Se evidencia que los estudiantes avanzaron al nivel de *Formalising*, afirmando que si llegan cuatro personas más a las ocho que se tienen inicialmente (con María), se deben de agregar 3 pizzas a la mesa 2, para mantener el mismo reparto inicial (5 porciones de pizza).

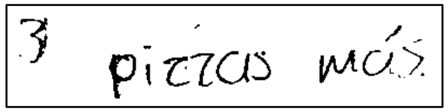


Figura 48. Respuesta final de los estudiantes caso I, tarea 2, mesa 2, categoría 2.

E1: *Entonces sería agregar…*
E2: *Tres pizzas se deben de agregar, para que a cada persona le toque el mismo reparto.*

En la siguiente figura se puede ver el proceso que siguieron los estudiantes para identificar y determinar la relación entre el número de pizzas y personas de la mesa 1 y 2.

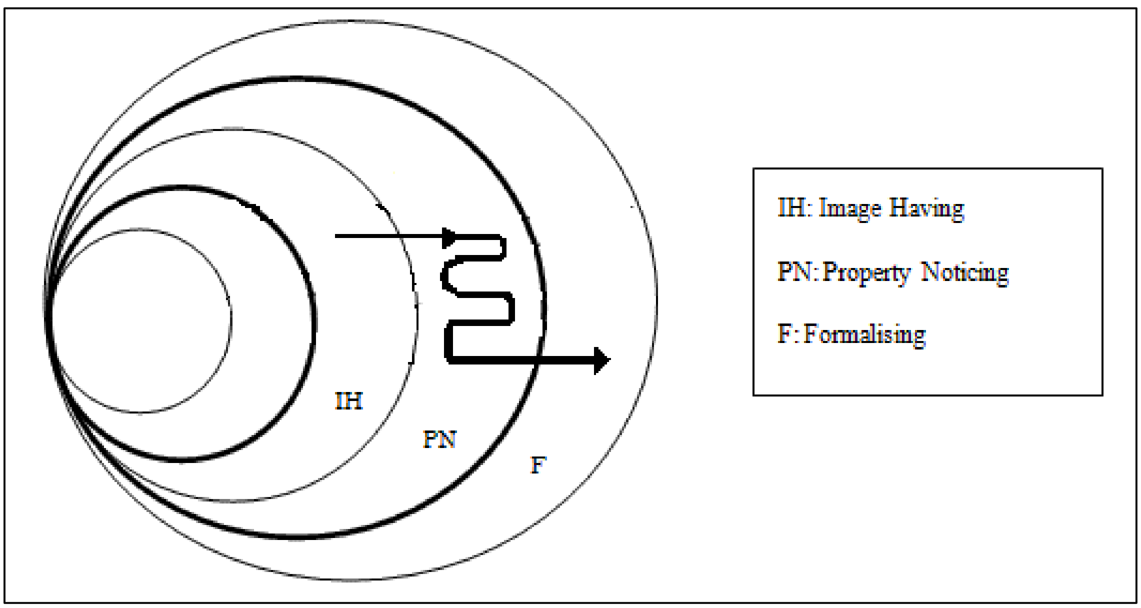


Figura 49. Estructura de conocimiento de los estudiantes para identificar la razón, caso I, tarea 2.

4.1.2.3. Estrategias de reparto

Esta última categoría de análisis de la tarea 2, tiene como propósito conocer las estrategias de repartos que tienen los estudiantes, en situaciones complejas que contengan razones matemáticas, para ello se necesitaba un grado de comprensión mayor para interpretar y proceder a la resolución de la situación planteada a los estudiantes:

> Si se quiere colocar 240 personas en mesas grandes (para 8 personas) y mesas pequeñas (para 6 personas) manteniendo una proporción de 7 mesas grandes a 4 pequeñas ¿Cuántas mesas de cada tipo se necesitan?

Los estudiantes deben de determinar el número de personas que se deben de sentar en cada una de las mesas (grandes y pequeñas), manteniendo una proporción de 7 mesas grandes a 4 pequeñas. Los estudiantes se muestran confundidos para resolver el último interrogante de la tarea 2. Lo primero que expresan es que no saben cómo resolverlo y leen con detenimiento varias veces la situación que se les plantea.

E1: *Lee esta última pregunta.*
E1: *No entendí* [lo expresa al E2 terminar de leer].
E2: *Tenemos que ubicar a las 240 personas en las mesas grandes y pequeñas con una proporción de 7 mesas grandes a 4 pequeñas.*

Empezaron resolviendo la interrogante desde el nivel *Image Having* ya que están creando imágenes mentales para determinar la proporción de mesas, aunque lo hacen por separado con cada tipo de mesa, no utilizando la proporción dado (7 mesas grandes a 4 pequeñas).

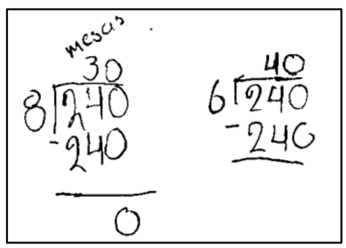


Figura 50. Proceso matemático de los estudiantes caso I, tarea 2, categoría 3.

E1: *Ajá ¿dividimos?*
E1: *Sería 240 entre 8.*
E2: *Sí. Sería 30* [se refiere a la situación de las mesas grandes].
E1: *Entonces que significa esto… ¿Treinta mesas?* [Lo expresa al terminar de realizar la división y obtienen como cociente 30].
E2: *Lo mismo hagamos con las mesas pequeñas* [realizan el proceso de dividir 240 entre 6].

Se observa, que los estudiantes no lograron interpretar la situación que les brinda la última interrogante de la tarea 2. Empiezan a trabajar sobre la imagen mental que poseen, utilizando la división para obtener su respuesta. Lo que da evidencia que los estudiantes han avanzado al nivel *Property Noticing*. No tienen presente la proporción de 7 mesas grandes a 4 pequeñas, lo que fue preguntado en la entrevistas y afirmaron que no entendieron que hacer con ese dato suministrado. Esto da evidencia que los estudiantes no presentan una buena comprensión del concepto de fracción como razón, cuando se les presentan situaciones complejas, como fue la presentada en esta última pregunta.

Los estudiantes trataron de generalizar el proceso que realizaron para dar solución a la interrogante. Expresan el número de mesas grandes y pequeñas que se necesitan para acomodar a 240 personas de manera errónea ya que no tuvieron en cuenta la proporción (7:4) de las mesas. Los estudiantes permanecieron en el mismo nivel (*Property Noticing*).

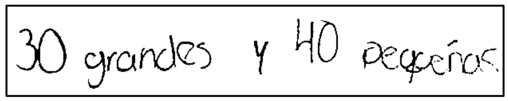


Figura 51. Respuesta final de los estudiantes caso I, tarea 2, categoría 3.

E1: *Entonces serían 30 mesas grandes y 40 mesas pequeñas.*
E2: *Sí* [lo expresa moviendo su cabeza].

En la entrevista realizada a los estudiantes, se les pregunta cómo les pareció la tarea 2, a lo que respondieron que fue más difícil que la tarea 1 y que por momentos se sentían inseguros con los procesos que utilizaban. En la siguiente figura se ilustra el proceso seguido por los estudiantes del caso 1 para determinar estrategias de repartos en situaciones que contemplen razones matemáticas.

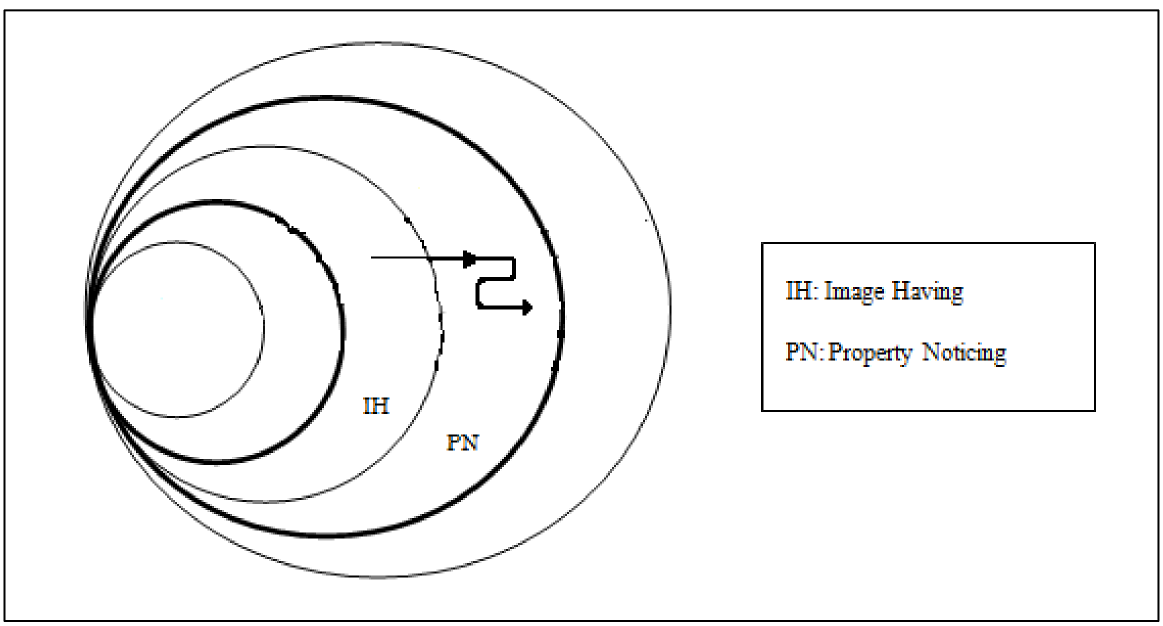


Figura 52. Estructura de conocimiento de los estudiantes utilizando estrategias de reparto, caso I, tarea 2.

4.2. Estudiantes del caso 2 (C2)

El segundo apartado hace referencia al análisis realizado al caso 2 en estudio, es decir, el caso de los estudiantes con rendimiento académico bajo (E3 y E4). A continuación se presenta el análisis de la comprensión, en otras palabras, se presenta el análisis del proceso de las estructuras del conocimiento de los estudiantes del caso 2, con base en el modelo teórico de Pirie y Kieren (1994) al resolver las dos tareas en torno al concepto de fracción como razón.

4.2.1. Tarea 1 “Qué cantidad de naranjas quiero”

El análisis de la tarea 1 en relación al caso 2, se realizó con las mismas partes ya diferenciadas en el caso 1: elección de la mejor razón y comparación de razones.

4.2.1.1. Elección de la mejor razón.

La pareja de estudiantes (caso 2) leen con detenimiento la tarea de manera individual y mentalmente. Lo primero que expresan es que deben sacar los datos que plantean las dos situaciones presentadas:

> En el mercado Baltazar, un kilo de naranjas consta de 9 piezas y cuesta $10. Mientras que en la huerta de don José, un kilo consta de 7 piezas de naranjas y cuestan $8.

Para organizar los datos, los estudiantes dividen una hoja de trabajo en dos columnas (datos y operación) de inmediato se observa que los estudiantes no logran identificar o interpretar la unidad de partida de ambas situaciones (kilo de naranjas).

E4: *Tenemos primero que sacar los datos que nos dan.*
E3: *Sí, utiliza esta hoja* [le entrega una hoja de trabajo en blanco].

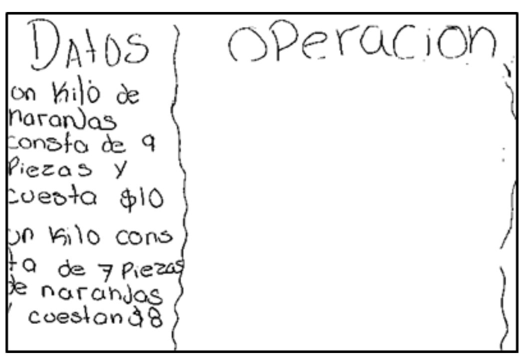


Figura 53. Organización de los datos por los estudiantes caso II, tarea 1, categoría 1.

A partir de allí, lo primero que establecen es encontrar el valor por unidad de naranja en cada una de las dos situaciones, buscando establecer una representación de las mismas. En relación al modelo de Pirie y Kieren, se interpreta que los estudiantes comienzan enfrentándose al problema desde el nivel *Image Having*.

E3: *Lo que tenemos que saber es cuánto cuesta cada naranja.*
E4: *Podríamos hacer las nueve piezas y hallar el valor de cada una.*
E3: *Pero es una gráfica, a lo mejor podríamos hacer la gráfica así…* [Construye una gráfica cartesiana en una hoja].
E4: *No, así no es.*

Se observa, que los estudiantes realizan una construcción gráfica sobre la situación que se presenta en el mercado Baltazar. Esto da evidencia que los estudiantes reemplazaron las imágenes mentales con una representación gráfica cartesiana, Dando evidencia que los estudiantes continuando en el nivel *Image Having*.

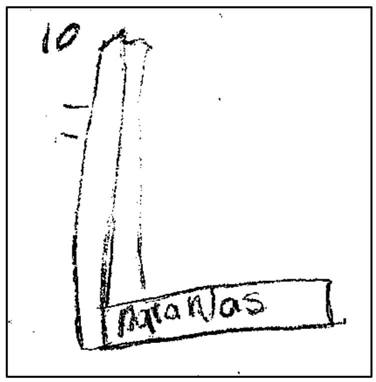


Figura 54. Representación gráfica de la situación del mercado, estudiantes caso II, tarea 1, categoría 1.

E3: *Una gráfica seria esta* [continua con la construcción de la gráfica cartesiana] Y*o creo que está es una gráfica*. *Aquí pondríamos*… [Los estudiantes expresan no acordarse qué valores colocar para relacionar en este sentido las coordenadas del plano en relación a las dos situaciones].
E4: *No me acuerdo.*
E3: *La gráfica llegaría hasta…* [Señala las coordenadas del eje "y"] *pondríamos el número del precio* [señala las coordenadas del eje "y"] *aquí llegaría hasta 10.*

Los estudiantes se notan confundidos al momento de representar las situaciones de la tarea con una gráfica cartesiana, por tanto empiezan a construir otro tipo de representación (pictórica). En el proceso de construcción de la imagen, los estudiantes no comparten sus ideas en relación a la representación apropiada de las situaciones. Mientras E3 propone realizar una representación gráfica cartesiana, E4 dice que deben hacer una representación simbólica (las fracciones).

E4: *Mejor dibujamos las naranjas* [construyen circunferencias para representar las naranjas].
E4: *Pero tenemos que hacer las fracciones primero… para saber cuánto cuesta cada naranja* [borra las dos circunferencia que ya había construido].
E3: *Ajá.*
E4: *Seria 10 entre 9 y tenemos que dividir.*

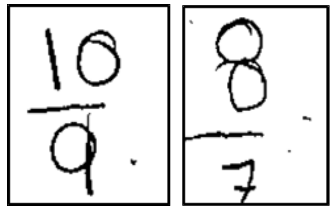


Figura 55. Representaciones simbólicas de las situaciones, estudiantes caso II, tarea 1, categoría 1.

Los estudiantes acordaron realizar la representación simbólica de las dos situaciones (figura 55). No lograron identificar la unidad de partida (unidad de medida: kilo), sino que buscaban conocer el valor de cada unidad de naranja, por eso expresan la relación del costo total (numerador) por el número de naranjas (denominador).

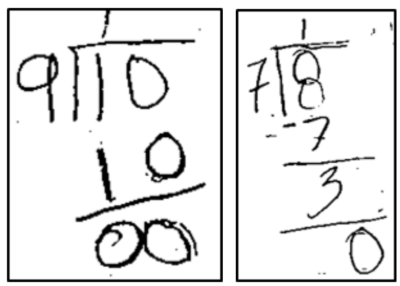


Figura 56. Proceso matemático de los estudiantes caso II, tarea 1, categoría 1.

E4: *$1 cuesta cada naranja.*
E3: *Sí* [realizado en un movimiento con la cabeza en relación a la afirmación de E4].
E4: *En ambos lugares cuestan lo mismo.*
E3: *El resultado es el mismo* [se refiere al proceso que realizaron de división].

La estudiante E4 empieza a dividir 10 entre 9 y 8 entre 7, mientras que el estudiante E3 solo observa el proceso que E4 realiza. Se evidencia que los estudiantes empiezan a trabajar sobre la nueva imagen que construyeron de las situaciones (figura 55). Este procedimiento da evidencia que los estudiantes avanzaron al nivel *Property Noticing*.

Como se percibe en la figura 56, los estudiantes tuvieron problemas para realizar la operación aritmética empleada por ellos, lo que demuestra que los estudiantes presentan dificultad para realizar una división sencilla. Los obstáculos que presentaron los estudiantes se evidenciaron en sus hojas de trabajo, el proceso realizado y en el ritmo lento de trabajar.

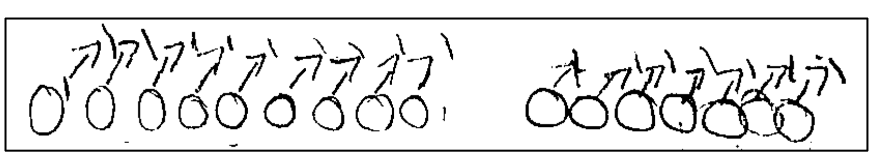


Figura 57. Representación pictórica de los estudiantes caso II, tarea 1, categoría 1.

Una vez más, los estudiantes después de discutir y realizar varias veces la operación aritmética de la división, realizaron otra representación pictórica de las situaciones (figura 57). Este proceso desencadenó nuevamente en los estudiantes un *Folding Back*, ya que los estudiantes retroceden a un nivel inferior que ya habían superado (*Imagen Having*), pero relacionaron las abstracciones realizadas en el nivel de *Property Noticing*. Por ejemplo, colocaron el valor unitario a cada naranja que representaron con una circunferencia.

E4: *¿Entonces? Son iguales…*
E3: *A eso me refería…* *el número de piezas va aumentar la cantidad que cuesten.*
E3: *Podemos poner que en los dos lados cuestan lo mismo.*

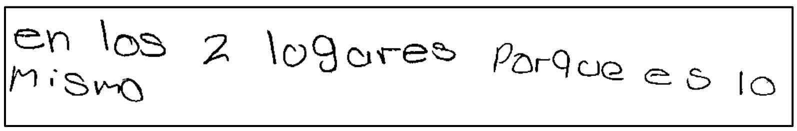

en los 2 logares porque es lo mismo

Figura 58. Abstracciones realizada por los estudiantes caso II, tarea 1, categoría 1.

Los estudiantes abstraen información de la nueva representación pictórica y del proceso de división. Lo que da evidencia que vuelven al nivel *Property Noticing*. Determinan que en ambas situaciones convendría comprar las naranjas. Los estudiantes no logran alcanzar el nivel *Formalising*, puesto que las conclusiones que obtienen son erróneas. Los estudiantes desde un principio no identificaron la unidad de partida en las que se daban ambas situaciones y presentaron dificultad es la división.

E4: *En los dos lugares nos conviene de acuerdo a las operaciones.*
E3: *Sí.*


de acuedo alas operaciones en los 2 lugares es conveniente

Figura 59. Conclusión de los estudiantes caso II, tarea 1, categoría 1.

En la siguiente figura se puede ver el proceso que han seguido los estudiantes del caso 2 para la categoría de análisis 1 en la tarea 1.

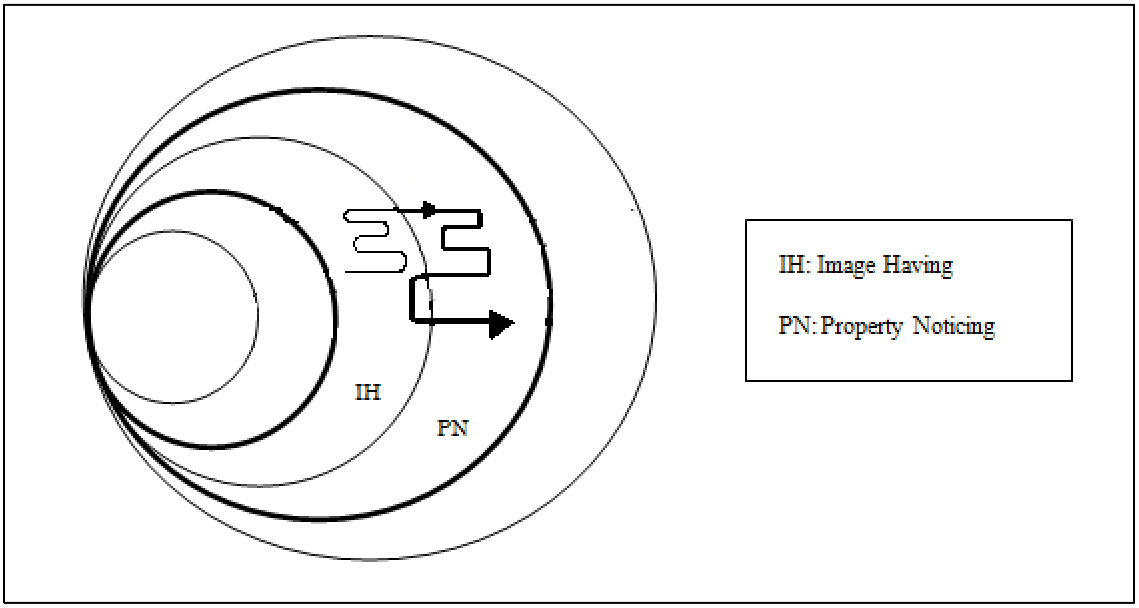


Figura 60. Estructura de conocimiento para elegir la mejor razón, caso II, tarea 1.

4.2.1.2. Comparación de razones

Al finalizar con uno de los propósitos de la tarea 1 (identificar la unidad de partida de las dos situaciones, que en este caso sería el kilo de naranja en ambas, lo que las convertiría en dos situaciones comparables) se quiso, además de mantener la misma unidad de medida, que en ambas situaciones un kilo de naranja estuvieran al mismo precio manteniendo las mismas cantidades en unidades de naranjas que parecían inicialmente.

Para eso, se consideró un descuento del kilo de naranjas en el mercado Baltazar, los estudiantes son cuestionados con la siguiente condición:

> Si en el mercado Baltazar el kilo de naranjas se oferta con un 20% de descuento en su precio normal ($10) ¿Cuál sería el nuevo costo de un kilo de naranjas? Con ese descuento realizado en el mercado Baltazar ¿Dónde comprarían ahora el kilo de naranjas, huerta de don José o en el mercado? ¿Por qué?

Los estudiantes discuten con base en sus conocimientos que poseen, cuál es el proceso que tienen que realizar para encontrar el valor del descuento que se realizaría con la oferta, por lo que comienzan resolviendo el problema desde el nivel *Primitive Knowing*.

E4: *Dice que se oferta con un descuento del 20%.*
E3: *Se le saca el nuevo costo del precio que decía anteriormente.*

E3: *¿A esto no?* [Señala la hoja de trabajo].
E4: *Sí. Pero no sé a cuál es.*
E3: *Mmm… Es al que mejor nos convenga. A este* [señala la situación de la huerta de don José].
E4: *No es el lado más conveniente, ambos son iguales. Pero, te saldría más barato… pagarías menos por más* [se refiere a la situación de don José].
E4: *Entonces a esta* [señala la situación de la huerta de don José].
E4: *¿Cómo se hace?*

Se observa que los estudiantes presentan una dificultad al momento de relacionar los datos con alguna estrategia de solución a la nueva situación que se les plantea en la tarea. Primero, no interpretan correctamente a cuál de las dos situaciones se le debe aplicar el descuento mencionado y ellos optan por aplicárselo a la que mejor les convenga según sus abstracciones (huerta de don José).

Además, no recuerdan como obtener el porcentaje de un valor numérico, expresado esto en su discusión.

E3: *Pues nada más le quitamos, solamente a esto* [señala \$8] *le quitamos un descuento del 20%.*
E3: *Eso lo dimos en clases pero no recuerdo.*
E4: *A ya ya ya… préstame el lápiz.*
E4: *Colocábamos esto aquí* [realiza el mismo proceso que hicieron los compañeros del caso I].
E3: *Ah sí. Es cierto* [expresa al observar el proceso que realiza E4].

Se observa que los estudiantes ya relacionaron los datos que les ofrece la tarea, saben que proceso deben realizar, pero no lo recuerdan. Después de un tiempo de discusión entre ellos, uno de los estudiantes (E4) recuerda el procedimiento aprendido en clases. Proceso que también utilizaron los estudiantes del caso 1, que consiste en realizar una descomposición aditiva en porcentajes más fáciles de calcular, tal como se evidencia en la figura 61. Todo este proceso da evidencia que los estudiantes continúan utilizando su conocimiento adquirido para obtener el porcentaje de un valor numérico

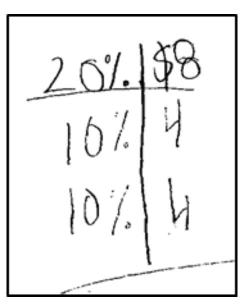


Figura 61. Proceso para calcular el 20% de \$8, caso II, tarea 1, categoría 2.

Como se evidencia en la figura 61, los estudiantes presentan errores en el proceso que utilizaron para la obtención del descuento, pero uno de los estudiantes expresa que el nuevo costo del kilo de naranjas en la huerta de don José es de $6 con el descuento. No realiza ningún procedimiento escrito. Solo expresan que el descuento es de $2 y se lo restan al costo inicial ($8). Se observa que los estudiantes empiezan a obtener información de dicho proceso y calculan el nuevo costo de las naranjas en la huerta de don José, ya que ellos le aplicaron el descuento a la mejor situación que les convenía.

E3: *Seria $6.*

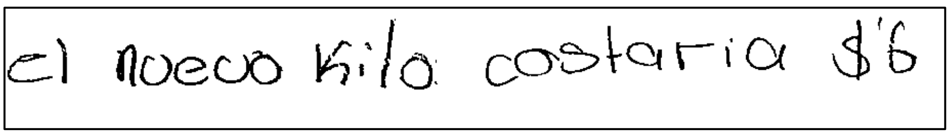


Figura 62. Respuesta de los estudiantes caso II, con base al nuevo costo del kilo de naranjas, tarea 1, categoría 2.

Con el nuevo precio del kilo de naranjas en la huerta de don José como lo interpretaron los estudiantes, tenían que decidir dónde comprar ahora las naranjas, si en la huerta de don José o en el mercado.

E4: *Aquí es más barata* [señala la situación de la huerta de don José].
E4: *Porque te dan más naranjas…*
E3: *Por menos precio pues.*

Se observa que los estudiantes empiezan a trabajar sobre la misma imagen que poseen (figura 57) y empiezan abstraer información de ella, dando evidencia que avanzaron al nivel *Property Noticing*. Expresan que ambas situaciones son iguales refiriéndose al precio por unidad de naranjas según su proceso realizado. Pero que ahora en la huerta de don José con el descuento realizado, pagarían menos dinero. Razonamiento que también sería erróneo. Continuando con los argumentos de los estudiantes que cada naranja cuesta $1, si se agregan dos naranjas más en la huerta de don José, para igualarlas a la cantidad de naranjas del mercado, se tendría el mismo valor $8.

E4: *En la huerta porque te dan más naranjas por menos…*
E3: *Ajá menos precio.*

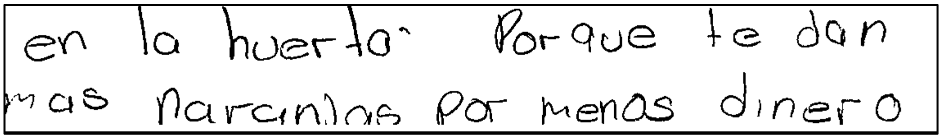


Figura 63. Respuesta final de los estudiantes caso II, tarea 1, categoría 2.

En la siguiente figura se ilustra el proceso seguido por los estudiantes del caso 2 en la comparación de razones con igual unidad de medida.

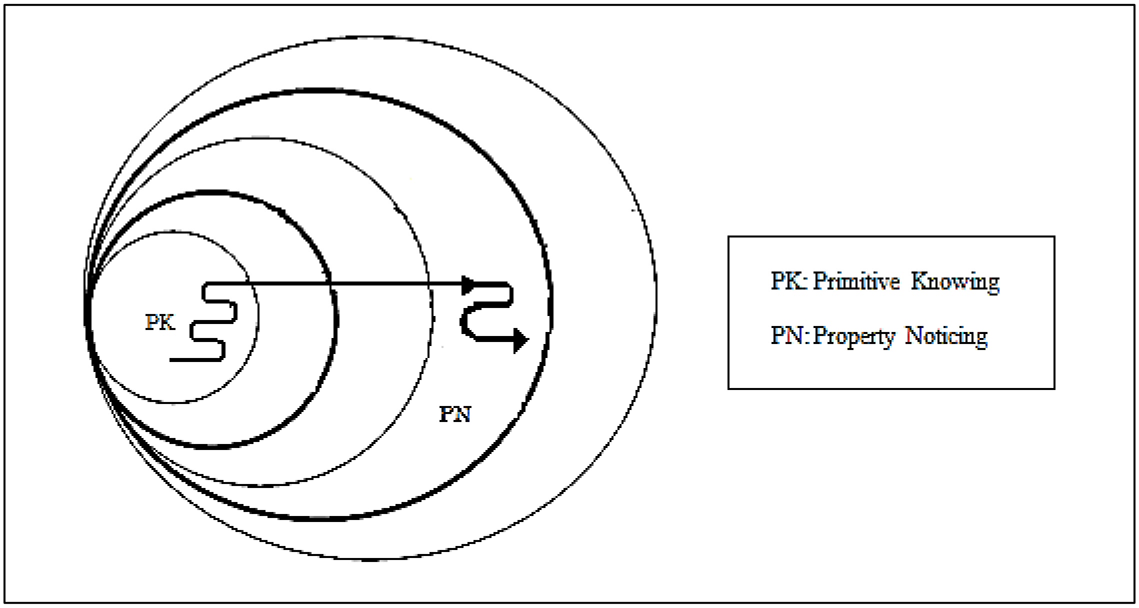


Figura 64. Estructura de conocimiento para elegir la mejor razón con el descuento realizado, Caso II, tarea 1.

4.2.2. Tarea 2 “Comparto, disfruto y aprendo”

El análisis de la tarea 2 se organizó en 3 partes diferenciadas: elección de la mejor razón, identificación de la razón y estrategias de reparto. A continuación se presenta dicho análisis.

4.2.2.1. Elección de la mejor razón.

La pareja de estudiantes (caso 2) se notaban distraídos al momento de empezar a resolver con la tarea 2, es E4 quien lee en voz alta el enunciado de la tarea:

> Cada mes María y sus amigos se encuentran en el restaurante la Alamedilla para cenar pizza. Habitualmente María llega tarde, pero sus amigos la aprecian mucho y la esperan. Le reservan un sitio en cada una de las dos mesas que ocupan. En la mesa 1 hay 4 pizzas grandes (sin partir) y 5 personas, en la mesa 2 hay 6 pizzas grandes (sin partir) y 7 personas. María llega con mucho apetito

(hambre) y tiene que decidir dónde sentarse de forma que le corresponda la mayor cantidad de pizza.

Lo primero que hacen los estudiantes es relacionar cada una de dos situaciones que les brinda la tarea con una representación, trayendo a coalición las representaciones que realizaron en la tarea 1. Esto da evidencia que los estudiantes empezaron a resolver la tarea 2 desde el nivel *Image Having*.

E4: *Lee tú la primera pregunta.*
E4: *¿Cómo las hicimos la vez pasada?* [Se refiere a las representaciones que realizaron en la tarea 1].
E3: *No sé… Recuerdo que la vez pasada representamos con unas circunferencias.*
E4: *¡Ah sí! pero estas vez son unas pizzas.*
E3: *Sí.*

Seguidamente los estudiantes crean dos representaciones pictóricas, las cuales simulan dos mesas y encima de ellas se encuentran unas pizzas. Después, identifican que cada pizza la puede fraccionar según el número de personas que esté presente en cada mesa, cabe aclarar que las representaciones que realizaron los estudiantes de las dos situaciones de las mesas, no contenían a María.

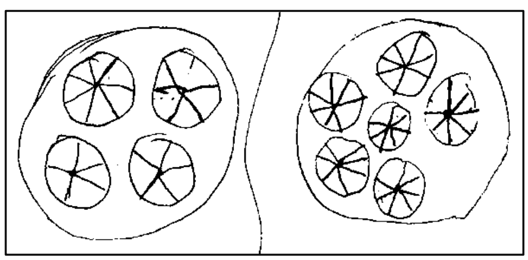


*Figura 65.*Primera representación pictórica de los estudiantes caso II, tarea 2, categoría 1.

E4: *Vamos a empezar, vamos a poner unos círculos ¿son cuántas pizzas?*
E4: *Son cuatro pizzas* [se refiere a la situación de la mesa 1].
E4: *Ahora las partimos en ocho* [se refiere a fraccionar cada pizza en ocho partes].
E3: *¿Se deben de dividir en cinco no*? [Se refiere a fraccionar cada pizza en cinco partes].
E4: *No… cada una en… ¡ah! sí, son cinco personas.*
E4: *Realiza tú la representación de la mesa* 2 [le entrega el lápiz y la hoja de trabajo a E3] *y dibuja seis pizzas* [situación de la mesa 2].
E3: *¿Ahora en cuántas las divido? Las divido en* cinco [Se refiere a fraccionar cada pizza de la mesa 2].
E4: *No, en siete partes* [E3 fracciona cada pizza en siete partes iguales].

Es de resaltar, que primero los estudiantes fraccionan las dos primeras pizzas de la mesa 1 entre siete personas, confundiéndose con la situación de la mesa 2. Seguidamente corrigen su error y fraccionan las otras en cinco partes, pero se les olvida corregir las pizzas anteriores.

Los estudiantes se percatan que teniendo las representaciones pictóricas de las dos situaciones, tenían que anexar en cada una de ellas a María, volver a fraccionar cada una de las pizzas de tal manera que a cada persona le correspondiera la misma cantidad de pizzas. Todo con la finalidad de determinar cuál de las dos mesas es la más conveniente para María. Para ello, los estudiantes inician con la situación de la mesa 1, realizan otra representación igual a la anterior pero ahora con la condición que María haya elegido esta mesa. Dando evidencia que los estudiantes se mantiene en el nivel *Image Having*.

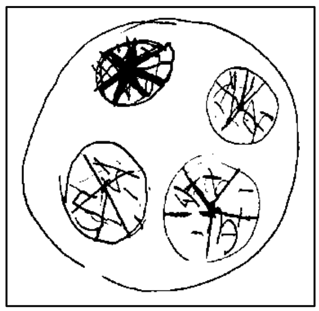


Figura 66. Segunda representación pictórica de los estudiantes caso II, tarea 2, mesa 1, categoría 1.

Como expresan en el diálogo siguiente, para dividir cada una de las pizzas y distribuirlas en las seis personas (incluyendo a María), los estudiantes empezaron a tantear. Primero dividieron en mitades, obteniendo así ocho porciones en total. Se fijan que les sobran dos porciones.

E4: *¿Cuántas personas tiene la mesa 1?*
E3: *En la mesa 1 hay cuatro pizzas sin partir y cinco personas*.
E3: *Entonces una pizza la partimos en dos* [se refiere a fraccionar cada pizza en 1/2].
E4: *¿Cuál?*
E3: *La que quieras, todas son lo mismo* [se refiere que son del mismo tamaño].
E4: *Entonces las partimos de dos en dos*.
E3: *Sí.*
E4: *Entonces sería entre…* [Se refiere en cuantas partes deben de fraccionar cada pizza].
E3: *¿En tres no?* [Se refiere a fraccionar cada pizza en tres partes].

Continuando con el tanteo, ahora los estudiantes proponen dividir cada pizza en tres partes iguales. Pero al realizar la gráfica se confunden y no logran visualizar que fraccionando las cuatro pizzas en tercios, saldrían doce porciones y como son seis personas con María en la mesa 1, a cada uno le tocaría exactamente $\frac{2}{3}$ de las cuatro pizzas. Esto da evidencia que los estudiantes presentan dificultad en algunos conceptos y procesos matemáticos que serían necesarios para realizar el reparto.

E3: *¿Qué haces?* [Lo expresa al observar que E4 empieza a fraccionar cada pizza en cinco partes].
E3: *Yo lo seguí, lo que hiciste primero. Son seis personas y a cada una les tiene que tocar igual.*
E3: *A ver son seis personas… ¿Cada pizza en cuánto la tenemos que dividir? En cinco no.*
E4: *Sí, cinco porciones cada pizza.*
E3: *Veinte, veinte porciones son las que tenemos aquí* [como son cuatro pizzas].
E4: *¿Veinte porciones en total? ¿Por qué?*
E3: *Sí en total, son veinte porciones, porque son cuatro pizzas.*
E4: *Ok, sí.*
E3: *Y son seis personas… ¡ah! Le tocan cuatro… pero van a faltar pizza* [el estudiantes realiza sus cálculos mentalmente].

Como se observa, los estudiantes no logran abstraer información favorable al momento de distribuir las porciones de pizza entre las seis personas de la mesa 1 en ninguno de los casos particulares que realizaron. Por tanto, optan por relacionar las situaciones con otro tipo de representación. Lo que da evidencia de que los estudiantes realizaron un *Folding Back,* y ahora se encuentran en el nivel *Image Making.* Es de resaltar, que los estudiantes en cada uno de los casos particulares presentados, fraccionaron las pizzas sobre dicha representación, pero no se presentan, ya que fueron borradas por ellos mismos cada vez que fraccionaban las pizzas.

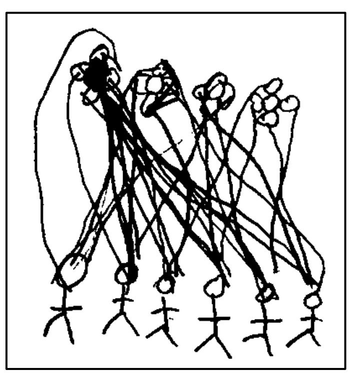


Figura 67. Tercera representación pictórica de los estudiantes caso II, tarea 2, mesa 1, categoría 1.

E3: *¡Ah! Ya yo sé que vamos a hacer* [empieza a realizar otro tipo de representación pictórica (figura 65)].
E3: *¿Son seis personas no?*
E4: *Sí.*

E3: *Esto va a esto, esto va a esto* [realiza unos trazos uniendo los trozos de las pizzas con las personas en la nueva representación que realiza].
E4: *Ah sí, este con este…* [E4 ayuda a su compañero a relacionar las pizzas con las personas].
E4: *Nos queda una* [se refieren a una porción de pizza].
E3: *Debe ser la de María, entonces hay que partirlas en seis* [se refiere a fraccionar cada pizza en seis partes iguales].

Los estudiantes vuelven a construir una representación pictórica de la situación mesa 1 incluyendo a María. Lo que da evidencia que los estudiantes vuelven otra vez al nivel *Image Having*. Hasta el momento los estudiantes habían presentado dificultad para abstraer información de la imagen que creaban, se notaban confundidos en cada una de las decisiones que tomaban. Ahora, con la nueva representación logran establecer el reparto equitativo de las porciones de pizzas para las seis personas. Teniendo como partida que cada pizza la dividieron en el número de personas, siguiendo su proceso tendrían un total de veinticuatro porciones por tanto, a cada persona le corresponde cuatro porciones de las pizzas o $\frac{4}{6}$ de cada pizza.

E4: *Ya terminamos* [lo expresa al terminar de distribuir las pizzas].
E3: *¿Y cuál es la reflexión ahora?*
E4: *Ya representamos gráficamente, así que ya respondimos esa pregunta.*
E3: *Sí, pero cuál va hacer la respuesta, para decir que cantidad de pizza le tocará a persona.*
E4: *Mmm…Ya se* [lo expresa al terminar de leer nuevamente la pregunta].
E3: *¿Qué?*
E4: *Tres sextos le tocarían a cada persona.*
E3: *¿Tres sextos?*
E4: *Sí, porque mira, cada pizza la dividimos en seis partes*.

Pero los estudiantes no lograron abstraer dicha información de manera correcta. Afirman que cada persona de la mesa 1 incluyendo a María, le corresponde tres porciones de pizza si estas mismas las fraccionan en seis partes ya que es el número de personas que estarían en la mesa, expresándolo su respuesta con una representación simbólica, la fracción $\frac{3}{6}$.

Figura 68. Abstracciones realizada por los estudiantes caso II, tarea 2, mesa 1, categoría 1.

E4: *Son tres sextos porque las pizzas se dividieron en seis partes y a cada uno le tocaría tres porciones* [siguiendo su razonamiento a cada persona le tocaría cuatro porciones].

Después que los estudiantes realizaron su proceso de comprensión en relación a la situación de la mesa 1, optan por realizar el mismo proceso para la mesa 2. Realizan la representación pictórica de seis pizzas y ocho personas (*Image Having*), pero primero entran en confusión si son siete u ocho personas. Luego, empiezan a relacionar las pizzas con las personas realizando trazos.

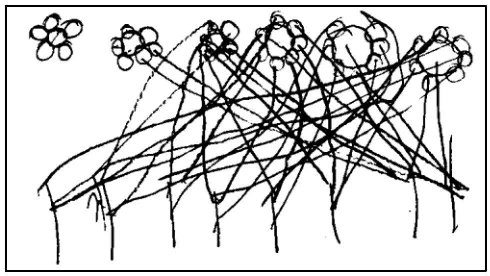


Figura 69. Representación pictórica de los estudiantes caso II, tarea 2, mesa 2, categoría 1.

Ahora, los estudiantes utilizan el mismo proceso para fraccionar las pizzas, pero siguen presentando dificultad en el mismo y para abstraer información del proceso. Los estudiantes no alcanzaron el nivel de *Property Noticing* ya que no construyeron propiedades específicas sobre la imagen que crearon, que les permitiera realizar generalizaciones.

E3: *Son ocho personas con María.*
E4: *Mmm no, son siete.*
E3: *¿Y María?*
E4: *Ah sí, son ocho personas* [agregan una personas más a su representación].
E3: *¿Cada pizza cuánto trae?* [Se refiere al número de porciones] *¿Cinco no?*
E4: *Siete porciones.*
E3: *No, siete es el número de personas.*
E4: *Puede ser también cinco.*
E3: *Son seis pizzas y todas están sin partir, así que nosotros podemos dividirlas como mejor nos convenga.*
E3: *¿No se parten en siete?* [Lo expresa al terminar de leer la situación de la mesa 2, pero serían ocho incluyendo a María].
E4: *Es lo que te estoy diciendo.*

A pesar, que los estudiantes del caso 2, tuvieron la decisión de fraccionar las pizzas de esta manera (según el número de personas) siempre se les notaba confundido para realizar dicho proceso. Por último, los estudiantes logran realizar sus abstracciones en relación a su imagen, concluyendo que a cada persona le corresponden tres porciones de pizza.

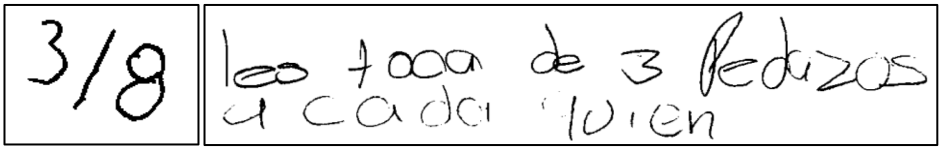


Figura 70. Abstracciones realizadas por los estudiantes caso II, tarea 2, mesa 2, categoría 1.

E4: *¿Cuántas pizzas eran?*
E3: *Seis pizzas.*
E3: *Ah ya sé, debe de ser de manera equitativa para que a cada persona le corresponda una porciones de cada pizza ¿No?*
E4: *Sí* [realiza la expresión con su cabeza].
E4: *Las partimos en ocho* [lo expresa después de realizar el caso particular de dividir en ocho porciones cada pizza].
E4: *Ya, les toca de tres porciones a cada uno.*
E3: *Ok, contesta la pregunta.*
E4: *Son tres octavos, se van a repartir de tres porciones y son ocho personas.*

Los estudiantes en la entrevista mencionaron que un dato que les ayudó mucho, es que el enunciado de la tarea, decía que las pizzas se encontraban sin partir (fraccionar) y por tanto, ellos podían decidir en cuantas partes partirlas (fraccionar), por lo que decidieron fraccionar según el número de personas correspondiente a cada mesa. En comparación con los estudiantes del caso 1, que para dicha distribución utilizaron el proceso de la división.

E3: *Lo que nos ayudó es que decía que todas las pizzas estaban sin partir, ósea que las podíamos partir a nuestra conveniencia.*
E4: *Para saber cuántas porciones le tocaba a cada persona nos basamos en los dibujos.*

Luego de obtener la distribución de las pizzas en relación a las personas en ambas mesas si María eligiera sentarse en alguna de ellas, los estudiantes debían de responder a la siguiente pregunta *¿Cuál de las dos mesas le sugieren a María que elija para sentarse?* Deduciendo cuál sería la mejor razón en dicho caso para María. Los estudiantes dan su respuesta con base a las imágenes que crearon de ambas situaciones. Eligiendo la representación de la mesa 2, que más le conviene a María para poder comer más pizza. A pesar de ser la respuesta correcta, los estudiantes realizaron mal las distribuciones de las pizzas.

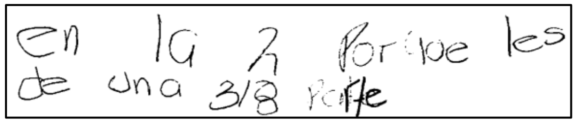


Figura 71. Respuesta de los estudiantes caso II antes de la entrevista, tarea 2, categoría 1.

E4: *Se le recomienda a María la mesa 2 porque allí comerá más pizza.*

Durante la entrevista los estudiantes se confrontaron en la respuesta final que ya habían dado, sugiriéndole a María mejor elegir la mesa 1 y no la 2 como habían concluido. Ya que, en ambas mesas comerían la misma cantidad de pizza, puesto que a cada persona le tocaría tres porciones y, como en la mesa 2 habían más personas. Por lo tanto, comería menos pizzas si eligiera esa. Se evidencia que los estudiantes presentan dificultad para ordenar y comparar fracciones, ya que durante el desarrollo de la tarea, habían seleccionado la mesa 2 solo porque para ellos la fracción $\frac{3}{8}$ era mayor que $\frac{3}{6}$. Lo que da evidencia que los estudiantes no han comprendido la idea de fracción como razón y no lograron alcanzar el nivel de *Formalising*.

En la siguiente figura se puede ver el proceso que han seguido los estudiantes hasta el momento para la categoría 1 de la tarea 2 "elección de la mejor razón matemática".

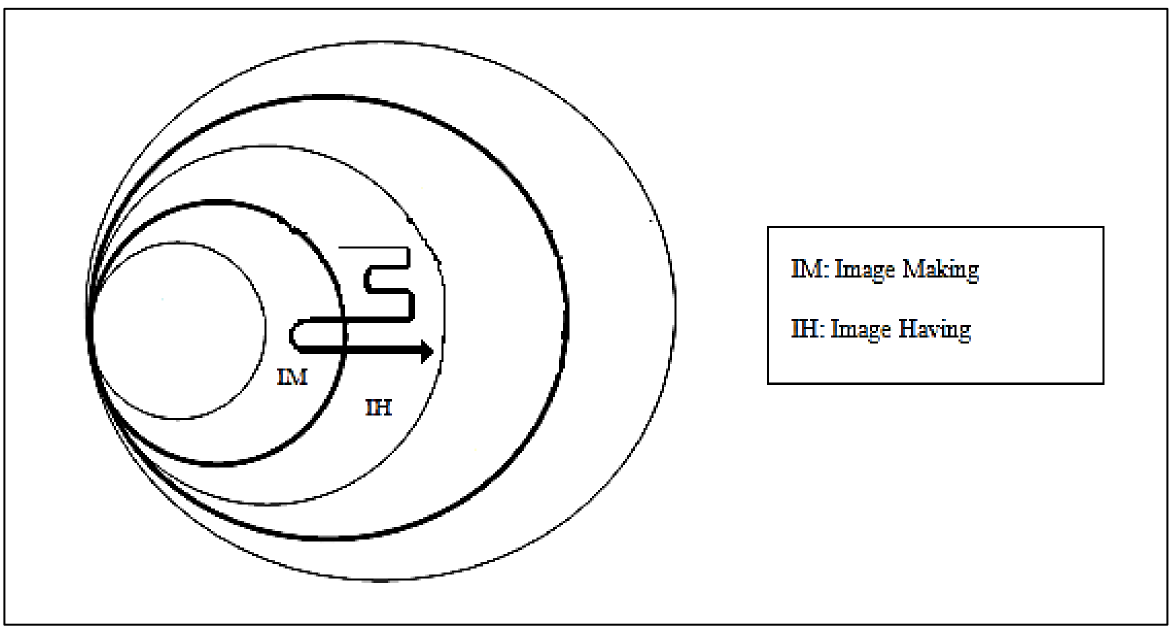


Figura 72. Estructura de conocimiento de los estudiantes para elegir la mejor razón, caso II, tarea 2.

4.2.2.2. Identificación de la razón

Para el desarrollo de esta categoría de análisis, se requiere por parte de los estudiantes una mayor comprensión de la noción de razón, mostrando igualmente un pensamiento proporcional de mayor nivel, ya que el estudiante debe reconocer que si en la mesa 1 se agregan 2 pizzas se deben agregar 3 personas para mantener la misma proporción inicial que tenían $\left(\frac{2}{3}\right)$. Lo mismo pasaría con la mesa 2, pero de manera contraria. Al llegar 4 personas más a la mesa 2 se debería agregar 3 pizzas más para mantener el mismo reparto que tenían anteriormente $\left(\frac{3}{4}\right)$. Para ello, los estudiantes deben de identificar la relación que presentan ambas razones matemáticas. Para la mesa 1 se les presenta la siguiente situación:

> Supongan que María seleccionó la mesa 1, en la cual agregan 2 pizzas a las 4 que ya tenían. Para mantener el mismo reparto que tenían anteriormente ¿Cuál será el número de personas que deberían agregarse? Expliquen su razonamiento.

Los estudiantes empiezan a extraer información en relación a la representación pictórica que habían realizado (Figura 67). Según el modelo de Pirie y Kieren los estudiantes empiezan a desarrollar este interrogante desde el nivel *Image Having*, donde trabajan en la imagen que ya poseen.

E3: *¿Cuántas pizzas son?*
E3: *Cuatro más dos serían seis pizzas y se tienen cinco personas, entonces sería una persona más la que se tiene que agregar, para que a cada quien le corresponda una pizza ¿No*? [No tienen presente que le enunciado indica que María eligió la mesa1].
E4: *Sí* [E4 acepta lo expresado por E3 y solo escribe en la hoja de trabajo lo dicho por E3].

Se evidencia, que los estudiantes no tuvieron presente la condición inicial, que deberían de mantener el mismo reparto que ya habían realizado. Por tanto, no identificaron la razón matemática que se tiene de la relación de pizzas por personas. Sino, que generan sus conclusiones afirmando que solo se debería de agregar una personas (no incluyendo a María), ya que inicialmente son cinco personas y cuatro pizzas, al agregar dos pizzas solo faltaría una persona para completar seis y así cada una pueda obtener una pizza. Lo que da evidencia que los estudiantes no alcanzan el nivel de *Formalising*.

Es de resaltar que durante la entrevista, los estudiantes colocan en duda su afirmación y manteniendo su proceso de abstracción, se percatan que el enunciado de la tarea les indica que supusieran que María habría seleccionó la mesa 1. Por tanto, serían seis personas las que se encuentran inicialmente y si se agregaron dos pizzas, se tendría que a cada uno le corresponde una pizza. Pero la condición es que mantengan el reparto ya realizado, y concluir cuántas personas se deben de agregar. Durante la entrevista borraron la conclusión de agregar solo una persona, por agregar dos.

*Figura 73.*Respuesta final de los estudiantes caso II, tarea 2, mesa 1, categoría 2.

E4: *Es que si se agrega una persona igual les tocara lo mismo.*
E3: *Para que le toque una pizza a cada persona estando María, se deben de agregar son dos personas más, no una.*
E4: *Entonces, se le agregarían dos personas se dividen las pizzas igual y les tocara lo mismo.*

Detallando el reparto que los estudiantes habían concluido, consiste en que a cada persona le tocaría $\frac{3}{6}$ de pizza. Si se continúa con este reparto, al agregar dos pizzas en la mesa 1, se puede deducir que por cada pizza que se fracciona en seis partes, comerán de ella dos personas, lo que indica que al agregar dos pizzas, serían cuatro personas las que se deben de agregar para mantener el reparto inicial al que los estudiantes habían determinado. Por tanto, colocando en correlación la nueva conclusión de los estudiantes, es como si solo se hubiera agregado una pizza más a la mesa y no dos como lo indica.

Ahora, con el caso de la mesa 2 para que los estudiantes identificaran la relación entre el número de pizzas y personas, se les presenta la siguiente situación:

> Si María eligió la mesa 2, llegaron 4 amigos más y quieren comer la misma cantidad de pizza que antes ¿Cuántas pizzas más deben comprar? Expliquen su respuesta.

Los estudiantes empiezan a trabajar con la representación que ya poseen, empiezan a abstraer información sobre el número de pizzas que se deben de agregar. Procediendo de la misma forma que lo hicieron con la mesa 1. Lo que da como evidencia que empiezan a desarrollar el interrogante desde el nivel *Imagen Having*. Es de resaltar que los estudiantes nuevamente, no logran identificar la relación que existe entre el número de personas y la cantidad de pizza.

E4: *Si son cuatro amigos, deberán comprar una pizza más.*
E3: *Veamos, hay seis pizzas y está María.*
E4: *Es una pizza la que se debe de agregar, porque si llegaron cuatro amigos, les va a tocar de una pizza a cada quien.*

E3: *Mira, tiene siete personas la mesa 2 y hay seis pizzas, entonces con María serían ocho personas y sus cuatro amigos* [para un total de doce personas], *por lo tanto serían cinco pizzas las que se deben de comprar*.
E4: *No* [realiza a expresión con su cabeza].
E3: *Mira…*

Los estudiantes se notan confundimos para determinar cuántas pizzas se deben de agregar en la mesa 2, con la condición de mantener el mismo reparto de $\frac{3}{8}$ que ya habían determinado. El estudiante E3 presenta argumentos que están acorde con la situación de la relación de las pizzas y personas de la mesa 2, pero la estudiante E3 expresa que el razonamiento que él realiza no es el adecuado. Se evidencia que los estudiantes se notaban confundidos en cada uno de los procesos que realizaban, al igual que en la entrevista se les dificultaba explicar el razonamiento que realizaron para concluir a cada una de las preguntas de la tarea.

E4: *Espera es así mira, les va a tocar de tres porciones a cada quien* [manteniendo el mismo reparto realizado].
E3: *Mira, si María eligió la mesa 2 y llegaron cuatro amigos más* [Lee nuevamente el enunciado de la tarea] *no dice que se sentó en otra mesa.*
E4: *Por eso, se compran dos pizzas más.*
E3: *Habían siete personas y con María serían ocho, más cuatro que llegaron.*
E4: *Por eso se reparten las dos pizzas más y les alcanzan.*
E3: *Ah, pero yo decía era para que le tocara una pizza a cada quien.*

Posteriormente, los estudiantes se desprenden de la imagen que crearon, para realizar sus conjeturas finales. Se evidencia que los estudiantes no avanzaron al nivel de *Formalising*. Afirmando que si llegan cuatro personas más a las ocho que se tienen inicialmente (con María), se deben de agregar 2 pizzas a la mesa 2, para mantener el mismo reparto inicial ($\frac{3}{8}$ de pizza).

Se puede deducir que el razonamiento que los estudiantes presentan es erróneo, ya que al realizar el reparto agregando las dos pizzas que ellos mencionan, sobrarían tres pizzas grandes y $\frac{4}{8}$. Puesto que inicialmente eran seis pizzas, al agregar las dos daría un total de ocho pizzas y si se fraccionan en ocho partes como inicialmente lo realizaron los estudiantes, para repartirlas esta vez entre doce personas (siete inicial más las cuatro personas que llegaron) y manteniendo la misma proporción inicial que fue de $\frac{3}{8}$ sobrarían pizzas. Lo que da evidencia que los estudiantes presentan dificultad para operar e identificar razones matemáticas.

Es de resaltar que durante la entrevista, los estudiantes colocan en duda su afirmación y vuelven a realizar la distribución de las pizzas, llegando a la conclusión que ya no serían dos pizzas más sino cuatro para agregar. Realizando el proceso de distribución acorde a la proporción de $\frac{3}{8}$ de pizza por persona, es nuevamente erróneo su formalización, lo que permite deducir que los estudiantes del caso 2 presenta una comprensión endeble del concepto de fracción como razón en casos complejos, como lo fue la tarea 2.

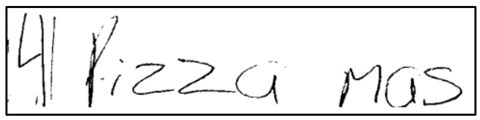


Figura 74. Respuesta final de los estudiantes caso II, tarea 2, mesa 2, categoría 2.

E4: *Serían cuatro pizzas, no serían dos como lo habíamos realizado.*

En la siguiente figura se puede ver el proceso que siguieron los estudiantes para identificar y determinar la relación entre el número de pizzas y personas de la mesa 1 y 2.

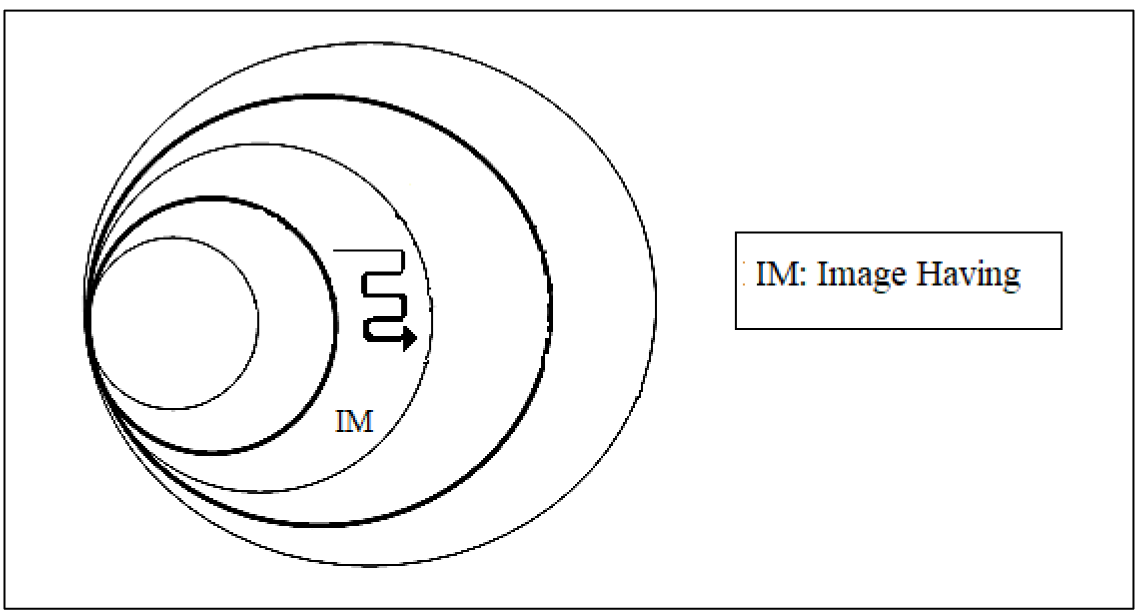


*Figura 75.*Estructura de conocimiento de los estudiantes para identificar la razón, caso II, tarea 2.

4.2.2.3. Estrategias de reparto

Esta última categoría de análisis de la tarea 2, tiene como propósito conocer las estrategias de repartos que tienen los estudiantes, en situaciones complejas que contengan razones matemáticas, para ello se necesitaba un grado de comprensión mayor para interpretar y proceder a la resolución de la situación planteada a los estudiantes:

> Si se quiere colocar 240 personas en mesas grandes (para 8 personas) y mesas pequeñas (para 6 personas) manteniendo una proporción de 7 mesas grandes a 4 pequeñas ¿Cuántas mesas de cada tipo se necesitan?

Los estudiantes deben de determinar el número de personas que se deben de sentar en cada una de las mesas (grandes y pequeñas), manteniendo una proporción de 7 mesas grandes a 4 pequeñas. Los estudiantes empiezan relacionando el enunciado con el proceso de multiplicar las siete mesas grandes que les menciona la proporción del enunciado, con el número diez, pero no dejan claramente el porqué del proceso o razonamiento. Esto da evidencia que los estudiantes empiezan a trabajar en el desarrollo de la pregunta desde el nivel *Image Having*, donde relacionan la situación con una representación mental de la situación.

E4: *Se necesitan diez mesas grandes* [la estudiante lo expresa al terminar de leer el enunciado sin hacer ningún tipo de argumento].
E4: *Ya terminamos ¿no?* [Mientras E3 volvía a leer el enunciado de la tarea].
E3: *A ver* [revisa la respuesta de E4].
E4: *Se necesitan diez mesas.*
E3: *Pero no sé… No* [se nota en desacuerdo con la respuesta de E4].
E4: *Mmm… Ya sé, seria siete por diez, setenta…*

Se evidencia que los estudiantes no lograron interpretar ni proceder para desarrollar la pregunta, se notaron distraídos y confundidos. La deducción que realizó E4, no presenta argumentos algunos. Durante la entrevista mencionaron que no entendieron que tenían que realizar y lograron explicar por qué realizaron la multiplicación de siete por diez. Esto da evidencia que los estudiantes no presentan una buena comprensión del concepto de fracción como razón, cuando se les presentan situaciones complejas, como fue la presentada en esta última pregunta.

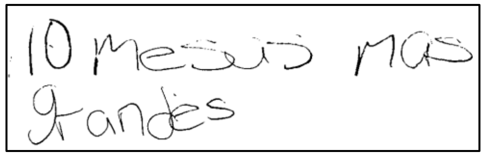


Figura 76. Respuesta final de los estudiantes caso II, tarea 2, categoría 3.

E3: *Mira tenemos que ubicar 240 personas en mesas grandes y pequeñas.*
E4: *Son ocho personas entonces se multiplica por diez.*
E3: *Pero son doscientas cuarenta personas, tienes que buscar un número que multiplicado por ocho te de 240.*
E3: *Ya déjala así* [se necesitan diez mesas grandes].

Finalmente, los estudiantes desisten con el desarrollo de la pregunta y expresan que se necesitan diez mesas grandes para acomodar a 240 personas. Esto da evidencia que los estudiantes no alcanzaron el nivel de *Formalising*. Si se toma como resultado del interrogante la afirmación dada por los estudiantes de diez mesas, serían un total de 70 personas las que ocuparían las mesas grandes, pero sin mantener la proporción suministrada por el enunciado.

En la siguiente figura se ilustra el proceso seguido por los estudiantes del caso 2 para determinar estrategias de repartos en situaciones que contemplen razones matemáticas.

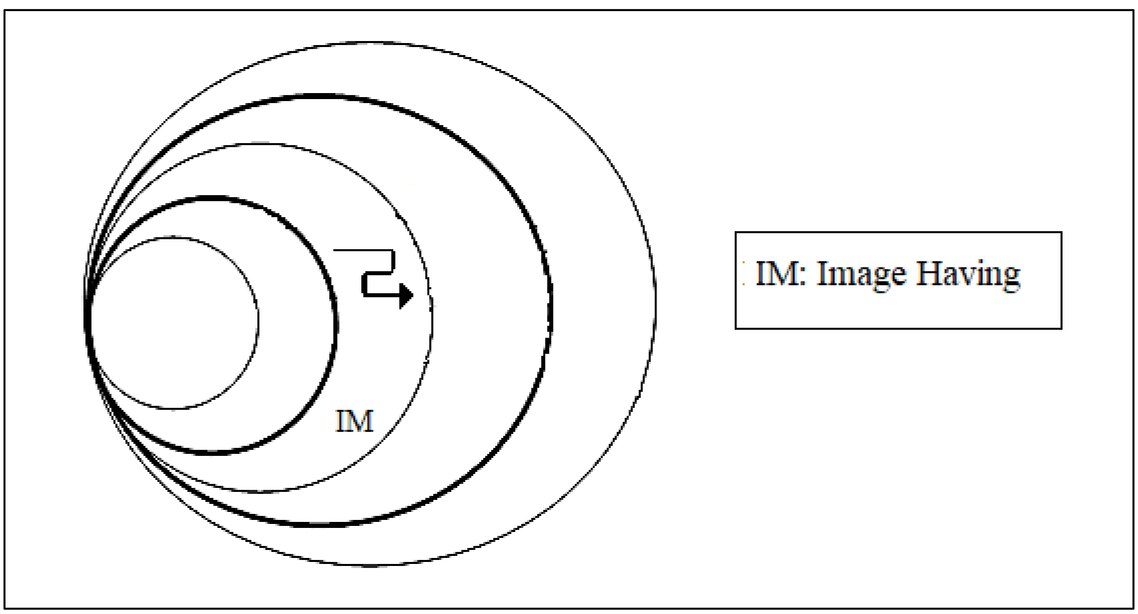


Figura 77. Estructura de conocimiento de los estudiantes utilizando estrategias de reparto, caso II, tarea 2.

4.3. Resultados del estudio de caso

La característica (rendimiento académico) de cada uno de los dos casos analizados, permitió realizar una comparación en el proceso utilizado por los estudiantes, con relación a sus estructuras de conocimiento cuando resolvieron las dos tareas en torno al concepto de fracción como razón. Se presentan los resultados del proceso de comprensión de acuerdo a las categorías de análisis de cada tarea, empezando con la tarea 1. Primero, se presentan los resultados de cada caso y por último, se presentan resultados particulares por cada categoría.

Para la **tarea 1** en la categoría de **elección de la mejor razón**, el proceso de comprensión que evidenció el **caso 1** con relación a las características y niveles de acción del modelo teórico de Pirie y Kieren (1994) fue: Image Making, Image Having, Property Noticing, *Folding Back,* Image Having y Property Noticing. Lo que permite identificar que estos estudiantes, no lograron elegir la mejor razón matemática, ya que no identificaron la unidad de partida de ambas situaciones (unidad de medida kilo), esta dificultad ya ha sido reportada en la literatura (Fandiño, 2009).

En el nivel Image Having, primeramente los estudiantes utilizaron una representación simbólica (fracción) para representar las situaciones, y en el segundo una representación pictórica. En la primera representación, los estudiantes presentaron dificultad en relacionar cuál sería el numerador y denominador correspondiente a la relación cantidad de naranjas y precio del kilo. En la segunda representación, los estudiantes lograron relacionar sus abstracciones obtenidas en el nivel Property Noticing, este resultado da evidencia que la comprensión no es un proceso lineal (Pirie y Kieren, 1994), ya que los estudiantes realizaron un *Folding Back*, para la nueva imagen que crearon, relacionándola con los resultados del proceso de división que habían utilizado en el nivel Property Noticing. Los estudiantes no alcanzaron el nivel Formalising para elegir la mejor razón, lo que quiere decir que en el proceso de comprensión, no lograron trabajar con el concepto de fracción como un objeto formal, solamente hicieron referencia a acciones de la imagen particular que crearon de las situaciones (Pirie y Kieren, 1994).

Ahora, el proceso de comprensión de los estudiantes del **caso 2** para esta misma **categoría de la tarea 1**, fue parecido al del caso 1 en relación al modelo de Pirie y Kieren, lo que los diferencia, fue la manera de empezar a resolver la tarea y que los estudiantes del caso 2 presentaron mayor dificultad en sus estrategias de resolución, esta última tal vez se deba a su característica de bajo rendimiento académico. Al igual que los estudiantes del caso 1, los estudiantes del caso 2 no lograron elegir la mejor razón matemática, ya que no identificaron la unidad de partida de ambas situaciones (unidad de medida kilo) y además presentaron dificultad para realizar operaciones con fracciones, ambas dificultades ya han sido reportadas en la literatura (Fandiño, 2009; Butto, 2013). El proceso de comprensión fue: Image Having, Property Noticing, *Folding Back*, Image Having y Property Noticing.

Los estudiantes empezaron resolviendo la tarea en el nivel Image Having, en esta primera aparición del nivel, los estudiantes crearon tres imágenes de las situaciones y en todas presentaron dificultad para representarlas. En la primera representación, relacionaron los datos con una tabla de dos columnas (datos y operación) abandonaron esta imagen y seguidamente crearon una representación gráfica cartesiana, la cual no lograron terminarla porque no sabían ubicar las coordenada en relación a los datos de las situaciones. Este tipo de gráfica usada por los estudiantes para representar las razones, usualmente son utilizadas para establecer una relación matemática en funciones y ecuaciones de geometría analítica. Sería importante estudiar como este tipo de representación ayudaría al estudiante a establecer la relación de las magnitudes en las razones matemáticas. La tercera representación fue la simbólica (fracción), al igual que el caso 1, los estudiantes presentaron dificultad para identificar cuál sería el numerador y denominador correspondiente a la relación cantidad de naranjas y precio del kilo.

En el nivel Property Noticing los estudiantes utilizaron como estrategia de comparación de razones el proceso de división, en la cual presentaron dificultad para realizar un división sencilla (10 entre 9 y 8 entre 7), lo que da evidencia que los estudiantes tienen dificultad en las operaciones básicas (división) con los números enteros, particularmente los estudiantes del caso 2, quienes únicamente realizaron el proceso con un solo cociente, esta dificultad se puede observar en la figura 56. Al igual que los estudiantes del caso 1, los estudiantes del caso 2 realizaron un *Folding Back* para crear una nueva imagen de las situaciones y lograron establecer conexiones con las abstracciones realizadas en el nivel Property Noticing (Pirie y Kieren, 1994). Finalmente, los estudiantes tampoco alcanzaron el nivel

Formalising, manteniéndose en el nivel Property Noticing, en donde utilizaron y combinaron aspectos de las imágenes mentales que ya poseen de las situaciones, para construir propiedades específicas del concepto, pero sin desvincularse de la imagen (Pirie y Kieren, 1994).

Como resultados particulares de esta primera categoría de la tarea 1 **elección de la mejor razón** se tiene que los estudiantes de ambos casos en estudio no presentaron comprensión para elegir la mejor razón matemática en situaciones de comparación de razones en casos simples, ya que en relación al modelo teórico de Pirie y Kieren (1994) los estudiantes no alcanzaron el nivel Formalising en esta categoría de análisis. En correspondencia con el programa de estudio para el grado escolar sexto de primaria (SEP, 2011), los estudiantes abordaron el contenido matemático que hace referencia a comparar razones matemáticas en casos simples, lo que se evidencia con los resultados es que los estudiantes no lograron adquirir aprendizaje en este contenido. Por otra parte, las gráficas más usadas por los estudiantes para representar las razones matemáticas en esta categoría, fueron las representaciones simbólicas (fracción) y pictóricas. Por último, la estrategia de comparación para poder elegir la mejor razón matemática fue la división.

En la segunda categoría **comparación de razones** de la tarea 1, los estudiantes del **caso 1** lograron hablar del concepto de fracción como un objeto formal, puesto que compararon las dos razones matemáticas para elegir la mejor. Presentaron el siguiente proceso de comprensión al resolver la tarea: Primitive Knowing, Property Noticing, *Folding Back,* Image Having, Property Noticing y Formalising.

Los estudiantes empezaron a resolver la tarea desde el nivel Primitive Knowing, ya que utilizaron sus conocimientos adquiridos para calcular el porcentaje de una cantidad numérica. Este proceso lo realizaron de manera correcta y lograron obtener el descuento que se les solicitaba, para poder comparar las dos razones y escoger la mejor según las situaciones de la tarea. Esto da evidencia de las conexiones que tienen las interpretaciones asociadas del concepto de fracción, como fue el caso de la interpretación porcentaje y razón que se manifiestan en la tarea 1.

Se evidenció que durante el proceso de comprensión, los estudiantes realizaron un *Folding Back,* para avanzar en su proceso. Realizaron una representación simbólica (fracción) de la nueva situación. Nuevamente se destaca que los estudiantes relacionan más el concepto con este tipo de representación. Posteriormente, los estudiantes lograron trabajar sobre la imagen que poseen, utilizaron como estrategia de comparación la división. Este tipo de estrategia también fue utilizada por los estudiantes en la categoría anterior, tal vez se les facilite utilizarla, puesto que en relación al programa de estudio (SEP, 2011) los estudiantes también deberían conocer y utilizar la estrategia de comparación: igualar algunos de los términos de la fracción, para determinar cuál sería la fracción mayor y menor. Por último, los estudiantes lograron formalizar su comprensión en relación a esta categoría de análisis de la tarea 1.

Mientras que los **estudiantes del caso 2**, no lograron formalizar su comprensión en esta categoría, puesto que manifestaron dificultad en el proceso matemático que utilizaron (cálculo de porcentaje) y no evidenciaron estrategia de comparación alguna. Por tanto, no eligieron la mejor razón matemática, expresando que en ambas situaciones de la tarea era conveniente comprar el kilo de naranjas. El proceso de comprensión fue: Primitive Knowing y Property Noticing. La dificultad para calcular el porcentaje, no debería estar presente en los estudiantes de sexto grado, ya que la temática es abordada en el grado anterior y menciona el programa de estudio (SEP, 2011) que los estudiantes al culminar esta fase de su educación (primaria) deberán calcular porcentajes en casos sencillos.

Como resultados particulares de esta segunda categoría de la tarea 2 **comparaciones de razones matemáticas** se tiene que solo los estudiantes del caso 1 lograron formalizar su proceso de comprensión. En relación al modelo teórico de Pirie y Kieren (1994) los estudiantes alcanzaron el nivel Formalising. En cambio los estudiantes del caso 2, solo trabajaron con la imagen mental que crearon de la situación y no lograron plasmarla con otro tipo de representación, para avanzar en su proceso de comprensión. Los estudiantes del caso 1, realizaron una representación simbólica (fracción) de la nueva situación que obtuvieron del proceso utilizado (cálculo de porcentaje), mientras que los estudiantes del caso 2, no lograron realizar correctamente el proceso para calcular el porcentaje.

Para la **tarea 2** en la primera categoría de análisis **elección de la mejor razón**, los estudiantes del **caso 1** no presentaron comprensión para determinar correctamente, cuál de las dos situaciones sería conveniente para que María comiera más cantidad de pizza. El proceso de comprensión en relación al modelo teórico de Pirie y Kieren (1994) fue: Image Making, Image Having, Property Noticing, *Folding Back*, Image Having y Property Noticing.

Empezaron a resolverlo desde el nivel Image Making, en donde relacionaron a cada situación de las mesas con alguna representación (simbólica o pictórica), inmediatamente avanzaron al nivel Image Having, y la primera representación que hicieron fue pictórica (rectángulos que simulaban las mesas, encima de ellas, circunferencias que hacían las veces de las pizzas y alrededor de los rectángulos siluetas de personas) y la segunda manteniéndose en el mismo nivel fue una representación simbólica (fracción). Ya cuando los estudiantes concretaron su imagen (fracción), utilizaron la división para fraccionar cada una de las pizzas y obtener repartos equitativos de las mismas. Este proceso lo realizaron de manera correcta para la mesa 1, presentaron dificultad para realizar el reparto equitativo de la mesa 2.

Se evidencia que los estudiantes presentaron un *Folding Back*, en el cual realizaron otra representación de las mesas, pero esta vez solo fue pictórica y relacionaron sus abstracciones del proceso de división. Lo que ponde de manifiesto que cuando los estudiantes construyen su conocimiento, no lo hacen de manera lineal, sino dinámico (Pirie y Kieren, 1994). Por último, los estudiantes vuelven a utilizar la división, pero esta vez para distribuir la totalidad de porciones, no logran la comprensión puesto que el reparto en la mesa 2 no fue equitativo, sobrándole dos porciones de las seis pizza que fraccionaron cada una en $\frac{1}{7}$.

El proceso de comprensión de los **estudiantes del caso 2** para esta misma categoría de análisis de la **tarea 2** fue: Image Having, Image Making, *Folding Back* e Image Having. Estos estudiantes tampoco presentaron comprensión para elegir correctamente la mejor razón matemática. No lograron desprenderse de la imagen (representación pictórica) que crearon, ni utilizaron algún proceso matemático que les permitiera abstraer información para hablar de alguna propiedad específica del concepto.

Crearon tres representaciones pictóricas de las situaciones. La primera, la abandonaron por que no lograron realizar un reparto equitativo de las pizzas después de tanto intentos por tanteo. En la segunda representación lograron establecer el reparto pero no de manera correcta, por tanto obtuvieron información incorrecta de la misma. Por último expresan su respuesta con una representación simbólica (fracción). Lo que da evidencia que estos estudiantes presentan mayor dificultad que los estudiantes del caso 1, ya que ellos por lo menos alcanzaron llegar al nivel Property Noticing en relación al modelo teórico.

Como resultados particulares de esta primera categoría de la tarea 2 **elección de la mejor razón** se tiene que los estudiantes de ambos casos en estudio, no presentaron comprensión para elegir la mejor razón matemática en situaciones de reparto equitativo. Las representaciones que utilizaron en esta categoría fueron la pictórica y la simbólica (fracción). Los estudiantes del caso 1 como estrategia de comparación utilizaron la división, mientras que los del caso 2, no lograron utilizar estrategia matemática alguna, solo se quedaron en la construcción de la imagen y trataron abstraer información de la misma. Esto da evidencia de la falta de comprensión que tienen los estudiantes de ambos caso, ya que presentaron dificultad para realizar un reparto equitativo de las situaciones de la tarea, como fue fraccionar pizzas. Es de suma importancia buscar solución a tal dificultad que los estudiantes de sexto grado manifiestan, puesto que se evidencia la falta de comprensión conceptual que tiene del concepto de fracción, por tanto, no tienen unas bases sólidas que les permita un entendimiento de otros temas en grados posteriores.

En la categoría de análisis **identificación de la razón**, los estudiantes del **caso 1** presentaron comprensión para identificar las razones matemáticas de las situaciones. Lo que significa según el modelo de Pirie y Kieren (1994) que para identificar la razón matemática, asociaron y crearon una imagen de la situación para luego trabajar en la misma y formalizar su conocimiento. El proceso de comprensión fue: Image Having, Property Noticing y Formalising.

Empiezan resolviendo la tarea desde el nivel Image Having, en donde realizaron representaciones pictóricas de las situaciones, luego trabajan sobre ellas, utilizando la división para comprobar sus abstracciones realizadas. Por último, lograron formalizar su proceso y expresaron las dos razones matemáticas: en la mesa 1 por cada 2 pizzas comen 3 personas y en la mesa 2 por 4 personas se necesitan 3 pizzas.

Mientras que los estudiantes del **caso 2**, no lograron formalizar su comprensión para identificar las razones matemáticas de las situaciones de la **tarea 2**, solo alcanzaron el nivel de Image Having, creando una imagen mental de las situaciones que se les propuso en la tarea, de las cuales trataron de abstraer información que les ayudara a dar solución al interrogante que se les planteó. Por lo que se puede interpretar que, para poder trabajar sobre las imágenes que poseemos o creamos del concepto, es necesario asociarlas con algún tipo de representación. Para luego abstraer información que permita formalizar el concepto y verlo como un objeto formal, este proceso no siempre se debe de presentar de manera lineal (Pirie y Kieren, 1994).

Como resultados particulares de esta segunda categoría de la tarea 2, **identificación de la razón** se tiene que los estudiantes del caso 1 presentaron comprensión, mientras que los del caso 2 no lograron. La representación que utilizaron los del caso 1 en esta categoría fue la pictórica y los del caso 2, solo realizaron representaciones mentales de las situaciones de la tarea, no logrando plasmarlas en otro tipo de representación. Se nota la falta de comprensión conceptual de la temática que nuevamente evidencian los estudiantes del caso 2. Se debe de atender a las dificultades que manifestaron estos estudiantes con bajo rendimiento académico, para lograr fortalecer su proceso de comprensión y puedan formalizar su conocimiento, en relación a la identificación de las razones matemáticas.

En la tercera y última categoría de análisis de la tarea 2 **estrategias de reparto** ambos casos en estudio no presentaron comprensión para realizar repartos que involucren mantener una proporción inicial. Lo que da evidencia que los estudiantes no conectan las interpretaciones del concepto de fracción, como lo solicitaba la situación de la tarea. El proceso de comprensión de los estudiantes del **caso 1** fue: Image Having y Property Noticing. Mientras que los estudiantes del **caso 2**, nuevamente solo se quedaron en una representación mental de la situación (Imagen Having). Ambos casos crearon imágenes mentales de las situaciones y los estudiantes del caso 1, lograron trabajar en ella, utilizando la división pero no tuvieron presente la proporción de 7 mesas grandes a 4 pequeñas, dato que requería la tarea para su solución.

Tanto por lo observado como lo expresado por los estudiantes, fue la tarea 2 la que les causó mayor dificultad a la hora de resolver. Lo que da evidencia que los estudiantes presentan mayor dificultad para resolver tareas que aludan al concepto de fracción como razón en situaciones complejas para elegir la mejor razón, identificar la razón matemática, utilizar estrategias de comparación y reparto. Los estudiantes del caso 2, presentaron mayor dificultad que los del caso 1. Puesto que, muchos de sus procesos matemáticos utilizados fueron incorrectos en relación a los del caso 1.

Es de resaltar que los estudiantes del caso 1, lograron formalizar su comprensión por lo menos, en una de las categorías de análisis de las tareas 1 y 2, comparación de razones e identificación de la razón, respectivamente. En comparación como los estudiantes del caso 2, que en ninguna de las categorías de análisis de ambas tareas, lograron formalizar su proceso de comprensión. Esto se debe tal vez, a la característica que los estudiantes del caso 2 presentan (bajo rendimiento académico) y además que los estudiantes aún no han adquirido una comprensión conceptual de la temática (reparto equitativo, unidad de partida) y de otros proceso matemáticos que presentaron dificultad, como por ejemplo, cálculo de porcentaje y la división.

Como se evidencia en las estructuras de conocimiento, que se obtuvieron en el análisis de cada una de las tareas. Ambos casos estudiados, se les dificultó alcanzar el nivel *Formalising*. Lo que permite expresar que los estudiantes no lograron formalizar el concepto de fracción como razón al resolver las tareas. Se esperaba que los estudiantes lograran alcanzar este nivel del modelo, ya que habían terminado de cursar la temática en el salón de clase. Además, para el grado escolar en el que ellos se encuentran (sexto de primaria) el nivel de *Formalising* está acorde a sus exigencias curriculares. Puesto que, los niveles superiores del modelo teórico, requieren un mayor grado de comprensión de los conceptos matemáticos que se trabajan.

La descripción de las estructuras de conocimientos de los estudiantes en relación al concepto de fracción como razón, deja precisar las dificultades que presentan dichos estudiantes a la hora de enfrentarse a tareas relacionadas con el objeto matemático en estudio. En relación a las dificultades que reporta la literatura, se puede observar que los estudiantes aun presentan dificultad para identificar la unidad de partida de una fracción; dificultad en la gestión del adjetivo igual; dificultad para representar las fracciones; dificultad para ordenar y comparar fracciones; y dificultad para realizar operaciones aritméticas con fracciones. Estas dificultades fueron descritas en el capítulo 1 de la investigación. Se está de acuerdo con Fazio y Siegler (2011) que las dificultades que usualmente presentan los estudiantes cuando trabajan el concepto de fracción, son derivadas de una falta de comprensión conceptual del mismo.

Otro obstáculo que presentaron los dos casos estudiados, es que los estudiantes se les dificultad relacionar e interpretar los datos en relación a las preguntas que se les plantean en las tareas. Se evidencia que los estudiantes tienen problemas de comprensión lectora, problema que la literatura ya ha reportado en relación a otros tópicos matemáticos u otros campos de la educación. Los resultados de México en la evaluación 2015 de PISA (OCDE, 2016) dan a conocer que el rendimiento de los estudiantes en lectura está por debajo del promedio de la OCDE.

La única estrategia de comparación utilizada por los estudiantes es la operación aritmética de división, siendo insuficiente a la hora de colocar en correlación las otras estrategias de comparación que se evidencian en el programa de estudio (SEP, 2011) y libros de textos edición para el maestro (Rosales et al., 2015), como es la de igualar un término (numerador o denominador) en las dos razones. Tal vez, esto se deba por ser una estrategia de comparación más práctica para los estudiantes, o tal vez sea el resultado de su proceso de aprendizaje en la escuela, que solo se limitaron a impartirles la estrategia de comparación (operación de división) evidente en los dos casos en estudio.

Las representaciones más usadas por los estudiantes cuando trabajaron el concepto de fracción como razón al resolver las tareas fueron: la representación simbólica, con la notación de fracción; y la representación pictórica, con la notación de figuras estándar (círculos, rectángulos). Siendo la representación simbólica en la que presentaron mayor dificultad. Puesto que, presentaron errores para identificar el valor del numerador y denominador en relación a las variables de las situaciones de la tarea, por ejemplo, cuando representaron las situaciones de la tarea 1, determinaron la fracción $\frac{10}{9}$ y $\frac{8}{7}$ donde el numerador representa el valor del kilo de naranja y el denominador la cantidad de naranjas por kilo, ya que no identificaron la unidad de medida kilo y solo querían conocer el valor unitario de las naranjas.

Otros tipos de representaciones, fueron las utilizadas por los estudiantes del caso 2. La representación gráfica cartesiana y tabular. En ambas los estudiantes presentaron dificultades y no lograron concretar su construcción (fueron descritas párrafos anteriores en la página 111). De este modo, se manifiesta que se debe de apoyar a los estudiantes a fortalecer estos tipos de representaciones, particularmente la representación tabular, la cual permite que los estudiantes visualicen la relación binaria entre magnitudes, lo que permitiría una mejor comprensión del concepto de fracción (Hernández, López, y Quintero, 2013). Dentro de las representaciones pictóricas de las fracciones se encuentra la recta numérica, representación que no fue utilizada por los estudiantes, pero según investigaciones (Cramer et al., 2018) también favorecen la comprensión del concepto de fracción como razón.

Los estudiantes de sexto grado de la educación básica (primaria) en México que participaron en el estudio, presentaron una baja comprensión del concepto de fracción como razón, ya que no lograron formalizar el concepto como un objeto formal en todas las categorías de análisis de ambas tareas, sino que solo lograron combinar aspectos de las imágenes mentales que ya poseen, tratando de generalizarlas, pero de manera errónea, ya que los procesos de resolución utilizados en las tareas no fueron correctos, esta problemática se reflejó más en los estudiantes del caso 2. Lo que pone de manifiesto, el resultado obtenido con el estudio realizado con el método Delphi (Landeta, 2002), que una de las interpretaciones del concepto de fracción donde los estudiantes presentan mayor dificultad para aprender es la fracción como razón.

Si se atienden a cada una de las falencias presentadas párrafos anteriores, se puede lograr que los estudiantes alcancen una buena comprensión de la temática, puesto que con relación al modelo teórico de Pirie y Kieren, ambos casos en estudio proceden a resolver tareas con situaciones simples, relacionando el objeto matemático con algún tipo de representación, luego crean una imagen del mismo y trabajan sobre ella, utilizando procesos matemáticos de donde abstraen información para dejar de hablar de la imagen que se crean. Pero, ya en situaciones complejas del concepto de fracción como razón, como lo fue la tarea 2 en su segunda y tercera categoría de análisis, los estudiantes presentaron una comprensión endeble y mayor dificultad para proceder a resolver este tipo de tareas. Particularmente los estudiantes del caso 2 en estudio, los cuales como ya se ha mencionado presentaban bajo rendimiento académico.

Por tanto, es pertinente seguir realizando estudios sobre la comprensión del concepto de fracción como razón y buscar solución a la baja comprensión que los estudiantes presentan. Sin duda alguna, para mejorar la comprensión de este concepto, se debe de trabajar en esas dificultades básicas, no solo limitarse a la manipulación algebraica, sino también, priorizar la comprensión conceptual en sus distintas interpretaciones.

Capítulo 5

Conclusiones y Aportes de la investigación

Capítulo 5. Conclusiones y aportes de la investigación

Este último capítulo, presenta las conclusiones que se lograron inferir en relación a la investigación realizada, se inicia con la recapitulación de la pregunta de investigación que surgió como una necesidad educativa; seguidamente se presenta lo obtenido respecto del objetivo general y de cada uno de los específicos que fueron pilar importante en la trayectoria de todo el proyecto investigativo. También, se presentan resultados relativos a la metodología implementada así como algunas contribuciones que se lograron inferir del estudio, sobre la comprensión del concepto de fracción como razón. Seguidamente, se señalan algunas limitaciones y algunos aportes referentes al campo de la Educación Matemática.

5.1. Recapitulación de la pregunta de investigación

En el primer capítulo se expuso la problemática que se abordó en este trabajo de investigación, y que dio lugar a la interrogante *¿Cuál es el proceso de comprensión de los estudiantes de sexto grado de educación primaria cuando resuelven tareas relacionadas con el concepto de fracción como razón?*

Con el propósito de responder a dicha pregunta, el objetivo trazado en el segundo capítulo que orientó teórica y metodológicamente el desarrollo de la investigación fue: *analizar el proceso de comprensión de los estudiantes de sexto grado de educación básica (primaria), cuando resuelven tareas sobre el concepto de fracción como razón.*

Atendiendo a la pregunta de investigación junto con el objetivo trazado, se crearon objetivos específicos, los cuales permitieron orientar el proyecto de investigación y en conjunto efectuaron las orientaciones para el desarrollo del proceso investigativo. Los objetivos específicos fueron:

- Conocer cuáles son las interpretaciones asociadas al concepto de fracción de mayor dificultad en el aprendizaje de los estudiantes de la educación básica (primaria).

- Identificar las dificultades que manifiestan los estudiantes de la educación básica (primaria) cuando resuelven tareas que aluden al concepto de fracción como razón.

- Analizar, por medio del modelo propuesto por Pirie y Kieren, el proceso que siguen cuatro estudiantes de sexto grado de educación básica (primaria), cuando resuelven dos tareas que aluden al concepto de fracción como razón.

La presente investigación ha proporcionado algunos hallazgos concretos en lo que respecta al primer objetivo específico. Como es sabido, el concepto de fracción presenta diferentes interpretaciones asociadas (Fandiño, 2009), por eso para fijar ideas, se decidió indagar en aquella que presentara mayor dificultad para los estudiantes, de acuerdo a docentes mexicanos de educación primaria. Por tanto, se utilizó el método Delphi de Landeta (2002), para obtener una opinión fidedigna de un grupo de docentes en servicio. Se obtuvo como resultado del estudio, que las interpretaciones de la fracción como número racional, la fracción como razón y la fracción como indicador de una cantidad (decimal), según los docentes encuestados, son las que los estudiantes de primaria encuentran mayor dificultad. La justificación del porqué solo se consideró la fracción como razón objeto matemático de estudio, se presentó en el apartado 3.2.5 de la sección de metodología.

Una vez delimitada la interpretación asociada al concepto de fracción a estudiar, se procedió con el rediseño de dos tareas matemáticas escolares que aludieran al concepto de fracción como razón. El objetivo de las mismas, no era adaptar tareas de otras investigaciones para favorecer el aprendizaje de los estudiantes, sino para analizar el proceso de comprensión de los estudiantes cuando resuelven tareas que aludan al concepto de fracción como razón. Las tareas que se rediseñaron fueron desafiantes para los estudiantes, para tener resultados apropiados de la manera como proceden a resolverlas (Pirie y Kieren, 1994). Para inferir en esta característica de las tareas, en el rediseño se tuvo presente las categorías de PISA (OCDE, 2006) y las dificultades que han reportado la literatura en relación a las que manifiestan los estudiantes, cuando resuelven tareas sobre el concepto de fracción.

Con la investigación, se evidenciaron dificultades específicas que tienen los estudiantes de primaria, cuando resuelven tareas que aluden al concepto de fracción como razón. Algunas de ellas son, dificultad de comprensión lectora; dificultad para identificar la unidad de partida de una fracción; dificultad en la gestión del adjetivo igual; dificultad para representar las fracciones; dificultad para realizar repartos equitativos; dificultad para ordenar y comparar fracciones; dificultad para realizar operaciones aritméticas con fracciones y; dificultad para identificar y trabajar con razones matemáticas. Muchas de estas dificultades, ya fueron recopiladas y reportadas de manera general para el concepto de fracción (Fandiño, 2009; Butto, 2013; Gabriel et al., 2013). Pero hoy día, los estudiantes siguen manifestándolas particularmente las mencionadas cuando trabajan con el concepto de fracción como razón. Lo que permite establecer que la falta de comprensión conceptual del tema de fracción causa en los estudiantes dificultades a la hora de trabajar con la temática.

El último objetivo específico ayuda a dar respuesta puntal a la pregunta de investigación. Por tanto, el proceso de comprensión de los estudiantes varía con algunas características, como el rendimiento académico de los estudiantes, el tipo de tarea y la manera de resolverlas (individuales o colectivas). En el presente estudio, ambos casos no presentaron una comprensión del concepto de fracción como razón, especialmente en situaciones complejas, como lo fue la tarea 2 en su totalidad (3 categorías de análisis). Muchas investigaciones habían mencionado la falta de comprensión de los estudiantes de primaria sobre el concepto de fracción (Cortina y Cardoso, 2009; Petit, Laird, y Marsden, 2010; García y Cabañas-Sánchez, 2013), pero con esta investigación se particularizó en una de sus interpretaciones: fracción como razón, y además deja evidencia de las principales dificultades que son consecuencia de la falta de comprensión conceptual de la temática.

Con los resultados obtenidos se puede inferir que los estudiantes de sexto grado de educación primaria en México de ambos caso de estudio, presentan un proceso de comprensión endeble cuando resuelven tareas relacionadas con el concepto de fracción como razón, ya que: los estudiantes al resolver las tareas, algunas veces primero asocian el concepto de fracción como razón con una imagen (IM) o inmediatamente la crean y representan (IH). Las representaciones claves en su proceso de comprensión fueron la pictórica y simbólica, en donde presentan errores para establecerlas. Siendo la representación simbólica (fracción) con la que primero relacionan las situaciones de las tareas.

En situaciones simples (tarea 1), a los estudiantes se les facilitó trabajar en la imagen que poseen (PN), por ejemplo, usan el algoritmo de la división para comparar razones matemáticas, proceso en el que los estudiantes del caso 2 presentaron errores. En situaciones complejas (tarea 2) los estudiantes del caso 2 se les dificultó trabajar en la imagen que poseen de las situaciones de la tarea. Los estudiantes del caso 1 abstraen información del proceso que utilizaron al momento de trabajar en la imagen (PN), pero muchas veces sus abstracciones fueron erróneas. Por último, ambos casos en estudio no lograron desvincularse de la imagen que crearon para tratar el concepto de fracción como razón como un objeto formal (F). En relación al modelo teórico los estudiantes para llegar a comprender el concepto, deberían por lo menos haber alcanzado el nivel de Formalising.

Las diferencias más notables en el proceso de comprensión de los estudiantes del caso 1 y los estudiantes del caso 2, fueron las dificultades que los estudiantes del caso 2 presentaron, por ejemplo, realizar repartos equitativos, realizar correctamente la operación de división, calcular correctamente el porcentaje, entre otras. Lo que podría explicar las diferencias en el proceso de comprensión entre los casos, sería que los estudiantes del caso 2, aún se encuentra en el proceso de lograr primeramente una comprensión conceptual del concepto de fracción y de algunos otros procesos matemáticos, puesto que sus antecedentes académicos lo reflejan.

El proceso de comprensión de los estudiantes, se puede evidenciar de manera más precisa y particular en el apartado 4.3 (resultados del estudio de caso). Es de aclarar que este proceso, no siempre se presentó de manera lineal como se describió en los párrafos anteriores (del nivel inferior a nivel superior del modelo teórico), sino que fue una construcción iterativa del proceso, lo que implicó una o más vueltas hacia atrás para avanzar a un nivel superior, esto les permitió reexaminar y avanzar en el proceso de una forma mas enriquecida a la que tenian. Con esta evidencia, se deja ver la característica principal (Folding back) del modelo teórico de Pirie y Kieren (1994).

5.2. La metodología de la investigación

La metodología implementada en el estudio orientó la ejecución de la investigación mediante cinco fases: delimitar cuál sería la interpretación asociada al concepto de fracción a estudiar, planteamiento de las tareas, elección de los casos en estudio, planificación y ejecución de las sesiones y análisis de los datos recolectados. La utilización del método Delphi de Landeta (2002) fue pertinente para delimitar la interpretación a estudiar. En el rediseño de las tareas, el conocimiento de las dificultades que los estudiantes presentan al momento de trabajar con el concepto de fracción de manera general y el marco teórico de PISA (OCDE, 2006), fueron esenciales en la elaboración de las preguntas en las tareas.

La elección del método de estudio de caso fue correcto, ya que el análisis de los datos se centraría en un fenómeno seleccionado para entender la problemática de ciertos participantes, al investigar una variable latente como lo es la comprensión que presenta una persona en relación a un concepto matemático, se requiere de un análisis minucioso, razón por la cual la investigación se enmarco en un estudio de caso.

La técnica de observación de campo, permitió realizar una observación directa y presencial de las acciones de los estudiantes en el aula de clases, plasmadas en la guía de observación. Apoyadas también de los instrumentos para la recogida de la información y como lo menciona George (2017) “La comprensión no es visible, sino que solo puede inferirse por lo que un individuo expresa y actúa” (p.208). En este sentido, se utilizaron técnicas de investigación presentadas en el apartado 3.5.2, que permitieron obtener información del proceso de comprensión de los estudiantes, en relación a lo que decían y hacían al momento de resolver las tareas aplicadas, logrando obtener herramientas necesarias para analizar los datos recolectados con el modelo teórico de Pirie y Kieren (1994), el cual permite describir el proceso de comprensión que siguen los estudiantes al confrontarse con un objeto matemático, por medio de la observación directa.

Además, el proceso de comprensión establecido por los estudiantes fue analizado fácilmente con el modelo teórico de Pirie y Kieren, ya que se analizó cada tarea por separado y cada una de ellas divididas en categorías de análisis y finalmente de forma parcial, con una síntesis del estudio realizado. La estructura metodológica de la investigación es una contribución que, puede usarse por otros investigadores o estudiantes de pregrado y posgrado interesados en estudiar la comprensión de algún concepto matemático.

5.3. Contribución a la literatura

Una de las contribuciones que se hacen a la literatura, con el desarrollo de la investigación, es que se ha sumado al pequeño número de estudios de investigación que se centran en cuál es el proceso de comprensión que presentan los estudiantes, en relación a las interpretaciones del concepto de fracción, específicamente el proceso de comprensión a partir del conocimiento que presentan los estudiantes sobre el concepto de fracción como razón.

En este sentido, la investigación ha proporcionado resultados concretos, por ejemplo se hace notar que, para algunos estudiantes el proceso de comprender esta interpretación del concepto de fracción se asocia muy bien con relacionar el objeto matemático con una imagen que, luego representan para trabajar en ella y abstraer información que les permita formalizar su comprensión. Pero este proceso se ve afectado en la forma de interactuar de los estudiantes con los procesos algorítmicos, conceptos matemáticos, estrategias o técnicas de solución utilizadas durante el proceso de comprensión del concepto.

Además de las contribuciones antes mencionadas, la presente investigación ha proporcionado evidencia empírica para mostrar que, para algunos estudiantes (estudio de caso), la principal estrategia de comparación de fracciones que se les ha enseñado en la interpretación del concepto de fracción como razón, es la de realizar el proceso de división de su numerador con el denominador. Además, para la segunda tarea que presenta una situación compleja, los estudiantes presentaron mayor dificultad para interpretarla y poder resolverla, evidenciando una comprensión endeble del concepto de fracción como razón en situaciones complejas (comparación de razones, identificación de razón, estrategias de reparto).

Otra contribución de la presente investigación, se basa en que gracias a los resultados obtenidos se puede expresar que la endeble comprensión que manifestaron los estudiantes en este estudio, radica en que estos aun no tienen una comprensión conceptual clara de la temática, lo que hace que los estudiantes presenten dificultades básicas a la hora de resolver las tareas. Es de resaltar que en situaciones simples como lo fue la tarea 1, los estudiantes trataron de mantener un buen proceso de comprensión, en relación al modelo teórico de Pirie y Kieren (1994), como crear una imagen de las situaciones, trabajar en ella y tratar de generalizar propiedades particulares del concepto, para lograr formalizarlo. Pero, esta última no fue alcanzada. Ya que los estudiantes presentaron muchas dificultades en cada uno de los niveles que alcanzaron del modelo.

De esta manera se pone de manifiesto lo mencionado por Cortina y Cardoso (2009) alarmando la baja comprensión con la que los estudiantes mexicanos culminan el ciclo escolar de la primaria, en relación al concepto de fracción. Lo que se particularizó con la interpretación del concepto de fracción como razón, atendiendo la preocupación de Petit, Laird, y Marsden (2010) en atender a que se debe la escasa comprensión del concepto en primaria. Encontrando, que uno de los motivos se deba, a lo mencionado en el párrafo anterior, dificultades básicas.

Una contribución más a la literatura, se obtiene con los resultados de la aplicación del método Delphi (Landeta, 2002) y es, que los estudiantes de primaria en México encuentran mayor dificultad para comprender las interpretaciones asociadas al concepto de fracción: como número racional, como razón y la fracción como indicador de una cantidad (decimal). Opinión dada por los docentes mexicanos en servicios, quienes participaron para el desarrollo del primer objetivo específico.

La presente investigación también, pone de manifiesto la utilidad del modelo teórico de Pirie y Kieren (1994) para describir el proceso que siguen los estudiantes para comprender un concepto matemático. En el mismo sentido, se relaciona con lo expresado por Delgado, Codes, Monterrubio y González (2014), que el modelo teórico, permite analizar el proceso de comprensión del conocimiento de los estudiantes cuando interactúan entre ellos. Característica que también se ha evidenciado en el estudio presentado.

5.4. Implicaciones educativas

Los aportes que realiza esta investigación, no solo están dirigidos a los investigadores educativos. Sino también, a los profesores de primaria que centran su atención en que sus estudiantes alcancen la comprensión del concepto de fracción como razón que se está tratando en el aula de clases. En este sentido, se realizó la difusión de los resultados obtenidos a los docentes de la escuela primaria, en la cual sus estudiantes fueron objeto de estudio de la investigación (ver anexo G).

El conocimiento de las dificultades que presentaron los estudiantes cuando usaron sus conocimientos matemáticos del concepto de fracción como razón para resolver las tareas, puede ser de gran utilidad a los docentes en su práctica de enseñanza, para que aborden esas ideas erróneas que surgen durante la enseñanza del concepto en los estudiantes. Ayudándolos así, a superar las dificultades que les imposibilita la buena comprensión del concepto de fracción como razón.

Otra implicación para la enseñanza del concepto de fracción, es que se debería de atender el concepto de unidad en los diferentes contextos de las interpretaciones de las fracciones, ya que los estudiantes presentan dificultad para identificar la unidad que se encuentra en juego a la hora de comparar fracciones con la misma unidad de partida. Esto mismo lo sugiere George (2017) quien manifiesta que si se atiende dicha dificultad, esto permitiría potencialmente una transición más eficiente de la enseñanza y el aprendizaje de una interpretación a otra.

En general, esta investigación aportó al campo de la comprensión matemática escolar, puntualizando cuál es el proceso de comprensión que manifiestan los estudiantes de primaria en relación al concepto de fracción como razón. Conociendo esto el docente, le permite mejorar su práctica de enseñanza, de tal manera que sea más efectiva para que sus estudiantes alcancen la comprensión del concepto de fracción como razón.

5.5. Limitaciones de la investigación

En la realización de toda investigación empírica, se presentan limitaciones. Para el presente estudio algunas de ellas fueron: el tiempo empleado en el proceso de recolección de datos, hubiese sido fructífero realizar un seguimiento a los estudiantes durante un periodo más largo, antes y después de la resolución de las tareas; otra limitación fue el número de tareas aplicadas, con el objetivo de variar el contexto de las mismas y poder realizar argumentos precisos del proceso de comprensión de los estudiantes en diferentes temas que relacionan a las fracciones con las razones matemáticas.

Una limitación más, estaría relacionada con la organización de los participantes (agrupación en parejas), ya que primero, se hubieran resuelto de manera individual las tareas, para conocer el proceso de compresión de cada estudiante; después colocarlos a resolverlas en lo colectivo y ver si el proceso seguido es el mismo.

5.6. Perspectivas de futuro

Dado que existen pocos estudios empíricos que informan sobre el proceso de comprensión de los estudiantes, cuando resuelven tareas relacionadas al concepto de fracción como razón, investigaciones futuras podrían centrarse en seguir investigando esta interpretación con un mayor número de participantes, para lograr una generalización de los resultados obtenidos en el estudio de caso de esta investigación. También, se podrían contribuir, estudiando las otras interpretaciones asociadas al concepto de fracción, que suelen ser de mayor dificultad para aprender por los estudiantes de primaria en México, resultados obtenidos con la implementación del método Delphi (Landeta, 2002) y que fueron presentadas en el apartado 3.2.4.2 de la metodología de investigación.

Otra recomendación para investigaciones futuras, sería el diseño de propuestas didácticas que ayuden a mejorar las principales dificultades básicas que presentaron los participantes del estudio, cuando desarrollaron su proceso de comprensión del concepto de fracción como razón. También, futuras investigaciones se pueden enfocar en explorar las estrategias utilizadas por los docentes, cuando imparten a sus estudiantes el concepto de fracción como razón. Buscando contrastar, si las dificultades que los estudiantes presentaron son consecuencias de esas estrategias. Puesto que, investigaciones (George, 2017) han reportado que los docentes tienen dificultades para comprender las fracciones. Lo que hace, que el tema sea difícil de enseñar.

Sería interesante, investigar cómo los estudiantes desarrollan dentro del salón de clases, el proceso de comprensión del concepto de fracción como razón, mientras el docente promueve el diálogo entre sus estudiantes cuando imparte la temática. En lo que se refiere al modelo teórico, podría ser utilizado para diseñar tareas que ayuden alcanzar la comprensión del concepto de fracción como razón, tanto en situaciones simples como complejas. Puesto que, con el presente estudio se dio a conocer la manera de proceder del estudiante en relación a este concepto y las dificultades que manifiestan al momento que querer alcanzar la comprensión.

Referencias Bibliográficas

Referencias Bibliográficas

Bailey, D., Hoard, M., Nugent, L., & Geary, D. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology, 113*, 447-455.

Bautista, V. A. (2013). *Propuesta para la Enseñanza de Fracciones en Nivel Primaria Usando Argumento Históricos (Tesis de licenciatura).* Chilpancingo de los Bravos: Facultad de matemática de la Universidad Autónoma de Guerrero.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. En D. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (págs. 296-333). New York: NCTM: National council of teachers of mathematics.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational Number Concepts. En R. Lesh, & M. Landau, *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (págs. 91-125). New York: Academic Press.

Brousseaua , G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 1: Rationals as measurement. *Journal of Mathematical Behavior, 23*, 1-20.

Brownell, W. A., & Sims, V. M. (1946). The nature of understanding. En J. Kilpatrick, & J. Weaver, *The place of meaning in mathematics instruction: selected theoretical papers of William A. Brownell* (Vol. 21, págs. 161-179). Stanford: Board of Trustees of the Leland Stanford Junior University.

Butto, C. (2013). El aprendizaje de fracciones en educación primaria: una propuesta de enseñanza en dos ambientes. *Horizontes Pedagógicos, 15*(1), 33-45.

Cáceres, M., Chamoso, J., Sánchez, B., Rodríguez, M., Corcho, P., & Cárdenas, J. (2015). Tareas auténticas, ¿un objetivo para la enseñanza obligatoria? En P. Sánchez (Ed.), *17 Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas JAEM* (pág. 51). Cartegena, España: Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia, SEMRM.

Calderón, R. K. (2012). *Significados asociados al concepto de fracción en los libros de texto de educación básica (Tesis de licenciatura).* Chilpancingo de los Bravos: Facultad de matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero.

Carrillo, J., Contreras, L., Climent, N., Montes, M., Escudero, D., & Flores, E. (2016). Fracciones y decimales . En J. Carrillo, L. Contreras, N. Climent, M. Montes, D. Escudero, & E. Flores, *Didáctica de las Matemáticas para maestros de educación primaria* (págs. 75-97). Madrid: Ediciones Paraninfo, S.A.

Cid, E., Godino, J., & Batanero, C. (2004). Sistemas numéricos para maestros: fracciones y números racionales positivos. En J. Godino, *Matemáticas para maestros* (págs. 101-122). Granada: Proyecto Edumat-Maestros.

Codes, M., Delgado , M., Gónzalez, M. T., & Monterrubio, M. (2013). Comprensión del concepto de serie numérica a través del modelo de Pirie y Kieren. *Revista enseñanza de las ciencias, 31*(3), 135-154.

Cohen, L., & Manion, L. (2002). Investigación histórica. En L. Cohen, & L. Manion, *Métodos de investigación educativa* (págs. 75-100). Madrid: La Muralla S.A.

Cortina, J. L. (2014). Investigar las fracciones: experiencias inspiradas en la metodología de los experimentos de diseño. *Educación Matemática*(25), 270-287.

Cortina, J., & Cardoso, E. (2009). Mexican sixth grade students' understandings of fraction notations as numbers that express quantity. En S. Swars, D. Stinson, & S. Lemons-Smith (Ed.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (págs. 765-772). Atlanta, GA: Georgia State University.

Cramer, K., Monson, D., Ahrendt, S., Wyberg, T., Pettis, C., & Fagerlund, C. (2018). Reconstructing the unit on the number line: Tasks toextend fourth graders' fraction understandings. *Investigations in Mathematics Learning*, DOI: 10.1080/19477503.2018.1434594.

Delgado, M. L., Codes, M., Monterrubio, M. C., & González, M. T. (2014). El concepto de serie numérica. Un estudio a través del modelo de Pirie y Kieren centrado en el mecanismo "folding back". *Avances de Investigación en Educación Matemática, 6*, 25 - 44.

Department for Education (DfE). (2011). *The Framework for the National Curriculum. A report by the Expert Panel for the National Curriculum review.* London: Department for Education .

Duninsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall, *Advanced mathematical thinking* (págs. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Fandiño , M. I. (2009). *Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos.* Bogotá: Editorial Magisterio.

Fandiño, M. I. (2007). Fractions: conceptual and didactic aspects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*(7), 23-45.

Fazio, L., & Siegler, R. (2011). *La enseñanza de las fracciones (Prácticas Educativas 22).* Ginebra: Oficina Internacional de Educación (OIE).

Flores M, P., & Torralbo R, M. (2011). Números racionales. En A. Isidoro Segovia, & L. Rico Romero, *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (págs. 189-218). Madrid: Ediciones Pirámide.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* New York: Kluwer academic publishers.

Fuentes, R. F. (2010). Enseñanza de Fracciones. Una Experiencia Didáctica en Quinto Año de Enseñanza Primaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*(22), 169-182.

Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B., & Content, A. (2013). A componential view of children's difficulties in learning fractions. *Frontiers in Psychology, 4*(715), 1-12.

García, I., & Cabañas-Sánchez, G. (2013). El Concepto de Fracción en Situaciones de Medición, División y la Relación Parte-Todo con Estudiantes de nivel Medio Superior. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 26*, págs. 213-221. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

George, L. (2017). *Children's learning of the partitive quotient fraction sub-construct and the elaboration of the don't need boundary feature of the pirie-kieren theory (Tesis doctoral publicada).* Inglaterra: University of Southampton: Faculty of social, human & mathematical sciences.

Glasersfeld, E. V. (1987). Learning as a constructive activity. En J. Claude, *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (págs. 3-18). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

González, A. M., & Sierra, M. V. (2003). El Método de investigación Histórico en la Didáctica del Análisis Matemático. *Investigación En Educación Matemática: Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (págs. 109-130). Granada, España: Universidad de Granada.

González, D. (2015). *Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria* . Santander: Facultad de Educación: Universidad de Cantabria.

Hincapié, C. P. (2011). *Construyendo el Concepto de Fracción y sus Diferentes Significados, con los Docentes de Primaria de la Institución Educativa San Andrés de Girardota.* Medellin: Facultad de Educación de la Universidad Nacional de Colombia.

Hurtado, M. E. (2012). *Una Propuesta para la Enseñanza de Fracciones en el Grado Sexto.* Bogotá: Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia.

INEE (2015). (25 de Septiembre de 2017). *Resultados nacionales 2015. 6° de primaria y 3° de secundaria. Lenguaje y Comunicación. Matemáticas.* Obtenido de Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA): http://www.inee.edu.mx/images/stories/2015/planea/final/fasciculos-finales/resultadosPlanea-3011.pdf

Kastberg, S. E. (2002). *Understanding Mathematical Concepts: The Case of the Logarithmic Function.* Athens, Georgia: The University of Georgia.

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. En R. Lesh, & D. Bradbard, *Number and measurement: Papers from a research workshop* (págs. 101-144). Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. E. (1980). The reational number construct. Its Elements and mechanisms. En T. E. Kieren, *Recent Research on Number Learning* (págs. 125-149). Columbus: ERIC/SMEAC.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. En F. Lester, *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (págs. 629-667). Charlotte: NCTM: National council of teachers of mathematics.

Landeta, J. (2002). *El método Delphi. Una técnica de previsión del futuro.* Barcelona: Editorial Ariel S.A.

Lee, H.-J., & Boyadzhiev, I. (2016). Making sense of fractions with GeoGebra: representating fractions using area and length. *Mathematics in school, 45*(1), 2-6.

Lewis, K. (2016). Understanding mathematical learning disabilities as developmental difference: a fine-grained analysis of one student's partitioning strategies for fractions. *Infancia y Aprendizaje: Journal for the Study of Education and Development, 39*, 1-21.

Linstone, H., & Turoff, M. (1975). *The Delphi method: techniques and applications.* Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.

Llinares , S., & Sánchez, M. V. (1988). *Matematicas. Cultura y aprendizaje: Fracciones.* España, Madrid: Editorial sintesis.

López, J. A. (2013). *El Aprensizaje del Concepto de Fracción, Desde la Perspectiva Histórico-Cultural: Un Camino.* Caucasia: Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia.

Martin, L., & Pirie , S. (2003). Making images and noticing properties: The role of the computer in mathematical generalisation. *Mathematics Education Research Journal, 15*(2), 171-186.

McMillan, J., & Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa: Una introducción conceptual* (Quinta ed.). Madrid: Pearson educación S.A.

Meel, D. E. (2003). Models and Theories of Mathematical Understanding: Comparing Pirie and Kieren's Model of the Growth of Mathematical Understanding and APOS Theory. En A. Selden, E. Dubinsky, G. Harel, & f. Hitt, *Researche in collegiate Mathematics Educativo. V* (Vol. 12, págs. 132-181). Rhode Island: CBMS: Issues in mathematics education.

Meza, A. S., & Barrios, A. G. (2010). Propuesta Didáctica para la Enseñanza de las Fracciones. *Aprendizaje y Evaluación en Matemáticas* (págs. 674 - 682). Bogotá: Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.

Moreno V, A., & Ramírez U, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico R, & A. Moreno V, *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (págs. 243-258). Madrid: Ediciones Pirámide.

OCDE. (2006). *Evaluación de la Competencia Científica, Lectora y Matemática: Un marco teórico para PISA 2006.* Madrid: Santillana.

OCDE. (2016). *Informe de resultados de México en la evaluación 2015 de PISA.* París: Creative Commons.

Peláez, N. (2013). *Niveles de comprensión sobre el concepto de fracción en estudiantes de séptimo grado.* Chilpancingo de los Bravos: Facultad de Matemáticas de la UAGro.

Perera, P. D., & Valdemoros, M. Á. (2007). Propuesta Didáctica para la Enseñanza de las Fracciones en Cuarto Grado de Educación Primaria. *Investigación en Educación Matemática XI* (págs. 209-218). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM.

Perera, P., & Valdemoros, M. (2009). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Educación Matemática, 21*(1), 29-61.

Pérez, L. M. (2011). *Un AVA para los Estudiantes de Grado Cuarto que Constribuya a la Compresión de los Conceptos de Fracciones.* Bogotá: Facultad de Educación de la UNIMINUTO.

Pescador, M. R. (2009). *Fraccionando Fracciones: Una Propuesta para la Ensenañza de las Operaciones con Fracciones.* Ciudad de México: Facultad de Ciencias de la UNAM.

Petit, M., Laird, R., & Marsden, E. (2010). *A focus on fractions: Bringing research to the classroom.* New York: Routledge.

Pirie , S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the learning of mathematics, 9*(3), 7-11.

Pirie , S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understading: how can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics, 26*, 165-190.

Pirie, S., & Kieren, T. (1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational studies in mathematics, 23*, 505-528.

Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1982). Interpretations of Rational Number Concepts. En L. Silvey , & J. Smart , *Mathematics for Grades 5-9* (págs. 59-72). Reston, Virginia: NCTM.

Ríos, Y. G. (2007). Una Ingeneria Didáctica Aplicada Sobre Fracciones. *Revista Omnia, 13*(2), 120-157.

Rojas, N. (2010). *Conocimiento para la enseñanza y calidad matemática de la instrucción del concepto de fracción: Estudio de caso de un profesor chileno (Tesis de maestria publicada).* Granada, España: Departamento de didáctica de la matemática (Universidad de Granada).

Rosales, M., Barrientos, J., Issa, E., López, M., Tovilla, M., & Velázquez, L. (2015). *Desafios matemáticos. Libro para el alumno. Sexto grado.* México: SEP.

Rosales, M., Barrientos, J., Issa, E., López, M., Tovilla, M., & Velázquez, L. (2015). *Desafios matemáticos. Libro para el maestro. Sexto grado.* México: SEP.

Sánchez, E. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16*(1), 65-97.

Sanz, M., & Gómez, B. (2015). Problemas descriptivos de fracciones. Componentes críticas. *ENSAYOS. Revista de la Facultad de Educación de Albacete, 30*(1), 83-93.

SEP. (2011). *Programa de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas.* México: Gobierno feredal SEP.

SEP. (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Cuarto grado.* México: Gobierno feredal SEP.

SEP. (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Quinto grado.* México: Gobierno feredal SEP.

SEP. (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Sexto grado.* México: Gobierno feredal SEP.

SEP. (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Tercer grado.* México: Gobierno feredal SEP.

Siegler, R., Duncan, G., Davis-Kean, P., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., . . . Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science, 23*(7), 691-697.

Sierpinska, A. (1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 10*(3), 24-36.

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The arithmetic teacher*, 9-15.

Skemp, R. (1979). Goals of learning and qualities of understanding. *Mathematics teaching*(88), 44-49.

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las Matemáticas.* Madrid: Ediciones Morata S.A.

Sullivan, P., Knott, L., & Yang, Y. (2015). The relationships between task design, anticipated pedagogies, and student learning. En A. Watson, & M. Ohtani, *Task design in Mathematics Education* (págs. 83-114). New York: Springer.

Thompson, P., & Saldanha, L. (2003). Fractions and Multiplicative Reasoning. En J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter, *Research companion to the Principles and Standards for School Mathematics* (págs. 95-114). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Tsung-Lung, T., & Hui-Chuan, L. (2017). Towards a Framework for Developing Students' Fraction Proficiency. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48*(2), 244-255.

Valdemoros, M. E. (2010). Dificultades experimnetadas por el maestro de primaria en la enseñanza de fracciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-II), 423-440.

Valverde, G. (2012). *Competencias Matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de Educación Primaria (tesis doctoral).* Granada: Departamento de didácticas de la Matemática de la Universidad de Granada.

Villa, J. A. (2011). *La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren* . Medellín : Universidad de Antioquia (tesis doctoral) .

Visnovska, J., & Cortina, J. L. (2017). Learning to support all students' fraction understanding. *Equity and diversity in elementary mathematics education* (págs. 430-440). Prague, Czech Republic: Bi-annual International Symposium on Elementary Mathematics Teaching.

Warner, L. B. (2008). How do students' behaviors relate to the growth of their mathematical ideas? *Journal of Mathematical Behavior, 27*, 206–227.

Anexos de la investigación

Anexo A

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
MAESTRÍA EN CIENCIAS ÁREA MATEMÁTICA EDUCATIVA

CUESTIONARIO

El tema de fracción en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, es un objeto de estudio fructífero para los investigadores. Reporta la literatura especializada que existen muchos aspectos que intervienen en este proceso y de allí las dificultades con su tratamiento escolar. A continuación se presenta un cuestionario que se tendrá como base para obtener un mayor conocimiento intersubjetivo y prospectivo acerca de las fracciones en el proceso de la enseñanza y aprendizaje.

Calderón (2012) realizó una investigación referente a las interpretaciones asociadas al concepto de fracción en los libros de texto de educación básica mexicana del año 2011, arrojando como resultado que los libros de textos de la Educación básica (primaria) presentan nueve interpretaciones asociadas al concepto de fracción. Desde esta perspectiva, considera la pregunta:

¿Desde tu experiencia como docente, cuál de las siguientes interpretaciones asociadas al concepto de fracción has percatado que sean más difíciles de aprender por parte de los estudiantes?

Y califica según la escala:

1: *Se presenta con mayor frecuencia.*
2: *Se presenta con regular frecuencia.*
3: *Se presenta con menos frecuencia.*

INTERPRETACIONES ASOCIADAS A LAS FRACCIONES	CALIFICACIÓN
La fracción como parte de un todo a veces continuo, a veces discreto	
La fracción como cociente	
La fracción como razón	
La fracción como operador	
La fracción como porcentaje	
La fracción como número racional	
La fracción como punto de una recta orientada	
La fracción como medida	
La fracción como indicador de una cantidad de elección en el todo (Decimales)	

Anexo B

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
MAESTRÍA EN CIENCIAS ÁREA MATEMÁTICA EDUCATIVA

CUESTIONARIO

Al analizar las respuestas que se obtuvieron del grupo de expertos sobre el interrogante tratado en este cuestionario, se obtiene por el grupo coordinador la preparación del nuevo cuestionario, para así terminar con la interpretación de los resultados finales.

Ahora, considerando el mismo interrogante, pero solo calificando las interpretaciones asociadas al concepto de fracción que mayor dificultad presentan los estudiantes, esto basado en el resultado del cuestionario anterior. Desde esta perspectiva, considera la pregunta:

¿Desde tu experiencia como docente, cuál de las siguientes interpretaciones asociadas al concepto de fracción has percatado que sean más difíciles de aprender por parte de los estudiantes?

Y califica según la escala:

1: *Se presenta con mayor frecuencia.*
2: *Se presenta con regular frecuencia.*
3: *Se presenta con menos frecuencia.*

INTERPRETACIONES ASOCIADAS A LAS FRACCIONES	CALIFICACIÓN
La fracción como razón	
La fracción como operador	
La fracción como número racional	
La fracción como punto de una recta orientada	
La fracción como indicador de una cantidad de elección en el todo (Decimales)	

Anexo C

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
MAESTRÍA EN CIENCIAS ÁREA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Tarea 1 “Qué cantidad de naranjas quiero”

<table>
<tr><td>Integrantes</td><td></td></tr>
<tr><td>Materias y recursos</td><td>Hojas de papel, lápiz grafito, goma (borrador) y sacapuntas.</td></tr>
<tr><td>Tipo de agrupación</td><td>Grupos de dos integrantes.</td></tr>
<tr><td>Situación de aprendizaje</td><td>La plaza de mercado.</td></tr>
<tr><td>Temporalización</td><td>1 hora.</td></tr>
<tr><td>Tarea</td><td>En el mercado Baltazar, un kilo de naranja consta de 9 piezas y cuesta $10. Mientras que en la huerta de don José, un kilo consta de 7 piezas de naranja y cuestan $8.

a) ¿Son comparables las dos situaciones? ¿Por qué?

b) Representen gráficamente las dos situaciones.

c) ¿Dónde comprarían las naranjas teniendo en cuenta la representación anterior? ¿Por qué?

d) Expresen verbalmente la relación entre las cantidades de cada una de esas situaciones y escriban en forma de fracción ambas relaciones.

e) Comparen las fracciones anteriores para determinar dónde es preferible comprar las naranjas. Justifiquen la respuesta.

Si en el mercado Baltazar el kilo de naranja se oferta con un 20% de descuento en su precio normal.

f) ¿Cuál sería el nuevo costo de un kilo de naranja? Describan paso a paso su respuesta.

g) Con ese descuento realizado en el mercado Baltazar ¿Dónde comprarían ahora el kilo de naranja, huerta de don José o en el mercado? ¿Por qué?</td></tr>
</table>

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
MAESTRÍA EN CIENCIAS ÁREA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Tarea 2 “Comparto, disfruto y aprendo”

<table>
<tr><td>Integrantes</td><td></td></tr>
<tr><td>Materias y recursos</td><td>Hojas de papel, lápiz grafito, goma (borrador) y sacapuntas.</td></tr>
<tr><td>Tipo de agrupación</td><td>Grupos de dos integrantes.</td></tr>
<tr><td>Situación de aprendizaje</td><td>Restaurante de pizza.</td></tr>
<tr><td>Temporalización</td><td>1 hora con 30 minutos.</td></tr>
<tr><td>Tarea</td><td>

Cada mes María y sus amigos se encuentran en el restaurante la Alamedilla para cenar pizza. Habitualmente María llega tarde, pero sus amigos la aprecian mucho y la esperan. Le reservan un sitio en cada una de las dos mesas que ocupan. En la mesa 1 hay 4 pizzas grandes (sin partir) y 5 personas, en la mesa 2 hay 6 pizzas grandes (sin partir) y 7 personas.

a) Representen gráficamente la situación de cada mesa antes de que llegue María.

María llega con mucho apetito (hambre) y tiene que decidir dónde sentarse de forma que le corresponda la mayor cantidad de pizza.

b) Representen gráficamente la situación que resulta si María decide sentarse en la mesa 1.

c) ¿Qué cantidad de pizza le corresponden a cada uno, si María eligió sentarse en la mesa 1? Justifiquen su respuesta.

d) Ahora, representen gráficamente la situación que resulta si María decide sentarse en la mesa 2.

e) Siendo así, ¿Qué cantidad de pizza le corresponden a cada uno, si María eligió sentarse en la mesa 2? Justifiquen su respuesta.

f) ¿Cuál de las dos mesas le sugieren a María que elija para sentarse? Expliquen su razonamiento.

g) Supongan que María seleccionó la mesa 1, en la cual agregan 2 pizzas a las 4 que ya tenían. Para mantener el mismo reparto que tenían anteriormente ¿Cuál será el número de personas que deberían agregarse? Expliquen su razonamiento.

h) Si María eligió la mesa 2, llegaron 4 amigos más y quieren comer la misma cantidad de pizza que antes ¿Cuántas pizzas más deben comprar? Expliquen su respuesta.

i) Si se quiere colocar 240 personas en mesas grandes (para 8 personas) y mesas pequeñas (para 6 personas) manteniendo una proporción de 7 mesas grandes a 4 pequeñas ¿Cuántas mesas de cada tipo se necesitan?

</td></tr>
</table>

Anexo E

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
MAESTRÍA EN CIENCIAS ÁREA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Guía de observación del estudio de caso I

Estudio de caso: Estudiante 1 (E1, masculino) y estudiante 2 (E2, femenina) ambos presentan rendimiento académico alto.

Observador: Jhonatan Arenas y Mayra Jiménez **Fecha:** 23 de enero de 2018 **Tarea:** Qué cantidad de naranjas quiero

Características	Descripciones
Organización Inicial	***¿Quién lee?*** Ambos estudiantes leen mentalmente la tarea al inicio.
	¿Quién lleva la idea? E1 es quien empieza liderando el grupo y organizar las ideas.
	¿Quién escribe? E2 es quien empieza a escribir en la hoja de trabajo durante los primeros minutos.
	¿Qué recursos utilizan? Las hojas de trabajo, lápiz, borrador y sacapuntas.
Actitudes	***¿Cómo trabajan en equipo?*** Los estudiantes inician tímidos para dialogar entre ellos, pero logran superar y trabajan como equipo, aportando cada uno sus ideas y respetando las de su compañero.
	¿Comparten ideas? ¿Cuáles? Sí, de acuerdo a lo solicitado en cada inciso de la tarea, discuten y se colocan en acuerdo para elegir una respuesta.
	¿Cómo se comportan durante la tarea? Empiezan interactuando poco entre ellos e inician cada uno respondiendo por separado la primera pregunta. Pero, lo superan y después presentan interacción entre ellos, comportándose bien durante todo el desarrollo de la tarea.
	¿Cómo se notan al terminar la tarea? Les gusto la tarea (se les nota en su expresión) y se notan tranquilo.
Construcción del concepto	***¿Cómo interactúan con las ideas?*** Cada estudiante expresa su idea y el otro estudiante la comparte o contradice justificando su postura.
	¿Surgen dudas durante el desarrollo? ¿Cuáles? Sí, cómo se representan las situaciones y en deducir si son comparables las dos situaciones presentadas en la tarea 1.
	¿Cuáles otros conceptos utilizan? Utilizan conceptos y procesos matemáticos como el de división, multiplicación y porcentaje.
	¿Cómo deciden el proceso y la respuesta? Platican entre ellos y deducen que proceso deben de realizar para dar respuesta a los interrogantes de la tarea.
	¿Están todos de acuerdo con la idea o proceso? Sí, ya que antes de realizar el proceso lo consultan entre ellos.
Organización Durante el desarrollo	***¿Quién aporta más ideas?*** E1 es quien realiza mayor aporte y conduce a E2 para que interactúe.
	¿Mantienen el mismo rol (leer y escribir) después de iniciar la tarea? Sí, E1 es quien escribe en la hoja de trabajo que entregan. Pero ambos estudiantes durante el desarrollo leen.
Finalización	***¿Qué expresan los estudiantes al terminar la tarea?*** Que les pareció bien y que se sintieron agradables al resolver.

Anexo E

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
MAESTRÍA EN CIENCIAS ÁREA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Guía de observación del estudio de caso II

Estudio de caso: Estudiante 3 (E3, masculino) y estudiante 4 (E4, femenina) ambos presentan rendimiento académico bajo.

Observador: Jhonatan Arenas y Mayra Jiménez **Fecha:** 25 de enero de 2018 **Tarea:** Qué cantidad de naranjas quiero

Características	Descripciones
Organización Inicial	***¿Quién lee?*** Ambos estudiantes leen mentalmente la tarea al inicio, pero E3 es quien luego lee en voz alta.
	¿Quién lleva la idea? E4 es quien lidera el grupo, pero E3 organiza las ideas.
	¿Quién escribe? E4 es quien empieza a escribir en la hoja de trabajo.
	¿Qué recursos utilizan? Las hojas de trabajo, lápiz, borrador y sacapuntas.
Actitudes	***¿Cómo trabajan en equipo?*** Se les dificulta trabajar como equipo, E4 no involucra mucho a su compañero.
	¿Comparten ideas? ¿Cuáles? E4 siempre quiere tener la razón pero E3 defiende su postura y en ciertas ocasiones la contradice, a la final responden teniendo en cuenta más lo expresado por E4.
	¿Cómo se comportan durante la tarea? Los estudiantes se notan confundidos y E3 muy distraído, muchas veces E4 quiere resolver ella sola las preguntas sin tener en cuenta la opinión de E3.
	¿Cómo se notan al terminar la tarea? Les gusto la tarea (se les nota en su expresión), pero se notan distraídos.
Construcción del concepto	***¿Cómo interactúan con las ideas?*** E4 expresa su idea y E3 la comparte o contradice justificando su postura.
	¿Surgen dudas durante el desarrollo? ¿Cuáles? Sí, cómo se representan las situaciones, cómo se construye un plano cartesiano, cómo se realiza el proceso de división y cómo se obtiene el porcentaje de una cantidad entera.
	¿Cuáles otros conceptos utilizan? Utilizan conceptos y procesos matemáticos como el del plano cartesiano, división y porcentaje.
	¿Cómo deciden el proceso y la respuesta? E4 expresa su punto de vista y E3 lo discute o acepta, siendo E4 quien escribe las respuestas.
	¿Están todos de acuerdo con la idea o proceso? Muchas veces no, ya que E3 no queda convencido del razonamiento dado por E4, pero a la final ella le justifica y el acuerda a estar aceptado con ella.
Organización Durante el desarrollo	***¿Quién aporta más ideas?*** E4 es quien realiza mayor aporte y conduce a E3 para que interactúe, pero las ideas de E3 son más acertadas.
	¿Mantienen el mismo rol (leer y escribir) después de iniciar la tarea? Sí, E4 es quien escribe en la hoja de trabajo que entregan. Pero ambos estudiantes durante el desarrollo leen, siendo E4 con mayor frecuencia.
Finalización	***¿Qué expresan los estudiantes al terminar la tarea?*** Que les pareció bien y que se sintieron bien al resolver.

Anexo E

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
MAESTRÍA EN CIENCIAS ÁREA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Guía de observación del estudio de caso I

Estudio de caso: Estudiante 1 (E1, masculino) y estudiante 2 (E2, femenina) ambos presentan rendimiento académico alto.

Observador: Jhonatan Arenas y Mayra Jiménez **Fecha:** 12 de febrero de 2018 **Tarea:** Comparto, disfruto y aprendo

Características	Descripciones
Organización Inicial	***¿Quién lee?*** Entre los dos deciden que sea E2 quien lea la tarea.
	¿Quién lleva la idea? Ambos estudiantes interactúan entre ellos y aportan ideas.
	¿Quién escribe? E1 es quien empieza a escribir en la hoja de trabajo.
	¿Qué recursos utilizan? Las hojas de trabajo, lápiz, borrador y sacapuntas.
Actitudes	***¿Cómo trabajan en equipo?*** Realizan buen trabajo como equipo aportando cada uno ideas y acuerdan entre los dos las respuestas.
	¿Comparten ideas? ¿Cuáles? Ambos estudiantes expresan sus ideas, mientras uno la expresa el otro la acepta o invalida dando su justificación.
	¿Cómo se comportan durante la tarea? Los estudiantes presentan buena disposición para resolver la tarea y se notan cómodos con la misma.
	¿Cómo se notan al terminar la tarea? Les gusto la tarea (se les nota en su expresión), pero mencionaron que se les dificulto más resolverla.
Construcción del concepto	***¿Cómo interactúan con las ideas?*** Ambos estudiantes expresan su punto de vista y debaten al respecto para obtener una respuesta.
	¿Surgen dudas durante el desarrollo? ¿Cuáles? Sí, cómo se representan las situaciones, cómo realizar el reparto de las pizzas, cómo utilizar la proporción dada.
	¿Cuáles otros conceptos utilizan? Utilizan conceptos y procesos matemáticos como el de división y proporcionalidad.
	¿Cómo deciden el proceso y la respuesta? Los estudiantes interactúan entre para acordar la respuesta, antes de escribirla en la hoja de trabajo a entregar.
	¿Están todos de acuerdo con la idea o proceso? Sí están de acuerdo con las ideas y procesos, cuando alguno de los dos no lo está, expone sus argumentos.
Organización Durante el desarrollo	***¿Quién aporta más ideas?*** Ambos estudiantes por igual, se involucraron en el desarrollo de la tarea.
	¿Mantienen el mismo rol (leer y escribir) después de iniciar la tarea? Sí, mantiene el mismo rol, pero algunas veces cambian los roles.
Finalización	***¿Qué expresan los estudiantes al terminar la tarea?*** Que esta tarea se les dificulta más resolverla que la anterior, pero que les gusto.

Anexo E

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
MAESTRÍA EN CIENCIAS ÁREA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Guía de observación del estudio de caso II

Estudio de caso: Estudiante 3 (E3, masculino) y estudiante 4 (E4, femenina) ambos presentan rendimiento académico bajo.

Observador: Jhonatan Arenas Peñaloza **Fecha:** 14 de febrero de 2018 **Tarea:** Comparto, disfruto y aprendo

Características	Descripciones
Organización Inicial	***¿Quién lee?*** E4 empieza leyendo el enunciado de la tarea.
	¿Quién lleva la idea? E4 es quien lidera el grupo, pero E3 realiza procesos en las hojas de trabajo.
	¿Quién escribe? E4 es quien empieza a escribir en la hoja de trabajo a entregar.
	¿Qué recursos utilizan? Las hojas de trabajo, lápiz, borrador y sacapuntas.
Actitudes	***¿Cómo trabajan en equipo?*** Trabajan más como equipo, pero sigue E4 manteniendo el liderazgo.
	¿Comparten ideas? ¿Cuáles? Sí comparten ideas en relación a lo solicitado en la tarea, aunque se les dificultad colocarse de acuerdo con lo que expresa cada uno.
	¿Cómo se comportan durante la tarea? Los estudiantes se notan confundidos y se distraen con facilidad, es E3 quien presenta mayor distracción.
	¿Cómo se notan al terminar la tarea? No se notan conforme con lo respondido y se notan confundidos.
Construcción del concepto	***¿Cómo interactúan con las ideas?*** E4 expresa su idea y E3 la comparte o contradice justificando su postura o viceversa.
	¿Surgen dudas durante el desarrollo? ¿Cuáles? Sí, cómo se representan las situaciones, cómo realizar el reparto de las pizzas, cómo utilizar la proporción dada.
	¿Cuáles otros conceptos utilizan? Utilizan conceptos y procesos matemáticos como el de igualdad, multiplicación y división.
	¿Cómo deciden el proceso y la respuesta? E4 expresa su punto de vista y E3 lo discute o acepta. Pero E4 siempre expresa tener la razón, no siendo esto cierto siempre.
	¿Están todos de acuerdo con la idea o proceso? Muchas veces no, ya que E3 no queda convencido del razonamiento dado por E4, pero a la final ella le justifica y el acuerda a estar aceptado con ella.
Organización Durante el desarrollo	***¿Quién aporta más ideas?*** E4 es quien realiza mayor aporte y conduce a E3 para que interactúe, pero las ideas de E3 son más acertadas.
	¿Mantienen el mismo rol (leer y escribir) después de iniciar la tarea? Sí, pero a la final ambos estudiantes interactúan e intercambias roles.
Finalización	***¿Qué expresan los estudiantes al terminar la tarea?*** Que era más difícil y lo que les ayudo era que decía que las pizzas estaban sin partir.

Anexo F

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
MAESTRÍA EN CIENCIAS ÁREA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Tabla para el análisis del estudio de caso

Estudio de caso: Caso I, parejas con alto rendimiento académico.

Investigador: Jhonatan Arenas Peñaloza **Fecha:** 14/02/18 **Tarea:** Qué cantidad de naranjas quiero

Categoría	Tiempo (video)	Extracto (transcripción)	Nivel (modelo)	Justificación (por qué)
Elección de la mejor razón	3:08 minutos.	E2: *Tenemos que saber que cuesta cada naranja aquí y aquí…* [Señala los datos que se presenta en la tarea en relación con las dos situaciones].	*Image Making*	Empiezan a realizar acciones mentales con el fin de crear una idea del nuevo concepto matemático.
	3:13 minutos.	E1: ¡*Sí! Tenemos que hacer las fracciones.* [Se refieren a estas representaciones $\frac{9}{10}$ *y* $\frac{7}{8}$].	*Image Having*	Trabajan sobre sus representaciones mentales y son capaz de emplear una construcción mental sobre el concepto matemático.
	3:29 minutos. 8:10 minutos. 8:34 minutos.	E1: *Hay que dividir 10 entre 9 y 8 entre 7.* E1: *Yo digo que en el mercado Baltazar es más económica, porque cada naranja cuesta $1,1 y en la huerta de don José cada naranja cuesta $1,14. Así que creo que conviene más esta* [señala la operación realizada con 10/9]. E2: *¡Sí! es que cada naranja está más barata aquí* [señala el proceso realizado con la situación del mercado] *que acá* [señala proceso realizado con huerta de don José].	*Property Noticing*	Utilizan aspectos de las imágenes mentales que ya posee, para construir propiedades específicas del concepto y tratar de generalizarlas, en esta parte los estudiantes utilizaron la estrategia de división para encontrar el costo de cada naranja en cada una de las dos situaciones.
	10:36 minutos. 10:36 minutos. 11:02 minutos.	E1: *Cada uno hagamos una representación.* E1: *Yo hago está…* [Señala el proceso realizado con la situación de la huerta de don José]. E2: *Son solo siete naranjas* [expresó al observar que E1 había representado ocho circunferencias que utilizaron para representar las naranjas].	*Image Having* *Property Noticing*	Vuelven a trabajar en la construcción de imágenes para representar las situaciones, lo que desencadenó un *folding back*, ya que los estudiantes retroceden a un nivel inferior que ya habían superado (*Image Having*), pero como se percibe se regresan con una comprensión más sólida y lo que hacen es asociarlo a las abstracciones

	11:05 minutos. 12:07 minutos.	E1: *¡Ha si son siete!...* [E1 empieza a borrar una circunferencia (naranja) cuando E2 le expresa que dibujó una de más]. E1: *En el mercado Baltazar compraríamos las naranjas porque son más baratas.*		realizadas anteriormente.
Comparación de las razones	15:16 minutos. 15:18 minutos. 15:26 minutos. 15:27 minutos. 15:34 minutos.	E1: *Lo primero que tenemos que hacer es…* E2: *Sacar el porcentaje del precio anterior.* E1: Si *ajá… ¿De este precio?* [Señala el costo de la huerta de don José $8]. E2: *No, ¿De diez no? Por qué dice: si en el mercado Baltazar el kilo de naranjas se oferta con un 20%...* E1: Entonces *es esta* [señala el costo del mercado Baltazar] *¡Ah!, sí es diez.*	*Primitive Knowing*	Los estudiantes se enfrentan con la tarea relacionándola con sus conocimientos vistos en clases, como el obtener el porcentaje de un valor numérico.
	16:29 minutos. 16:34 minutos. 16:47 minutos.	E1: *Es $2 el descuento… ¿y luego se lo restamos?* E2: *Sí, a diez le restamos dos.* E1: *El nuevo precio es $8.*	*Property Noticing*	Los estudiantes utilizan propiedades específicas para obtener el descuento y abstraen información del mismo.
	17:40 minutos. 17:41 minutos. 17:42 minutos. 19:40 minutos.	E1: *¿En el mercado Baltazar nuevamente no? porque ya tendríamos un descuento.* E2: *Pero tenemos que hacer esto* [señala el proceso que realizaron anteriormente para conocer el valor de cada unidad de naranja] *porque aquí ya cuesta esto* [señala el nuevo costo del kilo de naranjas con el descuento realizado] *y aquí cuesta menos.* E2: *¿Entonces sería ocho noveno no? Volvamos hacer la fracción y la división.* E1: *Ahora cuesta cada naranja $0,8 así que…*	*Image Having* *Property Noticing*	Es evidente que realizan un *folding back*, para representar la nueva situación que obtuvieron con el descuento realizado en el mercado Baltazar. Encontrándose ahora en el nivel de *Image Having*, con una representación simbólica de la situación, luego trabajan sobre la imagen que construyeron y empiezan a abstraer información de ese proceso.
	19:42 minutos.	E2: *En el mercado la naranja está más abarata que antes.* E1: *Aja, si en el mercado.*	*Formalising*	Se desligan por completo de la imagen concreta y consideran el concepto como objeto formal determinando dónde les conviene comprar las naranjas con el descuento efectuado.

Anexo F

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
MAESTRÍA EN CIENCIAS ÁREA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Tabla para el análisis del estudio de caso

Estudio de caso: Caso I, parejas con alto rendimiento académico.

Investigador: Jhonatan Arenas Peñaloza **Fecha:** 05/03/18 **Tarea:** Comparto, disfruto y aprendo

Categoría	Tiempo (video)	Extracto (transcripción)	Nivel (modelo)	Justificación (por qué)
Elección de la mejor razón	01:35 minutos. 01:36 minutos.	E1: *¿Tenemos que hacer la fracción?* E2: *Tenemos que representar gráficamente.*	*Image Making*	Empiezan a realizar acciones mentales con el fin de crear una idea del nuevo concepto matemático.
	01:38 minutos. 02:09 minutos. 02:14 minutos. 02:15 minutos.	E1: *Así* [dibujan dos rectángulos que para ellos representan las mesas]. E2: *Sí, aquí van cuatro pizzas* [señala la representación de la mesa 1]. E1: *¿Y aquí?* [Señala la representación de la mesa 2]. E2: *Seis* [se refiere a las pizzas de la mesa 2].	*Image Having*	Trabajan sobre sus representaciones mentales y son capaz de emplear una representación pictórica de las situaciones de las dos mesas.
	04:17 minutos. 04:54 minutos. 05:01 minutos. 05:04 minutos. 05:10 minutos. 12:34 minutos. 12:38 minutos.	E1: *¡Ya! ¿Tenemos que dividir no?* E1: *¿Cuántas personas serían?* E2: *Aquí serían seis con ella* [se refiere al número de personas de la mesa 1 agregando a María]. E1: *Ajá, pero en cuánto la vamos a dividir* [se refiere a fraccionar la pizza de la mesa 1]. E1: *Hay que dividir. Divídelas tú* [se refiere a fraccionar la pizza de la mesa 1]. E2: *Dividir está* [señala la representación de la mesa 1]. E2: *Lo mismo que hicimos con la mesa 1.* E1: *Sí hay que dividir las personas…*	*Property Noticing*	Utilizan aspectos de las imágenes mentales que ya posee, para construir propiedades específicas del concepto y tratar de generalizarlas, en esta parte los estudiantes utilizaron la estrategia de división para determinar el reparto equitativo de las pizzas.

	07:51 minutos. 07:53 minutos. 08:25 minutos. 08:27 minutos. 14:08 minutos.	E2: *Habría que partir cada pizza entre seis* [se refiere a fraccionar cada pizza en seis partes]. E1: *Sí, hay que partirla.* E1: *¿Hacemos las cuatro?* [Se refiere a representar las cuatro pizzas]. E2: *Sí, las cuatro.* E1: *Hay que hacer las pizzas* [se refiere a representar la mesa 2].	*Image Having*	Los estudiantes realizan otra representación de la situación de las mesas. Se puede identificar que se desencadenó un *Folding Back*, ya que los estudiantes retroceden a un nivel inferior que ya habían superado.
	08:53 minutos. 08:54 minutos. 09:48 minutos. 15:54 minutos. 16:00 minutos. 16:02 minutos. 23:08 minutos. 24:40 minutos.	E1: *¿Dividimos veinticuatro entre seis no?* [Se refiere al total de porciones de pizzas entre el total de personas de la mesa 1]. E2: *Sí entre seis.* E2: *Sí, en la mesa 1 le tocaría a cada persona de cuatro porciones.* E2: *Entonces siete por seis son cuarenta y dos* [se refiere al total de porciones que obtiene al fraccionar cada una de las seis pizzas en siete partes de la mesa 2]. E1: *Sí* [mientras realiza la operación de multiplicar siete por seis]. E2: *Eso lo dividimos entre ocho*. E1: *Entonces a cada uno le tocan cinco porciones y sobran dos* [Se refiere a la mesa 2]. E2: *Entonces, en la mesa número dos le conviene sentarse a María.*	*Property Noticing*	Los estudiantes nuevamente trabajan sobre la imagen que construyen y empiezan abstraer información que les permita conocer la relación de pizzas con las personas.

Identificación de la razón	26:21 minutos. 30:13 minutos. 30:29 minutos. 30:50 minutos. 30:58 minutos.	E2: *Agrégale ahora dos pizzas a está* [señala la representación que habían realizado de la mesa 1 ya fraccionada]. E1: *Se tienen que agregar a los amigos para saber cuántas pizzas son* [representación de la mesa 2]. E2: *No las pizzas, porqué se tiene que saber cuántas pizzas más se tienen que comprar*. E1: *¿Entonces serian doce personas verdad?* E2: *Sí, doce personas.*	*Image Having*	Los estudiantes se enfrentan con la tarea realizando las representaciones de las dos situaciones de las mesas, en este caso fueron representaciones pictóricas.
	28: 47 minutos. 28:50 minutos. 28:51 minutos. 28:57 minutos. 29:03 minutos. 40:23 minutos.	E1: *¿Dividimos?* [Lo expresa para comprobar la respuesta que ya habían deducido]. E2: *Sí.* E1: *¿Cuánto es? Treinta y seis entre nueve ¿no?* E2: *Sí.* E1: *Pero todavía no sabíamos cuántas personas teníamos que agregar.* E1: *Hay que hacer como se hizo con la anterior* [se refiere a la relación de pizza por personas de la mesa 1, realizada anteriormente].	*Property Noticing*	Los estudiantes trabajan con la imagen que poseen y tratan de generalizar el proceso que utilizaron.
	29:27 minutos. 50:30 minutos.	E1: *Entonces se agregarían tres personas* [Mesa 1]. E2: *Tres pizzas se deben de agregar, para que a cada persona le toque el mismo reparto* [Mesa 2].	*Formalising*	Los estudiantes se desligan por completo de la imagen concreta, determinan la relación entre las pizzas y las personas.
Estrategias de reparto	51:12 minutos. 51:35 minutos. 53:10 minutos.	E2: *Tenemos que ubicar a las 240 personas en las mesas grandes y pequeñas con una proporción de 7 mesas grandes a 4 pequeñas.* E1: *Ajá ¿dividimos?* E1: *Sería 240 entre 8.* E2: *Sí, sería 30* [se refiere a la situación de las mesas grandes]. E2: *Lo mismo hagamos con las mesas pequeñas* [realizan el proceso de dividir 240 entre 6].	*Image Having*	Empezaron resolviendo la interrogante desde el nivel *Image Having*, ya que utilizaron aspectos de las imágenes mentales que crearon (expresan como sería la situación de las mesas).
	54:30 minutos.	E1: *Entonces serían 30 mesas grandes y 40 mesas pequeñas.* E2: *Sí* [lo expresa moviendo su cabeza].	*Property Noticing*	Los estudiantes trabajan sobre la imagen mental y abstraen información del proceso.

Anexo F

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
MAESTRÍA EN CIENCIAS ÁREA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Tabla para el análisis del estudio de caso

Estudio de caso: Caso II, parejas con bajo rendimiento académico.

Investigador: Jhonatan Arenas Peñaloza **Fecha:** 22/02/18 **Tarea:** Qué cantidad de naranjas quiero

Categoría	Tiempo (video)	Extracto (transcripción)	Nivel (modelo)	Justificación (por qué)
Elección de la mejor razón	02:13 minutos. 09:22 minutos. 9:30 minutos. 9:35 minutos. 10:44 minutos. 12:00 minutos. 12:18 minutos.	E3: *Lo que tenemos que saber es cuánto cuesta cada naranja.* E4: *Podríamos hacer las nueve piezas y hallar el valor de cada una*. E3: *Pero es una gráfica, a lo mejor podríamos hacer la gráfica así…* [Construye un plano cartesiano en una hoja]. E4: *No, así no es.* E3: *Una gráfica seria esta* [continua con la construcción del plano cartesiano] *yo creo que está es una gráfica*. *Aquí pondríamos…* [Los estudiantes expresan no acordarse qué valores colocar para relacionar en este sentido las coordenadas del plano en relación a las dos situaciones]. E4: *Mejor dibujamos las naranjas* [construyen circunferencias para representar las naranjas]. E4: *Pero tenemos que hacer las fracciones primero… para saber cuánto cuesta cada naranja* [borra las dos circunferencia que ya había construido]. E3: *Ajá.*	*Image Having*	Empiezan a realizar acciones mentales con el fin de crear una idea del nuevo concepto matemático. Trabajan sobre sus representaciones mentales y construyen una gráfica sobre la situación que se presenta en el mercado Baltazar.
	12:44 minutos. 13:03 minutos. 13:40 minutos. 13:43 minutos.	E4: *Seria 10 entre 9 y tenemos que dividir.* E4: *$1 cuesta cada naranja.* E3: *Sí* [realizado en un movimiento con la cabeza en relación a la afirmación de E4]. E4: *En ambos lugares cuestan lo mismo.* E3: *El resultado es el mismo* [se refiere al proceso que realizaron de división].	*Property Noticing*	Trabajan en la imagen que poseen y empiezan a obtener información de la misma, utilizando el proceso del algoritmo de la división.

	13:46 minutos.	E3: *Tenemos que hacer otra gráfica*.	*Image Having*	Los estudiantes realizaron otra representación pictórica de las situaciones. Este proceso desencadeno nuevamente en los estudiantes un *Folding Back*, ya que los estudiantes retroceden a un nivel inferior que ya habían superado (*Imagen Having*) pero lo hacen con una compresión más sólida, ya que relación el proceso anterior con el nuevo.
	26:10 minutos. 26:12 minutos. 27:05 minutos.	E4: *¿Entonces? Son iguales…* E3: *A eso me refería… el número de piezas va aumentar la cantidad que cuesten.* E3: *Podemos poner que en los dos lados cuestan lo mismo.*	*Property Noticing*	Abstraen información de la nueva imagen para determinando dónde les conviene comprar las naranjas.
Comparación de las razones	35:56 minutos. 36:14 minutos. 37:32 minutos. 38:00 minutos.	E4: *Dice que se oferta con un descuento del 20%.* E3: *Se le saca el nuevo costo del precio que decía anteriormente.* E3: *Pues nada más le quitamos, solamente a esto* [señala $8] *le quitamos un descuento del 20%.* E3: *Eso lo dimos en clases pero no recuerdo.*	*Primitive Knowing*	Los estudiantes se enfrentan con la tarea relacionándola con sus conocimientos vistos en clases, como el obtener el porcentaje de un valor numérico.
	38:38 minutos. 38:46 minutos. 38:51 minutos. 39:28 minutos. 40:30 minutos. 42:05 minutos. 42:08 minutos.	E4: *A ya yaya… préstame el lápiz.* E4: *Colocábamos esto aquí* [realiza el mismo proceso que hicieron los compañeros del caso I]. E3: *A sí, es cierto* [expresa al observar el proceso que realiza E4]. E3: *Seria $6.* E4: *Aquí es más barata* [señala la situación de la huerta de don José]. E4: *Porque te dan más naranjas…* E3: *Por menos precio pues.*	*Property Noticing*	Los estudiantes utilizan propiedades específicas para obtener el descuento y abstraen información del mismo.

Anexo F

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
MAESTRÍA EN CIENCIAS ÁREA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Tabla para el análisis del estudio de caso

Estudio de caso: Caso II, parejas con bajo rendimiento académico.

Investigador: Jhonatan Arenas Peñaloza **Fecha:** 02/04/18 **Tarea:** Comparto, disfruto y aprendo

Categoría	Tiempo (video)	Extracto (transcripción)	Nivel (modelo)	Justificación (por qué)
Elección de la mejor razón	00:52 minutos. 00:55 minutos. 01:03 minutos. 01:06 minutos.	E4: *¿Cómo las hicimos la vez pasada?* [Se refiere a las representaciones que realizaron en la tarea 1]. E3: *No sé… Recuerdo que la vez pasada representamos con unas circunferencias.* E4: *¡Ah sí! pero estas vez son unas pizzas.* E3: *Sí.*	*Image Making*	Empiezan a realizar acciones mentales con el fin de crear una idea del nuevo concepto matemático.
	01:15 minutos. 01:35 minutos. 02:09 minutos. 02:45 minutos. 02:57 minutos. 03:38 minutos. 04:17 minutos.	E4: *Vamos a empezar, vamos a poner unos círculos ¿son cuántas pizzas?* E4: *Son cuatro pizzas* [se refiere a la situación de la mesa 1]. E4: *Ahora las partimos en ocho* [se refiere a fraccionar cada pizza en ocho partes]. E3: *¿Se deben de dividir en cinco no*? [Se refiere a fraccionar cada pizza en cinco partes]. E4: *No… cada una en… ¡ah! sí, son cinco personas.* E4: *Realiza tú la representación de la mesa* 2 [le entrega el lápiz y la hoja de trabajo a E3] *y dibuja seis pizzas* [situación de la mesa 2]. E3: *¿Ahora en cuántas las divido? Las divido en* cinco [Se refiere a fraccionar cada pizza de la mesa 2].	*Image Having*	Trabajan sobre sus representaciones mentales y son capaz de emplear una representación pictórica de las situaciones de las dos mesas.
	08:50 minutos. 08:55 minutos. 09:14 minutos.	E4: *¿Cuántas personas tiene la mesa 1?* E3: *En la mesa 1 hay cuatro pizzas sin partir y cinco personas*. E3: *Entonces una pizza la partimos en dos* [se refiere a fraccionar cada pizza en 1/2].	*Property Noticing*	Utilizan aspectos de las imágenes mentales que ya posee, para construir propiedades específicas del concepto y tratar de generalizarlas, en esta parte los estudiantes utilizaron casos particulares fraccionando las pizzas en la representación que tenían de las mimas.

	14:53 minutos.	E3: *¡Ah! Ya yo sé que vamos a hacer* [empieza a realizar otro tipo de representación pictórica (figura 65)].	*Image Having*	Los estudiantes realizan otra representación de la situación de las mesas. Se puede identificar que se desencadenó un *Folding Back*, ya que los estudiantes retroceden a un nivel inferior que ya habían superado pero con un conocimiento mejor.
	15:07 minutos. 15:08 minutos. 15:56 minutos. 16:35 minutos. 18:23 minutos. 18:43 minutos. 18:45 minutos. 22:33 minutos. 22:42 minutos. 22:44 minutos. 22:54 minutos. 23:41 minutos. 28:32 minutos. 28:38 minutos. 28:43 minutos. 30:38 minutos. Entrevista	E3: *¿Son seis personas no?* E4: *Sí.* E3: *Esto va a esto, esto va a esto* [realiza unos trazos uniendo las pizzas con las personas en la nueva representación que realiza]. E4: *Ah sí, este con este…* [E4 ayuda a su compañero a relacionar las pizzas con las personas]. E4: *Tres sextos le tocarían a cada persona.* E3: *¿Tres sextos?* E4: *Sí, porque mira, cada pizza la dividimos en seis partes*. E3: *Son ocho personas con María.* E4: *Mmm no, son siete.* E3: *¿Y María?* E4: *Ah sí, son ocho personas* [agregan una personas más a su representación]. E3: *Son seis pizzas y todas están sin partir, así que nosotros podemos dividirlas como mejor nos convenga*. E4: *Las partimos en ocho* [lo expresa después de realizar el caso particular de dividir en ocho porciones cada pizza]. E4: *Ya, les toca de tres porciones a cada uno.* E3: *Ok, contesta la pregunta.* E4: *Son tres octavos, se van a repartir de tres porciones y son ocho personas.* E4: *Se le recomienda a María la mesa 2 porque allí comerá más pizza* [entrevista].	*Property Noticing*	Los estudiantes nuevamente trabajan sobre la imagen que construyen y empiezan abstraer información que les permita conocer la relación de pizzas con las personas.

Identificación de la razón	33:07 minutos. 33:14 minutos. 33:26 minutos. 34:08 minutos. 34:11 minutos. 34:24 minutos. 34:48 minutos. Entrevista Entrevista 36:04 minutos. 36:09 minutos. 36:15 minutos. Entrevista	E3: *¿Cuántas pizzas son?* E3: *Cuatro más dos serían seis pizzas y se tienen cinco personas, entonces sería una persona más la que se tiene que agregar, para que a cada quien le corresponda una pizza ¿No*? [No tienen presente que le enunciado indica que María eligió la mesa1]. E4: *Sí* [E4 acepta lo expresado por E3 y solo escribe en la hoja de trabajo lo dicho por E3]. E4: *Si son cuatro amigos, deberán comprar una pizza más.* E3: *Veamos, hay seis pizzas y está María.* E4: *Es una pizza la que se debe de agregar, porque si llegaron cuatro amigos, les va a tocar de una pizza a cada quien.* E3: *Mira, tiene siete personas la mesa 2 y hay seis pizzas, entonces con María serían ocho personas y sus cuatro amigos* [para un total de doce personas], *por lo tanto serían cinco pizzas las que se deben de comprar.* E3: *Para que le toque una pizza a cada persona estando María, se deben de agregar son dos personas más, no una* [mesa1]. E4: *Entonces, se le agregarían dos personas se dividen las pizzas igual y les tocara lo mismo* [mesa 1]. E3: *Habían siete personas y con María serían ocho, más cuatro que llegaron [*mesa 2]. E4: *Por eso se reparten las dos pizzas más y les alcanzan.* E3: *Ah, pero yo decía era para que le tocara una pizza a cada quien.* E4: *Serían cuatro pizzas, no serían dos como lo habíamos realizado* [entrevista].	*Image Having*	Los estudiantes crean una imagen mental de las situaciones, no logran utilizar procesos que les permita obtener propiedades específicas del concepto y solo se quedan en este nivel.
Estrategias de reparto	37:48 minutos. 38:08 minutos. 38:16 minutos. 38:52 minutos. Entrevista Entrevista	E4: *Se necesitan diez mesas grandes* [la estudiante lo expresa al terminar de leer el enunciado sin hacer ningún tipo de argumento]. E3: *Pero no sé… No* [se nota en desacuerdo con la respuesta de E4]. E4: *Mmm… Ya sé, seria siete por diez, setenta…* E3: *Mira tenemos que ubicar 240 personas en mesas grandes y pequeñas.* E4: *Son ocho personas entonces se multiplica por diez.* E3: *Pero son doscientas cuarenta personas, tienes que buscar un número que multiplicado por ocho te de 240.* E3: *Ya déjala así* [se necesitan diez mesas grandes].	*Image Having*	Crean una imagen mental de las situaciones (expresan como sería la situación de las mesas), no logran construir propiedades específicas del concepto, para tratar de generalizarlas, se notan confundidos y distraídos, no quieren continuar con esta última pregunta.

Anexo G

Secretaría de Educación Guerrero

ESCUELA PRIMARIA FEDERAL MATUTINA

"PRIMER CONGRESO DE ANÁHUAC"

C.C.T. 12 DPR0693B

ASUNTO: CONSTANCIA DE APLICACIÓN E INFORME

DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN.

Chilpancingo, Gro. a 16 de mayo de 2018

A QUIEN CORRESPONDA:

L a suscrita, directora de la escuela primaria "Primer Congreso de Anáhuac" con clave de centro de trabajo 12DPR0693B, ubicada en Manuel Acuña #1 Col. Universal de esta ciudad capital.

HACE CONSTAR QUE:

Durante el periodo comprendido del mes de enero a febrero del año 2018, correspondiente al ciclo escolar 2017-2018, se llevó a cabo en esta institución la aplicación de los instrumentos de exploración de la investigación titulada "Comprensión del concepto fracción como razón a través del modelo de Pirie y Kieren" , aplicación a cargo del C. JHONATAN ARENAS PEÑALOZA, alumno de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero.

Posterior a la aplicación, con fecha 15 de mayo del mismo año, se hizo llegar a esta dirección el informe correspondiente a los resultados de la investigación citada.

Lo anterior a petición del interesado y para lo usos y fines que a él correspondan.

ATENTAMENTE

PODER EJECUTIVO DEL E.
SECRETARIA DE EDUCACIÓN
INEBAN-GUERRERO
DIREC. DE EDUC. PRIMARIA
ESC. PRIM. MAT.
PRIMER CONGRESO DE
ANAHUAC
C.C.T. 12DPR0693B
ZONA ESC. 002

MTRA. LETICIA MALDONADO ORTIZ

C.c.p. Archivo de la institución

Manuel Acuña No. 1, Col. Universal, C.P. 39080, Chilpancingo, Gro. Tel 01 (747) 47 2 21 83