Universidad Autónoma de Guerrero
Centro de Investigación en Matemática Educativa
Maestría en Ciencias Área: Matemática Educativa

Idoneidad epistémica de tareas sobre cálculo de áreas de figuras compuestas en textos de secundaria

TESIS
Que para obtener el grado de
Maestría en Ciencias Área: Matemática Educativa

Presenta:
Lic. Mayra Alejandra Jimenez Consuegra

Directora de tesis:
Dra. Catalina Navarro Sandoval

Codirector:
Dr. Marcel David Pochulu

Chilpancingo, Guerrero ***Julio del 2018***

Universidad Autónoma de Guerrero
Centro de Investigación en Matemática Educativa
Maestría en Ciencias Área: Matemática Educativa

Tesis de Maestría

IDONEIDAD EPISTÉMICA DE TAREAS SOBRE CÁLCULO DE ÁREAS DE FIGURAS COMPUESTAS EN TEXTOS DE SECUNDARIA

Realizada por la Lic. Mayra Alejandra Jimenez Consuegra para optar por el título de Maestra en Ciencias Área: Matemática Educativa con la dirección de la Dra. Catalina Navarro Sandoval y el Dr. Marcel David Pochulu

Chilpancingo-Guerrero, México, Julio del 2018

Dedicado a mi familia

Porque la distancia nunca fue un obstáculo para amarme, acompañarme, creer en mí y apoyarme incondicionalmente durante este proceso.

Me inspiraron.

Agradecimientos

A Dios Todopoderoso.

Por su infinita misericordia, por regalarme la bonita oportunidad de realizar este posgrado en México, por guardar mi vida, por orientar mis acciones, por mostrarme su presencia y respaldo durante todo este proceso. Gracias.

A mi familia

Mi madre Josefa Consuegra Ávila, quien ha sido mi amiga y mi apoyo incondicional.
Mis hermanos Luis Alejandro, Kevin y Rafael David.
Mis abuelos Dugar y Delfilia.
Mis tíos Vilma Rosa, Omar, Dugar, Milena, Liliana y Nosmar.
Mis primos, Omileth, Xiomara, Milemar, Mariangel, Nosmar, Dugar y Jesús David.
Por amarme incondicionalmente y acompañarme fielmente todo este tiempo.

A mis amigos,

Romario, Jhonatan, Karina, Camilo y Gustavo por ser mi familia, mis "hermanos Colombianos" por su compañía y por todos los momentos que vivimos juntos durante este proceso.

A mis asesores

Dra. Catalina Navarro por su colaboración y orientaciones durante todo el proceso del trabajo de investigación.
Dr. Marcel Pochulu por su generoso tiempo dedicado a orientarme, por su paciencia, hospitalidad y amabilidad durante y después de la estancia académica.

A *mis evaluadoras,*

Dra. Flor Monserrat Rodríguez Vásquez y Dra. María del Socorro García González gracias por el tiempo dedicado a la revisión, por las sugerencias y aportes, porque fueron importantes para el fortalecimiento de este trabajo.

Muchas gracias…

Agradecimiento especial

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México, por ser el patrocinador oficial de este sueño, por el apoyo financiero durante la realización de la Maestría en Ciencias: Área Matemática Educativa, y en la movilidad al extranjero para la realización de mi estancia de investigación en la universidad de Nacional de Villa María, Argentina. Gracias.

A la Universidad Autónoma de Guerrero, por abrirme sus puertas, por proporcionarme el recurso físico para poder estudiar, el recurso humano: excelentes maestros de los que aprendí mucho, sus directivos y personal de apoyo que hicieron posible este sueño. Muchas gracias.

ÍNDICE DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

Introducción

Aunque actualmente se cuenta con diversos materiales que facilitan el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los libros de texto siguen siendo una de las herramientas más valiosas con las que cuenta el profesor, puesto que estos representan una guía de cómo y cuándo abordar un determinado tema. De esta manera, en los libros de texto se presenta una organización de la enseñanza que procura estar actualizada, debido a que éstos pueden ser objeto de estudio, material de consulta, registro de las actividades del alumno, colección de ejercicios propuestos y problemas a resolver (González y Sierra, 2004). En este mismo sentido, Navarro (2015) afirma que “el libro de texto es un medio de comunicación que impone saberes, pero, además, es un apoyo para facilitar la enseñanza aprendizaje de individuos, pues este debe estar fuertemente influenciado por el currículum escolar vigente” (p.5).

Es preciso destacar que la actividad de analizar libros de texto puede ser para algunos una tarea trivial, sin embargo, algunas investigaciones (Font y Godino, 2006; Barrantes, López y Fernández, 2015; Guillén, Gonzáles y García, 2009) muestran que no siempre los profesores desarrollan la competencia en análisis didáctico, en consecuencia, el análisis crítico de los textos escolares, la evaluación de su pertinencia, idoneidad, adecuación, etc., debe ser un componente importante en los programas de formación de profesores de matemáticas. Por otro lado, existe una preocupación por la calidad y la cantidad de actividades que atienden los conceptos geométricos, escases en los ejemplos, representaciones para el tratamiento de conceptos en los libros de texto.

En este trabajo de investigación se reconoce que el conocimiento geométrico dota al estudiante de recursos lógicos, permitiendo realizar justificaciones, pruebas o validaciones con mayor rigor matemático, los que pueden ser aprovechadas en otras áreas de las matemáticas (Gamboa y Ballestero, 2009). Sin embargo, los contenidos geométricos regularmente son presentados de manera desarticulada respectos de otros conceptos matemáticos, dando la impresión de que son abordados solo por cumplir los requisitos del currículum. Adicionalmente en los libros de texto de secundaria dedican pocas unidades a promover la enseñanza de los contenidos geométricos, según lo que reflejó la revisión de la literatura presentada en el capítulo 1.

En particular, el estudio se realiza sobre el contenido resolución de problemas que implica el cálculo de áreas de figuras compuestas, debido a que en los resultados de las Pruebas Planea[1]de 2015, cerca del 65% de los estudiantes no lograron resolver situaciones que involucran este objeto matemático. Lo que indica la necesidad de analizar los contenidos presentados en los libros de textos para el tratamiento de este concepto, poniendo atención sobre la estructura de las situaciones- problemas y los objetos primarios puestos en juego. Por tal razón, el objetivo general es valorar la idoneidad epistémica de las tareas que atienden el cálculo de áreas de figuras compuestas en libros de texto de segundo de secundaria.

Es preciso mencionar, que muchas investigaciones en el campo de la matemática educativa estructuran un marco teórico en función de los objetivos de investigación propuestos. En nuestro caso, los lineamientos teóricos y metodológicos de la investigación están dados con base en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), puesto que sus herramientas y constructos establecen "qué ver" y "cómo ver" los aspectos importantes de la investigación, teniendo en cuenta el trasfondo ecológico de las prácticas. En particular, se utilizó la noción de configuración epistémica como herramienta de análisis y la noción de idoneidad epistémica (Criterios de valoración) para valorar las tareas, información que se amplía en el capítulo 2.

Para el cumplimiento del objetivo general de la investigación, se construyó en primer lugar un marco epistémico y didáctico del área de figuras compuestas (significado de referencia) presentada en el capítulo 3, donde con base en la revisión de la literatura, de libros clásicos de geometría y de documentos curriculares, se determinar el tratamiento dado a este concepto de acuerdo a los contextos de uso y con el sistema de prácticas que realiza un individuo, cuando resuelve tareas que involucran este concepto. La creación de este marco, permitió el establecimiento de criterios de idoneidad epistémica específicos, que posibilitan valorar las tareas atendiendo aspectos particulares para cada componente, considerando el contexto local

[1] El Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (Planea) es un conjunto de pruebas que se aplica en las escuelas públicas y privadas, permitiendo a los docentes frente a grupo, a los directivos, al Consejo Técnico Escolar y Supervisores, contar con información acerca de los aprendizajes alcanzados por los estudiantes en español y matemáticas.

de las prácticas matemáticas involucradas en los textos escolares, presentado en una parte del capítulo 5.

Además, se determinó el significado pretendido por los tres libros de texto seleccionados para este estudio, analizando las tareas, con ellos se identificando los objetos primarios puestos en juego durante la resolución, estableciendo las configuraciones epistémicas/cognitivas que respondieron al sistema de prácticas realizadas. Todo concentrado en el capítulo 4.

Los resultados de este trabajo revelan que algunos libros de texto presentan tareas con idoneidad epistémica alta, cuyas situaciones poseen potencial matemático rico, promoviendo una variedad de conceptos, propiedades, procedimientos durante la resolución las mismas, involucrando diferentes formas de expresión como los lenguajes gráfico, simbólico y verbal, lo cual se explica en los capítulos 5 y 6.

Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas que dieron sustento a este trabajo de investigación.

Capítulo 1.
Planteamiento del problema y antecedentes

En este primer capítulo se presentan cuatro apartados que permiten resaltar el contexto y la importancia de este trabajo de investigación. En primer lugar, se expone el problema de investigación donde se explicita y se delimita el tema a investigar. Seguidamente, se presentan los antecedentes de investigación los cuales estan divididos en: trabajos relacionados con la medida de superficies, el análisis de libros texto y los estudios basados en los constructos teóricos del Enfoque Onsosemiótico del conocimiento e instrucción matemática (marco teórico y metodológico que considera esta investigación). En el tercer apartado se exponen la pregunta de investigación que se prentende responder y los objetivos planteados. Finalmente, en el cuarto apartado se expresa la relevancia de este trabajo de investigación.

1.1. Problema de Investigación

Las actuales investigaciones en el campo de la matemática educativa, se han enfocado no solo en los problemas que surgen en la enseñanza y aprendizaje en el aula de clases, sino en el tipo de herramientas que utiliza el profesor como son: los libros de textos, el material didáctico, el tipo de tareas y actividades que se proponen en la clase para que el estudiante alcance los logros de acuerdo con los estándares de competencias. Por esta razón es que varios estudios realizan análisis de los textos que usualmente utilizan los profesores para apoyar el proceso de enseñanza, centrando la atención en los contenidos, los problemas y los ejercicios propuestos, tal como se mostrará posteriormente en la revisión de la literatura en el apartado de antecedentes.

En este sentido, recobra importancia el tipo de tareas que se proponen en la clase de matemáticas, porque según Pochulu, Font y Rodríguez (2016, p. 76) “las tareas son las situaciones que el profesor propone (problema, investigación, ejercicio, etc.), a los alumnos, y son además el punto de partida de su actividad, la cual, a su vez, produce como resultado su aprendizaje”. De hecho, estos autores mencionan que el diseño y análisis de tareas debe considerarse un aspecto clave para conseguir una enseñanza de calidad. Es preciso resaltar, que una tarea se puede considerar que está compuesta por un contexto, una consigna y el objetivo que se plantea el profesor al seleccionar dicha consigna (Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodríguez, 2017). Es decir, si el profesor selecciona una consigna sin plantearse un objetivo ni tener en cuenta el contexto de la misma, el profesor solo presentará un simple enunciado. Por lo que el profesor está obligado a proponer tareas siendo consciente de los conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos que intervienen o emergen, así como del lenguaje que se pone en juego al resolver dichas tareas.

Por esta razón, algunas investigaciones se han centrado en analizar las tareas y contenidos que plantean los libros de texto de matemáticas, donde se realizan juicios de valor, que giran en torno a si éstos son adecuados para alcanzar los aprendizajes esperados en el grado escolar para el que fueron diseñados. Oliver, Rocerau, Valdez, Vilanova, Medina, Astiz y Laviada (2003), fijan la atención en la geometría, y reportan que normalmente los libros de texto suelen disponer de tres o cuatro unidades para geometría, además, de la existencia de diferencias tanto en la cantidad como en la calidad de las actividades contenidas en cada libro. El mismo estudio reveló que se proponen pocas actividades geométricas y no inducen a la formación de conceptos, sino que éstos simplemente se enuncian (se comunican) y los ejemplos son escasos.

Lo anterior resulta preocupante, debido a que la geometría es una rama importante dentro de la matemática y se encuentra en nuestro entorno inmediato y es la que modela el espacio que percibimos, es decir, la geometría es la matemática del espacio, además, la geometría ofrece a quien la aprende, una oportunidad para emprender un viaje hacia formas superiores de pensamiento y promueve el desarrollo de la percepción del espacio, la capacidad de visualización y abstracción (García y López, 2011).

Por otro lado, la literatura resalta que uno de los temas geométricos en los que se presentan dificultades durante su enseñanza es el de cálculo de áreas. Una de las dificultades más evidentes es el uso inadecuado de los términos área y superficies, porque aunque estos están íntimamente relacionados hacen referencia a conceptos distintos (Godino, Batanero y Roa, 2002). Además, es importante mencionar que la enseñanza de medidas de superficies parece estar en relajación, marcada por una unidad de medida, limitándose al cálculo directo del área usando simplemente las fórmulas (Castro, Flores y Segovia, 1997). Es decir, usualmente se enseña al estudiante a calcular áreas, pero no a explicar, argumentar y entender las implicaciones que tiene la relación que se establece entre las dimensiones de una figura cuando se realiza este cálculo.

Ahora bien, aunque se han reportado investigaciones en torno al área como objeto matemático, es necesario seguir realizando estudios acerca del mismo, debido a que el área de superficies juega un papel relevante en la construcción de otros conceptos matemáticos tales como las fracciones, la integración, los porcentajes, el volumen, etc. Así como en el desarrollo de destrezas y habilidades matemáticas como la resolución de problemas, el razonamiento, la argumentación y la visualización (González y Marmolejo, 2015).

Asimismo, el INEE (2015) señala que en las pruebas planea de 2015 en Matemáticas, a nivel nacional, son cerca del 65.4% la cantidad de estudiantes que, si bien pudieron solucionar problemas que implicaban estrategias de conteo básicas (visuales), o que suponían comparar o realizar cálculos con números naturales, no lograron resolver problemas con números fraccionarios o decimales, o calcular el perímetro del círculo y las áreas de figuras compuestas, entre otras habilidades y conocimientos. Esto se debe a que en las pruebas planea se proponen la resolución de problemas simples y complejos que requiere la puesta en juego de conceptos, propiedades, identificación de expresiones, etc.

Lo anterior, lleva a cuestionar el tipo de tareas que están presentes en los libros de texto sobre el cálculo de áreas de figuras compuestas, y sobre todo sí estas tareas promueven la argumentación y el uso de propiedades, procedimientos, proposiciones y diversas formas de expresión para la resolución de las situaciones problemas o solo promueven el uso indiscriminado de fórmulas.

1.2. Antecedentes

En este apartado se presenta la revisión de la literatura, exponiendo algunos antecedentes relacionados con el foco de estudio, realizados en diferentes contextos. Aquí se resaltan los resultados y reflexiones obtenidas en las investigaciones mostradas, así como las consideraciones importantes para este trabajo.

La revisión de antecedentes se organizó en tres grandes ejes. Por un lado, las investigaciones que involucran medida de superficies, pues es el objeto matemático que interesa atender en nuestra investigación. La segunda sección muestra trabajos basados en el análisis de textos, ya que resaltan la importancia de realizar este tipo de investigaciones dentro del campo. Y una tercera sección con la revisión de trabajos que usan el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), por ser el marco teórico y metodológico de la matemática educativa que es empleado en la investigación.

1.2.1. Investigaciones que involucran medida de superficies

El trabajo de Castro, Flores y Segovia (1997) menciona que la enseñanza del cálculo de áreas de superficies geométricas, se hace con base en las medidas de las longitudes de estas figuras, lo que supone un peligro para la enseñanza de este objeto matemático, pues se considera la superficie como una magnitud que se deriva de la longitud, además, la comprensión de superficie reduce su cálculo a la simple aplicación de fórmulas. Los autores también hacen referencia a que el cálculo de áreas depende de la forma geométrica que se ha elegido como unidad de superficie, el cuadrado, por ejemplo, es una elección práctica que les sirve a los estudiantes para resolver problemas generales.

En este sentido, los autores toman como unidad de superficie un triángulo equilátero de lado unidad, con el que mostraron la relatividad del proceso de cálculo de superficies de figuras planas. Las conclusiones dejaron ver la necesidad de trabajar en forma paralela tanto aspectos geométricos como medidas de superficies (tomando como unidades de medida el cuadrado y el triángulo) así como su relación, buscando promover el razonamiento analógico, dado que este es considerado un potente método para el descubrimiento matemático.

Castro, Flores y Segovia (1997), presentan una serie de tareas que evidencian la complejidad de los conceptos superficie y área. Sugieren que el concepto de superficie debe abordarse antes de algebrizar el empleo de las fórmulas. Además, proponen una alternativa para trabajar el cálculo de áreas de manera diferente, mostrando una perspectiva para trabajar este objeto matemático en el aula, el cual usualmente está limitado al uso algorítmico de las fórmulas. Es preciso resaltar que este estudio expone la posibilidad de poner en juego tareas acerca del cálculo de áreas con un rico potencial matemático, usando diversos conceptos, asimismo de alguna manera muestran la estructura que debe tener este tipo de tareas.

En Luelmo (2001) se presenta el desarrollo de dos experiencias sobre medida en nivel secundaria, aquí se consideran aspectos como son la evolución histórica del concepto ligada a necesidades humanas y sociales, la realización directa de mediciones y su implicación en contextos significativos para el estudiante. Los resultados revelan algunas dificultades en el tratamiento de este tema, por ejemplo, los estudiantes no logran establecer una relación correcta entre los conceptos de área y de integral, de la misma manera se observan dificultades cuando asocian el resultado negativo de un cálculo a la medida de una superficie. Aquí se hace explícito que trabajar este concepto es realmente un reto, puesto que los estudiantes se sienten incómodos si se requiere estimar o usar instrumentos de medición poco precisos, puesto para ellos es un tema de exactitud.

Por otro lado, Godino, Batanero y Roa (2002) reportan un análisis de los problemas escolares sobre la medida de magnitudes en primaria, encontrando que un problema en la enseñanza de este tema, es que con frecuencia los términos áreas y superficies son utilizadas de manera indistinta, y que es necesario distinguirlas, aunque estas se relacionan. Sugieren que la palabra superficie se reserve para designar la forma del cuerpo o figura, mientras que la palabra área debería designar la extensión de la superficie, donde el rasgo o característica de los cuerpos que se mide cuantitativamente es el área o extensión. Asimismo, proponen los conocimientos didácticos del profesor necesarios para abordar la medida de magnitudes, resaltando aspectos como: orientaciones curriculares, el desarrollo cognitivo y progresión del aprendizaje, y las situaciones y recursos que se requieren para la organización de la clase.

Lo antes señalado, muestra que es importante generar orientaciones didácticas para el profesor, buscando favorecer la enseña y aprendizaje de la medida de superficies, de modo que se minimice el abuso del lenguaje y los errores conceptuales que obstaculizan dicho proceso. Además en estos estudios se muestra que es importante trabajar con tareas ricas que promuevan el razonamiento analógico, donde la unidad de superficie no sea la usual (el cuadrado), que implique procesos de estimación y utilización de instrumentos de medición imprecisos, de tal forma que el cálculo de áreas sea más que el simple uso de las fórmulas.

1.2.2. Investigaciones basadas en el análisis de los libros de textos

Se presentan investigaciones cuyo objeto de estudio fue el análisis de textos y con ello identificar algunas propuestas de mejoramiento y/o recomendaciones para favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Algunas investigaciones se han enfocado en la rama de la geometría tales como Oliver et al. (2003), Aguilar e Iglesias (2013), Barrantes, López y Fernández (2015), Guillén, Gonzáles y García (2009) y Guillén, Gonzáles y García (2009)

Oliver et al. (2003) indagan sobre el tratamiento de algunos temas de geometría, mediante el análisis de los libros de texto más usados por docentes del tercer ciclo de Educación General Básica de Argentina, con el propósito de examinar si estos contenían una propuesta didáctica que favoreciera la participación activa de los alumnos en la construcción de los conceptos de área. Encontraron que los textos no están orientados en el proceso de razonamiento que deben alcanzar los estudiantes en estos grados, debido a que no utilizan las expresiones adecuadas, hay errores de lenguaje y no establecen actividades que lleven al estudiante a participar de forma activa, sino que priorizan la recepción de la información. Por tanto, se requiere que el profesor esté en la capacidad de identificar que los contenidos presentados no son adecuados y pueda realizar los rediseños necesarios para obtener resultados favorables.

Asimismo, Aguilar e Iglesias (2013) presentan el análisis de los libros de texto más utilizados por docentes venezolanos de Educación Primaria, donde encontraron que para realizar las actividades planteadas en estos son necesarias las habilidades que corresponden con los tres primeros niveles de razonamiento geométrico propuestos en el modelo de Van Hiele (reconocimiento, análisis y ordenamiento), predominando las habilidades asociadas a los dos primeros niveles. En cuanto a las habilidades asociadas con las estrategias propuestas por Hoffer, las que más se evidencian son las de dibujo, verbal y visual y algunas de lógica. Además, los hallazgos revelan que en forma general estos textos se limitan a desarrollar los contenidos curriculares mínimos, estableciendo escasas relaciones con otras áreas de conocimiento previstas en el currículo vigente, lo cual pudiera ser una limitante para la integración de las matemáticas en los proyectos de aprendizaje.

En el trabajo de Barrantes, López y Fernández (2015) se analizan y clasifican las imágenes gráficas presentes en varios libros de texto, con el objetivo de estudiar aspectos de las representaciones geométricas a lo largo de las unidades de geometría en textos de matemáticas de primero de educación secundaria obligatoria en España. En el análisis encontraron que estos libros de texto, al momento de presentar las figuras y conceptos geométricos, exponen una escasa variedad de representaciones, generalmente dan una única representación para cada concepto, y hasta en algunos casos se definen elementos geométricos sin ningún apoyo visual. Es decir, que las representaciones son insuficientes, lo cual obliga al profesor a buscar recursos adicionales que permitan la exploración de orientaciones, propiedades de objetos y situaciones geométricas, entre otras.

Ahora bien, Guillén, González y García (2009) realizaron un análisis de varios libros de texto para la Enseñanza Primaria y para 1º y 3º de la Secundaria Obligatoria, centrando la atención en los cuerpos de revolución. Los resultados muestran que en los textos de primaria las actividades solo promueven la visualización e identificación de los sólidos, sin prestar atención a la comparación entre ellos, lo cual, permite analizar características de los mismos de acuerdo a los tipos. Por su parte, en los textos de secundaria se le otorga poca la importancia a la descripción de características y propiedades de los sólidos. En ambos casos (primaria y secundaria) los textos presentan los sólidos de forma estándar, por ejemplo hay ausencia de los cilindros oblicuos. En cuanto al cálculo las áreas y volúmenes se basan fundamentalmente en la aplicación de las fórmulas a partir de sus elementos.

Las investigaciones reportadas en este apartado, muestran que los libros de textos presentan actividades y contenidos con falencias. En el caso de la geometría no se corresponden con los niveles de razonamiento acuerdos con el nivel de escolaridad. Además se presentan figuras y cuerpos geométricos de forma estándar, sin promover características y propiedades de los mismos. También, se desarrollan los contenidos curriculares mínimos y se establecen escasas relaciones con otras áreas de conocimiento. Por tanto, se muestra que hay necesidad de analizar los libros de textos de matemáticas, puesto que cuando se identifican este tipo de falencias, es tarea del profesor realizar una gestión de la clase de manera que se obtengan buenos resultados.

1.2.3. Investigaciones que utilizan los constructos teóricos de EOS

En este apartado se presentan trabajos como el de Godino y Arrieche (2001), Rivera (2016), Arana (2016), y Cruz, Gea y Giacomone (2017) que emplean los constructos teóricos del EOS como una herramienta eficiente para el análisis de libros de textos de matemáticas, documentos curriculares y diseño de propuestas didácticas.

Godino y Arrieche (2001) presentan el modelo teórico que designaron como "semiótico-antropológico" para la Didáctica de las Matemáticas y a partir de este, desarrollan la técnica del análisis semiótico, la cual permite caracterizar los significados sistémicos (o praxeológicos) de un objeto matemático y los significados elementales puestos en juego en un acto de comunicación matemática. Así, dicho análisis proporciona una herramienta para identificar conflictos semióticos potenciales en la interpretación de un texto usado en un proceso de estudio, o conflictos que tienen lugar en la realización efectiva de una interacción didáctica.

En este orden de ideas, Godino y Arrieche (2001) presentan un ejemplo en el que eligieron el bloque de contenido “conjuntos y operaciones” donde asignaron una categoría para cada subsección, las cuales fueron consideradas como unidades de análisis. En el análisis lograron presentar un resumen de los principales conflictos semióticos encontrados en la sección del texto que fue objeto de estudio. Además, llegan a la conclusión de que este tipo de análisis es necesario porque permite identificar discordancias o disparidades entre los significados atribuidos a las expresiones por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción didáctica.

Rivera (2016) realiza un análisis del libro de cálculo aplicado que se utiliza en el segundo semestre de una institución del nivel superior en Sonora (México), donde ejecuta un análisis ontosemiótico para recopilar información importante que permita determinar si el libro cumple con los significados institucionales en el contexto de la materia de Cálculo II y establecer si hay vacíos en el material y posibles conflictos semióticos. Los resultados revelan de acuerdo con la configuración epistémica de cada unidad, se identificaron buenos elementos gráficos, verbales y simbólicos que orientan al lector a comprender cómo los autores plantean el área de la región. Sin embargo, el análisis del sistema de prácticas, le permitieron detectar los posibles conflictos semióticos que puedan surgir del análisis de las configuraciones. Un ejemplo de ellos, es que algunas figuras no señalan la notación para las áreas, o utilizan expresiones como “por supuesto” dando por sentado que se da por entendido lo que se está expresando.

El trabajo de Arana (2016) tuvo como objetivo diseñar y analizar una propuesta didáctica para la enseñanza de la circunferencia a través de configuraciones epistémicas, con el fin de identificar posibles conflictos semióticos. Más específicamente, la propuesta fue la creación de un nuevo libro de texto para la enseñanza de la circunferencia y otros conceptos relacionados, utilizando los constructos teóricos del EOS. Para realizar el análisis de la propuesta didáctica, se dividió el texto en nueve unidades de análisis con el fin de identificar en cada una de ellas, los 6 objetos primarios que distingue el EOS: (1) situaciones, (2) lenguaje, (3) conceptos, (4) procedimientos, (5) proposiciones y (6) argumentos; así como las relaciones que estos mantienen formando configuraciones epistémicas. De esta manera, el autor se aseguró que las actividades propuestas en el texto promovieran la aparición coherente y sistemática de los objetos primarios.

Cruz, Gea y Giacomone (2017), analizan y clasifican investigaciones e innovaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría espacial, en su faceta epistémica, prestando mayor atención a la visualización de figuras de tres dimensiones. A partir de esto, propusieron una tabla con indicadores de idoneidad epistémica particularizando indicadores específicos sobre los procesos de estudio de la geometría espacial en educación primaria. Posteriormente, se implementaron estos criterios para valorar la idoneidad epistémica de los documentos curriculares chilenos sobre la enseñanza de la geometría en educación básica. Asimismo, este instrumento teórico y metodológico se estima sea utilizado por el profesorado para orientar el diseño, implementación y evaluación de procesos de enseñanza de la geometría espacial, siendo una herramienta de reflexión sobre su propia práctica y, por tanto, para lograr mejoras progresivas en la misma.

Las investigaciones revisadas en este apartado muestran que el EOS es una excelente herramienta teórica para analizar curriculum, libros de textos, procesos de instrucción y generar propuestas y diseños de tareas, con un fin común, fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje.

1.3.Pregunta y objetivos de investigación

En los apartados anteriores, se reportaron algunas dificultades al aborda el cálculo de áreas de figuras compuestas en la clase de matemáticas, tales como 1) el uso inadecuado de los términos de área y superficie, 2) la presentación estereotipo de las figuras y cuerpos geométricos, 3) la limitación del concepto al usos simple de fórmulas de cálculo, sin promover la argumentación, ni entender las implicaciones de la relación entre las dimensiones (por ejemplo base por altura) de una figura cuando se calcula su área. Por otro lado, es claro que los libros de texto son la principal fuente de orientación para el profesor y dado que en las pruebas estandarizadas los tipos situaciones- problemas tienen estructuras que requieren de la articulación de conceptos, propiedades, procedimientos, etc., en este trabajo interesa responder la siguiente pregunta de investigación:

> *¿Qué características presentan las tareas que atienden el cálculo de áreas de figuras compuestas, propuestas en los libros de texto de matemáticas de la educación secundaria en México?*

Estas características se establecieron con base en la nocion de idoneidad epistémica, pues según Godino (2013) ésta centra la atención en la selección y adaptación de situaciones-problemas ricas, las diversas representaciones o medios de expresión (el lenguaje), las definiciones, procedimientos, proposiciones y justificaciones puestas en juego en la resolución de dichas situaciones. De esta manera se estableció el siguiente **objetivo general:**

> *Valorar la idoneidad epistémica de las tareas que atienden el cálculo de áreas de figuras compuestas, propuestas en libros de texto de matemáticas de segundo de secundaria en México.*

El objetivo general se particulariza en los siguientes objetivos específicos:

- Establecer un marco didáctico y epistemológico de referencia del área de figuras compuestas como objeto matemático.
- Determinar el significado institucional pretendido en las tareas relacionadas con el cálculo de áreas de figuras compuestas propuestas en los textos escolares de matemáticas de segundo de secundaria.
- Señalar los conflictos semióticos potenciales presentes en tareas relacionadas con el cálculo de áreas, propuestas en los textos escolares de matemáticas de segundo de secundaria.

1.4.Relevancia del trabajo de investigación

Reconociendo que el cálculo de áreas es uno de los conceptos más importantes, pues se relaciona con otros conceptos matemáticos (integración, volumen, porcentaje, etc.) y promueve el desarrollo de habilidades matemáticas (argumentación, visualización, resolución de problemas, etc.), además que el análisis de las tareas y contenidos presentados en los libros de texto deben ser una actividad usual del profesor de matemáticas, se señalan varios aspectos que muestran la relevancia de este estudio:

a) El establecer un marco de referencia epistémico y didáctico, que contempla antecedentes relevantes sobre el tema y la mirada sobre lo establecido en el diseño curricular, le permite a cualquier profesor tener un significado de referencia, útil para abordar el cálculo de áreas de figuras compuestas en segundo año de secundaria.
b) Con el análisis acerca de los conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y el lenguaje (objetos primarios) que se ponen en juego en las tareas de cálculo de áreas de figuras compuestas, le permiten al profesor el ajuste o el rediseño de las misma, de manera que intervengan o emerjan estos objetos primarios adecuadamente y de acuerdo con los propósitos que él se trace para la clase.
c) Detectar los posibles conflictos semióticos potenciales que están presentes en las tareas del cálculo de áreas de figuras compuestas, le permite al profesor evitar las disparidades en el aprendizaje de este objeto matemático, evitando también la reproducción de los errores conceptuales y el abuso del lenguaje que se presentan en algunos textos.
d) Caracterizar las tareas de cálculo de áreas de figuras compuestas presentadas en los libros de texto, le permitirá al profesor conocer las cualidades de éstas, de modo que pueda elegir las tareas óptimas, que pudieran representar el significado de referencia, para poner en juego de manera coherente conceptos, propiedades, procedimientos y diversas formas de expresión en la resolución durante la resolución de las mismas.
e) El establecimientos de criterios de idoneidad epistémica para la valoración de las tareas de cálculo de áreas de figuras compuestas, le permite al profesor de matemáticas diseñar o reformular actividades de clases, adecuadas no solo desde el punto de vista didáctico, sino también, epistémico.

Capítulo 2.
Elementos teóricos y metodológicos de la investigación

En este capítulo se presentan los elementos teóricos y metodológicos relevantes para el desarrollo del trabajo de investigación. En primer lugar, se describen las herramientas y constructos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), por ser la línea teórica y metodológica de la Didáctica de la Matemática considerada como marco de referencia de este trabajo.

2.1. Elementos teóricos de la investigación

2.1.1. El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) es un sistema modular que se ha venido desarrollando desde la década de los 90 en España por el Dr. Godino y colaboradores en el seno del grupo de investigación denominado "Teoría de la Educación Matemática", de la Universidad de Granada, cuyo propósito está en la articulación de diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje.

Siguiendo a Godino, Batanero y Font (2007), los postulados del EOS se relacionan principalmente con la Antropología, la Ontología y la Semiótica, pero también se articulan de manera coherente supuestos socioculturales y psicológicos. Donde se asume que la Matemática es, además de una actividad, un complejo de objetos culturales (institucionales), axiomática y deductivamente organizados.

Dado que este enfoque es bastante amplio, en el presente trabajo se estará haciendo uso principalmente de la noción de idoneidad didáctica, configuración epistémica y conflicto semiótico. Asimismo, se requiere exteriorizar algunas palabras claves de este enfoque que permitirán la comprensión de las herramientas teóricas y metodológicas que aquí se implementan.

2.1.2. Palabras claves en el EOS: significado, institución, objeto matemático y práctica

Para el EOS la idea de *significado* no se asocia exclusivamente a una definición, debido a que se considera que está íntimamente ligado a los problemas y a la actividad realizada para su resolución. Por tanto, hablar de significado es referirse a la acción (interiorizada o no) que realiza un sujeto en relación a dichos objetos, es decir, el significado es el conjunto de prácticas operativas y discursivas puestas en juego al resolver una situación- problema (Godino D y Batanero, 1994). Esta noción es importante porque a lo largo de este trabajo se hace referencia a significados personales e institucionales.

Ahora bien, para Godino y Batanero (1994) *una institución* “está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva a la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen” (p.334). Es decir, desde la postura de EOS, cuando se habla de institución no se está haciendo alusión a la escuela en donde se da el proceso de enseñanza y aprendizaje, pero si a los sujetos que intervienen en el mismo, como el profesor, el texto, etc.

Por otro lado, en matemáticas se considera como objeto matemático a los conceptos que se enseñan o se aprenden en una clase. En Godino (2002) se llama “objeto o entidad matemática a todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia, cuando hacemos, comunicamos o aprendemos matemáticas” (p.242). Dicho de otra manera, un objeto matemático no hace referencia solo a un concepto sino a todo aquello que interviene y se puede señalar dentro de una actividad matemática, ejemplo un paréntesis, punto son objetos matemáticos.

Otra noción importante del EOS es la de práctica matemática, según Godino, Batanero y Font (2008) es “toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas” (p.4). Estas prácticas pueden ser referidas a una persona (prácticas personales) o compartidas en el seno de una institución (prácticas institucionales).

2.1.3. Sistema de prácticas

Cuando se estudia matemática, no interesa una práctica particular ante un problema concreto, sino que importa centrar la atención en los sistemas de prácticas (operativas y/o discursivas) que se ponen de manifiesto en la actuación de las personas cuando se enfrentan a tipos de situaciones problemáticas. El sistema de prácticas que realiza una persona se denomina *significado personal*, y al sistema de prácticas compartidas en el seno de una institución *significado institucional* (Godino, 2017).

De las prácticas o sistemas de prácticas realizadas para resolver problemas, emergen dos categorías primarias de objetos matemáticos: institucionales (sistemas de prácticas compartidos en el seno de una institución, del profesor) y personales (sistemas de prácticas individuales o mentales, del alumno).

Los significados institucionales según (Godino, Batanero y Font, 2008) pueden ser de varios tipos:

- El referencial: es el sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico (o "sabio") del objeto matemático. Para determinar este significado se requiere la realización de un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.
- El pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio, en los diseños curriculares y libros de texto.
- El implementado: es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente en un proceso de estudio específico.
- El evaluado: es el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

Los significados personales pueden ser de los siguientes tipos:

- El global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto, que son relativas a un objeto matemático.

- El declarado: se refiere a las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- El logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen.

La relación entre estos tipos de significados puede verse en la Figura 1 que se muestra a continuación.

Figura 1. Significados como sistemas de prácticas (Godino, 2014, p. 13)

Del sistema de prácticas matemáticas operativas y discursivas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas prácticas y dan cuenta de su organización y estructura. En esta investigación se estudiarán el significado institucional pretendido en los textos con respecto del cálculo de áreas de figuras compuestas.

2.1.4. Objetos primarios

En la descripción de las actividades matemáticas es común hacer alusión a diferentes tipos de objetos, el EOS considera seis tipos de entidades u objetos primarios: situación-problema, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentaciones y lenguaje. En particular, en la resolución de un problema se pueden encontrar algunos o todos estos objetos mencionados.

Ahora, se describen las funciones específicas de cada objeto primario:

1. *Las situaciones-problemas* (son las actividades, tareas o ejercicios, tanto extramatemáticas como intramatemáticas); son los que componen las tareas que provocan la actividad matemática.
2. *Los Conceptos*, dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, recta, media, función, etc.).
3. *Las propiedades o atributos* de los objetos mencionados. Estos suelen proporcionarse como enunciados o proposiciones.
4. *Los procedimientos, técnicas o acciones* (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos) realizada por el sujeto al enfrentarse a las tareas matemáticas.
5. *Los argumentos* que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo).
6. *El lenguaje* (términos, expresiones, notaciones, gráficos). Estos vienen dados en forma escrita o gráfica en los libros de texto, pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos.

Los seis objetos primarios (situaciones-problemas, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y lenguaje) que están presentes en una práctica matemática se relacionan entre sí formando configuraciones. Estas configuraciones pueden ser de tipo epistémica, instruccional o cognitiva. En esta investigación se utiliza la noción de configuración epistémica como herramienta para analizar los libros de texto.

2.1.5. Noción de idoneidad Didáctica

La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción de acuerdo con Godino (2017) es:

> El grado en que un proceso de instrucción (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno) (p.13).

De esta manera, la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción consiste en la articulación coherente y sistémica de las seis facetas o dimensiones: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (ver Figura 2).

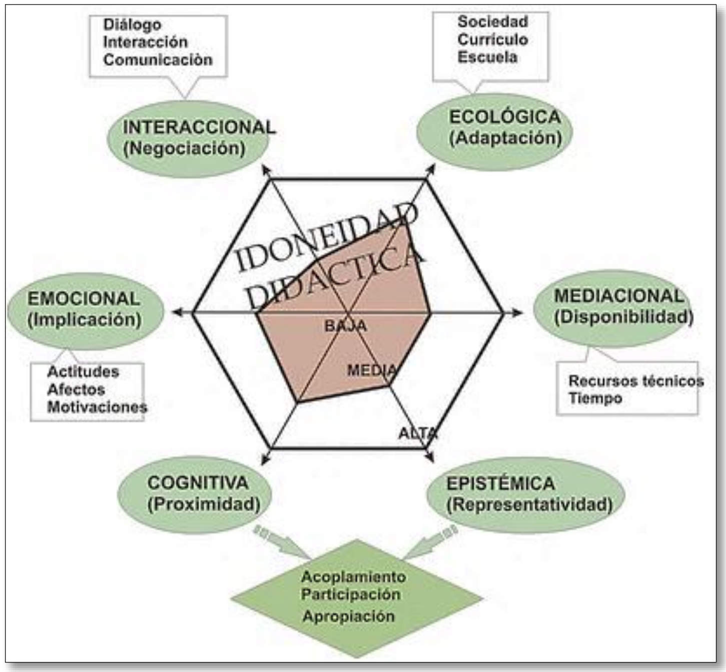


Figura 2. Idoneidad didáctica (Godino, 2017, p. 13)

Ahora bien, cada una de estos componentes son importante para valorar la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción, Godino (2013) los define como sigue:

- *Idoneidad epistémica*, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- *Idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.
- *Idoneidad interaccional.* Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales, y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional*, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza- aprendizaje.

- *Idoneidad emocional*, grado de implicación (interés, motivación, etc.) del alumnado en el proceso de estudio. Esta idoneidad se relaciona con factores que dependen de la institución y del alumno y de su historia escolar previa.
- *Idoneidad ecológica*, grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela, la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

En la presente investigación se realizó el análisis de tres libros de textos, en los que se caracterizó y valoró un conjunto de tareas relacionadas con el cálculo de áreas de figuras compuestas, razón por la cual se centra la atención en la faceta epistémica, que de acuerdo con Godino (2013) se valora con base en los criterios propuesto para cada componente.

2.1.6. Criterios de idoneidad Epistémica

En Godino (2013) se asume de forma general que la idoneidad didáctica de un proceso de estudio y su valoración es un proceso complejo, debido a que se involucran las diversas dimensiones antes señaladas, las cuales a su vez están estructuradas en distintos componentes.

Ahora, se dice que un proceso de estudio tiene "mayor idoneidad epistémica en la medida en que los significados institucionales implementados (o pretendidos) representan bien a un significado de referencia" (p.118). Resaltando que este significado de referencia debe ser relativo al nivel educativo en el que tiene lugar el proceso de estudio y deberá ser elaborado considerando los diversos tipos de problemas y contextos de uso del contenido objeto de enseñanza, así como las prácticas operativas y discursivas requeridas.

En la Tabla 1, se presentan los indicadores relevantes propuestos por Godino (2013) para cada uno de los componentes que hacen operativa la noción de idoneidad epistémica.

Tabla 1.

Componentes e indicadores de idoneidad epistémica (matemática) (Godino, 2013, p.119)

Componente	Indicadores
Situaciones-problemas	▪ Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. ▪ Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización).

Lenguaje	▪ Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica), traducciones y conversiones entre los mismas. ▪ Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige. ▪ Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	▪ Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. ▪ Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado. ▪ Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos.
Argumentos	▪ Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen. ▪ Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
Relaciones	▪ Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. ▪ Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas.

En el marco del EOS se le otorga un papel central a la resolución de problemas puesto que se asume que los objetos matemáticos emergen de las prácticas de los sujetos cuando se enfrentan a determinadas tareas problemáticas. De esta manera Godino (2013) señala que "un punto central para el logro de una alta idoneidad epistémica será, por tanto, la selección y adaptación de situaciones-problemas o tareas ricas" (p. 120). No obstante, para lograr una idoneidad epistémica alta se requiere también prestar atención a las diversas representaciones o medios de expresión, definiciones, procedimientos, proposiciones y a las justificaciones de las mismas. Además, estas tareas deben poder ser resueltas mediante diferentes caminos, así como conjeturar, interpretar, generalizar, justificar y usar diferentes representaciones en su solución. De esta manera, la noción de configuración epistémica permite determinar la relación entre los objetos primarios a los que se presta atención en esta faceta epistémica.

2.1.7. Configuración Epistémica-Cognitiva

Estas configuraciones pueden ser *epistémicas* si son redes de objetos institucionales (extraídas de un texto escolar, obtenidas de la clase que imparte un profesor, etc.), o *cognitivas* si representan redes de objetos personales, observadas en la actividad de los estudiantes (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009).

En la Figura 3 que se muestra a continuación, se presenta la articulación de los seis objetos primarios (situaciones-problemas, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y lenguaje) en una configuración epistémica, resaltando Font y Godino (2006) que el análisis de la misma “informa de la anatomía de un texto matemático” (p.68). Es decir, que la configuración epistémica permite dar cuenta de los objetos primarios que están presentes en un texto de matemáticas y el modo en que se articulan.

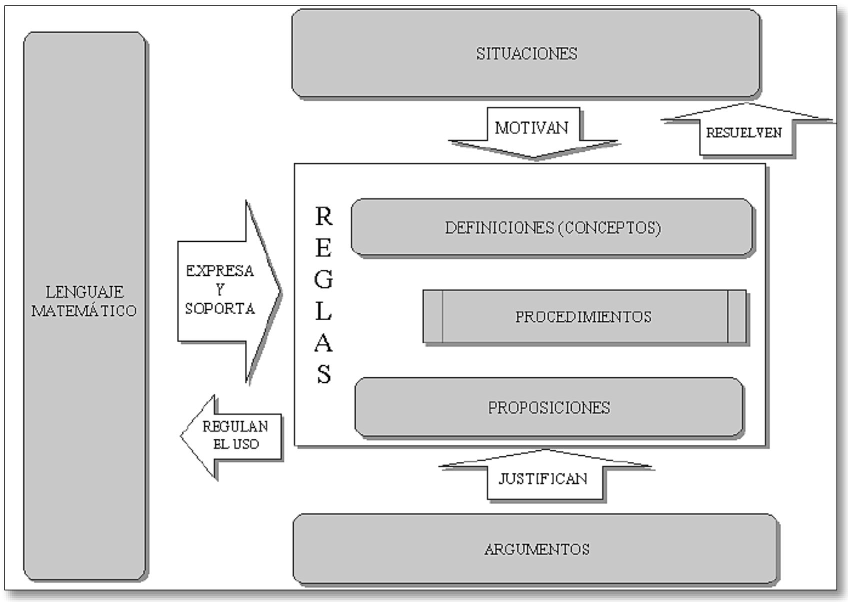


Figura 3. Configuración Epistémica. (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009, p. 69).

2.1.8. Noción de conflicto Semiótico

Una vez determinados los objetos primarios presentes en cada tarea, es posible identificar algunos conflictos semióticos. En el EOS la idea de *conflicto semiótico* alude a cualquier disparidad o discordancia entre los significados que se atribuyen a una expresión por dos sujetos (persona o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto, los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interacciónales (Godino, Batanero y Font, 2007).

2.2. Elementos metodológicos de la investigación

Como se mencionó en el capítulo 1, el objetivo de este trabajo se centra en valorar la idoneidad epistémica de las tareas que atienden el cálculo de áreas de figuras compuestas, propuestas en los libros de texto de matemática de segundo de secundaria. Por lo que en este apartado se exponen los aspectos metodológicos esenciales para el cumplimiento de este objetivo. Es así que se puntualiza en el tipo de investigación, los objetivos específicos planteados, la muestra y elección de los libros, las herramientas de análisis y finalmente el modo en que se valoró la idoneidad epistémica de las tareas.

2.2.1. Tipo de investigación

Esta investigación es de tipo cualitativa, de carácter descriptivo debido a que se analizan y se describen las características de un grupo de tareas presentadas en los libros de texto de segundo de secundaria (Deslauriers, 2004).

El diseño metodológico utilizado conduce a clasificar esta investigación como:

- *Descriptiva:* debido a que se caracterizan las tareas relacionadas con el cálculo de áreas propuestas con los textos, describiendo los modos de solución y los conflictos semióticos potenciales que aparecen al analizarlas.
- *Hermenéutica:* porque lo que aquí realizamos es una interpretación acerca de lo que estas tareas pueden promover en los estudiantes y los objetos matemáticos que pueden emerger en la resolución de cada una de ellas.

2.2.2. Fases de la investigación

Esta investigación se desarrolló en las siguientes siete fases:

1- *Revisión previa del currículo y de los libros de textos de secundaria:* la revisión de los documentos curriculares y los libros de textos de secundaria permitieron determinar los grados en que se aborda el cálculo de áreas de figuras compuestas en este ciclo escolar.

2- *Elección de los libros de textos:* en la página de la Secretaria de Educación Pública de México (SEP) los maestros cuentan con una serie de catálogo de libros de textos gratuitos, que están a su disposición para ser implementados como material de apoyo en las clases. Estos textos son proporcionados por la Comisión Nacional de Libros de Textos Gratuitos (Conaliteg) y aprobados por la SEP, de manera que se asegura que los contenidos allí presentados se ajustan a los planes y programa de estudios establecidos para cada nivel. Para Matemáticas II están disponibles 31 libros de textos de diferentes editoriales y años de edición, de los cuales 4 textos son edición del 2012; 17 del 2013; 5 del 2014; 4 del 2015; y 1 del año 2016.

Para este estudio se eligieron los tres libros de textos más actuales, dos de ellos editados en el 2015 y uno más del año 2016. Esto asumiendo que en cada edición se intenta superar las anteriores (eliminando errores, mejorando enunciado de consignas o incorporando nuevas situaciones problemas), de tal forma que los contenidos contribuyan a que los estudiantes alcancen los aprendizajes esperados de acuerdo con los lineamientos curriculares de los documentos oficiales.

3- *Elección de las herramientas de análisis y de valoración:* para la realización del análisis de los libros de textos se implementan los constructos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. En particular, se usa la noción de configuración epistémica para identificar los objetos primarios (situaciones, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y el lenguaje) que se ponen en juego cuando se resuelven las tareas relacionadas con el cálculo de áreas de figuras compuestas. Además, se usa la noción de idoneidad epistémica para expresar la valoración de las tareas que estos libros de textos proponen para abordar dicho tema.

   Para valorar la idoneidad epistémica de las tareas se tuvo en cuenta si los significados institucionales pretendidos representaban bien el significado de referencia. Por tanto, en primer lugar, se estableció un marco epistémico y didáctico del concepto de área que se puede apreciar en el capítulo 3. En segundo lugar, se analizaron los libros estableciendo las configuraciones epistémicas que resultan de las tareas relacionadas con el cálculo de áreas de figuras compuestas (ver capítulo 4). En tercer lugar, se particularizaron los criterios de idoneidad epistémica propuestos en Godino (2013), de manera que los indicadores para cada componente se relacionen con el tema objeto de estudio. De este modo, se expresó el grado de representatividad del significado institucional pretendido de los textos escolares, referido a tareas relacionadas con el cálculo de áreas de figuras compuestas, respecto del significado de referencia (ver capítulo 5).

4- *Establecimiento de un marco epistémico y didáctico de referencia del concepto de área:* Para la elaboración de este marco epistémico y didáctico de referencia se recurrió a estudios específicos realizados sobre la temática tomada como foco de análisis, recuperando aspectos históricos sobre el tratamiento que tuvo el objeto matemático área y su cálculo. Asimismo, se complementa este marco epistémico y didáctico con estudios que abordan el tratamiento de dichos objetos matemáticos en la clase de matemáticas y los errores conceptuales que usualmente se cometen al abordarlos. Este marco epistémico y didáctico conforma el significado de referencia que es tenido en cuenta para la valoración de las tareas que proponen los libros de texto analizados.

5- *Determinación del significado institucional pretendido en los textos:* Para determinar el significado institucional pretendido en las tareas de los textos, se realizó un análisis de dichas tareas propuestas en cada texto. Para ellos se tomaron en consideración los siguientes aspectos:

- La propuesta presentada por cada texto, en ella se hace explicitó el tipos de tareas que propone el texto y las orientaciones pedagógicas al profesor y el estudiante. Los cuales son aspectos importantes debido a que se presta atención al contexto de las tareas que se analizan. En ese estudio, se entiende por contexto de una tarea a una "descripción que nos ubica en el tipo de trabajo que vienen realizando los alumnos, los conocimientos previos de los que dispone, el tipo de consigna que ha venido realizando y la modalidad del trabajo que se propone para abordarla" (Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodríguez, 2017, p.51).
- La configuración epistémica de estas tareas, para lo cual, se procedió a resolver cada una de ellas, relatando los posibles caminos que un estudiante podría tomar en la resolución. En la descripción de la resolución se fueron señalando los objetos primarios (situaciones, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y el lenguaje) que se ponen en juego.
- Las características de estas tareas, así como el potencial matemático de las mismas, esto teniendo en cuenta a Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodríguez (2017) que mencionan que "el potencial matemático (PM) alude a las posibilidades de exploración que la consigna habilita o no; y a las posibilidades de argumentar sobre la validez de la resolución o de la respuesta" (p. 27). Desde este punto de vista, consideran una consigna con "PM pobre o débil cuando ésta no admite exploración y no requiere ningún tipo de

argumentación. Y con PM rico al caso contrario, cuando la consigna abre las posibilidades al estudiante para que él explore y argumente" (p. 28).

6- *Establecimiento de los criterios de idoneidad epistémica para el cálculo:* En Godino (2013) se presentan los indicadores para cada uno de los seis componentes que hacen operativa la noción de idoneidad epistémica. Estos indicadores estan dados de manera general, por lo que es necesario particularizarlos y relacionarlos con el cálculo de áreas de figuras compuestas. Por tanto, a partir de la revisión de la literatura fue posible proponer criterios específicos para cada componente y con ello valorar las tareas que atienden el objeto matemático en mención.

7- *Valoración de las tareas que atienden el cálculo de áreas de figuras compuestas:* la valoración de las tareas se realizó teniendo en cuenta el marco epistémico y didáctico de referencia del área de figuras compuestas construido (significado de referencia), el significado pretendido que fue determinado mediante el análisis de las áreas, y los criterios de idoneidad epistémica específicos establecidos. En la Figura 4 se señalan los aspectos importantes para la realización de la valoración de dichas tareas.

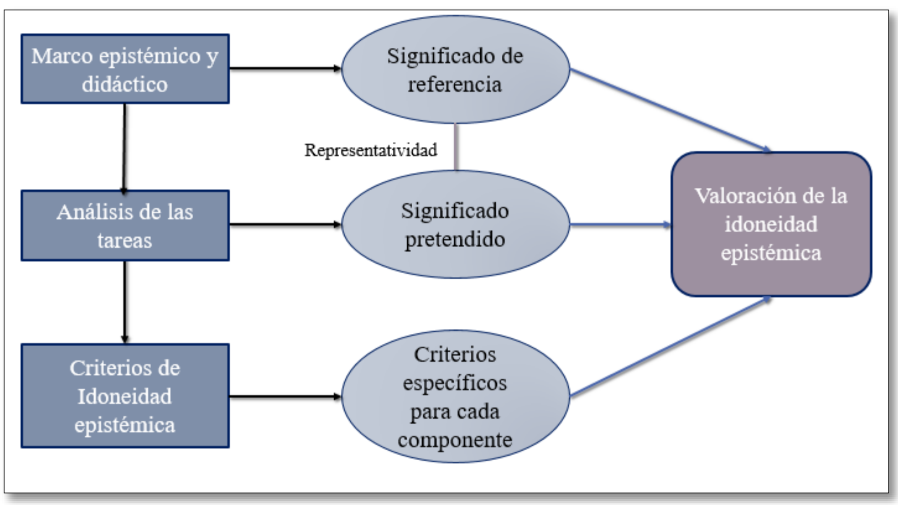


Figura 4. Aspectos importantes para la valoración de las tareas

Capítulo 3.
Marco epistémico y didáctico de referencia del cálculo de áreas de figuras compuestas

En este capítulo se presenta el marco epistémico y didáctico de referencia del cálculo de áreas de figuras compuestas, de acuerdo con el EOS al trabajar la noción de idoneidad epistémica, se hace necesario indicar el grado de representatividad del significado pretendido (libros de texto) respecto al significado de referencia que aquí se muestra.

A continuación, se presenta el concepto de áreas de figuras compuestas desde el punto de vista *epistémico*, con base en la revisión de la literatura y de libros clásicos de geometría, estableciendo cómo se aborda dicho concepto, señalando los diversos significados de acuerdo a los diferentes contextos de uso. En segunda estancia, se muestra una mirada desde el componente *didáctico* con base en lo reportado por la literatura acerca de la complejidad del concepto y la forma en que se ha enseñado el mismo.

3.1. Marco epistémico del área de figuras compuestas

En el análisis sobre el concepto de área realizado por Corberán (1996) se muestra que muchos matemáticos abordaron problemas que implicaban calcular áreas sin haber precisado este concepto, solo suponiendo que toda superficie limitada tiene un área. Un ejemplo de ello es el famoso problema de la cuadratura del círculo que propusieron los matemáticos griegos y que posteriormente fue solucionado por Newton y Leibniz a finales del siglo XVII.

Esta idea de área como medida que proporciona el tamaño de la región encerrada en una figura geométrica se remonta a muchos años atrás. En el antiguo Egipto, tras la crecida anual del río Nilo que inundaba los campos, motivó la necesidad de calcular el área de cada parcela agrícola para restablecer sus límites, lo cual impulsó a los egipcios a inventar la geometría, según Heródoto. Los egipcios son conocidos en la actualidad por resolver problemas geométricos tales como el área del triángulo isósceles, el área del trapecio isósceles y el área del círculo. Asimismo, los papiros encontrados dan muestra de que los egipcios conocían algunos casos particulares de la propiedad de los triángulos rectángulos, que más tarde inmortalizó a Pitágoras (Baldor, 2004).

Pero fue el griego Antifón quien propuso el método para calcular el área de un polígono como la suma de las áreas de los triángulos hacia el año 430 a. C. Sin embargo, calcular el área de una figura curva generaba dificultad, lo que da oportunidad al método de agotamiento que consistía en inscribir polígonos en la figura y circunscribir otros polígonos en torno a ella, aumentar el número de los lados de los polígonos, hasta calcular el área buscada. El llamado método de exhaución de Eudoxo permitió un tratamiento riguroso de los cómputos de áreas y volúmenes, entre ellas obtener una aproximación para calcular el área de un círculo (González, 2004; Struik, 1998).

El matemático griego Herón de Alejandría combinó la matemática griega con la oriental haciendo aportaciones geométricas, de cómputo y mecánicos; en sus escritos se pueden evidenciar la “fórmula Herónica” $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ la cual permite calcular el área del triángulo en forma puramente geométrica, conociendo la mediada de los lados del mismo (Struik, 1998).

Ahora bien, Flores (2002) proporciona una definición formal acerca del cálculo de áreas, donde menciona que medir la superficie de un polígono **p** es asignar un número a la cantidad de superficie de ese polígono. Para ello se fija una cantidad de superficie [u] = U de M, representada por un polígono (que suele tomarse cuadrado), a la que se llama **unidad**, y se busca el número que permite obtener **p** a partir de U (es decir, el número *m* tal que **p** = *m*●U). A este número *m* se le llama *área de **p** en unidad U*. Además, agrega que la cantidad de superficie de un polígono es única, e igual a la de cualquier otro polígono obtenido por descomposición y recomposición. Sin embargo, el área de este polígono es un número que está ligado a la unidad de medida establecida.

3.1.1. Área de una figura compuesta

Es importante resaltar, que en esta investigación el objeto de estudio es el concepto de área de figuras compuestas, por tanto, se revisaron diferentes textos clásicos de geometría (Rich & Thomas, 2009; Baldor, 2004; Wentworth y Smith, 2000), notando que este concepto se aborda en algunos casos de forma explícita y en otros implícitamente cuando se trabaja el concepto general de área.

Rich & Thomas (2009) definen el área de una unidad cuadrada como la superficie encerrada en un cuadrado cuyo lado es 1 unidad, por tanto, el área de una superficie cerrada, tal como la de un polígono, es el número de unidades cuadradas contenidas en su superficie. A partir de esta definición de área se establecen fórmulas para el cálculo de figuras poligonales (rectángulos, triángulos, trapezoides, etc.), áreas de círculos y sectores circulares. Para el caso del área de figuras combinadas o compuestas ésta puede calcularse mediante la determinación de las áreas individuales, seguidas de la suma o la resta de las mismas, según resulte conveniente. En la Figura 5 se muestra el tipo de tareas que se proponen en el texto de Rich & Thomas (2009) para abordar este concepto.

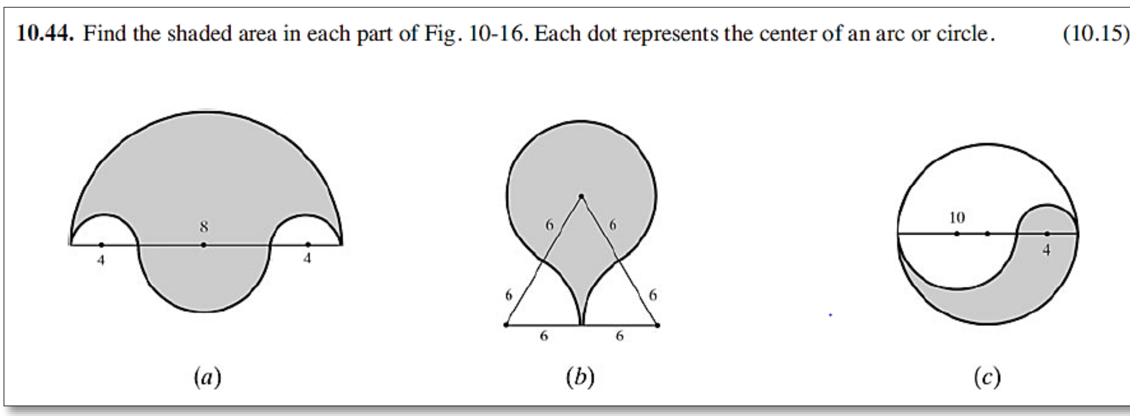


Figura 5. Tarea para el cálculo de áreas de figuras compuestas en (Rich & Thomas, 2009. p.194)

Por su parte Baldor (2004) realiza una distinción entre dos términos, por un lado, la superficie referida a la forma (cuadrada, circula, etc.) y el área como la medida de una superficie. Por tanto, establece que para determinar la medida de una superficie se toma como unidad un cuadrado que tenga por lado la unidad de longitud. Además, agrega que en la práctica el cálculo del área de una figura se efectúa indirectamente, es decir, midiendo la longitud de algunos de los elementos de la figura y realizando ciertas operaciones con dichas medidas. Sin embargo, el área de figuras compuestas aparece de manera implícita en algunas tareas del banco de ejercicios complementarios propuestos en este texto (ver Figura 6), asimismo cuando se aborda el área de poliedros como prismas y pirámides, cuyas definiciones sugieren la suma de las áreas que conforman las caras laterales para obtener el área total.

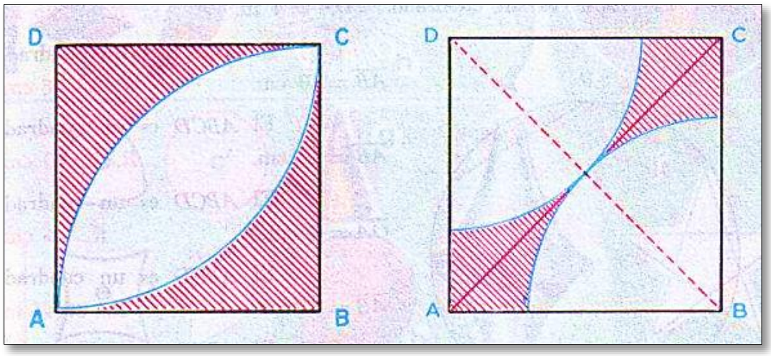


Figura 6. Tarea para el cálculo de áreas de figuras compuestas en (Baldor, 2004, p. 231)

En Wentworth y Smith (2000) se define el área de una superficie como la medida de esa superficie en unidades superficiales, siendo esta última, la superficie tomada como unidad para medir la superficie de otras. Comúnmente, la unidad superficial es la de un cuadrado cuyo lado es igual a la unidad de longitud. Estos autores, mencionan que el área de un polígono cualquiera se puede determinar descomponiendolo en triángulos, sea por diagonales o sea por rectas trazadas a los vértices por un punto interior, calculándo las áreas de estos tríangulos.

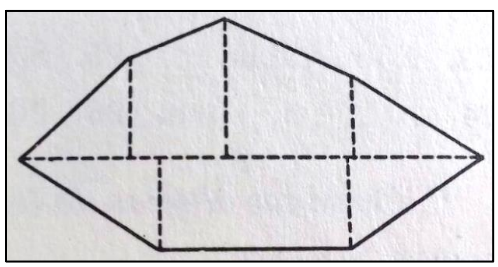


Figura 7. Ejemplo de descomposición de polígonos (Wentworth y Smith, 2000, p. 199)

Además, Wentworth y Smith (2000) afirman que en agrimensura se emplea a menudo el método que se propone en la figuara 7, donde se traza una de las diagonales largas y de los vértices se bajan perpendiculares a ella, con lo cual el polígono queda dividido en triángulos y trapecios, de manera que es posible calcular el área total de dicho polígono. Lo anterior, hace referencia al cálculo de áreas de una figura compuesta, puesto que se explica que apartir de la descomposición de una figura en varios poligonos, cuyas áreas son más fáciles de calcular, es posible obtener el área total de dicha figura.

3.2. Marco didáctico del área de figuras compuestas

Como se evidenció en el apartado anterior, en la mayoría de los textos clásicos de geometría presenta de forma implícita el cálculo de áreas de figuras compuestas cuando tratan el concepto general de área, por lo cual, se puede encontrar investigaciones en el campo de la matemática educativa que giran en torno a este concepto.

En cuanto a la enseñanza del área, este es considerado como uno de los conceptos que juega un papel importante en la construcción de otros conceptos matemáticos, tales como el de fracciones, integración, porcentajes, volumen, etc. Asimismo, en el desarrollo de destrezas y habilidades matemáticas como la resolución de problemas, el razonamiento, la argumentación, visualización, etc. De ahí que muchos programas curriculares presentan orientaciones específicas para el tratamiento del área, asumiéndola como una de las magnitudes a la que mayor atención se le asigna en los primeros grados de la educación básica, tal es el caso del currículum de España y Colombia debido a que estos contemplan el trabajo de dicho concepto durante los primeros sietes años de la educación básica (Marmolejo y González, 2015).

En el trabajo realizado por Corberan (1996) se menciona que el concepto de área se ha abordado desde cuatro perspectivas (manifestaciones del área como las llama Corberan):

- *El área como cantidad de plano ocupado por la superficie:* es la manifestación del área como cantidad de plano ocupado por la superficie, la cual es la primera manifestación con la que los niños deben estar familiarizados. Por lo general, ésta se trabaja realizando tareas de comparación de áreas de superficies, mediante el uso de procedimientos de naturaleza geométrica, donde el número está ausente de cualquier razonamiento.
- *El área como magnitud autónoma:* en esta manifestación se entiende el área disociada de la forma de la superficie y del número que la mide, lo cual permite disociar el área del perímetro, puesto que la confusión entre estos dos términos es una de las más habituales y más arraigada entre los estudiantes, que les lleva a cometer frecuentes errores. Esta manifestación se trabaja realizando tareas de comparación de áreas de superficies, de

modo que se observe que superficies de forma diferente pueden tener igual área, mediante el uso, tanto, de procedimientos de naturaleza geométrica como de naturaleza numérica. La disociación del área del número que la mide es clave en la comprensión del papel que juega la unidad de medida, y en consecuencia en la comprensión del proceso de medida. Es apropiado trabajar con tareas de medida del área de una misma superficie, con el uso de diferentes unidades de medida.

- *El área como número de unidades que recubren la superficie:* para que el estudiante entienda esta manifestación es necesario que este comprenda el papel que juega la unidad de medida en el cálculo de áreas. Trabajar esta manifestación del área, ayudará a los estudiantes a enfrentarse significativamente al estudio del área como resultante del producto entre magnitudes lineales. Por tanto, se deben realizar tareas de medición basadas en la comparación de las áreas de dos superficies, una, la superficie cuya área se desea medir y la otra, considerada como unidad, utilizando procedimientos de carácter numérico con uso de una unidad de medida bidimensional. De este modo la medida del área vendrá dada por el número procedente de un recuento o conteo del número de unidades o fracción de ésta que recubre exactamente la superficie.
- *El área como producto de dos dimensiones lineales:* hay que resaltar que a pesar de ser ésta una de las manifestaciones del área más usual en la enseñanza, paradójicamente es la que posee las más altas cotas de incomprensión. Se debe ser conscientes del nivel de abstracción y de formalización que requiere la medición de un área mediante cálculos a partir de las dimensiones lineales y de ahí la dificultad para comprender las fórmulas para calcular áreas de superficies. Por tanto, se debe abordar esta manifestación realizando tareas de cálculo de áreas de superficies poligonales, que puedan descomponerse en rectángulos y/o triángulos y así utilizar las fórmulas para el cálculo del área de dichos polígonos.

Estas manifestaciones señaladas por Corberan (1996) hacen alusión a la forma en la que regularmente se enseña el concepto de área de acuerdo al nivel escolar de los estudiantes. De manera que este concepto implica procesos que van más allá de la simple utilización de la fórmula.

3.2. 1. Enseñanza del cálculo de áreas de figuras compuestas

En cuanto a la enseñanza del cálculo de áreas de figuras compuestas, durante nuestra búsqueda, se encontró poca literatura al respecto, sin embargo, en trabajos recientes como el de Jiménez-Gestal y Blanco, (2017) se presenta una propuesta en la que es posible, utilizando el teorema de PICK y las tramas cuadradas como recurso, determinar el área de ciertos tipos de figuras, entre ellas, las que necesitan ser descompuestas para encontrar la medida de su superficie, tales como las que se muestran en la Figura 8.

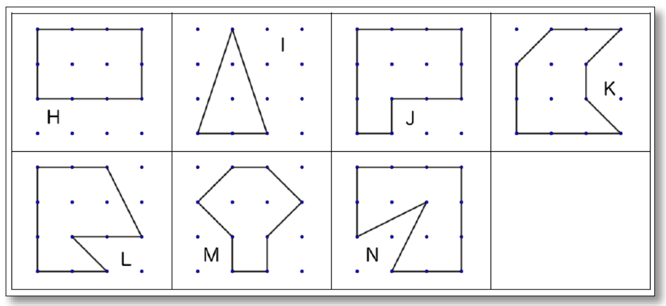


Figura 8. Tipos de figuras para el cálculo de áreas en (Jiménez-Gestal y Blanco, 2017, p.15)

Para otra parte, se realizó la revisión de algunos documentos curriculares, donde se especifican los tipos de situaciones problemas, conceptos, propiedades y procedimientos apropiados para el tratamiento del cálculo de áreas de figuras geométricas y compuestas, así como en el lenguaje en que deben estar expresados los problemas y las formas de expresión que deben ser promovidas en la resolución de las mismas. Es importante aclarar, que la decisión de elegir los lineamientos curriculares obedece al hecho de que en ellos se presentan acuerdos de una comunidad académica, basados en revisiones bibliográficas y de investigaciones, sobre el significado institucional de referencia para cada objeto matemático en particular. De alguna manera, los lineamientos curriculares contienen algunas especificaciones precisas sobre los indicadores de la idoneidad epistémica que debería tener el significado institucional de referencia.

A las situaciones- problemas el EOS les otorga un papel central, ellas permiten que se utilicen el resto de los objetos primarios, de esta manera, para alcanzar una alta idoneidad epistémica se requiere la elección y adaptación de tareas matemáticamente ricas (Godino, 2013). Lo cual implica que éstas sean contextualizadas y desafiantes, permitiendo la ejercitación, la exploración y la aplicación.

En cuanto al tema del cálculo de áreas se prioriza la asignación numérica, pero en realidad este es apenas un subproceso del complejo proceso de medición, donde no necesariamente se designa un número para denotar medición (MEN, 1998). De esta forma, recobra importancia la estimación, la asignación de la unidad de medida, el rango de la magnitud y el trasfondo social de la medida.

En cuanto al componente del lenguaje, en este trabajo se ha considerado el uso de representaciones gráficas, verbales y simbólicas, como medio para expresar y soportar el conjunto de reglas implementadas en las resoluciones de las tareas. Este tipo de representaciones son importantes porque permiten al individuo expresar conceptos e ideas (Rico, Castro y Romero, 2000). Además, el uso de estas representaciones depende en gran medida de la información que posea este sobre un concepto determinado.

Por otro lado, Godino (2013, p. 120) señala que "aunque las situaciones problemas constituyen un elemento central, el logro de una idoneidad epistémica alta requiere también atención a las diversas representaciones o medios de expresión, las definiciones, procedimientos, proposiciones, así como las justificaciones de las mismas". Esto sugiere que las definiciones establecidas en los textos deben ser claras, correctas y apropiadas de acuerdo con el nivel educativo al que está dirigido. Además, que las situaciones planteadas permitan relacionar las definiciones, propiedades y procedimientos, de manera que se puedan seguir diferentes rutas de solución.

Itzcovich (2005) menciona que los problemas geométricos se caracterizan por poner en juego una variedad de propiedades de los objetos geométricos, y el dominio de estas propiedades son herramientas que se utilizan en todo proceso deductivo. Además, señala que "las argumentaciones a partir de propiedades conocidas de los cuerpos y figuras producen nuevos conocimientos sobre los mismos" (p.13). Este autor, establece una relación entre objetos primarios, que no solo posibilitan la resolución de la situación sino también la emergencia de nuevos conocimientos acerca del objeto de estudio.

Como se ha resaltado, un aspecto importante está relacionado con la necesidad de solicitar argumentos en las situaciones que se plantean. Itzcovich (2005) presenta algunos problemas que requieren de comparar medidas de áreas de superficies sin medirlas directamente, haciendo necesario interpretar las relaciones que sugiere el cálculo de las áreas de las figuras que aparecen, de manera que los argumentos deductivos son los que permiten determinar finalmente la solución de la situación.

3.2.2. Noción de figura que se asume en esta investigación

Así como existen diferencias entre los conceptos de superficie y área, algunos autores realizan la distinción entre figura y dibujo. Para Parzysz (1988) la figura es un objeto geométrico descrito por el texto que la define, mientras que el dibujo es una representación de este objeto. La diferencia se encuentra en que un dibujo muestra ciertos aspectos que guardan relación con los conocimientos que un sujeto tiene sobre ella. Esto explica por qué, a veces, los estudiantes infieren de un dibujo ciertas propiedades que no forman parte de la figura que están dibujando. Por ejemplo, el dibujo de un triángulo rectángulo con la hipotenusa paralela o coincidente con los bordes de la hoja, lleva a pensar que la figura no tiene ángulo recto. También, que el dibujo de un cuadrado con sus diagonales paralelas o perpendiculares a los bordes de la hoja induce a pensar que la figura no es un cuadrado sino más bien, un rombo. Tener en cuenta la diferencia entre dibujo y figura puede resultarnos didácticamente útil para:

a) cuestionarnos si la representación de un objeto geométrico (dibujo) permite ver todas las propiedades que caracterizan la figura (cuáles sí y cuáles no);

b) advertir que es imposible que un dibujo contenga todas las relaciones que caracterizan a la figura involucrada en el problema;

c) discriminar las relaciones que se infieren del dibujo (imagen perceptiva) de las que son efectivamente propiedades de la figura o cuáles no lo son.

Capítulo 4.
Análisis de las tareas que atienden el cálculo de áreas de figuras compuestas en los libros de texto

En este capítulo se presenta el análisis de las tareas que atienden el cálculo de áreas de figuras compuestas, presentadas en tres libros de texto seleccionados para este estudio. Este análisis se hace con el fin de determinar las configuraciones epistémicas correspondientes al conjunto de estas tareas, de manera que sea posible establecer el significado institucional pretendido en las mismas. Debido a que estos libros de textos están aprobados por la SEP, presentan una estructura similar, apoyada de los planes y programas de estudio para matemática. Por tanto, las tareas analizadas están ubicadas, en todos los casos, en el bloque 1, en el eje: forma espacio y medida, en el tema: medida y en el contenido: resolución de problemas que impliquen el cálculo de áreas de figuras compuestas, incluyendo áreas laterales y totales de prismas y pirámides.

Se muestra a continuación, el análisis de cada libro considerando en los siguientes aspectos:

- **Aspectos generales del libro**. Esto implica una descripción, extraída de la presentación de cada libro de texto, ubicado el número de tareas propuestas para el contenido objeto de estudio, la modalidad de trabajo que se propone para abordarla (individual, grupal, etcétera) y el tipo de tareas que proponen planteadas en estos textos.
- **Identificación de los objetos primarios en la resolución de las tareas**: Se presentan las consignas de las situaciones- problemas y una resolución a nivel experto de las mismas (mejor resolución que podría realizar un estudiante de ese curso o nivel), donde se enfatizan los objetos primarios que intervienen: Conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y lenguaje (Font y Godino, 2006). A su vez, se describen los conflictos cognitivos potenciales que se detectan en las tareas o bien durante la resolución de la misma (por el investigador).
- **Tablas de objetos primarios previos y emergentes**: se recopilan los objetos primarios previos y emergentes en la resolución de cada situación problema.

- **La configuración epistémica del conjunto de tareas del libro:** ésta resulta del análisis del modo en que se articularon los objetos primarios (detallados en la resolución experta y en la tabla) donde se exhiben las relaciones entre ellos. A esta configuración epistémica se le anexa una descripción y análisis general de la misma.

4.1. Análisis del libro 1

4.1.1. Descripción general del libro.

El libro *Matemáticas por competencias 2* busca apoyar actividades que involucren la argumentación, el dialogo, la reflexión, así como el manejo de las tecnologías de la información y la comunicación, el debate y el análisis, que permitan el planteamiento de soluciones individuales y colectivas, puesto que solo de esta forma se podrá contribuir a la obtención de un aprendizaje significativo.

Se ubicaron 9 tareas para el tratamiento de este contenido, que están propuestas de acuerdo al tipo de tareas planteadas en este texto: la primera tarea *"Acuérdate de"* se presenta con el objetivo de "ayudar a reforzar lo aprendido en otro momento y a renovar la experiencia" (Arriaga y Benítez, 2016, p.6), exigiendo poner en juego conocimientos previos útiles para resolver las tareas posteriores. Las siguientes 6 tareas corresponden a *"practícalo"* que son "actividades diversas que incluyen ejercicios para practicar, adquirir confianza, desarrollar autonomía y perfeccionar las competencias (conocimientos, habilidades y actitudes) matemáticas" (Arriaga y Benítez, 2016, p.6). Luego, la tarea 8 la llaman *"lo que aprendí"* cuyo objetivo es "ayudar a identificar los aprendizajes obtenidos durante la lección y así saber lo aprendido, lo que esta aprendiendo y lo que le falta aprender; con esto alcanzar logros y también retos por conseguir para desarrollar más habilidades" (Arriaga y Benítez, 2016, p.7). Finalmente, la tarea 9 corresponde a *Desarrolla tus habilidades"* que es "un apartado diseñado para que mediante una actividad lúdica, repasen lo aprendido y determinen su grado de avance" (Arriaga y Benítez, 2016, p.7). En este texto se asume que la modalidad de trabajo con las tareas es de forma individual, con la excepción de algunas que sugieren la participación conjunta entre compañeros y el profesor.

4.1.2. Identificación de los objetos primarios en la resolución de las tareas

Tarea 1. Correspondiente a "Acuérdate de" es la siguiente:

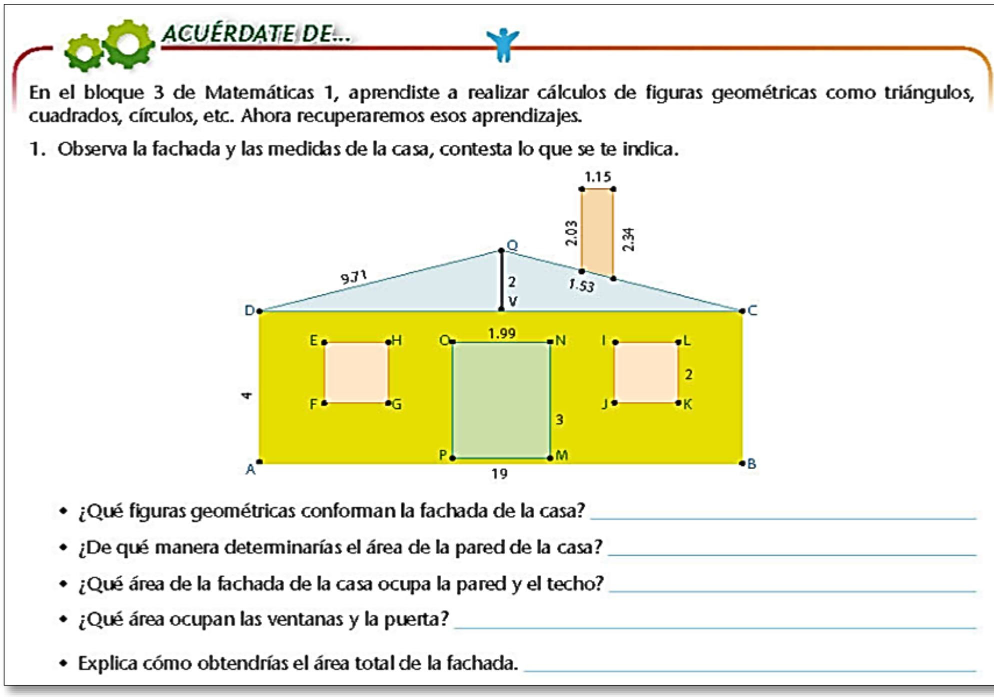


Figura 9. Tarea1 tomada de (Arriaga y Benítez, 2016, p.45).

Es una tarea planteada en un contexto extramatemático[2] en el que se solicita calcular las áreas de la pared, el techo, las ventanas y la puerta de la casa, para finalmente explicar cómo se obtendría el área total de la fachada, poniendo en juego conocimientos previos relacionados con figuras geométricas y las fórmulas para el cálculo de áreas.

La resolución: en el primer inciso *¿Qué figuras geométricas conforman la fachada de la casa?* Una respuesta es indicar que se aprecian cuatro tipos de figuras geométricas, tales como: cuadrados, rectángulos, triángulos y trapecios ***conceptos***), considerando que el cuadrado es un cuadrilátero regular de lados iguales y sus ángulos interiores miden 90 grados. El rectángulo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son iguales y sus ángulos interiores

[2] Un contexto intramatemático es aquel en el que la tarea específica a realizar se refiere solamente a objetos matemáticos tales como estructuras o símbolos; usualmente se da en situaciones de tipo científico o escolar. Mientras que un contexto extra-matemático incluye elementos externos (otras disciplinas, realidad, etc.) que influyen en la interpretación y solución (Barrantes y Araya, 2010).

son rectos. El triángulo es una figura plana que posee tres lados, tres vértices y tres ángulos. Y el trapecio es un cuadrilátero con dos lados paralelos.

Otra respuesta a este inciso, sería identificar que hay tres tipos de figuras geométricas, rectángulos, triángulos y trapecio, esto asumiendo la ***propiedad*** de los rectángulos que dice que sus lados paralelos son iguales, de manera que el cuadrado resulta ser un rectángulo equilátero.

Otra posible respuesta es con base en el ***concepto*** de paralelogramo, que se define como un cuadrilátero convexo cuyos pares de lados opuestos son iguales y paralelos dos a dos, se puede decir que el rectángulo y el cuadrilátero son paralelogramos, por tanto, una respuesta a este inciso es mencionar que las figuras geométricas son paralelogramos, triángulos y el trapecio.

Para responder el segundo inciso *¿De qué manera determinarías el área de la pared de la casa?* Inicialmente se debe calcular el área de la región rectangular, que incluye pared, puertas y ventanas. Luego, será necesario reconocer que las áreas de la puerta y las ventanas reducen el área de la pared, por lo que se hace necesario calcular estas áreas y sustraerlas al área total, obteniendo el área de la pared de la casa (***concepto)***. La explicación a esta pregunta se hace con un ***argumento*** basado en el concepto de área de figuras geométricas.

Para responder el tercer inciso *¿Qué área de la fachada de la casa ocupa la pared y el techo?* Se puede seguir el procedimiento descrito en el segundo inciso para encontrar el área de la pared. Primero se calcula el área de la región rectangular multiplicando la base por la altura $A = 19 \times 4 = 76u^2$ (***Concepto y procedimiento)***, seguido del cálculo del área de las ventanas operando 2 veces el producto de la base por la altura $A_V = 2(2 \times 2) = 8\ u^2$, el área de la puerta multiplicando su base con la altura $A_p = 1.99 \times 3 = 5.97u^2$, ahora es posible encontrar el área de la pared sustrayendo del área de la región rectangular la de ventanas y puerta $A_p = 76 - 8 - 5.97$ resultando $A_p = 62.03\ u^2$ ***(procedimiento)***.

En cuanto al área del techo, puede ser calculado de diferentes maneras, la primera es considerar el techo como una región triangular cuya área resulta de multiplicar un medio de la base por altura $A = \frac{19 \times 2}{2} = 19u^2$ (***Concepto y procedimiento)***. Otra forma de calcular el área del techo es identificar que está dividido en dos triángulos iguales, de manera que el área total del techo será igual a la suma de éstas dos $A_T = A_1 + A_2$ ***(propiedad).*** Obteniendo $A_1 = \frac{9.5\times 2}{2} = 9.5\ u^2$ y como $A_1 = A_2$ luego $A_T = 9.5 + 9.5 = 19\ u^2$ ***(procedimiento).***

Por otro lado, como en este libro se reconoce el uso de las tecnologías como una herramienta importante, es posible que el estudiante contemple la posibilidad de acceder a internet para buscar información sobre el cálculo del área del triángulo conociendo sus tres lados, encontrando la fórmula de Herón como un camino para hallar el área del techo de la casa. Por consiguiente, se podría hallar el perímetro del triángulo $P = 19 + 9.71 + 9.71 = 38.42$, luego el semiperímetro $S = 19.21$ y calculamos $A = \sqrt{19.21\ (19.21 - 19)(19.21 - 9.71)(19.21 - 9.71)} = 19.08\ u^2$. Se puede observar que el área del techo resulta mayor y esto es debido a las aproximaciones que presenta el libro en los lados del triángulo.

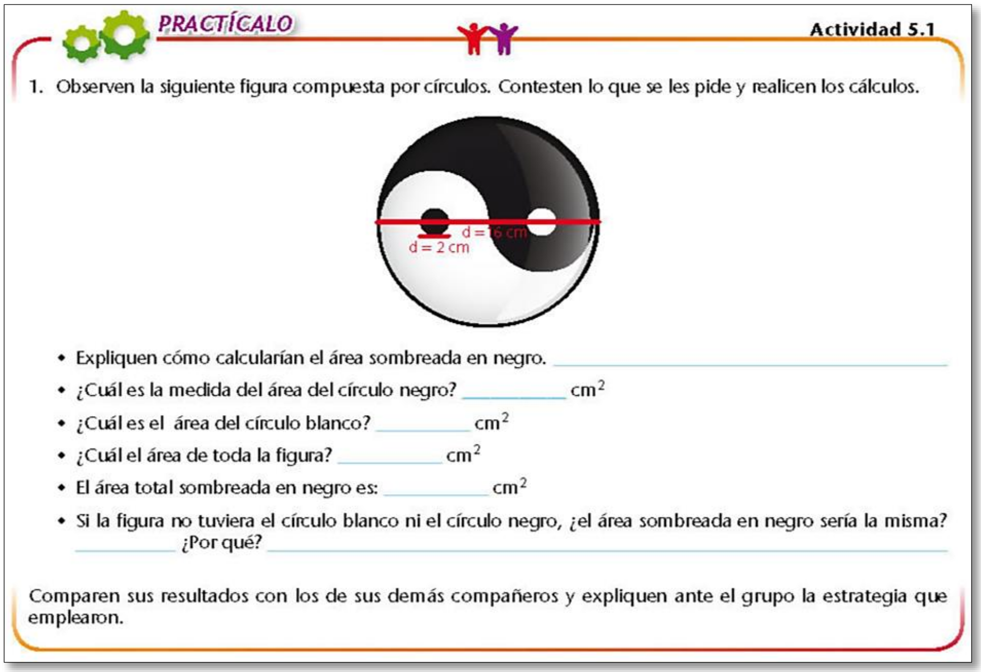
Ahora bien, para responder la cuestión ¿qué área ocupan las ventanas y la puerta? Se ponen en juego las fórmulas para calcular el área de un rectángulo, tal y como se hizo en uno de los incisos anteriores, de manera que se responde haciendo el ***procedimiento*** señalado, para el área de la puerta $A_p = 1.99 \times 3 = 5.97$ y para el área de las ventanas $A_V = 2(2 \times 2) = 8$ u^2que juntas ocupan un área de 13.97 u^2.

Para finalizar, en esta tarea se pide *explicar cómo obtendrías el área total de la fachada,* cuya respuesta se puede basar en los cálculos realizados anteriormente, un camino es sumar el área de la pared, las ventanas, la puerta, el techo y la chimenea, pues la suma de estas áreas componen la fachada. Otra forma de obtener el área de toda la fachada es identificar que ésta se encuentra conformada por tres figuras geométricas, el rectángulo (que contiene la puerta y la ventana), el triángulo que corresponde al techo y el trapecio a la chimenea, de tal forma que hallando y sumando estas áreas es posible obtener el área total de la fachada. ***(Argumento*** basado en el procedimiento).

Conflictos semióticos de la tarea

Se observó que las longitudes para cada una de las secciones de la casa están expresadas sin unidades de medida, lo cual podría convertirse en un conflicto semiótico debido a que puede ocasionar dificultades en el aprendizaje del estudiante cuando se aborda el concepto de área como producto de dos dimensiones lineales, es decir, sin unidades de medida pierde sentido expresar el área en términos de unidades cuadradas.

Tarea 2. Correspondiente a "Practícalo"



PRACTÍCALO

Actividad 5.1

1. Observen la siguiente figura compuesta por círculos. Contesten lo que se les pide y realicen los cálculos.

- Expliquen cómo calcularían el área sombreada en negro. __________
- ¿Cuál es la medida del área del círculo negro? __________ cm^2
- ¿Cuál es el área del círculo blanco? __________ cm^2
- ¿Cuál el área de toda la figura? __________ cm^2
- El área total sombreada en negro es: __________ cm^2
- Si la figura no tuviera el círculo blanco ni el círculo negro, ¿el área sombreada en negro sería la misma? __________ ¿Por qué? __________

Comparen sus resultados con los de sus demás compañeros y expliquen ante el grupo la estrategia que emplearon.

Figura 10.Tarea 2 tomada de (Arriaga y Benítez, 2016, p.46).

Es una tarea planteada en un contexto extramatemático, donde se presenta una fígura compuesta por círculos, conocida como el Yin y el Yang, solicitando el cálculo de las áreas blancas y negras.

La resolución: para explicar *cómo se calcularía el área sombreada de negro* se debe tener en cuenta que "el Yin y el Yang" es un símbolo cuya parte sombreada de negro es igual a la blanca, por tanto basta con calcular una de éstas, pues representaría la mitad del área del círculo. El mismo resultado se obtendría si se suman las áreas de las partes sombreadas. Este es un argumento basado en el ***concepto y procedimiento*** de área de un círculo.

Para responder *¿Cuál es la medida del área del círculo negro* (A_1)? *¿cuál es el área del círculo blanco* (A_2)? Tendremos en cuenta que los dos círculos tienen la misma área y como se conoce el diámetro es posible usar la fórmula ($A = \pi r^2$) para calcular sus áreas. Se obtiene $A_1 = \pi 1^2 = \pi cm^2$, luego $A_2 = \pi cm^2$, es decir, que tanto el círculo negro como el blanco tiene un área igual a πcm^2 ***(procedimiento).***

En cuanto a la pregunta *¿cuál es el área de toda la figura?* Se responde igualmente usando la fórmula para calcular el área de un cículo, pues la figura proporciona que este tiene un diámetro de 16cm, es decir un radio de 8 cm, por lo tanto, el área es $201.06\ cm^2$, resultado de operar $A = \pi 8^2 = \pi . 64 = 201.06\ cm^2$. Atendiendo lo mencionado en el primer inciso *el área total sombreada en negro* es exactamente la mitad del área de toda la figura por tanto $A_s = \frac{A_T}{2} = \frac{201.06\ cm^2}{2} = 100.53\ cm^2$. En el inciso final de esta tarea dice: si la figura no tuviera el círculo blanco ni el círculo negro, *¿el área sombreada de negro sería la misma? ¿por qué?* la respuesta a esta cuestión tiene el ***argumento*** basado en el procedimiento del cálculo de las áreas de estos dos círculos, pues anteriormente se mostró que son iguales, por tanto si se quitaran estos círculos de la figura, el área sombreada seguiría siendo la misma.

Conflictos semióticos potenciales de la tarea

En esta tarea se identificó abuso del lenguaje cuando se pregunta por *la medida del área* del círculo negro, porque según Castro, Flores y Segovia (1997) lo que se miden son las superficies y cuando se habla de área se hace refiriéndose a la cantidad de la superficie. Este hecho podría convertirse en un conflicto porque el estudiante entiende como homólogos los conceptos de área y superficie, cuando en las matemáticas se le asigna significados que si bien se relacionan son diferentes.

Tarea 3. Correspondiente a "Practícalo"

Figura 11. Tarea 3 tomada de (Arriaga y Benítez, 2016, p.47).

- ¿Qué nombre recibe cada prisma? A ____________ B ___________ y C ___________
- ¿Qué figura geométrica presentan las caras de los tres prismas?
- ¿Qué figura geométrica muestran sus bases? A ______________ B ______________ y C ______________
- Explica cómo obtendrías el área total de los tres prismas. ____
- ¿Cuál es el valor del área total del prisma A?____________ u^2
- ¿Cuál le corresponde al prisma B?____________ u^2
- ¿Y cuál es el del prisma C?____________ u^2

Compara tus resultados con los de tus demás compañeros y, con la asesoría de tu profesor concluye: ¿Cómo se calcularía el área total de un prisma de base irregular?

Figura 12. Continuación de la tarea 3 tomada de (Arriaga y Benítez, 2016, p.47).

Es una tarea planteada en el contexto intramatemático en el que se pide nombrar los tipos de prismas, reconocer las figuras geométricas que componen las bases y las caras laterales, así como explicar y calcular las áreas de estos prismas.

La resolución: en esta tarea se solicita desarmar mentalmente los prismas y trazar en el cuaderno las figuras planas que resultarían, lo que pone en juego un ***lenguaje gráfico*** que ayudará para la resolución de las cuestiones que se plantean en la misma. En el primer inciso *¿qué nombre recibe cada prisma?* Es cuestión de recordar que los prismas pueden nombrarse de acuerdo al número de lados de la base, por tanto, el prisma A que tiene una base de tres lados (triángulo) es un prisma triangular, el prisma B que tiene una base de cuatro lados (cuadrilátero) es un prisma cuadrangular, y el prisma C que tiene una base de seis lados (hexágono) es un prisma hexagonal ***(propiedad).***

Ahora, si tomamos en cuenta el ***concepto*** de prisma que proporciona la tarea para responder *¿Qué figuras geométricas presentan las caras de los tres prismas?* Y *¿qué figuras geométricas forman sus bases?* Es posible que con la palabra "caras" se esté refiriendo a las bases de las pirámides, por tanto, las respuestas a estas dos preguntas serían las mismas (triángulos, cuadrados y hexágonos). Pero conociendo que un prisma está formado por bases, caras laterales, aristas y vértices (***concepto*** de prisma), se puede responder que las figuras geométricas presentes en las caras de los tres prismas son paralelogramos y las figuras geométricas que forman son triángulos, cuadrados y hexágonos para los prismas A, B y C respectivamente.

Luego, se pide *explicar cómo obtendrías el área total de los prismas,* una respuesta acertada es calcular el área de cada uno de los polígonos que conforman el prisma y sumarlas para obtener el área total, este es un ***argumento*** basado en el concepto de área de figuras compuestas. También, es posible acceder a internet para consultar las fórmulas que permiten realizar el cálculo de estas áreas. De esta manera para el prisma triangular se podría usar la fórmula $A = L\left(\frac{\sqrt{3}}{2}L + 3h\right)$ siendo L el lado del triángulo de la base y h la altura; para el prisma cuadrangular $A = 2L.(L + 2h)$ siendo L el lado del cuadrado de la base y h la altura, y para el prisma hexagonal $A = 6L(ap + h)$ donde L es un lado del hexágono de la base, ap su apotema y h la altura del prisma (***argumento*** basado en el concepto).

Siguiendo la idea anterior, para calcular el área del prisma A (triangular), primero se calcula el área de las bases (A_b) y luego la de las caras laterales (A_c). Se tiene que $A_b = 2\left(\frac{3*2.6}{2}\right)$ entonces $A_b = 2\,(3.9) = 7.8u^2$ y $A_c = 3(6 * 3) \rightarrow A_c = 54\,u^2$ ahora el área total del prisma triangular (A_{pt}) es la suma de estas áreas, $A_{pt} = A_b + A_c \rightarrow A_{pt} = 7.8u^2 + 54u^2 = 61.8\,u^2$. Usando la fórmula $A_{pt} = L.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}L + 3h\right) \rightarrow A_{pt} = 3.\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 + 3 \times 6\right) \rightarrow A_{pt} = 61.79\,u^2$ lo que es aproximadamente $61.8\,u^2$ ***(concepto y procedimiento)***.

De forma similar, el área del prisma cuadrangular (A_{pc}) se puede obtener sumando las áreas de las bases cuadradas (A_b) y el área de caras laterales (A_c), entonces $A_b = 2\,(4 \times 4) \rightarrow A_b = 32u^2$ y $A_c = 4\,(4 \times 8) \rightarrow A_c = 128u^2$ luego $A_{pc} = A_b + A_c \rightarrow A_{pc} = 32u^2 + 128u^2$ entonces $A_{pc} = 160u^2$. Utilizando la fórmula $A_{pc} = 2L.(L + 2h) \rightarrow A_{pc} = 2 \times 4\,(4 + 2 \times 8)$ obteniendo $A_{pc} = 8 \times 20 = 160\,u^2$ ***(concepto y procedimiento)***.

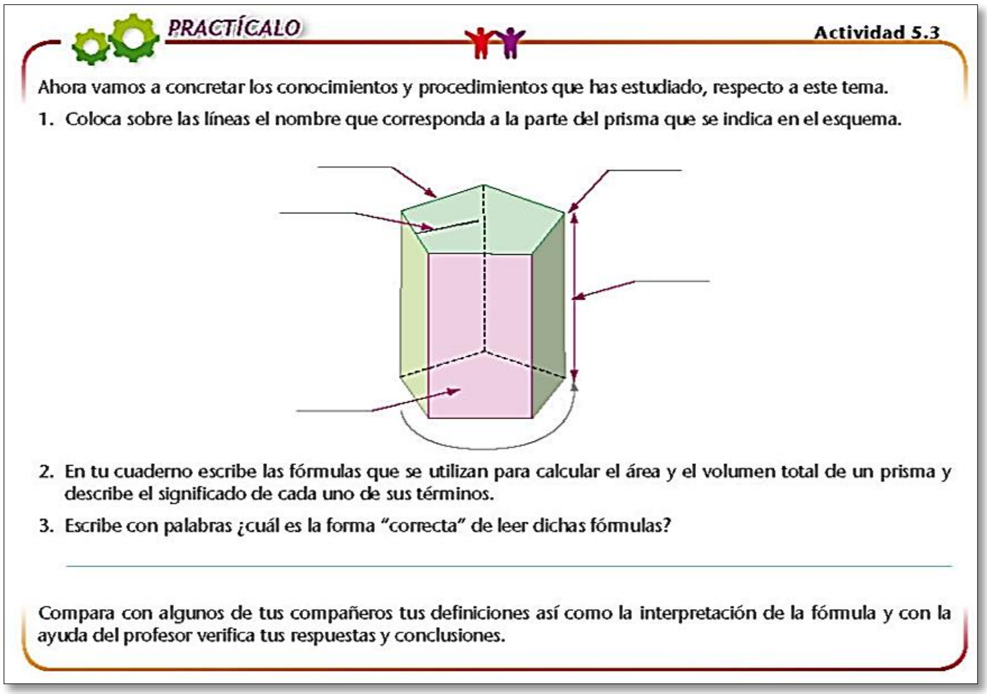
Asimismo, se puede calcular el área de prisma hexagonal (A_{ph}) sumando las áreas de las bases hexagonales (A_b) y el área de caras laterales (A_c). Para obtener el área de la base no es necesario conocer la fórmula, el hexágono regular se puede dividir en seis triángulos equiláteros y calcular sus áreas, de esta forma $A_b = 2\left(6 \times \frac{(4)(3.5)}{2}\right) \rightarrow A_b = 84\,u^2$ y $A_c = 6\,(4 \times 10) \rightarrow A_c = 240\,u^2$ entonces $A_{ph} = 84\,u^2 + 240\,u^2$ luego $A_{ph} = 324\,u^2$. Teniendo conocimiento de la fórmula se puede calcular el área de este prisma de la siguiente forma $A_{ph} = 6L\ (ap + h) \rightarrow A_{ph} = 6 \times 4\ (3.5 + 10) = 24 \times 13.5 \rightarrow A_{ph} = 324\ u^2$ ***(concepto y procedimiento)***.

En la parte final de esta tarea, se solicita socializar los resultados obtenidos, lo que posibilita poner en juego, además del lenguaje gráfico y simbólico, el lenguaje verbal para exponer y comparar las formas de proceder a lo largo de toda la tarea. Asimismo, las indicaciones de la tarea muestran que al profesor se le asigna el rol de asesorar para averiguar cómo se calcula el área de prismas que son irregulares. Este hecho podría permitir la emergencia de la fórmula para calcular el área de un prisma cuando su base es irregular ***(procedimiento)***.

Conflictos semióticos de la tarea

En esta tarea se definió de manera errada el prisma, “cuerpo geométrico con dos caras formadas por polígonos planos, unidos entre sí por paralelogramos”. Posteriormente, se plantean preguntas tales como ¿Qué figuras geométricas presentan las caras de los tres prismas?, y ¿qué figuras geométricas forman sus bases?, las cuales parecen preguntar lo mismo si se tiene en cuenta la definición proporcionada. El conflicto que se genera es que el estudiante no conciba el prisma como un cuerpo geométrico limitado por dos polígonos congruentes (bases), unidos entre sí por varios paralelogramos (caras laterales). Hay que resaltar, que en Oliver et al. (2003) señalaban que los errores que muchas veces se cometen en las definiciones se originan por el afán de simplificar el vocabulario para favorecer la comprensión del estudiante, lo cual, en casos como este terminan por convertirse en conflictos semióticos.

Tarea 4. Correspondiente a "Practícalo"


PRACTÍCALO

Actividad 5.3

Ahora vamos a concretar los conocimientos y procedimientos que has estudiado, respecto a este tema.

1. Coloca sobre las líneas el nombre que corresponda a la parte del prisma que se indica en el esquema.

2. En tu cuaderno escribe las fórmulas que se utilizan para calcular el área y el volumen total de un prisma y describe el significado de cada uno de sus términos.
3. Escribe con palabras ¿cuál es la forma "correcta" de leer dichas fórmulas?

Compara con algunos de tus compañeros tus definiciones así como la interpretación de la fórmula y con la ayuda del profesor verifica tus respuestas y conclusiones.

Figura 13. Tarea 4 tomada de (Arriaga y Benítez, 2016, p.47)

Es una tarea planteada en el contexto intramatemático, donde se busca "concretar" los conocimientos y procedimientos realizados en las anteriores tareas, por tanto, requieren colocar los nombres de las partes de un prisma, escribir la expresión y la lectura de las fórmulas para calcular el área y volumen de dicho prisma.

La resolución: el primer inciso demanda colocar las partes del prisma que se señalan en la figura, es decir, que se exprese que un prisma está compuesto por dos bases poligonales, por caras laterales (paralelogramos), aristas, vértice y altura ***(concepto)***. Además, en la figura se señala la apotema del pentágono que es base del prisma en este caso.

En el segundo inciso, se piden escribir las fórmulas que permiten calcular el área y el volumen de un prisma, lo cual se responde escribiendo que dicha área se puede determinar con la fórmula $A = 2A_b + P_b\, h$ donde A_b es el área de la base, P_b el perímetro de la base y h la altura. El volumen está dado por la fórmula $A = A_b h$ siendo A_b el área de la base y h la altura. Respondiendo al inciso tres, el área de un prisma se determina sumando dos veces el área de la base (A_b)con el producto del perímetro de la base (P_b) y la altura (h), y el volumen se obtiene del producto del área de la base (A_b) con la altura h. De esta manera, la tarea podría permitir transitar de un ***lenguaje*** simbólico a uno verbal, que es una competencia que debe ser desarrollada para este nivel educativo.

Para finalizar, la tarea requiere la comparación de las definiciones y la interpretación de la fórmula para hallar el área de un prisma, esto propicia un espacio para que argumenten de forma verbal que esta fórmula sintetiza el proceso de sumar las áreas de todos los polígonos que conforman el prisma, es decir, la suma de las áreas de las bases con las áreas de las caras laterales (***argumento*** basado en el concepto y el procedimiento).

Tarea 5. Correspondiente a "practícalo"

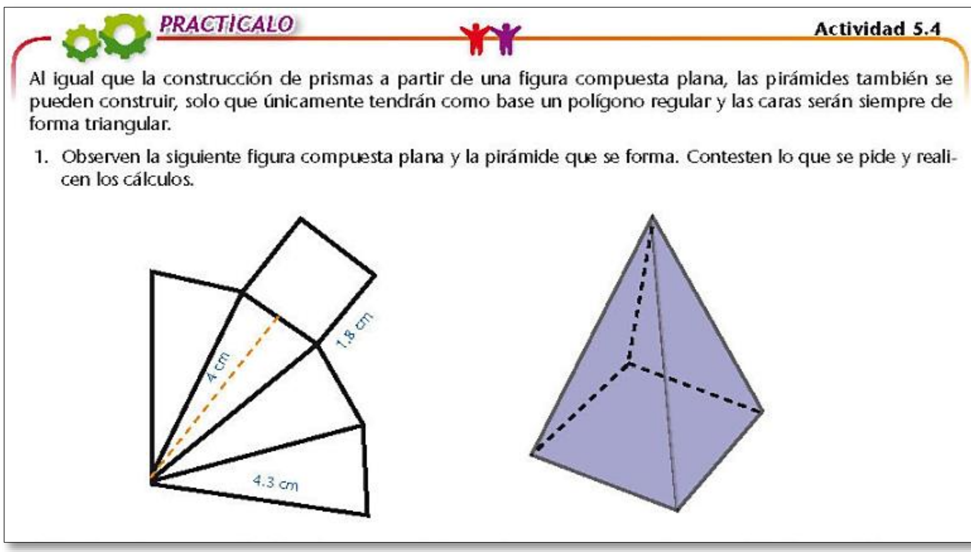


Figura 14. Tarea 5 tomada de (Arriaga y Benítez, 2016, p.48)

2. Observen la siguiente figura compuesta plana y la pirámide que se forma. Contesten lo que se pide y realicen los cálculos.
   - La figura compuesta tiene los datos que corresponden a la pirámide que se construyó, ¿qué nombre recibe esta pirámide? ______
   - ¿Se podrá conocer el valor del área total de la pirámide? ______.
     Justifiquen su respuesta: ______
   - Sobre la imagen de la pirámide escriban los datos de la figura compuesta que se necesitan para realizar el cálculo del área.
   - ¿Los datos que escribieron son los necesarios para calcular el área? ______
     ¿Por qué? ______
   - ¿Cuál es el área de la base? ______
   - El área de una de las caras es: ______
   - El área total de las caras que forman la pirámide es: ______
   - ¿Cuál será el valor del área total? ______
   - Expliquen cómo obtuvieron el último resultado. ______

Comparen sus respuestas con las del resto de sus compañeros y con la asesoría de su profesor respondan ¿existen pirámides de base irregular? Si es así, ¿cómo calcularían el área total?

Figura 15. Continuación de la tarea 5 tomada de (Arriaga y Benítez, 2016, p.48)

Es una tarea planteada en un contexto intramatemático en la que se tiene una figura compuesta plana que forma una pirámide y se pide calcular las áreas de estos polígonos, así como el valor total del área de la pirámide.

Resolución: al iniciar se pide observar la imagen en la que se aprecia una figura compuesta plana y la pirámide que se forma a partir de ésta. Para responder *¿Qué nombre recibe esta pirámide?* En la resolución se toma en cuenta el tipo de polígono que tenga como base, en este caso es un cuadrilátero (cuadrado) por lo que es una pirámide cuadrangular (***propiedad*** de las pirámides).

Se cuestiona *¿se podrá conocer el valor del área total de la pirámide?*, a lo que se responde positivamente, puesto que en la imagen se proporcionan los datos necesarios para calcular el área de cada uno de los polígonos de la figura plana compuesta y la suma de éstos será el valor del área total de la pirámide (***argumento*** basado en el concepto y el procedimiento).

Para realizar los cálculos de estas áreas basta con conocer la altura y la base de los triángulos, esta última se corresponde con el lado del cuadrado y por tanto son los únicos datos necesarios ***(concepto)***. Estos datos son necesarios porque se conoce que para calcular el área del cuadrado se utiliza la fórmula $A = b\ h$ siendo b la base y h la altura. Y para el cálculo del área de los triángulos se puede utilizar $A = \frac{b \times h}{2}$ con b igual a la base y h la altura.

Se solicita *el área de la base* (A_b) de la pirámide, la cual se obtiene calculando el área del cuadrado de lados 1.8cm, de manera que $A_b = 1.8cm \times 1.8cm = 3.24\ cm^2$. Como las caras de la pirámide son triángulos ***(concepto)*** se tiene que el *área de una las caras* (A_{c1}) es $6\ cm^2$ la cual se consigue al efectuar $A_{c1} = \frac{1.8 \times 4}{2} = 3.6\ cm^2$ ***(procedimiento)***.

Entonces, se puede calcular *el área total de las caras que forman la pirámide* (A_C), realizando el producto del área de una de las caras con el número total de caras de la misma, así que se obtiene $A_C = A_{c1} \times 4$ lo que resulta $A_C = 3.6 \times 4 = 14.4\ cm^2$ ***(procedimiento)***.

Ahora se pide *el valor del área total de la pirámide* (A_T), lo que resulta fácil después de haber realizado los cálculos anteriores, puesto que se suma el área de la base (A_b) con el área de las caras (A_C), luego se tiene que $A_T = A_b + A_C \rightarrow A_T = 3.24cm^2 + 14.4cm^2 \rightarrow A_T = 17.64\ cm^2$***(procedimiento).***

Otra forma de hallar el valor del área total es usando la fórmula $A_T = A_b + A_l$ donde A_b es el área de la base y A_l el área de las caras laterales, siendo $A_l = \frac{P_b \times ap}{2}$ con P_b el perímetro de la base ap la apotema. Entonces $A_l = \frac{7.2\ \times 4}{2} = 14{,}4\ cm^2$ y $A_b = 1.8 \times 1.8 = 3.24\ cm^2$ luego el área total del prisma es $A_T = 3.24 + 14.4 = \ 17.64\ cm^2$***(concepto y procedimiento)***.

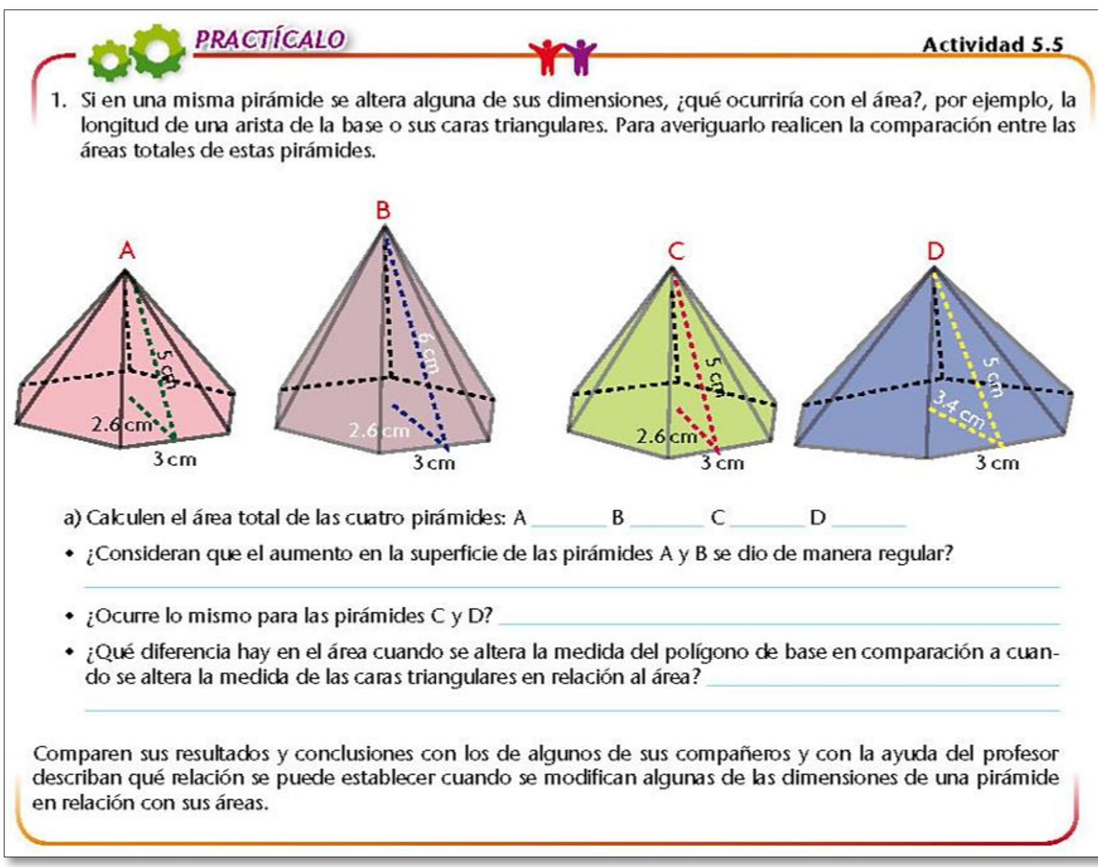
Ahora, se pide explicar cómo se obtuvieron los resultados anteriores, lo que da cabida para que ellos realicen ***argumentos*** basados en los procedimientos de sumar todas las áreas de los polígonos (base y caras laterales) que forman el prisma, o pueden ser basados en el concepto de cálculo de áreas de una pirámide tal y como se muestra en el párrafo anterior.

Al finalizar esta tarea, se propone un espacio para comparar resultados obtenidos y se le pone la tarea al profesor de asesorar en relación al cálculo del área de pirámides irregulares, lo cual podría permitir emerger una nueva forma de proceder a la hora de calcular las áreas de prismas con estas características ***(procedimiento)***.

Conflictos semióticos de la tarea

En esta tarea se afirma que la pirámide tendrá como base un polígono regular y sus caras siempre serán de forma triangular, lo que es un error conceptual que llevaría a la obtención de un conocimiento estandarizado de las formas de la pirámide. El conflicto semiótico potencial se da, puesto que la definición no admite prismas irregulares u oblicuas, al respecto Barrantes, López y Fernández (2015) afirman que "la mayoría de las representaciones geométricas contempladas en los libros de texto son estereotipos: se presentan en posiciones y orientaciones estándar (distractores de orientación) y con atributos y propiedades estándar (distractores de estructuración)" (p.121). Esto indica que el concepto propuesto en esta tarea, acompañado de la imagen estandar de la pirámide proporcionan un conocimiento estereotipo de este cuerpo geométrico.

Tarea 6. Correspondiente a "Practícalo"


PRACTÍCALO

Actividad 5.5

1. Si en una misma pirámide se altera alguna de sus dimensiones, ¿qué ocurriría con el área?, por ejemplo, la longitud de una arista de la base o sus caras triangulares. Para averiguarlo realicen la comparación entre las áreas totales de estas pirámides.

a) Calculen el área total de las cuatro pirámides: A _______ B _______ C _______ D _______

- ¿Consideran que el aumento en la superficie de las pirámides A y B se dio de manera regular?
- ¿Ocurre lo mismo para las pirámides C y D? _______
- ¿Qué diferencia hay en el área cuando se altera la medida del polígono de base en comparación a cuando se altera la medida de las caras triangulares en relación al área? _______

Comparen sus resultados y conclusiones con los de algunos de sus compañeros y con la ayuda del profesor describan qué relación se puede establecer cuando se modifican algunas de las dimensiones de una pirámide en relación con sus áreas.

Figura 16. Tarea 6 tomada de (Arriaga y Benítez, 2016, p.49)

Es una tarea en un contexto intramatemático donde se solicita comparar lo que ocurre con el área de una pirámide cuando se alteran algunas de sus longitudes, así como el establecimiento de relaciones entre éstas.

La resolución: para responder que ocurre con el área de una pirámide cuando se alteran algunas de sus dimensiones se pide comparar las áreas totales de las pirámides que se observan en la figura, por tanto, se requiere calcular el área de cada una de ellas.

La pirámide A tiene un área total (A_T) que será igual a la suma del área de la base (A_b) con el área de las caras laterales (A_l), luego $A_T = A_b + A_l$, como la base es un hexágono de lado $3cm$ y apotema $2.6\ cm$ se tiene que $A_b = 23.4cm^2$ y dado que las caras de la pirámide tienen base *3cm* y altura *5cm* se tiene $A_l = 45cm^2$ por tanto $A_T = 23.4cm^2 + 45cm^2 = 68.4cm^2$.

A la pirámide B se le aumentó $1cm$ a la altura de las caras laterales, de modo que el área de la base es la misma que la pirámide A, es decir $A_b = 23.4cm^2$, mientras que el área de las caras laterales es $A_l = 54cm^2$, de forma que el área total de la pirámide B aumentó puesto que el $A_T = 23.4cm^2 + 54cm^2 = 77.4cm^2$.

Se observa en la figura que el prisma C tiene las mismas dimensiones que el prisma A, por tanto el área de estas son iguales, $A_T = 68.4cm^2$.

En la pirámide D se le aumentó $0{,}8\ cm$ a la apotema de la base, de manera que el área de las caras laterales es igual al área de la de la pirámide A, entonces $A_l = 45cm^2$, y el área de la base aumentó $A_b = 30.6cm^2$, por lo cual el área total de la pirámide D es $A_T = 30.6cm^2 + 45cm^2 = 75.6cm^2$, es decir, aumentó ***(concepto y procedimiento)*.**

En esta tarea se cuestiona *¿el aumento en la superficie de las pirámides A y B se dio de manera regular?, y ¿ocurre lo mismo para las pirámides C y D?* las cuales son preguntas ambiguas, cuyas respuestas dependerán de lo que cada estudiante considere por "regular". Tiene sentido en esta tarea preguntar ¿cómo es el área de la pirámide A con respecto a la pirámide B? y si el aumento del área ocurre de manera proporcional al aumento de sus dimensiones. Por otra parte, es adecuado comparar las áreas de los prismas A y B debido a que B experimenta un aumento en la altura, lo que da lugar a un aumento también en el área. No obstante, comparar las áreas de los prismas C y D no tiene sentido, esto se debe a que el aumento que se hace en la apotema de la base del prisma D, implica un aumento en los lados de esta figura, por tanto, lo que hay de fondo es un conflicto semiótico.

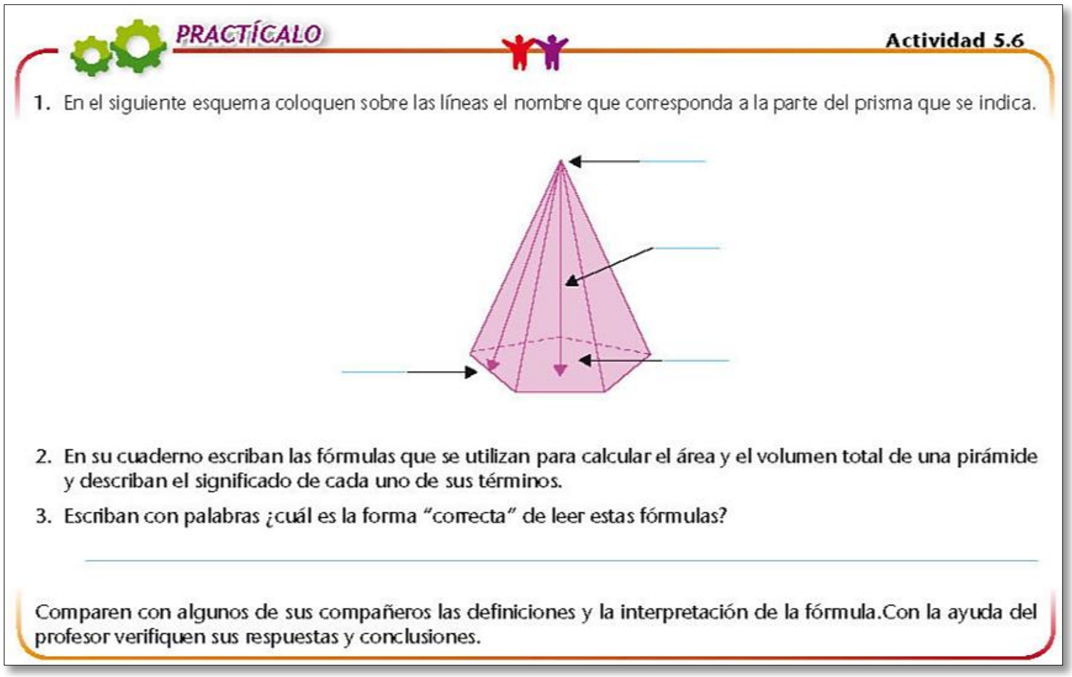
Ahora bien, cuando preguntan *¿Qué diferencia hay en el área cuando se altera la medida del polígono de base en comparación a cuando se altera la medida de las caras triangulares en relación al área?,* en la respuesta a este inciso hay que tomar en cuenta que el aumento que se realiza en la apotema de la base, implica un aumento de los lados del hexágono, por lo tanto, se pueden generar confusiones que lejos de entablar diferencias entre el aumento del área cuando se aumenta la altura o las dimensiones de la base, puede producir reflexiones equivocadas. Además, estos aumentos no se dan de forma proporcional.

Por otro lado, la tarea propone al finalizar un espacio de retroalimentación donde con ayuda del profesor se establezcan conclusiones con respecto a las relaciones entre el área total de la pirámide y las modificaciones de las longitudes de algunas dimensiones de la misma, lo cual permite ***argumentos*** basados en el concepto y los procedimientos realizados.

Conflicto semiótico de la tarea

En la Figura 6 se dejan ver cuatro pirámides a las cuales se les aumentan algunas de sus dimensiones, con el fin de comparar lo que ocurre con sus áreas. Se observa que a la pirámide D se le aumenta la apotema de la base en 0.8 cm, sin embargo, no se aumentaron los lados, lo cual es un error, que puede considerarse un conflicto semiótico, puesto que puede llevar al estudiante a obtener una concepción errada de la relación que guarda la longitud de la apotema de un hexágono regular con la longitud de sus lados.

Tarea 7. Correspondiente a "Practícalo"



PRACTÍCALO Actividad 5.6

1. En el siguiente esquema coloquen sobre las líneas el nombre que corresponda a la parte del prisma que se indica.

2. En su cuaderno escriban las fórmulas que se utilizan para calcular el área y el volumen total de una pirámide y describan el significado de cada uno de sus términos.
3. Escriban con palabras ¿cuál es la forma "correcta" de leer estas fórmulas?

Comparen con algunos de sus compañeros las definiciones y la interpretación de la fórmula.Con la ayuda del profesor verifiquen sus respuestas y conclusiones.

Figura 17. Tarea 7 tomada de (Arriaga y Benítez, 2016, p.49)

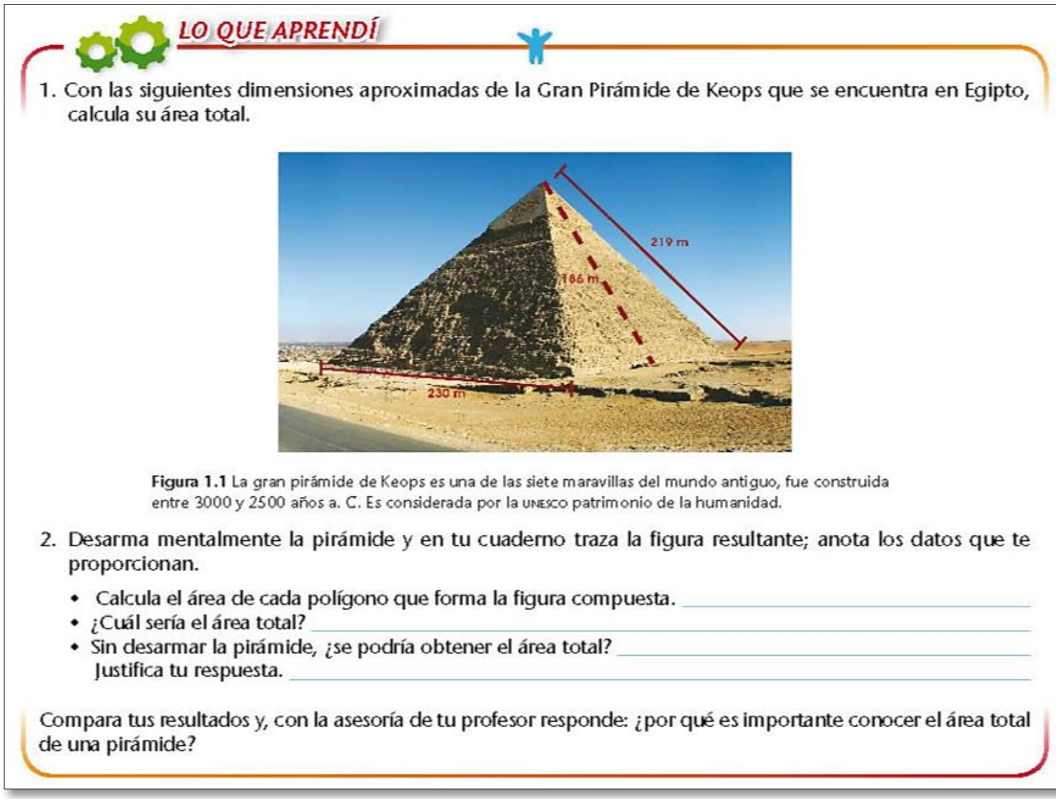
Es una tarea con contexto intramatemático donde se requiere señalar las partes de una pirámide, escribir la expresión y la lectura de las fórmulas para calcular el área y volumen de dicha pirámide.

La resolución: el primer inciso demanda colocar el nombre a cada una de las partes de la pirámide que se señalan en la figura, es decir, base poligonal, caras laterales, vértice y altura ***(concepto)***. Es de resaltar que las pirámides además poseen aristas y apotema al igual que los prismas.

Luego, se solicita escribir las fórmulas que permiten calcular el área y el volumen de una pirámide, se tiene para el área $A = A_b + A_l$ con A_b el área de la base y A_l el área de las caras laterales. Esta expresión se puede leer como: el área total de una pirámide es igual a la suma de las áreas de la base con la de las caras laterales. Lo solicitado permite transitar de un ***lenguaje*** simbólico a uno verbal, que es una competencia que debe ser desarrollada en este nivel escolar, lo cual, se corresponde con lo enunciado en el contexto de este libro cuando expresa: "promoviendo que éstos trabajen de forma autónoma, haciéndoles posible transitar de un lenguaje cotidiano a uno matemático".

Al finalizar, esta tarea requiere la comparación de las definiciones y la interpretación de la fórmula para hallar el área de una pirámide, esto propicia un espacio para que argumenten de forma verbal que esta fórmula sintetiza el proceso de sumar las áreas de todos los polígonos que conforman la pirámide (***argumento*** basado en el concepto y el procedimiento).

Tarea 8. Correspondiente a "Lo que aprendí"



LO QUE APRENDÍ

1. Con las siguientes dimensiones aproximadas de la Gran Pirámide de Keops que se encuentra en Egipto, calcula su área total.

Figura 1.1 La gran pirámide de Keops es una de las siete maravillas del mundo antiguo, fue construida entre 3000 y 2500 años a. C. Es considerada por la UNESCO patrimonio de la humanidad.

2. Desarma mentalmente la pirámide y en tu cuaderno traza la figura resultante; anota los datos que te proporcionan.
   - Calcula el área de cada polígono que forma la figura compuesta. ______
   - ¿Cuál sería el área total? ______
   - Sin desarmar la pirámide, ¿se podría obtener el área total? ______ Justifica tu respuesta. ______

Compara tus resultados y, con la asesoría de tu profesor responde: ¿por qué es importante conocer el área total de una pirámide?

Figura 18. Tarea 8 tomada de (Arriaga y Benítez, 2016, p.50)

Tarea planteada en un contexto extramatemático donde se requiere calcular el área total de la pirámide de Keops considerada como una de las siete maravillas del mundo.

La resolución: se puede calcular el área de esta pirámide usando la fórmula $A_T = A_b + A_l$ con A_b el área de la base y A_l el área de las caras laterales. Conociendo que esta pirámide posee una base $230m$ y una apotema de $186m$ se tiene que el área total es $A_T = 52900\mathrm{m}^2 + 85560\ \mathrm{m}^2$ luego $\mathrm{A}_T = 138.460\mathrm{m}^2$ ***(concepto y procedimiento)***.

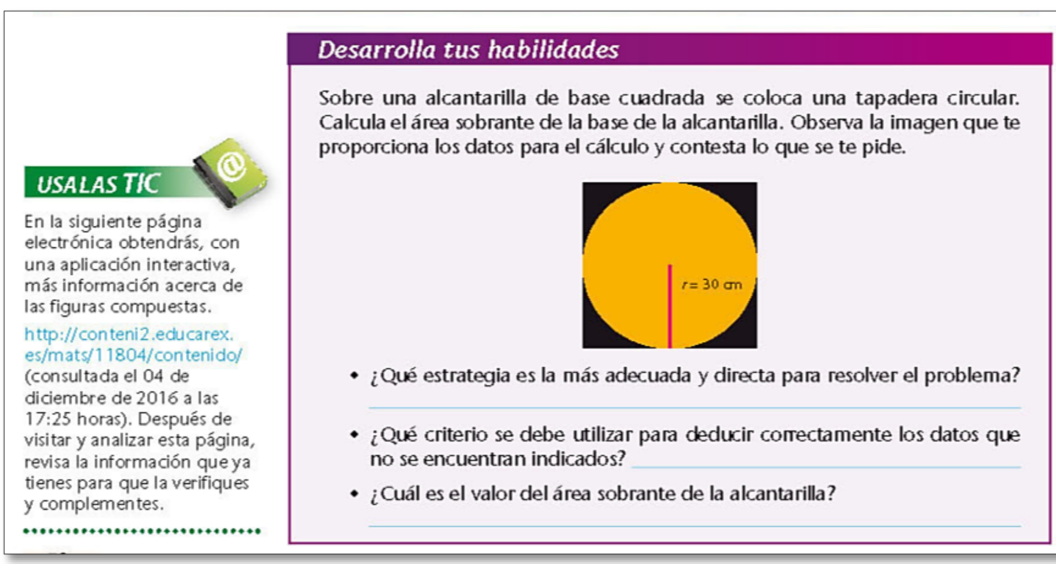
En el inciso dos se requiere que el estudiante desarme mentalmente la pirámide y plasme en el cuaderno la figura compuesta resultante ***(lenguaje gráfico)***.

Luego se pide calcular las áreas de cada uno de los polígonos de las figuras compuestas, es decir el área del cuadrado (A_c) y el área del triángulo (A_t), resultando $A_c = 230\,m \times 230m \rightarrow A_c = 52900m^2$ y $A_t = \left(\frac{230m \times 186m}{2}\right) \rightarrow A_t = 21390m^2$ ***<u>(procedimiento)</u>***. Luego el área total del prisma será igual a la suma del área del cuadrado, más cuatro veces el área del triángulo $A_T = A_c + 4A_t$ de esta manera $A_T = 52900m^2 + 4(21390m^2) \rightarrow A_T = 138460m^2$ ***<u>(concepto y procedimiento)</u>***.

Se podría calcular el área de esta pirámide sin desarmarla, usando la fórmula o conociendo el tipo de pirámide (cuadrangular, pentagonal, etc.) y sus dimensiones de manera que se pueda calcular las áreas de la base y todas las caras que la conforman (***<u>argumento</u>*** basado en el concepto y procedimiento).

Posteriormente, se cuestiona *¿Por qué es importante conocer el área total de una pirámide?*, se considera que esta pregunta carece de sentido, pues el contexto de la misma no posee un trasfondo social cercano al estudiante, por tanto, podría no tener importancia alguna para él, de manera que no se promueven objetos primarios con esta cuestión.

Tarea 9. Correspondiente a desarrolla tus habilidades



USALAS TIC

En la siguiente página electrónica obtendrás, con una aplicación interactiva, más información acerca de las figuras compuestas.

http://conteni2.educarex.es/mats/11804/contenido/ (consultada el 04 de diciembre de 2016 a las 17:25 horas). Después de visitar y analizar esta página, revisa la información que ya tienes para que la verifiques y complementes.

Desarrolla tus habilidades

Sobre una alcantarilla de base cuadrada se coloca una tapadera circular. Calcula el área sobrante de la base de la alcantarilla. Observa la imagen que te proporciona los datos para el cálculo y contesta lo que se te pide.

- ¿Qué estrategia es la más adecuada y directa para resolver el problema? ______
- ¿Qué criterio se debe utilizar para deducir correctamente los datos que no se encuentran indicados? ______
- ¿Cuál es el valor del área sobrante de la alcantarilla? ______

Figura 19. Tarea 9 tomada de (Arriaga y Benítez, 2016, p.50)

Es una tarea planteada en un contexto extramatemático donde se necesita calcular el área de una alcantarilla y su tapadera para determinar el área sobrante. Además, se pide explicar la estrategia más adecuada para encontrar la solución al problema.

La resolución: la estrategia más adecuada para resolver este problema es calcular el área de la base cuadrada de la alcantarilla, el área de la tapadera circular y la diferencia entre éstas para obtener finalmente el área sobrante (***argumento*** basado en el concepto).

Los criterios que deben tenerse en cuenta para deducir correctamente los datos que no se encuentran indicados en la figura, es el hecho de que el círculo (tapadera) está inscrito en el cuadrado (base de la alcantarilla), por tanto, como la información proporciona el radio del círculo ($30cm$) entonces también se tiene la longitud del cuadrado que resulta ser el doble del radio, es decir $60cm$ (***argumento*** basado en el concepto). Otra forma para deducir los datos es observar la imagen, notando que el diámetro de la circunferencia es igual a la longitud del lado del cuadrado, por tanto, se tiene la información que se necesita para calcular el área de la base de la alcantarilla como la de su tapadera.

De esta manera, para obtener el valor del área sobrante de la alcantarilla primero se hallará el área del cuadrado ($A_{\blacksquare}$) y luego la del círculo ($A_{\bullet}$), luego $A_{\blacksquare} = 60cm \times 60cm = 3600\ cm^2$ y $A_{\bullet} = \pi \times (30cm)^2 = 2827.4cm^2$. Entonces el área sobrante es A_s= $A_{\blacksquare} - A_{\bullet}$ luego A_s=$3600\ cm^2 - 2827.4cm^2 = 772.6cm^2$ ***(concepto y procedimiento)***.

4.1.3. Objetos primarios identificados en las tareas

En este primer libro se revisaron las 9 tareas que se proponen para el tratamiento del cálculo de áreas de figuras compuestas, de las cuales cuatro están en un contexto extramatemático y las otras cinco en el intramatemático. Se lograron identificar los objetos primarios (situaciones, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y lenguaje) que se ponen en juego en la resolución de cada una de ellas. En la Tabla 2 se observa que estos objetos intervinieron en la mayoría de las tareas, solo en dos de ellas se cree puede haber emergencia de procedimientos. Por su parte, los argumentos que permiten estas tareas son principalmente basados en los conceptos y los procedimientos. Asimismo, estas tareas dieron lugar a un lenguaje verbal, gráfico y simbólico en la resolución de las mismas.

Un aspecto a resaltar, es que independientemente del tipo de tarea (intramatemático o extramatemático) los objetos primarios que intervienen o emergen en la resolución son similares, con la variante de si se solicita o no argumentar. En la Tabla 2 se aprecia el tipo de objetos que aparecieron a lo largo de la resolución de dichas tareas.

Tabla 2

Objetos primarios identificados en las tareas propuestas el libro 1

Situación Problema	**Conceptos**		**Propiedades**		**Procedimientos**		**Argumentos**			**Lenguaje**		
	I	**E**	**I**	**E**	**I**	**E**	**C**	**Pp**	**Pc**	**V**	**S**	**G**
Tarea 1 extramatemática en la que se solicita calcular áreas de figuras planas.	*		*		*		*		*		*	*
Tarea 2 extramatemática en la que se pide calcular áreas circulares.	*				*				*		*	
Tarea 3 intramatemática en la que se solicita calcular el área de varios tipos de prismas.	*		*		*	*	*			*	*	*
Tarea 4 intramatemática en la que se requiere escribir la expresión y la lectura de las fórmulas para calcular el área de un prisma.	*						*		*	*	*	
Tarea 5 intramatemática en la que se solicita calcular el área de una figura compuesta plana que forman una pirámide.	*		*		*	*	*		*		*	
Tarea 6 intramatemática donde se demanda comparar las áreas de una misma pirámide cuando se alteran sus dimensiones.	*				*		*		*		*	*
Tarea 7 intramatemática en la que se requiere escribir la expresión y la lectura de las fórmulas para calcular el área de una pirámide.	*						*		*	*	*	
Tarea 8 extramatemática donde se pide calcular el área de la pirámide de Keops y la importancia que tiene conocer esto.	*				*		*		*		*	*
Tarea 9 extramatemática donde se necesita calcular el área sobrante entre una alcantarilla cuadrada y su tapadera circular.	*				*		*				*	

I: interviniente C: concepto V: verbal
E: emergentes Pp: propiedades S: simbólico
Pc: procedimientos G: gráfico

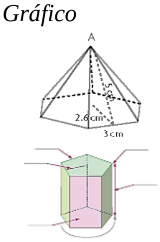
4.1.4. Configuración epistémica de las tareas

Esta configuración epistémica muestra la red de objetos intervinientes y emergentes extraídos de la resolución de las tareas que abordan el cálculo de áreas de figuras compuestas en este texto. Se puede observar, que las situaciones propuestas son tanto intra como extra-matemática, las cuales implican el cálculo de áreas de figuras planas, compuestas, prismas y pirámides, llevando a la necesidad de involucrar conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos como los que ahí aparecen en la resolución de dichas situaciones. Además, mientras se resuelven, se transita entre los lenguajes gráficos, simbólicos y verbales que expresan y soportan las reglas que se necesitan para la solución de las tareas.

Lenguaje

-Simbólico
Fórmulas de área
Cuadrado: $A = b \times h$
Triángulo: $A = \frac{b \times h}{2}$
Prisma: $A_T = A_b + A_l$ Siendo A_b el área de la base y $A_l = \frac{P_b \times ap}{2}$
Pirámide: $A_T = A_b + nA_c$

- Gráfico



- Verbal
El área de la pirámide es igual a la suma del área de la base y el área de las caras laterales.

Situación Problemática
Tareas extramatemáticas e intramatemáticas donde se requiere calcular áreas de figura planas y compuestas (incluyendo prismas y pirámides), así como la escritura y lectura de las fórmulas para calcular las áreas del prisma y la pirámide.

REGLAS

Conceptos
-Definición de varias figuras geométricas (cuadrado, paralelogramos)
-Definición área de un polígono (triángulo, rectángulo, pentágono, trapecio)
-Definición área de una figura compuesta de polígonos
-Definición de prismas y pirámides

Propiedades
-Propiedad de los rectángulos: Sus lados paralelos son iguales y los ángulos interiores son rectos.
-Propiedades de los prismas y pirámides: según el número de lados de la base se le da el nombre al prisma y a la pirámide.

Procedimientos
-Cálculo de áreas de figuras planas y compuestas
-Cálculo de áreas de círculos y semicírculos
-Cálculo de áreas de prismas (cuadrangular, triangular, hexagonal) y pirámides (regulares)

-Emergentes:
Procedimiento para calcular el área de un prisma con base irregular.
Procedimiento para calcular el área de una pirámide con base

Argumentos
Argumentos basados en conceptos y procedimiento, ejemplo:
El área total de un prisma se puede obtener sumando las áreas de la base y las caras laterales.
Las fórmulas para calcular el área de un prisma/ pirámide sintetizan el proceso de calcular las áreas de todos los polígonos de la figura compuesta que los conforman.

Figura 20. Configuración epistémica de las tareas del libro 1

Otro aspecto a destacar, que las 9 tareas propuestas en este texto para el tratamiento del cálculo de área de figuras compuestas, no se ajustan con la propuesta del libros, la cual está orientada a el apoyo de actividades como la argumentación, el diálogo y la reflexión. Estas tareas en su mayoría no son desafiantes para el estudiante, debido a que no le permiten la posibilidad de exploración para encontrar la solución, puesto que están totalmente guiadas, lo cual impide considerar otros caminos de resolución. Además, las posibilidades de argumentación se reducen por lo regular al inciso final de las tareas, donde se pide comentar sus respuestas con los demás compañeros y el profesor de la clase. Por otro lado, se aprecia que el uso de las tecnologías de la información la comunicación se limita, por lo menos en este grupo de tareas, a proporcionar un enlace de una página electrónica para ampliar la información sobre las figuras compuestas, lo cual muestra un uso elemental de las mismas y no enriquece el quehacer matemático de la consigna.

4.2. Análisis del libro 2

4.2.1. Descripción general del libro.

El libro *Convive con las matemáticas 2* de Quijano, González y Castillo (2015) tiene la finalidad de promover y experimentar los procesos de enseñanza y aprendizaje que le permitan la resolución efectiva de los problemas que pongan en juego la curiosidad, la imaginación y la creatividad de quien las resuelva. Se centran en la resolución de problemas como medio principal para comprender y desarrollar las nociones y procedimientos formales de la matemática. Además, se alude que tienen como premisa que el conocimiento se construye a partir delas nociones y deducciones que el estudiante consolide con ayuda de su maestro.

En este texto se trabaja con cuatro tipos de tareas para el tratamiento de este contenido, una inicial *"lo que sé"* donde se plantean una serie de preguntas para recordar los conocimientos aprendidos. Otras tareas *"Práctica lo aprendido"* donde se encuentran actividades y ejercicios con mayor grado de dificultad, lo cual permite practicar lo aprendido. También se encuentran las tareas *"aplicando lo que aprendí"* que son actividades y ejercicios para poner en práctica los conocimientos y habilidades adquiridos, logrando consolidar con ellas los aprendizajes esperados. Al finalizar cada bloque, se propone *"evaluación tipo PISA"* para poner en práctica lo aprendido y permitirle al profesor evaluar los conocimientos del estudiante.

4.2.2. Identificación de los objetos primarios en la resolución de las tareas

La tarea 1 corresponde a "lo que sé" que consta de 9 partes que se muestran enseguida:

LO QUE SÉ

1. Un librero formado por rectángulos tiene como característica que en cada uno de ellos: "el largo es el doble del ancho". Escribe tres posibles medidas de tres posibles rectángulos que forman el librero.

	Rectángulo 1	Rectángulo 2	Rectángulo 3
Largo			
Ancho			

Figura 21. Parte 1 de la tarea "lo que sé" (Quijano, González y Castillo, 2015, p.52).

La resolución: se debe considerar que en la consigna se estableció que los rectángulos pedidos se caracterizan por "el largo es el doble del ancho", por lo cual, hay infinitos rectángulos que cumplen la condición. Por ejemplo pueden ser rectángulos con las siguientes dimensiones: largo $20cm$- ancho $10cm$, largo $16cm$- ancho $8cm$, largo $10cm$- ancho $5cm$ (***concepto*** de rectángulo).

2. Otro librero está construido a base de triángulos isósceles y éstos tienen como característica común que "la medida de sus lados iguales tiene una unidad más que el tercer lado". Escribe tres posibles medidas de tres posibles triángulos de dicho librero.

	Triángulo 1	Triángulo 2	Triángulo 3
Lados iguales			
Tercer lado			

3. Compara las medidas que anotaste con las de otros compañeros. ¿Son iguales?

Figura 22. Parte 2 y 3 de la tarea "lo que sé", tomado de (Quijano, González y Castillo, 2015, p.52).

La resolución: hay que considerar que los triángulos pedidos son isósceles y además que "la medida de sus lados iguales tiene una unidad más que el tercer lado" por lo cual, hay infinitos triángulos que cumplen con la condición. Un ejemplo son los triángulos con las siguientes longitudes: Lados iguales $15cm$- tercer lado $14cm$, lados iguales $18cm$- tercer lado $17cm$, lados iguales $9cm$ - tercer lado $8cm$ (***concepto*** de triángulo isósceles).

En cuanto a la parte 3, lo más probable es que al comparar las medidas éstas resulten ser diferentes. No se piden argumentos aquí.

4. Argumenta por qué varían las medidas. ______________________

5. Obtén el área de tres rectángulos:

A= ____________ A= ____________ A= ____________

6. Para obtener el área de los triángulos, ¿qué dato hace falta? ____________

Figura 23. Parte 4, 5 y 6 de la tarea "lo que sé" (Quijano, González y Castillo, 2015, p.53).

La resolución: para responder la parte 4, se toma en cuenta que se pide que en 1 los rectángulos cumplan que "el largo es el doble del ancho" y en 2 que los triángulos se caractericen porque "la medida de sus lados iguales tiene una unidad más que el tercer lado" entonces hay infinitos rectángulos y triángulos que cumplan las condiciones dadas. En función de esto las medidas varían (***argumento*** basado en el procedimiento).

En la parte 5 se pide obtener las áreas de los rectángulos (R_1, R_2, R_3), siendo consecuentes con los ejemplos propuestos en la parte 1 se tiene $A_{R_1} = 10cm \times 20cm = 20cm^2$, $A_{R_2} = 16cm \times 8cm = 128cm^2$ y $A_{R_3} = 5cm \times 10cm = 50cm^2$ (***procedimiento***).

En la parte 6 se cuestiona qué datos hacen falta para hallar el área de los triángulos planteados en la parte 2. A lo cual, se debe responder que hace falta conocer la altura de estos triángulos isósceles (***concepto*** área de un triángulo).

7. Resuelve cada uno de los siguientes problemas.

a) A José el carpintero, le encargaron que de una tabla que mide 30 cm de largo y 40 cm de ancho construya dos repisas triangulares, ¿cuál es el área de cada repisa? ____________

b) Luis quiere construir un papalote cuyas diagonales midan 60 cm y 40 cm respectivamente, ¿cuánto papel necesitará? ____________

c) En un parque se ha construido un kiosco cuya superficie es hexagonal, si se sabe que el apotema mide 1.5 m y el área ocupada por dicho kiosco es de 9 m², ¿cuánto mide cada lado del hexágono? ____________

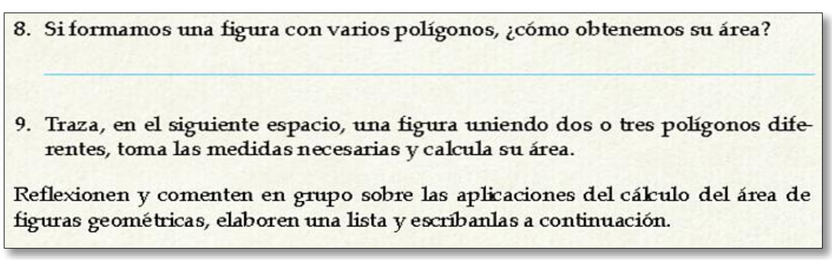
Figura 24. Parte 7 de la tarea "lo que sé" (Quijano, González y Castillo, 2015, p.53).

La parte 7 de la tarea “lo que sé” está en un contexto extramatemático, se trata de tres situaciones donde se requiere calcular áreas de repisas triangulares, de un papalote y un kiosco hexagonal, respectivamente.

La resolución: en la situación (a) se necesita en primer lugar calcular el área de la tabla rectangular (A_t) cuyas dimensiones son de $40cm$ y $30cm$, por tanto $A_t = 1200\ cm^2$ (***<u>Procedimiento</u>***), ahora, si se parte a la mitad esta tabla (diagonalmente), se obtienen dos repisas triangulares cuyas áreas serán de $600\ cm^2$(***<u>propiedades</u>*** de los rectángulos).

En la situación (b) se tiene un papalote, del cual se conocen sus diagonales $60cm$ y $40cm$ respectivamente y se pregunta cuánto papel se necesitará para cubrirlo. Por tanto, es posible que se realice una representación mediante un dibujo el papalote (***<u>lenguaje</u>*** gráfico), notando que la diagonal vertical divide el papalote en dos triángulos congruentes, de manera que el área del papalote (A_p) será igual a dos veces el área de cualquiera de eso triángulos (A_1 y A_2). $A_p = 2 \times A_1 \rightarrow\ A_p = 2 \times \left(\frac{40cm*30cm}{2}\right)$, entonces $A_p = 1200cm^2$(***<u>Procedimiento</u>***).

En la situación (c) se plantea un kiosco de superficie hexagonal y sabiendo que la apotema del mismo mide $1.5\ m$ y su área $9m^2$, preguntan cuánto mide cada lado del hexágono. Por lo tanto, conociendo que se puede calcular el área del kiosco con la fórmula $A = 3 \times ap \times l$ siendo ap la apotema y l los lados (***<u>concepto</u>*** área de un hexágono) y de acuerdo a la información proporcionada se tiene que $9m^2 = 3 \times 1.5cm \times l \rightarrow 9m^2 = 4.5cm \times l$ luego $l = \frac{9m^2}{4.5cm}\ \rightarrow l = 2cm$ (***<u>Procedimiento</u>***).


8. Si formamos una figura con varios polígonos, ¿cómo obtenemos su área?

9. Traza, en el siguiente espacio, una figura uniendo dos o tres polígonos diferentes, toma las medidas necesarias y calcula su área.

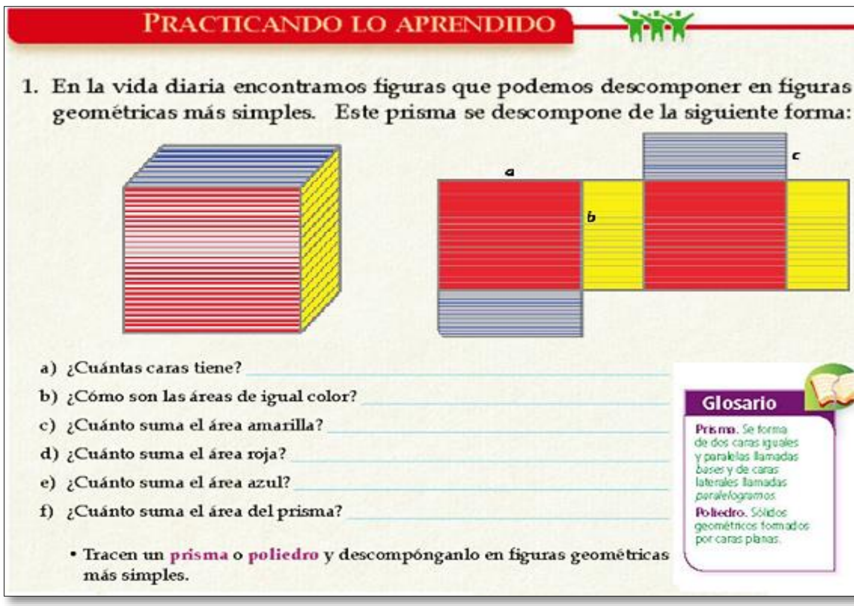
Reflexionen y comenten en grupo sobre las aplicaciones del cálculo del área de figuras geométricas, elaboren una lista y escríbanlas a continuación.

Figura 25. Parte 8 y 9 de la tarea “lo que sé” (Quijano, González y Castillo, 2015, p.53).

En la parte 8 se cuestiona cómo se obtiene el área una figura formada por varios polígonos, a lo cual se puede responder sumando las áreas de todos los polígonos que conforman la figura, siendo un ***argumento*** basado en los procedimientos realizados en las situaciones anteriores.

En la parte 9 se pide trazar una figura (***lenguaje gráfico***) la cual debe estar conformada por dos o tres polígonos diferentes y se pide tomar las medidas necesarias para calcular su área, lo cual es un trabajo de ejercitación en la que se deben realizar varios ***procedimientos***. En la parte final de esta tarea, se pide listar las aplicaciones del cálculo de área de figuras geométricas, lo que da lugar a un espacio de reflexión donde los estudiantes investiguen y se cuestionen la utilidad de saber realizar este tipo de cálculos (***argumentos*** basados en conceptos y procedimientos).

La tarea 2 corresponde a "practicando lo aprendido" la cual consta de 5 partes:



PRACTICANDO LO APRENDIDO

1. En la vida diaria encontramos figuras que podemos descomponer en figuras geométricas más simples. Este prisma se descompone de la siguiente forma:

a) ¿Cuántas caras tiene?
b) ¿Cómo son las áreas de igual color?
c) ¿Cuánto suma el área amarilla?
d) ¿Cuánto suma el área roja?
e) ¿Cuánto suma el área azul?
f) ¿Cuánto suma el área del prisma?

- Tracen un prisma o poliedro y descompónganlo en figuras geométricas más simples.

Glosario

Prisma. Se forma de dos caras iguales y paralelas llamadas bases y de caras laterales llamadas *paralelogramos*.

Poliedro. Sólidos geométricos formados por caras planas.

Figura 26. Parte 1 de la tarea "practicando lo aprendido" (Quijano, González y Castillo, 2015, p.55).

La resolución: se pide identificar el número de caras que posee el prisma de la imagen (6 caras), notando que las áreas de las superficies de igual color es la misma (***Concepto*** de prisma). Ahora, el área de la superficie amarilla (A_m) de lados b y c es $A_m = bcu^2$, por tanto $2bcu^2$ suman las áreas de la superficie amarilla. El área de la superficie roja (A_r) de lados a y b es $A_r = abu^2$, resultando, $2abu^2$ suman las áreas de la superficie roja. Y el área de la superficie azul (A_z) de lados b y c es $A_z = bcu^2$, entonces, $2bcu^2$ suman las áreas de la superficie azul. Nótese que las superficies amarillas y azules tienen la misma área, de esta manera, el área de prisma (A_p) es entonces $A_p = (2ab + 4bc)u^2$(***concepto y procedimiento*** área de un rectángulo).

También se solicita trazar un prisma o poliedro cualquiera y descomponerlo en figuras geométricas más simple (***lenguaje*** gráfico).

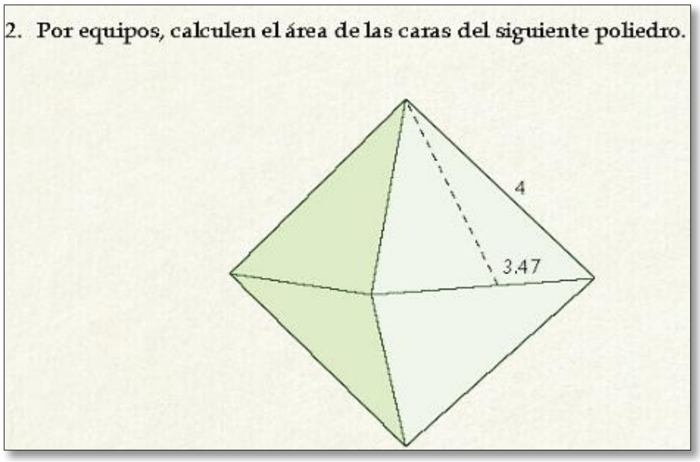


Figura 27. Parte 2 de la tarea "practicando lo aprendido" (Quijano, González y Castillo, 2015, p.55).

La resolución: en la imagen se observa un octaedro, que es un poliedro de ocho caras, que en este caso es regular porque todas sus caras son triángulos equiláteros cuyos lados miden $4u$ (***concepto*** de octaedro). Primero se calcula el área de una de las caras $A = \frac{4\times3.47}{2} = 6.94u^2$, ahora el área de todas las caras (A_c), será 8 veces el área de una cara, por lo cual, $A_c = 8 \times 6.94u^2$ luego $A_c = 55.52u^2$ (***procedimiento***).

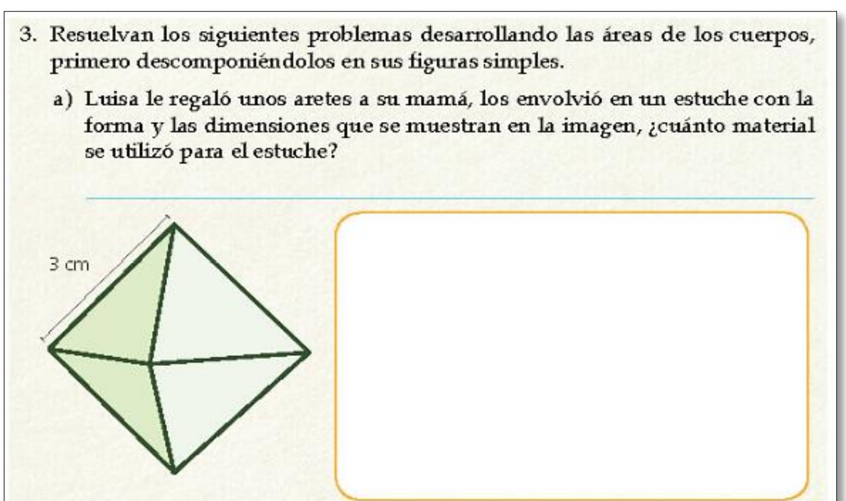


Figura 28. Parte 3(a) tarea "practicando lo aprendido" (Quijano, González y Castillo, 2015, p.56).

La resolución: se necesita calcular el área del estuche (A_E), lo cual se puede realizar sumando las áreas de las ocho caras que lo conforman. El área de una cara (A_c) se obtiene usando la fórmula para triángulos equiláteros, luego $A_c = \frac{\sqrt{3}\times 3^2}{4} = 3{,}9u^2$ por tanto $A_E = 8 \times 3{,}9u^2 = 31.2u^2$ (***Concepto y procedimiento***).

Como se conoce que el estuche es un octaedro, se puede utilizar la respectiva fórmula para hacer este cálculo $A_E = 2\sqrt{3} \times a^2$ siendo a la longitud de la arista, obteniendo $A_E = 2\sqrt{3} \times 3^2$ luego $A_E = 31.2\, u^2$(***Concepto y procedimiento***).

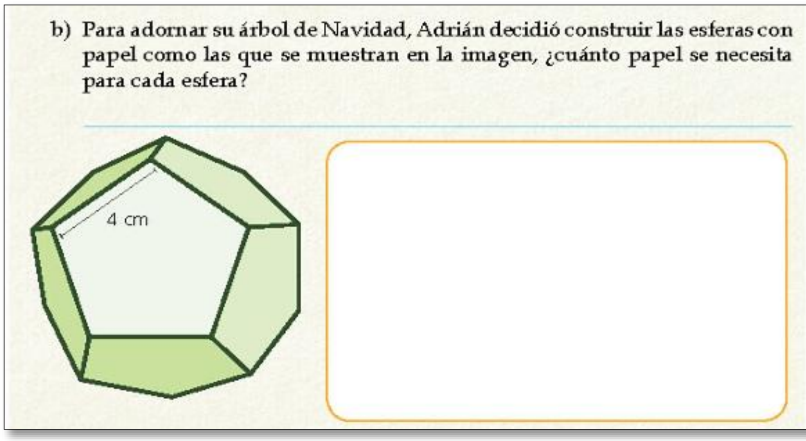


Figura 29. Parte 3(b) tarea "practicando lo aprendido" (Quijano, González y Castillo, 2015, p.56).

La resolución: lo que se muestra en la imagen es un dodecaedro, el cual es un poliedro regular formado por doce pentágonos regulares iguales (***concepto*** de dodecaedro). Por tanto, para saber cuánto papel se necesita para su construcción hay que calcular su área total (A_T). La figura proporciona que estos pentágonos tienen lados de 4 cm, pero como se desconoce la apotema no es posible hallar el área usando la fórmula respectiva para este polígono. Por lo cual, se debe hacer uso de la fórmula para calcular el área de un dodecaedro $A = 3 \times \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \times a^2$ siendo a la longitud de las aristas, obteniendo $A = 3 \times \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \times 4^2$ luego $A = 330.3cm^2$(***procedimiento***).

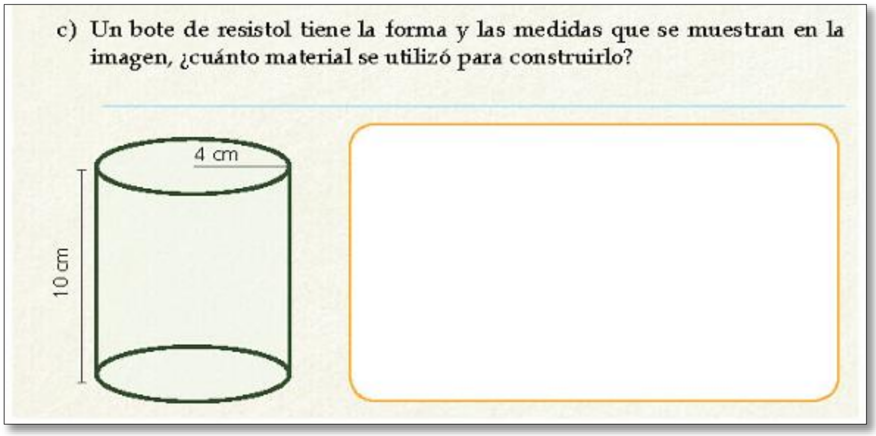


Figura 30. Parte 3(c) tarea "practicando lo aprendido" (Quijano, González y Castillo, 2015, p.56).

Resolución: para saber cuánto material se utilizó para recubrir el bote de resistol es necesario calcular el área del cilindro (A_C), lo cual se puede hacer desarmando el cilindro en figuras geométricas de manera que se pueda hallar el área lateral y las dos bases circulares como se observa en la Figura 31.

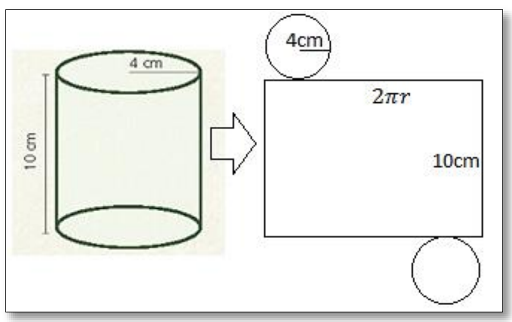


Figura 31. Cilindro desarmado en figuras geometricas

Luego, $A_C = (2\pi \times 4cm \times 10cm) + 2\pi \times (4cm)^2 \rightarrow$ $A_C = 80\pi cm^2 + 32\pi cm^2$ obteniendo $A_C = 351.86cm^2$ (***concepto y procedimiento*** área de un cilindro).

También, se puede hallar el área del bote de resistol implementando la fórmula $A_C = 2\pi r(h + r)$ donde h es la altura y r el radio de la base, entonces se obtiene $A_C = 2\pi \times 4cm\ (10cm + 4cm) = 351.86cm^2$ (***procedimiento***).

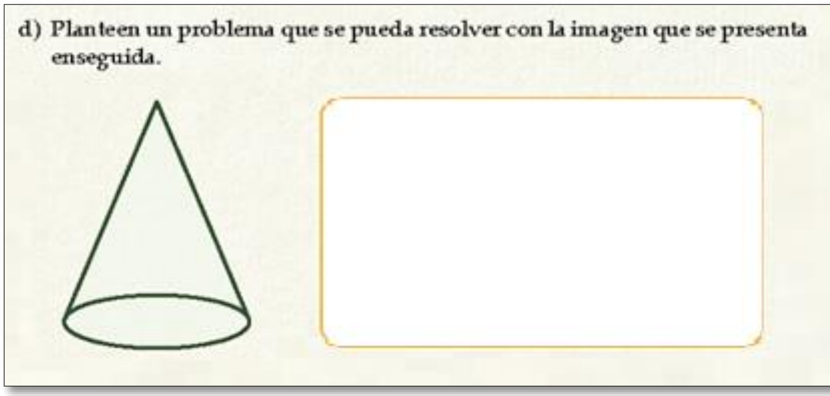

d) Planteen un problema que se pueda resolver con la imagen que se presenta enseguida.

Figura 32. Parte 3(d) tarea "practicando lo aprendido" (Quijano, González y Castillo, 2015, p.57).

La resolución: en esta parte se plantea dando libertad de proponer un problema que se asume debe ajustarse a la necesidad de calcular el área del cono que se muestra en la imagen, por tanto deberá designar una medida a la altura h y una para el radio r de la base (***concepto y procedimiento área de un cono***).

4. Un baño tiene estas dimensiones: 4 m de largo, 5 m de profundidad y 3 m de alto; la puerta tiene una altura de 2.5 m y un ancho de 1 m. Con base en esta información respondan las preguntas siguientes:

   a) El piso se cubrirá de azulejo. ¿Cuántos metros cuadrados se deben comprar de azulejo? ____

   b) Las paredes y el techo se cubrirán con un acabado especial anti-humedad. ¿Cuántos metros cuadrados de recubrimiento se requieren?

   ____

   c) Realicen en su cuaderno el dibujo del baño.

Figura 33. Parte 4 tarea "practicando lo aprendido" (Quijano, González y Castillo, 2015, p.57).

Resolución: se requiere calcular el área del piso (A_p) para determinar cuántos metros cuadrados de azulejo se necesita para recubrirlo, conociendo que el piso del baño es una superficie rectangular de lados $4m$ y $5m$ se tiene que $A_p = 4m \times 5m = 20m^2$ (***concepto y procedimiento*** área de un rectángulo).

Para saber cuántos metros cuadrados de recubrimiento anti-humedad se requiere, es necesario calcular el área de las paredes y el techo. Nótese que las paredes paralelas tienen las mismas dimensiones, un par de ellas son de lados $3m$ y $5m$, el otro par de lados $3m$ y $4m$. Calculando se tiene que $A_1 = 2(3m \times 5m) = 30m^2$ y $A_2 = 2(3m \times 4m) = 24m^2$ luego, el área de las paredes (A_r) es igual $A_r = A_1 + A_2 \rightarrow A_r = 30m^2 + 24m^2$ luego $A_r = 54m^2$. Ahora, el área del techo (A_t) es igual $A_t = 4m \times 5m = 20m^2$. De esta manera, se obtendrá el área total a recubrir (A_T) sumando el área de las paredes y el techo, restando el área ocupada por la puerta (A_u), entonces $A_T = A_r + A_t - A_u$ luego $A_T = 54m^2 + 20m^2 - 2.5m^2 = 71.5m^2$. Por lo cual, se requiere $71.5m^2$ de recubrimiento anti-humedad (***concepto y procedimiento*** área de una figura compuesta).

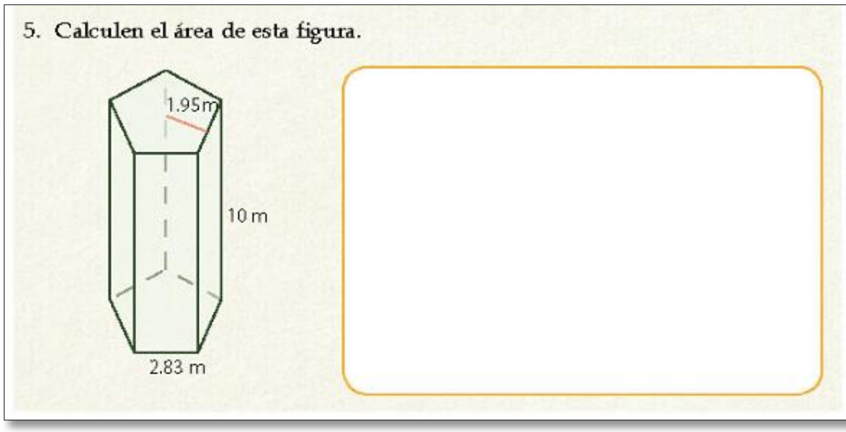


Figura 34. Parte 5 tarea "practicando lo aprendido" (Quijano, González y Castillo, 2015, p.57).

Resolución: una forma de calcular el área total (A_T) de la figura es sumando las áreas de los polígonos que la conforman, de manera que $A_T = 5A_r + 2A_b$ considerando A_r el área de un rectángulo y A_b el área de una base pentagonal. Así se tiene que $A_T = 5(10m \times 2.83m) + 2\left(\frac{5\times2.83\times1.95}{2}\right) \rightarrow A_T = 141.5m^2 + 27.6m^2 \rightarrow A_T = 169.1m^2$ (***concepto y procedimiento*** área de una figura compuesta).

Asimismo, es posible realizar lo pedido usando la fórmula para el área de un prisma pentagonal $A_T = 5 \times l \times (ap + h)$ siendo l el lado del pentágono, ap su apotema y h la altura del prisma. Obteniendo $A_T = 5 \times 2.83m \times (1.95m + 10m)$ luego $A_T = 169.1$ (***concepto y procedimiento*** área de un prisma pentagonal).

Al finalizar la tarea se pide comparar entre compañeros los resultados y reflexionar sobre la importancia de calcular las áreas laterales y totales de los prismas y pirámides, dando lugar a ***argumentos*** basados en el concepto y los procedimientos.

La tarea 3 corresponde a "aplicando lo aprendido" la cual consta de 2 partes:

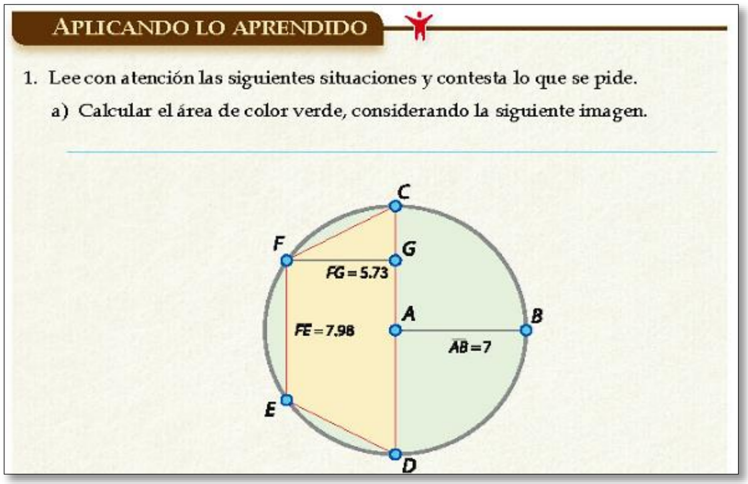


Figura 35. Parte 1 tarea "aplicando lo aprendico" (Quijano, González y Castillo, 2015, p.58).

La resolución: el área de la superficie de color verde (A_v) es igual a la diferencia entre el área del círculo (A_c) y el área de la superficie naranja (A_n) de esta manera $A_v = A_c - A_n$. Realizando los cálculos $A_c = \pi \times r^2 \rightarrow A_c = \pi \times 7^2$ luego $A_c = 153.93u^2$(***concepto y procedimiento*** área de un círculo). Como la superficie naranja tiene forma de trapecio se puede usar la fórmula establecida para calcular esta área $A_n = h\left(\frac{a+b}{2}\right)$ siendo h la altura, a y b las dos bases, obteniendo $A_n = 5.73\left(\frac{14+7.98}{2}\right) \rightarrow$ $A_n = 62.97u^2$ (***concepto y procedimiento*** área de un trapecio). Por lo tanto, el área de la superficie verde es $A_v = 153.93u^2 - 62.97u^2$ luego $A_v = 90.96u^2$.

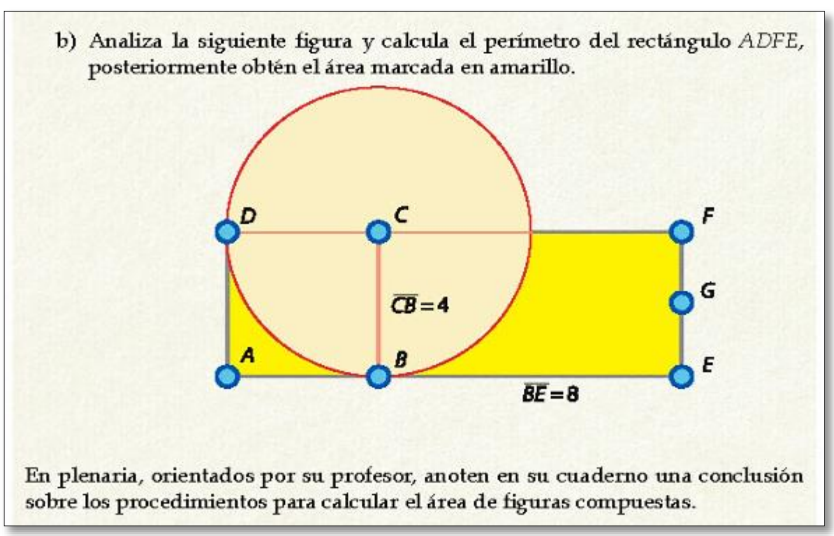
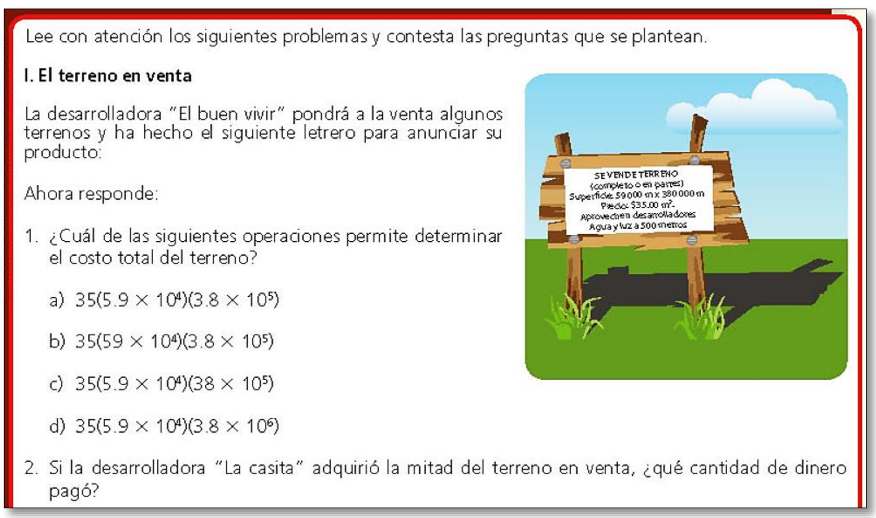


Figura 36. Parte 2 tarea "aplicando lo aprendico" (Quijano, González y Castillo, 2015, p.58).

La resolución: se solicita hallar el perímetro del rectángulo $ADFE$, para lo cual se debe tener en cuenta que todos los puntos de la circunferencia están a una distancia igual al radio del centro del círculo (***concepto*** de circunferencia), esto implica que $\overline{DC} = 4$, por tanto, el rectángulo es de lados 12 y 4, así su perímetro es $p = 4 + 12 + 4 + 12 = 32u$ (***concepto y procedimiento*** de perímetro de un rectángulo). Ahora, el área de la superficie amarilla (A_m) resulta de la diferencia entre el área de la superficie rectangular (A_r) y el área de la mitad del círculo(A_c), así $A_m = A_r - A_c$. Calculando $A_r = 12 * 4 = 48u^2$ (***Concepto y procedimiento*** área de un rectángulo) y $A_c = \frac{\pi \times 4^2}{2} = 25.13u^2$ ***Concepto y procedimiento*** área de un círculo). Por tanto el área de la superficie amarilla es $A_m = 48u^2 - 25.13u^2 = 22.87u^2$

La tarea 4 corresponde a "evaluación tipo PISA" la cual consta de 2 partes:


Lee con atención los siguientes problemas y contesta las preguntas que se plantean.

I. El terreno en venta

La desarrolladora "El buen vivir" pondrá a la venta algunos terrenos y ha hecho el siguiente letrero para anunciar su producto:

Ahora responde:

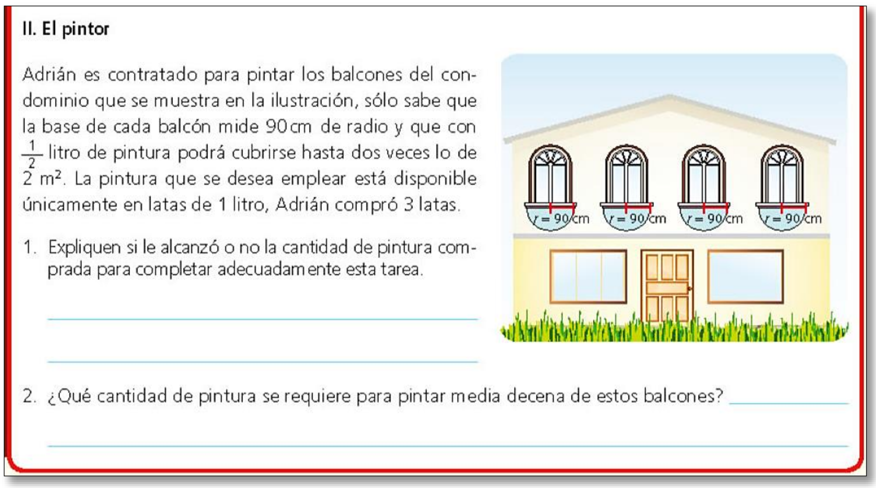
1. ¿Cuál de las siguientes operaciones permite determinar el costo total del terreno?
   a) $35(5.9 \times 10^4)(3.8 \times 10^5)$
   b) $35(59 \times 10^4)(3.8 \times 10^5)$
   c) $35(5.9 \times 10^4)(38 \times 10^5)$
   d) $35(5.9 \times 10^4)(3.8 \times 10^6)$
2. Si la desarrolladora "La casita" adquirió la mitad del terreno en venta, ¿qué cantidad de dinero pagó?

Figura 37. Parte 1 tarea "evaluación tipo PISA" (Quijano, González y Castillo, 2015, p.76).

La resolución: en el letrero se proporciona que el terreno tiene una superficie de $59000m$ por $380000m$, además que el precio es de $\$35.00m^2$. En el primer inciso se pide elegir de las operaciones listadas, la que permita determinar el costo total del terreno. Para esto se requiere tener en cuenta el ***concepto*** de notación científica de un número, de esta manera puede seleccionar la respuesta (a).

Para determinar cuánto dinero pagó la desarrolladora la casita por la mitad del terreno, se puede proceder bien sea resolviendo la operación expresada en la opción (a) así

$35(5.9 \times 10^4)(3.8 \times 10^5) = 784700000000$ por tanto la mitad del terreno cuesta 392350000000 pesos (***procedimiento*** notación científica). O se puede obtener la respuesta calculando el área del terreno (A_T), multiplicarlo por el costo de cada m^2y dividir lo obtenido a la mita $A_T = 59000m \times 380000m = 784700000000m^2$ luego el precio pagado por la desarrolladora es $(784700000000 \times 35)/2 =$ 392350000000 pesos (***procedimiento*** área de un rectángulo).



II. El pintor

Adrián es contratado para pintar los balcones del condominio que se muestra en la ilustración, sólo sabe que la base de cada balcón mide 90 cm de radio y que con $\frac{1}{2}$ litro de pintura podrá cubrirse hasta dos veces lo de 2 m². La pintura que se desea emplear está disponible únicamente en latas de 1 litro, Adrián compró 3 latas.

1. Expliquen si le alcanzó o no la cantidad de pintura comprada para completar adecuadamente esta tarea.

2. ¿Qué cantidad de pintura se requiere para pintar media decena de estos balcones?

Figura 38. Parte 2 tarea “evaluación tipo PISA” (Quijano, González y Castillo, 2015, p.76).

La resolución: se solicita explicar si 3 litros de pintura alcanza para pintar las superficies de los balcones que se muestran en la ilustración, para esto se conoce que la base de cada balcón tiene un radio de $90cm$, es decir $0.9m$ (***procedimiento*** conversión de cm a m), además que medio litro alcanza para cubrir dos veces $2m^2$ de superficie, por tanto un litro de pintura alcanza para pintar $8m^2$ de superficie (***procedimiento*** de cálculo de proporciones). Ahora, cada balcón tiene un área $A = \frac{\pi \times (0.9)^2}{2} = 1.27m^2$(***concepto y procedimiento*** área de un círculo).

En la ilustración se muestra que son 4 balcones los que hay que pintar, por tanto, la superficie que Adrián debe pintar tiene un área aproximada de $5{,}08m^2$, lo que implica que las 3 latas compradas para este trabajo si alcanzan (***argumento*** basado en el procedimiento).

En el segundo inciso preguntan cuánta cantidad de pintura se requiere para pintar media decena de balcones, es decir, cinco balcones. Como se sabe que cada balcón tiene un área de $1.27m^2$ entonces la superficie que se quiere pintar ahora mide $6.35m^2$, por lo cual se necesita una lata de pintura (***procedimiento***).

Conflictos semióticos potenciales de la tarea

Se observa a lo largo de las tareas el uso de expresiones en las que se considera como sinónimos los términos área y superficie, por ejemplo: "áreas de igual color", "cuánto suma el área azul", "obtén el área marcada de amarillo", entre otras. En estas expresiones se está hablando de cualidades de las superficies y no de sus áreas. Por tanto, el conflicto está en que se usan estos términos indiscriminadamente, provocan que se asocie el área con la superficie como sinónimos, cuando se sabe que en matemáticas aluden a cosas distintas.

4.2.3. Objetos primarios identificados en las tareas

En este segundo libro se revisaron 4 tipos tareas que se presentan para el tratamiento del cálculo de áreas de figuras compuestas, la primera tiene 9 partes, la segunda 5 partes, la tercera y la cuarta dos partes cada una. Se lograron identificar los objetos primarios (situaciones, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y lenguaje) que se podrían poner en juego durante la resolución de cada una de las tareas, que se sitúan tanto en un contexto intra como extra-matemático. La Tabla 3 muestra que los objetos primarios aparecen en la resolución de las situaciones de manera interviniente, puesto que ninguna de ellas propicia la emergencia de objetos.

Es importante resaltar que varias partes de las tareas son continuación de la anterior, por lo que se optó por agruparlas en una misma casilla de la tabla, mientras que algunas partes de las tareas ameritaban un lugar en la tabla, debido al tipo de situación y a los objetos primarios intervinientes en su resolución.

Tabla 3.

Objetos primarios identificados en las tareas propuestas el libro 2

Situación Problema	Conceptos		Propiedades		Procedimientos		Argumentos			Lenguaje		
	I	E	I	E	I	E	C	Pp	Pc	V	S	G
Tarea 1 (parte 1, 2, 3, 4, 5 y 6) extramatemática donde se solicita las medidas para un librero (rectangular, triangular) y realizar el cálculo de sus áreas.	*				*				*		*	

Tarea 1 (parte 7) extramatemática en la que se calculan áreas de triángulos, rectángulos y pentágono.	*		*		*						*	*
Tarea 1 (parte 8 y 9) intramatemática donde se pide trazar y calcular el área de figuras compuestas.	*				*		*		*		*	*
Final. Se solicita reflexionar grupalmente y listar las aplicaciones del cálculo de áreas.	*						*		*	*		
Tarea 2 (parte 1) intramatemática donde se calcula y se comparan áreas de polígonos que conforman un prisma.	*				*						*	
Tarea 2 (parte 2 y 3) intramatemática en la que se realizan cálculos de áreas de un prisma, cilindro, cono y varios poliedros.	*				*						*	*
Tarea 2 (parte 4) extramatemática donde se requiere calcular el área de las caras de un prisma rectangular.	*				*						*	
Tarea 2 (parte 5) intramatemática en la que se solicita calcular el área de un prisma pentagonal.	*				*						*	
Final. Se solicita comparar los resultados y reflexionar sobre la importancia de calcular las áreas laterales y totales de prismas y pirámides.	*						*		*	*		
Tarea 3 intramatemática donde se requiere calcular áreas de círculos, rectángulo y trapecio.	*	*									*	
Tarea 4 extramatemática donde se solicita calcular el área de superficies rectangular y circulares.	*	*							*		*	

I: interviniente C: concepto V: verbal
E: emergentes Pp: propiedades S: simbólico
Pc: procedimientos G: gráfico

4.2.4. Configuración epistémica de las tareas

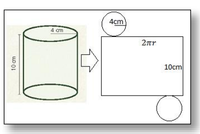
La siguiente configuración epistémica muestra la red de objetos intervinientes (no hay emergencia de objetos primarios) extraídas de la resolución de las tareas que abordan el cálculo de áreas de figuras compuestas en este segundo texto. Se puede observar, que las situaciones propuestas son tanto intra como extra-matemática, las cuales implican el cálculo de áreas de figuras planas, compuestas, prismas, cilindros, conos y algunos poliedros (octaedro y dodecaedro). Los conceptos, propiedades y procedimientos que se muestran están ligados a los cálculos de área de las figuras y cuerpos geométricos antes mencionados.

Es preciso mencionar, en los enunciados de algunas tareas solicitan se argumente, por tanto, lo que aparece en esta configuración referente a argumentos en su mayoría son producto de las reflexiones finales que se solicitan en alguna de ellas. En cuanto al lenguaje el más utilizado es el simbólico, y en algunas tareas interviene el lenguaje gráfico y el verbal.

Lenguaje

-Simbólico
Fórmulas de área
Rectángulo: $A = b.h$
Triángulo: $A = \frac{b \times h}{2}$
Prisma: $A_T = A_b + A_l$ Siendo A_b el área de la base y $A_l = \frac{P_b \times ap}{2}$
Círculo: $A = \pi r^2$
Dodecaedro: $A = 3 \times \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \times a^2$
Octaedro: $A = 2 \times \sqrt{3} \times a^2$

- Gráfico



-Verbal
El área de la superficie de color verde (A_v) es igual a la diferencia entre el área del círculo (A_c) y el área de la superficie naranja (A_n)

Situación Problemática
Tareas extramatemáticas e intramatemáticas donde se requiere calcular áreas de figura planas, compuestas, cuerpos geométricos como prismas, cilindros, conos y algunos poliedros (octaedro, dodecaedro).

REGLAS

Conceptos
-Definición de varias figuras geométricas (rectángulo, triángulo isósceles)
-Definición área de un polígono (triángulo, rectángulo, hexágono pentágono, trapecio)
-Definición área de una figura compuesta de polígonos
-Definición de cuerpos geométricos (prismas, cilindro, cono, octaedro, dodecaedro)
-Definición de Perímetro de un rectángulo.
-Definición de notación científica.

Propiedades
Propiedad de los rectángulos: la diagonal del rectángulo lo divide en dos triángulos rectos congruentes.

Procedimientos
-Cálculo de áreas de figuras planas y compuestas
-Cálculo de áreas de círculos y semicírculos
-Cálculo de áreas de prismas (pentagonal) y poliedros (octaedro y dodecaedros)
-Cálculo del perímetro de un rectángulo.
-Conversión de números a su notación científica
- Conversión de unidades (de cm a m)

Argumentos
Argumentos basados en conceptos y procedimiento, ejemplo:
Cada balcón tiene un área $A = \frac{\pi * (0.9)^2}{2} = 1.27m^2$ como son 4 balcones, se tiene que la superficie que Adrián debe pintar tiene un área aproximada de $5{,}08m^2$, lo que implica que las 3 latas compradas para este trabajo si alanza

Figura 39. Configuración epistémica de las tareas del libro 2.

Por otro lado, es pertinente destacar que, aunque en la propuesta de este libro se resalta que las actividades están pensadas para que los estudiantes desarrollen más el razonamiento que la memorización, las tareas resueltas en su mayoría requieren del uso de las fórmulas. Además, las que están en un contexto extramatemático se limitan a la realización de procedimientos de cálculo usando las fórmulas, sin necesidad alguna de argumentar o explicar sus respuestas.

4.3. Análisis del libro 3

4.3.1. Descripción general del libro.

El libro *Matemáticas 2. Habilidades y competencias* de Ángeles, Guerrero, Loyola y Preisser (2015) tiene un enfoque basado en la resolución de problemas, en el que se busca promover las competencias para resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados, así como el manejo de técnicas eficientes. Manejan el lema "se aprende a resolver problemas resolviendo problemas" pues se considera que la manera de adquirir competencias y desarrollar habilidades matemáticas es ejerciéndolas.

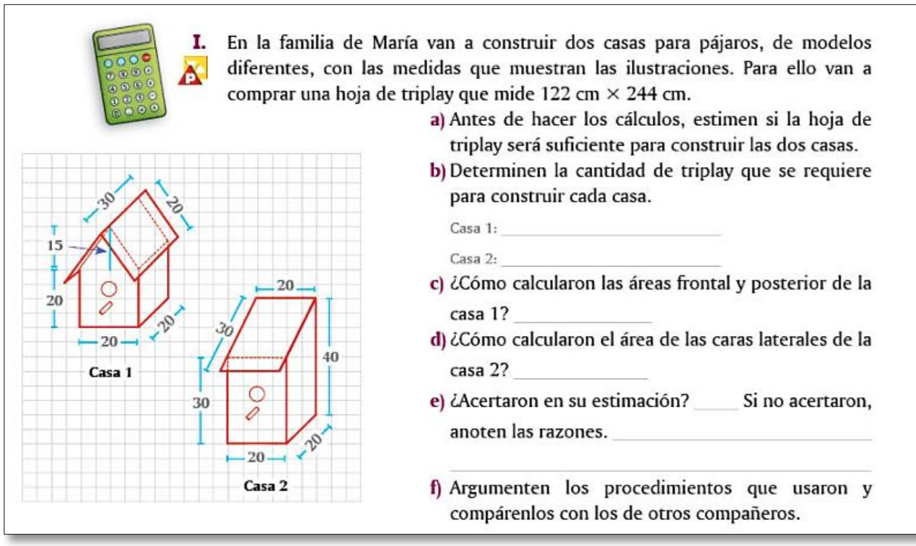
Este texto asume que para aprender matemáticas se requiere el estudio individual, el trabajo en pareja, en equipo y en grupos, por tanto, los tipos de tareas encontrados en este texto están marcados con iconos que determinan la forma de trabajo (ver Figura 40). Además, se tiene en cuenta el uso de la calculadora en la resolución de algunos problemas. Por otro lado, bajo el título de "Desafíos" se incluyen algunos ejercicios, preguntas o problemas cuya resolución no requiere conocimientos adicionales al contenido de la lección, sino de ingenio y perseverancia para aplicar lo aprendido.

Figura 40. Iconos que determinan el tipo de tarea

Cabe resaltar, que el contenido para el tratamiento de este tema está dividido en tres secciones: la lección 15 "cómo calcular áreas formadas por varias figuras geométricas" en la que se presentan 4 tareas, todas del tipo "trabajo en pareja" y dos de ellas sugieren el uso de la calculadora. La lección 16 "área de figuras compuestas 2, más figuras, más fórmulas" plantea 4 tareas, una es de trabajo en pareja y el resto en equipo. Finalmente, la lección 17 "construcción de prismas y cálculos de sus áreas" presenta 6 tareas, donde cinco de ellas corresponden a trabajo en pareja y una a trabajo en equipo, además cuatro de ellas proponen el uso de calculadoras.

4.3.2. Identificación de los objetos primarios en la resolución de las tareas

Tareas 1 de la lección 15 se presentan a continuación:


I. En la familia de María van a construir dos casas para pájaros, de modelos diferentes, con las medidas que muestran las ilustraciones. Para ello van a comprar una hoja de triplay que mide 122 cm × 244 cm.

a) Antes de hacer los cálculos, estimen si la hoja de triplay será suficiente para construir las dos casas.

b) Determinen la cantidad de triplay que se requiere para construir cada casa.

Casa 1: __________

Casa 2: __________

c) ¿Cómo calcularon las áreas frontal y posterior de la casa 1? __________

d) ¿Cómo calcularon el área de las caras laterales de la casa 2? __________

e) ¿Acertaron en su estimación? ____ Si no acertaron, anoten las razones. __________

f) Argumenten los procedimientos que usaron y compárenlos con los de otros compañeros.

Figura 41. Tarea 1 de la lección 15 (Ángeles, Guerrero, Loyola y Preisser, 2015, p.44).

La resolución: el apartado (a) solicita se estime si el triplay de medidas $122cm \times 244cm$ es suficiente para construir las dos casas para pájaros, esto permite poner en juego habilidades de razonamiento para dar una respuesta (***Argumento*** basado en el procedimiento).

Para determinar la cantidad de triplay necesario para construir cada una de las casas, se requiere calcular el área de cada una de las partes (base y caras) que la conforman. Entonces, el área de la casa 1 es $A_1 = 2(20 \times 30) + 3(20 \times 20) + 2\left[(20 \times 20) + \left(\frac{20\times15}{2}\right)\right]$ luego $A_1 = 1200 + 1200 + 100 \rightarrow A_1 = 3500cm^2$ (***concepto y procedimiento*** área de figuras planas). El área de la casa 2 es $A_2 = (20 \times 20) + 3(30 \times 20) + 2\left[(20 \times 30) + \left(\frac{10\times20}{2}\right)\right]$ luego $A_2 = 400 + 1800 + 1400 \rightarrow A_2 = 3600\ cm^2$ (***concepto y procedimiento*** área de figuras planas).

En el inciso (c) se debe explicar que la cara frontal de la casa 1 es un pentágono irregular y para obtener su área es preciso dividirlo en polígonos más sencillos, cuyas áreas se puedan calcular con la información dada en la figura. Uno de los caminos es partir el pentágono en un cuadrado de lados $20cm$ y en un triángulo de base $10\ cm$ y altura $20cm$, luego el área en cuestión resulta de sumar las áreas de estas figuras geométricas (***argumento*** basado en el procedimiento). En cuanto a las caras laterales de la casa 2, se observa que dos de ellas tienen forma de trapecio, si bien hay una fórmula para hallar su área, se eligió partirlo en dos polígonos: un rectángulo de $20cm \times 30cm$ y un triángulo de base 10cm y altura 20cm. De tal manera que la suma de sus áreas resulta ser el área del trapecio que representa una de las caras de la casa (***argumento*** basado en el procedimiento).

La pregunta en el inciso (e) es interesante, debido a que permite reflexionar sobre las razones por la que su estimación inicial resultó acertada o no. Aquí se exponen ***argumentos*** que están netamente basados en los procedimientos realizados en los incisos anteriores. En el inciso (f) se solicita argumentar los procedimientos usados y comparar los mismos. Además, esta tarea exige que con la gestión del profesor se dé lugar a la exploración de los diferentes caminos que se pueden elegir para resolver lo pedido en la tarea (***lenguaje*** verbal).

Tareas 2 de la lección 15

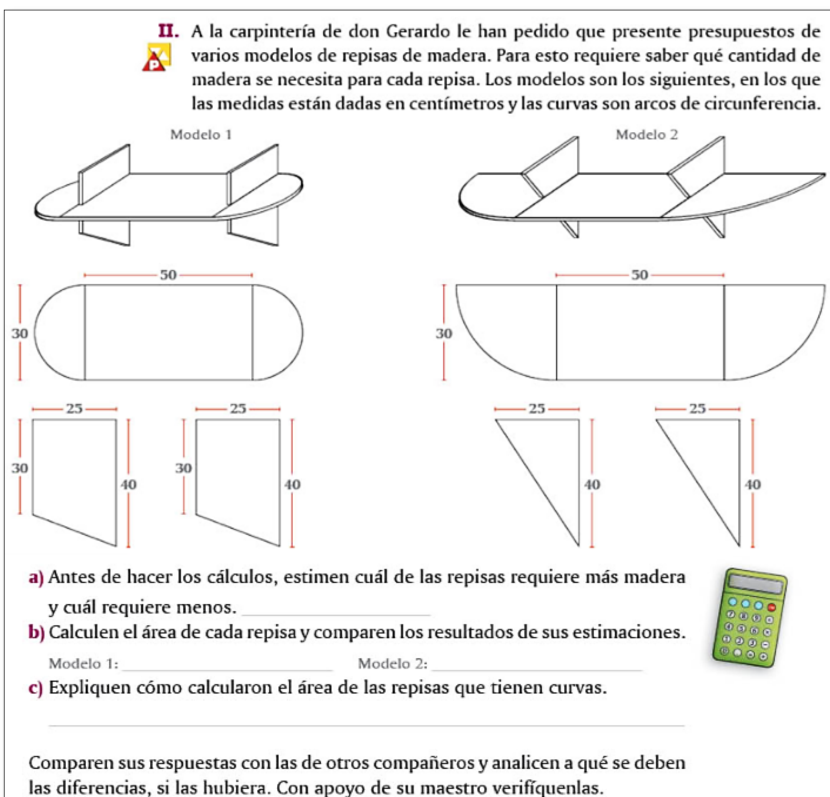


Figura 42. Tarea 2 de la lección 15 (Ángeles, Guerrero, Loyola y Preisser, 2015, p.44)

En el inciso (a) se solicita estimar cuál de los dos modelos requiere más o menos madera para su construcción, lo cual da lugar a ***argumentos*** basados en las estimaciones y los procedimientos realizados. Aquí toma importancia la comparación de áreas, en la figura 43 se marca con colores iguales las superficies de cada modelo que tienen igual área.

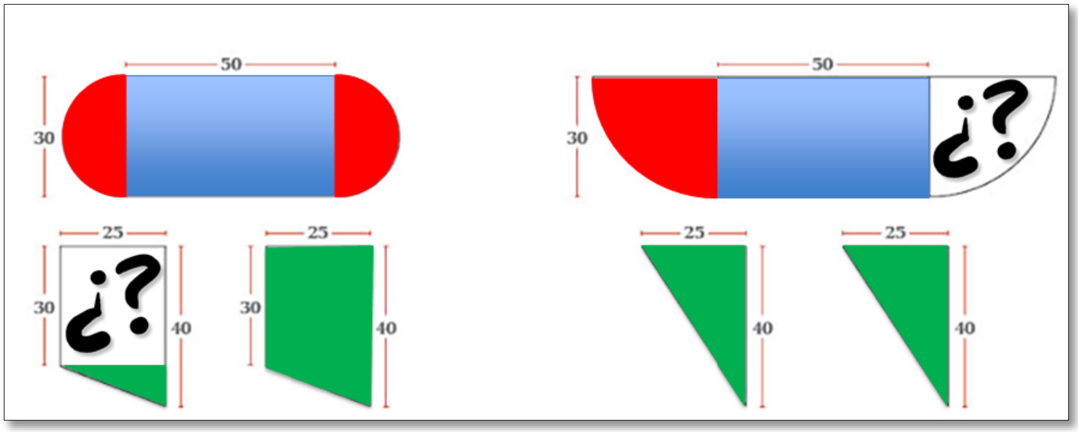


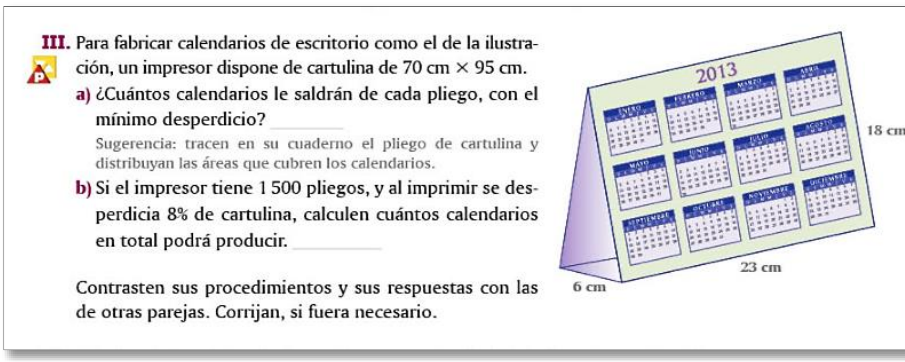
Figura 43. Comparación de área de las figuras que conforman los modelos de repisa.

Nótese que el modelo 1 está conformado por un rectángulo de $50cm \times 30cm$, dos medios círculos de diámetro $30cm$ y dos trapecios de altura $25cm$ y bases $30cm$ y $40cm$. Ahora el área de este modelo resulta de sumar las áreas de estos polígonos $A_1 = (50 \times 30) + (\pi \times 15^2) + 2 \times 25\left(\frac{30+40}{2}\right)$ luego $A_1 = 3956.9\ cm^2$ (***concepto y procedimiento*** área de figuras planas). En cuanto al modelo 2, está conformado por un rectángulo de $50cm \times 30cm$, dos cuartos de círculo de radio $30cm$ y dos triángulos con base $25cm$ y altura $40cm$. Entonces, $A_2 = (50 \times 30) + 2\left(\frac{\pi \times 30^2}{4}\right) + 2\left(\frac{25 \times 40}{2}\right) \rightarrow A_2 = 3913.7cm^2$ (***concepto y procedimiento*** área de figuras planas).

En el inciso (c) se pide explicar cómo se calculó el área de las repisas que tienen curvas, lo que implica resaltar que en la consigna se informa que estas curvas son arcos de circunferencias. Ahora, en el modelo 1 se observa que dos partes de la repisa son la mitad de un círculo cuyo diámetro es $30cm$, entonces es posible usar la fórmula que permite calcular el área de un círculo, análogamente se hace con las del modelo 2 (***argumentos*** basados en el conceptos y procedimientos).

En la parte final de la tarea se solicita comparar los resultados obtenidos, y se pide la supervisión del profesor durante la socialización, lo cual, propicia un espacio que permite el tránsito de un ***lenguaje*** simbólico y gráfico a uno verbal, así como al surgimiento de ***argumentos*** basados tanto en concepto, así como como en procedimientos realizados.

Tareas 3 de la lección 15


III. Para fabricar calendarios de escritorio como el de la ilustración, un impresor dispone de cartulina de 70 cm × 95 cm.

a) ¿Cuántos calendarios le saldrán de cada pliego, con el mínimo desperdicio? ________

Sugerencia: tracen en su cuaderno el pliego de cartulina y distribuyan las áreas que cubren los calendarios.

b) Si el impresor tiene 1 500 pliegos, y al imprimir se desperdicia 8% de cartulina, calculen cuántos calendarios en total podrá producir. ________

Contrasten sus procedimientos y sus respuestas con las de otras parejas. Corrijan, si fuera necesario.

Figura 44. Tarea 3 de la lección 15 (Ángeles, Guerrero, Loyola y Preisser, 2015, p.45).

La resolución: siguiendo la sugerencia dada en el inciso (a) se procede a dibujar en el cuaderno el pliego de cartulina (***lenguaje*** gráfico) y teniendo en cuenta que para fabricar un calendario se requiere de un trozo de cartulina rectangular de dimensiones $23cm \times 42cm$, se tiene que de cada pliego de cartulina salen 6 calendarios con el mínimo desperdicio.

Otra forma de responder a la pregunta del inciso (a), es determinando el área del pliego de cartulina $A = 70cm \times 95cm = 6650cm^2$ y calcular la cantidad de cartulina que se ocupa en la fabricación de un calendario $A_c = 23cm \times 42cm = 966cm^2$, ahora $6650cm^2 \div 966cm^2 = 6.88$, es decir, de un pliego de cartulina pueden sacarse 6 calendarios con el mínimo desperdicio (***concepto y procedimiento*** área de un rectángulo).

En el inciso (b) se menciona que de 1500 pliegos de cartulina se desperdicia el 8% al imprimir los calendarios, es decir, $1500 \times 0.08 = 120$ pliegos desperdiciados (***procedimiento*** cálculo de porcentajes), por tanto $1500 - 120 = 1380$ pliegos para la impresión. Como de cada pliego salen 6 calendarios se tiene $1380 \times 6 = 8280$. Al finalizar la tarea, se pide comparar los resultados con el resto de los compañeros y corregir si es necesario, lo que da lugar a la retroalimentación y la exposición de ***argumentos*** basados en los procedimientos realizados (***lenguaje*** verbal).

Tareas 4 de la lección 15

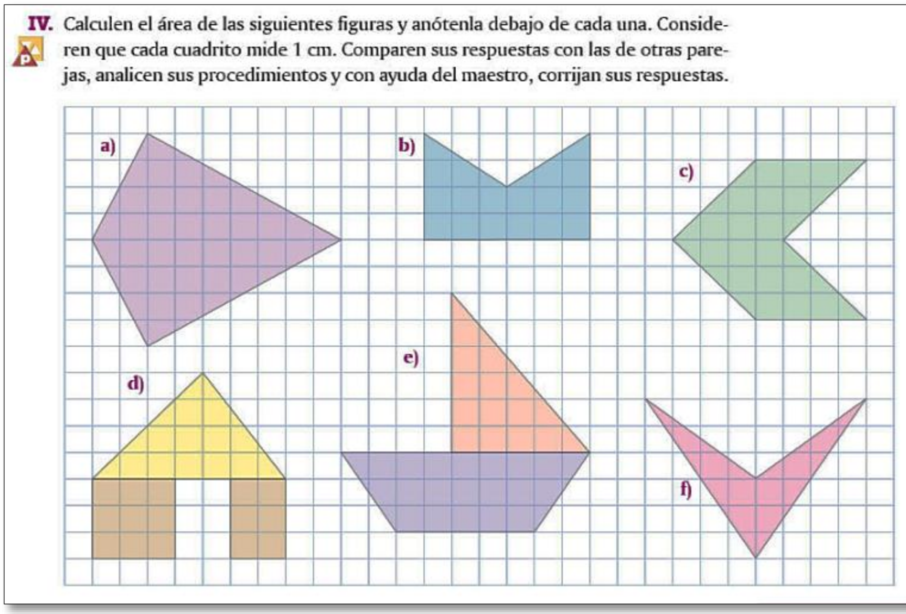


Figura 45. Tarea 4 de la lección 15 (Ángeles, Guerrero, Loyola y Preisser, 2015, p.45)

La resolución: obsérvese que para hallar el área total de cada una de las figuras geométricas, se requiere dividirlas en polígonos más sencillos (***lenguaje*** gráfico). Por ejemplo, el inciso (a) presenta un cuadrilátero que puede ser dividido en dos triángulos escalenos congruentes, cuya base es $9cm$ y altura $4cm$. Por tanto, el área total (A_T) de la figura es $A_T = 2\left(\frac{9cm\times 4cm}{2}\right) = 36cm^2$. Análogamente se calculan las áreas del resto de las figuras geométricas (***concepto y procedimiento*** área de figuras planas).

Las tareas de la lección 16 se presentan a continuación:

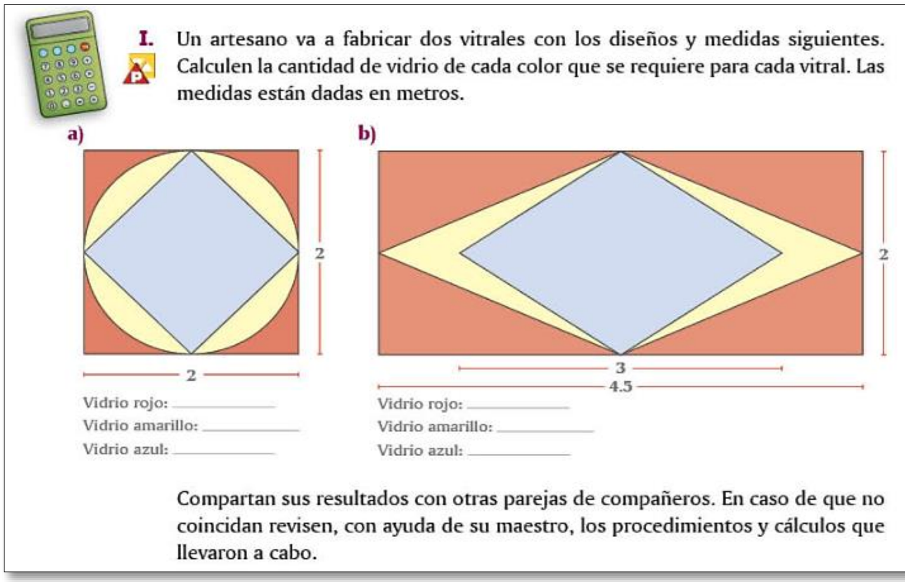


Figura 46. Tarea 1 de la lección 16 (Ángeles, Guerrero, Loyola y Preisser, 2015, p.46).

La resolución: en el inciso (a) se presenta el diseño de un vitral cuadrado de $2m$ de lado, el área del vidrio rojo (A_R) es igual a la diferencia entre las áreas del cuadrado grande (A_G) y el círculo (A_c) de diámetro $2m$, luego $A_R = A_G - A_c \rightarrow A_R = 4m^2 - \pi m^2 \rightarrow A_R = 0.86m^2$(***procedimiento*** área de un cuadrado y círculo). Como el vidrio azul tiene forma de rombo, su área (A_Z) esta dada por $A_Z = \frac{2\times 2}{2} = 2m^2$(***procedimiento*** área de un rombo). En cuanto al área del vidrio amarillo (A_M) resulta de la diferencia $A_M = A_c - A_Z$ entonces $A_M = \pi m^2 - 2m^2 = 1.14m^2$(***procedimiento*** área de un círculo y rombo).

En el inciso (b) se presenta un vitral rectangular de $4.5m \times 2m$, luego. Para hallar el área del vidrio rojo (A_R) se resta al área total del vitral (A_T) la de rombo grande (A_r), obteniendo $A_R = A_T - A_r \rightarrow A_R = 9m^2 - 4.5m^2 = 4.5m^2$(***procedimiento*** área de un rectángulo y rombo). El vidrio azul tiene forma de rombo, por tanto su área (A_Z) esta dada por $A_Z = \frac{3\times 2}{2} = 3m^2$. Y el área del vidrio amarillo (A_M) resulta de la diferencia $A_M = A_r - A_Z$ luego $A_M = 4.5m^2 - 3m^2 = 1.5m^2$(***procedimiento*** área de rombos). Por otro lado, se solicita compartir y revisar los procedimientos llevados a cabo para resolver esta tarea, lo cual da lugar a un ***lenguaje*** verbal y a un proceso de evaluación de lo realizado.

Tarea 2 de la lección 16

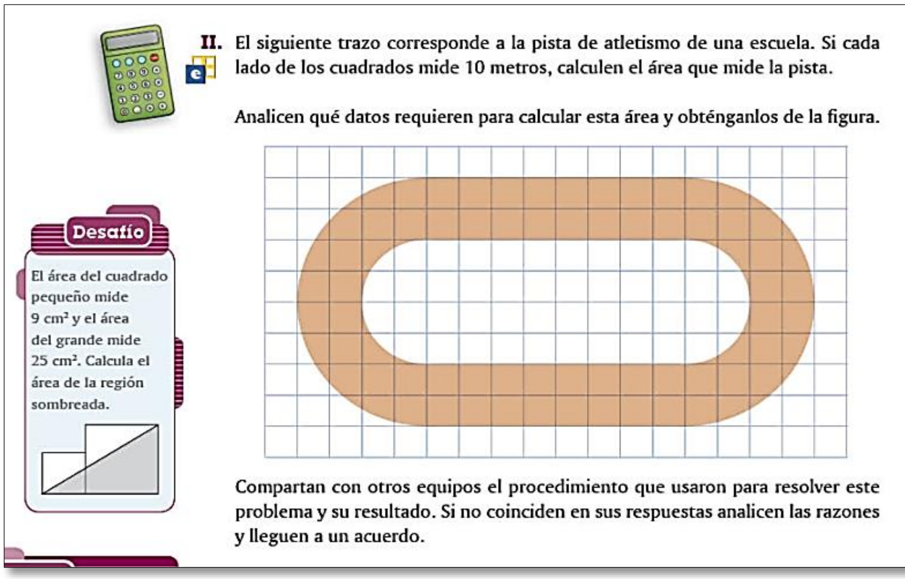


Figura 47. Tarea 2 de la lección 16 (Ángeles, Guerrero, Loyola y Preisser, 2015, p.46)

La resolución: para calcular el área que ocupa la pista de atletismo, se puede proceder trazando un rectángulo que contenga la pista, luego partir y separar la figura en otras que sea más fácil de calcular el área como se muestra en la Figura 48 (***lenguaje*** gráfico).

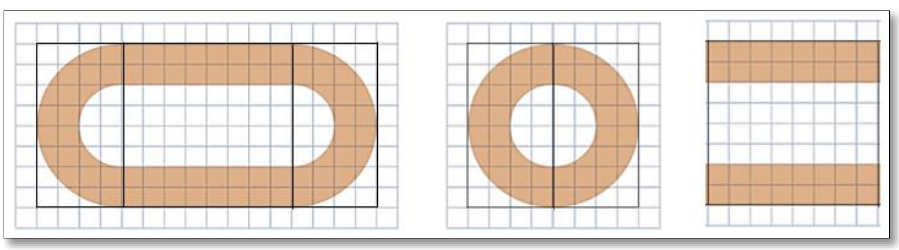


Figura 48. Representación gráfica en la resolución de la tarea

Se tiene que el área de la pista (A_P) será igual $A_P = A_1 + A_2$, siendo A_1 el área de la superficie circular sombreada y A_2 el área de las superficies rectangulares sombreadas. Además, el hecho de tener que analizar los datos requeridos para hallar estas áreas da lugar a examinar con detalle la figura que proporciona la tarea y justificar como se pueden utilizar para realizar los cálculos necesarios.

Para determinar A_1 primero se halla el área del cuadrado $A_C = 80m \times 80m = 6400m^2$ (***concepto y procedimiento*** área de un cuadrado), luego el área de los círculos (A_G y A_Q) de radios $40m$ y $20m$ respectivamente, obteniendo $A_G = \pi \times 40^2 = 5026.5m^2$y $A_Q = \pi \times$

$20^2 = 1256.6m^2$ (***concepto y procedimiento*** área de un círculo). Seguidamente, se calcula el área de las esquinas que resulta de la diferencia $A_E = A_C - A_G$ luego $A_E = 6400m^2 - 5026.5m^2 = 1373.5m^2$. Ahora A_1 se obtiene de $A_2 = A_C - A_Q - A_E$ de esta manera, $A_2 = 6400m^2 - 1256.6m^2 - 1373.5m^2$ entonces $A_1 = 3769.9m^2$(***concepto y procedimiento*** área de figuras compuestas).

Para calcular A_2 se considera que los dos rectángulos son congruentes, cuyos dimensiones son de $80m \times 20m$, lo que implica que $A_2 = 2(80m \times 20m) = 3200m^2$ (***concepto y procedimiento*** área de figuras compuestas). Finalmente, el área de la pista de atletismo es $A_P = 3769.9m^2 + 3200m^2 = 6969.9m^2$.

Por otro lado, en el desafío pide calcular el área de la región sombreada. En la información se proporciona que los dos cuadrados, el grande y el pequeño tienen áreas de $25m^2$ y $9m^2$ respectivamente. Por tanto, teniendo en cuenta que por el ***concepto*** de cuadrado, éstos miden $5m$ y $3m$ de lados, lo que implica, que el triángulo que representa la parte sombreada tiene una base de $8m$ y una altura de $5m$, de manera que el área es $A = \frac{8m \times 5m}{2} = 20m^2$ (***concepto y procedimiento*** área de un triángulo).

Tarea 3 de la lección 16

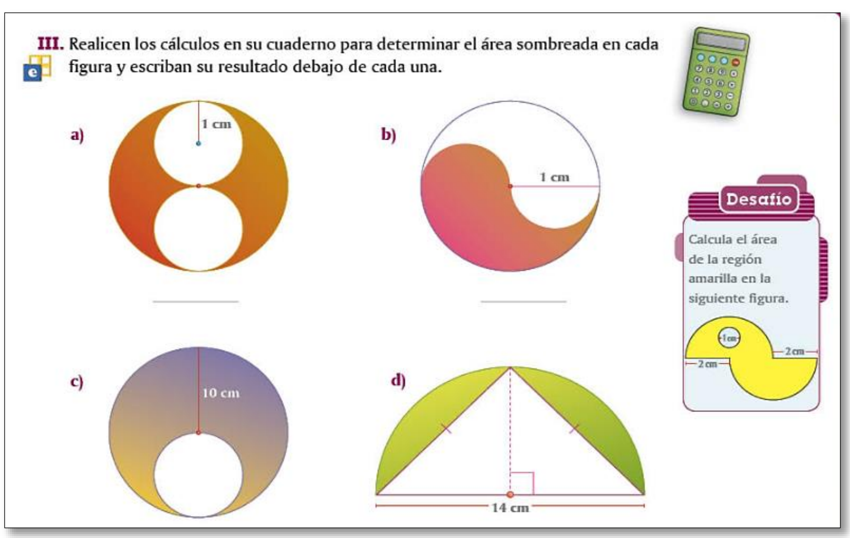
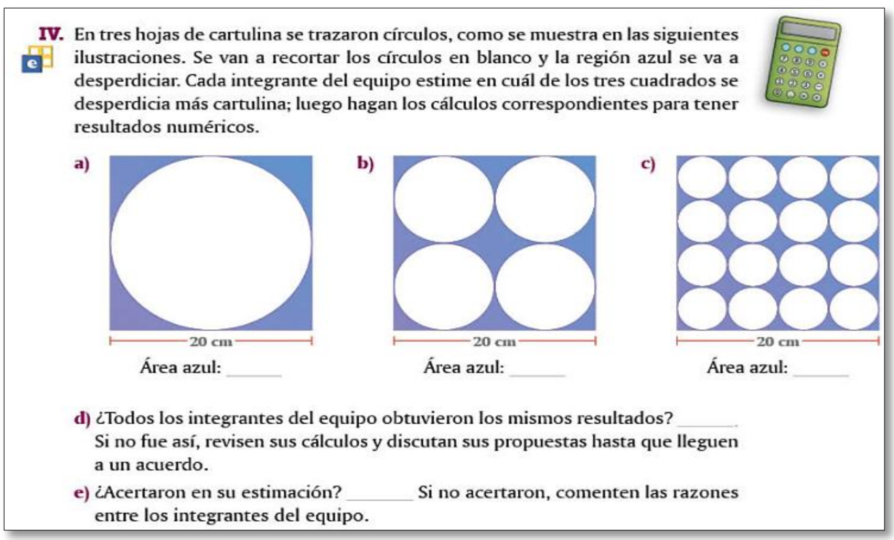


Figura 49. Tarea 3 de la lección 16 (Ángeles, Guerrero, Loyola y Preisser, 2015, p.47).

La resolución: en el inciso (a) se tiene que el área sombreada está dada por $A_S = A_G - 2A_p$, con A_G igual al área del círculo grande y A_p el área del círculo pequeño, obteniendo que $A_S = (\pi \times 2^2) - 2(\pi \times 1^2) = 6.3cm^2$(***concepto y procedimiento*** área de círculos). Análogamente, se calculan las áreas sombreadas (A_S) de cada una de las figuras propuestas en los otros incisos. En cuanto al desafío, se pide calcular el área de la región amarilla (A_m), para lo cual hay que tener en cuenta que la figura está compuesta por dos medios círculos de radio $2cm$, a ésta se le debe sustraer el área de la región blanca de un círculo pequeño de diámetro $1cm$. Luego, $A_m = (\pi \times 2^2) - (\pi) = 9.4cm^2$.

Tarea 4 de la lección 16


IV. En tres hojas de cartulina se trazaron círculos, como se muestra en las siguientes ilustraciones. Se van a recortar los círculos en blanco y la región azul se va a desperdiciar. Cada integrante del equipo estime en cuál de los tres cuadrados se desperdicia más cartulina; luego hagan los cálculos correspondientes para tener resultados numéricos.

a) 20 cm Área azul: ______ **b)** 20 cm Área azul: ______ **c)** 20 cm Área azul: ______

d) ¿Todos los integrantes del equipo obtuvieron los mismos resultados? ______. Si no fue así, revisen sus cálculos y discutan sus propuestas hasta que lleguen a un acuerdo.

e) ¿Acertaron en su estimación? ______ Si no acertaron, comenten las razones entre los integrantes del equipo.

Figura 50. Tarea 4 de la lección 16 (Ángeles, Guerrero, Loyola y Preisser, 2015, p.47)

La resolución: en primera instancia se pide estimar en cuál de los casos (a, b, c) se desperdicia menos cartulina, esto da lugar a que se expongan ***argumentos*** que estarán basados en el valor aproximado que se consideró en la respuesta. Luego, se solicita realizar los cálculos para determinar el área desperdiciada (A_d), en el caso (a) se recorta un círculo de radio $10cm$ por tanto, $A_d = 400 - (\pi \times 10^2) = 85.8cm^2$. En (b) se recortan 4 círculos de radios $5cm$, entonces $A_d = 400 - 4(\pi \times 5^2) = 85.8cm^2$. Y en (c) se recortan 8 círculos de radios $2.5\,cm$, por lo cual, $A_d = 400 - 8(\pi * 2.5^2) = 85.8cm^2$ (***concepto y***

procedimiento área de círculos y cuadrados) notando que la cartulina desperdiciada en cualquiera de los casos es la misma.

El hecho de que la tarea exija comparar y corregir los resultados entre compañeros y la orientación del profesor da lugar a ***argumentos*** basados en los procedimientos realizados y a transitar a un lenguaje verbal. Además, comentar las razones por las que no acertaron en la estimación puede suponer un proceso metacognitivo sobre la resolución de la tarea.

Las tareas de la lección 17 se presentan a continuación:

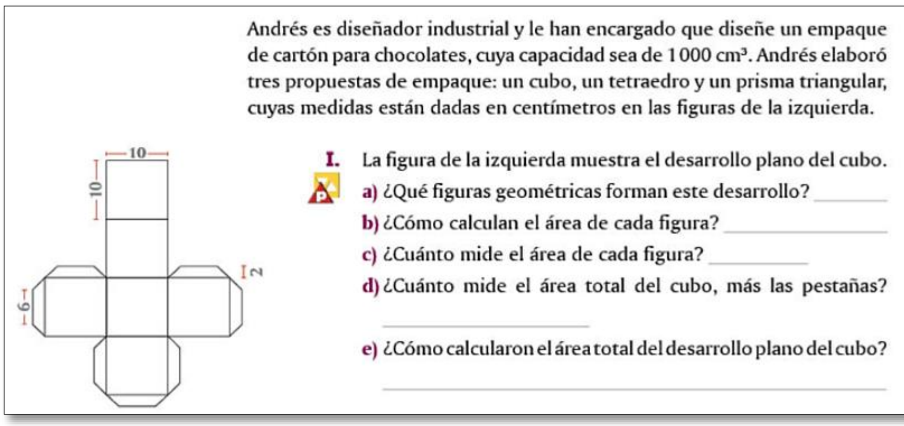


Figura 51. Tarea 1 de la lección 17 (Ángeles, Guerrero, Loyola y Preisser, 2015, p.48)

La resolución: en el inciso (a) se pide identificar las figuras que conforman el desarrollo del plano del cubo, donde se puede observar que todas las caras son cuadrados y las pestañas son trapecios (***concepto*** de cubo, cuadrado y trapecio). En el (b) se solicita explicar el cómo se calcula el área de cada figura, lo que da lugar a ***argumentos*** que están basados en el concepto y procedimiento de área de cuadrados y trapecios.

Se sabe que los lados de cada cuadrado miden $10cm$ de lados, por tanto su área está dada por $A = 10cm \times 10cm = 100cm^2$ (***procedimiento*** área de un cuadrado). Y las pestañas son trapecios de altura $2cm$ y bases $6cm$ y $10cm$, luego $A = 2cm\left(\frac{6cm+10cm}{2}\right) = 16cm^2$ (***procedimiento*** área de un trapecio). Por tanto, el área total del cubo incluyendo las pestañas es $A_T = (6 \times 100) + (7 \times 16) = 712cm^2$.

Tarea 2 de la lección 17

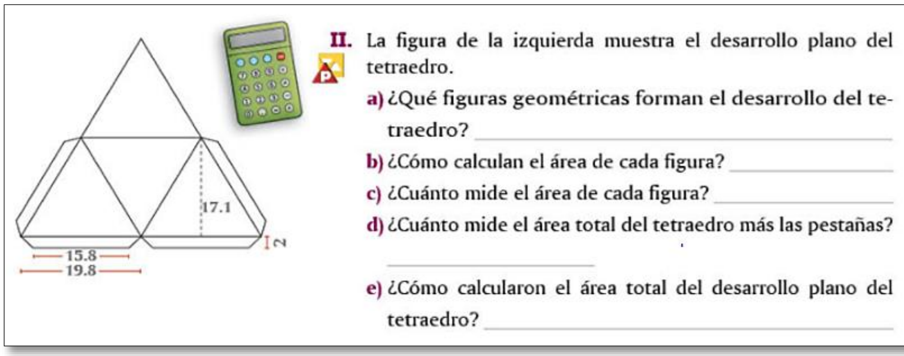


Figura 52. Tarea 2 de la lección 17 (Ángeles, Guerrero, Loyola y Preisser, 2015, p.48).

La resolución: las figuras geométricas que forman el desarrollo del tetraedro son triángulos y trapecios (***concepto*** de tetraedro, triángulo y trapecio). Teniendo en cuenta que un tetraedro regular tiene caras triangulares equiláteras e iguales (***concepto*** de tetraedro), se puede calcular el área de los triángulos con la fórmula convencional $A = \frac{b \times h}{2}$, siendo b la base y h la altura del triángulo. Y los trapecios con la fórmula $A = h\left(\frac{a+b}{2}\right)$, a y b las bases y h la altura. Entonces, el área del tetraedro es $A = 4\left(\frac{19.8cm \times 17.1cm}{2}\right) = 677.16cm^2$ (***procedimiento*** área de un tetraedro) y el área de las pestañas se obtiene de $A = 2cm\left(\frac{15.8cm+19.8cm}{2}\right) = 35.6cm^2$(***procedimiento*** área de un trapecio). Por tanto el área total del tetraedro incluyendo las pestañas se obtiene de sumar las áreas de todas las caras y las pestañas, obteniendo $A_T = 677.16cm^2 + 4(35.6cm^2) = 819.56cm^2$.

Tarea 3 y 4 de la lección 17

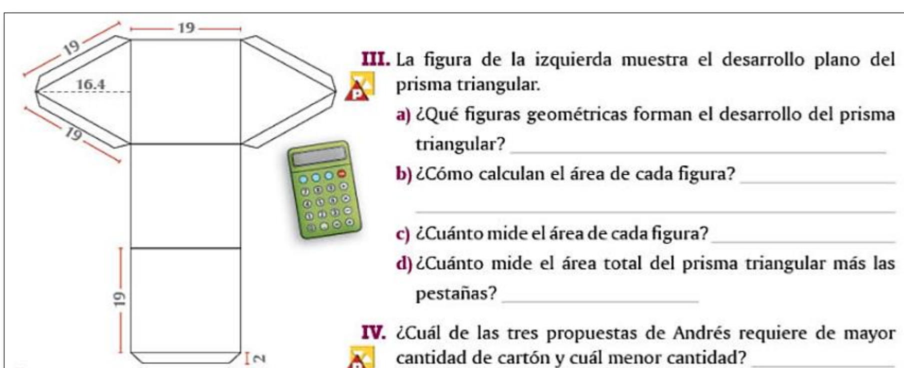
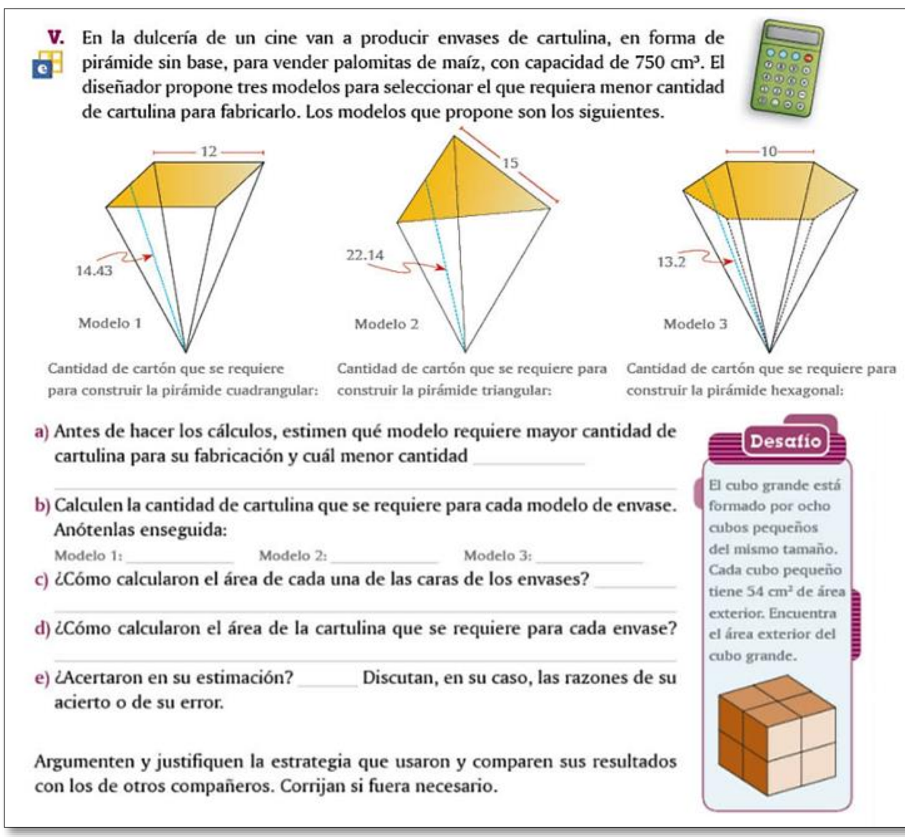


Figura 53. Tarea 3 y 4 de la lección 17 (Ángeles, Guerrero, Loyola y Preisser, 2015, p.48).

La resolución: las figuras que conforman el desarrollo plano del prisma triangular son cuadrados, triángulos equiláteros y pentágonos (***concepto*** de cuadrado, triángulo equilátero y trapecio). Para calcular estas áreas se puede tener en cuenta las fórmulas que ya están establecidas, obteniendo que las áreas: de cada cuadrado es $A_c = 19cm \times 19cm = 361cm^2$, de cada triángulo $A_t = \frac{19\times16.4}{2} = 155.8cm^2$ y de cada trapecio $A_r = 2\left(\frac{19cm+15cm}{2}\right) = 34cm^2$(***procedimiento*** área de cuadrado, triángulo y trapecio). Luego el área total del prisma triangular incluyendo las pestañas es $A_T = 3(361cm^2) + 2(155.8cm^2) + 5(34cm^2) = 1564.6cm^2$.

De esta manera se requiere mayor cantidad de cartón para el empaque con forma de prisma triangular y menos para el de forma de cubo (***argumento*** basado en el procedimiento).

Tarea 5 de la lección 17



V. En la dulcería de un cine van a producir envases de cartulina, en forma de pirámide sin base, para vender palomitas de maíz, con capacidad de 750 cm³. El diseñador propone tres modelos para seleccionar el que requiera menor cantidad de cartulina para fabricarlo. Los modelos que propone son los siguientes.

12 — 14.43 — Modelo 1 — Cantidad de cartón que se requiere para construir la pirámide cuadrangular:

15 — 22.14 — Modelo 2 — Cantidad de cartón que se requiere para construir la pirámide triangular:

10 — 13.2 — Modelo 3 — Cantidad de cartón que se requiere para construir la pirámide hexagonal:

a) Antes de hacer los cálculos, estimen qué modelo requiere mayor cantidad de cartulina para su fabricación y cuál menor cantidad ____________

b) Calculen la cantidad de cartulina que se requiere para cada modelo de envase. Anótenlas enseguida:
Modelo 1: ____________ Modelo 2: ____________ Modelo 3: ____________

c) ¿Cómo calcularon el área de cada una de las caras de los envases? ________

d) ¿Cómo calcularon el área de la cartulina que se requiere para cada envase?

e) ¿Acertaron en su estimación? ______ Discutan, en su caso, las razones de su acierto o de su error.

Argumenten y justifiquen la estrategia que usaron y comparen sus resultados con los de otros compañeros. Corrijan si fuera necesario.

Desafío

El cubo grande está formado por ocho cubos pequeños del mismo tamaño. Cada cubo pequeño tiene 54 cm² de área exterior. Encuentra el área exterior del cubo grande.

Figura 54. Tarea 5 de la lección 17 (Ángeles, Guerrero, Loyola y Preisser, 2015, p.49).

La resolución: En el inciso (a) se solicita estimar cuál de los dos modelos requiere mayor o menor cantidad de cartulina para la fabricación de la cartulina (***argumentos*** basados en los procedimientos).

La cantidad de cartulina requerida para el modelo 1 es de $346.32cm^2$, para el modelo 2 es $498.15cm^2$ y para el modelo 3 es $405cm^2$, dado que se conoce el número de caras en cada caso y que éstas son triángulos, se tiene que $A_1 = 4\left(\frac{12cm\times 14.43cm}{2}\right) = 346.32cm^2$, $A_2 = 3\left(\frac{15cm\times 22.14cm}{2}\right) = 498.15cm^2$y $A_3 = 6\left(\frac{10cm\times 13.2cm}{2}\right) = 405cm^2$(***procedimiento*** área de triángulos).

Al final de la tarea se piden ***argumentos*** y justificaciones respecto a los procedimientos y las estrategias implementadas en la resolución de la tarea, lo cual da lugar a la retroalimentación y a transitar a un ***lenguaje*** verbal.

En el desafío se solicita encontrar el área del cubo grande (A_G), para la resolución se tiene que tener en cuenta que un cubo tiene seis caras cuadradas iguales (***concepto*** de cubo). Además se sabe que el área del cubo pequeño (A_p) es igual a $54cm^2$ por tanto el área de una cara (A_c) está dada por $A_c = \frac{54cm^2}{6} = 9cm^2$, luego, como cada cara del cubo grande está formada por 4 cuadritos se tiene que el área de una cara del cubo grande es $36cm^2$, entonces $A_G = 6 \times 36 = 216cm^2$ (***concepto y procedimiento*** área de un cubo).

Tarea 6 de la lección 17

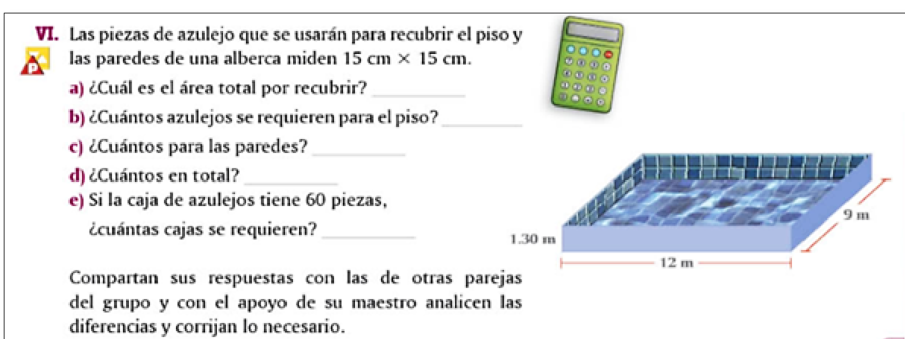


Figura 55. Tarea 6 de la lección 17 (Ángeles, Guerrero, Loyola y Preisser, 2015, p.49).

La resolución: cada pieza de azulejo mide $15cm$ de lados, es decir $1.5m$ (***procedimiento*** conversión de cm a m), por tanto su área es $A = 1.5m \times 1.5m = 2.25m^2$ (***concepto y procedimiento*** área de un cuadrado).

En el inciso (a) se requiere calcular el área total (A_T) por recubrir, obteniendo $A_T = 2(12m \times 1.3m) + 2(9m \times 1.3m) + (12m \times 9) \rightarrow A_T = 31.2m^2 + 23.4m^2 + 108m^2$ luego $A_T = 162.6m^2$ (***concepto y procedimiento*** áreas de figuras compuestas).

En los inciso s $(b), (c)$ y (d) se requiere encontrar cuántas piezas de azulejo se necesitan para recubrir el piso (P), las paredes (R) y toda la alberca, para esto es necesario calcular el cociente entre el área que se quiere recubrir y el área de cada pieza de azulejo, entonces $P = \frac{108m^2}{2.25m^2} = 48$ piezas para el piso, $R = \frac{54.6m^2}{2.25m^2} = 25$ piezas para las paredes (***procedimiento*** división de dos números). Por tanto, se necesitan 73 piezas de azulejo para recubrir toda la alberca. Esto implica que, si una caja de este material contiene 60 piezas, entonces se necesita comprar dos cajas.

Se pide compartir las respuestas entre los miembros de otras parejas y recibir retroalimentación de parte del profesor, esto da lugar a transitar de un ***lenguaje*** simbólico a uno verbal.

4.3.3. Objetos primarios identificados en las tareas

Este tercer libro presentó los contenidos de cálculo de áreas de figuras compuestas dosificados en 3 lecciones (15, 16 y 17). En la lección número 15 se encuentran cuatro tareas, todas ellas para trabajar su resolución en pareja. En la 16 se plantearon otras cuatro, pero esta vez, tres estaban diseñadas para trabajar en equipo y una en pareja. En la lección 17 se proponen seis tareas, una de ella es en equipo y las otras cinco en pareja.

En total se revisaron 14 tareas que atienden el cálculo de áreas de figuras compuestas, de las cuales, doce están en un contexto extramatemático y dos en el intramatemático. En la Tabla 4 se muestra que los objetos primarios (situaciones, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y el lenguaje) que estuvieron presentes en la resolución de cada una de ellas.

Es de desatacar, que los conceptos y procedimientos se pusieron en juego en la resolución de todas las tareas, así como el lenguaje gráfico, simbólico y verbal. Además, los argumentos que aparecen principalmente están basados en los conceptos y en los procedimientos. También, hay que decir que las propiedades están ausentes en dichas resoluciones. Por otro lado, estas tareas no propician la emergencia de objetos primarios, como se observa en la Tabla 4 todos aparecen de forma interviniente en las resoluciones.

Tabla 4.

Objetos primarios identificados en las tareas propuestas el libro 3

Situación Problema		**Conceptos**		**Propiedades**		**procedimientos**		**Argumentos**			**Lenguaje**		
		I	**E**	**I**	**E**	**I**	**E**	**C**	**Pp**	**Pc**	**V**	**S**	**G**
Lección 15	**Tarea 1** extramatemática que requiere calcular el área de un par de poliedros.	*				*				*	*	*	*
	Tarea 2 extramatemática donde se necesita calcular el área de figuras compuestas por polígonos y círculos.	*				*		*		*	*	*	*
	Tarea 3 extramatemática donde se calcula el área de una superficie rectangular y de un prisma triangular.	*				*		*		*	*	*	*
	Tarea 4 intramatemática donde se solicita calcular el área de varias figuras geométricas, siendo necesario dividiéndolas en polígonos más simple de calcular.	*				*					*	*	*
Lección 16	**Tarea 1** extramatemática en que se requiere calcular el área de figuras compuestas por rectángulos, círculos y rombos.	*				*					*	*	*
	Tarea 2 extramatemática donde se solicita calcular el área de una superficie, para lo cual debe ser dividida en varios polígonos.	*				*					*	*	*
	Tarea 3 intramatemática donde se pide calcular el área sombreada de ciertas figuras compuestas.	*				*					*	*	*
	Tarea 4 extramatemática donde se solicita calcular el área que se desperdicia al extraer círculos con diferentes diámetros.	*				*				*	*	*	*
Lección	**Tarea 1** extramatemática donde se calcula el área del desarrollo plano de un cubo (caras y pestañas).	*				*		*		*	*	*	*

	Tarea 2 extramatemática donde se calcula el área del desarrollo plano de un tetraedro (caras y pestañas).	*				*					*	*	*
	Tarea 3 extramatemática donde se calcula el área del desarrollo plano de un prisma triangular (caras y pestañas).	*				*					*	*	*
	Tarea 4 extramatemática donde se requiere comparar las áreas de los modelos calculados en lo incisos anteriores	*				*				*	*		
	Tarea 5 extramatemática en la que se solicita calcular las áreas de varias pirámides.	*				*				*	*	*	*
	Tarea 6 extramatemática en la que se pide calcular el área de una figura geométrica compuesta.	*				*					*	*	*

I: interviniente C: concepto V: verbal
E: emergentes Pp: propiedades S: simbólico
Pc: procedimientos G: gráfico

4.3.4. Configuración epistémica de las tareas

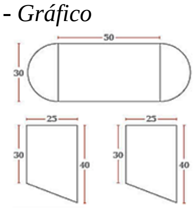
La siguiente configuración epistémica muestra la red de objetos intervinientes (no hay emergencia de objetos primarios) extraídas de la resolución de las tareas que abordan el cálculo de áreas de figuras compuestas en este tercer texto. Las situaciones propuestas son en su mayoría extramatemáticas, las cuales implican el cálculo de áreas de figuras planas, compuestas, prismas, pirámides y algunos poliedros (tetraedros, otros).

Es preciso decir, que debido a que las tareas incentivan reflexión colectiva entre estudiantes y el profesor, se produce un tránsito del lenguaje gráfico y simbólico a uno verbal. Además en varias de estas tareas más que exigir cálculos, solicitan argumentos de cómo se realizaron estos cálculos que permiten dar solución a las situaciones planteadas.

Lenguaje

-Simbólico
Fórmulas de área
Rectángulo: $A = b.h$
Triángulo: $A = \frac{b \times h}{2}$
Pentágono $A = h\frac{a+b}{2}$
Círculo: $A = \pi r^2$

- Gráfico



-Verbal
Se divide el cuadrilátero en dos triángulos escalenos congruentes, cuya base es $9cm$ y altura $4cm$. De manera que el área total es $36cm^2$.

Situación Problemática
Tareas extramatemáticas e intramatemáticas donde se requiere calcular áreas de figura planas, compuestas, cuerpos geométricos como prismas, pirámides y algunos poliedros (tetraedros y otros).

REGLAS

Conceptos
-Definición de varias figuras geométricas (rectángulo, triángulo, trapecio)
-Definición área de un polígono (triángulo, rectángulo, trapecio, paralelogramo, rombo)
-Definición de área de un círculo.
-Definición área de una figura compuesta de polígonos
-Definición de cuerpos geométricos (prismas, tetraedros, otros poliedros)

Propiedades
Propiedades de los polígonos y otras figuras geométricas.

Procedimientos
-Cálculo de áreas de figuras planas y compuestas
-Cálculo de áreas de círculos y semicírculos
-Cálculo de áreas de prismas (cubos) y poliedros (tetraedros y otros)
-Cálculo de áreas de pirámides (rectangular, triangular, hexagonal)
-Conversión de unidades (de cm a m)
-Cálculo de porcentaje
-División de dos áreas

Argumentos
Argumentos basados en conceptos y procedimiento, ejemplo:
-Para calcular el área de los modelos con formas de pirámides, se puede hallar el área de todas las caras que la conforman.
- El modelo 1 se observa que dos partes de la repisa son la mitad de un círculo cuyo diámetro es 30cm, entonces es posible usar la fórmula que permite calcular el área de un círculo.

Figura 56. Configuración epistémica de las tareas del libro 3.

Hay que agregar que estas tareas promueven la exploración y la argumentación de los estudiantes en la resolución de las mismas, puesto que en la mayoría de los casos no se pauta la forma de proceder, dándole libre albedrío para abordar las situaciones. Además, en las consignas suelen solicitarse las explicaciones que den cuenta de los procedimientos y estrategias puestos en juego en la resolución. Por otro lado, la mayoría de las tareas propuestas son extramatemáticas, y las situaciones planteadas puede que tengan sentido para un contexto próximo para el estudiante, lo cual puede representar una motivación para que ponga en juego diferentes objetos matemáticos en pro de la solución.

En forma general, las configuraciones epistémicas de los tres libros de texto (ver Figuras 20, 39 y 56) presentan *situaciones-problemas* tanto en contextos extramatemáticos como intramatemáticos. En cuanto al conjunto de reglas los tres libros, ponen en juego *conceptos y procedimientos* relacionados con figuras y cuerpos geométricos, sin embargo, los libros 2 y 3 se centran más en este último.

Las *propiedades* y los *argumentos* son los objetos primarios que menos promovidos durante la resolución de las tareas. Sin embargo, en el libro de texto 3 la mayoría de las tareas solicitan justificaciones y comprobaciones de los procedimientos realizados, por tanto, en este las tareas propician procesos de argumentación. Respecto de las formas de expresión usada en la resolución de las tareas, los lenguajes más usados en los tres libros de texto son el simbólico y el gráfico, pero en el libro de texto 3 además aparece el lenguaje verbal.

Es importante aclarar que las configuraciones epistémicas presentadas dan cuenta de las relaciones entre los objetos primarios puestos en juego durante la resolución del conjunto de tareas de los tres libros de texto, lo cual, permitió identificar las prácticas operativas y discursivas que podrían realizar los estudiantes al resolver las tareas, es decir, el significado institucional pretendido en las mismas. No obstante, la idoneidad epistémica de estas tareas se mostrará a detalle en el siguiente capítulo.

Capítulo 5
Valoración de la idoneidad epistémica de las tareas de cálculo de áreas de figuras compuestas

En este capítulo se presentan, en primer lugar, los criterios de idoneidad utilizados para valorar las tareas referidas al cálculo de áreas de figuras compuestas que proponen los libros de texto. Estos criterios son una adaptación y adecuación al tema que es foco de estudio, de acuerdo con lo propuesto en Godino (2013). Es preciso resaltar que estos criterios se establecen considerando los lineamientos curriculares de México, las actividades frecuentes que aparecen en los textos escolares (los cuales están adaptados al currículo escolar) e investigaciones en Matemática Educativa relacionadas con el objeto matemático, etc. En consecuencia, posibilita tener un instrumento que permite valorar la adecuación de las tareas que se proponen con base en el "trasfondo ecológico" de las prácticas que se analizan.

En segundo lugar, se muestra la valoración de la ideoneidad epistémica de las tareas que atienden este tema, y de esta manera dar cumplimiento al objetivo trazado en esta investigación.

5.1. Indicadores de idoneidad epistémica para la valoración del cálculo de áreas de figuras compuestas

En Godino (2013) se presenta un conjunto general de indicadores de idoneidad epistémica para cada componente del significado de un objeto matemático (situaciones, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos, lenguaje y relaciones) los cuales son útiles para determinar si los significados institucionales implementados o pretendidos son representativos del significado de referencia. En este trabajo, se han particularizado estos indicadores de idoneidad epistémica, de manera que sea posible valorar los contenidos relacionados con el cálculo de áreas de figuras compuestas.

Los criterios de idoneidad epistémica que propone el EOS para cada componente son enunciados que sirven para cualquier objeto matemático en estudio. No obstante, al tener un objeto matemático definido (en nuestro caso el cálculo de áreas de figuras compuestas) se hace necesario especificar cada criterio. Por tal razón, en la Tabla 5 se muestran los indicadores generales de idoneidad epistémica con base en Godino (2013), y bajo el título de criterios específicos (en letra negrita), se describen indicadores establecidos en esta investigación.

Tabla 5.

Componentes e indicadores de idoneidad epistémica para el tratamiento del cálculo de áreas de figuras compuestas

Componente	Criterios
Situaciones-problemas	*Criterios generales* ▪ Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. ▪ Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización). ***Criterios específicos*** ***Se deben abordar problemas de modo que:*** ▪ ***Las situaciones requieran realizar la estimación de la medida de ciertas superficies.*** ▪ ***Las situaciones permitan trabajar con unidades de medidas apropiadas para el rango de esta magnitud.*** ▪ ***Las situaciones posibiliten la exploración de diferentes técnicas y procedimientos para la medición de superficies.*** ▪ ***Las situaciones requieran realizar la medición de áreas de superficies con trasfondo social dominable para el estudiante.***
Lenguaje	*Criterios generales* ▪ Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismos. ▪ Nivel del lenguaje adecuado a los estudiantes para los que se dirige. ▪ Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación. ***Criterios específicos*** ▪ ***Nivel del lenguaje de las tareas es adecuado para los estudiantes de segundo de secundaria.*** ▪ ***Se promueve la utilización de representaciones gráficas, simbólicas y verbales en la resolución de las tareas.***
	Criterios generales

Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	▪ Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. ▪ Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado. ▪ Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos. ***Criterios específicos*** ▪ ***Se presentan con claridad los términos de área y superficie en el planteamiento de las situaciones.*** ▪ ***Se requiere el dominio e identificación de propiedades de las figuras planas y cuerpos geométricos necesarios para calcular la medida de sus superficies.*** ▪ ***Se necesita reconocer los atributos específicos de las figuras y cuerpos geométricos como número de lados, ángulos, número de caras iguales para el cálculo de sus áreas.*** ▪ ***Se suscita la exploración de distintos caminos para solucionar las situaciones que involucran la medida de superficies.*** ▪ ***Se plantean situaciones donde se requiera hallar la medida de superficies de diferentes figuras, poniendo en juego definiciones y propiedades de las mismas.*** ▪ ***Se componen y descomponen cuerpos geométricos para realizar las medidas de sus superficies exteriores.***
Argumentos	*Criterios generales* ▪ Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen. ▪ Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar. ***Criterios específicos*** ▪ ***Se solicitan explicaciones y comprobaciones de los procedimientos realizados para calcular el área de una figura compuesta.*** ▪ ***Se requieren descripciones y explicaciones de los métodos empleados para calcular el área de la superficie exterior de cuerpos geométricos.***
Relaciones	*Criterios generales* ▪ Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. ▪ Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas. ***Criterios específicos***

- ***Se corresponde el concepto de área de figuras compuestas con las propiedades, procedimientos, argumentos y el lenguaje puesto en juego en la resolución de las situaciones.***

5.2. La valoración de la idoneidad epistémica de las tareas

En este apartado se presenta la valoración de la idoneidad epistémica de las tarea de cálculo de áreas de figuras compuestas, es decir, establecer si las mismas son adecuadas desde el punto de vista epistémico, de acuerdo a la edad y el contexto de los estudiantes a los que están dirigidas. Aclarando que no se analiza si son resolubles, sino, si éstas tienen un sentido equivalente con los estándares internacionales o pruebas que se toman a nivel nacional, donde las tareas evidencian que un estudiante será capaz de resolverlas.

Por tanto, teniendo en cuenta el significado de referencia construido en el capítulo 3, el significado pretendido en las tareas analizadas (ver capítulo 4) y los criterios específicos establecidos para cada componente en el apartado anterior, ahora, se presenta la valoración de la idoneidad epistémica de las tareas de cada libro que atienden el cálculo de áreas de figuras compuestas.

Es preciso resaltar, que Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone (2017) mencionan que el significado (entendido como sistema de prácticas) y la configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos, permiten describir la actividad matemática, tanto desde el punto de vista institucional como personal. Por esta razón, las configuraciones determinadas a partir de la resolución en el cuarto capítulo, expresan bien el significado pretendido en el conjunto de tareas de dichos libros. De esta manera, además de valorar estas tareas haciendo énfasis en los criterios de idoneidad específicos establecidos, también se mira la representatividad del significado pretendido con respecto al de referencia, es decir, la representatividad entendida en términos de ver si dichas tareas contemplan todos los puntos que están establecidos en ese marco epistémico y didáctico de referencia, el cual se ve operativizado a través de los criterios de idoneidad epistémica.

5.2.1. Valoración de la idoneidad epistémicas de las tareas del libro 1

En primera instancia se presenta una tabla que describe las características de las tareas de este libro, de acuerdo con los criterios específicos planteados para cada componente en correspondencia con los criterios generales establecidos en el EOS que hace operativa la noción de idoneidad epistémica.

En este texto *"Matemáticas por competencias 2"* se propusieron 9 tareas que atienden el cálculo de áreas de figuras compuestas, sobre las misma se realiza la descripción, como se muestra en la Tabla 6.

Tabla 6.

Valoración de las tareas correspondiente al libro 1 de acuerdo a los criterios de idoneidad epistémica

Criterios generales	Valoración en correspondencia con el criterio específico establecido

Situaciones- problemas	-*Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación.*	Las tareas que se presentan corresponden principalmente a una muestra de situaciones articuladas con la ejercitación y aplicación al concepto en juego. En ninguna de las situaciones propuestas se requiere realizar la estimación de la medida de superficies, que es un criterio necesario cuando se abordan la medición de las superficies. En la mayoría de las tareas se trabaja con unidades de medidas apropiadas para el rango de esta magnitud, a excepción de la tarea 1en la que se pide calcular áreas de superficies que no tienen unidades de medidas en sus dimensiones, lo cual difiere del concepto de área como producto de dos magnitudes lineales. Debido a que las tareas están bastante pautadas se elimina la posibilidad de explorar diferentes métodos y procedimientos para resolver la situación. Lo cual, envía al estudiante a seguir las pautas y sugerencias del libro sin ser desafiados cognitivamente. Aunque varias de las tareas están en un contexto extramatemático, la mayoría tiene poco sentido para el estudiante, pues solo hay una clara intencionalidad netamente matemática de fondo. Por ejemplo en la tarea número 2 aparece “el Yin y el Yang” figura donde solo se requiere del uso de la fórmula para calcular el área de un círculo, de manera que se respondan las cuestiones planteadas. Asimismo, la tarea 8: la pirámide de Keops y la tarea 9: alcantarilla con tapa redonda muestran un trasfondo social que si bien pueden ser próximos para el estudiante, no son de interés para él.
	-*Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)*	En este texto no se proponen situaciones de generación de problemas (problematización) a lo largo de todo el conjunto de tareas. Como fue mencionado, éstas se encuentran centradas en la ejercitación y aplicación de fórmulas para calcular el área de ciertas superficies.
	Valoración	Este componente se valora con idoneidad epistémica baja

Lenguaje	-*Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismas.*	La mayoría de las tareas promueven la utilización de representaciones gráficas (presentes en las consignas y en la resolución de las misma), simbólicas (presentes en la implementación de las fórmulas y algoritmos) en la resolución de las tareas. El lenguaje verbal aparece poco, debido a que éstas se encuentran centradas en la utilización de las fórmulas y procedimientos de cálculo en dichas resoluciones.
	-*Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige.*	El lenguaje en el que se expresan las consignas es adecuado para estudiantes de segundo de secundaria, en el cual se ubica el contenido objeto de estudio.
	-*Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación*	Son escasas las tareas que proponen situaciones de expresión matemática e interpretación, solamente en las tareas 4 y 7 se pide escribir como se leen las fórmulas para calcular el área de un prisma y una pirámide respectivamente, lo que supone el tránsito del lenguaje simbólico al verbal.
	Valoración	Este componente se valora con idoneidad epistémica intermedia
Reglas (conceptos, proposiciones y procedimientos)	-*Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen.*	Los términos de área y superficie no se presentan con claridad, por ejemplo, en la tarea 2 se solicita la medida del área del círculo negro, en el que se identificó como un conflicto semiótico, puesto que los términos de área y superficie son tratados como homólogos. Es sabido que solo las superficies pueden ser medidas y el área es el resultado de esa medida.
	-*Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado.*	Estas tareas presentan los enunciados y procedimientos que son acordes con el contenido “la resolución de problemas que impliquen el cálculo de áreas de figuras compuestas, incluyendo áreas laterales y totales de prismas y pirámides”.
	-*Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos.*	La mayoría de las tareas no requieren del dominio e identificación de propiedades de figuras planas y cuerpos geométricos necesarias para calcular la medida de sus superficies, puesto que basta con el concepto de las mismas para realizar los cálculos. Es decir, es suficiente con el reconocimiento de los atributos específicos para el cálculo de sus áreas.
	Valoración	Este componente se valora con idoneidad epistémica intermedia

Argumentos	*-Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen.*	En su mayoría de las tareas no solicitan explicaciones y comprobaciones de los procedimientos realizados durante la resolución, sin embargo, en las tareas 3, 4, 7 y 8 se pide al final, comparar entre compañeros las respuestas y emitir algunas conclusiones e interpretaciones de lo realizado, lo que da lugar a la intervención de algunos argumentos que básicamente estarían basados en los procedimientos y los conceptos puestos en juego.
	-Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.	En este texto no se promueven propiamente situaciones donde el estudiante deba argumentar, sin embargo, de las 9 tareas presentadas para el tratamiento del cálculo de áreas de figuras compuestas, en cuatro, se piden explicaciones en las que pueden aparecer argumentos basados en conceptos y procedimientos.
	Valoración	Este componente se valora con idoneidad epistémica baja
Relaciones	*-Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí.*	Las relaciones entre el concepto de área y su cálculo aparecen a lo largo de todas las tareas, motivando la intervención de otros objetos primarios como procedimientos, argumentos y algunas propiedades relacionadas entre sí y expresadas mediante el lenguaje para resolver las situaciones planteadas. Esta relación se puede apreciar con claridad en la configuración epistémica establecida para las tareas de este texto en el capítulo 4.
	-Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas	Para resolver las tareas que implican el cálculo de áreas laterales y totales de prismas y pirámides, se requiere introducir la definición de los mismos. Sin embargo, en la tarea 3 se proporciona una definición errónea de prisma, que se convierte en una dificultad al momento de responder las cuestiones de la tarea. Asimismo, en la tarea 5 se presenta una definición inadecuada de pirámide, lo que hace confusas las preguntas posteriores (ver análisis de la tarea en el capítulo 4).
	Valoración	Este componente se valora con idoneidad epistémica baja

En cuanto a la representatividad del significado pretendido respecto al de referencia, en primer lugar, las tareas manejan la definición de área de una figura compuesta o combinada que coincide con la postura de Rich & Thomas (2009) quienes mencionan que el área de este tipo de figuras puede calcularse mediante la determinación de las áreas individuales seguida de la suma o la resta de las mismas, según resulte conveniente. Además, en la configuración epistémica de este libro (ver Figura 20) se aprecia que en la resolución de estas tareas se demanda poner en juego el concepto de áreas de figuras compuestas así como la realización de cálculos que requieren conocimiento básico sobre las características y propiedades de figuras planas y de las fórmulas para hallar sus áreas. Sin embargo, el hecho de que estas tareas prioricen procesos algorítmicos, que se presenten de forma pautadas y que no soliciten justificaciones y explicaciones de los procedimientos empleados, conlleva a que las tareas no sean ricas, hablando en términos del potencial matemático. Además, estas tareas no solicitan comparar áreas de superficies sin medirlas directamente o realizar estimaciones, que ayudan a interpretar las relaciones que sugiere el cálculo de dichas áreas (Itzcovich, 2005; MEN, 1998).

Es importante agregar, que durante el análisis del conjunto de tareas se encontraron conflictos semioticos relacionados con el concepto de área y superficies, además, aparecen otros relacionados con la deficinición de los cuerpos geométricos, como el de prisma y pirámides.

Por tanto, las tareas que atienden el cálculo de áreas de figuras compuestas en este libro, es valorado con idoneidad epistémica baja, puesto que no cumple con los ciriterios específicos establecidos y tampoco el significado pretendido no representa bien el significado de referencia.

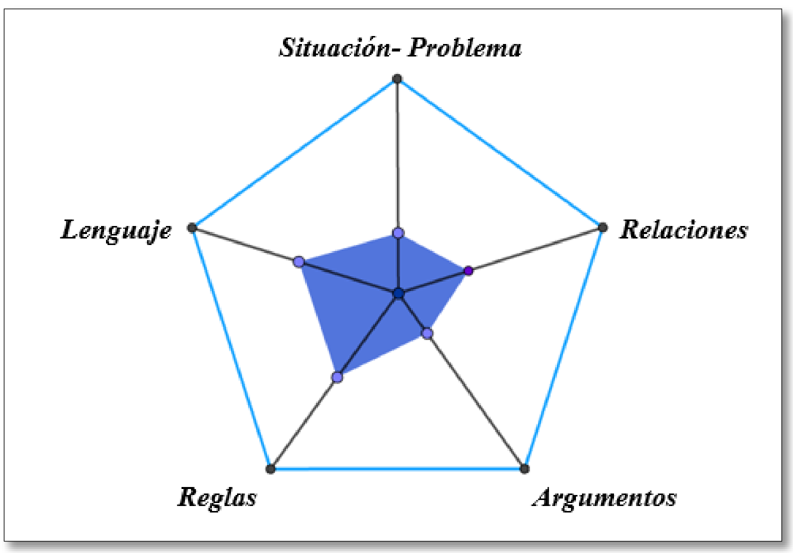


Figura 57. Gráfico de idoneidad epistémica del libro 1

En la Figura 57 se muestra el gráfico de idoneidad epistémica del libro 1, donde se aprecia que los tres componentes *situación- problema*, *argumentos* y *relaciones* son los que presentan baja valoración en este texto. Puesto que la mayoría de las situaciones son inapropiadas ya que no requieren de argumentación y exploración para promover las adaptaciones entre el significado personal y el significado de referencia. Además, las situación- problema motiva el uso de reglas y de lenguaje, lo que provoca deficiencias en estos componentes, que fueron valorados con idoneidad epistémica intermedia como se aprecia en la Figura 57.

5.2.2. Valoración de la idoneidad epistémicas de las tareas del libro 2

En este segundo texto *"convive con las matemáticas 2"* se presenta un conjunto de tareas que atienden el cálculo de áreas de figuras compuestas, de las cuales, la tarea 1 corresponde a "lo que sé" y consta de 9 partes, la tarea 2 a "practicando lo aprendido" con 5 partes, la tarea 3 "aplicando lo aprendido" que tiene 2 partes y la tarea 4 que corresponde a "evaluación tipo PISA" y tiene 2 partes. En la Tabla 7 se muestra la descripción de la valoración de estas tareas de acuerdo a los criterios de idoneidad epistémica establecidos.

Tabla 7.

Valoración de las tareas correspondiente al libro 2 de acuerdo a los criterios de idoneidad epistémica

	Criterios generales	**Valoración en correspondencia con el criterio específico establecido**
Situación problema	-*Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación.*	El conjunto de estas tareas constituye una muestra representativa de situaciones que están articuladas con la ejercitación y la aplicación del concepto en cuestión. En ninguna de estas tareas se solicita realizar procesos de estimación de áreas para resolver las situaciones planteadas. En estas tareas se trabaja con unidades de medidas adecuadas de acuerdo con las situaciones propuestas. En su mayoría estas tareas, no posibilitan la utilización de diferentes técnicas y procedimientos durante la resolución de las mismas, puesto que se plantean una variedad de situaciones que solo promueven el uso de fórmulas y procesos algorítmicos. El trasfondo social de las situaciones planteadas es cercana al estudiante y tienen sentido de acuerdo al contexto mexicano.

	-*Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)*	En este texto se presenta solamente una tarea para generar problematización, en ella se proporciona una figura y se solicita el planteamiento de un problema que pueda ser resuelto haciendo uso de la misma.
	Valoración	Este componente se valora con idoneidad epistémica baja
Lenguaje	-*Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismas.*	En la resolución de estas tareas predomina el uso del lenguaje simbólico, puesto que se promueve el uso de procedimientos y de las fórmulas, sin embargo, también aparecen los lenguajes gráfico, verbal, simbólico en otros.
	-*Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige.*	Estas tareas manejan un lenguaje acorde con el de segundo de secundaria.
	-*Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación*	La mayoría de las tareas están escritas en un lenguaje en el que aparecen expresiones matemáticas que están relacionadas con el objeto matemático estudiado, de manera que son fáciles de entender, y si bien algunas de éstas requieren de la interpretación de enunciados verbales, son apropiadas para el nivel escolar de los estudiantes.
	Valoración	Este componente se valora con idoneidad epistémica intermedia

Reglas (conceptos, proposiciones y procedimientos)	*-Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen.* *-Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado.* *-Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos.*	No se presentan con claridad los términos área y superficie, puesto que se identificaron conflictos semióticos en las tareas, cuando dichos términos son tratados como homólogos, por ejemplo, aparecen expresiones tales como “áreas de igual color” que dan cuenta de ellos. En la mayoría de las tareas se requiere el dominio e identificación de propiedades de las figuras planas y cuerpos geométricos necesarias para calcular la medida de sus superficies y dar solución a las situaciones planteadas. De las tareas de contexto extramatemático planteadas, algunas permiten distintos caminos de solución, mientras que otras solo priorizan el uso de fórmulas para realizar los cálculos. Las tareas planteadas del libro ponen en juego propiedades de figuras y cuerpos geométricos en la solución, por ejemplo: en la tareas “practicando lo aprendido” Parte 3(b), la única forma de calcular el área del dodecaedro es utilizando la fórmula correspondiente. Puesto que los datos proporcionados en el enunciado no son suficientes para hacerlo por descomposición del cuerpo geométrico. También se proponen tareas donde las figuras son compuestas y otras donde es necesario descomponer los cuerpos geométricos para realizar las medidas de su superficie exterior.
	Valoración	Este componente se valora con idoneidad epistémica intermedia
Argumentos	*-Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen.*	No se solicitan explicaciones y comprobaciones de los procedimientos realizados para calcular el área de una figura compuesta en las situaciones planteadas.
	-Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.	No se promueve directamente con las tareas espacios para argumentar los procesos empleados en las resoluciones, ni sobre los conceptos o propiedades puestos en juego durante la misma.
	Valoración	Este componente se valora con idoneidad epistémica baja

Relaciones	*-Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí.*	Se identificó que hay correspondencia entre el concepto de área de figuras compuestas con las propiedades, procedimientos, argumentos y el lenguaje puestos en juego en la resolución de dichas situaciones.
	-Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas	Debido que se proponen situaciones que implican el cálculo de áreas laterales y totales de prismas y pirámides, así como las de otros cuerpos geométricos (tetraedro, octaedro, dodecaedro, etc.) se requiere introducir en la definición de los mismos, lo cual es adecuado para promover aprendizajes significativos en los estudiantes.
	Valoración	Este componente se valora con idoneidad epistémica intermedia

Es importante mencionar que en las tareas del libro de texto 2 se maneja el concepto de área de una figura compuesta presentada por Rich & Thomas (2009). En cuanto el sistema de prácticas que pudiera realizar un estudiante al resolver estas tareas, se prioriza la ejercitación para llegar a la aplicación del concepto, lo que da lugar a que aparezcan diversas formas de expresión (gráfico, simbólico y verbal), asimismo la necesidad de conocer las propiedades de figuras y cuerpos geométricos.

También, se aprecia que, aunque las tareas no están tan pautadas, permiten elegir algunas formas de solución, sin embargo, hay ausencia de uso de procesos de estimación y comparación de áreas, considerados importantes para el cálculo de áreas en general.

Por otro lado, en este texto se identificó un solo conflicto semiótico, el cual está ligado al tratamiento homólogo de los términos área y superficie, que de acuerdo con Flores, Castro y Segovia (1997) es uno de los abusos del lenguaje que se presenta usualmente cuando se aborda el concepto de área.

De esta manera, las tareas que atienden el cálculo de áreas de figuras compuestas en el libro “convive con las matemáticas 2” es valorado con idoneidad epistémica Intermedia, puesto que si bien las situaciones- problemas no son las más adecuadas para lograr una proximidad al significado de referencia y promover el uso de los demás objetos primarios, se rescatan aspectos importantes sobre el uso del lenguaje, el conjunto de reglas y las relaciones (ver Tabla 7). Es importante agregar que los argumentos son los que menos se ponen en juego en la resolución estas tareas. En la Figura 58 se muestra el gráfico de la idoneidad epistémica del libro 2. En él se observa que los componente de situacion- problema y argumentos presentan baja idoneidad epistémica, mientras que el lenguaje, las relaciones y el conjunto de reglas presentan idoneidad epistémica intermendia.

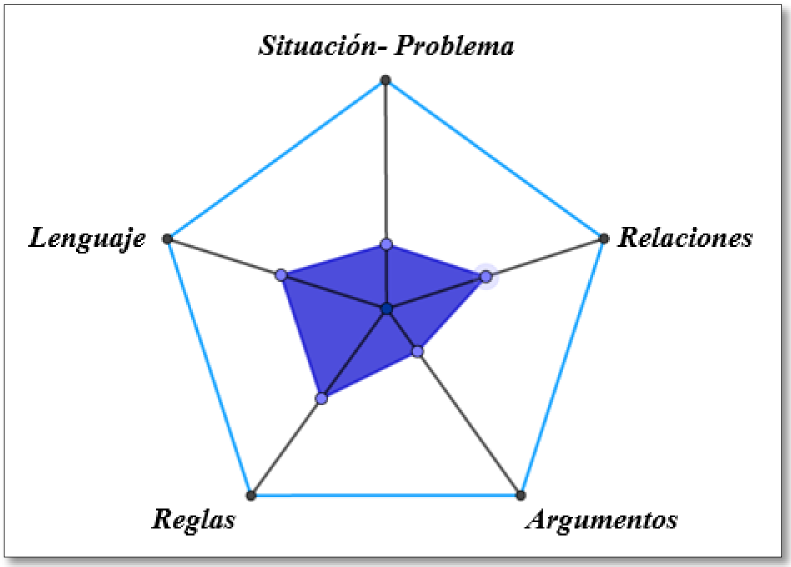


Figura 58. Gráfico de idoneidad epistémica del libro 2

5.2.3. Valoración de la idoneidad epistémicas de las tareas del libro 3

El tercer libro de texto presenta un conjunto de catorce tareas que atienden el cálculo de áreas de figuras compuestas, en la Tabla 8 se presenta la valoración de estas tareas, descritas en relación a los criterios específicos de idoneidad epistémica establecidos en esta investigación.

Tabla 8.

Valoración de las tareas correspondiente al libro 3 los criterios de idoneidad epistémica

Criterios generales	Valoración en correspondencia con el criterio específico establecido

Situación problema	-*Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación.*	El conjunto de tareas de este texto constituyen una muestra representativa de situaciones articuladas y contextualizadas, que responden a la ejercitación y aplicación del concepto de área de figuras compuestas. Las tareas requieren de la realización de comparaciones y estimaciones de áreas para resolver las diferentes situaciones planteadas en el texto. Utilizando unidades de medidas adecuadas y acordes a dichas situaciones. La mayoría de las tareas permiten la utilización de diferentes técnicas y procedimientos en su resolución, asimismo brindan la posibilidad de argumentar, lo que permite catalogar a éstas como ricas, considerando además el potencial matemático de las mismas. El trasfondo social de las situaciones planteadas es dominable y tienen sentido de acuerdo al contexto para el que son propuestos.
	-*Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)*	Se identifica que las situaciones planteadas, que son ricas, las cuales permiten transitar entre lo contextual, los procesos de ejercitación y la aplicación del concepto, sin embargo, no se presentan situaciones que posibiliten la generación de problemas.
	Valoración	Este componente se valora con idoneidad epistémica intermedia
Lenguaje	-*Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismas.*	En la resolución de estas tareas se ponen en juego diferentes contextos en cuanto a representaciones matemáticas, es decir, aparecen en las formas de expresión los lenguajes gráfico, simbólico y verbal.
	-*Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige.*	Las tareas manejan un lenguaje adecuado para el nivel de segundo de secundaria.
	-*Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.*	La mayoría de las tareas están escritas en un lenguaje que involucra expresiones matemáticas, relacionadas con el objeto matemático estudiado, de manera que son fáciles de entender, y si bien algunas de estas tareas requieren de la interpretación de enunciados verbales éstas son apropiadas para el nivel escolar de segundo de secundaria.
	Valoración	Este componente se valora con idoneidad epistémica alta

Reglas (conceptos, proposiciones y procedimientos)	*-Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen.* *-Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado.* *-Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos.*	Se presentan con claridad los términos área y superficie, de hecho, en este libro de texto no se identificaron conflictos semióticos relacionados con estos conceptos, ni con otros asociados con el área de figuras compuestas. La mayoría de las tareas requieren del dominio e identificación de propiedades de figuras planas y cuerpos geométricos necesarias para calcular la medida de sus superficies y dar solución a las situaciones planteadas. La mayoría de las tareas permiten diferentes caminos de solución, pues el hecho de que no están muy pautadas ofrece la posibilidad de explorar y argumentar. Las situaciones planteadas en este libro ponen en juego propiedades de las figuras y cuerpos geométricas durante la resolución de las tareas. También se proponen tareas que involucran figuras compuestas y otras donde es necesario descomponer las figuras y cuerpos geométricos para realizar las medidas de su superficie, donde se permite realizar las descomposiciones como se considere y resulte conveniente para solucionar la situación.
	Valoración	Este componente se valora con idoneidad epistémica alta
Argumentos	*-Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen.* *-Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.*	La mayoría de las tareas solicitan explicaciones y comprobaciones de los procedimientos utilizados para el cálculo del área de figuras compuestas con base en las situaciones planteadas, asimismo piden la realización de comparaciones entre compañeros y reflexionar en torno a las mismas. Varias de las tareas están propuestas para fines de ejercitación y otras para propiciar procesos relacionados con argumentar, explicar, justificar los procedimientos y las respuestas dadas en las situaciones planteadas.
	Valoración	Este componente se valora con idoneidad epistémica alta.

Relaciones	*-Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí.*	Se identificó que hay correspondencia entre el concepto de áreas de figuras compuestas con las propiedades, procedimientos, argumentos y el lenguaje puesto en juego en la resolución de dichas situaciones.
	-Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas.	Dado que se proponen tareas que implican el cálculo de áreas laterales y totales de prismas y pirámides, se requiere introducir definiciones de algunas figuras y cuerpos geométricos como base para lograr aprendizajes significativos.
	Valoración	Este componente se valora con idoneidad epistémica alta

En las tareas de este texto se maneja el concepto de área de una figura compuesta acorde con lo propuesto por Rich & Thomas (2009) quienes señalan que primero se hallan las áreas individuales, y seguidamente se suman o restan de la mismas, según sea conveniente. También las tareas del texto se corresponde con las formas para calcular el área de este tipo de figuras de acuerdo con Wentworth y Smith (2000), en donde se traza una de las diagonales largas y a partir de los vértices se bajan perpendiculares a ella, con lo que logra que el polígono quede dividido en polígonos como triángulos y/o trapecios fáciles de manipular, de manera que es posible calcular el área total de dicho polígono.

Debido a que no se encontraron conflictos semióticos potenciales en el conjunto de tareas propuestas para el cálculo de áreas de figuras compuestas y además se pone en juego una variedad de conceptos, procedimientos, propiedades, se solicitan argumentos para justificar los procesos empleados durante la resolución, se catalogan a las tareas propuestas en el libro "Matemáticas, habilidades y competencias 2" como ricas, considerando su potencial matemático.

En términos generales, las tareas que atienden el cálculo de áreas de figuras compuestas en este libro, son valoradas con idoneidad epistémica alta, lo anterior acorde con los criterios establecidos para cada componente, pues ponen en juego los seis objetos primarios de forma articulada y coherente, además del potencial matemático inmerso. Asimismo, las tareas representan bien el significado de referencia construido para este estudio.

En la Figura 59 se sintetiza lo antes mencionado. Cabe aclarar que si bien las tareas de este texto, se han valorado con idoneidad epistémica alta, en el componente de *situaciones-problemas* no aparecen tareas que busquen problematizar, por tanto este componente es intermedio. Sin embargo, son tareas idóneas porque en su conjunto ponen en juego los objetos primarios acordes con los criterios y al significado de referencia, es decir, el lenguaje, los argumentos, las reglas y las relaciones son adecuados con el significado de referencia y cumplen con los criterios específicos de idoneidad epistémica.

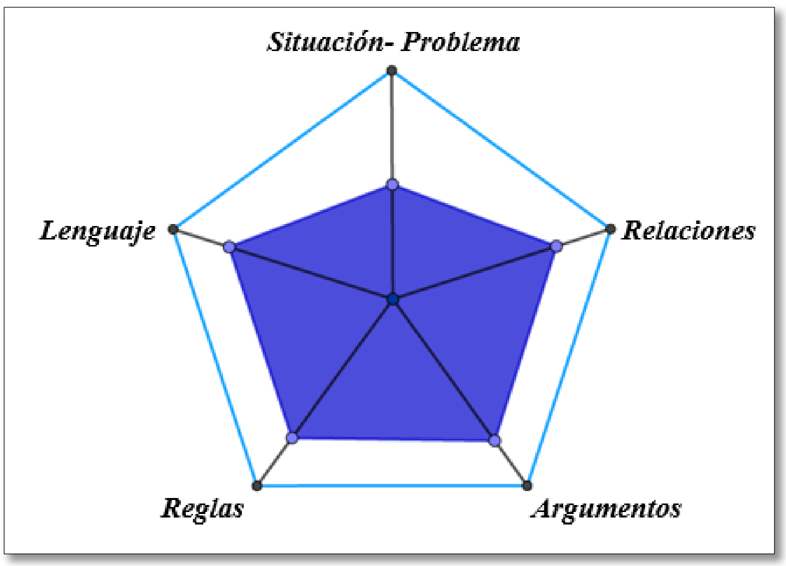


Figura 59. Gráfico de idoneidad epistémica del libro 3

Capítulo 6.
Reflexiones finales

6.1. Consideraciones generales

Durante el desarrollo de este trabajo de investigación se realizaron diferentes procedimientos para lograr el objetivo de valorar la idoneidad epistémica de tareas que atienden el cálculo de áreas de figuras compuestas, propuestas en los textos de secundaria en México. Por tanto, en este capítulo se presenta en primer lugar, reflexiones en torno a los objetivos específicos planteados que permitieron el cumplimiento del objetivo general y la respuesta a la pregunta de investigación. En segundo lugar, se exponen las dificultades y limitaciones de este estudio, para finalmente, presentar las proyecciones futuras de la investigación.

6.2. Determinación del significado institucional pretendido en relación con el significado de referencia del cálculo de áreas de figuras compuestas

Vale la pena aclarar que la noción de significado no se usa en el sentido habitual de la misma palabra, como definición de un objeto, sino la idea de significado de acuerdo con el EOS está asociada al conjunto de prácticas operativas y discursivas puestas en juego al resolver una situación- problema.

De este modo, el significado de referencia establecido en esta investigación permitió mostrar que el área ha sido uno de los conceptos matemáticos más importantes a través de la historia, ya que impulsó no solo estudios de tipo geométrico sino también del cálculo. Además, hay que agregar que la forma de enseñar este concepto favorece el desarrollo de habilidades y destrezas matemáticas, así como la construcción de otros conceptos matemáticos (Marmolejo y González, 2017). De esta manera, el cálculo de áreas en general, involucra procesos de comparación y estimación, así como habilidades tales como el razonamiento, la argumentación y la resolución de problemas al momento de enfrentar situaciones que implican este objeto matemático.

Con base en lo anterior, los significados asociados al concepto de área que fueron identificados fueron cuatro, 1) el área como cantidad de plano ocupado por la superficie, 2) el área como magnitud autónoma, 3) el área como número de unidades que recubren la superficie y 4) el área como producto de dos dimensiones lineales (Corberan, 1997). En cuanto al área de figuras compuestas se asumen dos posturas, la primera de Rich & Thomas (2009) que sugiere que estas áreas pueden calcularse mediante la determinación de las áreas individuales, seguidas de la suma o la resta de las mismas, según resulte conveniente. Y la segunda la de Wentworth y Smith (2000) quienes presentan un método utilizado para la agrimensura, que consiste en trazar una de las diagonales largas y de los vértices se trazan perpendiculares a ella, con lo cual la figura queda dividido en polígonos, cuyas áreas son fáciles de calcular y con ello determinar el área total.

Este significado de referencia permitió ampliar la mirada sobre el contenido áreas de figuras compuestas, asimismo, proporcionó el conocimiento necesario para determinar el significado instruccional pretendido por estos textos. El cual, se realizó a partir de la resolución de las tareas, desatacando los conceptos, propiedades, proposiciones, el lenguaje y los argumentos puestos en juego durante la resolución, de modo que en las configuraciones epistémicas se evidenciará la relación entre estos objetos matemáticos.

Los libros de texto analizados presentaron un significado pretendido que se corresponde con los señalados en el significado de referencia. En primer lugar, se resalta que el área como producto de dimensiones lineales es el concepto que tienen en común los tres libros de texto, en particular, se encontró que las tareas del libro 3 permiten abordar los conceptos de área como cantidad de plano ocupado por la superficie y el área como número de unidades que recubren la superficie. En cuanto al área de figuras compuestas, los tres libros de texto coinciden en la definición señalada por Rich & Thomas (2009), y solo el libro 3 presenta tareas que pueden ser resueltas mediante el método propuesto por Wentworth y Smith (2000).

Es preciso resaltar, que conocer el significado pretendido en estas tareas, permitirá la utilización de las mismas que son representativas del significado de referencia y que ponen en juego una variedad de objetos primarios, de manera que puedan ser incluidas dentro de las actividades planificadas para la enseñanza de este concepto. Asimismo, permitirá el rediseño de aquellas tareas que no se ajusten al significado de referencia, de modo que propicie durante la resolución, el trabajo con los objetos primarios adecuados para mejorar el aprendizaje respecto del área de figuras compuestas, acordes con los lineamientos curriculares.

6.3. El establecimiento de criterios de idoneidad epistémica específicos

La revisión bibliográfica tanto de antecedentes como del significado de referencia permitió el establecimiento de los criterios de idoneidad epistémica, específicos para la valoración de las tareas sobre el cálculo de áreas de figuras compuestas.

Estos criterios particularizan los establecidos por Godino (2013), pero realizando especificaciones en relación con el cálculo áreas de figuras compuestas. Para ello, fue importante la revisión de documentos curriculares en donde señalan los procesos necesarios para que se dé un buen aprendizaje de este concepto, por ejemplo, la estimación de superficies sin encontrar directamente el área (ver criterios específicos en la Tabla 5, en el capítulo 5).

Para Godino (2013) el establecimiento de criterios específicos para el tratamiento de los conceptos matemáticos en general, es el punto de partida para la teoría de la instrucción matemática orientada hacia la mejora progresiva de la enseñanza. Aquí radica la importancia de dichos criterios, puesto que son útiles no solo para valorar las tareas de los tres libros analizados, sino que pueden utilizarse para la valoración de todos aquellos textos que planteen tareas para el tratamiento del área de figuras compuesta. Asimismo, estos criterios proporcionan aspectos relevantes para el diseño y/o adaptaciones de tareas de áreas de figuras compuestas dotadas de alta idoneidad epistémica.

En esta investigación los criterios de idoneidad epistémica específicos permitieron realizar la valoración de las tareas que atienden el cálculo de áreas de figuras compuestas. Como se ve en la Figura 60 los resultados obtenidos revelan que los tres libros de textos tienen idoneidades epistémicas diferentes, el libro 1 presentó baja valoración en los componentes de situación- problema, argumentos y relaciones, e intermedia en el resto de los componentes, lo que implicó una valoración general baja en idoneidad epistémica. En el mismo sentido los resultados muestran que el libro 2 presenta baja idoneidad en los componentes situación-problema y argumentos, sin embargo, en los componentes lenguaje, reglas y relaciones se identificó idoneidad epistémica intermedia. Por tanto, la valoración general de las tareas de este texto fue idoneidad epistémica intermedia. Mientras que para el libro 3, la mayoría de los componentes resultaron con alta idoneidad epistémica a excepción del componente situación- problema que fue intermedia, de modo que las tareas de este libro, se catalogaron con idoneidad epistémica alta.

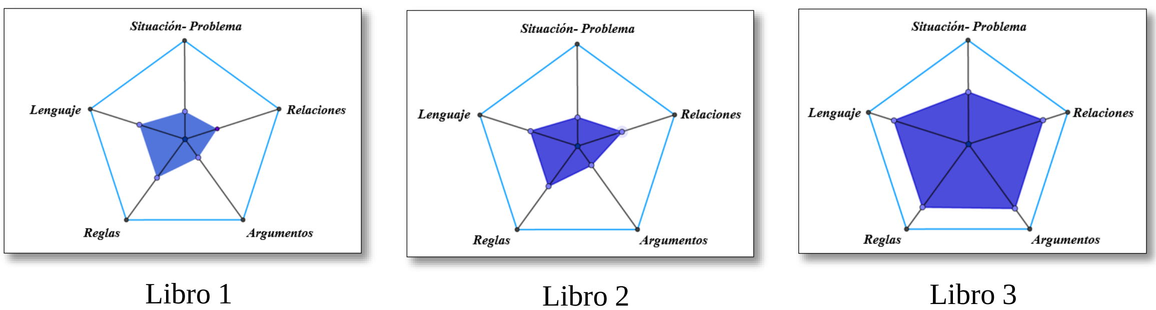


Figura 60. Gráficos de valoración de la idoneidad epistémica de los tres libros

Cabe destacar, que la idoneidad epistémica baja de una tarea podría relacioanrse con la aparición de conflictos semióticos, por ejemplo en los libros 1 y 2 se encontraron algunos relacionados con los conceptos de área y superficie. Este hecho, incidió sobre la idoneidad epistemica del componente situación- problema, debido que un criterio específico es determinar sí se presenta con claridad los términos área y superficie en la tarea.

6.4. Características de las tareas de cálculo de áreas de figuras compuestas

En este trabajo de investigación se pretendió responder ¿Qué características presentan las tareas que atienden el cálculo de áreas de figuras compuestas, propuestas en los libros de texto de matemáticas de la educación secundaria en México? A partir de la valoración de las mismas bajo los constructos teóricos del enfoque ontosemiótico.

Por tanto, fue posible establecer las características de las tareas que atienden el cálculo de áreas de figuras compuestas, teniendo en cuenta las valoraciones de la idoneidad epistémica del conjunto de dichas tareas presentadas en los libros de textos analizados, las cuales se describen a continuación:

- Tareas ricas con idoneidad epistémica alta. Son situaciones- problemas tanto intramatemáticas como extramatemática, donde para calcular el área de las figuras compuestas no basta con conocer las fórmulas establecidas, pues se requiere el conocimiento de las cualidades de las figuras planas y cuerpos geométricos. Asimismo, para resolver estas tareas se necesitan activar procesos matemáticos que permitan elegir y explorar diferentes caminos de solución, generar explicaciones, comprobaciones y argumentos sobre los procedimientos, conceptos y proposiciones empleados en el cálculo de dichas áreas. Por otro lado, estas tareas requieren de la comparación y estimación de las áreas de figuras compuestas, siendo estos procesos los que podrían permitir una mejor enseñanza de este concepto, lo cual, posibilitó el transito entre diferentes formas de expresión en la resolución (gráfico, simbólico y verbal). Por ejemplo, la mayoría de las tareas del libro 3 se encuadran en esta categoría.
- Tareas con idoneidad epistémica intermedia. Son situaciones- problemas que para el cálculo de las áreas de las figuras compuestas propician la aparición objetos primarios como conceptos, propiedades y procedimientos, sin embargo, debido a que son pautadas (guiadas) le quitan la posibilidad de explorar diferentes caminos de resolución, limitando las soluciones al uso de fórmulas, sin realizar sumas o restas de áreas parciales para calcular las áreas totales de las figuras o cuerpos geométricos dados. En estas tareas no se requieren procesos de estimación de áreas, aunque las situaciones permiten algunas comparaciones entre áreas de diferentes superficies. Se pueden ver algunos ejemplos en las tareas que proponen los libros 1 y 2.
- Tareas con idoneidad epistémica baja. Son situaciones- problemas que están centradas en procesos algorítmicos, donde no es necesario componer o descomponer las figuras y/o cuerpos geométricos para calcular sus áreas, puesto que los datos proporcionados sugieren solo el uso de fórmulas correspondientes. Es decir, en estas tareas se prioriza el cálculo del número que representa la cantidad de superficie, sin poner en juego procesos de estimación, comparación de áreas, justificaciones, comprobaciones o argumentos acerca de los procedimientos empleados en la resolución. Es de resaltar, que se encontraron tareas de tipo extramatemático, que si bien presentan situaciones relacionadas con la realidad u otras disciplinas, solo tienen la intencionalidad de poner

en juego algún algoritmo rutinario, que en un contexto real no sería planteado (véanse las tareas del libro 1).

De forma general, los resultados obtenidos en esta investigación son importantes para el profesor de matemáticas, debido a que el cálculo de área de figuras compuestas es un concepto donde los estudiantes de secundaria presentan dificultades, por lo cual, debe ser de su conocimiento los conflictos semióticos que presentan las tareas propuestas en los textos para el tratamiento de este, así como el conocimiento de conceptos, propiedades, procedimientos, el lenguaje y los argumentos que se pueden promoverse con dichas tareas, sean idóneas o no. Por otro lado, los resultados aportan criterios específicos útiles no solo para la valoración de tareas que traten este concepto sino para el diseño de nuevas situaciones con alta idoneidad epistémica, de modo que se continúe ampliando la investigación en este campo.

6.5. Dificultades y limitaciones de la investigación

Una dificultad enfrentada durante esta investigación fue la escasa literatura, no se reportan muchos trabajos que hagan referencia al cálculo de áreas de figuras compuestas. Incluso, en la mayoría de los libros clásicos de geometría dicho tema, aparece implícito cuando se aborda el concepto general de área. De modo que se tornó complicada la construcción del significado de referencia, necesario para la valoración de las tareas.

Asimismo, se puede decir que se presentaron algunas dificultades para determinar el significado pretendido en las tareas, puesto que para el investigador resultó complejo asumir una postura desde la perspectiva del estudiante frente a la resolución de dichas tareas, el hecho de "pensar como ellos" y utilizar los conceptos previos acordes con su nivel de escolaridad. El hecho de revisar los documentos curriculares de secundaria, fue fundamental para identificar los conocimientos previos a considerar para la resolución.

6.6. Perspectivas futuras

Es posible ampliar este estudio analizando si los significados pretendidos en las tareas encontradas idóneas, se encuentran en la zona de desarrollo potencial de los estudiantes, es decir, indagar sobre la proximidad entre los significados personales logrados y los significados pretendidos/implementados (valorar la idoneidad cognitiva).

Estudiar que tanto las herramientas de análisis y valoración permiten a profesores de matemáticas en servicio, desarrollar habilidades y competencias para el análisis de textos, el diseño y/o rediseño de tareas con alta idoneidad epistémica y con ello incidir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en general.

Sería pertinente analizar un proceso de instrucción completo, donde se establezcan relaciones entre la idoneidad epistémica de los textos y el estilo de clase del profesor, de manera que se estudie y se valore la idoneidad didáctica del proceso. En consecuencia, se podrían investigar acerca de los factores que inciden en el desarrollo de prácticas instruccionales, a propósito de un objeto matemático.

Referencias bibliográficas

Ángeles, J., Guerrero, R., Loyola, E., & Preisser, R. (2015). *Matemáticas 2, habilidades y competencias.* México: Ángeles Editores S.A.

Arriaga , A., & Benítez, M. (2016). *Matemáticas 2 por competencia.* México.: Pearson Educación.

Aguilar, R., & Iglesias , M. (2013). La Geometría de los Cuadrilateros en los Libros de Textos de Educación Primaria. *Paradigma, 34*(2), 151-173.

Arana, R. (2016). *Diseño y análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de la circunferencia.* Ciudad Obregón, México: ITSON Educar para Enseñar .

Baldor, J. (2004). *Geometría plana y del espacio y trigonometría.* México,D.F: Grupo Patria Cultural, S.A.

Barrantes, H., & Araya, J. (2010). Competencias matemáticas en la enseñanza de la medida. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 6*(5), 39-62.

Barrantes , M., López, M., y Fernández, M. (2015). Análisis de las Representaciones Geométricas en los Libros de Textos. *PNA, 9*(2), 107-127.

Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T., Pochulu, M., & Rodríguez, M. (2017). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y el la investigación en educación matemática.* Los Polvorines, Argentina: Ediciones UNGS..

Castro, E., Flores, P., & Segvia, I. (1997). Relatividad de las fórmulas de cálculo de superficies de figuras planas. *Suma, 26*, 23-32.

Corberán, R. (1996). *El área: recursos didácticos para su enseñanza en Primaria* . México

Cruz, A., Gea, M., & Giacomone, B. (2017). Criterios de idoneidad epistémica para el estudio de la geometría espacial en educación primaria. *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-10). Granada, España: Universidad de Granada.

Flores, P. (2002). Superficie y área. En Guías Praxis para el profesorado de ESO. Matemáticas, Contenidos, Actividades y Recursos. G.P.P. Junio, 2002, Puesta al Día número 12, p. 56/75-56/101.

Font, V., & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Revista Educação Matemática Pesquisa, 8*(1), 67-98.

Gamboa, R., & Ballestero, E. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática., 4*(5), 113- 136.

García, A. (2014). *El uso del libro de texto de matemáticas en el aula. Revisión del estado actual de la cuestión.* Granada, España: Universidad de Granada. Obtenido de http://hdl.handle.net/10481/36188.

García, S., & López, O. (2011). La Enseñanza de la geometría. Materiales para apoyar la práctica educativa. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación

Godino D, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Matethématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática.* Granada. Obtenido de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D., Batanero, C., & Roa, R. (2002). *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros* . Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada .

Godino, J., y Arrieche, M. (2001). *El Análisis Semiótico como Técnica Para Determinar Significados* . Granada, España: Universidad de Granada .

Godino D, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Matethématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática.* Granada. Obtenido de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22*(23), 237-284.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8*(11), 111-132.

Godino, J. D. (2014). *Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: motivación, supuestos y herramientas teóricas.* Universidad de Granada. Obtenido de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/sintesis_EOS_2abril2016.pdf

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 10*, 7-37.

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M., & Lurduy, O. (2009). *Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics and Mathematics Education.* 3rd Meeting. Aristotle University of Thessaloniki.

Gonzáles, M. T., y Sierra, M. (2004). Metodología de Análisis de Libros de Texto de Matemáticas. Los Puntos Criticos en la Enseñanza Secundaria En España Durante el Siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(3), 389- 408.

González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *SUMA*(45), 17-28.

Guillén Soler, G., Gonzáles Quiza, E., & García Moreno, M. A. (2009). Criterios Específicos Para Analizar la Geometría en Libros de Texto Para la Enseñanza Primaria y Secundaria Obligatoria. Análisis Desde los Cuerpos de Revolución. En J. Gonzáles , M. Gonzáles , & J. Murillo, *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 247-258). Santander : SEIEM.

INEE (2015). (25 de Septiembre de 2017). *Resultados nacionales 2015. 6° de primaria y 3° de secundaria. Lenguaje y Comunicación. Matemáticas.* Obtenido de Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA): http://www.inee.edu.mx/images/stories/2015/planea/final/fasciculos-finales/resultadosPlanea-3011.pdf.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría. De las construciones a las demostraciones.* Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Jiménez-Gestal, C., & Blanco, L. (2017). El teorema de PICK como pretexto para la enseñanza de la Geometría con Estudiantes para Maestro. *Números, 94*, 7-21.

Luelmo, M. (2001). Medir en Secundaria: algo más que fórmulas. En FESPM (Ed.), *X Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, (pp. 727-737). Zaragoza.

Marmolejo, G., & González, M. (2015). El área de superficies planas en el campo de la educación matemática. Estado de la cuestión . *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias , 10*(1), 45-57.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas. Serie lineamientos curriculares.* MEN. Bogotá, Colombia.

Navarro, C. (2015). *libros mexicanos de te textos gratuitos, reforma 2011: el caso de los numeros naturales y numeros fraccionarios (Tesis doctoral).* México: Universidad Autonoma de Guerrero.

Oliver , M., Rocerau , M., Valdez , G., Vilanova , S., Medina , P., Astiz , M., & Laviada , M. (2003). Análisis del Tratamiento de Algunos Temas de Geometría en Textos

Escolares Para el Tercer Ciclode la Educación General Básica. *Revista Iberoamericana de Educación, 31*(1), 1-8.

Parzysz, B. (1988). Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics, 19*, 79-92.

Pochulu, M., Font, V., & Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la Competencia en Análisis Didáctico de Formadores de Futuros Profesores de Matemática a Través del Diseño de Tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 19*(1), 71-98.

Quijano, M., González, A., & Castillo, J. (2015). *Convive con las Matemáticas 2. Segundo grado de educación secundaria.* México: Méndez Cortéz Editores S.A. de C.V.

Rich, B., & Thomas, C. (2009). *Geometry* (cuarta ed.). New York: Schaum's Outline Series.

Rico, L., Castro, E., & Romero, I. (2000). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras númericas . En J. Beltrán, *Intervención psicopedagógica y curriculum escolar* (págs. 153-182). Madrid : Pirámide.

Rivera , S. (2016). *Análisis ontosemiótico del área bajo la curva como introducción a la Integral Definida.* Ciudad Obregón, Sonora.: IPSON educar para Transcender.

Struik, D. (1998). *Historia concisa de las matemáticas* . México, D.F: Consejo Editorial del Instituto Politecnico Nacional.

Wentworth, J., & Smith, E. (2000). *Geometría plana y del espacio* . México : EDITORIAL PORRUA .