UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

LA CONSTITUCIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS COMO DISCIPLINA DE LA MATEMÁTICA: UN ANÁLISIS HISTÓRICO- EPISTEMOLÓGICO

TESIS PRESENTADA POR:
SARA MARCELA HENAO SALDARRIAGA

PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRÍA EN CIENCIAS ÁREA: MATEMÁTICA EDUCATIVA

DIRECTORES DE TESIS:
DRA. FLOR MONSERRAT RODRÍGUEZ VÁSQUEZ
DR. LUIS CORNELIO RECALDE

POSGRADO EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

México
México, Julio de 2016

A Rafael, Teresa, Lyda y Duvan por el apoyo incondicional en cada momento.

Mi agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt), por el apoyo académico y económico durante el proceso de formación en mi maestría en tan prestigiosa institución.

Número de Becario: 628363

Agradecimientos

Mis agradecimientos primeramente a Dios por darme las fuerzas cada día; al doctor y amigo Luis Recalde, por las largas discusiones alrededor de la historia de las matemáticas y la epistemología de los conceptos. A la doctora Flor Monserrat por sus valiosas observaciones a la tesis; a la doctora Guadalupe Cabañas, por confiar en mí y por compartir sus conocimientos; a mis docentes de maestría: Catalina Navarro, Luis Capistrous, Miguel Cardenas y Gustavo Martínez, por contribuir a mi formación profesional; a mis compañeros: Virginia Salazar, Esteban Mendoza y Luis Miranda por el apoyo académico y emocional. Finalmente quiero agradecer especialmente a mi familia y a mi amigo Jhonny Alfredo Vanegas, quienes confiaron en mí y me alentaron a continuar, cuando parecía que me iba a rendir, gracias de todo corazón.

CONTENIDO

Resumen

Esta investigación tiene como objetivo realizar un análisis histórico-epistemológico de la constitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias. En concordancia con este objetivo se analizan algunas fuentes primarias y secundarias; entre estas se encuentran, resultados publicados en el volumen 22 de *Opera Omnia* y artículos de la *Acta Eruditorum* realizados entre finales del siglo XVII y mediados del XVIII. Uno de los aspectos claves de la investigación tiene relación con la discusión histórica sobre la naturaleza de la diferencial y sus implicaciones en el establecimiento de algunas técnicas algorítmicas que dieron lugar a procedimientos generales para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. El análisis epistemológico de los diferentes momentos históricos permitió identificar algunos obstáculos epistemológicos y analizar sus implicaciones en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Abstract

This research aims to make a historical-epistemological analysis of the constitution of ordinary differential equations. In line with this objective we analysed some primary and secondary sources; among these are published in Volume 22 of *Opera Omnia* and articles of the *Acta Eruditorum* made between the late seventeenth century and the middle of the eighteenth. One of the key aspects of the research is related to the historical discussion about the nature of the differential and its implications for the establishment of some algorithmic techniques leading to general methods for solving ordinary differential equations. The Epistemological analysis of the different historical moments allowed us to identify some epistemological obstacles and analyze its implications in teaching ordinary differential equations.

INTRODUCCIÓN

A finales del siglo XVII y comienzos del siglo XVIII algunos matemáticos (Newton, Leibniz, Jacques Bernoulli, Jean Bernoulli y Jacopon Riccati) se interesaron por resolver diversos problemas del campo de la física, entre ellos: el problema del péndulo isócrono, el problema del movimiento planetario, y los problemas del campo de la elasticidad. Estos problemas abrieron el camino para que las ecuaciones diferenciales empezaran a conformarse como una disciplina de la matemática.

En la presente investigación nos propusimos realizar un análisis histórico-epistemológico del desarrollo de las ecuaciones diferenciales ordinarias, con el fin de identificar algunos elementos de causalidad que posibilitaron la emergencia de esta rama de la matemática. Bajo estas consideraciones se analizaron algunos resultados publicados en las *Actas Erudita*,[1] entre finales del siglo XVII y mediados del siglo XVIII. Estos siglos fueron seleccionados ya que durante los mismos se presentó la revolución científica y con ella la creación de diversas disciplinas de la matemática, entre ellas, el cálculo y las ecuaciones diferenciales. En las diferentes publicaciones de las *Actas Erudita* se presentan algunos problemas que motivaron el surgimiento de las ecuaciones diferenciales ordinarias, y eventualmente las técnicas que llevaron a la solución. A su vez, se revisaron algunas obras de Newton y Leibniz que pusieron en evidencia técnicas y procedimientos formales de las matemáticas, utilizados en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Se considera que desarrollar trabajos en historia y epistemología de conceptos matemáticos, permite el diseño de propuestas que dan respuestas a problemáticas vinculadas al campo de la Educación Matemática (Anacona, 2003). En particular, la elaboración de un análisis histórico epistemológico de las ecuaciones diferenciales ordinarias posibilitaría el diseño de materiales curriculares y la creación de actividades que vinculan las estructuras matemáticas con fenómenos de la sociedad que dieron origen a las ecuaciones, logrando de esta manera fomentar procesos como

[1] Del latín: Acta Eruditorum

la modelación y la resolución de problemas característicos de la construcción de conocimientos matemático.

En el primer capítulo se abordan elementos generales de la investigación. Se describe el objetivo, la importancia de desarrollar un análisis histórico epistemológico de las ecuaciones diferenciales ordinarias y se reflexiona sobre dos tendencias en las propuestas de enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Igualmente se describen algunos aspectos metodológicos de la investigación.

En el segundo capítulo se estudia algunos problemas físicos que posibilitaron el planteamiento de las primeras ecuaciones diferenciales ordinarias. En particular, se analiza los problemas del péndulo isócrono, la tractriz, la catenaria y la braquistócrona. La solución de cada problema deja entrever la naturaleza de los objetos con los que se trabaja y pone en evidencia las primeras técnicas para solucionar ecuaciones diferenciales ordinarias.

En el tercer capítulo se aborda algunas técnicas que surgen para solucionar ecuaciones de orden superior. Además, se discute una de las técnicas más usadas durante los siglos XVII y XVIII, la solución por series. Los trabajos elaborados por Euler, Riccati, y Lagrange fueron las unidades de análisis principales para este capítulo.

En el cuarto capítulo se realiza un breve recorrido histórico sobre la evolución del teorema de existencia y unicidad. Partiendo de la versión moderna presentada en Braun (1990) se pone en contraste las primeras versiones elaboradas de este teorema. Entre ellas se encuentran la planteada por Cauchy y Lipschitz. Años posteriores Liouville propone otra versión de este teorema y finalmente se discute la de Picard.

En el quinto capítulo se presentan las conclusiones epistemológicas y didácticas del estudio histórico de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Uno de los resultados más importantes de esta investigación, tiene relación con la discusión histórica sobre la naturaleza de la diferencial y sus implicaciones en el establecimiento de algunas técnicas algorítmicas que dieron lugar a procedimientos generales para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Con respecto al análisis didáctico se discute algunos obstáculos epistemológicos que eventualmente se presentan en la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones. Igualmente, se pone de manifiesto la importancia de promover procesos y razonamientos matemáticos específicos. Finalmente, se realiza una reflexión sobre la transposición didáctica de las ecuaciones diferenciales ordinarias en los libros de texto.

CAPÍTULO I

Descripción del proyecto de investigación

"No es verdad que las llamadas "matemáticas abstractas" sean tan difíciles. (...) No creo que haya por un lado un pequeño número de personas extrañas capaces de comprender las matemáticas y por las otras personas normales. Las matemáticas son uno de los descubrimientos de la humanidad. Por lo tanto no pueden ser más complicadas de lo que los hombres son capaces de comprender."

Richard Feynman

1.1 Contextualización y formulación del problema

Durante los siglos XVII y XVIII fueron diversos los avances que se dieron en el campo de las matemáticas. Uno de ellos, se vincula con el desarrollo del cálculo de Newton y Leibniz. El nacimiento de este cálculo permitió que se perfilaran diversas disciplinas de las matemáticas, entre ellas las ecuaciones diferenciales, y otros conceptos fundamentales como el de función.

Los orígenes del cálculo se remiten a las matemáticas griegas, en particular al tratamiento de cuadraturas y cubaturas. El anterior problema, que inició en el campo de la geometría con los griegos, sería trasladado al siglo XVII en términos de encontrar áreas bajo una curva. La herramienta creada por Descartes, la geometría analítica, fue fundamental en la transformación de este problema geométrico al campo analítico. La geometría analítica permitió el tratamiento algebraico de diversos problemas geométricos heredados de la cultura griega. De esta manera, en el siglo XVII se logró identificar las curvas mediante expresiones analíticas (Bos,1975). Otro de los catalizadores del cálculo fue el uso recurrente de los infinitesimales para hallar tangentes, áreas volúmenes y resolver problemas físicos. Ambos aspectos, geometría analítica e infinitesimales, posibilitaron la emergencia del cálculo y el surgimiento de las posteriores disciplinas como es el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

El libro de John Wallis *Arithmetica infinitorum* (*Aritmética de los infinitos*) de 1655 se constituye en uno de los principales antecedentes del cálculo integral. Los procedimientos que se exponen en esta obra se sustentan en los desarrollos de la geometría analítica de Descartes y en el método de los indivisibles de Cavalieri. Wallis incorporó un formalismo para el tratamiento de los indivisibles de Cavalieri, el cual lo llevó a transformar el problema geométrico de encontrar cuadraturas, a un problema analítico de hallar áreas bajo una curva. El trabajo de Wallis inspiró a Newton en la creación del cálculo, pues las ideas del desarrollo del binomio y otras iniciales sobre el cálculo tuvieron sus orígenes en esta obra. Igualmente, las enseñanzas de Isaac Barrow influyeron en Newton, particularmente los métodos desarrollados por Barrow para encontrar tangentes y cuadraturas inspiraron a su alumno Newton.

Newton se interesó por diversos aspectos del cálculo; entre ellos, el tratamiento de series, los procedimientos algorítmicos para hallar cuadraturas y la formalización de los procesos infinitesimales a través de la visualización de las variables como expresiones del movimiento en función del tiempo. Por su parte, Leibniz también estudió algunos problemas de tangentes y cuadraturas logrando obtener los mismos resultados que Newton. En paralelo con Leibniz, pero de manera independiente, Newton desarrolló una primera versión del teorema fundamental del cálculo en el que se mostraba que la derivación y la integración eran conceptos inversos. Un aspecto importante a resaltar es que la noción de curva que utilizaba tanto Leibniz como Newton era distinta, sin embargo los resultados fueron los mismos. Por ejemplo, en el caso de Leibniz en su versión del teorema fundamental del cálculo utilizó una ecuación diferencial ordinaria y su método de transmutación; por su parte Newton usó el desarrollo del binomio. Ambos científicos recurrieron a la geometría y al uso de infinitesimales para lograr obtener las primeras versiones del teorema fundamental del cálculo.

Los desarrollos en el cálculo se convirtieron en un catalizador que posibilitó el surgimiento de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Por ejemplo Newton, en una de las diversas cartas enviadas a Leibniz, le planteó el siguiente problema: "dada una ecuación con cantidades fluentes determinar las fluxiones y viceversa". [2] Claramente este problema constituye una gran aporte a la emergencia de las ecuaciones diferenciales (Nápoles & Negrón, 2002). Esta carta data del 11 de noviembre de 1675 y coincide con el planteamiento de la ecuación $\int y\,dy = \frac{y^2}{2}$ por parte de Leibniz. Dicho escrito no constituye la solución de una ecuación diferencial, pero establece la

[2] Del latín: data aequetione quotcunque fluentes quantitaes involvente fluxiones inveniere et viceversa

incorporación de una nueva herramienta para abordar la solución de ecuaciones diferenciales, a saber, el signo de la integral.

Vinculado con los problemas de tangentes, surge el denominado problema inverso de la tangente, es decir encontrar una curva a partir de las propiedades de sus tangentes. Este mismo problema, pero ahora desde la física, fue otro factor que motivó el surgimiento de las ecuaciones diferenciales ordinarias, pues muchos de los fenómenos que estudiaban los científicos a finales del siglo XVII se modelaban con ecuaciones diferenciales, las cuales exigían un tratamiento matemático en el que se lograrà encontrar la curva que solucionaba el problema. Fue precisamente el desarrollo del cálculo lo que permitió establecer procedimientos formales y técnicas que daban solución a las ecuaciones diferenciales ordinarias que surgían de la modelación de fenómenos físicos.

En el siglo XVII el estudio del movimiento ocupó un papel fundamental en las investigaciones de los científicos europeos; la necesidad de cambiar de paradigma cualitativo a uno cuantitativo en el que se lograra estudiar desde lo matemático los fenómenos físicos posibilitó que emergieran las primeras ecuaciones diferenciales ordinarias. La física se relacionó tan directamente con las matemáticas que llegó un momento en el que los avances de esta ciencia provenían de los requerimientos de la física.

Algunos de los problemas que permitieron la constitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias se pueden ubicar a finales del siglo XVII y comienzos del siglo XVIII. Los matemáticos de estos siglos intentaron dar respuestas a problemas de la física vinculados con el campo de la mecánica, la elasticidad y la astronomía, entre otros. Uno de los primeros problemas que históricamente se conoce y que dio lugar al planteamiento de una ecuación diferencial ordinaria fue el problema de la curva isócrona, el cual fue abordado por Huygens utilizando métodos geométricos y propiedades de la física; posteriormente fue solucionado por Leibniz y Jacques Bernoulli quienes utilizaron el cálculo infinitesimal. Otros problemas fundamentales en la constitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias fueron: el problema de la tractriz, el problema de la catenaria y el problema de la braquistócrona, todos estos problemas fueron solucionados por Leibniz, los hermanos Bernoulli y Newton mediante el uso del cálculo infinitesimal. Algunos de los métodos y técnicas que surgieron de la solución de estos problemas fueron la separación de variables y el uso de series.

Todos los anteriores acontecimientos muestran que las ecuaciones diferenciales ordinarias, surgen como producto de dos eventos; el primero vinculado con los diversos problemas de la física que fueron modelados mediante ecuaciones diferenciales ordinarias, y el segundo relacionado con los diversos métodos de resolución de ecuaciones producto de los avances en el cálculo.

A mediados del siglo XVIII, las ecuaciones diferenciales ordinarias ya se habían convertido en una disciplina independiente y la resolución en un fin en sí mismo, desvinculada de los problemas del campo de la física (Kline, 1992), puesto que, ya existía un amplio campo de métodos asociados con la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Todo este panorama histórico muestra que las *ecuaciones diferenciales ordinarias,* en un principio, dependían de los problemas que surgían en el campo de la física, y más aún, fue la resolución de dichos problemas los que posibilitaron la teorización y creación de esta nueva disciplina de la matemática. Así mismo, es importante señalar que las ecuaciones diferenciales ordinarias emergen paralelamente con los desarrollos en el cálculo. Surgen entonces, la pregunta problema objeto de esta investigación:

¿Cuáles fueron los factores epistemológicos vinculados con el desarrollo del cálculo y la modelación de problemas físicos, que posibilitaron el surgimiento y constitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias como una disciplina en la matemática?

1.2 Objetivos

General

- Desarrollar un análisis histórico de los aspectos epistemológicos que posibilitaron el surgimiento y constitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias como una disciplina en la matemática, tomando como referencia los desarrollos del cálculo y la modelación de problemas físicos.

Específicos

- Determinar los aspectos generales en el desarrollo del cálculo de Newton y Leibniz que aportaron a la constitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

- Analizar algunos problemas del campo de la física que aportaron a la constitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

- Identificar los conceptos, las técnicas y procedimientos formales utilizados por algunos matemáticos en la constitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

El cumplimiento de los anteriores objetivos se realiza mediante el análisis de algunos aspectos externalistas e internalistas que posibilitaron la constitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias como un campo disciplinar en las matemáticas.

1.3 Justificación

Investigaciones en el campo de la Educación Matemática han señalado la importancia de realizar estudios históricos epistemológicos de los conceptos matemáticos (Jankvist, 2009; Tzanakis & Arcavi, 2000; Bakker & Gravemeijer, 2006; Anacona, 2003). Estas investigaciones distinguen dos tendencias vinculadas a los aportes de la historia en el campo de la Educación Matemática, la primera asociada a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y la segunda vinculada con la formación inicial y continua de los docentes.

Con respecto a la primera tendencia, Farmaki y Paschos (2007) señalan que el uso de la historia en la enseñanza de las matemáticas puede constituirse en un factor de motivación para los estudiantes en su aprendizaje, puesto que contribuye a mantener el interés y el entusiasmo de los alumnos en la asignatura. En el mismo sentido, Bakker y Gravemeijer (2006) discuten que un enfoque de la enseñanza basado en elementos históricos muestra unas matemáticas más humanas y menos atemorizantes, puesto que permite hacer consientes a los estudiantes que el mismo concepto matemático con el que ellos tiene dificultad actualmente también lo fue en una época para los matemáticos.

Anacona (2003) pone en evidencia que la reflexión histórica de un concepto matemático muestra elementos lógicos y epistemológicos importantes en el proceso de constitución teórica, posibilitando una mayor comprensión por parte de los estudiantes de las nociones y de la actividad matemática que dio origen a los conceptos. De ahí la importancia de que los docentes tomen en cuenta la historia en sus propuestas educativas.

En relación con la formación docente, un estudio histórico y epistemológico le permite al docente evidenciar ciertos problemas en la constitución de los conceptos matemáticos, es decir posibilita la determinación de obstáculos epistemológicos que eventualmente se pueden presentar en el aprendizaje de dichos conceptos (Jankvist, 2009). Un obstáculo epistemológico se entiende como un conocimiento anterior que tiene sentido en un contexto determinado, pero que obstaculiza el aprendizaje de un conocimiento nuevo en otro contexto; estos obstáculos están presentes en el surgimiento de los conceptos matemáticos, y en consecuencia los científicos se enfrentaron a estos obstáculos al momento de constituir teóricamente alguna noción matemática. La determinación de este tipo obstáculos permite, por un lado, que los docentes tomen conciencia de la complejidad en la construcción de algunos conceptos matemáticos y, por otro, se constituye en el punto de partida para pensar y diseñar actividades escolares (Jankvist, 2009).

En el mismo sentido, Tzanakis y Arcavi (2000) argumentan que un docente que estudie la historia de las matemáticas se da cuenta que las matemáticas no son un producto ya acabado y perfecto, sino que por el contrario, son el resultado de una actividad humana permeada por distintas disciplinas y momentos históricos, sociales y culturales específicos. En esta dirección, los fenómenos que dieron origen a los conceptos matemáticos pueden constituirse en el punto de partida para diseñar estrategias de enseñanza, en las que se propongan materiales y actividades que vinculen la historia (Tzanakis & Thomaidis, 2000; Tzanakis & Arcavi, 2000). Este tipo de actividades permiten que los estudiantes desarrollen estrategias y herramientas matemáticas que posibilitan la utilización de sus conocimientos escolares en la resolución de problemas con sentido, promoviendo de esta manera procesos similares a los desarrollados por los matemáticos en la construcción de estructuras y conceptos matemáticos (Graveimejer & Terwuel, 2000; Anacona, 2003).

De acuerdo a las anteriores consideraciones, se puede deducir que un estudio histórico-epistemológico de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias aporta a la discusión y solución de las problemáticas emergentes en el campo de la Educación Matemática. Específicamente brinda herramientas para diseñar tanto actividades como cursos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, y ofrece elementos para la formación de los docentes.

1.4 Antecedentes

En la última década algunos investigadores en el campo de la Educación Matemática se han dedicado a estudiar enfoques para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. En particular, es posible identificar dos tendencias en las propuestas de investigación: vincular la modelación y el uso de tecnologías en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales (Rasmussen & King, 2000; Chaachoua & Saglam, 2005; Rodríguez, 2010), y utilizar los diferentes registros de representación como medios para el aprendizaje de este concepto (Ju & Kwon, 2007; Habre, 2012).

1.4.1 Enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales mediante el proceso de modelación y la incorporación de tecnologías

En conjunto las siguientes investigaciones muestran que el proceso de modelación matemática y la incorporación de tecnologías en las clases posibilitan el aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales.

Rasmussen y King (2000) desarrollan una investigación en la que el proceso de modelación posibilita el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Esta propuesta se fundamenta en el enfoque de Educación Matemática Realista (EMR), y busca, a partir de contextos cercanos a los estudiantes, abordar la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. En esta dirección, los autores dejan entrever la importancia de iniciar el proceso de aprendizaje desde contextos cercanos a los estudiantes (en el sentido imaginables en la mente), pues de esta manera se logra que los alumnos reinventen la matemática involucrada en la situación. El medio para aprender el concepto de ecuación diferencial es la modelación de situaciones, en las que los estudiantes construyen métodos de solución y técnicas que los matemáticos encontraron en su momento histórico. Las actividades propuestas por Rasmussen y King (2000) buscaban que los estudiantes construyeran técnicas gráficas y numéricas para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias con ayuda de la calculadora simbólica gráfica TI-92. Una de las actividades consistía en entregarle a los estudiantes una ecuación diferencial que modelaba el crecimiento de peces en un estanque ($\frac{dP}{dt} = K * P(t)$) la idea era que aproximaran el número de peces en el estanque en los siguientes meses de acuerdo a unas condiciones establecidas, además debían tabular y graficar los resultados. Los autores concluyen que mediante esta propuesta los estudiantes involucrados en la investigación lograron construir su propio método de Euler para aproximar la función solución de la ecuación diferencial.

Esto con la ayuda de un software que posibilitó la visualización de las gráficas, sus manipulaciones y el reconocimiento de relaciones matemáticas.

Rasmussen, Kwon, Allen, Marrongelle y Burth (2006) desarrollan una nueva investigación sobre un curso de ecuaciones diferenciales orientado a la investigación (IO-DE), esta propuesta tenía como propósito explorar las diferencias entre un curso tradicional de ecuaciones diferenciales (centrados en la presentación de técnicas) y curso de IO-DE. En correspondencia con este objetivo, los investigadores fundamentaron su propuesta en el enfoque de la EMR. Dentro este enfoque se considera la reinvención guiada como el proceso mediante el cual los estudiantes construyen su conocimiento con la ayuda de sus pares y la orientación del maestro. En esta dirección, es fundamental que los estudiantes justifiquen todos los procesos realizados con sus compañeros, de aquí que las discusiones con los pares son un factor determínate en la construcción de conocimiento. Algunos instrumentos importantes en este estudio fueron las encuestas y las evaluaciones (rutinaria y conceptual) realizadas tanto a los cursos de IO-DE como a los cursos tradicionales. Los resultados obtenidos de estos instrumentos permitieron la comparación de ambos cursos. Con respecto a la evaluación rutinaria, las actividades propuestas consistían en cinco problemas de naturaleza analítica, un problema numérico para construir el método de Euler y un problema de modelación. Rasmussen et al. (2006) concluye que los resultados de ambos grupos (IO-DE y tradicional) no variaron demasiado en la evaluación rutinaria excepto en la actividad en la que tenían que construir el método de Euler. Este resultado se justificaba en el hecho de que el curso de IO-DE se sustentaba en el proceso de reinvención guiada. La evaluación conceptual consistía en dos problemas centrados en el significado y relaciones entre las soluciones exactas y aproximadas, y dos problemas de modelación. Los resultados de ambos grupos en esta evaluación fueron casi los mismos; Sin embargo, un seguimiento posterior a los participantes mostró que los estudiantes del curso IO-DE tenían mayor comprensión de las ecuaciones diferenciales después de un año de asistir al curso.

Chaachoua y Saglam (2006) señalan que el proceso de modelación ocupa un papel fundamental en el aprendizaje matemático, y por lo tanto es necesario incorporarlo en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. De igual manera, los investigadores argumentan que existe una estrecha relación entre el campo de las Matemáticas y la Física, siendo la modelación el proceso que posibilita este vínculo. A partir de los anteriores argumentos Chaachoua y Saglam (2006) elaboran una propuesta de enseñanza para las ecuaciones diferenciales sustentada en fenómenos físicos que motivaron la emergencia de este concepto matemático en el siglo XVII. Específicamente, plantean una situación asociada a un circuito eléctrico RLC (capacitador inductancia y resistencia), puesto que este fenómeno se modela mediante ecuaciones diferenciales, además de ser una situación que motivó el surgimiento de este concepto. De igual modo, y con el propósito de estudiar las técnicas de solución de las ecuaciones diferenciales, proponen algunos ejercicios que exigen el uso de los diferentes métodos analíticos de resolución de ecuaciones. La actividad planteada en este estudio consistía en encontrar la solución de la ecuación diferencial $y''(t) + 2\lambda y'(t) + \omega^2 y(t) = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$ en la que se satisficiera las condiciones iniciales cuando las constantes λ y ω fueran iguales y números reales positivos. Posteriormente se mencionaba que esa ecuación diferencial modelaba la descarga de un condensador C en un circuito en serie con una inductancia L y una resistencia R, bajo estas condiciones se cumplía que $2\lambda = \frac{R}{L}$ y $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. El objetivo era analizar la solución de la ecuación diferencial a la luz del circuito RLC y realizar una gráfica de este comportamiento. En términos generales las actividades planteadas en esta investigación buscaban que los estudiantes reconocieran que las ecuaciones diferenciales modelaban diversos fenómenos del campo de la electrocinética. Algunos resultados de Chaachoua y Saglam (2006) se asocian con la necesidad de conectar el estudio de las ecuaciones diferenciales con problemas de otros campos de conocimiento como la física o la química.

En la misma línea de argumentación sobre la importancia de vincular las matemáticas con la física, mediante la modelación, Rodríguez (2010) realiza una propuesta en la que identifica dificultades en los estudiantes al enfrentarse a situaciones de modelaje en contextos que involucran el uso de ecuaciones diferenciales. Específicamente, diseña una situación experimental en la que plantea un circuito eléctrico RC, a partir del cual se genera la discusión en torno a solución de una ecuación diferencial que modela la situación. Esta propuesta se fundamenta en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y busca incorporar la modelación en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. Para ello, en un primer momento, Rodríguez (2010) realiza una revisión a algunos libros de texto matemáticos y físicos, en los que encuentra tareas recurrentes para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Particularmente, señala la ausencia de diversas tareas (no habituales) que involucran la creación de modelos matemáticos, la transición entre la situación real y el modelo pseudo concreto, y la confrontación entre el modelo pseudo concreto y el modelo realidad. A partir del primer análisis se implementa una situación experimental con tareas no habituales, lo cual posibilitó la identificación de la influencia de las praxologías en los procesos de aprendizaje de los estudiantes. La situación consistía en modelar el comportamiento de un desfibrilador cardíaco que actuaba en el cuerpo de un hombre; es decir los estudiantes debían dibujar el circuito eléctrico que diera cuenta de la situación, escribir la ecuación diferencial correspondiente y analizarla en relación con la situación. De la puesta en escena de esta actividad se tiene que los estudiantes presentan diferentes dificultades en el proceso de modelación, entre ellas, representaciones incompletas de los circuitos, olvidan algunas leyes de la física, mal planteamiento de la ecuación diferencial, y la falta de comprensión en la determinación de los valores iniciales cuando no son explícitos en el problema.

1.4.2 Enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales mediante el uso de los registros de representación.

Ju y Kwon (2007) proponen desarrollar un curso de ecuaciones diferenciales orientado a la investigación (IO-DE)[3], en el cual la discusión grupal y los procesos argumentativos ocupan un papel fundamental en la construcción de conocimiento. En este contexto el docente es quien orienta estas discusiones a partir del planteamiento de problemas contextualizados, a saber: el enfriamiento de una taza de café y la descripción del movimiento de un objeto a partir de su gráfica. Los diferentes registros de representación como el analítico, gráfico, numérico y cualitativo son esenciales para la discusión de los problemas, pues es a partir del análisis en cada uno de estos registros que se logra encontrar la solución a las situaciones. De igual modo, las tecnologías facilitaron el proceso de visualización, el cual fue fundamental para la solución de las actividades. Las actividades consistían en modelar situaciones cercanas a los estudiantes mediante ecuaciones diferenciales, analizar el comportamiento de los modelos en diferentes registros de representación y argumentar como el proceso que posibilito la solución del problema. Esta investigación muestra que un trabajo sustentado en un curso IO-DE permite trasformar el discurso y las creencias de los estudiantes frente al conocimiento matemático, pues ya no se encuentra ajeno a ellos, sino que por el contrario hace parte de la cotidianidad.

Por su parte, Habre (2012) admite que el uso de múltiples representaciones de un objeto matemático (simbólica, verbal, gráfico y numérico) dentro de una situación de resolución de problemas, conlleva a grandes ventajas, entre ellas al aumento en la comprensión del concepto. Ahora bien, esta propuesta pone de manifiesto que escribir en matemática exige vincular todas las representaciones de un concepto, de aquí que la escritura en matemática puede considerarse al mismo tiempo como una representación única y la conjunción de todas las representaciones. Las ventajas de

[3] El curso de ecuaciones diferenciales orientado a la investigación es una metodología de enseñanza propuesta por Rasmussen (2000).

trabajar mediante el proceso de escribir en clase de matemáticas, no está dada por la actividad real de escritura, sino al hecho de que se requiere que los estudiantes pasen un tiempo pensando en ideas matemáticas y luego las comuniquen a los demás. Desde esta perspectiva, Habre (2012) propone abordar el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales haciendo uso de problemas que involucraban el análisis de las gráficas de funciones. En esta dirección, los estudiantes deben escribir todas sus explicaciones y justificaciones que les permitieron hallar la solución de la situación, logrando de este modo comprender el fenómeno planteado. Igualmente las tecnologías ocupan un papel fundamental en esta investigación, pues facilita aspectos visuales. Entre las actividades propuestas en este estudio se encuentra el planteamiento de una grafica $\frac{dy}{dt} = f(y)$ en la que se debía explorar las soluciones de equilibrio y la solución que satisficiera ciertas condiciones iniciales. Habre (2012) concluye que la escritura es un medio que permite vincular las representaciones analíticas y geométricas de las ecuaciones diferenciales, posibilitando una mejor comprensión por parte de los estudiantes de los conceptos matemáticos.

Por otra parte, Arslan (2010) manifiesta que existen dos tipos de aprendizaje en matemáticas, conceptual y procedimental, el primero implica la comprensión y la interpretación de los conceptos y las relaciones que se puedan establecer en ellos, el segundo exige la memorización de operaciones sin la comprensión de significados subyacentes. A partir de estas definiciones se establece la importancia de abordar el estudio de las ecuaciones diferenciales mediante un aprendizaje conceptual, puesto que el procedimental es consecuencia del primero. Igualmente Arslan (2010) en su estudio señala que a pesar de existir diversas investigaciones para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales estas siguen centrándose en los aprendizajes procedimentales.

Todas las anteriores investigaciones muestran nuevas propuestas de enseñanza para abordar el estudio de las ecuaciones diferenciales, pero dejan de lado el trabajo alrededor de algunos aspectos epistemológicos de este concepto, tales como la relación con la emergencia del cálculo, pues se centran en el proceso de modelación el cual hace parte de los factores que posibilitaron la constitución de las ecuaciones diferenciales, pero los aspectos conceptuales vinculado al cálculo quedan resumidos en técnicas sin ningún sentido. De aquí, como lo señalan diferentes investigadores (Castro, Castro, & Torralbo 2013, Anacona 2003, Vasco, 1994) es necesario elaborar propuestas orientadas a estudiar factores epistemológicos que muestren tanto las relaciones matemáticas como fenomenológicas de la emergencia de un concepto matemático. En particular, en el campo de las ecuaciones diferenciales. En este sentido, en Nápoles et al. (2004) desarrollan una propuesta de intervención para un curso de ecuaciones diferenciales ordinarias fundamentado en un análisis histórico; sin embargo este estudio deja ver la necesidad de continuar y profundizar en el campo de la epistemología de las ecuaciones diferenciales ordinarias, pues se constituye en un medio para realizar propuestas de enseñanzas basadas en un aprendizaje conceptual.

1.4.3 Estudios sobre historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Algunos investigadores se han interesado por desarrollar estudios sobre historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Entre los trabajos más destacados se encuentran Nápoles (1998) y Nápoles et al. (2004). En la primera investigación Nápoles realiza un análisis histórico sobre la emergencia y desarrollo de las ecuaciones diferenciales ordinarias, posteriormente estudia la trasendencia del campo de las ecuaciones diferenciales en las matemáticas y otras ciencias. En esta misma linea, la segunda investigación presenta una propuesta para enseñar ecuaciones diferenciales ordinarias basada en la historia y desarrollo de este campo disciplinar.

Nápoles (1998) manifiesta que el desarrollo de las ecuaciones diferenciales se dio simultáneamente con la emergencia del cálculo variacional propuesto por Newton y Leibniz. Uno de los hechos que sustenta la afirmación de Nápoles se presenta en el año de 1675, cuando Newton en las *Actas Eruditum* propone a Leibniz resolver ecuaciones con cantidades fluentes dada las fluxiones y viceversa. De igual forma, los problemas del campo de la mecánica en el siglo XVII posibilitaron el planteamiento de ecuaciones diferenciales junto con las técnicas de solución. Una de las primeras técnicas que Nápoles (1998) reporta en su trabajo es la separación de variables realizada en 1691 por Leibniz, esta técnica fue utilizada tanto por los creadores del cálculo como por sus discípulos. En años posteriores surgieron otras técnicas como el uso de series de potencia, multiplicación por un factor integrante y reducción del orden de una ecuación. Sin embargo hasta inicios del siglo XVIII no se podía hablar de una teoría general de las ecuaciones diferenciales.

Fue en los años 20 del siglo XVIII cuando iniciaron aparecer resultados más generales como el estudio de la ecuación $\frac{dy}{dx} + ay^2 = b^\alpha$ $(\alpha, a, b \text{ son constantes})$ por el matemático Riccati, encontrando la integrabilidad en funciones elementales de esta ecuación. Otros matemáticos como Euler y Daniel Bernoulli, también se interesaron por esta ecuación. Nápoles (1998) pone de manifiesto que en los años 30 del siglo XVIII, Euler desarrolló un algoritmo de solución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, utilizando la reducción de orden de ecuaciones homogéneas con la ayuda de la función exponencial. Euler siguió elaborando diversos aportes al campo de las ecuaciones diferenciales utilizando la función exponencial. Fue en los años 1768-1770, en *Instituciones calculi integralis*, donde Euler presentó la primera sistematización de los trabajos elaborados alrededor de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Nápoles (1998) concluye que a partir de la constitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias fue posible avanzar en nuevas disciplinas de las matemáticas como teoría de las singularidades, los fractales y la teoría de las catástrofes.

De otra parte Nápoles et al. (2004) retoma el estudio histórico para diseñar un curso de ecuaciones diferenciales ordinarias. Particularmente señala que es importante partir de la resolución de problemas y trabajar el significado de las soluciones de una ecuación diferencial desde tres ámbitos, algebraico, numérico y geométrico. Asimismo Nápoles et al. (2004) señalan la importancia de incorporar las herramientas tecnológicas en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, puesto que permite visualizar diversas propiedades de este campo disciplinar.

En síntesis, durante este capítulo se reflexiona sobre las diversas propuestas elaboradas para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. En sentido, se pone de manifiesto que la mayoría de propuestas se centran en promover aprendizajes procedimentales, olvidando los conceptuales. Una vía para diseñar propuestas de enseñanza centradas en aprendizajes conceptuales, es mediante la elaboración de estudios históricos-epistemológicos de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

1.5 Método histórico

La investigación histórica en el campo de la Educación Matemática involucra principalmente tres etapas. La primera comprende la identificación y limitación de una problemática, es decir la elección de un tema que será objeto de reflexión. La segunda, se relaciona con la organización y selección de los datos o documentos que serán las unidades de análisis y; la tercera constituye la elaboración de un informe de investigación (Cohen & Manion, 2002).

Con respecto a la primera etapa, se realizó un análisis de los documentos que abordan la discusión sobre el surgimiento y desarrollo de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Entre los artículos estudiados se encuentran los capítulos 21 y 29 de Kline (1992) y los estudios desarrollados por Nápoles y sus colaboradores. Estos documentos permitieron la identificación de una problemática en la constitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

En la segunda etapa se estudiaron algunas fuentes secundarias, es decir, documentos en los que se traducen e interpretan algunos resultados originales de los científicos. El criterio de selección de dichas fuentes se basó en la contribución de estas a la problemática y a los objetivos de la investigación. Estas fuentes permitieron la selección y clasificación de fuentes primarias (ver tabla 1) que serían las unidades de análisis durante el estudio. Los criterios de selección de las fuentes primarias se fundamentaron en la pertinencia para la problemática y la accesibilidad de los mismos. Es importante señalar que, el método hermenéutico posibilitó la interpretación de cada uno de los documentos originales.

Tabla 1. Fuentes primarias de la investigación

Científico	Obra	Aporte
Christiaan Huygens	Demostración de la proposición XXV. En *Horologium Oscillatorium sive motu pendulorum ad horologia aptato demostrationes geometricae* (1673)	Demostración de que la cicloide es una curva tautócrona.
Jacques Bernoulli	Analisis Problematis Antehac. En *Acta Eruditorum* (1690)	Demostración de que la cicloide es una curva isócrona mediante el uso de ecuaciones diferenciales.
Jean Bernoulli	Solutio Problematis Funicula. En *Acta Eruditorum* (1691)	Solución al problema de la catenaria mediante el uso de ecuaciones diferenciales.
Jean Bernoulli	Modus Generalis Construen di Omnes equationes differentiales primi gradus. En *Acta Eruditorum* (1694)	Generalización de la técnica de separación de variables.
Euler	De Integratione Aequationum Differentialium Altiorum Graduum . En *Opera Omnia* (1743)	Solución de ecuaciones lineales con coeficientes constantes.
Euler	De integratione	Solución de la ecuación de

	aequationum differentialium . En *Opera Omnia* (1763)	Riccati.
Leibniz	Notatiuncula ad Acta Decemb 1695. En *Acta Eruditorum* (1696)	Solución de la ecuación de Bernoulli.

Con respecto a la tercera etapa es necesario precisar que se desarrolló en paralelo a las primeras, es decir la escritura del informe se elaboró simultáneamente con la determinación de la problemática y la selección de las fuentes primarias y secundarias.

En síntesis, durante este capítulo se reflexiona sobre las diversas propuestas elaboradas para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. En sentido, se puso de manifiesto que la mayoría de propuestas se centran en promover aprendizajes procedimentales, olvidando los conceptuales. Una vía para diseñar propuestas de enseñanza centradas en aprendizajes conceptuales, es mediante la elaboración de estudios históricos-epistemológicos de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

CAPÍTULO II

La física y las ecuaciones diferenciales en los siglos XVII y XVIII

“El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fértil de descubrimientos matemáticos."

Fourier

2.1 La física y el surgimiento de las ecuaciones diferenciales ordinarias

La teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias se desarrolló paralelamente con el surgimiento de otros campos de las matemáticas, principalmente el cálculo diferencial e integral que emergió en el siglo XVII con Leibniz y Newton. Un aspecto que motivó el surgimiento de las ecuaciones diferenciales ordinarias fue el interés de los matemáticos por resolver problemas que emergían en el campo de la física. A finales del siglo XVII la modelación de algunos problemas vinculados con la mecánica conllevó al planteamiento de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (Nápoles, 1998). De esta manera, uno de los elementos de causalidad para el surgimiento de las ecuaciones diferenciales ordinarias corresponden a los diversos problemas del campo de la mecánica (encontrar trayectoria de movimientos), planteados en el siglo XVII. La necesidad de resolver estos problemas llevó al planteamiento de las primeras ecuaciones diferenciales, las cuales exigían un abordaje matemático. Entre los problemas del campo de la física que posibilitaron el planteamiento de las primeras ecuaciones diferenciales ordinarias se encuentran, el problema del péndulo isócrono, el problema de los dos cuerpos, el problema de la catenaria, el problema de la tractriz y el problema de la braquistócrona. En este capítulo solo se abordarán algunos de estos problemas con el objetivo de comprobar que la modelación de problemas físicos se constituye en un factor determínate para el surgimiento de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

2. 2 El péndulo Simple

En el siglo XVII uno de los intereses de la cartografía era determinar la ubicación de un punto en la superficie terrestre. Desde la época antigua ya se conocía el proceso para hallar la latitud de un punto sobre la superficie terrestre (utilización del sextante y la altura sobre el horizonte de los astros), sin embargo faltaba por resolver el problema de la longitud. Para dar respuesta a este problema se necesitaba medir el tiempo, pero los cronómetros que existían no tomaban tiempos exactos, además eran sensibles a las oscilaciones de los barcos. Este problema se constituye en un factor que motivó el estudio del péndulo simple como herramienta de medición del tiempo.

Un péndulo simple se compone de una masa puntual m suspendida por una cuerda l (ver figura 1), de masa despreciable y donde el extremo superior esta fijo. El movimiento de este péndulo, ocurre en el plano vertical y se vincula con la fuerza gravitacional. Sobre la masa puntual m actúan las fuerzas ejercida por la cuerda T y la fuerza gravitacional mg. La componente tangencial de la fuerza gravitacional $mg\, sen\, \theta$ actúa en dirección opuesta al desplazamiento angular, es decir hacia $\theta = 0$. La ecuación diferencial que describe este movimiento es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + mg \operatorname{sen} \theta = 0.$$

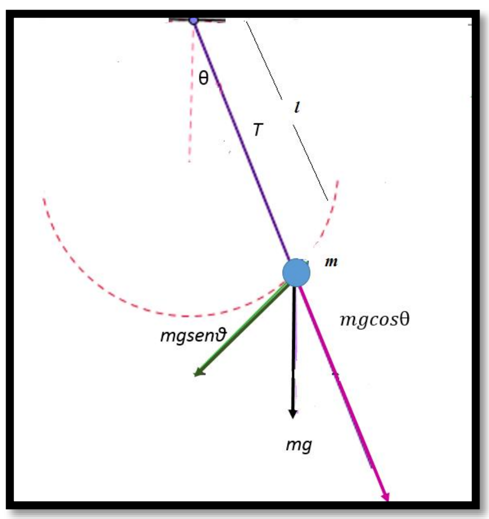


Figura 1. Péndulo simple (gráfica elaborada por el autor).

El péndulo simple fue estudiado por diversos matemáticos de la época concluyendo que no era un buen instrumento para medir el tiempo durante las navegaciones. Esto debido a que el periodo del péndulo no es independiente de la amplitud y por lo tanto los movimientos provocados por la marea alterarían la amplitud y en consecuencia el registro del tiempo. De esta situación surge la inquietud de buscar una curva, a lo largo de la cual se moviese el peso del péndulo de manera que el periodo fuera independiente de la amplitud. Uno de los matemáticos que resolvió este problema geométricamente, fue Christiaan Huygens (1629-1695) en 1673. En su obra *Horologium oscillatorium sive motu pendulorum ad horologia aptato demostrationes geometricae* describe con detalle la construcción de un reloj isócrono, esto es, un reloj basado en un péndulo cuyo periodo de oscilación es independiente de la amplitud de la oscilación. Huygens, utilizó la cicloide[4] que era muy conocida por los matemáticos de aquella época para la construcción de este péndulo.

2.3 Problema del péndulo isócrono

Huygens descubrió que utilizando la curva de la cicloide era posible construir un péndulo en el que el periodo no dependiera de la amplitud (ver figura 2), sino del radio de la circunferencia generatriz de la cicloide y de la aceleración de la gravedad, esto es $T = 4\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$. El péndulo cicloidal de Huygens se construye utilizando un hilo que cuelga del punto tangente en la de unión de dos arcos de cicloide sólidos. Al oscilar el péndulo, el hilo se ciñe a uno u otro de esos dos contornos cicloidales y el periodo de oscilación es independiente del arco descrito por el hilo.

[4] El lugar geométrico originado por un punto de una circunferencia (generatriz) al rodar sobre una línea recta (directriz) se denominaba por los geómetras de la época cicloide.

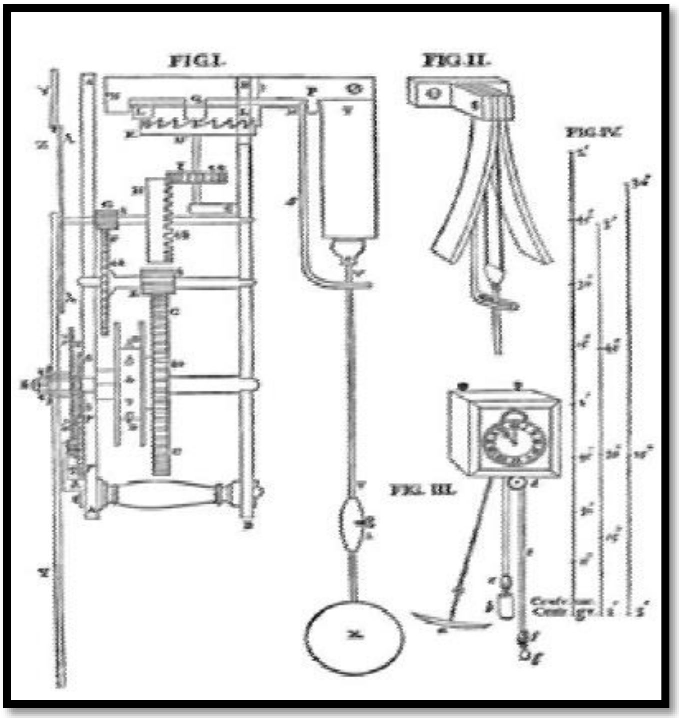


Figura 2. Huygens y la construcción del péndulo isócrono.

Fuente: Huygens (1673). *Horologium Oscillatorium sive motu pendulorum ad horologia aptato demostrationes geometricae* (p.4). Paris.

La demostración de que con la anterior construcción se tiene un péndulo con periodo independiente de la amplitud la presentó Huygens en el año 1673 en *Horologium Oscillatorium*[5]. La idea principal es que la cicloide es una curva isócrona, es decir una curva para la cual el tiempo tomado por un objeto que se desliza sin rozamiento en gravedad uniforme hasta su punto más bajo es independiente de su punto de partida. Huygens utiliza dos propiedades de la cicloide, que él mismo demuestra, para construir su péndulo con trayectoria cicloidal. La primera propiedad se vincula con la evoluta[6] de una cicloide que es otra cicloide, y la segunda con el hecho de que la suma de la longitud de un segmento que une un punto P de la cicloide y un punto C de intersección de la normal trazada desde P con la evoluta, y la longitud del arco que

[5] Es importante mencionar que la obra original se encuentra en latín, pero ha sido traducida al inglés por Ian Bruce.

[6] La evoluta de una curva es la curva envolvente de la familia de rectas normales a la curva original en todos sus puntos, en el sentido de que dichas rectas normales son tangentes a la evoluta en puntos correspondientes.

une el punto C y el vértice V de la evoluta, es constante e igual al doble del diámetro de la circunferencia generatriz (Hernández, 2007):

$$PC + CV = 4R$$

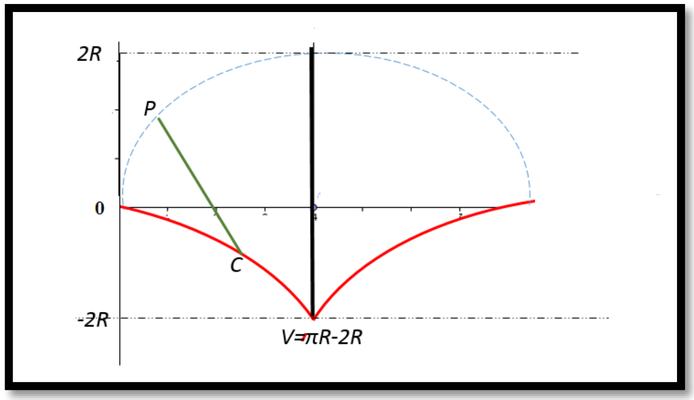


Figura 3. La cicloide (en azul) y su evoluta (en rojo) (gráfica elaborada por el autor).

Demostrando como construir una trayectoria cicloidal Huygens procede a mostrar que la cicloide era una curva tautócrona o isócrona, y finalmente logra construir un instrumento que permite medir el tiempo durante las navegaciones. Cabe destacar que aunque teóricamente este instrumento funciona, en la práctica no es así dado que los rozamientos producidos por el hilo y los arcos de cicloide afectan el sistema.

Es importante señalar que aunque en el siglo XVII no se contaba con el formalismo matemático para establecer una demostración rigurosa, los métodos geométricos posibilitaron llegar a los mismos resultados en relación a la cicloide. A continuación se realiza la demostración moderna de las propiedades de la cicloide que permiten la construcción del péndulo tautócrono.

Lo primero que se demuestra es que la evoluta de una cicloide es otra cicloide. El primer paso es considerar las ecuaciones paramétricas de la cicloide: $x = r\theta - r\operatorname{sen}\theta,\ y = r - r\cos\theta$ con $0 \leq \theta < 2\pi$ luego hallamos la pendiente de las rectas tangentes a esta cicloide, esto es $\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}$ (recordemos que para hallar $\frac{dy}{dx}$ es necesario realizar $\frac{dy}{d\theta}$ y $\frac{dx}{d\theta}$). Con este resultado se puede encontrar la ecuación de las rectas normales a la cicloide. Teniendo en cuenta que el producto de las pendientes de la recta tangente y las normales debe ser -1 y que la ecuación de la recta normal que pasa por los puntos x, y de la cicloide es $x\cos\theta - y\cos\theta - r\cos\theta\, x + r\theta = 0$, se tiene que $m_N = -\frac{dx}{dy} = \frac{\cos\theta - 1}{\operatorname{sen}\theta}$. Nos falta encontrar la envolvente de las rectas normales de la cicloide, es decir la curva que es tangente a todas las normales. Debemos entonces, derivar la ecuación de la recta normal, esto es $-x\operatorname{sen}\theta - y\cos\theta - r\cos\theta + r\theta\operatorname{sen}\theta + r = 0$. Para hallar los puntos de tangencia a la envolvente utilizamos la ecuación de la recta normal y la curva envolvente llegando a que las ecuaciones paramétricas de la evoluta son $x = r\theta + r\operatorname{sen}\theta$, $y = -r + r\cos\theta$. De esta manera queda demostrado que la evoluta de una cicloide es otra cicloide. Note que las ecuaciones obtenidas de la evoluta corresponden a una cicloide con origen$(r\pi, -2r)$. La representación geométrica de la cicloide y la evoluta se presentan en la figura 3.

La segunda propiedad de la cicloide que utilizó Huygens para la construcción de su péndulo tautócrono consiste en que la suma de la longitud del segmento que une el punto P de la cicloide y el punto C de intersección de la normal trazada desde P con la evoluta, y la longitud de arco que une al punto C y el vértice V es siempre constante e igual a cuatro veces el radio de la circunferencia generatriz (ver figura 3). Para demostrar esta propiedad basta con hallar la distancia entre los puntos P y C y la longitud de arco entre C y V. La distancia entre el punto P y C es $\sqrt{-2r\operatorname{sen}\theta^2 + (2r - 2r\cos\theta^2)} = \sqrt{8r^2\left(2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}^2\right)} = 4R\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$. La longitud de arco entre C y V está definida como $arcoCV = \int_\theta^\pi \sqrt{\left(\frac{dx_N}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy_N}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$, realizando las respectivas derivadas se tiene $arcoCV = \int_\theta^\pi \sqrt{(r + r\cos\theta)^2 + (-r\operatorname{sen}\theta)^2}\, d\theta$. Aplicando algunas identidades trigonométricas y resolviendo la integral se llega a que $arcoCV = 4r - 4r\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$. Por lo tanto $PC + arco\, CV = 4r$. A partir de estas propiedades se construye un péndulo con una trayectoria cicloidal. Falta mostrar que si un cuerpo se desliza por la acción de gravedad y en ausencia de rozamiento por la cicloide hasta su punto más bajo, lo hará en igual tiempo, independientemente del punto de partida. Esta demostración fue elaborada por Huygens, quien combinó la geometría y la física para demostrar que la cicloide es una curva tautócrona. El proceso desarrollado por Huygens se describe a continuación:[7]

Sea ABC un arco de cicloide invertida, AD el dímetro de la circunferencia generatriz de la cicloide. Tomemos un punto B de la cicloide (ver figura 4) y supongamos que un cuerpo se deja caer por las fuerzas naturales a lo largo del arco BA. Construyamos un semicírculo FHA en DA de manera que corte a la línea BF (paralela a DC) en E. EA se une mediante una recta, y BG se dibuja paralela a la línea EA y tangente a la cicloide en B. Se construye la horizontal que pasa por A y G. Por la proposición XXIV[8] demostrada por Huygens en páginas anteriores de la misma publicación se tiene que el tiempo de descenso a lo largo del arco de la cicloide BA, es igual al tiempo con movimiento constante a lo largo de la línea BG. Además, el tiempo de descenso de un objeto por el semicírculo FHA es igual al tiempo de descenso de un objeto que cae por FA, y este a su vez es igual al tiempo para el movimiento constante a lo largo de BG (proposición XXIV) o lo largo de EA, pues es paralela. Por la proposición 6 de Galileo[9] en *motu Accl* se tiene que el tiempo de descenso a lo largo de DA es igual a EA, además el tiempo de descenso de CA es igual a DA (Huygens, 1673). De esta manera Huygens demuestra que la cicloide es una curva tautócrona.

---

[7] La demostración original se encuentra en (Huygens., 1673, p.57)

[8] La proposición XXIV establece que el tiempo de descenso de un objeto a lo largo del arco de cicloide BA, es igual al tiempo de descenso con movimiento constante a lo largo de la línea BG, y a su vez es igual al tiempo de descenso de un objeto que cae por el semicírculo FHA, y este también es igual al tiempo de descenso por FA.

[9] La proposición 6 de Galileo establece que el tiempo de descenso a lo largo del diámetro DA, es igual tiempo de descenso de un objeto que cae a lo lardo de la cuerda EA.

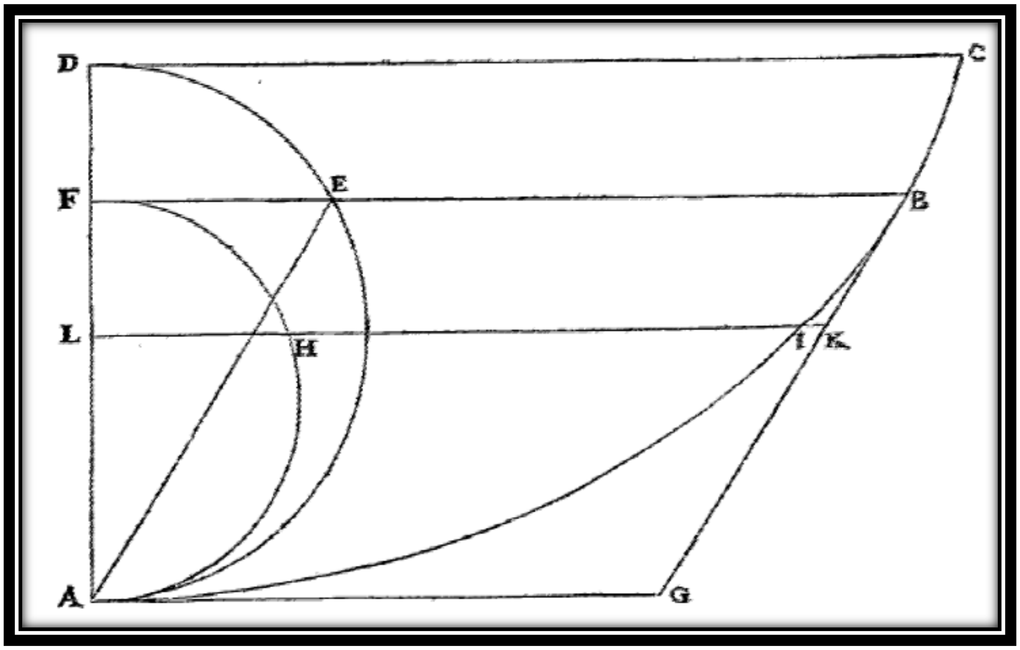
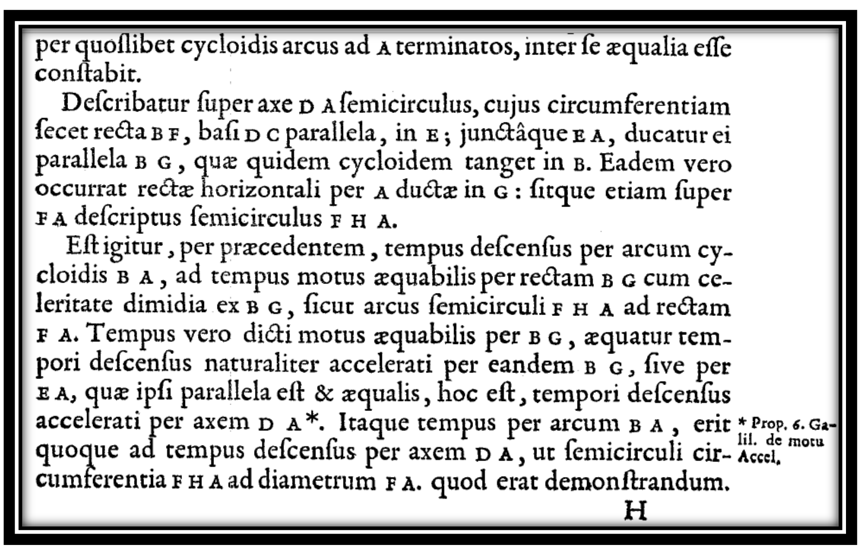


Figura 4. Gráfica de la demostración del problema de la isócrona elaborada por Huygens.

Fuente: Huygens (1673). *Horologium Oscillatorium sive motu pendulorum ad horologia aptato demostrationes geometricae* (p.58). Paris.

A continuación se presenta parte de la demostración realizada por Huygens para el problema de la curva isócrona.



per quoſlibet cycloidis arcus ad A terminatos, inter ſe æqualia eſſe conſtabit.

Deſcribatur ſuper axe D A ſemicirculus, cujus circumferentiam ſecet recta B F, baſi D C parallela, in E; junctâque E A, ducatur ei parallela B G, quæ quidem cycloidem tanget in B. Eadem vero occurrat rectæ horizontali per A ductæ in G: ſitque etiam ſuper F A deſcriptus ſemicirculus F H A.

Eſt igitur, per præcedentem, tempus deſcenſus per arcum cycloidis B A, ad tempus motus æquabilis per rectam B G cum celeritate dimidia ex B G, ſicut arcus ſemicirculi F H A ad rectam F A. Tempus vero dicti motus æquabilis per B G, æquatur tempori deſcenſus naturaliter accelerati per eandem B G, ſive per E A, quæ ipſi parallela eſt & æqualis, hoc eſt, tempori deſcenſus accelerati per axem D A*. Itaque tempus per arcum B A, erit quoque ad tempus deſcenſus per axem D A, ut ſemicirculi circumferentia F H A ad diametrum F A. quod erat demonſtrandum.

* Prop. 6. Galil. de motu Accel.

H

Figura 5. Demostración del problema de la curva isócrona elaborada por Huygens.

Fuente: Huygens (1673). *Horologium Oscillatorium sive motu pendulorum ad horologia aptato demostrationes geometricae* (p.57). Paris.

Ahora bien, esta demostración es exclusivamente geométrica, faltaba desarrollar la demostración analítica del problema de la isócrona.

Jacques Bernoulli presentó la solución al problema de la isócrona,[10] utilizando elementos del cálculo infinitesimal. La ecuación que describe este problema, en términos de Bernoulli, es $dy\sqrt{b^2\,y - a^3} = dx\sqrt{a^3}$, donde a y b son constantes. La solución de esta ecuación fue presentada por Bernoulli en las *Acta Eruditorum* de 1690 (el documento original no presenta el gráfico de la solución, ver figura 6). Bernoulli concluyó que las integrales de esta igualdad de diferenciales tenían que ser las mismas, por lo tanto, la curva buscada era la cicloide, es decir,

$$\frac{2b^2y - 2a^3}{3b^2}\,\sqrt{b^2y - a^3} = x\sqrt{a^3}.$$

A continuación se presenta el fragmento de la demostración elaborada por Jacques Bernoulli para el problema de la curva isócrona.

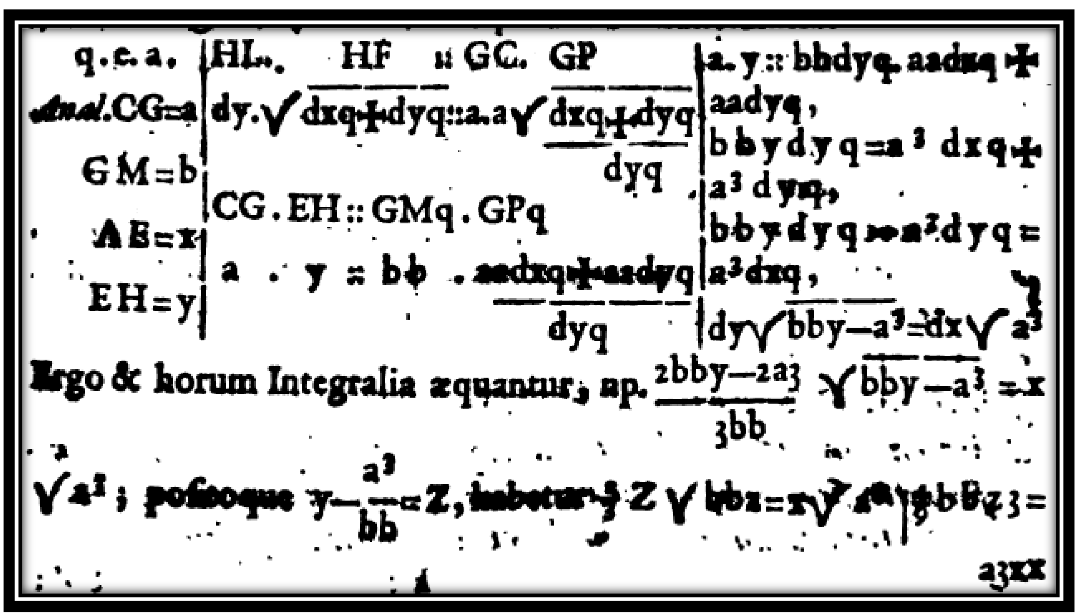

q.e.a. | HL. HF :: GC. GP | a. y :: bbdyq. aadxq + aadyq,
Anal. CG=a | dy.√dxq+dyq :: a.a√dxq+dyq / dyq | bbydyq = a³ dxq + a³ dyq,
GM=b | CG.EH :: GMq.GPq | bbydyq − a³dyq = a³dxq,
AB=x | a . y :: bb . aadxq+aadyq / dyq |
EH=y | | dy√bby−a³ = dx√a³
Ergo & horum Integralia æquantur, ap. 2bby−2a³ / 3bb √bby−a³ = x√a³; positoque y − a³/bb = z, habebitur

Figura 6. Demostración del problema de la curca isócrona elaborada por Jacques.

Fuente: Bernoulli. (1690). Analisis Problematis Antehac (p.218). *Acta Eruditorum.*

[10] La demostración original se presenta en (Bernoulli., 1690, p. 217-219)

Leibniz había presentado una solución analítica al problema de la isócrona años anteriores (Kline, 1992); sin embargo no se cuenta con el documento original en el que se presenta esta demostración. Es importante destacar que en la solución de Jacques Bernoulli se identifica una ecuación diferencial de primer orden, la cual se resuelve aplicando la separación de variables y encontrando la solución de las integrales por cuadraturas.

Modernamente la demostración de que la cicloide es una curva tautócrona es la siguiente:

Sean:

$$x = r\theta - r \operatorname{sen} \theta$$

$$y = r \cos \theta - r,$$

las ecuaciones paramétricas de una cicloide invertida. Supongamos que se deja caer una bola desde el punto de parámetro β, hasta el punto de parámetro α. Se tiene por la conservación de la energía mecánica que $mgh_{\beta} = mgh_{\alpha} + \frac{1}{2}mv_{\alpha}^2$ lo que implica que $v_{\alpha} = \sqrt{2gh}$ siendo h la diferencia de la altura entre los puntos (ver figura 7).

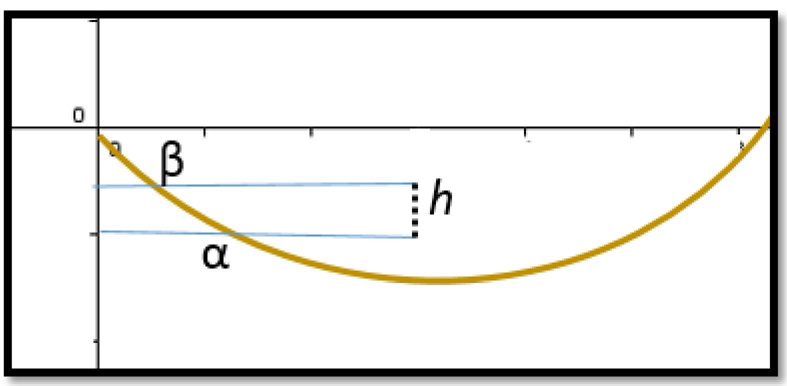


Figura 7. La cicloide como tautócrona (gráfica elaborada por el autor).

Por lo tanto $h = y_\beta - y_\alpha = r(\cos\beta - \cos\alpha)$ y $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$. Reemplazando, obtenemos que $v_\alpha = 2\sqrt{rg}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}}$. Además se tiene que $v_\alpha = \frac{ds}{dt}$, por lo tanto $dt = \frac{ds}{v_\alpha}$, donde

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2}\, d\alpha = \sqrt{(r - r\cos\alpha)^2 + (-r\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2}\, d\alpha.$$

Resolviendo los binomios y aplicando identidades trigonométricas se tiene que:

$$ds = 2r\,\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2}\, d\alpha. \text{ Entonces } dt = \frac{2r\,\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2} d\alpha}{2\sqrt{rg}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}}}\ .$$

De otro lado, el tiempo que tarda el objeto en su caída por la cicloide desde el punto de parámetro β al punto más bajo de la cicloide que es de parámetro π, será.

$$t = \int_\beta^\pi \frac{2r\,\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2}\, d\alpha}{2\sqrt{rg}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_\beta^\pi \frac{\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2}\, d\alpha}{\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}}}$$

Sea $u = \cos\frac{\alpha}{2}$, luego $du = -\frac{1}{2}\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2}\, d\alpha$. Por lo tanto se tiene que

$$t = -2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\cos\frac{\beta}{2}}^{0} \frac{du}{\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2} - u^2}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^{\cos\frac{\beta}{2}} \frac{du}{\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2} - u^2}}$$

Nuevamente hagamos $u = \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)x$, de aquí $du = \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)dx$. Por lo tanto

$$t = 2\sqrt{\frac{r}{g}}\int_0^1 \frac{\cos\frac{\beta}{2}dx}{\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}[1-\frac{u^2}{\cos^2\frac{\beta}{2}}]}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{r}{g}}\int_0^1 \frac{\cos\frac{\beta}{2}dx}{\cos\frac{\beta}{2}\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{r}{g}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Se conoce que $D_x(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, luego

$$t = 2\sqrt{\frac{r}{g}}\int_0^1 D_x(\operatorname{sen}^{-1}x)$$

$$= 2\sqrt{\frac{r}{g}}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

Con este resultado es posible afirmar que el tiempo de caída de un objeto por una trayectoria cicloidal no depende de β que es el punto de donde se soltó el objeto, sino exclusivamente del radio r de la circunferencia generatriz y de la gravedad g. En consecuencia si se construye un péndulo con trayectoria cicloidal el periodo de oscilación es independiente de la amplitud de donde oscile la lenteja del péndulo.

El problema de encontrar un péndulo isócrono (tautócrono) fue uno de los primeros que motivaron el planteamiento de ecuaciones diferenciales ordinarias. Aunque el tratamiento por Huygens fue exclusivamente geométrico-físico, años posteriores con Bernoulli se utilizó el cálculo infinitesimal y la separación de variables como método para solucionar la ecuación diferencial que modelaba la trayectoria isócrona. En este mismo sentido, un año después (1674) apareció otro nuevo problema la tractriz, el cuál llevará a Leibniz a probar su nuevo cálculo y plantear una ecuación diferencial que modelaba las condiciones del problema.

2.4 La tractriz

En 1674 Leibniz estudió el problema de la tractriz, el cual consistía en hallar la curva que recorría un objeto al arrastrarse sobre un plano horizontal mediante una cuerda de longitud constante, cuando el extremo libre de la cuerda se mueve a lo largo de una línea recta en el plano. Este problema también se conoce como la curva del hueso del perro, ya que se puede considerar el caso en que el amo se sitúa inicialmente en el origen de las coordenadas y el perro a una distancia d sobre el eje positivo y. El amo caminaría en el sentido positivo del eje de la x, mientras el perro, que sería arrastrado por la correa del amo, haría resistencia para volver al punto de partida, que sería donde estaría situado el hueso. Esta curva es formada mediante dos movimientos uno que se da de izquierda a derecha, es decir desde el origen hacia el eje positivo de la x, y otro que se origina al descender el perro por la acción de la fuerza ejercida por el amo. Una de las propiedades que cumple esta curva y que fue utilizada por Leibniz para demostrar su resultado es que la distancia entre el punto de tangencia de la curva que se busca y el eje en donde se mueve el otro extremo de la cuerda es siempre constante e igual a la longitud de la cuerda.

Leibniz utilizó el cálculo con diferenciales para solucionar el problema, consideró una cuerda de longitud a, la cual en el instante inicial se encuentra ubicada en el eje vertical, es decir las coordenadas de sus extremos son $(0,0)$ y $(0,a)$. El extremo que está ubicado en el origen se mueve sobre el eje horizontal positivo de las x y el otro recorre la tractriz (ver figura 8). Bajo estas condiciones Leibniz notó que debía encontrar una curva tal que la parte de su tangente entre la curva y el eje horizontal fuera siempre igual a una constante dada. No fue difícil para Leibniz concluir que el trazado de esta curva también se podría reducir a la cuadratura de una hipérbola. Teniendo presente las condiciones del problema, Leibniz utiliza las propiedades de la semejanza de triángulos para los triángulos APB y el triángulo infinitesimal, y establece los lados proporcionales (ver figura 8). De esta manera, concluye que la relación entre las diferenciales de la ordenada y la abscisa es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

Separando las variables la ecuación queda transformada en $dx = -\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,dy$. Para resolver esta ecuación Leibniz utilizó la solución por cuadraturas, que consiste en encontrar la primitiva de la función.

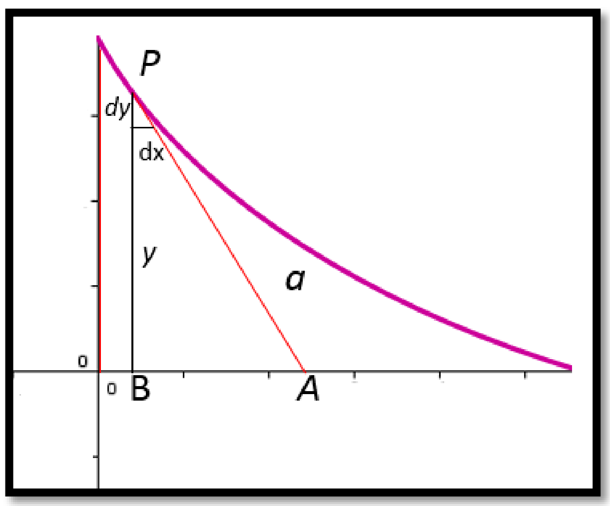


Figura 8. La tractriz (gráfica elaborada por el autor).

Esta breve presentación de la demostración de Leibniz sobre la tractriz deja entrever que $\frac{dy}{dx}$ se entiende como un cociente de variaciones infinitesimales, de hecho se establece a partir de la idea de los lados que se encuentran en proporción en los triángulos semejantes. De esta manera, es posible afirmar que $\frac{dy}{dx}$ en esa situación no tenía la connotación de ser la pendiente de la tangente en ese punto (versión moderna). Además es posible concluir que para Leibniz la hipotenusa del triángulo infinitesimal es indistinguible del arco infinitesimal de la curva y de la tangente infinitesimal a la curva, por lo tanto, la cuerda infinitesimal, el arco infinitesimal y la tangente infinitesimal son un solo segmento siempre que se tome una porción infinitesimal. Este hecho pone en evidencia que en Leibniz existe una extensión del significado de la igualdad en el contexto geométrico (Cantoral & Farfán, 2004). Otro aspecto importante a resaltar de la solución de Leibniz es que se iniciaba a trabajar curvas que en Descartes no se admitían por no tener una representación analítica (Tournès, 2011). Estas curvas eran denominadas transcendentes, ejemplos de ellas son las funciones trigonométricas, la función exponencial y la logarítmicas entre otras. La solución de la tractiz es una curva transcendente. Este evento pone en evidencia que paralelamente al surgimiento de las ecuaciones diferenciales se desarrollaba la teoría de funciones.

A continuación se presenta la demostración moderna del problema de tractriz y se comprueba que efectivamente la solución da cuenta de una curva transcendente.

Consideremos la figura 9 a partir de la cual establecemos que la pendiente de la recta tangente a la curva buscada en el punto (x, y) es $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \frac{dy}{dx}$ (el signo menos da cuenta de que la pendiente es negativa). Esta ecuación diferencial se complementa con un dato adicional $A = (a, 0)$ es decir $y(a) = 0$. De esta manera, la situación queda transformada en un problema de valor inicial.

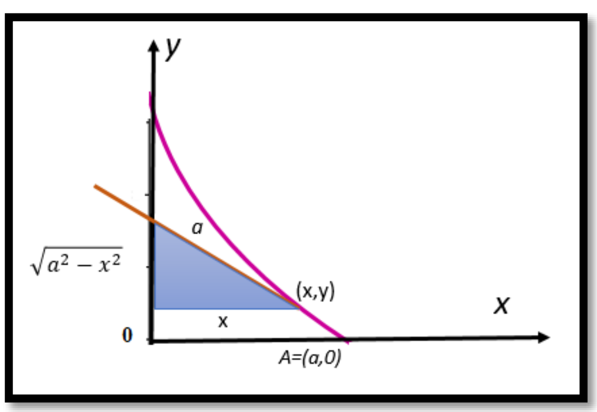


Figura 9. La tracriz, demostración moderna (gráfica elaborada por el autor).

Partiendo de la ecuación $dy = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx$ se tiene que $y = -\int \sqrt{\frac{a^2-x^2}{x^2}}\,dx$, para solucionar esta integral se utiliza el cambio de variable $x = a\operatorname{sen} t$, de donde se obtiene la función $y = \pm\left(\frac{a}{2}\ln\left(\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right) + \sqrt{a^2-x^2}\right) + C$. El valor de C depende de la condición $y(a) = 0$, reemplazando estos valores en la solución se obtiene que $C = 0$ por lo tanto la solución a esta ecuación es:

$$y = \pm\left(\frac{a}{2}\ln\left(\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right) + \sqrt{a^2-x^2}\right).$$

En esta misma dirección, y vinculado con el problema del péndulo, surgió la inquietud de encontrar la forma de la tierra y de verificar la ley del cuadrado de los inversos de atracción gravitatorio. El primer problema fue abordado por Newton, el cual dedujo que la tierra se abulta en el Ecuador. Esto lo concluyó de las observaciones realizadas en distintos lugares de la superficie terrestre y de los resultados del periodo encontrados en cada uno de estos lugares. Sin embargo, la pregunta sobre la forma de la tierra continúo por un largo tiempo siendo el interés de muchos matemáticos. El segundo problema, era posible abordarlo siempre que se conociera la forma de la tierra, puesto que a partir de esta se podría calcular la fuerza que se necesita para mantener un objeto sobre o cerca de la superficie de la tierra que está en movimiento. A modo de síntesis, se puede concluir que, los anteriores problemas conllevaron al planteamiento de nuevas ecuaciones diferenciales y en consecuencias a técnicas de solución de las mismas.

2.5 La catenaria

Otro de los problemas que motivaron la investigación en ecuaciones diferenciales se puede identificar dentro del campo de lo que hoy conocemos como la teoría de la elasticidad. En este campo se estudia la capacidad que tiene un cuerpo de recuperar la forma inicial cuando se deforma al aplicarle una fuerza; a dicho cuerpo se le denomina elástico. Algunos de los problemas que emergían en este campo fueron abordados por Galileo Galilei (1564-1642), Edme Mariotte (1620-1684), Robert Hooke (1635-1703) y Christopher Wren (1632-1723), especialmente los que se vinculan con los perfiles que adoptan las vigas verticales y horizontales cuando se les aplican cargas. Todos estos problemas conducían a ecuaciones diferenciales.

Jacques Bernoulli en el año 1690, en su artículo sobre la isócrona, planteó a los matemáticos el problema de encontrar la curva que modelaba el comportamiento de una cuerda flexible e inextensible colgada libremente de dos puntos fijos. Dicha curva fue denominada por Leibniz como *catenaria*. Este problema había sido abordado unos años atrás por Galileo, el cual planteó que la curva era una parábola, sin embargo Huygens en 1646 argumentó que esto no era correcto mediante razonamientos físicos, concluyendo que la curva era la catenaria, puesto que permitía que el peso por unidad fuera uniforme a lo largo del cable.

De igual manera, otros matemáticos como Leibniz y Jean Bernoulli, en las *Actas* de junio de 1691, publicaron diversos métodos de resolución al problema planteado por Jacques Bernoulli en el año anterior (el cable colgante). Ambos encontraron en el cálculo infinitesimal la respuesta, de hecho la solución de Johann Bernoulli se encuentra en los textos de mecánica y cálculo infinitesimal (Kline, 1992), la cual se basa en la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{s}{c}$, en donde s es la longitud de arco entre el punto B y el punto A arbitrario (ver figura 10) y c depende del peso por unidad de longitud de la cuerda. La solución de esta ecuación diferencial lleva a lo que hoy en día escribimos como $y = \mathrm{c} \cosh \frac{x}{c}$. Ahora bien, Huygens lo resolvió a través de métodos geométricos (método clásico).

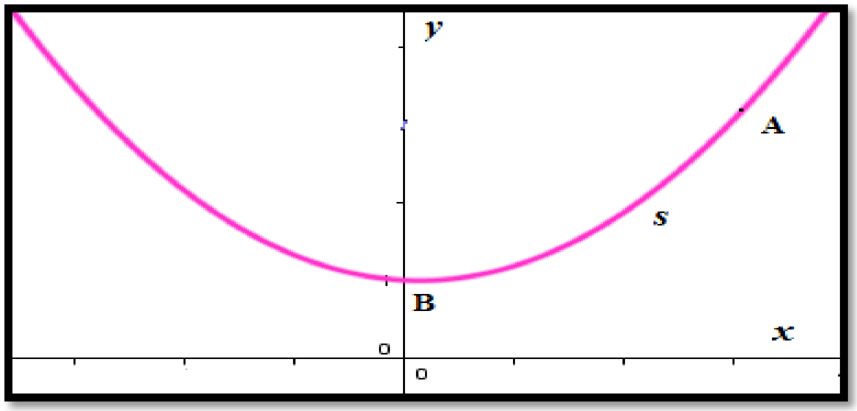


Figura 10. La catenaria (gráfica elaborada por el autor).

La demostración de Jean Bernoulli se sustenta en el cálculo infinitesimal desarrollado por Leibniz, el cual se constituye en el nuevo método matemático que se pone a prueba para estudiar las curvas. A continuación se presenta un breve resumen de la demostración de Jean Bernoulli[11]. La idea principal de esta demostración es considerar AB como una parte de la catenaria (ver figura 11) y utilizar argumentos mecánicos para plantear una ecuación diferencial que modele el problema. Bernoulli parte de que las fuerza F_0 y F_1 que actúan en B y A mantienen la parte AB de la cadena en equilibrio, además que estas fuerzas son iguales (en dirección y cantidad) a la fuerza del peso en P (es importante resaltar que la masa por unidad de longitud se mantiene constante durante toda la cadena). Traza las tangentes en el punto A y B de la catenaria encontrando el punto de intersección E. De otra parte, Bernoulli señala que la fuerza F_0 en B no depende de la elección de la posición de A a lo largo de la cadena, y que P es el mismo en cualquier punto de la longitud s de la cadena de B a A.

Toma $F_0 = a$, a constante y plantea el diagrama de fuerzas de la situación, es decir $P : F_0 = s : a = dx : dy$. Entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{s}$. Esta es la ecuación diferencial de la curva que se busca. Utilizando el hecho de que $ds = \sqrt{dy^2 + dx^2}$ y que $s^2 = x^2 - a^2$ se obtiene la ecuación equivalente $dy = \frac{adx}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$ y $ds = \sqrt{\left(\frac{a^2}{x^2-a^2} + 1\right)}\, dx = \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$

[11] La demostración original se encuentra publicada en (Bernoulli., 1691, p. 274-276)

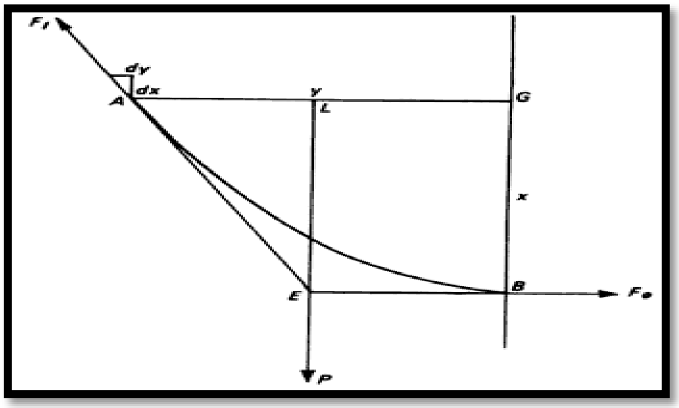


Figura 11. La catenaria de Jean Bernoulli

Fuente: Bos, H. J. M., Bunn, R., Dauben, W., Grattan, I., Hawkins, T., & Moller, K. (1980). From the calculus to set theory, 1630-1910 (p.81). Pricenton University press: New Jersey.

Integrando la ecuación diferencial se obtiene $s = \int \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-a^2)}} = \sqrt{(x^2 - a^2)} = a\frac{dx}{dy}$. Mediante la sustitución $x \to x + a$ Bernoulli concluye que $dy = \frac{adx}{\sqrt{(x^2+2ax)}}$, esta sustitución la desarrolla Bernoulli para trasladar el origen de B. Integrando esta ecuación se llega a que $y = \int \frac{adx}{\sqrt{(x^2+2ax)}}$ (Bernoulli J. , 1691). En el siglo XVII no se conocía la forma analítica de la función logaritmo, la cual responde a esta integral, por lo tanto Bernoulli utiliza la geometría para expresar la integral en términos del área bajo la curva $z = \frac{a^2}{\sqrt{(x^2+2ax)}}$. Este proceso permite que Bernoulli argumente que la forma de la catenaria dependía de la cuadratura de la hipérbola.

El problema de la catenaria modernamente se puede resolver considerando una porción s de la cuerda (iniciando en A y terminando en P), y realizando el respectivo análisis del diagrama de cuerpo libre para esa porción (ver figura 12).

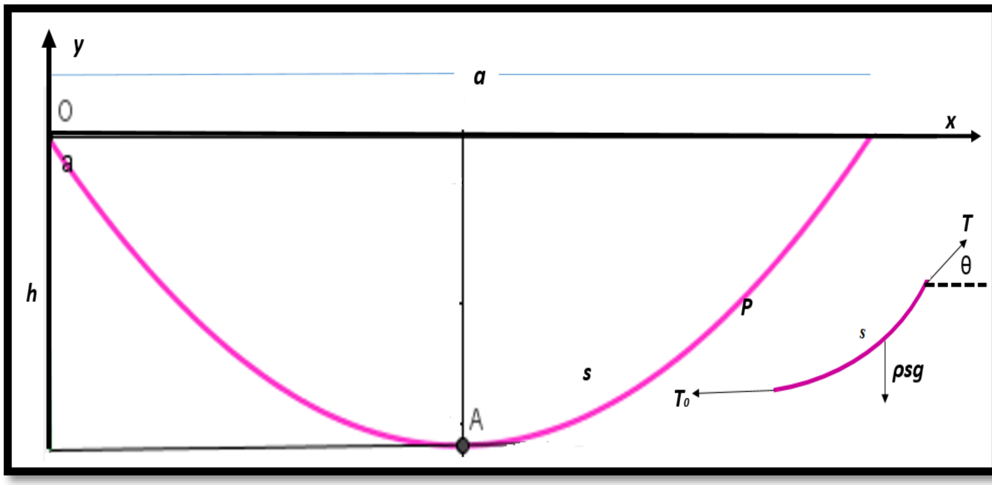


Figura 12. Demostración moderna del problema la de catenaria (gráfica realizada por el autor).

De la figura 12 se tiene que las fuerzas que actúan sobre la porción s, permiten que el sistema se encuentre en equilibrio, puesto que se cumple $T\cos\theta = T_0$ y $T\,\mathrm{sen}\,\theta = \rho g s$ (ρ es la densidad del cable, masa por unidad de longitud). Dividiendo estas dos expresiones se obtiene $\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\rho g s}{T_0}$. Si derivamos con respecto a x, y conociendo que $ds^2 = dx^2 + dy^2$ la expresión queda transformada en:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T_0}\frac{ds}{dx}, \text{ lo cual es equivalente a } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Integrando se obtiene: $\int_A^P \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \int_{a/2}^{x} \frac{\rho g}{T_0} dx$ ($v = \frac{dy}{dx}$ y para $x = \frac{a}{2}$ se cumple que $\frac{dy}{dx} = 0$), por lo tanto se tiene que $\mathrm{arcsenh}\, v = \frac{\rho g}{2T_0}(2x-a)$ ó $v = \frac{dy}{dx} = \mathrm{senh}(\frac{\rho g}{2T_0}(2x-a))$. Integrando nuevamente con la condición de que para $x = \frac{a}{2}$, $y = -h$ resulta $\int_{-h}^{y} dy = \int_{a/2}^{x} \mathrm{senh}\left(\frac{\rho g}{2T_0}(2x-a)\right)dx$, es decir $y + h = \frac{T_0}{\rho g}\cosh(\frac{\rho g}{2T_0}(2x-a)) - \frac{T_0}{\rho g}$, como la catenaria es simétrica para $x = 0, y = 0$ h toma el valor de $h = \frac{T_0}{\rho g}\cosh\left(\frac{\rho g a}{2T_0}\right) - \frac{T_0}{\rho g}$ llegando finalmente a la ecuación de la catenaria $y = \frac{T_0}{\rho g}[\cosh\left(\frac{\rho g}{2T_0}(2x-a)\right) - \cosh\left(\frac{\rho g a}{2T_0}\right)]$. Es importante señalar de los anteriores resultados que la catenaria no es una curva, es una familia de curvas las cuales dependen de la longitud de la cuerda y de la posición en donde se encuentran los puntos que sujetan a la cuerda.

De otra parte, es evidente de los resultados de Bernoulli y Leibniz alrededor del problema de la catenaria que ya a finales del siglo XVII la comunidad matemática se interesó por trabajar curvas transcendentes que para Descartes no se admitían. Este hecho nuevamente confirma que la teoría de ecuaciones diferenciales emergía paralelamente al desarrollo de la teoría de funciones.

En resumen, durante el año 1691 los hermanos Bernoulli, Jacques y Jean, resolvieron diversos problemas físicos mediante el planteamiento y resolución de ecuaciones diferenciales, entre estos se destaca el trabajo sobre la curva denominada tractriz, el cual fue solucionado por Jacques. Su hermano Jean resolvió el problema de la forma que adopta una cuerda flexible e inelástica y de densidad variable cuando cuelga bajo la acción de la gravedad, además estudió el perfil que adopta una cuerda elástica de grosor constante y el de una cuerda sobre la que se aplica en cada uno de sus puntos una fuerza dirigida a un centro fijo. En todos estos problemas el método de separación de variables se constituyó en la técnica más usada por los matemáticos para resolver ecuaciones diferenciales, además las integrales se encontraban mediante la cuadratura de las curvas o aplicando métodos geométricos.

2.6 La braquistócrona

En junio de 1696 Johann Bernoulli público un problema a la comunidad matemática en las *Acta Eruditorum*. El desafío consistía en hallar el camino AMB por el que una partícula móvil M, descendiendo por su propio peso, iría de A a B en el menor tiempo posible (ver figura 13), los puntos A y B se encuentran en un plano vertical, a diferentes alturas y no están ubicados directamente uno encima del otro. Johann

Bernoulli llamó a esta curva *braquistócrona* (del griego braquis, corto y cronos, tiempo).

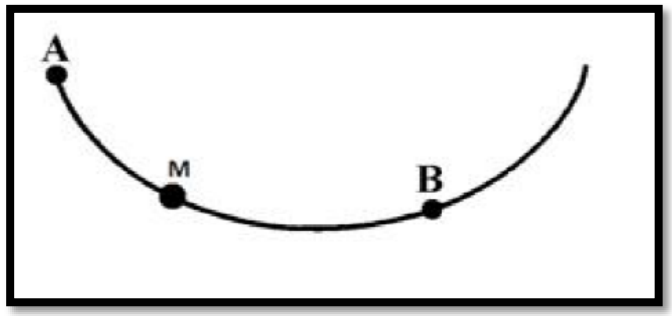


Figura 13: La braquistócrona.

Fuente: Sánchez Fernándes, C., & Valdés Castro, C. (2004). *de los Bernoulli a los Bourbaki una historia del arte y la ciencia del cálculo* (p.24). España: Nivola.

Luego de que se cumpliera el plazo para resolverlo, solo Leibniz había presentado una solución, por lo cual Leibniz persuadió a Johann para que ampliará el plazo, de manera que los matemáticos extranjeros (ingleses) lograran tener la posibilidad de conocer y resolver el problema (Sánchez & Valdés, 2004).

En la primavera de 1697 aparecieron las demostraciones de Leibniz, Jacob Bernoulli, L´Hopital y un autor inglés anónimo,[12] además de la elaborada en el año anterior por Johann quien no tuvo problema para reconocer que el autor anónimo era Newton y lo expresó con la siguiente frase célebre: por las garras se conoce al león. La curva que soluciona el problema planteado por Bernoulli era bien conocida por los matemáticos: la cicloide.

La demostración de Johann Bernoulli fue inspirada del trabajo de Fermat y consiste en establecer una analogía entre la curva de más breve descenso y la trayectoria que seguirá el rayo de luz en un medio plano con índice de refracción adecuadamente elegido. Los elementos fundamentales de la demostración de Johann Bernoulli fueron el principio de Fermat del tiempo mínimo, la ley de refracción de Snell y el cálculo

[12] Las demostraciones fueron publicadas en las Acta Eruditorum de 1697 y corresponden a las páginas 201, 211, 217 y 223.

infinitesimal. La ley de Snell establece que un rayo de luz al pasar de un medio a otro de densidad diferente se desvía de modo que la relación entre las velocidades y el seno del ángulo que forma la curva con la vertical permanece constante. Además por Galileo se conocía que la velocidad de caída de un cuerpo es proporcional a la raíz cuadrada de la distancia desde donde cae. Ambos elementos están presentes en la demostración de Johann Bernoulli.

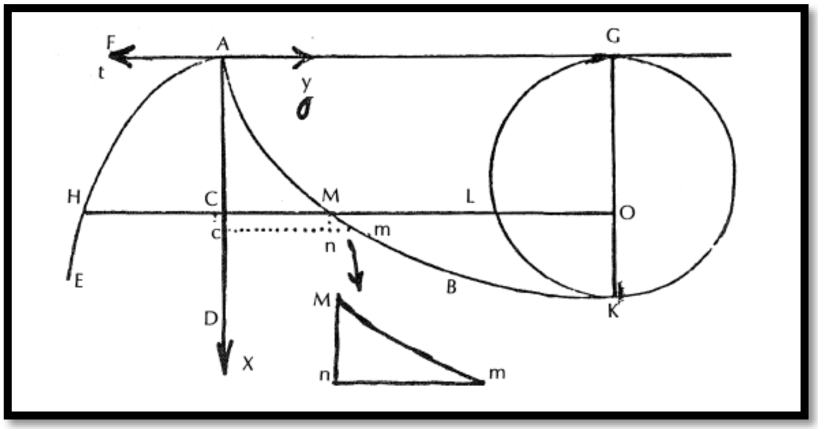


Figura 14. Solución del problema de la braquistócrona por Johann Bernoulli.

Fuente: Dou, A. (Marzo, 1988). Orígenes del cálculo de variaciones (p.122). En *Historia de la matemática en los siglos XVII y XVIII*. Conferencia llevada a cabo en la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

Johann en su demostración toma el eje y horizontal y el eje x ortogonal con la dirección positiva hacia abajo (ver figura 14), note que esta forma de tomar los ejes es contraria a la que normalmente se utiliza. El objetivo era encontrar la curva de mínimo descenso de un punto A con velocidad nula hasta un punto B deslizándose sin rozamiento por la acción de la gravedad. La intuición de Johann lo conduce a pensar que la velocidad en cualquier punto M de la trayectoria depende únicamente de x, así pues la braquistócrona que se busca puede identificarse con la trayectoria de un rayo de luz que parte de A y llega a B. De acuerdo a Galileo la velocidad en el punto M será $\sqrt{2gx}$, es decir depende únicamente de x, este hecho le permite a Johann establecer la analogía con la trayectoria de un rayo de luz que parte de A hasta B. Johann supone que el espacio está dividido en franjas separadas por planos horizontales de grosor infinitesimal cuyas densidades varían. En cada punto de la curva braquistócrona buscada se cumple que el seno del ángulo entre la tangente a la curva y el eje vertical es proporcional a la velocidad (ley de Snell) y ésta es a su vez proporcional a la raíz cuadrada de la altura del cuerpo que cae (segunda ley de Galileo). Bajo estas condiciones Bernoulli inicia su demostración, a continuación se expone.

Sea AMB la curva braquistócrona buscada y AHE la curva que representa la velocidad en cada punto (ver figura 14), Bernoulli toma a x e y como las coordenadas vertical y horizontal respectivamente del punto M medido desde el origen A, y $t = CH$ como la velocidad en el punto M. Johann consideró un punto m infinitamente próximo a M, y representa a $dx = Cc$, $ds = Mm$ y $dy = nm$. De esta notación se tiene que el seno del ángulo de refracción nMm es $\frac{dy}{ds} = \frac{mn}{Mm}$ y debe ser proporcional a la velocidad de la luz en el punto (por la ley de Snell), es decir a $CH = t$. Por lo tanto $\frac{dy}{ds} = \frac{t}{a}$ donde a es un factor de proporcionalidad. De otra parte se tiene que $ds^2 = dx^2 + dy^2$, utilizando este hecho la ecuación queda transformada en $\frac{dy}{dx} = \frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}}$. De acuerdo a Galileo se sabe que $t^2 = ax$, de donde resulta que $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$. Bernoulli concluye de esta ecuación que la curva braquistócrona es la cicloide, para ello realiza una demostración geométrica que consiste en utilizar la siguiente igualdad:

$$y = \int \sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx = -\big(x(a-x)\big)^{\frac{1}{2}} + a \operatorname{arcsen} x = arcGL - OL$$

De la anterior expresión se tiene que $y = arcGL - LO$ o lo que es lo mismo $y + LO = arcGL$ pero $arcGL = arcGK - arcLK$ y $LO = CO - CM - ML$, utilizando las anteriores igualdades se llega a $y + CO - CM - ML = arcGK - arcLK$, conociendo que $y = CM$ se tiene que $y + CO - CM = \pi a$ (donde a es el radio de la circunferencia generatriz) y $arcGK = \pi a$, por lo tanto $ML = arcLK$. Este resultado es una propiedad característica de la cicloide, así pues queda demostrado que la curva buscada es una cicloide. Además muestra que por dos puntos A y B solamente puede pasar una única cicloide. Luego de esta demostración, encuentra la solución para otros valores de t, tales como $t = \sqrt[3]{t}$ y $t = at$.

Por su parte, Jacob Bernoulli en 1697 presentó otra demostración al mismo problema de la braquistócrona. Parte del siguiente lema: supongamos que la curva $ACEDB$ es la que se busca (ver figura 15) y C, D son dos puntos próximos, entonces CDE es aquella, entre todas las curvas que tienen sus extremos en C y D, tales que un punto material cayendo de A recorre a C y D en el tiempo más breve.

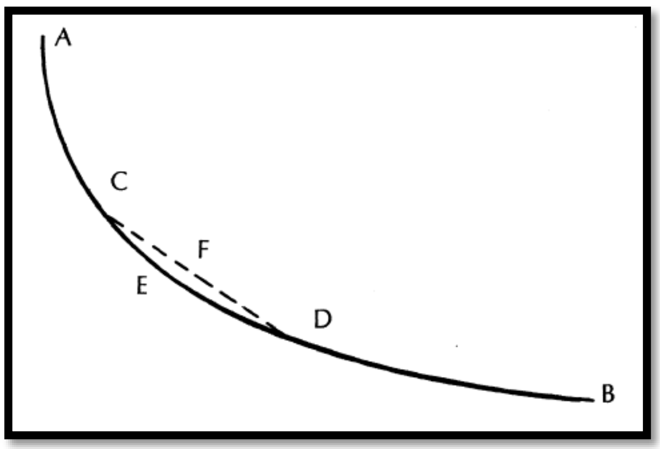


Figura 13. La braquistócrona.

Fuente: Dou, A. (Marzo, 1988). Orígenes del cálculo de variaciones (p.124). En *Historia de la matemática en los siglos XVII y XVIII*. Conferencia llevada a cabo en la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

Jacob Bernoulli partió de que ACB era la curva que se buscaba (ver figura 16). Tomo dos puntos C y D infinitamente próximos. Se tiene entonces que AH es la horizontal y CH perpendicular a esta. Además DF es perpendicular a CH. Bernoulli tomo a E como el punto medio de CF y realizó el rectángulo $EIDF$. G es el punto de intersección de la curva solución con la horizontal EI. Designó por $t\,CG$ el tiempo que tarda el punto material, cayendo de A y recorriendo CG. El propósito era hallar el arco CD de modo que $tCG + tGD$ sea mínimo (ver figura 16).

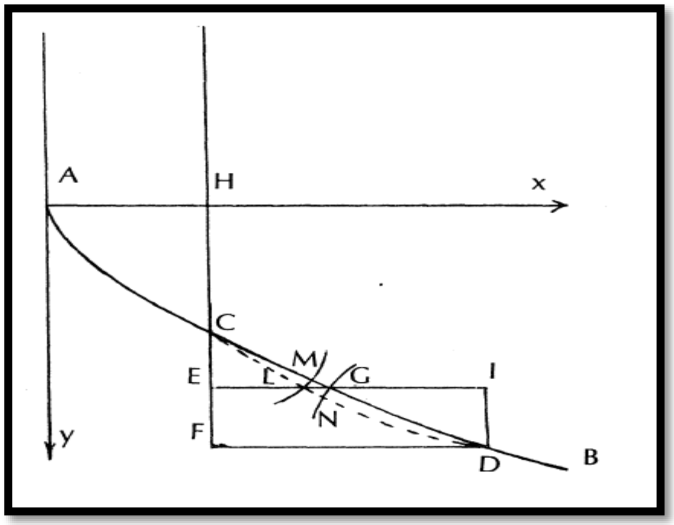


Figura 16: Demostración de la braquistócroa según Jacob Bernoulli.

Fuente: Dou, A. (Marzo, 1988). Orígenes del cálculo de variaciones (p.125). En *Historia de la matemática en los siglos XVII y XVIII*. Conferencia llevada a cabo en la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

Para llegar a este resultado Bernoulli toma otro punto L en EI de modo que LG sea muy pequeño con respecto a EG y traza CL y LD. Con centros en C y D construye los arcos LM y GN, con M en CG y N en DL. La condición de que CD debe recorrerse en el mínimo tiempo implica que:

$$tCL + tLD = tCG + tGD \text{ de donde } tCG - tCL = tLD - tGD$$

Ahora bien del problema se tiene que la velocidad en un punto de la curva solo depende de su distancia al eje horizontal AH. Suponiendo constante la velocidad ya que se trata de arcos infinitamente pequeños se tiene que

$$\frac{CE}{CG} = \frac{tCE}{tCG}, \ \frac{CE}{CL} = \frac{tCE}{tCL}$$

Puesto que $CG - CL = MG$, entonces $\frac{CE}{MG} = \frac{tCE}{tCG - tCL}$. Por semejanzas de los triángulos MLG y ECG se puede cambiar MG por GL. Obteniendo la siguiente igualdad $\frac{CE}{GL} = \frac{EG}{CG} = \frac{tCE}{tCG - tCL}$, replicando el mismo proceso pero ahora con los arcos GD y LD se obtiene $\frac{EF}{GL} = \frac{GI}{GD}\,\frac{tEF}{tLD - tGD}$ teniendo presente que $tCG - tCL = tLD - tGD$ y que $EF = CE$ se puede igualar las dos últimas fórmulas llegando a $\frac{EG}{GI}\,\frac{tCE}{tEF} = \frac{CG}{GD}$ se tiene que $CE = EF$. Además el tiempo de recorrido es inversamente proporcional a las velocidades, las cuales a su vez son proporcionales a las raíces cuadradas de sus ordenadas HC y HE, de aquí $\frac{EG}{\sqrt{HC}} : \frac{GI}{\sqrt{HE}} = \frac{CG}{GD}$. Bernoulli indica que debe recurrir a las diferenciales segundas, pues el segmento GL es infinitas veces más pequeño que los ya infinitamente pequeños EG y GI. Sin usar las derivadas segundas no hubiera podido llegar a la solución. Ahora el problema era hallar una curva cuyos elementos sean directamente proporcionales a sus abscisas e inversamente proporcionales a las raíces cuadradas de sus ordenadas. Jacob no tardó mucho en recocer que esta curva era la cicloide. Para demostrar que $\frac{EG}{\sqrt{HC}} : \frac{GI}{\sqrt{HE}} = \frac{CG}{GD}$ es una cicloide utilizó la figura 17.

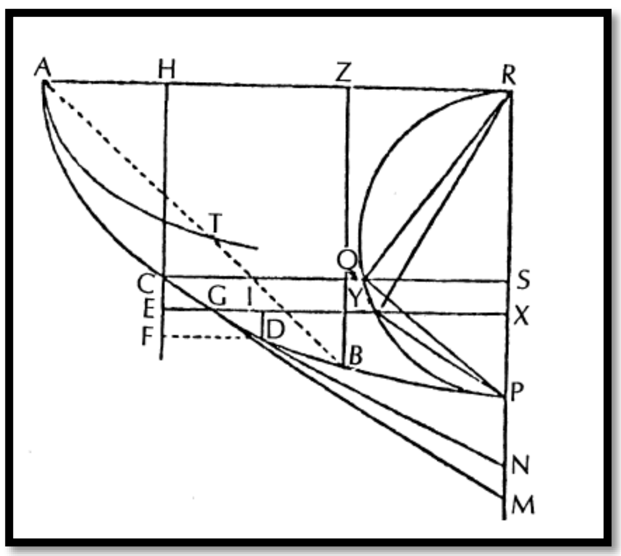


Figura 17. Demostración de Jacob Bernoulli de que la braquistócrona era un arco de cicloide.

Fuente: Dou, A. (Marzo, 1988). Orígenes del cálculo de variaciones (p.127). En *Historia de la matemática en los siglos XVII y XVIII*. Conferencia llevada a cabo en la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

Llegando a que $\frac{GD}{GI} = \frac{GN}{GX} = \frac{VP}{VX} = \frac{VR}{RX} = \frac{\sqrt{RP}}{\sqrt{RX}} = \frac{\sqrt{RP}}{\sqrt{HE}}$ además $\frac{EG}{CG} = \frac{\sqrt{RP}}{\sqrt{HC}}$ de donde se deduce la fórmula $\frac{EG}{\sqrt{HC}} : \frac{GI}{\sqrt{HE}} = \frac{CG}{GD}$ comprobando que efectivamente es una cicloide.

Otro de los campos de la física con mayor atención en el siglo XVIII, y vinculado con el surgimiento de las ecuaciones diferenciales ordinarias, fue la astronomía. Al respecto, Newton realizó grandes aportes a este campo, en particular abordó el problema conocido como los dos cuerpos, el cual consiste en describir el movimiento de un único planeta bajo la atracción gravitatoria del Sol, dejando cada uno de los cuerpos como una masa puntual. Igualmente, realizó una aproximación al tratamiento del problema de los tres cuerpos, es decir el estudio del comportamiento de la luna bajo la atracción de la tierra y el sol (Kline, 1992).

Los diversos aportes de Newton en relación a las ecuaciones diferenciales ordinarias se encuentran en sus trabajos realizados en el *Method of fluxions* (1671) y en el *Tractus* (1676). En dichos trabajos, resolvió algunas ecuaciones diferenciales en forma analítica, particularmente planteó que la solución a la ecuación $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$ tiene un grado de arbitrariedad dado por un polinomio de grado n-1. En esta misma dirección y ampliando sus anteriores trabajos, Newton escribió *Principios matemáticos de filosofía natural*[13]. En este texto se encuentran diversas soluciones de ecuaciones diferenciales mediante métodos geométricos. Fueron grandes los esfuerzos que se empezaron a realizar en el siglo XVIII con el propósito de replantear este último trabajo de Newton en términos analíticos.

En síntesis, los anteriores problemas muestran que la teoría de ecuaciones diferenciales empieza a emerger en el siglo XVII con la modelación y solución de problemas de la mecánica. En este sentido, uno de los aspectos que motivó el surgimiento de las ecuaciones diferenciales ordinarias se deriva del tratamiento de los problemas físicos. Entre las primeras técnicas que se aplicaron para solucionar ecuaciones diferenciales se encuentra la separación de variables. Las integrales a las

[13] Del latín: philosophiae naturalis principia mathematica

cuales conducía esta técnica eran resueltas por cuadraturas o aplicando métodos geométricos. Es importante señalar que paralelamente que emergían las ecuaciones diferenciales se ponía a prueba el nuevo cálculo, y se desarrollaba la teoría de funciones, esto último sustentado en el hecho de que se empezaron a trabajar curvas transcendentes (Capobianco, Enea, & Ferraro, 2016).

CAPÍTULO III

Primeros aportes en la constitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias

“Por lo tanto, en cierto sentido, la matemática ha sido más avanzada por aquellos que se distinguieron por la intuición más que por pruebas rigurosas”.

Felix klein

Técnicas de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias desarrolladas durante los siglos XVII y XVIII

El planteamiento y solución de problemas del campo de la mecánica a finales del siglo XVII motivó el surgimiento de un nuevo método de cálculo desarrollado por Newton y Leibniz. De aquí, que la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias surgió simultáneamente con la emergencia del cálculo diferencial e integral. Esta afirmación se constata en el anterior capítulo en el que expone algunos problemas físicos y sus correspondientes soluciones vinculadas con el uso del cálculo y las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, los problemas mecánicos resueltos en el siglo XVII no fueron los únicos aportes desarrollados alrededor de las ecuaciones diferenciales ordinarias. A finales del siglo XVII se realizaron diversas publicaciones en donde aparecen técnicas de solución para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, entre ellas, separación de variables, que aunque se utilizaba no se había formalizado, solución de ecuaciones homogéneas por sustitución y resolución de ecuaciones exactas.

Algunos aportes de mayor relevancia en el desarrollo del campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias se pueden evidenciar en las diversas cartas que escribían los matemáticos a finales del siglo XVII y principios del siglo XVIII. En estas cartas, se exponían métodos particulares de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Sin embargo, es difícil atribuir los resultados a un matemático particular, puesto que los métodos se desarrollaban en la dinámica del intercambio epistolar donde el aporte era colectivo. A modo de ejemplo, Huygens, en un artículo en las *Acta Eruditorum* de 1693 menciona literalmente las ecuaciones diferenciales, y en este mismo año, Leibniz, en otro artículo de la misma revista, expone que las ecuaciones diferenciales son funciones del triángulo característico.

El 11 de noviembre de 1675 Newton comunica a Leibniz mediante un anagrama la necesidad de solucionar ecuaciones diferenciales, le plantea el siguiente problema:

6a cc d ae 13e ff 7i el 9n 4o 4q rr 4s 9t 12 v x

Que en latín significa “data aequetione quotcunque fluente quantitaes involvente fluxiones invenire et veceversa” es decir dada una ecuación con cantidades fluentes, determinar las fluxiones y viceversa. Este mismo día Leibniz escribe la igualdad $\int y dy = \frac{y^2}{2}$, que aunque no es parte de la solución de una ecuación diferencial, introduce una herramienta fundamental para el desarrollo de las ecuaciones diferenciales, el símbolo de la integral (Nápoles, 1998). En conjunto los anteriores eventos dejan entre ver que se inicia un trabajo alrededor de proponer técnicas de solución para las ecuaciones diferenciales ordinarias.

3.1 Técnicas de solución para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

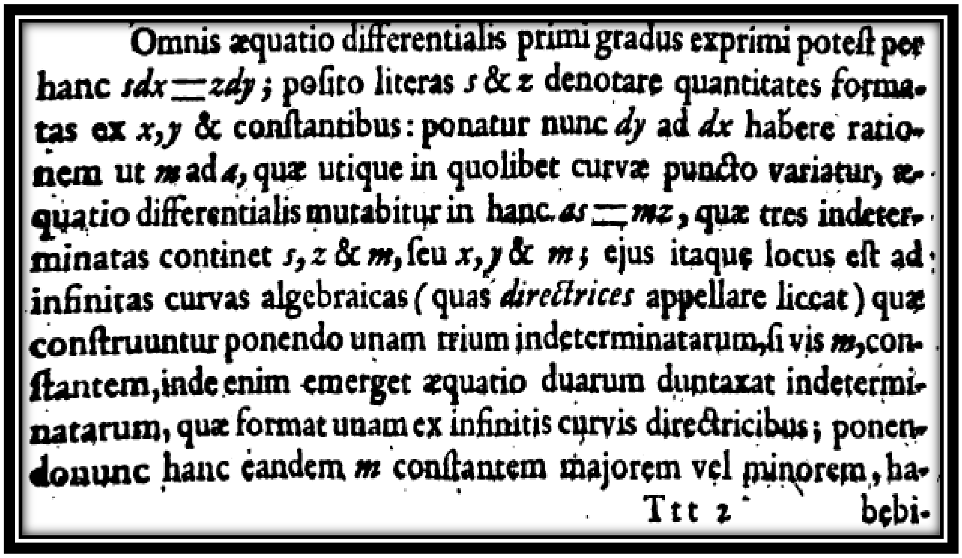
En el capítulo 2 se mostró que la modelación de fenómenos físicos en el siglo XVII conllevó al planteamiento y solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Sin embargo, solo se puso de manifiesto que la técnica más usada para solucionar las ecuaciones era la separación de variables, obviando otras técnicas que en paralelo empezaban a emerger. Algunas de estas provocadas por la necesidad de resolver una ecuación en particular, la cual no se podía abordar mediante separación de variables, y otras como el uso de series que tenían sus raíces en el trabajo con cuadraturas y la representación de una curva en términos de una ecuación. Recordemos que en los siglos XVII y XVIII uno de los avances hacia la teoría de funciones fue utilizar las series para representar las ecuaciones de las curvas trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, y en general las curvas transcendentes. Este hecho permeo el trabajo alrededor de las ecuaciones diferenciales ordinarias cuando la solución de la misma no se podía encontrar de manera inmediata con herramientas analíticas. A continuación se discute las diversas técnicas que surgen a finales del siglo XVII y mediados del siglo XVIII para resolver ecuaciones ordinarias de primer orden.

En el año de 1691 Leibniz comunicó a Huygens la técnica de separación de variables mediante una carta, en esta se exponía el proceso para resolver una ecuación de la forma $y(dx/dy) = f(x)g(y)$. Leibniz separando las variables obtuvo la ecuación

$\frac{dx}{f(x)} = g(y)\,\frac{dy}{y}$ la cual integró a ambos lados. Sin embargo, es importante aclarar que él no logró encontrar el método general para resolver este tipo de ecuaciones, únicamente expuso casos particulares de solución a esta ecuación. De igual modo, en el trascurso de este mismo año encontró que era posible reducir la ecuación diferencial de primer orden homogénea: $y' = f\left({}^{y}/_{x}\right)$, a cuadraturas mediante la trasformación $y = vx$, la cual, al reemplazarla en la ecuación diferencial permitía resolverla mediante el método de separación (Grosholz, 1987).

Fue Jean Bernoulli en las *Actas Eruditorum* de 1694 quien expuso de manera general los dos métodos de Leibniz, la separación de variables y la solución de ecuaciones homogéneas. Con respecto al primer método, Jean Bernoulli parte de que toda ecuación diferencial de primer orden expresada como $sdx = zdy$ donde s y z dependen de x e y respectivamente tiene infinitas curvas solución que pueden ser algebraicas o transcendentes cuando se integran las diferenciales; además señala que cada curva solución encontrada dependerá de las relaciones s y z que se establezca. A modo ejemplo, Bernoulli presenta la ecuación $axdx = yydy$ la cual integra encontrando la solución $\frac{1}{2}axx = \frac{1}{3}y^3$. Sin embargo, afirma que la misma ecuación diferencial satisface infinitas curvas que tienen la forma $\frac{1}{2}axx = \frac{1}{3}y^3 \pm b^3$ (b constante) (Bernoulli, 1694). De este modo, Jean Bernoulli generaliza y expone la técnica de separación de variables comunicada por Leibniz a Huygens.

A continuación se presenta la generalización de la técnica de separación de variables elaborada por Jean Bernoulli.



Omnis æquatio differentialis primi gradus exprimi poteſt per hanc $sdx = zdy$; poſito literas s & z denotare quantitates formatas ex x, y & conſtantibus: ponatur nunc dy ad dx habere rationem ut m ad a, quæ utique in quolibet curvæ puncto variatur, æquatio differentialis mutabitur in hanc $as = mz$, quæ tres indeterminatas continet s, z & m, ſeu x, y & m; ejus itaque locus eſt ad infinitas curvas algebraicas (quas *directrices* appellare liceat) quæ conſtruuntur ponendo unam trium indeterminatarum, ſi vis m, conſtantem, inde enim emerget æquatio duarum duntaxat indeterminatarum, quæ format unam ex infinitis curvis directricibus; ponendo nunc hanc eandem m conſtantem majorem vel minorem, ha-

Ttt 2 bebi-

Figura 18. Generalización de la técnica de separación de variables elaborada por Jean Bernoulli.

Fuente: Bernoulli, J. (1694). Modus Generalis Construen di Omnes equationes differentiales primi gradus (p.435). *Acta Eruditorum*.

Otro de los aportes de Leibniz en 1694 fue utilizar un cambio en la variable dependiente para reducir la ecuación diferencial ordinaria de primer orden lineal $y` + P(x)y = Q(x)$, a cuadraturas.

Una de las clasificaciones que históricamente se conoce de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden fue plantea por Newton en 1671 en su obra *The Method of Fluxions and Infinite Series.* Newton propone tres categorías para clasificar estas ecuaciones diferenciales. En la primera categoría se encuentra las ecuaciones en las cuales dos fluxiones dx y dy y un fluente x o y están relacionados, es decir $\frac{dy}{dx} = f(x)$. En el segundo tipo están las ecuaciones que involucran dos fluxiones y dos fluentes $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ y en el tercer tipo se abarcan las ecuaciones en las que involucran más de dos fluxiones, las cuales en la actualidad son las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Newton además se preocupa por resolver dos problemas que se plantea tanto en términos matemáticos como mecánicos, a) determinar la velocidad en un momento dado, o en términos matemáticos seria dada la relación entre los fluentes determinar la relación entre las fluxiones, b) determinar el espacio recorrido a partir de la velocidad del movimiento, es decir determinar la relación entre los fluentes dada la relación entre las fluxiones. Ambos problemas son fundamentales para continuar la discusión alrededor de técnicas de solución de ecuaciones diferenciales en el siglo XVII.

En la dinámica de la resolución de los dos problemas planteados, Newton encontró que ecuaciones sencillas como $Mx' + Ny' = 0$ obtenidas del cálculo de fluxiones no siempre se podían solucionar. Dedujo este hecho en el caso en que $M(x, y)$ y $N(x, y)$ fueran funciones racionales. Seguidamente utilizó el desarrollo de funciones[14] en serie de potencias (esta técnica se abordará con mayor profundidad en el apartado 3.5) como medio para resolver ecuaciones diferenciales.

Por su parte, Johan Bernoulli (1667-1748) en 1692 utilizó el método de la multiplicación por un factor integrante para resolver ecuaciones en las que los métodos anteriores no conducían a una respuesta. Por ejemplo, la ecuación $\alpha x dy - y dx = 0$ se puede solucionar en la actualidad mediante la separación de variables. Sin embargo, a finales del siglo XVII se desconocía la igualdad $\int \frac{dx}{x} = ln x$. Utilizando el método de multiplicación por un factor integrante Bernoulli resolvió ecuaciones del tipo $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, pero dicho método no tuvo mucho éxito ya que encontrar el factor integrante no era tarea fácil (Nápoles, 1998).

En el año de 1695 Jacques Bernoulli propone en las *Acta Eruditorum* resolver la siguiente ecuación[15]: $\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n$ Conocida actualmente como la ecuación de Bernoulli. Para el siguiente año Leibniz había demostrado que dicha ecuación se podía reducir a una ecuación lineal (primer grado en y e y') utilizando el cambio de variable $z = y^{1-n}$. En esta misma dirección, Jacques Bernoulli en las

[14] Recordemos que en esa época una función era una curva.

[15] Específicamente Bernoulli propone este problema al final de una demostración en las Acta Eruditorum de 1695 p. 553.

Acta de 1696 presentó dos formas de resolver la ecuación, una mediante la separación de variables, y otra retomando la sustitución propuesta por Leibniz.

La propuesta de Leibniz para resolver la ecuación de Bernoulli: $ady = ypdx + by^n qdx$, fue utilizar el cambio de variable en z para reducir la ecuación a una de la forma $\ldots dv + \cdots vdz + \cdots dz = 0$, es decir, a una ecuación diferencial lineal. Es importante mencionar que Leibniz no proporciona la sustitución que reduce la ecuación de Bernoulli a una lineal; ni siquiera presenta las funciones de los coeficientes, la respuesta la presenta en dos renglones de las *Acta* de 1696 (ver figura 19). En estas líneas Leibniz señala que omite los detalles de la solución pues ya han sido comunicados anteriormente a sus amigos y cree que no es necesario exponerlo en ese caso. De esta manera, él solo menciona que la ecuación se reduce a cuadraturas. El amigo al que se refiere Leibniz era L´Hopital y el método que omitió en la solución de la ecuación de Bernoulli se basa en las soluciones de las ecuaciones del tipo $m + ny + \frac{dy}{dx} = 0$. Para resolver la anterior ecuación Leibniz definía una nueva variable p mediante la ecuación $\frac{dp}{p} = ndx$, reduciendo de esta manera la ecuación inicial a una de la forma $pmdx + ydp + pdy = 0$; los últimos dos términos son la regla del producto $d(py)$, de donde se tiene que $d(py) = -mpdx$. A partir de este resultado Leibniz podía integrar $\int pmdx = -py$ encontrando la solución para y. Análogamente Leibniz resolvió la ecuación de Bernoulli, primero utilizando la sustitución $z = y^{1-n}$ con el objeto de transformarla en una ecuación lineal del tipo $\ldots dv + \cdots vdz + \cdots dz = 0$ y luego aplicando el método que le expuso a L´Hopital, podía llegar a la respuesta (Leibniz, 1696). Observemos que Leibniz describe la técnica que usamos hoy en día, es decir, primero reducir la ecuación a una lineal y segundo multiplicar por un factor integrante para poder encontrar la solución.

A continuación se presenta un fragmento de la demostración elaborada por Leibniz para resolver la ecuación de Bernoulli.

dis, separandisve ab invicem indeterminatis. *Problema* de eo præstando circa æquationem differentialem $ady = ypdx + by^n . qdx$ solvere possum, & reduco ad æquationem, cujus forma est ... dv + ... vdz + ... $dz = o$, ubi per punctata intelliguntur quantitates utcunque datæ per z. Talis autem æquatio generaliter per me reducta est ad quadraturas, ratione jam dudum amicis communicata, quã hic exponere necessarium non puto, contentus effecisse, ut acutissimus Autor problematis agnoscere possit methodum (ut opinor) non dissimilem suæ. Neque enim dubito & hoc ipsi innotuisse. Et sunt a me in istis multa olim tentata, non pauca etiam præstita, quæ jacent dispersa in schedis, nec mihi ipsi in numerato habentur, copia inopi, ut simul habere videar & non habere. Hæc tamen facilius suppeditavit memoria, ea ipsa die qua Lipsiensia Acta Decembris proximi sum nactus, id est hesterna, in ipsis scilicet nundinis Brunsvicensibus, ubi hæc inter distractiones utcunque in chartam conjeci.

Figura 19. Demostración de Leibniz de la ecuación de Bernoulli.

Fuente: Leibniz. (1696). Notatiuncula ad Acta Decemb 1695 (p147). *Acta Eruditorum*.

Un aspecto que se debe resaltar para entender el proceso que utilizó Leibniz, en la resolución de la ecuación de Bernoulli, es que en 1695 ya se conocía algunas técnicas para la resolución de ecuaciones diferenciales. Una de estas técnicas era muy utilizada por Newton y se trataba de encontrar soluciones mediante series. Por su parte, Leibniz y los Bernoulli utilizaban la separación de variables, así como sustituciones para resolver ecuaciones diferenciales homogéneas.

La ecuación de Bernoulli se resuelve modernamente siguiendo un proceso similar al desarrollado por Leibniz. Para corroborar esta afirmación consideremos la ecuación general de Bernoulli $\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)y^n$. Hágase $w = y^{1-n}$ entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{y^n}{(1-n)}\frac{dw}{dx}$ reemplazando estos valores en la ecuación se tiene: $\frac{dw}{dx} + (1-n)p(x)w = (1-n)Q(x)$ el factor integrante de esta ecuación está dado por $u(x) = e^{\int (1-n)p(x)dx}$ multiplicando por este factor integrante la ecuación, se obtiene que: $wu = \int e^{\int (1-n)p(x)dx}(1-n)Q(x)dx$ de donde se puede obtener solución y. Claramente el anterior proceso es análogo al de Leibniz, es decir, primero se reduce la ecuación a una lineal y luego se multiplica por un factor integrante.

Un nuevo reto para Jacques Bernoulli fue planteado en el año 1696 por su hermano Jean Bernoulli; se trataba de encontrar la familia de curvas que cortaran otra familia de curvas a partir de un ángulo dado. La repuesta de Jacques se limitó a unos casos particulares. Sin embargo Jean Bernoulli encontró la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales a una familia particular de curvas. Por su parte, Leibniz utilizó el siguiente método. Supuso la siguiente curva $y^2 = 2bx$, donde b se considera el parámetro de la familia (término que Leibniz introdujo), se tiene entonces que:

$$b = \frac{dy}{dx}y; \text{ Leibniz hace } b = -y\frac{dx}{dy}$$

Sustituyendo en $y^2 = 2bx$ se tiene que $y^2 = -2xy\frac{dx}{dy}$ como ecuación diferencial de las trayectorias; en consecuencia la solución está dada por $a^2 - x^2 = \frac{y^2}{2}$ En general Leibniz solo resolvió casos particulares de este problema, sin embargo logró entender la dinámica general del problema, lo cual le dio una visión sobre el método de solución.

El problema de encontrar trayectorias ortogonales continuó hasta 1715, año en el cual Leibniz desafíó a los matemáticos ingleses a encontrar un método general para hallar trayectorias ortogonales a una familia dada de curvas (Kline, 1992). Newton público su solución en *Philosophical Transactions* de 1716. Otros matemáticos como Nicolaus Bernoulli (1695-1726) en 1716 y Jacob Hermann (1678-1733) trabajaron el problema de las trayectorias ortogonales.

Jean Bernoulli solucionó el problema de encontrar el movimiento de un proyectil en un medio cuya resistencia es proporcional a una potencia de la velocidad. La ecuación que modela este fenómeno es $m\frac{dv}{dt} - kv^n = mg$. De otra parte, algunos matemáticos profundizaron en el campo de las ecuaciones diferenciales exactas

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, encontrando que $Ndx + Ndy$ es la diferencial exacta de una cierta función $z = f(x,y)$. Clariraut (1713-1765) mostró que la condición $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, era necesaria para que la ecuación pudiera ser exacta en el artículo de 1739 y 1740 (cap.19, sec.6). Esta condición también fue planteada por Euler, en una publicación[16] de 1734-35, concluyendo que si la ecuación es exacta, entonces se puede integrar. Igualmente, en el mismo artículo Euler descubrió que cuando una ecuación no es exacta se puede multiplicar por un factor integrante que la convierte en una exacta. Este resultado condujo a Euler a definir clases de funciones para las que se tienen factores integrantes. Otro resultado importante fue que demostró que si se tiene dos factores integrantes de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, el cociente de estos es una solución de la ecuación. Es preciso aclarar que Clairaut realizó un trabajo independiente al de Euler pero que condujo a la misma idea de factor integrante en su artículo de 1739. A mediados de 1740 ya se conocían todos los métodos elementales para solucionar ecuaciones de primer orden.

Los anteriores acontecimientos permiten poner en evidencia que hasta principio del siglo XVIII los métodos para resolver ecuaciones diferenciales eran incompletos, ya que faltaba desarrollar técnicas para solucionar ecuaciones de orden superior, y por lo tanto no se podía hablar de una teoría general de ecuaciones diferenciales ordinarias. Fue a mediados de los años 20 del siglo XVIII en donde empezaron a aparecer resultados de carácter general en la teoría de ecuaciones. Matemáticos como Riccati, Daniel Bernoulli, Euler y Lagrange empezaron a profundizar en los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

3.2 Soluciones singulares

Taylor en su obra *Methodus Incrementorum* de 1715[17] argumenta que las soluciones singulares no se derivan de la solución general dando un valor específico a la

[16] Este resultado también se encuentra publicado en (Euler L. , 1740)
[17] P.26

constante de integración. Este resultado lo obtuvo en el momento en que resolvía una ecuación de primer orden y de segundo grado. Desde 1694 ya Leibniz había discutido que la envolvente de una familia de soluciones es también una solución (Kline, 1992). Quienes se interesaron por estudiar estas soluciones fueron Clairaut y Euler.

Clairaut en 1743[18] desarrolló un método para hallar soluciones singulares a partir de la propia ecuación. Se trataba de eliminar y' de $f(x,y,y') = 0$ y hacer $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$. Clairaut parte de la ecuación $y = xy' + f(y')$ encontrando que es posible obtener una solución singular que no deriva de la general al dar un valor a la constante c. El proceso desarrollado por Clairaut consiste en denotar a y' por p transformando la ecuación en $y = xp + f(p)$, derivando respecto a x Clairaut tiene $p = p + \{x + f'(p)\}\frac{dp}{dx}$. Para que se cumpla la anterior igualdad necesariamente $\frac{dp}{dx} = 0$ o $x + f'(p) = 0$, la ecuación $\frac{dp}{dx} = 0$ es verdadera si $y' = c$, por lo tanto la ecuación original queda transformada en $y = cx + f(c)$ siendo esta la solución general. Observe que la solución es una familia de rectas. Ahora bien, el segundo factor $x + f'(p) = 0$ se utiliza junto con la ecuación original para llegar a una solución singular: $x = -f'(p)$, $y = -tf'(p) + f(p)$. Veamos que esta solución es la envolvente de la solución general, pues si se deriva la general respecto de c se obtiene $x + f'(c) = 0$. La envolvente resulta de eliminar c entre la solución general y la derivada de esta, pero estas dos ecuaciones resultantes son exactamente las mismas que las que proporciona la solución singular. Es preciso aclarar que Clairaut no observó el hecho de que la solución singular es una envolvente, pero sí manifestó que la solución singular no se encuentra en la general. Euler en su obra *Institutiones* de 1768[19] planteó un criterio que permitía distinguir la solución singular de una integral particular cuando no se tenía la solución general.

De otra parte, Laplace extendió el concepto de soluciones singulares a ecuaciones de orden superior y a ecuaciones diferenciales de tres variables, las cuales denomino

[18] *His. De´Acad. Des Sci*, Paris, 1734, 196-215.
[19] Volumen 1, pag 393

integrales particulares. Un trabajo más amplio lo realizó Lagrange, en 1774[20] planteó un método general que permite obtener la solución singular a partir de la solución general. En términos generales el método consiste en partir de la solución general $V(x, y, a) = 0$ y encontrar $\frac{dy}{da}$ igualarla a cero y eliminar a entre esta ecuación y $V = 0$. Un aporte importante de Lagrange fue que dio la interpretación geométrica de la solución singular como la envolvente de la familia de curvas integrales (Kline, 1992).

La teoría general de las soluciones singulares en la versión actual fue desarrollada por Cayley y Darboux en el siglo XIX exactamente en 1872.

3.3 Técnicas de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden y ecuaciones de Riccati

Al igual que las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden surgen de la modelación de problemas físicos, las ecuaciones de segundo orden emergen también de la solución de los problemas de este campo. En 1691 Jacques Bernoulli resolvió el problema de la velaría, el cual consiste en modelar la forma de una vela bajo la presión del viento. La solución de este problema se presenta en el texto de *Cálculo Infinitesimal* de 1691 de Jacques Bernoulli y condujo a la ecuación $\frac{d^2x}{ds^2} = \left(\frac{dy}{ds}\right)^3$ (s es la longitud de arco) (Kline, 1992). Un aspecto importante que resaltó Jacques Bernoulli en la solución a este problema era el hecho de que matemáticamente este problema era el mismo que el de la catenaria. En esta misma dirección, sobre las ecuaciones de segundo orden, surge la necesidad de modelar el perfil de una cuerda elástica que vibra sujeta por los extremos. Este problema llevo al planteamiento de una ecuación de segundo orden. Por su parte, Brook Taylor (1685-1731) en 1713 obtuvo la frecuencia fundamental de una cuerda vibrante tensa, solucionando la ecuación $a(\ddot{x})^2 = \dot{s}y\dot{y}$ donde $\dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ la derivación es respecto al tiempo

[20] Este trabajo también se encuentra en *Euvres*, 4, 5-108.

(Kline, 1992). De la solución de esta ecuación se tiene que $y = A\,\text{sen}({}^{x}/_{a})$ la cual corresponde al perfil de la cuerda en todo instante, la variable a esta dada por $a = {}^{l}/_{\pi}$ donde l es la longitud de la cuerda. En términos modernos la frecuencia fundamental es $v = \frac{1}{2l}\sqrt{{}^{T}/_{\sigma}}$ donde T es la tensión de la cuerda y $\sigma = {}^{m}/_{g}$, m es la masa por unidad de longitud y g es la gravedad.

Euler se interesó por resolver ecuaciones de segundo orden a partir de la solución de problemas mecánicos, tales como, el movimiento del péndulo en medios con rozamiento, y la resistencia del aire sobre los proyectiles, ambos problemas conducían al planteamiento de ecuaciones de segundo orden. En 1727 Euler consideró un tipo de ecuaciones de segundo orden que se pueden reducir a través de un cambio de variables a ecuaciones de primer orden[21]. Por ejemplo, en el caso de la ecuación $\left(\frac{dy}{dx}\right)^{p-2}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ax^m}{y^n}$ Euler introduce las variables t y v mediante $y = e^v t(v),\ \ x = e^{av}$ a es una constante que se debe determinar. Con las ecuaciones anteriores se puede calcular ${}^{dy}/_{dx}$ y ${}^{d^2y}/_{dx^2}$ y sustituir obteniendo una ecuación de segundo orden en t como función de v. Euler fija a de manera que se pueda eliminar el factor exponencial y v ya no se encuentre explícitamente, hace $z = {}^{dv}/_{dt}$ y reduce la ecuación de segundo orden a una de primer orden.

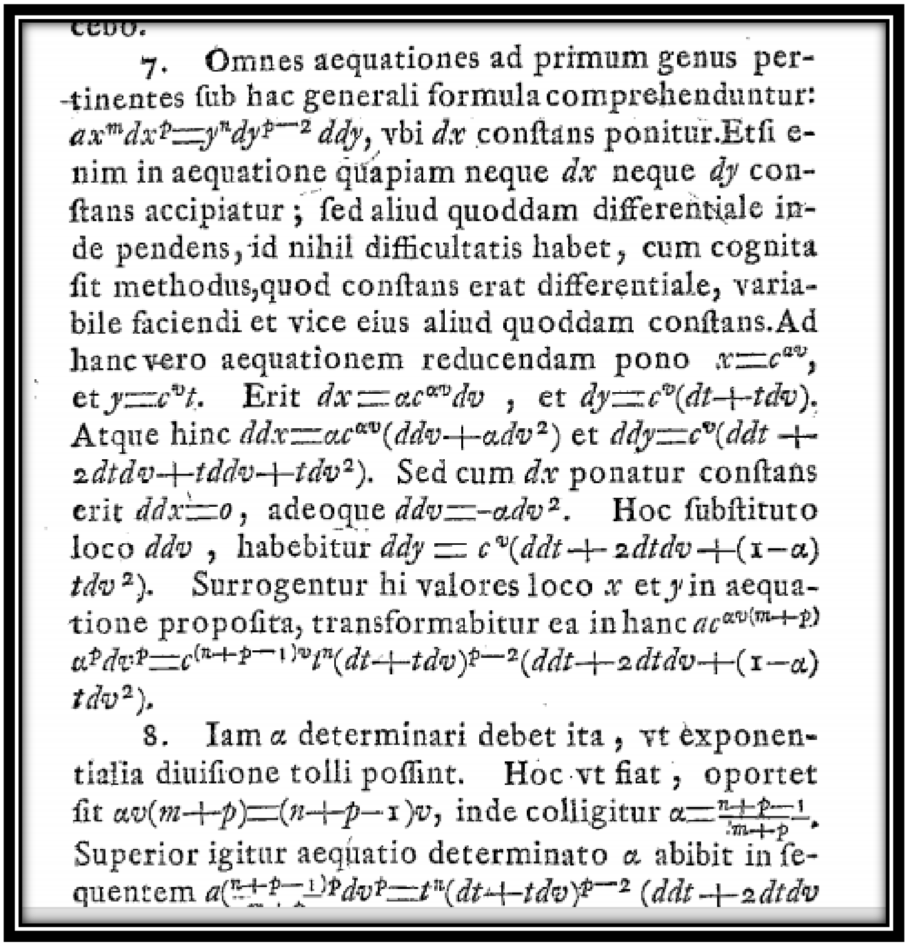
A continuación se detalla el proceso que utilizó Euler para reducir la ecuación $\left(\frac{dy}{dx}\right)^{p-2}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ax^m}{y^n}$. Euler inicia planteando la ecuación $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$ y señala que tomará a $x = e^{av}$ e $y = e^v t$. Con los anteriores valores calcula las primeras y segundas derivadas es decir, $dx = ae^{av}dv$, $dy = e^v(dt + tdv)$, $ddx = ae^{av}(ddv + adv^2)$, $ddy = e^v(ddt + 2dtdv + tddv + tdv^2)$. Toma a $ddx = 0$ de manera que $ddv = -adv^2$. Reemplazando Euler Obtiene $ddy = e^v(ddt + 2dtdv + (1-a)tdv^2)$. A partir de los anteriores resultados Euler regresa

[21] Este trabajo de Euler también se publicó en (Euler L. , Nova Methodus Innumerabiles Aequationes Differentiales Secundi Gradus Reducendi ad Aequationes Differentiales Primi Gradus, 1732)

a la ecuación diferencial original y reemplaza los valores encontrados obteniendo $ae^{av(m+p)}a^p dv^p = e^{(n+p-1)v}t^n(dt + tdv)^{p-2}(ddt + 2dtdv + (1 - a)tdv^2)$.

Fijando el valor de a de manera que se eliminara el factor exponencial en la ecuación diferencial, se tiene $a = \frac{n+p-1}{m+p}$ y $a\left(\frac{n+p-1}{m+p}\right)^p dv^p = t^n(dt + tdv)^{p-2}\left(ddt + 2dtdv + \frac{m-n+1}{m+p}tdv^2\right)$. El paso siguiente fue realizar una nueva transformación, a saber, $dv = zdt$ de donde se tiene que $ddv = zddt + dzdt$ y $ddv = -adv^2$ por lo tanto $ddv = \frac{1-n-p}{m+p}z^2dt^2$, ahora bien $ddt = \frac{ddv}{z} - \frac{dzdt}{z} = \frac{-dzdt}{z} + \frac{1-n-p}{m+p}zdt^2$. Reemplazando en la ecuación diferencial Euler obtiene $a\left(\frac{n+p-1}{m+p}\right)^p z^p dt^p = t^n(dt + tzdt)^{p-2}\left(\frac{1-n-p}{m+p}zdt^2 - \frac{dzdt}{z} + 2zdt^2 + \frac{m-n+1}{m+p}tzzdt^2\right)$ Dividendo por dt^{p-1} la ecuación, se tiene $a\left(\frac{n+p-1}{m+p}\right)^p z^p dt = t^n(1 + tz)^{p-2}\left(\frac{1+2m-n+p}{m+p}zdt - \frac{dz}{z} + \frac{m-n+1}{m+p}tz^2dt\right)$ de este modo Euler logró reducir la ecuación $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2}ddy$ de segundo orden a una de primer orden. Finalmente multiplicó la ecuación resultante por z llegando a $a\left(\frac{n+p-1}{m+p}\right)^p z^{p+1}dt = tz^n(1 + z)^{p-2}\left(\frac{1+2m-n+p}{m+p}z^2dt + \frac{m-n+1}{m+p}tz^3dt - dz\right)$ (Euler, 1732). Históricamente el anterior trabajo es fundamental pues inicia el estudio de las ecuaciones de segundo orden, además introduce la función exponencial, la cual es fundamental para solución de ecuaciones de segundo orden.

A continuación se presenta parte de la demostración elaborada por Euler para solucionar la ecuación de segundo orden.



cedo.

7. Omnes aequationes ad primum genus pertinentes ſub hac generali formula comprehenduntur: $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} ddy$, vbi dx conſtans ponitur. Etſi enim in aequatione quapiam neque dx neque dy conſtans accipiatur; ſed aliud quoddam differentiale inde pendens, id nihil difficultatis habet, cum cognita ſit methodus, quod conſtans erat differentiale, variabile faciendi et vice eius aliud quoddam conſtans. Ad hanc vero aequationem reducendam pono $x = c^{\alpha v}$, et $y = c^v t$. Erit $dx = \alpha c^{\alpha v} dv$, et $dy = c^v(dt + tdv)$. Atque hinc $ddx = \alpha c^{\alpha v}(ddv + \alpha dv^2)$ et $ddy = c^v(ddt + 2dtdv + tddv + tdv^2)$. Sed cum dx ponatur conſtans erit $ddx = o$, adeoque $ddv = -\alpha dv^2$. Hoc ſubſtituto loco ddv, habebitur $ddy = c^v(ddt + 2dtdv + (1-\alpha) tdv^2)$. Surrogentur hi valores loco x et y in aequatione propoſita, transformabitur ea in hanc $ac^{\alpha v(m+p)} \alpha^p dv^p = c^{(n+p-1)v} t^n (dt + tdv)^{p-2} (ddt + 2dtdv + (1-\alpha) tdv^2)$.

8. Iam α determinari debet ita, vt exponentialia diuiſione tolli poſſint. Hoc vt fiat, oportet ſit $\alpha v(m+p) = (n+p-1)v$, inde colligitur $\alpha = \frac{n+p-1}{m+p}$. Superior igitur aequatio determinato α abibit in ſequentem $a(\frac{n+p-1}{m+p})^p dv^p = t^n(dt + tdv)^{p-2} (ddt + 2dtdv$

Figura 20. Demostración de Euler sobre la solución de una ecuación de segundo orden.

Fuente: Euler, L. (1732). Nova Methodus Innumerabiles Aequationes Differentiales Secundi Gradus Reducendi ad Aequationes Differentiales Primi Gradus (p.128). En *Opera Omnia* (1 ed., Vol. 22).

Daniel Bernoulli en su artículo de la cadena en suspensión (1733) trabaja el problema de la cadena oscilante de grosor no uniforme planteado la ecuación $a\frac{d}{dx}\left(g(x)\frac{dy}{dx}\right) + y\frac{dg(x)}{dx} = 0$ donde $g(x)$ es la distribución de peso a lo largo de la cadena. Cuando $g(x) = {x^2}/{l^2}$ se tiene una solución en serie, la cual en notación moderna seria $y = 2(\frac{2x}{a})^{-1/2} \quad J_1(2\sqrt{2x/a})$ con $J_1(2\sqrt{2l/a})=0$ siendo J_1 la función de Bessel de primera especie de índice uno. Ahora bien, en las soluciones de Daniel Bernoulli no se tenía presente la referencia del desplazamiento en función del tiempo, por lo tanto sus trabajos desde el punto de vista de las matemáticas queda en el campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Euler continúo los trabajos de Daniel Bernoulli en su artículo sobre *las oscilaciones de un hilo flexible cargado con una cantidad arbitraria de pesos*. Aunque los resultados Euler no se diferencian mucho de los de Daniel Bernoulli se destaca el hecho de que los argumentos matemáticos de Euler son más claros. Por ejemplo, en el caso de la cadena continua que tiene el peso proporcional a x^n Euler plantea la ecuación $\frac{x}{n+1}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+\frac{y}{a}=0$ llegando a que $y=Aq^{n/2}I_n\left(2\sqrt{q}\right)$ donde $q=-\frac{(n+1)x}{a}$ la n se utiliza porque se introducen funciones de Bessel de índice real arbitrario. Otra solución a este mismo problema pero planteada en forma de integral es

$$y=A\frac{\int_0^1(1-t)^{(2n-1)/2}\cosh\left(2t\sqrt{\frac{(n+1)x}{a}}\right)dt}{\int_0^1(1-\tau^2)^{2n-1/2}d\tau}$$

Históricamente el anterior resultado es uno de los primeros casos de solución de ecuación diferencial de segundo orden expresada en términos de una integral.

El matemático italiano J.F Riccati (1676-1754) en las *Acta Eruditorum* de 1724 se interesó por estudiar curvas cuyos radios de curvatura dependieran solo de las ordenadas, esto lo llevo a la ecuación de segundo orden $x^m\frac{d^2x}{dp^2}=\frac{d^2y}{dp^2}+(\frac{dy}{dp})^2$ o lo que es lo mismo $x^md^2x=d^2y+(dy)^2$ en donde x e y depende de p. Mediante cambios de variables se tiene $x^m\frac{dq}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{u^2}{q}$ siendo esta una ecuación de primer orden. Suponiendo que q es una potencia de x, por ejemplo en el caso que sea x^n se llega a la forma $\frac{du}{dx}+\frac{u^2}{x^n}=nx^{m+n-1}$; a partir de esta ecuación Riccati demuestra cómo resolver para valores especiales de n mediante el método de separación de variables. El trabajo de Riccati es importante pues presenta una forma de reducir ecuaciones de segundo orden al primero. Esta idea de reducir se constituirá en uno de los métodos importantes para solucionar ecuaciones diferenciales de orden superior.

Riccati estudió la ecuación $\frac{dy}{dx} + ay^2 = b^\alpha$ (α, a, b son constantes) y encontró que se podía resolver integrándola en funciones elementales, este método se extendió para ecuaciones del tipo $\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ (P, Q, R funciones continuas). Daniel Bernoulli (1700-1782) planteó que dicha ecuación se puede integrar mediante funciones elementales si $\alpha = -2$ o $\alpha = \frac{4k}{(2k-1)}$ $k\ entero$. En el año de 1738 Euler resolvió esta ecuación aplicando teoría de series y encontró que si se tiene dos soluciones particulares, la integración de esta ecuación diferencial se reduce a cuadraturas.

En 1760 Euler consideró la ecuación de Riccati $\frac{dz}{dx} + z^2 = ax^n$ y mostró que conociendo una solución particular v, es posible transformar la ecuación en una ecuación lineal a través de la transformación[22] $z = v + \frac{1}{u}$. Igualmente probó que si se tienen dos integrales particulares, la integración de la ecuación original se reduce a encontrar cuadraturas. El proceso que utilizó Euler para solucionar la ecuación de Riccati se basa en el uso series. Parte de la ecuación $dy + yydx = ax^m dx$ de donde establece que $a = cc$ y $m = -4n$. Remplazando obtiene $dy + yydx - ccx^{-4n}dx = 0$, haciendo $y = cx^{-2n} + \frac{dz}{zdx}$ encuentra las primeras y segundas derivadas de y con respecto a x. Con los anteriores resultados la ecuación queda $-2ncx^{-2n-1}dx + \frac{ddz}{zdx^2} + \frac{2cx^{-2n}dz}{z} = 0$, multiplicando por z se tiene $\frac{ddz}{dx^2} + \frac{2cdz}{x^{2n}dx} - \frac{2ncz}{x^{2n+1}} = 0$. Euler expresa a z en función de una serie $z = Ax^n + Bx^{3n-1} + Cx^{5n-2} + Dx^{7n-3} + Ex^{9n-4} + \cdots$ y halla sus primeras y segundas derivadas de donde obtiene

$$0 = n(n-1)Ax^{n-2} + (3n-1)(3n-2)Bx^{3n-3} + (5n-2)(5n-3)cx^{5n-4} + \cdots$$

[22] Este trabajo fue publicado en (Euler., L, 1763)

$$+2ncAx^{-n-1} + 2(3n-1)cB + 2(5n-2)cC$$
$$+ 2(7n-3)(cD - 2ncA - 2ncB - 2cC - 2ncD)$$

Con los anteriores resultados determinan los coeficientes

$$2(2n-1)cB + n(n-1)A = 0, \qquad B = \frac{-n(n-1)A}{2(2n-1)c}$$

$$2(4n-2)cC + (3n-1)(3n-2)B = 0, \qquad C = \frac{-(3n-1)(3n-2)B}{4(2n-1)C}$$

$$2(6n-3)cD + (5n-2)(5n-3)C = 0, \qquad D = \frac{-(5n-2)(5n-3)C}{6(2n-1)c}$$

Finalmente Euler realiza la solución de la ecuación para distintos valores de n, además concluye diversas propiedades de esta ecuación, algunas de ellas ya fueron mencionadas con anterioridad (Euler, 1763).

D´Alambert en 1763 consideró la forma general de la ecuación de Riccati $\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{-\gamma^2 xS}{2aLe}$ e hizo $S = e^{[\int p dx]}$, $p = f(x)$ obteniendo de este modo la forma general para una ecuación en p como función de x.

3.4 Técnicas de solución de ecuaciones de orden superior

Daniel Bernoulli en diciembre de 1734 comunica a Euler la solución del problema del desplazamiento transversal de una barra elástica (cuerpo unidimensional de madera o de acero) sujeta a la pared en uno de los extremos mientras el otro queda libre. El comportamiento de este problema fue modelado por Bernoulli a través de la ecuación $K^4 \frac{d^4y}{dx^4} = y$ donde K es una constante, x es la distancia desde el extremo libre de la barra e y es el desplazamiento vertical en ese punto respecto a la posición sin pandeo de la barra. En 1735 Euler respondió a Daniel Bernoulli manifestándole que él también había llegado a esta misma ecuación, sin embargo no pudo integrarla, el único método que encontró viable para resolverla fue utilizar series. Pero el uso de las series condujo a Euler a cuatro series diferentes, las cuales representaban funciones circulares y exponenciales, pero en ese momento Euler no era consiente de este resultado. Fue en 1739 en una carta a Jean Bernoulli que Euler discute el hecho de que la solución podía representarse como $y = A\left[\left(\cos\frac{x}{K} + \cosh\frac{x}{K}\right) - \frac{1}{b}\left(\operatorname{sen}\frac{x}{K} + \operatorname{senh}\frac{x}{K}\right)\right]$ donde b estaba determinado por la condición $y = 0$ cuando $x = l$ así que $b = \frac{\sin\frac{l}{K}+\sinh\frac{l}{K}}{\cos\frac{l}{K}+\cosh\frac{l}{K}}$. Jean Bernoulli responde a Euler señalando que desde 1700 había considerado este tipo de ecuaciones, incluso con coeficientes variables, pero en realidad solo había resuelto un caso particular de una ecuación de tercer orden que la redujo a una de segundo orden.

El anterior problema y otros vinculados con el campo de la elasticidad motivaron a Euler a resolver ecuaciones lineales generales con coeficientes constantes. Fue en 1743 que Euler considera la ecuación $0 = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + L\frac{d^ny}{dx^2}$ donde los coeficientes son constantes[23]. El estudio de esta ecuación condujo a Euler a argumentar que la solución general ha de tener n constantes arbitrarias, y que ésta se encuentra dada por la suma de n soluciones particulares, cada una de las cuales se multiplica por una constante. En términos generales el método usado por Euler consistió en utilizar la sustitución $y = e^{\int rdx}$ (r constante). Para obtener r emplea la ecuación característica $A + Br + Cr^2 + \cdots + Lr^n = 0$. Si se tenía que q es una raíz real simple de la ecuación característica, entonces Euler concluía que $ae^{[\int qdx]}$ era una solución de la ecuación diferencial original. Ahora bien, si la ecuación característica tiene una raíz múltiple q, Euler hace $y = e^{qx}u(x)$ y sustituye en la ecuación diferencial, teniendo que $y = e^{qx}(a + \beta x + \gamma x^2 + \cdots + \rho x^{k-1})$, esta solución tiene k constantes arbitraría si q aparece k veces como raíz de la ecuación característica. Igualmente Euler trabajo los demás casos, raíces complejas conjugadas y raíces complejas múltiples, llegando de este modo a resolver completamente el

[23] Este trabajo se encuentra publicado en (Euler., L, 1743)

problema de encontrar las soluciones de ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes.

En 1750 Euler estudió la ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n no homogénea. El proceso planteado por Euler consistía en multiplicar la ecuación por e^{ax}, integrar a ambos lados y luego determinar a de manera que la ecuación se reduzca a una de orden inferior. En el año de 1753 Euler estudió el método del factor integrante y lo utilizó de forma frecuente para reducir el orden de las ecuaciones.

Los trabajos alrededor de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes fueron ampliados por Lagrange en 1762. Lagrange consideró la ecuación $Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + \cdots = T$ donde L, M, N y T son funciones de T y planteó un método que lo llevó al concepto de ecuación adjunta. De igual modo, Lagrange descubrió que la solución general de la ecuación homogénea es la suma de soluciones particulares independientes, cada de una de las cuales es multiplicada por una constante arbitraria.

D´Alambert (1717- 1783) en 1766 descubrió que la suma de una solución particular y una solución general de una ecuación homogénea es la solución general de la ecuación lineal no homogénea correspondiente a la ecuación homogénea.

Entre los años 1768 -1770 Euler realizó una sistematización de los trabajos elaborados alrededor de las ecuaciones diferenciales publicado en *Instituciones Calculis.* Este trabajo se constituye en la primera teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Podemos encontrar en dicho trabajo la caracterización de ecuaciones diferenciales de primer orden, es decir separables, lineales y exactas, además se expone las ecuaciones de segundo orden (lineales, y las susceptibles de reducir el orden) y una generalización de las de orden superior, exponiendo el método de series de potencia para resolver ecuaciones de la forma $y'' + ax^n y = 0$. Un factor importante de este trabajo es la conceptualización de las ecuaciones diferenciales, en particular el $\frac{dy}{dx}$ lo entiende Euler como un cociente entre diferenciales.

En el último cuarto del siglo XVIII Lagrange (1736-1813) encontró que la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes tiene la forma $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots c_n y_n$ donde $c_1, c_2, \ldots c_n$ son constantes arbitrarias y $y_1, y_2, \ldots y_n$ son soluciones linealmente independientes. En 1774 descubrió el método de variación de parámetros.

3.5 Método de integración por series

Desde el siglo XVII los matemáticos usaron las series como una herramienta que permite estudiar algunas curvas de las cuales no se podía obtener una representación analítica fácilmente. Algunas de estas curvas son la cicloide, la catenaria y en general las curvas trascendentes como: curvas trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. El uso de las series no solo posibilitaba una representación analítica de una función, sino que permitía encontrar algunas cuadraturas que hasta ese momento no se habían podido estudiar. Este último hecho se constituye en el vínculo que permite relacionar las ecuaciones diferenciales ordinarias y la solución de las mismas mediante la técnica de series.

A partir 1700 las soluciones por series han sido utilizadas frecuentemente en el campo de las ecuaciones diferenciales, cuando los procesos analíticos no conducen a una respuesta. Uno de los primeros matemáticos que utilizó las series de potencia para solucionar ecuaciones diferenciales fue Leibniz. Él trabajó casos particulares tales como la derivada de $y = a \log \frac{a+x}{a}$ la cual en términos de una ecuación diferencial queda expresada como $a \frac{dy}{dx} + x \frac{dy}{dx} - a = 0$. Leibniz asume que y puede expresarse como $y = Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \cdots$ y por lo tanto $\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \cdots$ Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtienen los coeficientes $A, B, C, D, ..$ y finalmente encuentra que $y = x - \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3x^2} - \frac{x^4}{4x^3} + \cdots$ Un método similar utiliza Newton para resolver cierto tipo de ecuaciones diferenciales. A modo ejemplo consideremos el proceso que utilizó para solucionar la ecuación $\dot{y} = 2 + 3x - 2y + x^2 + x^2y$. El proceso planteado por Newton consiste en suponer que y se puede expresar como $y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots$ derivando tiene $\dot{y} = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \cdots$ utilizando todas las ecuaciones anteriores obtiene que $A_1 = 2 - 2A_0$, $2A_2 = 3 - 2A_1$, $3A_3 = 1 + A_0 - 2A_2 + \cdots$ De esta manera, encuentra los A_i, el hecho de que A_0 queda indeterminado deja entrever a Newton que tiene infinitas soluciones la ecuación, sin embargo el concepto de constante arbitraria fue plenamente apreciado solo hasta 1750. Newton no solo utiliza series para solucionar ecuaciones diferenciales de primer orden, sino para integrar funciones algo complicadas.

En la obra *Analysis Per Quantitatum, Series, Fluxiones, ac Differentias: cum Enumeratione Linearum Tertii Ordinis* de Newton de 1671 se expone un método para resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales mediante el uso de las series. Por ejemplo para resolver $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + y + xx + xy$ con la condición inicial $y(0) = 0$ Newton procede de la siguiente manera. Supone que $y = 0 + \cdots$ a partir de la condición inicial, y reemplaza en la ecuación obteniendo $\frac{dy}{dx} = 1 + \cdots$ integrando el resultado con respecto a x Newton obtiene $y = x + \cdots$ Para obtener el siguiente término de la serie utiliza la ecuación diferencial y el anterior resultado llegando a que $\frac{dy}{dx} = 1 - 2x + \cdots$ Integrando este nuevo resultado se tiene $y = x - x^2 + \cdots$ Utilizando la ecuación diferencial y el resultado anterior se llega a que $\frac{dy}{dx} = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ Realizando varias iteraciones mediante el procedimiento anterior Newton llega a la solución $y = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6 + \cdots$. Finalmente demuestra que la solución a la que llegó satisface la ecuación, argumentando que si se deriva la solución y se conoce que $y = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6$ se obtiene la igualdad en la ecuación (Newton, 1671).

Euler utilizó desde 1750 el método de integración por series para resolver ecuaciones diferenciales que no podían integrarse de forma cerrada, es decir en las que no era posible encontrar una solución en un número finito de términos. De esta manera, este método se convirtió en el preferido de Euler. La propuesta de Euler consistía en suponer que la solución de la ecuación tenía la forma $y = x^{\lambda}(A + Bx + Cx^2 + \cdots)$ sustituyendo y y sus derivadas en la ecuación diferencial obtenía λ. Los coeficientes $A, B, C, \ldots$ los hallaba mediante la condición de que fuera cero el coeficiente de cada una de las potencias de x en la serie que se encontraba. Por ejemplo, Euler establece la ecuación $\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \left(a^2 - \frac{\beta^2}{r^2}\right)u = 0$ al trabajar el problema de la membrana oscilante, la solución mediante series es $u(r) = r^{\beta}\left\{1 - \frac{1}{1.(\beta+1)}\left(\frac{ar}{2}\right)^2 + \frac{1}{1.2(\beta+1)(\beta+2)}\left(\frac{ar}{2}\right)^4 - \frac{1}{1.2.3(\beta+1)(\beta+2)(\beta+4)}\left(\frac{ar}{2}\right)^6 + \cdots\right\}$.

En la obra *Institutiones Calculi Integralis* de 1769 Euler estudió la ecuación diferencial hipergeométrica $x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [c - (a+b+1)x]\frac{dy}{dx} - aby = 0$ la cual solucionó mediante la serie $y = 1 + \frac{a.b}{1.c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2.c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1.2.3.c(c+1)(c+2)}x^3 + \cdots$ es importante señalar que los trabajos de Euler en relación a las series y solución de ecuaciones diferenciales son complicados de seguir, aunque los métodos son los que utilizamos en la actualidad.

El método para solucionar ecuaciones diferenciales mediante series infinitas adquirió protagonismo con las ecuaciones diferenciales parciales. La solución de estas mediante separación de variables conllevó a ecuaciones diferenciales ordinarias que debían ser resueltas a través de series. Una de estas ecuaciones, tal vez la más importante, es la ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

Donde n, un parámetro, puede ser complejo y x también puede ser complejo. Friedrich Wilhem Bessel (1784-1846) considero que n y x eran reales. Aunque este tipo de ecuaciones ya habían aparecido en trabajos anteriores con Daniel Bernoulli y Euler, fue Bessel quien en 1816 desarrolló uno de los primeros trabajos sistemáticos[24] alrededor de esta ecuación. Consideró que la ecuación tiene dos soluciones independientes para cada n, $J_n(x)$ y $Y_n(x)$, llamadas en la actualidad las funciones de Bessel de la primera y segunda clase, respectivamente. En el caso en que n es entero Bessel señaló la relación integral $J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nu - x\sin u)du$ (escribió I_k^b y la k es la x que usamos actualmente) obtuvo también la serie

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{x^2}{2^2.1!\,(n+1)} + \frac{x^4}{2^4.2!\,(n+1)(n+2)} - \cdots\right\}$$

Bessel encontró diferentes relaciones de esta primera función, entre ellas que $J_0(x)$ tiene un número infinito de ceros reales y que $xJ_{n+1}(x) - 2nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x) = 0$ (fórmula recursiva).

Diversos matemáticos buscaron la otra función independiente para la ecuación de segundo orden. En el caso en el que n no es entero se tiene que $J_{-n}(x)$ es la segunda solución. Si n es entero, Hermann Hankel (1839-1873) propuso la solución

$$Y_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r\left[\left({}^1\!/_2\right)z\right]^{n+2r}}{r!\,(n+r)!}\left\{2log\left(\frac{z}{2}\right) + 2\gamma - \sum_{m=1}^{n+r}\frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{r}\frac{1}{m}\right\} - \sum_{r=0}^{n-1}\frac{\left[\left({}^1\!/_2\right)z\right]^{-n+2r}(n-r-1)!}{r!}$$

Donde γ es la constante de Euler. Diferentes matemáticos trabajaron en la mecánica celeste llegando a la ecuación de Bessel y a relaciones de estas funciones.

Otra ecuación que dio lugar a extender el uso de series para solucionar ecuaciones diferenciales ordinarias fue la de Legendre (1752-1833) $(1-x^2)y'' - 2xy' +$

[24] Este trabajo se pude encontrar en (Werke, 1826, p.84-109)

$n(n+1)y = 0$. Esta ecuación resulta de la separación de variables aplicada a la ecuación del potencial expresada en coordenadas esféricas. Robert Murphy en 1833 escribió el texto, *Elementary Principles of the Theories of Electricity, Heat and Molecular Actions*. En dicho texto se expone algunos resultados sobre los polinomios de Legendre, entre ellos demostró que cualquier función $f(x)$ puede ser desarrollada en términos de $P_n(x)$ si se integra término a término y se aplica la propiedad de ortogonalidad. Las funciones de Legendre y de Bessel se extendieron a n complejos y x complejos de las cuales se obtuvieron diferentes representaciones y relaciones entre ellas.

CAPITULO IV

"…la matemática, a pesar de su edad, no está ni mucho menos condenada a una esclerosis progresiva por su complejidad creciente, sino que sigue intensamente viva, y se alimenta por las profundas raíces que tiene en la mente y en la naturaleza"

Weyl

Teorema de Existencia y Unicidad

El teorema de existencia y unicidad tiene una gran importancia en el campo de la física, pues es necesario conocer si la solución de un determinado problema existe y es única. En la historia emerge los interrogantes alrededor de la existencia y unicidad de una ecuación diferencial solo cuando algunos matemáticos se encontraron con el problema cada vez más difícil de hallar las soluciones para ecuaciones diferenciales específicas dadas condiciones iniciales y condiciones de frontera (Kline, 1992). Es importe señalar que el problema de existencia fue ignorado por mucho tiempo por los matemáticos, esto en parte debido a que las ecuaciones diferenciales surgieron de problemas físicos y geométricos, y era intuitivamente obvio que estas ecuaciones debían tener solución.

Antes de profundizar en la evolución histórica del teorema de existencia y unicidad demostraremos modernamente cómo llegamos al mencionado teorema. Utilizaremos para ello las iteraciones de Picard (aproximaciones sucesivas) que es un método iterativo para obtener la solución de una ecuación diferencial. Como se mostrará más adelante las iteraciones de Picard siempre convergen en un intervalo adecuado. Inicialmente partimos del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad y(t_0) = y_0 \quad (1)$$

Integrando ambos lados de la ecuación diferencial $y' = f(t, y)$ con respecto a t. Si $y(t)$ satisface (1) se tiene

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dy(s)}{ds} ds = \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big) ds \qquad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big) ds \quad (2)$$

Recíprocamente, si $y(t)$ es continua y satisface (2), entonces $\frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$ y más aún $y(t_0) = y_0$. Este resultado permite construir un método para encontrar una sucesión de soluciones aproximadas de (2). Picard fue uno de los matemáticos que encontró que la sucesión estaba dada por $y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_n(s)\big) ds$ (3).

A continuación se mostrará a) que las iteraciones de Picard convergen; b) que la ecuación integral (2) satisface el problema de valor inicial (1); c) que el problema de valor inicial (1) tiene una única solución bajo ciertas condiciones. Finalmente con todos estos elementos queda demostrado el teorema de existencia y unicidad.

Es importante mencionar que se retoma la demostración del teorema de existencia y unicidad elaborada en Braun (1990), en la cual se especifica cada uno de los momentos mencionados anteriormente.

a) Convergencia de las iteraciones de Picard

Las soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales pueden no existir para todo valor de *t*; es por ello que se debe establecer un intervalo en el cual las iteraciones $y_n(t)$ están uniformente acotadas, es decir $|y_n(t)| \leq K$ para alguna constante K. La situación anterior equivale a encontrar un rectángulo R que contenga las gráficas de todas las iteraciones de Picard $y_n(t)$; el lema 1 da cuenta de cómo construir ese rectángulo (Braun , 1990).

Lema 1

Se elige dos números positivos a y b y se considera el rectángulo R: $t_0 \leq t \leq t_0 + a$ $|y - y_0| \leq b$. Se calcula $M_{(t,y) en\, R} = max|f(t,y)|$ y $\alpha = min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, entonces $|y_n - y_0| \leq M(t - t_0)$ para todo $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$.

El lema 1 pone de manifiesto que $y_n(t)$ está contenida entre las rectas $y = y_0 + M(t - t_0)$ y $y = y_0 - M(t - t_0)$ pata todo $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$. Además, la gráfica $y_n(t)$ está dentro del rectángulo R en el caso en que $t = t_0 + a$ si $a \leq \frac{b}{M}$ o en el caso que $t = t_0 + \frac{b}{M}$ si $\frac{b}{M} \leq a$. La demostración del lema 1 se realiza por inducción sobre n.

a) para $n = 0$ claramente se cumple el lema 1 ya que $y_0(t) = y_0$ entonces $|y_0(t) - y_0| \leq M(t - t_0)$ y $0 \leq M(t - t_0)$.

b) Se debe probar para $n = j + 1$ asumiendo que se cumple para $n = j$

Se parte de que $\left|y_{j+1} - y_0\right| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s, y_j(s)ds\right| \leq \int_{t_0}^{t}\left|f(s, y_j(s)ds\right| \leq \int_{t_0}^{t} Mds = M(t - t_0)$, para todo $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$, por lo tanto queda demostrado el lema 1.

Se demostró por inducción que se cumple el lema 1 para toda n, por lo tanto, la sucesión $y_n(t)$ está acotada. A partir de este resultado es posible demostrar que las iteraciones de Picard $y_n(t)$ convergen para toda t en el intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ si $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe y es continua. Para mostrar lo anterior se escribe $y_n(t)$ en forma de una serie telescópica y se prueba que esta serie converge.

Sea

$$y_n(t) = y_0 + [y_1(t) - y_0(t)] + [y_2(t) - y_1(t)] + \cdots [y_n(t) - y_{n-1}(t)],$$

entonces la sucesión $y_n(t)$ converge si y solo si la serie $[y_1(t) - y_0(t)] + \cdots [y_n(t) - y_{n-1}(t)] + \cdots$ converge. Para probar que esta serie infinita converge se debe demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty}|y_n(t) - y_{n-1}(t)| < \infty$. En este sentido se tiene que,

$$\begin{aligned}|y_n(t) - y_{n-1}(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s) - f(s, y_{n-2}(s)\right| ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_{n-1}(t) - f(s, y_{n-2}(t)| ds.\end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio se tiene que $f(x_1) - f(x_2) = f'(\varepsilon)(x_1 - x_2)$, donde ε es algún número entre x_1 y x_2. Por lo tanto se puede concluir

$$\int_{t_0}^{t} |f(s, y_{n-1}(t) - f(s, y_{n-2}(t)| ds = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{\partial f(s, \varepsilon(s))}{\partial y}\right| |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)| ds,$$

donde $\varepsilon(s)$ se encuentra entre $y_{n-1}(s)$ y $y_{n-2}(s)$. Del lema 1 se tiene que todos los puntos $(s, \varepsilon(s))$ se encuentran en el rectángulo R para $s \leq t_0 + \alpha$, por lo tanto

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq L \int_{t_0}^{t} |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)| ds,$$

para $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$, donde $L = max_{(t,y) en\, R} \left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right|$.

Si se toma el caso de $n = 2$. Para el anterior resultado se tiene que $|y_2 - y_1| \leq$

$$L \int_{t_0}^{t} |y_1(s) - y_0(s)| ds \leq L \int_{t_0}^{t} M(s - t_0) ds = \frac{LM(t-t_0)^2}{2},$$

lo que su vez nos conduce a

$$|y_3 - y_2| \leq L \int_{t_0}^{t} |y_2(s) - y_1(s)| ds \leq L^2 M \int_{t_0}^{t} \frac{(s-t_0)^2}{2} ds = \frac{ML^2(t-t_0)^3}{3!} .$$

Procediendo de manera inductiva se tiene que $|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq \frac{ML^{n-1}(t-t_0)^n}{n!}$, para $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$. Con este resultado y retomando la serie telescópica se obtiene

$$\begin{aligned}
|y_1(t) - y_0(t)| + |y_2(t) - y_1(t)| + \cdots \\
&\leq M(t - t_0) + \frac{ML(t-t_0)^2}{2!} + \frac{ML(t-t_0)^3}{3!} + .. \\
&\leq M\varphi + \frac{ML\varphi^2}{2!} + \frac{ML^2\varphi^3}{3!} + \cdots = \frac{M}{L}\left[\varphi L + \frac{(\varphi L)^2}{2!} + \frac{(\varphi L)^3}{3!} + \cdots\right] \\
&= \frac{M}{L}[e^{\varphi L} - 1] \leq \infty
\end{aligned}$$

Esta cantidad es menor que infinito, por lo tanto las iteraciones de Picard $y_n(t)$ convergen para t en el intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$. Un argumento similar demuestra que $y_n(t)$ converge para toda t en el intervalo $t_0 - \beta \leq t \leq t_0$, donde $\beta = \min(a, \frac{b}{N})$ $N = \max|f(t,y)|$ para (t, y) en el rectángulo $t_0 - a \leq t \leq t_{0,}$ $|y - y_0| \leq b$.

b) Demostración de que $y(t)$ satisface el problema de valor inicial (1)

Denotando por $y(t)$ el límite de $y_n(t)$, se demostrará que $y(t)$ satisface la ecuación integral $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)ds$ y que $y(t)$ es continua.

Es conveniente recordar que las iteraciones de Picard se definen en forma recurrente mediante $y_{n+1} = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_n(s)\big)ds$. Si tomamos el límite en ambos lados de la expresión anterior se tiene $y(t) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_n(s)\big)ds$; para mostrar que el lado derecho es igual a $y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)ds$ hay que demostrar que $\left|\int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)ds - \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_n(s)\big)ds\right|$ tiende a cero cuando n tiende a infinito. Observemos que la gráfica $y(t)$ se encuentra en el rectángulo R para $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ puesto que es el límite de las funciones $y_n(t)$, cuyas gráficas se encuentran en R. Por lo tanto, cumple con todas las propiedades demostradas anteriormente, así pues se tiene

$$\left|\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds - \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_n(s)\big)ds\right| \leq \int_{t_0}^{t} \left|f\big(s, y(s)\big)ds - f\big(s, y_n(s)\big)\right| ds \leq$$
$$L \int_{t_0}^{t} |y(s) - y_n(s)|\, ds.$$

Donde $L = max_{(t,y) en\ R} \left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right|$. Observemos que $y_n(s) = y_0 + \sum_{j=1}^{n}\big[y_j(s) - y_{j-1}(s)\big]$ y que $y(s) = y_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\big[y_j(s) - y_{j-1}(s)\big]$, por lo tanto $y(s) - y_n(s) = \sum_{j=n+1}^{\infty}\big[y_j(s) - y_{j-1}(s)\big]$. Ahora bien, se tiene que $|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq \frac{ML^{n-1}(t-t_0)^n}{n!}$; para $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$, entonces

$|y(s) - y_n(s)| \leq M \sum_{j=n+1}^{\infty} L^{j-1} \frac{(s-t_0)^j}{j!} \leq M \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{L^{j-1}\varphi^j}{j!} = \frac{M}{L} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(\varphi L)^j}{j!}$. De aquí que $\left|\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds - \int_{t_0}^{t} f\big(s, y_n(s)\big)ds\right| \leq M \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(\varphi L)^j}{j!} \int_{t_0}^{t} ds \leq M\varphi \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(\varphi L)^j}{j!}$.

Puesto que $t - t_0 = \varphi = \int_{t_0}^{t} ds$, esta sumatoria tiende a cero cuando n tiende a infinito, ya que es el residuo del desarrollo de la serie de Taylor convergente de $e^{\varphi L}$, por lo tanto, $\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} f\big(s, y_n(s)\big)ds = \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)ds$; falta mostrar que $y(t)$ es continua, para ello debemos demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un $\delta > 0$ tal que $|y(t+h) - y(t)| < \epsilon$ si $|h| < \delta$, como no se conoce $y(t)$ de manera explícita no es posible comparar $y(t+h)$ con $y(t)$ directamente, así que se escoge un entero N lo bastante grande tal que

$y(t+h) - y(t) = [y(t+h) - y_N(t+h)] + [y_N(t+h) - y_N(t)] + [y_N(t) - y(t)]$.

Específicamente se elige N suficientemente grande como para que $\frac{M}{L}\sum_{j=N+1}^{\infty}\frac{(\varphi L)^j}{j!} < \frac{\varepsilon}{3}$, de aquí se obtiene $|y(t+h) - y_N(t+h)| < \frac{\varepsilon}{3}$ y $|y_N(t) - y(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ y h suficientemente pequeña tal que $t + h < t_0 + \alpha$; ahora bien $y_N(t)$ es continua puesto que se obtiene después de N integraciones sucesivas de funciones continuas, por lo tanto se puede encontrar un $\delta > 0$ lo bastante pequeño de modo que $y_N(t+h) - y_N(t) < \frac{\varepsilon}{3}$ para un $|h| < \delta$ por lo tanto

$y(t+h) - y(t) = [y(t+h) - y_N(t+h)] + [y_N(t+h) - y_N(t)] + [y_N(t) - y(t)] < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \varepsilon$, para $|h| < \delta$; de esta manera queda demostrado que $y(t)$ es una solución continua de la ecuación integral $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)ds$ además que satisface el problema de valor inicial.

c) Demostración de que $y(t)$ es única solución del problema de valor inicial.

Supongamos que $y(t)$ y $Z(t)$ son soluciones del problema de valor inicial (1) así que, $y' = f(t, y)$ $y(t_0) = y_0$ y $z' = f(t, y)$ $z(t_0) = y_0$, ahora bien se cumple que

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, y(s)\big)ds,$$

$$z(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, z(s)\big)ds.$$

Consideramos $|y(t) - z(t)| = \left|\int_{t_0}^{t}[f(s, y(s)) - f(s, z(s))]ds\right| \leq \int_{t_0}^{t}|f(s, y(s)) - f(s, z(s))|ds \leq L\int_{t_0}^{t}|y(s) - z(s)|ds$, donde L es el máximo de los valores $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$, para (t, y) en R. Se toma como base el lema 2 para mostrar que la anterior desigualdad implica que $y(t) = z(t)$ y de esta forma mostrar que el problema de valor inicial tiene única solución.

Lema 2: Sea $w(t)$ una función no negativa, con $w(t) \leq L\int_{t_0}^{t} W(s)ds$. Entonces, $w(t)$ es idénticamente igual a cero.

Para la demostración de este lema se considera a $U(t) = \int_{t_0}^{t} w(s)ds$; entonces $\frac{dU}{dt} = w(t) \leq L\int_{t_0}^{t} w(s)ds = LU(t)$, por lo tanto $\frac{du}{dt} \leq LU(t)$ y $\frac{du}{U(t)} \leq Ldt$. Integrando se tiene que, $\ln\frac{U(t)}{U(t_0)} \leq L(t - t_0)$; de aquí $e^{-L(t-t_0)}U(t) \leq U(t_0) = 0$ puesto que $U(t_0) = \int_{t_0}^{t_0} w(s)ds = 0$, para $t \geq t_0$; por lo tanto $U(t) = 0$, lo que implica que $w(t) = 0$, pues $0 \leq w(t) \leq L\int_{t_0}^{t} W(s)ds = LU(t) = 0$. De la demostración de este lema se concluye que $y(t) = z(t)$. De esta manera, en conjunto los anteriores argumentos demuestran el siguiente teorema.

Teorema de existencia y unicidad: Sean f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ continúas en el rectángulo $R: t_0 \leq t \leq t_0 + a$ $|y - y_0| \leq b$. Calcúlese $M = max_{(t,y) en\, R}|f(t, y)|$, y hágase $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$. Entonces, el problema de valor inicial $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$ tiene una única solución en el intervalo $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$.

Uno de los primeros matemáticos en la historia que consideró el problema de la existencia de las soluciones de ecuaciones diferenciales y obtuvo resultados de ello fue Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Este matemático planteó dos métodos, el primero fue elaborado entre los años 1820 y 1830 y resumido en *Exercices d´analyse*. En este primer trabajo Cauchy estudia el problema de la existencia de la solución de una ecuación de la forma $y' = f(x, y)$ (Kline, 1992). Básicamente, utiliza algunos resultados encontrados por Euler vinculados con la idea de la integral como el límite de una suma. Cauchy pretendía mostrar que existe una única $y = f(x)$ que satisface la ecuación diferencial planteada anteriormente, y que cumple la condición inicial $y_0 = f(x_0)$. Bajo estas condiciones, él procedió dividiendo el intervalo (x_0, x) en n partes $\Delta x_0, \Delta x_1, \ldots \Delta x_{n-1}$, y formó $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x_i$, donde los x_i son cualquier valor de *x* en Δx_i, de aquí Cauchy obtuvo que $y_n = y_0 + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\Delta x_i$. Con el anterior resultado Cauchy demuestra que cuando *n* tiende a infinito, y_n converge a una función única de la forma $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx$, y que esta función satisface la ecuación diferencial y las condiciones iniciales. Para que el resultado anterior funcionara Cauchy supuso que $f(x, y)$ y f_y eran continuas para todos los valores reales x e y en el rectángulo determinado por los intervalos $(x_0, x)\ e\ (y_0, y)$. Sin embargo, en 1876 la anterior condición fue replanteada por Rudolph Lipschitz (1832-1903), debilitando las hipótesis del teorema de Cauchy. La condición que puso Lipschitz fue que para todas las $(x, y_1)\ y\ (x, y_2)$ en el rectángulo $|x - x_0| \leq a\ |y - y_0| \leq b$, existe una constante k tal que $|f(x, y_1 - f(x, y_2)| \leq k(y_1 - y_2)$, esto únicamente para dos puntos con la misma abscisa (Kline, 1992). La anterior condición se conoce como condición de Lipschitz y el teorema de existencia es llamado teorema de Cauchy –Lipschitz.

El otro método de Cauchy, vinculado con las funciones dominantes o mayorantes, es más aplicable que el primero; además fue trabajado por Cauchy en el dominio complejo. Este método, expuesto en una serie de ensayos entre 1839 y 1842 en *Comptes Rendus*, fue llamado, por Cauchy, *calcul des limites*, puesto que se trabajan con limites inferiores dentro de los cuales la solución existe y converge. Briot y Bouquet en 1854 simplificaron el método. Con el propósito de ejemplificar este segundo método utilizaremos la ecuación $y' = f(x, y)$, donde f es analítica en x e y. El teorema que se quiere mostrar se puede enunciar de la siguiente manera:

Si para $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ la función $f(x,y)$ es analítica en un entorno $P_0 = (x_0, y_0)$, la ecuación diferencial tiene entonces una solución única $y(x)$, que es analítica en el entorno de x_0 y que se reduce a y_0 cuando $x = x_0$. Esta solución puede ser representada mediante la serie

$y = y_0 + y'_0(x - x_0) + \frac{y''_0}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''_0}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots$, (4), donde $y'_0 = \frac{dy}{dx}$ en (x_0, y_0), asimismo se cumple para $y''_0, y'''_0, \ldots$ Las derivadas se determinan mediante diferenciación sucesiva de la ecuación diferencial original en la que y es función de x (Kline, 1992).

Para mostrar cómo funciona este teorema partamos del hecho de que $f(x,y)$ es analítica en un entorno (x_0, y_0), en este caso alrededor de $(0,0)$, por lo tanto existe un circulo de radio a alrededor de $x_0 = 0$ y un circulo de radio b alrededor de $y_0 = 0$, en donde $f(x,y)$ es analítica. Con estas condiciones se cumple que $f(x,y)$ tiene una cota superior M para todos los valores x e y que se encuentren en los círculos. El método que conduce a la serie planteada en el teorema permite afirmar que la función buscada satisface la condición $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$; el problema es demostrar que la serie converge. Para solucionar este inconveniente se introduce la función mayorante

$$F(x,y) = \sum \frac{M}{a^p b^q} x^p y^q,$$

que es el desarrollo de $F(x,y) = \frac{M}{(1-x/a)(1-y/b)}$ (5). Seguidamente se demuestra que la serie solución de $\frac{dY}{dx} = F(x,Y)$ (6) a saber $Y = Y'_0 x + Y''_0 \frac{x^2}{2!} + Y'''_0 \frac{x^3}{3!} + \cdots$, (7) la cual es derivada de (6), de la misma manera (4) se deriva de $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ domina termino a término la serie (4). Por lo tanto si logramos demostrar que la serie (7) converge, entonces converge (4). El paso a seguir es resolver la ecuación (6) usando el valor F en (5) demostrando que la expansión de la serie solución que es (7) converge. Este método, por sí mismo, no permite determinar el radio de convergencia de la serie para y. A pesar de que se realizaron diversos esfuerzos para solucionar este inconveniente no se llegó a ninguna respuesta (Kline, 1992).

Un tercer método fue propuesto por Liouville (1809-1882) para establecer la existencia de una ecuación de segundo orden, de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Hoy en día se conoce este método como el de aproximaciones sucesivas atribuido a Emile Picard, puesto que este matemático fue quien lo generalizó. Este método considera la ecuación $y' = f(x, y)$ en x e y reales, donde $f(x, y)$ es analítica en x e y, y su función solución $y = f(x)$ pasa por el punto (x_0, y_0). La idea fundamental en este método cosiste en introducir la sucesión de funciones $y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt$, $y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_1(t)\big)dt$,… y en general la sucesión $y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_{n.1}(t)\big)dt$. El paso a seguir es demostrar que, el límite de $y_n(t)$ (cuando *n* tiende a infinito) es la función $y(x)$ continua en x, la cual es solución única que satisface la ecuación diferencial ordinaria, y más aún cumple con las condiciones iniciales de la ecuación, es decir $y(x_0) = y_0$. Es importante mencionar que en la actualidad la presentación de este método presupone que $F(x, y)$ sólo satisface la condición Lipschtiz. Este método se aplicó en 1893 a ecuaciones de segundo orden por Picard, igualmente se extendió a *x* e *y* complejos.

Los anteriores métodos no solo se extendieron a ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior, sino a sistemas de ecuaciones diferenciales para variables con valores complejos. Por ejemplo, Cauchy aplicó su segundo tipo de teoremas de existencia a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en *n* variables dependientes (Kline, 1992). Para el caso de sistemas de dominio complejo Cauchy empleo el método del *Calcul des Limites*. A modo de ejemplo, considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_0, \ldots y_{n-1}), \quad k = 0,1,2, \ldots, n-1,$$

donde $f_0, \ldots f_{n-1}$, son funciones monógenas (analíticas univalentes) de sus argumentos. Cauchy supuso que las anteriores funciones eran desarrollables en un entorno de los valores iniciales $x = \varepsilon, y_0 = n_0, \dots, y_{n-1} = n_{n-1}$ en potencias enteras positivas de $x - \varepsilon, y_0 - n_0, \dots, y_{n-1} - n_{n-1}$.

De las anteriores condiciones se obtiene que existen n series de potencias en $x - \varepsilon$, convergentes en el entorno $x = \varepsilon$. De esta manera se tiene que al sustituir estas series en las $y_0, \dots, y_{n-1}$ del sistema de ecuaciones, se satisfacen las ecuaciones. Es importante mencionar que las series de potencia encontradas son únicas y proporcionan una solución regular del sistema, además toman los valores iniciales. Con este método se logró establecer la existencia y obtener la solución en el entorno de un punto en el plano complejo.

En resumen, este capítulo aborda un breve recorrido histórico del teorema de existencia y unicidad. Se parte de una versión moderna de dicho teorema y se continúa estudiando la versión de Cauchy. Uno de los aspectos claves de este capítulo es que la primera versión del teorema de existencia y unicidad aparece 100 años después del surgimiento de las técnicas para solucionar ecuaciones diferenciales ordinarias. Este hecho pone de manifiesto un obstáculo epistemológico vinculado con la constitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias, el cual se discutirá en las conclusiones.

CAPÍTULO V

Conclusiones

"No supongas que la matemática es dura y avinagrada y repulsiva para el sentido común. Se trata simplemente de la idealización del sentido común."

William Thomson

Conclusiones Epistemológicas

Del siglo XV al siglo XVIII se realizó la conformación de diversas disciplinas. Antes del siglo XV la ciencia se desarrolla en función de la solución de problemas. Históricamente la noción de ciencia, tal como la concebimos hoy, es relativamente reciente, data de los inicios del capitalismo europeo de los siglos XVI y XVII. Este hecho hace que, en muchas ocasiones, la ciencia se encuentre íntimamente ligada a los procesos de producción. En la segunda mitad del siglo XV comenzó a gestarse la primera revolución científica que dio lugar a una ciencia desligada de la escolástica, dando inicio a las ciencias naturales modernas. Con respecto a la matemática y la física, es un periodo en el que es casi imposible establecer si un determinado problema es propio de las matemáticas o si es un problema de aplicación, que buscaba solucionar alguna necesidad práctica humana. Por su parte, Cantoral y Farfán (2004) señalan que, la matemática en el siglo XVIII incluía el cálculo, el análisis, la aritmética, el álgebra, la geometría, la astronomía, la óptica, la mecánica e hidrodinámica y hasta la construcción de artillería y barcos. Justamente estos aspectos (los problemas de interés durante los siglos XVII y XVIII y las maneras de abordarlas desde la matemática) se constituyen en elementos de causalidad para entender la conformación de disciplinas matemáticas, en este caso las ecuaciones diferenciales. En este sentido y entendiendo que si bien no podemos hablar de un divorcio con las necesidades, nos interesó analizar la manera en que a partir de ciertos problemas prácticos surgía la necesidad de constituir una disciplina particular con una epistemología propia, como las ecuaciones diferenciales.

Algunos problemas que interesaban a los científicos en el siglo XVII conllevaron al surgimiento de las ecuaciones diferenciales como disciplina matemática. En principio, esta disciplina respondía a algunas problemáticas presentes en el campo de la física especialmente en la mecánica. En ese momento histórico, desde la física, la solución de una ecuación diferencial correspondía a una curva que cumplía determinadas propiedades vinculadas con el fenómeno físico que se modelaba. Paralelamente, desde la matemática, el proceso de solucionar ecuaciones diferenciales estaba ligado al problema de las cuadraturas. A mediados del siglo XVIII las ecuaciones diferenciales se habían convertido en un campo independiente de los problemas de la mecánica y de las cuadraturas, perfilando un capítulo del análisis, cuyo objetivo era encontrar métodos que permitieran la solución de diferentes tipos de ecuaciones diferenciales.

La naturaleza de lo que se asumía y se encontraba como solución de una ecuación diferencial ordinaria fue cambiando en la historia. En el siglo XVII las soluciones estaban determinadas por curvas. Por ejemplo, en el caso de los problemas de la tractriz y la braquistócrona se buscaban curvas que cumplieran determinadas propiedades que se establecían mediante una ecuación diferencial ordinaria. En el caso de la tractriz era necesario hallar la expresión analítica de la curva cuya longitud entre el punto de tangencia y un eje de coordenadas fuera constante. Para la braquistócrona se buscaba la expresión analítica de la curva de descenso más rápido.

Un aspecto importante que se debe resaltar en la manera de interpretar la solución de una ecuación diferencial en el siglo XVII, es la noción de diferencial. Para Leibniz, Newton y sus seguidores, el concepto de diferencial se identificaba con una variación (o incremento) infinitesimal. Por ejemplo, en la solución planteada por Leibniz para el problema de la tractriz se evidencia claramente que la ecuación diferencial que modela la situación surge de asumir que tanto dy como dx son variaciones infinitesimales realizadas en un triángulo infinitesimal, el cual es semejante a un triángulo de dimensiones finitas. Ello conllevaba al hecho de igualar una razón de infinitesimales $\frac{dy}{dx}$, con una razón de cantidades finitas; resultado que conduce a asumir que toda expresión aproximada del incremento puede considerarse exacta en intervalos infinitamente pequeños, es decir cuando se transforma en una expresión diferencial (Martínez, López, Gras, & Torregrosa, 2002). Ahora bien, desde una perspectiva matemática, la diferencial, entendida como un incremento infinitesimal posee algunas deficiencias. Sin embargo, las formas de operar con este concepto, conducían a soluciones correctas de los problemas. Es decir, el hecho de que matemáticamente no se pueda justificar la operatividad con los diferenciales, no implica que las soluciones desarrolladas no sean correctas. La ausencia de una explicación sobre la naturaleza de la diferencial, por parte de los creadores del cálculo, hizo que el uso de las diferenciales tuviera un carácter mecánico y repetitivo, caracterizado por procesos algorítmicos, obviando el significado matemático riguroso de este concepto.

El hecho de asumir la diferencial como un incremento infinitesimal conducía a los matemáticos a preguntarse sobre la naturaleza de ese concepto, pues matemáticamente esta definición llevaba a contradicciones. Una de estas se vincula con la aritmética creada para las diferenciales. En principio, para solucionar un problema, se asumía que era posible dividir entre un diferencial, ya que este valor no se consideraba nulo, pues era una variación infinitamente pequeña. Pero al final, dado que se trataba de problemas en el universo finito, un infinitesimal no aportaba en la suma, por lo tanto, el resultado podía quedar en términos de lo finito, desapareciendo el aporte que realizaba el infinitesimal. En otras palabras, se había creado una aritmética, no justificada, para operar con las cantidades infinitesimales. Por ejemplo, una cantidad infinitamente pequeña sumada a una cantidad finita daba como resultado una cantidad finita. De esta manera, para hallar la derivada de $y = x^2$ se asumía que una variación infinitesimal en x producía una variación infinitesimal en y; de este modo se planteaba que $y + dy = (x + dx)^2$. Aplicando productos notables y simplificando se tiene $dy = 2xdx + dx^2$; dividendo por $dx,$ obtenemos $\frac{dy}{dx} = 2x + dx$. Estas cantidades infinitamente pequeñas cumplían una operatividad muy especial; así el producto de dos infinitamente pequeños da un infinitamente pequeño, el producto de un infinitamente pequeño con una cantidad finita da un infinitamente pequeño, la suma de una cantidad finita con una cantidad infinitamente pequeña da como resultado la cantidad finita. Por lo tanto, se llega a que $\frac{dy}{dx} = 2x$. Si bien, en la época de Leibniz y Newton no se contaba con las herramientas matemáticas para justificar esta operatividad, en 1960 Abraham Robinson, usando la teoría de modelos, abre el camino para fundamentar los infinitesimales desde el *análisis no estándar*. Robinson asume, al igual que Leibniz, que el continuo geométrico está conformado por los reales Weistrassianos[25], los infinitesimales y los infinitamente grandes (Recalde, 2004).Sin embargo, para Robinson, los infinitesimales y los infinitamente grandes solo tienen un carácter referencial, pues son carentes de significado. Es decir, se agregan dentro del campo matemático porque son útiles para abreviar procesos abstrusos (Recalde, 2004).

Otro aspecto que se vincula con las contradicciones que presentan los infinitesimales de Leibniz y Newton es que, faltaba explicar de qué manera, una expresión aproximada, en términos de incrementos, se podía escribir exacta en términos de diferenciales; esto es, que de una expresión de la forma $\Delta A \approx ydx,$ se llegará a una expresión de la forma $dA = ydx.$ La discusión sobre la naturaleza de la diferencial continúo por un largo periodo, en el cual matemáticos como Cauchy (1789- 1857) propusieron una definición desde la matemática, que despojaba a la diferencial de toda significación física. Luego Fréchet (1878-1973) planteó una nueva definición matemática de la diferencial, la cual tenía sentido en las aplicaciones físicas; ésta tal vez se constituye en un punto de encuentro entre las matemáticas y la física para entender el concepto de diferencial.

Cauchy despojó a la diferencial de todo significado físico, tratando de imponer rigurosidad matemática a la nueva definición de diferencial, al definirla en términos de límite y no como un incremento infinitesimal como lo era para Leibniz y Newton. La cantidad infinitamente pequeña la define Cauchy como una variable ya sea x o funciones $f(x)$ cuyo valor numérico decrece indefinidamente de manera que converge hacia el limite cero (Martínez, López, Gras, & Torregrosa, 2002). Por ejemplo, para hallar la derivada de la función $y = x^2$ se parte del cociente incremental, definido como $\Delta y/\Delta x = 2x + \Delta x$; este valor nunca será $2x$ por más que Δx sea muy pequeño, pero si se calcula el límite de la expresión cuando Δx tiende a cero se obtiene que es $2x$, correspondiente a la derivada de la función. A partir de este ejemplo, es posible concluir que para Cauchy, si una expresión tiene cantidades

[25] Weirtrass, Cantor y Dedekind asumían el continuo geométrico como un agregado de puntos. En este sentido, la idea es que se construye un conjunto numérico que logra “llenar” completamente los puntos de la línea recta.

infinitesimales éstas nunca serán cero, pero sí lo son sus límites. Desde esta perspectiva, la derivada se define como el límite de un cociente de incrementos, y la integral como el límite de una serie de sumas. Estas definiciones no deja ver con claridad la relación inversa entre la derivada y la integral, lo cual si parecía intuitivo en la concepción de Leibniz y Newton. Apliquemos esta definición al campo de la física. Cuando se dice que un automóvil lleva una velocidad de $80\ km$ por hora, significa que $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = 80$, es decir que dado un $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que si, $(t_2 - t_1) < \delta$, entonces $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} - 80 < \varepsilon$. Aunque desde la concepción de Cauchy se obtuvo una definición rigurosa de diferencial, también se despojó de toda interpretación física, pues con qué criterio se decide cuál es la expresión diferencial correspondiente a la situación física que se está estudiando. Desde la perspectiva de Cauchy no se puede establecer un concepto de diferencial que logre aceptarse en las matemáticas y a la vez se pueda aplicar en el campo de la física. En consecuencia, es necesario re definir desde otra perspectiva el concepto de diferencial para lograr tener claridad cuando hablamos de ecuaciones diferenciales.

Por su parte, Fréchet partió de la idea de que toda función podía aproximarse mediante funciones lineales. Desde esta perspectiva la diferencial de una magnitud y respecto de otra x es la única función lineal del incremento $(dy = k(x)dx)$, donde $k(x)$ coincide con la función derivada y' (Martínez, López, Gras, & Torregrosa, 2002). Para llegar a la anterior definición consideremos que queremos realizar una estimación del valor de Δy a partir de un x_1 y para un incremento Δx. Representamos esta estimación como $dy = k\Delta x$ (k es una constante desde x_1 hasta $x_1 + \Delta x$); asumiendo que el comportamiento es lineal, desde el punto de partida y durante todo el intervalo, el error de esta estimación estará dado por $\Delta y - dy = \Delta y - k\Delta$. Entre menor sea el valor de Δx, menor será el error. Para tener una mejor aproximación a Δy, dividimos el intervalo en N subintervalos $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. De esta manera, si queremos una estimación lineal de Δy_i obtendríamos que $dy_i = k_i \Delta x_i$ por lo tanto, una aproximación a la estimación total estaría dada por $\Delta y \approx \sum dy_i$. Se define el error en cada subintervalo mediante la expresión $\varepsilon_i = \Delta y_i - dy_i = \Delta y_i - k(x_i)\Delta x_i$.

De aquí tenemos que la estimación para Δy se puede expresar como $\Delta y = \sum \Delta y_i = \sum_{i=1}^{N}(dy_i + \varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{N} k(x)_i \Delta x_i + (error\ total)$. El inconveniente que tenemos en este momento para obtener una mejor aproximación de Δy, es que necesitamos un valor de k para cada x, por lo tanto debemos hallar una función $k(x)$ que permita que el límite de la serie de estimaciones sea Δy, cuando $N \to \infty$ y que, en consecuencia, el límite de la serie de errores totales cuando $N \to \infty$, sea cero. Estas condiciones no se cumplen para cualquier función $k(x)$, aun cuando $\Delta x_i \to 0$. Escribamos la estimación $dy = kdx$ asumiendo que $dx = \Delta x$. Ahora bien, el límite de la serie de sumas de estimaciones se define como la integral, es decir $\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} dy_i = \int_{x_i}^{x_i+\Delta x} dy$, y esto será exactamente Δy, si y solo si el límite de la serie correspondiente a errores totales es cero. Pero como el límite de la serie depende de la función $k(x)$ elegida, debemos encontrar la función que permita que el límite de la serie de errores totales sea cero. La condición que garantiza que el límite del error total sea cero es que el límite de N veces cualquiera de los errores parciales sea cero. Matemáticamente hablando significa que $\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} dy = \Delta y$, si y solo si $\lim_{N\to\infty} N(\Delta y - dy) = 0$, para todo x. Se sabe que N y dx son inversamente proporcionales, por lo tanto $\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} dy = \Delta y$, si y solo $\lim_{dx\to 0} \frac{\Delta y - dy}{dx} = 0$, o lo que es equivalente a decir que $\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} dy = \Delta y \leftrightarrow \lim_{dx\to 0}\left(\frac{\Delta y}{dx}\right) - \frac{dy}{dx} = 0$, para todo x ($\frac{dy}{dx}$ es constante para todo x, pues dy es una estimación lineal respecto a dx). Ahora bien dx es el tamaño del subintervalo, por lo tanto el límite que aparece en la expresión es la derivada $\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} dy = \Delta y \leftrightarrow y' = \frac{dy}{dx}$ para todo x.

Desde la perspectiva de Fréchet la relación inversa entre la integración y derivación queda clara. Para solucionar una integral $\int k(x)dx$, necesitamos encontrar una diferencial del tipo $k(x)dx = dy$; de esta manera se define la integral como $\int_{x=a}^{x=b} k(x)dx = \int_a^b dy \leftrightarrow\ y' = \frac{dy}{dx} = k(x)$. De esta manera, físicamente la diferencial es la variación de una magnitud en un intervalo a partir de una posición inicial, moviéndose uniformemente. Fréchet logró realizar una definición de la diferencial rigurosa en la que el teorema fundamental del cálculo se evidenciaba y era completamente aplicable en el campo de la física. Por lo tanto, desde esta perspectiva se construye vínculos entre la matemática y la física para entender el significado de la diferencial, superando de esta manera la dificultad que se había presentado desde el inicio del cálculo con Cauchy.

Matemáticamente hablando, el trabajo con las ecuaciones diferenciales ordinarias guardaba relación directa con la búsqueda de cuadraturas. Las diversas técnicas que empezaron a utilizarse como la separación de variables, la sustitución y el factor integrante, condujeron a que la solución de una ecuación diferencial ordinaria se identificara con el hallazgo de una cuadratura. En otras palabras, solucionar ecuaciones diferenciales implicaba descubrir una expresión analítica que diera cuenta de una determinada curva, pero dicha expresión era posible encontrarla siempre que se resolviera un problema de cuadratura.

Ecuaciones diferenciales muy sencillas, en el sentido de que su solución se reduce a un problema de integración y separación de variables, conducía, en ocasiones, a integrales difíciles o incluso imposible de efectuar explícitamente (analíticamente). Esta dificultad se vincula con el hecho de que la teoría de funciones estaba en desarrollo, y apenas se iniciaba el estudio de algunas curvas transcendentes. Las ecuaciones diferenciales que involucraban curvas trascendentes o cuadraturas de esta naturaleza no eran posible solucionarlas analíticamente. Los problemas que comprendían este tipo de ecuaciones en las que no se podía encontrar ni una curva ni su cuadratura obligaron a los matemáticos a buscar nuevos métodos. Surge de este modo el uso de series para solucionar ecuaciones diferenciales, el cual fue ampliamente utilizado por diversos matemáticos.

Uno de los primeros matemáticos, que utilizó series de potencias como método para solucionar ecuaciones diferenciales, fue Leibniz; estudió casos particulares tales como la derivada de $y = a\log\frac{a+x}{a}$, la cual en términos de una ecuación diferencial queda expresada como $a\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} - a = 0$. Newton también usó las series como técnica para resolver ecuaciones diferenciales, cuya función solución no podía expresarse mediante una representación analítica en ese momento. Lo importe en la representación por series de una solución de una ecuación diferencial fue que se logró estudiar curvas, o lo que en la actualidad denominamos funciones, que no habían sido exploradas por falta de una representación analítica, tales como las logarítmicas y las trigonométricas. En otras palabras, el uso de series, en los siglos XVII y XVIII, para representar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias posibilitó que se fuera perfilando la teoría de funciones.

El interés por encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales en forma cerrada, donde la respuesta de una ecuación diferencial ordinaria estuviera determinada por un número finito de términos, fue por un largo tiempo la preocupación de diversos matemáticos. Uno de los primeros resultados encontrados se vincula con el hallazgo de ecuaciones diferenciales que admiten soluciones en términos de un número finito de funciones elementales. En decir, se encontraron condiciones bajo las cuales la solución en serie pudiese contener solamente un numero finito de términos.

Euler inicia el estudio de las ecuaciones de segundo orden luego de solucionar algunos problemas como el del movimiento del péndulo en medios con rozamiento. Uno de los primeros trabajos que históricamente se conocen se vincula con la ecuación $\left(\frac{dy}{dx}\right)^{p-2}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{ax^m}{y^n}$, la cual fue solucionada por Euler utilizando algunas sustituciones y reduciendo la ecuación a una de primer orden. Es importante resaltar que una de las herramientas fundamentales para solucionar esta ecuación, fue la introducción de la función exponencial y la aplicación de algunas de sus propiedades. Este hecho, ubica a este trabajo entre los más importantes en la historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, ya que por primera vez se utiliza la función exponencial para solucionar una ecuación de segundo orden. En adelante se siguieron solucionando diversas ecuaciones utilizando la función exponencial. De otra parte, la estrategia de reducir la ecuación a una ecuación conocida se constituye en una herramienta heurística que fue ampliamente aplicada en las ecuaciones de segundo orden, de hecho, llegó a constituirse en una técnica para solucionar este tipo de ecuaciones. En esta misma dirección, Riccati presenta un método para reducir ecuaciones de segundo orden a primer orden, constituyéndose en una técnica que permitía resolver determinadas ecuaciones de segundo orden. En conjunto todos los trabajos, elaborados a mediados del siglo XVIII, dejan ver que desde que se inició el estudio de las ecuaciones de segundo orden creció el interés, por parte de los científicos, por indagar en el campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias. En otras palabras, el campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias se fue perfilando en la medida en que se resolvían diversos tipos de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Si bien, las ecuaciones de segundo orden emergieron de los problemas de la física, luego fueron independizándose de éstos, ya que se buscaron técnicas de solución de ecuaciones diferenciales de segundo orden que no necesariamente modelaban un problema del campo de la física, este es el caso del trabajo de Riccati.

Ahora bien, las ecuaciones de orden superior también surgieron de problemas de la física. Uno de los primeros que históricamente se conocen fue el problema del desplazamiento transversal de una barra elástica planteado por Daniel Bernoulli en 1734. La solución elaborada por Euler para este problema motivó el estudio de las ecuaciones lineales generales con coeficientes constantes. Nuevamente, se evidencia, a partir del anterior evento, que uno de los elementos de causalidad del campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias fueron los problemas de la física. Si bien desde 1743 se conoce la técnica para solucionar ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes, fue Euler quien demostró y discutió los diferentes casos que se pueden presentar en este tipo de ecuaciones. En 1750 Euler estudió la ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n no homogénea. En los años siguientes, Euler continúo el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias, discutiendo temas como el factor integrante para reducir el orden de una ecuación. Los trabajos alrededor de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes fueron ampliados por Lagrange en 1762. Él encontró que la solución general de una ecuación homogénea es la suma de soluciones particulares independientes, cada una de las cuales es multiplicada por una constante arbitraria. Los anteriores acontecimientos muestran que a mediados del siglo XVIII existían diversos conocimientos generales sobre las ecuaciones diferenciales ordinarias; sin embargo, eran aislados y no se habían sistematizado dentro de algún trabajo.

Marie Jean Antonie Nicolas Caritat de Condorcet (1743-1794) intentó poner orden y método en las diversas técnicas y artificios para resolver ecuaciones diferenciales en su trabajo *Du Calcul Integral*. En esta obra se enumera las operaciones de derivación, eliminación y sustitución, y se intenta reducir todos los métodos únicamente a esas operaciones canónicas. Desafortunadamente, este trabajo no logró culminar en una buena sistematización de los métodos para resolver ecuaciones diferenciales. Fue Euler, quien trabajó en esta misma idea, logrando realizar una de las primeras sistematizaciones de las técnicas para resolver ecuaciones diferenciales en su obra *Institutiones calculi Integralis*. Para el caso del método de separación de variables demostró que cuando es posible aplicar esta técnica existe un factor integrante, pero no recíprocamente. Además, demostró que esta técnica no era aplicable para ecuaciones de orden superior. En el caso de las sustituciones no encontró principios generales para obtenerlas, pues en ocasiones hallar sustituciones era tan difícil como resolver directamente la ecuación diferencial. Otra de las técnicas más usadas y discutidas por Euler, fue emplear transformaciones para reducir el orden de las ecuaciones diferenciales, por ejemplo, utilizó una transformación para resolver la ecuación diferencial ordinaria lineal no homogénea de orden *n*. En conjunto esta obra muestra que a partir de la forma, propiedades y la técnica para resolver la ecuación se puede lograr una clasificación de las ecuaciones diferenciales. De hecho, en esta obra se realiza la caracterización de ecuaciones diferenciales de primer orden en separables, lineales y exactas, y se expone las ecuaciones de segundo orden (lineales, y las susceptibles de reducir el orden), y una generalización de las de orden superior. Es importante señalar que Euler retoma la clasificación de las ecuaciones diferenciales planteada por Newton, pero la amplia pues no se queda únicamente en el plano de las ecuaciones de primer orden y las parciales como lo hizo Newton, sino que a partir de las problemas físicos que eran modelados mediante ecuaciones, surgen las otras tipologías como las de segundo orden y orden superior. Este evento deja entrever que la modelación de fenómenos físicos ocupa un papel fundamental en la clasificación más general de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

La sistematización desarrollada por Euler en *Institutiones calculi Integralis* muestra que la técnica o método de resolución determina un tipo de ecuación diferencial. De hecho, cuando Jean Bernoulli en 1694 generaliza la técnica de separación de variables define a partir de aplicar la técnica las propiedades que debe cumplir la ecuación y de esta manera realiza la clasificación de las ecuaciones separables. En otras palabras, la técnica posibilita una clasificación específica de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Asimismo, las técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias permitieron la creación de nuevos objetos matemáticos, por ejemplo, posibilitó el surgimiento de nuevas funciones transcendentes que en Descartes no eran aceptadas, logrando de esta manera ir perfilando el campo de las funciones. En términos generales podríamos decir que la operatividad en matemáticas conduce al surgimiento de nuevos objetos y campos matemáticos.

Es importante considerar que en la época de Leibniz y Newton aún no se tenía un consenso sobre algunos conceptos tales como: función y límite. Por ejemplo, para Newton las curvas estaban conformadas por cantidades que variaban en el tiempo, pero para Leibniz una curva se conformaba por una sucesión de valores infinitamente próximos. En esta misma dirección, el concepto de límite aún no se precisaba ni se definía, por tal razón, no era posible justificar la operatividad de las cantidades infinitesimales. Nápoles y Negrón (2002) señalan que existían diversas discusiones entre los científicos del siglo XVIII alrededor de que si la cantidad variable alcanzaba o no el límite. La falta de explicación de ambos conceptos, función y límite, se constituyen en un obstáculo epistemológico que no permite entender, matemáticamente, el funcionamiento de los diferenciales.

Hasta 1775 se buscaron métodos generales para integrar ecuaciones diferenciales ordinarias. A finales del siglo XIX surgieron nuevos métodos como los operacionales y la transformada de Laplace. El hecho de que los métodos encontrados respondían a la mayoría de aplicaciones físicas fue un obstáculo para obtener nuevos métodos para solucionar ecuaciones diferenciales, de hecho hasta el momento no existen principios amplios y generales para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, en su conjunto, la materia ha continuado siendo una serie de distintas técnicas para los diferentes tipos de ecuaciones.

Conclusiones didácticas

El proceso histórico de constitución de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias muestra que el razonamiento empírico-inductivo fue usado con frecuencia, por los matemáticos del siglo XVII y XVIII, para crear conocimiento. De hecho, en muchas ocasiones se favoreció más este tipo de razonamiento que el deductivo, pues conducía a mejores desempeños en la construcción de técnicas para solucionar ecuaciones diferenciales. Esta situación puede vincularse con el hecho de que el campo de las ecuaciones diferenciales surge y se aplica en los femémonos físicos y en consecuencia la verificación experimental valida los resultados. Por ejemplo, los procesos usados para solucionar los problemas del péndulo isócrono, de la tractriz, la catenaria y la braquistócrona permitieron la aparición de una de las primeras técnicas para solucionar ecuaciones diferenciales, la separación de variables. Además, la manera de modelar y solucionar estos problemas muestra que la intuición ocupa un papel fundamental. Para ilustrar esta idea, es conveniente recordar la solución realizada por Johann Bernoulli al problema de la braquistócrona. Johann supuso, sin demostrar, que el comportamiento de un objeto que se desliza por la curva braquistócrona, es igual al realizado por un rayo de luz en un medio plano con un índice de refracción adecuadamente elegido. Mediante esta suposición Bernoulli logra resolver el problema. Este hecho revela que la intuición ocupa un papel importante en la construcción de conocimiento matemático del siglo XVIII.

En esta misma dirección, la historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias pone en evidencia que el razonamiento inductivo fue protagonista en la construcción de conocimiento. En parte, porque la sistematización de técnicas para solucionar ecuaciones diferenciales ordinarias se dio en la dinámica de casos particulares que luego eran generalizados mediante un proceso de abstracción. Por ejemplo, el trabajo elaborado por Leibniz en 1691 (carta realizada a Huygens), ilustra casos particulares de la técnica de separación de variables, la cual fue generalizada por Jean Bernoulli en las *Actas Eruditorum* de 1694. Este episodio histórico ilustra la manera en la cual, los procesos de razonamiento inductivo promovieron la construcción de conocimiento entorno a las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Una vía para abordar la enseñanza de las ecuaciones diferenciales es mediante el diseño de situaciones que involucren el uso de razonamiento inductivo. Entendiendo este razonamiento, como la acción de presentar razones para lograr concluir una afirmación a partir de casos particulares que son generalizados (Cañada, 2002). Estos casos particulares pueden emerger de fenómenos físicos, químicos, matemáticos, entre otros. En el caso de la técnica de separación de variables casos particulares como el de la braquistócrona, la tractriz y ecuaciones diferenciales específicas, posibilitaron la generalización, por parte de Jean Bernoulli, de esta técnica. En este sentido, es fundamental que los docentes reflexionen sobre qué tipo fenómenos son los más adecuados, según su población, para que el estudiante logre desarrollar procesos de generalización y abstracción en la construcción de técnicas para solucionar ecuaciones diferenciales ordinarias.

Los procesos matemáticos como la modelación y resolución de problemas, exigen el uso de la intuición y de estrategias heurísticas en las que se privilegia el razonamiento intuitivo. La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias, muestra que, ambos procesos y sus implicaciones han aportado al desarrollo de este campo. En consecuencia, es fundamental que los docentes diseñen actividades que involucren la modelación de fenómenos como el de braquistócrona, la catenaria, problemas de elasticidad, problemas de naturaleza matemática, problemas de química o bilogía, entre otros, que conduzcan a la creación de técnicas para solucionar ecuaciones diferenciales ordinarias. Un aspecto que se debe tomar en cuenta es la población a la cual se enseña, si estamos con estudiantes de ingeniería sería adecuado plantear problemas de su contexto laboral, ahora bien, si son estudiantes de matemáticas sería apropiado combinar la modelación fenómenos físicos y matemáticos. En esta misma dirección, la historia deja ver que es importante partir de casos simples, por ejemplo la ecuación de Clairaut, para encontrar propiedades, tales como el significado de una solución singular. Otro procedimiento heurístico que los docentes deben promover en los cursos de ecuaciones diferenciales, se asocia con la idea de reducir un problema a uno conocido; históricamente se reconoce que esta estrategia heurística fue ampliamente utilizada por los científicos del siglo XVIII. Para ilustrar esta idea, recordemos que Leibniz solucionó la ecuación de Bernoulli reduciéndola a una ecuación en la que se conocía la estrategia para solucionarla.

Es importante mencionar que las actividades no deben quedarse en el plano empírico o experimental en el que se validan resultados, puesto que, se caería en el error de centrarse en procesos algorítmicos en los cuales no existe una reflexión profunda sobre los objetos y procesos matemáticos involucrados en los problemas. Es por ello, que se debe pasar de los ejemplos y solución de problemas particulares a la reflexión y abstracción de las nociones, propiedades y relaciones matemáticas que se pueden establecer.

El análisis histórico permitió identificar la importancia de incorporar procesos heurísticos, procesos matemáticos y algunos razonamientos específicos en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Además, este análisis dejó entre ver algunos obstáculos epistemológicos en la constitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Retomamos la perspectiva de Brousseau (1998) para estudiar los obstáculos epistemológicos, la cual define a los obstáculos como un conocimiento que tiene validez en un contexto determinado, pero que en otros contextos genera respuestas falsas. Desde esta perspectiva, un obstáculo no es un conocimiento falso, sino un conocimiento que está obstaculizando la adquisición de uno nuevo. Una característica principal de los obstáculos epistemológicos es que son constitutivos del saber, por esta razón, es posible identificarlos en la historia del propio concepto. Años anteriores Bachelard (1976) clasificó los obstáculos que se presentan en la construcción de conocimiento en las ciencias físicas. Definió cinco obstáculos principales, a saber: la experiencia básica o conocimientos previos, el obstáculo verbal, el peligro de la explicación por la utilidad, el conocimiento general y el obstáculo animista. Desde la perspectiva de Brousseau y la clasificación de Bachelard es posible analizar algunos obstáculos epistemológicos presentes en la constitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

El primer obstáculo se vincula con el hecho de pensar que desde la perspectiva de la modelación es posible estudiar en profundidad todos los elementos vinculados en las ecuaciones diferenciales ordinarias. Durante el siglo XVIII las ecuaciones diferenciales surgieron en la dinámica de la resolución de problemas del campo de física. Si bien a partir de estos problemas se encontraron diversas técnicas de solución, también ocasionó un estancamiento en esta disciplina, pues en su conjunto todas estas técnicas resolvían casos particulares de ecuaciones, pero no hubo la creación de principios amplios y generales para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. En esta misma vía, es posible señalar que la modelación de problemas en el siglo XVIII no permitió estudiar aspectos teóricos como el teorema de existencia y unicidad. Este teorema solo se abordó 100 años después del surgimiento de las ecuaciones diferenciales ordinarias y sus técnicas, ya que por las condiciones de los problemas (modelado de un problema físico) era evidente que existiera una solución. Este hecho se presentó a pesar de que las ecuaciones que resolvían los científicos del siglo XVIII eran de valores iniciales, pero la pregunta de existencia y unicidad de la solución a una determinada ecuación no tenía sentido si estaba estudiando un problema de modelado.

En la actualidad existen posturas que señalan que desde una perspectiva de modelación es posible acercarse al aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias, sin tener presente que es necesario ampliar esta perspectiva con el estudio de factores teóricos involucrados en las ecuaciones diferenciales ordinarias, tales como: la reflexión sobre el concepto de diferencial y la relación con las técnicas. Este obstáculo lo podemos ubicar dentro de los que Bachelard denomina el peligro de la explicación por utilidad, pues se crea un conocimiento alrededor del concepto de ecuación diferencial ordinaria en base a la utilidad y aplicación del mismo. En consecuencia, parece conveniente que, en el proceso de enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias, se debe partir de la modelación de problemas, sin dejar de lado los aspectos teóricos y relaciones matemáticas involucradas en su solución.

Otro obstáculo epistemológico que se evidencia en la historia de las ecuaciones diferenciales es la dualidad que presenta el uso del $\frac{dy}{dx}$. Para Leibniz, Newton y Euler $\frac{dy}{dx}$ es el cociente entre dos variaciones infinitamente pequeñas. Sin embargo, con Cauchy $\frac{dy}{dx}$ se convierte en el límite de un cociente de incrementos. Estas dos perspectivas permiten identificar dos formas de comprender $\frac{dy}{dx}$; una vinculada con la aplicación en la solución de problemas físicos, perspectiva de Leibniz, Newton y Euler, y otra vinculada con la aplicación en el campo matemático. Al respecto Artigue, Menigaux y Viennot (1990) señalan que ambas formas de entender este concepto circulan en los estudiantes, sin embargo no existe una comprensión sobre estos, ya que aplican algoritmos sin asociarle algún significado. Este hecho refleja el viejo conflicto entre las dos formas de entender el $\frac{dy}{dx}$ desde la matemática y la física. Conflicto que continua hasta la actualidad pues no existe una claridad frente a este concepto.

En los cursos de cálculo se plantea $\frac{dy}{dx}$ desde la perspectiva de Cauchy. Pero en los cursos de física se utiliza la perspectiva de Leibniz, Newton y Euler. En consecuencia, es necesario que los estudiantes entiendan ambas perspectivas y establezcan relaciones entre ellas. De acuerdo a las categorías de Bachelard este tipo de obstáculo estaría ubicado en el de conocimiento general, puesto que las definiciones para entender el $\frac{dy}{dx}$ son demasiado amplias, y dejan de lado aspectos esenciales y detalles que son los que permiten definir con claridad cada perspectiva. Este obstáculo se hace evidente con Leibniz y Newton al momento de definir las cantidades infinitamente pequeñas, ya que la caracterización que realizan es general y no profundizan en detalles, tales como: la operatividad y naturaleza de las mismas. En consecuencia, es evidente, que las definiciones que circulen en los estudiantes, sobre el concepto de $\frac{dy}{dx}$, sean generales y poco profundas en relación a la naturaleza de las diferenciales.

Una propuesta de enseñanza de las ecuaciones diferenciales, debería de incluir la reflexión y discusión del concepto de diferencial. En la mayoría de cursos de ecuaciones diferenciales y aún de cálculo, no se estudia este aspecto. Obviar esta reflexión ha causado que los estudiantes aprendan procesos algorítmicos para encontrar derivadas, integrales y resolver ecuaciones, pero sin adquirir una comprensión profunda de este concepto. Esta misma situación se presentó al inicio de la creación del cálculo con Newton y Leibniz los cuales desarrollaban satisfactoriamente sus procesos algorítmicos, pero tenían problemas para explicar la naturaleza de los objetos con los que trabajaban, como en el caso de la diferencial; por ello en ocasiones llegaban a resultados válidos sin preguntarse sobre el formalismo matemático que soportaba estos conceptos.

Tradicionalmente, los cursos de ecuaciones diferenciales ordinarias se centran en la presentación analítica o algebraica de las técnicas. Olvidando que existen otros marcos como los geométricos y numéricos para estudiar la solución de una ecuación. Una propuesta para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales es complementar la presentación de las técnicas algebraicas, como: separación de variables, ecuaciones exactas, ecuaciones diferenciales lineales, variación de constantes, etc, con otros marcos como los geométricos y numéricos; en particular vincular la teoría cualitativa desarrollada por Poincaré y Liapunov en el siglo XIX, y el método de Euler, Euler mejorado y Runge Kutta para el estudio de las soluciones de ecuaciones diferenciales. De esta manera, se logrará que los estudiantes tengan más alternativas para solucionar una ecuación diferencial y no dependan exclusivamente del marco algebraico. Además, el estudio de las soluciones desde los diferentes marcos, permite a los estudiantes establecer vínculos entre cada uno de ellos, lo cual promueve un aprendizaje conceptual. Una manera de incorporar los marcos geométricos y numéricos en el estudio de las ecuaciones diferenciales es utilizando herramientas tecnológicas.

A continuación se presenta un análisis histórico sobre la incorporación de las ecuaciones diferenciales ordinarias en los libros de texto.

Una mirada a los libros de textos de ecuaciones diferenciales ordinarias

Los primeros métodos de solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias aparecieron publicados en la revista *Acta Eruditorum*. Fue Euler entre 1768-1770 en *Institutiones Calculi Integralis* quien sistematizó todas estas técnicas. Esta obra consta de tres tomos en los cuales se discuten diversos tópicos del cálculo, incluyendo, las técnicas para solucionar ecuaciones de primer orden tales como: ecuaciones separables, homogéneas, exactas y lineales; al igual que ecuaciones de segundo orden y orden superior. Es claro que la sistematización elaborado por Euler no constituye un libro de texto para la enseñanza de las EDO, pero es un referente que guía el trabajo posterior en la elaboración de libros de texto con intenciones hacia la enseñanza de las EDO. Un aspecto importante a resaltar en la escritura de libros de texto de las EDO es que en principio aparecían como un capítulo de un libro de cálculo, pero con el tiempo se elaboraron textos diseñados exclusivamente para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales; en la actualidad existen libros de texto para poblaciones específicas como matemáticos e ingenieros. Sin embargo, en su mayoría, todos estos libros de texto privilegian una presentación de los métodos algorítmicos-algebraicos para resolver ecuaciones diferenciales, olvidándose del abordaje geométrico o por métodos numéricos. Este hecho hace que los estudiantes no tengan un amplio conocimiento de los diferentes acercamientos para solucionar las ecuaciones diferenciales (Nápoles & Negrón , 2002).

La obra de Euler muestra la clasificación de las ecuaciones diferenciales que ha perdurado hasta la actualidad, sin embargo, con el tiempo diferentes matemáticos han modificado el orden para presentar en los libros de texto los tipos de EDO, y han incorporado nuevos elementos de la matemática a estos libros. Por ejemplo, Lacroix (1765-1843) en su trabajo *Traite Elementaire de Calcul Differentiel* de 1837 organiza y estructuran diversos elementos del cálculo desarrollados por científicos Europeos. Un aspecto a destacar del trabajo de Lacroix es que fue diseñado para la enseñanza del cálculo, y en consecuencia presenta una manera alternativa, diferente de la de Euler, de abordar el estudio de las EDO. Por esta razón, se puede considerar que

Lacroix es uno de los primeros profesores que realiza transposición didáctica de las EDO (Nápoles & Negrón , 2002). En esta misma dirección, Cauchy escribió sus notas de clases *Equation Differentiellis Ordinaries: corus inéditi* en las cuales incorporó la definición de derivada. Estas notas se pueden considerar como una ampliación del trabajo elaborado por Euler y Lacroix. La elaboración de las notas de Cauchy se dio en la dinámica de la creación de libros para las nuevas instituciones que emergían de la revolución Francesa y el imperio Napoleónico. Estas instituciones repensaron y estructuraron el cálculo. De otra parte, el establecimiento de *Ecole Polytechique* en 1795 planteó una metodología de enseñar la matemática, la cual fue adoptada como modelo en las universidades. El conjunto de estos eventos condujo a la escritura de los libros de texto por parte de Lacroix y Cauchy.

La obra de Lacroix resume, en gran medida, los tópicos que generalmente se enseñan en un curso elemental de EDO, pues no incluye soluciones de ecuaciones por métodos numéricos ni geométricos, únicamente expone las técnicas algebraicas. Para el estudio de la existencia y unicidad de una solución de una ecuación diferencial Lacroix remite a los lectores a otros textos.

Los desarrollos de Poincaré alrededor de la teoría cualitativa durante 1881 y 1886 permitieron estudiar métodos geométricos para la solución de EDO, igualmente, Aleksandr Mijailovich Liapunov (1857-1918) continuó con el estudio de la teoría cualitativa. Sin embargo todos estos aportes solo fueron incluidos en los libros de texto para ingenieros a mediados del siglo XX. De igual manera sucedió con los desarrollos en el campo de las soluciones de ecuaciones diferenciales por métodos numéricos, entre ellos el método de Euler, Euler mejorado y el de Runge Kutta. Los textos que incluían un acercamiento a lo numérico lo hacían desde la perspectiva del lenguaje de programación. En la mayoría de los casos los libros de textos para la enseñanza de las EDO, elaborados a finales del siglo XX e inicios del siglo XXI, se centraban en la presentación algorítmica algebraica de las técnicas para solucionar EDO, dejando de lado los acercamientos geométricos (teoría cualitativa) y numéricos. Con respecto a las aplicaciones de las EDO es posible afirmar que se incluyeron en los libros de texto a mediados de los años 50 del siglo XX (Nápoles & Negrón , 2002), principalmente se trabaja con problemas vinculados con circuitos eléctricos, vibraciones mecánicas y en general con problemas del campo de la física. El método de la transformada de Laplace se incluyó paralelamente a las aplicaciones.

Algunos cambios fundamentales de los libros de texto desde Euler y Cauchy hasta la actualidad se vinculan con orden en la presentación de las técnicas para solucionar EDO. Por ejemplo, mientras que en Euler se iniciaba con la idea de encontrar un factor integrante que permitiera a la ecuación $Pdx + Qdy = 0$ ser exacta; en la actualidad comúnmente se parte de la técnica de separación de variables y las ecuaciones a las cuales es posible aplicar este método.

La revisión sobre la evolución de los libros de texto de EDO permite concluir que es necesario incorporar no solo en los textos sino en las clases los diversos métodos para solucionar ecuaciones diferenciales. Generalmente tanto en los textos como en las clases de EDO se privilegia la presentación de los procesos algorítmicos-algebraicos para la solución de una ecuación diferencial, dejando de lado los otros acercamientos como los geométricos y numéricos que podrían ayudar al estudiante en la conceptualización de este campo de conocimiento. Además los diferentes registros de representación posibilitarían una mayor claridad en el proceso de modelación de un fenómeno.

A modo de síntesis y en relación con la pregunta de investigación, podemos concluir que, algunos elementos epistemológicos vinculados con el desarrollo del cálculo que posibilitaron la constitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias son: el cambio de paradigma de lo geométrico a lo analítico, es decir, no solo los métodos geométricos respondían a los problemas científicos, sino también el cálculo inicio a dar solución a diversos problemas; el trabajo con las cantidades infinitesimales permitió la modelación de problemas de la física, lo cual conllevó al planteamiento de las primeras ecuaciones diferenciales ordinarias; el uso de series para representar curvas transcendentes facilitó el estudio de algunas ecuaciones diferenciales ordinarias. En esta misma vía, se puede mencionar que entre los elementos epistemológicos vinculados con la modelación de problemas físicos que posibilitaron la constitución de las ecuaciones diferenciales ordinarias se encuentran: el cambio en la manera de abordar el estudio de los fenómenos, en un principio bastaba con describir cualitativamente el comportamiento de los problemas físicos, sin embargo a partir del siglo XVII hubo un interés por estudiar cuantitativamente los fenómenos; finalmente el interés por el análisis del movimiento motivó a los científicos a abordar el estudio de problemas mecánicos que condujeron a las primeras ecuaciones diferenciales ordinarias. De acuerdo a Jankvist (2009) esta investigación se ubica en la categoría de la historia como un objetivo, puesto que se centra en el desarrollo y estudio de algunos aspectos evolutivos de las matemáticas como disciplina; ahora bien, en las conclusiones es posible identificar la segunda categoría, la historia como una herramienta, ya que se usa el estudio elaborado para reconocer obstáculos epistemológicos y aspectos relevantes en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Bibliografía

Anacona, M. (2003). Historia de las matemáticas en la educación matemática. *Ema, 8*(1), 30-46.

Arslan, S. (2010). Traditional instruction of differential equations and conceptual learning. *Teaching Mathematics and Its Applications, 29*, 94-107.

Artigue, Menigaux, & Viennot. (1990). Some aspects of students' conceptions and difficulties about differentials. *European Journal of physics, 11*(5), 262-267.

Bachelard. (1976). *La formación del espíritud científico.* México : Siglo veintiuno.

Bakker, A., & Gravemeijer, K. (2006). An historical phenomenology of mean and median. *Educational Studies in Mathematics, 62*, 149-168.

Bernoulli, J. (1690). Analisis aroblematis antehac. *Acta Eruditorum*, 217-219.

Bernoulli, J. (1691). Solutio problematis funicula. *Acta Eruditorum*, 274-276.

Bernoulli, J. (1694). Modus generalis construen di omnes equationes differentiales Primi Gradus. *Acta Eruditorum*, 435-437.

Bos. (1975). Differentials higber-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus. *Archive for History of Exact Sciences, 14*, 1-90.

Bos, Bunn, Dauben, Grattan, Hawkins, & Moller. (1980). *From the calculus to set theory 1630-1910.* New Jersey: Pricenton University press.

Braun , M. (1990). *Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones* . Distrito Federal : Iberoámerica.

Brousseau. (1998). *Théorie dessituations didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Cantoral, & Farafán . (2004). El análisis algebraico en el siglo XVIII. En *Desarrollo conceptual del cálculo* (*pp. 109-120*). México: Thomson.

Cañada. (2002). *Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por alumnos de secundaria.* España: Universidad de Granada.

Capobianco, Enea, & Ferraro. (2016). Geometry and analysis in Euler’s integral calculus. *Archive for History of Exact sciences*, 1-38.

Castro, E., Castro , E., & Torralbo , M. (2013). El análisis fenomenológico en la formación inicial de maestros. En *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (*pp. 141-160*). Granada: Comares.

Chaachoua, H., & Saglam , A. (2005). Modelling by differential equations. *Teaching Mathematics and its Applications, 25*(1), 15-22.

Cohen, & Manion. (2002). Investigación histótica . En *Métodos de investigación educativa* (*pp. 75-101*). Madrid: La Muralla.

Dou, A. (1988). *Orígenes del cálculo de variaciones* . Madrid: Academia de ciencias exactas, física y naturales.

Euler, L. (1732). Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus. En *Opera Omnia* (1 ed., Vol. 22, págs. 1-14).

Euler, L. (1740). De infinitis curvis eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis. En *Opera Omnia* (1 ed., Vol. 22, págs. 36-56).

Euler , L. (1743). De integratione aequationum differentialium altiorum graduum . En *Opera Omnia* (Vol. 22, págs. 108-149).

Euler, L. (1763). De integratione aequationum differentialium . En *Opera Omnia* (Vol. 22, págs. 334-394).

Euler, L. (1914). Instituciones calculi integralis. *En Opera Omnia, vol. 30.*

Farmaki, V., & Paschos, T. (2007). Employing genetic 'moments' in the history of mathematics in classroom activites. *Educational Studies in Mathematics, 66,* 83-106.

Garmendia, L., Menarquez, T., Molero, M., & Salvador, A. (2007). Ecuaciones diferenciales ordinarias. En *Análisis matemático para ingeniería* (págs. 365-406). Madrid, España: prentice hall.

Graveimejer, K., & Terwuel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. J. *Curriculum Studies, 32*(6), 777-796.

Grosholz. (1987). Two Leibnizian manuscripts of 1690 Concerning Diffrential Equations. *Historia Mathematica, 14*, 1-37.

Habre, S. (2012). Improving understanding in ordinary differential equations through writing in a dynamical environment. *Teaching Mathematics and Its Application, 31*, 153-166.

Hernández, D. (2007). La cicloide un recorrido histórico por sus propiedades,. *Revista iberoamericana de educación matemática*, 115-134.

Huygens. (1673). *Horologium Oscillatorium sive motu pendulorum ad horologia aptato demostrationes geometricae.* Paris.

Jankvist. (2009). A categorization of the"whys"and"hows"of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*, 235-261. doi:10.1007/s10649-008-9174-9

Ju, K., & Kwon, O. (2007). Ways of talking and ways of positioning: Student´s beliefs in an inquiry-oriented differential equations class. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 267-280.

Kline, M. (1992). Las ecuaciones diferenciales ordinarias en el siglo XVIII. En *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días* (Vol. II, págs. 622-665). madrid, España: Alianza.

Kline, M. (1992). Las ecuaciones diferenciales ordinarias en el siglo XIX. En *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días* (Vol. II, págs. 622-665). madrid, España: Alianza.

Leibniz. (1696). Notatiuncula ad Acta Decemb 1695. *Acta Eruditorum*, 145-147.

Martínez, J., López, R., Gras, A., & Torregrosa, G. (2002). La diferencial no es un Incremento Infinitesimal. evolución del concepto de Diferencial y su Clarificación en la enseñanza de la Física. *Enseñanza de las Ciencias, 20*(2), 271-283.

Nápoles , & Negrón . (2002). La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contadas por sus libros de texto. *Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas, 3*(2), 33-57.

Nápoles, J. (1998). El legado histórico de las ecuaciones diferenciales ordinarias, consideraciones (auto) criticas. *Boletín de matemáticas, 5*, 53-79.

Nápoles, J., & Negrón, C. (2002). La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contadas por sus libros de texto. *Revista electrónica de didáctica de las matemáticas, 3*(2), 33-37.

Nápoles, J., Gozáles, A., Genes, F., Basabilbaso, F., & Brundo, J. (2004). El enfoque histórico- problématico en la enseñanza de la matemática para ciencias técnicas: el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias. *Scientiae, 6*, págs. 41-59. Canoas.

Newton. (1671). *Analysis per quantitatum, series, fluxiones, ac differentias: cum enumeratione linearum tertii ordinis.*

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (*pp. 61-94*). Barcelona, España: Horsori.

Rasmussen, C., Kwon, O., Allen, K., Marrongelle, K., & Burth, M. (2006). Capitalizing on advances in mathematics and K-12 Mathematics Education in undergraduate mathematics: An inquiry-oriented approach to differential equations. *Asia Pacific Education Review, 7*(1), 85-93.

Rasmussen, C., & King, K. (2000). Locating starting points in differential equations: a realistic mathematics education approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(2), 161-172.

Recalde. (2004). La lógica de los números infinitos: un acercamiento histórico. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria, 12*(1), 51-72.

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones difenciales. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4), 191-210.

Sánchez Fernándes, C., & Valdés Castro, C. (2004). *De los Bernoulli a los Bourbaki una historia del arte y la ciencia del cálculo* . España: Nivola.

Serway, R. (1998). *Física.* Ciudad de México, México: Macgraw Hill.

Tournès. (2011). La construction tractionnelle des équations différentielles. *Historia Mathematica, 38*, 423-428.

Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks. *For the Learning of Mathematics,, 20*(1), 44-55.

Tzankis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. En J. Fauvel, & J. Van Maanen (Ed.), *History in Mathematics Education* (págs. 201-240). Dordrecht: Kluwer Academic.

Vasco , C. E. (1994). La educación matemática: una disciplina en formación. *Erm, 3*(2), 59-75.