UAGro

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

Unidad Académica de Matemáticas

Maestría en Ciencias: Área Matemática Educativa

Construcción de la Matriz de Cambio de Base: un análisis cognitivo en términos de la Teoría APOE

Tesis que presenta

Esteban Mendoza Sandoval

Para obtener el grado de

Maestría en Ciencias **Área Matemática Educativa**

Directoras de tesis:

Dra. Flor Monserrat Rodríguez Vásquez
Dra. Solange Roa Fuentes

Centro de Investigación en Matemática Educativa CIMATE-UAG

Chilpancingo, Guerrero **Noviembre de 2015**

Agradezco al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología** (CONACyT) por el apoyo financiero otorgado para realizar mis estudios de maestría y el recurso bridado para una estancia de investigación en la Universidad Industrial de Santander (UIS), Colombia, que se materializa con este trabajo de investigación.

Becario No. **299932**

CONACYT

CONACYT

CONACYT

Agradezco al Proyecto **FOMIX**, Clave: GUE: 2014-C01-249670 por el apoyo económico brindado para la culminación de este proyecto de investigación.

Dedicatoria

A mis Padres:

Donaciano Mendoza Soloya y Florentina Sandoval Olivares son mi razón de ser,
mi inspiración para seguir escalando peldaños en el mundo del saber,
disfrutar la dicha de tenerlos a mi lado,
por el amor, cariño y compresión incondicional en cada momento.

A mis Hermanos:

Xitlali Mendoza Sandoval, Daniel Mendoza Sandoval por compartir conmigo cada logro y dificultad en el trayecto de nuestras vidas, apoyándome en todo instante. Y estar siempre unidos.

A mis sobrinas:

Magui y Florecita
Por llenar el hogar y mi corazón de alegría y risas.

A mi cuñado:

Israel Oyorzabal Rojas, por ser un gran amigo y ser humano.

Agradecimientos

Al centro de investigación de matemática educativa CIMATE-UAGro por todo el apoyo brindado. Por hacer de mí persona, un recurso humano con la convicción de incidir en las prácticas educativas tradicionales.

Agradezco infinitamente a las Dras. Solange Roa Fuentes y Flor Monserrat Rodríguez Vásquez por aceptar dirigir este proyecto de investigación. Por darme las pautas para lograrlo, además de su tiempo brindado para la mejora del documento.

A la coordinadora del Posgrado en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro) la Dra. Guadalupe Cabañas por depositar la confianza en mí y agilizar los trámites ante las instituciones correspondiente para realizar una estancia de investigación en la Universidad Industrial de Santander (UIS) Colombia.

A los revisores de esta investigación: Dr. Jesús Romero Valencia, Dr. Gustavo Martínez Sierra. Por las sugerencias y observaciones brindadas.

Al Dr. Edgardo Locia Espinoza, por a aconsejarme continuar en el estudio de las matemáticas cuando me daba por vencido. Sin su motivación no hubiese continuado.

Al M.C. Miguel Díaz y M.C. Víctor Díaz por todo su tiempo brindado en esas charlas que inciden en mi forma de pensar.

Al Dr. Armando Morales por guiarme en mi formación académica y motivarme en todo momento para seguir preparándome.

A mis compañeros de generación: Melby, Miriam, Anairis, Huitzi, Jorge. Por esos momentos de reflexión y experiencias que pasamos juntos. Más aun, agradezco a Melby por compartir su tiempo para hacer de cada instante un espacio de crítica y reflexión propositiva en nuestro quehacer por incidir en las prácticas educativas tradicionales.

A toda mi familia, gracias por todo. Sin ustedes, soy nada.

ÍNDICE

RESUMEN

En este documento se presenta un estudio acerca del conocimiento matemático asociado al concepto matriz de cambio de base. La investigación se sustenta en la *Teoría APOE* (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) (Arnon et al., 2014).

Presentamos un modelo cognitivo (descomposición genética) que muestra un conjunto de estructuras que un estudiante podría necesitar construir, con el fin de aprender el concepto matriz de cambio de base.

Para dar evidencia de las construcciones y mecanismos que pueden estar asociados a la comprensión a los conceptos en estudio, diseñamos una prueba diagnóstico y una entrevista a partir de la descomposición genética hipotética (resultado de un análisis teórico). Las entrevistas se realizaron con estudiantes universitarios que al menos ya habían tomado un curso de álgebra lineal; se videograbaron las entrevista para hacer un análisis más fino a partir de las respuestas que los estudiantes.

Los resultados obtenidos nos permitieron identificar y analizar las estructuras que desarrollaron los estudiantes y así realimentar las que se habían previsto en la descomposición genética preliminar. Con base en ello, rediseñamos la descomposición genética preliminar para proponer un modelo cognitivo, producto de la evidencia presentada en el trabajo de los estudiantes el cual se apega a la experiencia de cómo han aprendido este concepto. Además se presentan dos formas de calcular la matriz de cambio de base asociadas a su conocimiento matemático de los estudiantes. Se presentan conclusiones didácticas y por último reflexiones para futuras investigaciones relacionadas con los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matriz de cambio de base.

INTRODUCCIÓN

El Álgebra Lineal es un área de las matemáticas que aparece en el currículo de programas de ingeniería, matemáticas y licenciatura en matemáticas, generalmente en el primer año. En diferentes contextos académicos es considerado de interés gracias a su importancia en el desarrollo del pensamiento matemático y sus aplicaciones en otros campos.

Con este trabajo de investigación buscamos a portar sobre la base de la teoría APOE desarrollada por Ed Dubinsky y colaboradores (Asiala, et al. 1996), un modelo cognitivo que describe las estructuras y mecanismos que un estudiante podría necesitar con la finalidad de aprender el concepto *Matriz de Cambio de Base*.

Dicho modelo cognitivo propuesto, es el resultado de la aplicación de dos componentes del ciclo de investigación: análisis teórico, recopilación y análisis de datos. Como resultado del análisis teórico diseñamos una descomposición genética hipotética la cual describe la construcción de concepciones del objeto de estudio. Con sustento en el análisis teórico diseñamos dos instrumentos para la recopilación y análisis de datos: una prueba diagnóstico y una entrevista en las cuales se buscaba identificar las estructuras de los estudiantes relacionadas a la matriz de cambio de base y además analizar las estructuras que presentaban los estudiantes a la hora de la entrevista, esto con el fin de realimentar la descomposición genética y nos dieran evidencia de su concepción de la matriz de cambio de base.

El trabajo de investigación está compuesto por cinco capítulos los cuales se describen a continuación:

Capítulo 1. En este capítulo damos un panorama general sobre las investigaciones realizadas en torno a los procesos de aprendizaje y enseñanza de conceptos fundamentales en Álgebra Lineal. Posteriormente nos centramos en las ideas expuestas por Hillel (2000) donde menciona la familiaridad de los estudiantes de Álgebra Lineal con conceptos de geometría analítica y las coordenadas estándar, puede convertirse en un obstáculo para pensar en el concepto de base y el de cambio de base. De ahí el interés para hacer la presente investigación.

Capítulo 2. En este capítulo presentamos el sustento teórico de esta investigación; la teoría APOE. Primero explicaremos la definición de las diferentes construcciones y mecanismos mentales. Segundo mostraremos el problema y objetivo de investigación.

Capítulo 3. En este capítulo presentamos el diseño metodológico que hemos considerado para el desarrollo de la investigación, tomando la primera y tercera componente del ciclo de investigación que propone la teoría APOE. Dado que el objetivo principal, es construir una descomposición genética de una matriz de cambio de base, la interacción mutua entre dichas componentes puede detallar el análisis teórico inicial. Ya que el trabajo de los estudiantes permite robustecerla y validarla.

Capítulo 4. En este capítulo se presenta el análisis de los datos del diagnóstico y la entrevista a la luz de la descomposición genética hipotética. Para esto se inicia con el análisis de las estructuras previas encontradas en el trabajo de los estudiantes para dar inicio al estudio de las estructuras y mecanismos mentales que se asocian con la matriz de cambio de base.

Capítulo 5, En este capítulo se presentan las conclusiones generales de nuestro proyecto, resaltando los principales hallazgos después de la aplicación de la prueba diagnóstico y la entrevista. Mostramos el aporte teórico; la descomposición genética del concepto matriz de cambio de base validada con base en el trabajo realizado por los estudiantes. Además se presentan dos formas de calcular la matriz de cambio de base asociadas a su conocimiento matemático de los estudiantes. Proponemos algunas sugerencias didácticas para el tratamiento del concepto matriz de cambio de base en cursos regulares de Álgebra Lineal, así como algunas propuestas para futuras investigaciones.

Esperamos que este trabajo represente un aporte significativo y se considere como una alternativa en pro de contribuir a una mejora del aprendizaje respecto a los cambios de base, en particular al concepto matemático llamado matriz de cambio de base, un concepto básico de Álgebra Lineal. Los resultados que presentamos pueden representar una herramienta didáctica para que maestros e investigadores diseñen e implementen instrumentos en su quehacer cotidiano que promuevan una concepción adecuada del concepto Matriz de Cambio de base.

Capítulo 1

1 ANTECEDENTES

En este capítulo damos un panorama general sobre las investigaciones realizadas en torno a los procesos de aprendizaje y enseñanza de conceptos fundamentales en Álgebra Lineal. Posteriormente nos centramos en un problema particular relacionado con la comprensión del concepto matriz de cambio de base. La idea principal es dar respuesta a dos preguntas específicas relacionadas con las construcciones mentales necesarias para el aprendizaje del concepto matriz de cambio de base y con ello proponer un modelo cognitivo para su construcción. Para lograrlo nos hemos planteado un objetivo general: Identificar y analizar las estructuras mentales que construyen los estudiantes y los mecanismos cognitivos asociados al construir el concepto matriz cambio de base, mediante la construcción de una descomposición genética de dicho concepto.

1.1 La enseñanza y el aprendizaje en Álgebra Lineal

El estudio del Álgebra Lineal, es sin duda una unidad de aprendizaje difícil de comprender para la mayoría de estudiantes de nivel superior en el área de matemáticas, dada la naturaleza abstracta de ésta. Esta unidad de aprendizaje se propone en diferentes planes de estudio, al menos un curso en nivel superior, debido a su importancia en el desarrollo del pensamiento matemático y sus aplicaciones en diferentes áreas. Por ejemplo, en Física resulta muy conveniente usar los vectores para modelar fuerzas; en Química se pueden utilizar sistema de ecuaciones para resolver una ecuación química balanceada; en Economía los mismos sistemas de ecuaciones lineales se pueden utilizar para la solución de Modelos económicos lineales, así como en situaciones que involucran el procesamiento de imágenes, sólo por mencionar algunas de sus aplicaciones.

Dada su naturaleza abstracta que resulta compleja para los estudiantes, en muchos casos los temas tratados alcanzan un grado mínimo de comprensión. Para Dorier (2000) cuando se presenta por primera vez los conceptos básicos de Álgebra Lineal a los estudiantes, sienten como si aterrizaran en un nuevo planeta en el cual no logran ubicarse.

> "Es bastante claro que muchos estudiantes tienen la sensación de haber aterrizado en un planeta nuevo y no son capaces de encontrar su camino en este nuevo mundo"
>
> (Dorier, Robert, Robinet, & Rogalski, 2000, p. 86)

En la formación académica cuando un estudiante toma por primera vez un curso de Álgebra Lineal según el currículo de los diferentes planes de estudio, cuenta con herramientas asociadas con: Álgebra, Geometría Analítica y Geometría Plana, que ha construido en años previos para converger en la introducción del Álgebra Lineal en un nivel superior, esto para el caso de las licenciaturas en matemáticas o carreras afines. Algunos autores de libros de Álgebra Lineal mencionan que el cálculo no es un prerrequisito para el Álgebra Lineal, sin embargo proponen diversos problemas en los que se requiere tener algunos conocimientos de dicha asignatura. Encontramos en Grossman (2008) que se necesitan conocimientos firmes del álgebra correspondientes a la enseñanza media superior, antes de abordar el Álgebra Lineal.

Para una mejor organización en la lectura de los antecedentes los hemos dividido en tres categorías: Investigaciones relativas a los obstáculos en los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal; investigaciones usando teoría APOE sobre conceptos del álgebra lineal; e investigaciones que plantean estrategias para la enseñanza del álgebra lineal.

1.2 Antecedentes de la investigación

A continuación haremos una descripción de los trabajos realizados referente a la matriz de cambio de base desde las diferentes perspectivas teóricas, o mostraremos investigaciones las cuales desde nuestro punto de vista son significativas y de alguna manera ayudaran a fortalecer la presente investigación.

1.2.1 Investigaciones relativas a los obstáculos en los procesos de enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal

A continuación mostramos trabajos realizados por diversos investigadores referentes al Álgebra Lineal, hacemos referencia a algunos obstáculos que emergen en el proceso de aprendizaje y enseñanza. Dichos obstáculos provienen de la confusión de los objetos matemáticos y sus representaciones. Las representaciones se dan por los diferentes lenguajes con los que se trata al Álgebra Lineal.

A través de ejemplos se explicará en qué consiste el obstáculo del formalismo, y obstáculo epistemológico, en particular en Álgebra Lineal.

Investigadores como Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000) atiende cuestiones referentes a la naturaleza epistemológica del Álgebra Lineal: diseños didácticos y uso de diversos tipos de lenguaje, que son fuentes de obstáculos en el aprendizaje, con fundamento en traspasos y diagnósticos realizados por ellos mismos entre 1987 y 1995, sobre el conocimiento y las ideas del Álgebra Lineal que estudiantes franceses (con edades comprendidas entre 18 y 20 años) habían desarrollado sobre esta área de las matemáticas.

En el primer diagnóstico Dorier et al., (2000) revelan un obstáculo que aparece en las generaciones sucesivas llamado el obstáculo del formalismo, que quizá su génesis es iniciada por malas interpretaciones o la falta de requisitos previos elementales como de teoría de conjuntos y lógica matemática.

Las matemáticas se caracterizan por un alto grado de formalismo, dos particularidades: la generalización y la naturaleza unificadora de la teoría de espacios vectoriales, analizadas desde una perspectiva histórica y epistemología (Dorier et al., 2000, p.87). Las investigaciones que presentan, ponen de manifiesto la naturaleza de las dificultades encontradas, por tanto no sólo las ejemplifican las malas manipulaciones formales, sino también aclaran como la falta de conocimientos elementales previos de Lógica y teoría de conjuntos contribuye a los errores a la hora de resolver problemas en Álgebra Lineal.

Particularmente en Octubre y Noviembre de 1987 Dorier et al., (2000) realizaron un estudio para determinar el conocimiento y las ideas principales de estudiantes respecto al Álgebra Lineal después de su primer año de estudios universitarios, en el cual abordaron las siguientes nociones: espacios y subespacios vectoriales, transformaciones lineales, sistema de ecuaciones lineales, formas, matrices y determinantes. El cuestionario como lo llaman los autores consta de siete preguntas que van de lo puramente formal (demostración rigurosa para la solución de un problema), solución de sistema de ecuaciones, calculo típico de la matriz asociada a una transformación lineal hasta una pregunta referente a la opinión del Álgebra Lineal por parte de los estudiantes. Una de las preguntas que los autores proponen, y que permite observar el obstáculo del formalismo, es la siguiente:

> Es verdadero o falso (justifique su respuesta): v y u son dos transformaciones lineales de un espacio vectorial sobre sí mismo:
> $v \circ u = 0 \iff Im(u) = Ker(v)$.
>
> (Dorier et al., 2000, p. 88)

Los autores mencionan que esta pregunta es muy formal puesto que habla de transformaciones lineales en general e igualdad entre conjuntos y esto resulta problemático para los estudiantes. Mencionan además que esta cuestión pone en evidencia sus nociones sobre transformación lineal, imagen y kernel. Una de las respuestas por parte de los estudiantes esto con el fin de hacer evidente el obstáculo del formalismo.

> Si $v(u(x)) = 0 \Rightarrow v(y) = 0$ entonces $y \in \ker(v)$ así $u(x) \in \ker(v)$ así $u(x) = y$, por lo tanto $\exists\, x \in E \mid u(x) = y$ así $y \in Im(u)$, finalmente $v \circ u = 0 \Rightarrow Im(u) = Ker(v)$.
>
> (Dorier et al., 2000, p. 90)

Lo expuesto por parte del estudiante muestra la necesidad del uso del formalismo para justificar su respuesta, a pesar de que comete un error, puesto que la inclusión correcta es $Im(u) \subset Ker(v)$. Con este hecho muestran los autores que el formalismo en este problema surge como una necesidad, pero a medida que en esta necesidad no se tiene control o se hace malos usos de los conceptos se evoca a dicho obstáculo. En la mayoría de los casos donde se usa a la teoría de conjuntos para resolver problemas de Álgebra Lineal suele ser más evidente este obstáculo, por ejemplo, considere lo que escribe otro estudiante sobre la misma situación:

> Falso, por que $v \circ u = 0 \Rightarrow im(u) \in \ker(v)$ y no $im(u) = \ker(v)$.
>
> (Dorier et al., 2000, p. 90)

Como mencionan los autores en esta respuesta hay falta de apropiación por parte del estudiante de los conceptos en cuestión y un dominio inadecuado del lenguaje de la teoría de conjuntos, puesto que el estudiante interpreta $v \circ u = \mathbf{0}$ como el conjunto de todos $u(x) \in ker(v)$ por lo tanto de duce que $im(u) \in \ker(v)$, trata a un conjunto como un elemento. Así que la falta de apropiación de los conceptos que están involucrados en un problema y el poco dominio del lenguaje de teoría de conjuntos, hace que estas deficiencias se alimentan mutuamente Dorier et al., (2000).

En general Dorier et al., (2000) muestran en su primer estudio que menos de una cuarta parte de 379 estudiantes sabe manipular conceptos como imagen y kernel de una transformación lineal, menos de la mitad saben cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales 4 x 4 en el que le calculo numérico es simple y que casi un tercio de los estudiantes no saben cómo calcular de una transformación lineal, aun cuando se consideren espacios isomorfo a $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. A lo largo de los años 1987-1995 continúan sus estudios y mencionan que dicho obstáculo sigue prevaleciendo en las siguientes generaciones de estudiantes.

1.2.2 Modos de descripción en el Álgebra Lineal

Hillel (2000) menciona que en un curso de Álgebra Lineal se incluyen varios modos de descripción y operaciones. Al respecto de estos modos menciona además de que son ciertamente intercambiables pero esto no implica su equivalencia, distingue tres tipos:

> **Modo de descripción abstracto**: Uso del lenguaje de la teoría formal de los espacios vectoriales, esto incluye: espacios vectoriales, subespacios, dimensión, kernel, etc.
>
> **Modo de descripción aritmético**: Usando el lenguaje y los conceptos de manera más específica sobre $\mathbb{R}^n$, es decir; énuplas, matrices, rango, soluciones de sistemas de ecuaciones, etc.
>
> **Modo de descripción geométrico**: uso del lenguaje y conceptos sobre los espacios de dos y tres dimensiones, esto incluye: segmentos dirigidos, puntos, líneas, planos y transformaciones geométricas.
>
> (Hillel, 2000, p. 192)

Hillel (2000) plantea que durante un tiempo los textos norteamericanos seguían el estilo Bourbaki[1], lo cual básicamente consistía en ir de lo general a lo particular, es decir se introducía toda la teoría general de espacios vectoriales y posterior a ella se trabajaba específicamente en $\mathbb{R}^n$. Desde principio de los 80's la mayoría de instructores y autores de libros de Álgebra Lineal abandonaron este enfoque y adoptaron un enfoque en el cual comienza con el modo geométrico y transitan entre $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ y V, usando los tres modos indistintamente, esto lo identifica Hillel (2000) al grabar a cinco profesores experimentados en temas de valores y vectores propios. En sus cintas encuentra cómo los profesores cambian constantemente los modos de descripción y de notación. De los operadores lineales de un espacio vectorial de dimensión finita a matrices, desde valores propios de T definidos como $T(v) = \lambda v$ a vectores que se estiran y se encogen mediante T, o rectas invariantes en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^n$, a la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Hillel (2000) menciona que los profesores no advierten a los estudiantes de los cambios entre dichos modos, más aun, menciona que son realizados sin alguna pausa y sin ser explícitos en dichos cambios. Además plantea que cuando usan el modo de descripción geométrico, no resulta

[1] Nombre colectivo de un grupo de matemáticos franceses en el año 1930.

claro si se hace para un caso particular, o si lo utilizan como algo heurístico para el caso en general.

Respecto a la comprensión de vectores y las transformaciones dentro de los diferentes modos; Hillel (2000) menciona que es fundamental para encarar al Álgebra Lineal el trabajo en las diferentes representaciones. Dado que las representaciones en general no son únicas, pues dependen de la elección particular de la base o sistema de coordenadas, la comprensión de la dependencia de la base y a su vez lo que implícitamente queda invariante hacen de esto un gran desafío para los estudiantes.

Hillel (2000) concluye que en un curso típico de Álgebra Lineal se encuentran por lo menos dos tipos de obstáculos epistemológicos promovidos por: "La familiaridad de los estudiantes con la geometría analítica y las coordenadas estándar" (p.206). Pensar en vectores y transformaciones en un contexto geométrico, esto puede convertirse en un obstáculo para pensar en el concepto de base y el cambio de una base a otra. Otro obstáculo se produce porque "los estudiantes aprenden nociones específicas de $\mathbb{R}^n$" (p.207). Estas nociones hacen a los estudiantes resolver diversos problemas vinculados a la idea central de sistema de ecuaciones. Por tanto el nivel de descripción algebraico puede limitarlos y llevarlos a no aceptar como vectores objetos tales como funciones, polinomios, matrices etc.

Nos interesa lo que Hillel (2000) menciona respecto a la familiaridad de los estudiantes con conceptos de geometría analítica y las coordenadas estándar, y que esto a su vez se puede convertirse en un obstáculo para pensar en el concepto de base y el de cambio de base. Respecto a este caso Hillel (2000) dice que es confuso para los estudiantes el paso de lo abstracto a la representación algebraica, aun cuando se considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, es decir, que una n-tupla se representa como otra n-tupla con respecto a la base y así el objeto y su representación son el mismo "animal" (expresión usada por Hillel), son exactamente los mismos valores.

Respecto al cambio de coordenadas, si una n-tupla puede ser un vector o bien una representación de un vector en relación a una base, y si el vector puede ser expresado por diferentes cadenas de números, para alguien quien identifica a los vectores como una cadena de números en particular, puede hacer que su noción de vector caiga en pedazos Hillel (2000). Menciona además que los estudiantes no se convencen fácilmente que una determinada n-tupla por ejemplo, (5,4) ya es por defecto una representación respecto a una base estándar, es decir, que los escalares de la misma n-tupla coinciden con las coordenadas del vector respecto a la base estándar , y que sea tratado de usar un lenguaje o dispositivos de notación para hacer referencia a este hecho; se pretende mantener con la siguiente terminología la distinción entre x una n-tupla y su representación escrita en relación a una base B dada $[x]_B$.

Respecto a esta terminología se menciona que algunos textos escriben un vector en $\mathbb{R}^n$ como $[v_1, v_2, \dots v_n\ ]$ y para la representación respecto a una base $(v_1, v_2, \dots v_n\ )$. En el primer caso los v_i se le llama componentes y el segundo coordenadas (Hillel, 2000).

1.2.3 Investigaciones usando teoría APOE sobre conceptos de Álgebra Lineal

A continuación presentamos una investigación con un marco teórico cognitivo como sustento, en cual se estudia diferentes conceptos del Álgebra Lineal. Consideramos la siguiente investigación puesto que se relaciona de alguna manera con el tema central de este documento.

Oktaç y Trigueros (2010), describen un proyecto que realizan en México con el objetivo de profundizar la forma en que los estudiantes universitarios aprenden Álgebra Lineal. En consecuencia se proponen realizar un análisis teórico de los diferentes conceptos involucrados utilizando la teoría APOE y validar dicho análisis mediante la investigación empírica; en particular lo hacen para conceptos como: espacio vectorial, transformación lineal, base y sistemas de ecuaciones lineales. En su investigación tratan de responder la siguiente pregunta en lo general:

> ¿Qué construcciones mentales son necesarias para que los estudiantes universitarios construyan los conceptos de álgebra lineal? ¿Cuáles son los principales obstáculos que se enfrentan?
>
> (Oktaç y Trigueros, 2010, p.376)

Mostraremos lo que las autoras plantean para el caso del concepto de base el cual es uno de los conceptos fundamentales en Álgebra Lineal. Dicho concepto resulta particularmente difícil para la compresión de los estudiantes, referente a esto Chargoy (2006), Da Silva y Lins (2002) citados en Oktaç y Trigueros (2010) mencionan que la matemática educativa le ha prestado poca atención. Las autoras se basan en el supuesto que el aprendizaje del concepto de base debe comenzar con la posibilidad de establecer las relaciones entre conceptos, mencionan que dicha noción es una parte fundamental dentro de la estructura de un espacio vectorial y por otro lado guarda relaciones con otros conceptos. Así pues dicha investigación para el caso del concepto de base trata de indagar sobre:

> ¿Qué construcciones han desarrollado los estudiantes universitarios acerca del concepto de base de un espacio vectorial después de haber cursado la materia de Álgebra lineal?
>
> (Oktaç y Trigueros, 2010, p.381)

Para responder a la pregunta, diseñaron una descomposición genética del concepto de base y observaron durante un semestre un curso de Álgebra Lineal de un programa para ingenieros. Mencionan que el curso fue guiado por la metodología de la teoría APOE y que al finalizar el curso diseñaron y aplicaron una entrevista con base en sus observaciones de clase y su descomposición genética. En los resultados Oktaç y Trigueros (2010) muestran que de los alumnos entrevistados no lograron interiorizar el concepto de base de un espacio vectorial. De los seis estudiantes entrevistados cuatro mostraron estar vía a la interiorización, mientras que los restantes mencionan que mostraron evidencia de una concepción acción. Además mencionan que los estudiantes no son capaces de verificar cuándo un conjunto de vectores es base de un espacio vectorial, ni coordinar los elementos conceptuales que están relacionados para la construcción de dicho concepto (espacio vectorial, subespacios, conjunto, generador e independencia lineal). Oktaç y Trigueros (2000) concluyen que a los estudiantes entrevistados les resulta más fácil averiguar si un conjunto de vectores forma una base para un espacio vectorial dado, que hallar una base para el espacio vectorial dado. Mencionan que esto tiene sentido puesto que para lo primero se podría hacer mediante acciones específicas (algoritmo) y el segundo requiere de coordinación de procesos (independencia lineal y conjunto generador).

Además en sus resultados generales muestran la necesidad no sólo de identificar las dificultades de los estudiantes, sino que sugieren que la descomposición genética constituye una herramienta eficaz para que emerjan las construcciones mentales involucradas en la construcción de los distintos conceptos del Álgebra Lineal y con ello diseñar actividades didácticas que permitan a los alumnos una construcción más sólida de los conceptos de Álgebra Lineal.

1.2.4 Investigaciones que plantean estrategias para la enseñanza del Álgebra Lineal

Respecto a la enseñanza en matemáticas se han buscado diversas estrategias de para lograr la construcción de conocimiento significativo, desde material lúdico hasta el uso de la tecnología por mencionar algunas. En Álgebra Lineal encontramos investigaciones que sugieren el uso de tecnología para la enseñanza, Ortiz y Rico (2004) buscan determinar el conocimiento didáctico derivado de la implementación de una calculadora gráfica (CG) TI-92 y la modelación matemática. Esto mediante una aproximación cualitativa con diez profesores de matemáticas en formación que voluntariamente participaron en el estudio, asistiendo aun curo-taller de diez sesiones el cual tenía sustento en la modelación y la calculadora como un recurso en un contexto matemático de álgebra lineal, la metodología que siguen es un estudio de caso.

Los autores hacen un análisis de las producciones en un momento inicial (la primera sesión del taller), intermedio (a la cuarta sesión del taller), y final (la décima sesión) de los maestros en formación. En sus conclusiones mencionan que los participantes plantean situaciones a los niveles de educación secundaria y cercana al entorno del alumno y un buen manejo técnico de la CG y de las opciones que ofrece otorgando siempre la importancia al profesor tanto como al alumno. Además mencionan que los profesores plantean situaciones donde el alumno puede experimentar, conjeturar, formular, explicar, predecir y comparar. Algo importante que mencionan Ortiz y Rico (2004) es la aplicación del proceso de modelización, integrado a la CG, en todas las fases para el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico.

Por otro lado en Álgebra Lineal respecto a su enseñanza no sólo sea hecho investigación sobre futuros profesores y actividades en las cuales se use la tecnología como un medio para aportar conocimiento. Encontramos estrategias didácticas con el uso de cálculo algebraico Derive, utilizando una metodología experimental y por descubrimiento que busca que los estudiantes logren un aprendizaje significativo a partir de las bondades que brinda el Sistema de Cálculo Algebraico (SCA) (Ortega, 2002). Realiza su investigación con un grupo de 153 estudiantes que cursan la asignatura de "Matemáticas II" en el programa de Licenciatura de Administración y Dirección de Empresas de la Universidad Autónoma de Madrid durante el curso 1999-2000. Dividen a dicho grupo en dos subgrupos; subgrupo A (16 estudiantes) y subgrupo B (137 estudiantes) en los cuales harán el comparativo entre una Estrategia Didáctica de Enseñanza y una Estrategia Didáctica Convencional. En sus resultados presenta las ventajas de usar el SCA en este caso el Derive, entre ellas menciona: ofrece un sistema de notación intermedio para la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra Lineal; favorece la interactividad entre alumnos y entre alumnos y profesor; el alumno es el protagonista; facilita la simplificación de numerosos cálculos rutinarios. En su análisis comparativo, por medio de una prueba final aplicada a ambos subgrupos dan evidencia de mejor rendimiento de aquellos estudiantes que llevaron el curso con SCA, que van desde la motivación por el uso del SCA hasta el porcentaje de alumnos aprobados.

1.2.5 Investigaciones realizadas respecto al concepto matriz de cambio de base

Se han realizado muy pocas investigaciones en torno al concepto matriz de cambio de base como principal objeto de estudio. Por ejemplo Montiel y Bhatti (2010), Montiel, Wilhelmi, y Vidadkovic (2012) centran su atención en el cambio de una base a otra en el contexto del Álgebra Lineal, desde el enfoque Ontosemiótico.

En su investigación Montiel y Bhatti (2010) consideran algunas cuestiones que se enfrentan los estudiantes de un segundo curso de Álgebra Lineal en línea, después de asistir a un curso introductorio a esta asignatura para graduarse de un programa de maestría en matemáticas en educación secundaria (los estudiantes son maestros a nivel secundaria) en la Universidad de Georgia. Su atención la centran en el rendimiento de los estudiantes a la hora de calcular cambios de base, y la representación matricial de la transformación lineales con respecto a diferentes bases. En su investigación sólo consideran espacios euclidianos de dimensión finita. Realizan una comparación entre estudiantes que asisten a un curso de Álgebra Lineal y cinco estudiantes de posgrado que toman el curso en línea. Para ello realizan una prueba final en ambos grupos y presentan su análisis respecto a los problemas comunes a dicha prueba. Usan una metodología cualitativa, y situada dentro del enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007). Los parámetros que observaron van desde la comunicación a través de las matemáticas escritas en un foro entre los estudiantes en línea y esto se compara con la comunicación en clase, donde los gestos hablan y juegan un papel más importante. Mencionan Montiel y Bhatti (2010) al respecto que su trabajo es exploratorio y trata de abrir vías de metodología de la investigación acerca de las matemáticas avanzadas en línea.

Las siguientes preguntas son las que incluyeron tanto en su examen final del curso para los estudiantes del campus y los estudiantes del curso en línea, es decir sólo consideran aquellos problemas comunes en ambas pruebas y estos tienen que ver con el cálculo de una matriz de cambio de base y la representación matricial de una transformación lineal.

> $$u_1 = (7,5), u_2 = (-3,-1)$$
> $$v_1 = (1,-5), v_2 = (-2,2)$$
> Sea L el operador lineal en $\mathbb{R}^2$ cuya representación respecto a las bases ordenada u_1, u_2 es:
> $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$
> a. Determine la matriz de transición (matriz de cambio de base) de $V = \{v_1, v_2\}$ a $U = \{u_1, u_2\}$. (Dibuja el triángulo conmutativo)[2]
> b. Encuentra la representación de la matriz L con respecto $\{v_1, v_2\}$.
>
> (Montiel y Bhatti, 2010, párr. 20)

A continuación, mostramos las respuestas esperadas por parte de los autores;

> La matriz de transición, utilizando la técnica del triángulo conmutativo y la notación es:
>
> $$S_U^V = V^{-1}U = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2 & 2\\5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & -3\\5 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 1\\-5 & 2\end{pmatrix}$$
>
> La matriz A (representa la transformación lineal respecto a la base U, ahora sí B representa la transformación lineal respecto a la base V, estas son similares. Entonces, si llamamos "S" a la matriz de cambio de base que lleva de la base U a la base V (la que se calculó con el diagrama conmutativo, "$V^{-1}U$") y S^{-1} a la matriz que nos lleva de la base V a la base U, tenemos:
>
> $B = SAS^{-1}$.
>
> $$\begin{pmatrix}35 & -21\\58 & -35\end{pmatrix}_V = \begin{pmatrix}-3 & 1\\-5 & 2\end{pmatrix}_U^V \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & -1\end{pmatrix}_U \begin{pmatrix}-2 & 1\\-5 & 3\end{pmatrix}_V^U$$
>
> (Montiel y Bhatti, 2010, párr. 21)

Montiel y Bhatti (2010) mencionan que en el inciso a) sólo se busca un cambio de base[2], que posteriormente los estudiantes utilizaran para resolver el inciso b) junto con la relación que guardan dos matrices que representan la misma transformación lineal pero en distintas bases.

En sus resultados presentan que de los cinco estudiantes en línea tres contestan correctamente la parte a) y b), y los otros dos estudiantes sólo uno responden el primer inciso correctamente y el otro responde de forma incorrecta ambos incisos. De los veinticinco estudiantes del campus, once de ellos contestan correctamente ambos incisos, nueve correctamente el inciso a) e incorrectamente la parte b), y cinco responden ambas partes de manera errónea.

Los autores resaltan el hecho que los estudiantes que respondieron la parte b) correctamente, no contestaron la parte a) de forma incorrecta. Mencionan además que más de un tercio de los estudiantes del grupo presencial fue capaz de encontrar la matriz de cambio de base pero no fue capaz de utilizarla para aplicar la relación de similitud para encontrar la matriz que representa la transformación lineal con respecto a la base V.

[2] Note que piden la matriz de cambio de base de V a U en el inciso a, y proponen como solución esperada la matriz de cambio de base de U a V.

Resaltan que su estudio no tiene validez cuantitativa puesto que el número de participantes en línea fue mucho menor al número de estudiantes del grupo presencial. Pero mediante la escritura de los estudiantes en un foro virtual, clasifican algunos objetos matemáticos y funciones semióticas que jugaron un papel en sistema de prácticas que se desarrolló, en algunos casos de forma colectiva.

Los autores presentan una discusión por parte de los cinco estudiantes en el foro WebCT, respecto a la siguiente pregunta:

> Dado $v_1 = (1,2), v_2 = (2,3)$ y $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, encontrar w_1 y w_2 tal que S sea la matriz de transición de (v_1, v_2) a (w_1, w_2).
>
> (Montiel & Bhatti, 2010, párr. 26)

Llaman A, B, C, D, E, F para describir lo que los cinco estudiantes escribían en dicha plataforma. Presentamos la discusión por parte de algunos estudiantes ante el anterior problema como lo presentan en su investigación.

> Estudiante A: En primer lugar tenemos que encontrar U^-1 utilizando v1 y v2.
> U^-1 = [-3 2; 2-1]
> Ahora estamos tratando de encontrar T^-1 * [w1, w2] = S.
> Con el fin de encontrar [w1, w2], Yo aumento U^-1 por S y por medio de operaciones fila llevar U^-1 hasta la identidad.
> El resultados es la matriz [5 1; 9 4] corresponden a w1, w2.
> Por lo tanto, w1 = (5, 9) y w2 = (1, 4).
> Estudiante B:
> Hola A.
> Esta es una de esas situaciones me ha estado preguntando acerca de Dr. Montiel, la conmutación al otro lado de la ecuación. Mi enfoque era diferente; dime lo que piensas.
> Ya que queremos la transición de w a v, sabemos v ^ -1 * w = S. Pero el problema proporciona S, así que me trasladé v ^ -1 hasta el otro lado. Mi nueva ecuación es w = vS. Logré la misma respuesta: [5 1; 9 4] o w1 = [5 1] y w2 = [9,4].
> ¡Uy!, mi error. w1 = [5,9] y w2 = [1 4]
> Estudiante A: Creo que esto debería funcionar también. De hecho, esto me da un momento "Eureka" para la pregunta # 8... Que yo había estado trabajando durante un tiempo.
> A la Pregunta # 8 que el estudiante A se refiere, fue similar a la anterior, pero había sido lo que le causó problemas:
> $v_1 = (2,6), v_2 = (1,4)$ y $S = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
> , encontrar los vectores u_1 y u_2 tal que S sea la matriz de transición de (v_1, v_2) a (u_1, u_2).
> Estudiante A: Dado que U ^ -1 * v = S, podemos reorganizar está usando la información dada.
> Así, U ^ -1 = S * V ^ -1.

> Para encontrar V ^ -1, yo hare la matriz aumentada V con la identidad.
> V ^ -1 = [2 -1/2; -3 1]
> Ahora sabemos S y V ^ -1, por lo que T ^ -1 = S * V ^ -1 = [5 -1; 1 0].
> Pero la pregunta está pidiendo matriz U, no U ^ -1. Esto se puede lograr mediante la búsqueda de la inversa de U ^ -1.
> (U ^ -1) ^ - 1 = U = [0 1; -1 5].
> Por lo tanto, u1 = (0, -1) y u2 = (1, 5).
> * Un agradecimiento especial a B por su inspiración en la pregunta # 7. Había estado trabajando en este problema por un tiempo, y su comentario me ayudó a la forma de saberlo.
>
> (Montiel & Bhatti, 2010, párr.28)

Respecto de esta discusión los autores mencionan que los sistemas de práctica de intercambio por parte de los estudiantes en el foro son fáciles de identificar. Puesto que sólo se consideran aspectos algebraicos y simbólicos. Mencionan que la comunicación matemática es esencialmente en línea y que hubo intercambios en el que los estudiantes escanearon su trabajo, y en esos casos el lenguaje era más multifacético.

En otra investigación Montiel, Wilhelmi, y Vidadkovic (2012) centran su interés en los diferentes sistemas de coordenadas a través del proceso de cambio de base, como se desarrolla en el Álgebra Lineal, así como la relación de semejanza entre las matrices que representan la misma transformación lineal con respecto a bases distintas. El objetivo de su investigación es analizar el comportamiento de un grupo de estudiantes en relación con ciertos temas de Álgebra Lineal (vectores, cambio de base, representación matricial de las transformaciones lineales), utilizando el enfoque ontosemiotico (OSA). En la OSA, un objeto matemático es algo que se puede utilizar, en la comunicación o en el aprendizaje de las matemáticas, esta teoría considera seis objetos principales: Lenguaje, situaciones, problemas, proposiciones, propiedades, argumentos (Montiel et al., 2012). Se plantean tres cuestiones de las cuales nos interesan las siguientes dos:

> ¿Qué objetos y funciones semióticas primarias pueden ser identificados y clasificados cuando estudiantes se enfrentan a los objetos matemáticos emergentes y deben de generalizar conceptos anteriores, como vector, función, composición de funciones, vectores, transformación lineal y multiplicación de matrices?
> ¿El lenguaje del diagrama conmutativo mejorara la comprensión del cambio de base y las composiciones en general?
>
> (Montiel et al., 2012, p. 16).

La investigación la realizaron con estudiantes de un segundo curso de Álgebra Lineal en una universidad pública del sur de Estados Unidos. Dicho curso se ofrece en pregrado y posgrado. Se considera obligatorio para aquellos estudiantes que quieren hacer un posgrado en matemáticas y que no ha cursado su equivalente en pregrado. Para indagar sobre las cuestiones anteriores, consideran 24 estudiantes los cuales organizaron de la siguiente manera: formaron cuatro grupos para entrevistar a 10 estudiantes universitarios; los cuales nueve son especialistas en matemáticas y uno en física. Se les proporcionaba media hora un cuestionario que contestaron de manera individual y posterior a ello fueron entrevistados. Forman un grupo con 5 estudiantes, dos grupos con dos estudiantes, y a un solo estudiante. La entrevista fue videograbada y tuvieron lugar en dos semestres diferentes, para el grupo compuesto por 5 estudiantes duro aproximadamente 2 horas y para los demás grupos hora y media.

Además analizaron un cuestionario aplicado a 14 estudiantes, los cuales ocho eran estudiantes de una versión en línea de dicho curso de Álgebra Lineal, lo que corresponde a un programa de maestría en Educación Matemática y los otros seis eran estudiantes de la misma. Diseñan tres preguntas en las cuales mencionan que la pregunta 1 y 2, se ocupan del cambio de base, y la tercera cuestión tiene que ver con la transformación lineal con respecto a diferentes bases, centraremos nuestro interés en las dos primeras cuestiones. Básicamente en la pregunta 1 se debe considerar un vector en distintas bases y representarlo en un nuevo eje. En la cuestión 2 se les sugiere que a partir del diagrama conmutativo encuentren una matriz de cambio de base, posterior a ello en otro inciso de esa cuestión les piden que con ayuda de la matriz, comparen las coordenadas del vector encontrado en la pregunta uno.

Montiel et al., (2012) mencionan que en mayor y menor grado los estudiantes tenían sus cálculos y dibujos correctos, que los estudiantes cometieron errores, sobre el orden de la multiplicación en el diagrama conmutativo y que 9 de 14 estudiantes trabajan correctamente el problema.

En sus conclusiones y reflexiones finales mencionan respecto a los cambios de base que:

> …la investigación, dentro de un marco del concepto matemático de cambio de base de los sistemas de coordenadas es prácticamente inexistente. Como se mencionó anteriormente, [12] el capítulo de Hillel en [4] la antología de Dorier sobre el Álgebra Lineal es el antecedente más cercano que encontrado.
>
> (Montiel, Wilhelmi y Vidadkovic, 2012, p. 28)

Mencionan además que refuerzan la observación de Hillel respecto a la representación matricial de los operadores lineales en diferentes bases.

> "… la persistencia de errores con este tipo de problemas punta a la existencia de un obstáculo que es de carácter conceptual, y no sólo relacionado con una dificultad para la puesta en marcha de un procedimiento"
>
> Hillel (2000, p.205)

Respecto a los objetos primarios (Montiel et al., 2012) destacaron que cuando los estudiantes se enfrentan a los conceptos emergentes, varían de acuerdo al tema en específico, y aunque el lenguaje trasciende en todos los casos. No se define la noción de vector de manera abstracta utilizando propiedades y, por esta razón parece que no hay significado institucional. Respecto al diagrama conmutativo menciona que parece ayudar a los procedimientos de los estudiantes, les sirve como una guía. Así la notación funge una parte importante en donde las flechas apuntan el cambio de base Las matemáticas modernas ofrece objetos de lenguaje que pueden facilitar la aproximación de configuración cognitiva de los estudiantes.

Después de la revisión de la literatura especializada encontramos que los cambios de base en el contexto del Álgebra Lineal, según Montiel et al., (2012) es prácticamente inexistente dentro de un marco. Los estudios realizados por Montiel et al., (2012) toman una cierta perspectiva teórica, y básicamente el cambio de base lo estudian para espacios vectoriales euclidianos. Respecto al concepto matriz de cambio de base, Montiel y Bhatti (2010) centran su atención en el rendimiento de los estudiantes a la hora de calcular cambios de base, y la representación matricial de la transformación lineal con respecto a diferentes bases, se puede de deducir que los estudiantes que son capaces para construir una matriz asociada a una transformación lineal también son capaces de calcular una matriz de cambio de base, esto para espacios euclidianos.

Montiel et al., (2012) sugieren que el lenguaje del diagrama conmutativo (véase la siguiente imagen) propicia una mejor comprensión de la matriz de cambio de base.

(2)

(a) Use the following commutative triangle to help you find the change of basis matrix from U to V. Explain what you are doing:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[rr, "U"] \arrow[dr, "V^{-1}U"'] & & \mathcal{E} \arrow[dl, "V^{-1}"] \\
& \mathcal{V} &
\end{tikzcd}$$

(b) Use the matrix to check your answers in question (1). That is, apply the change of basis matrix to take you from the coordinate vector with respect to U to the coordinate vector with respect to V.

Montiel et al., (2012), p. 18

Así pues, nosotros decidimos hacer un estudio teórico referente al tema cambio de base, particularmente al concepto llamado *Matriz de Cambio de Base*, considerando espacios vectoriales euclidianos y otros espacios vectoriales de dimensión finita. Desde una perspectiva teórica cognitiva, la teoría APOE.

En la revisión de trabajos desde esta perspectiva cognitiva no se encontró trabajo alguno realizado con la teoría APOE. Así que es pertinente explicar nuestros constructos teóricos que nos permitirán describir nuestro problema y objetivo de investigación.

Capítulo 2

2 MARCO TEÓRICO Y OBJETIVO DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo presentamos el marco teórico que sustenta nuestro trabajo de investigación. Como mostramos en el capítulo anterior, este proyecto se centra en el estudio de la matriz de cambio de base, pero lo haremos desde su definición formal; pensamos que la Teoría APOE (Dubinsky, 1991) un medio apropiado para describir las estructuras y mecanismos mentales que un individuo puede lograr sobre dicho concepto.

Como menciona (Trigueros, 2005) citado en Roa-Fuentes (2008) la esencia de la teoría APOE, es su reflexión sobre los objetos matemáticos desde la propia matemática, en donde es primordial reconocer las relaciones y los procesos involucrados en la construcción de conceptos matemáticos sin desconocer su naturaleza abstracta. La teoría APOE inicia con un análisis de los conceptos matemáticos, dicho análisis busca ayudar a los individuos en establecer conexiones entre conceptos matemáticos previos, para describir un posible modelo cognitivo de construcción de un nuevo objeto matemático, esta teoría se caracteriza por tener un enfoque constructivista. A continuación analizaremos con detalle algunos aspectos teóricos que nos permitirán fundamentar este trabajo.

2.1 La teoría APOE

La teoría APOE es iniciada por Ed Dubinsky, y estructurada más adelante por *Research University Mathematics Education Community* (RUMEC por sus siglas en inglés), reinterpretando las ideas esenciales del constructivismo de Piaget. Dichas ideas fueron transformadas para ser utilizadas en el estudio del pensamiento matemático avanzado. Retomando las ideas esenciales de la teoría piagetiana, Dubinsky considera el concepto de *Abstracción Reflexiva* como un elemento principal de la teoría APOE el cual utiliza como un medio para dar posibles descripciones de los tipos de construcciones mentales, que pueden lograr los individuos para comprender conceptos matemáticos.

Dubinsky (1991) considera dos características primordiales de la abstracción reflexiva dadas por Piaget: la abstracción reflexiva no tiene un principio absoluto pero aparece en edades muy tempranas en la coordinación de la estructura sensorio-motriz (Beth y Piaget, 1966, p. 203-

208), y continúa su desarrollo hasta lograr cualidades en temas de matemáticas más abstractos (Piaget, 1985, p.149-150).

Piaget caracteriza tres tipos de abstracción; la empírica, la pseudo-empírica y la abstracción reflexiva. Beth y Piaget, (1966, p.188-189) mencionan que "la abstracción emperica se deriva del conocimiento de las propiedades de los objetos" citados en Dubinsky (1991).

Dubinsky (1991) interpreta esto, como lo que tiene que ver con las experiencias del sujeto respecto al tema pero de manera externa. Pero el conocimiento de las propiedades es interno y es el resultado de construcciones realizadas por un individuo. Además Piaget y García (1983, p.299) suponen que a partir de esta abstracción se puede extraer propiedades comunes de los objetos y hacer una generalizaciones existenciales, del paso de "algunos" a todos, de lo especifico a lo general citados en Dubinsky (1991).

La abstracción pseudo-empírica se considera intermedia entre la abstracción empírica y reflexiva, son las esperanzas de los sujetos que a partir de acciones han introducido propiedades a los objetos (Piaget, 1985, p.18-19) citado en Dubinsky (1991).

Por último, la abstracción reflexiva en donde según Piaget (1980, p.89-97) la considera como la coordinación general de las acciones y, como tal, el tema es su fuente y es completamente interno citado en Dubinsky (1991).

Estos tipos de abstracción no son disjuntos, es decir, el tipo de abstracción reflexiva depende tanto de la empírica así como de la pseudo-empírica. El tipo de abstracción empírica le permite a un individuo abstraer propiedades comunes de diversos objetos, alcanzando ejecutar acciones sobre dichos objetos mediante la abstracción pseudo-empírica. Y la abstracción reflexiva entendida en el sentido Dubinsky (1991) como el mecanismo para construir objetos mentales a partir de las acciones mentales sobre estos objetos, lo cual permite mediante la interiorización y coordinación de dichas acciones en nuevas acciones y finalmente nuevos objetos (Dubinsky, 1991) citado en Roa-Fuentes (2008).

Dubinsky (1996) diseña un modelo teórico cognitivo que se basa en la naturaleza del conocimiento matemático y su desarrollo en un individuo bajo el siguiente supuesto:

> El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto

> social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando esquemas con el fin de manejar las situaciones.
>
> (Dubinsky, 1996, p. 32-33)

Dicha postura teórica sobre el conocimiento matemático enfatiza en la habilidad para reorganizar conocimiento y con ello construir o reconstruir concepciones, esto mediante las construcciones: acciones, procesos, objetos, esquemas que se restructuran y se adaptan para dar solución a problemas matemáticos. Cuando se presenta una situación en la que está en juego el uso de conocimiento matemático, un individuo debe recurrir a los conceptos que están involucrados en dicha situación, y de ser posible establecer las relaciones con otros conceptos que la situación requiera. Ante esta necesidad de organizar, construir o reconstruir y establecer conexiones entre lo aprendido y por lo aprender Roa-Fuentes (2008) menciona que a medida que los problemas motivan al establecimiento de conexiones entre los esquemas estos evolucionan y en consecuencia el conocimiento del individuo es enriquecido.

Para Piaget (1983) y García (1989) citados en (Arnon et al., 2014, p.25) los conceptos matemáticos no se aprenden directamente y es necesario construir estructuras mentales para darles sentido, es decir, ante un nuevo concepto que se le presente al individuo, la capacidad de adquirir y apropiarse del conocimiento matemático depende de las estructuras mentales previas apropiadas para comprenderlo (Dubinsky, 1991). Respecto a una estructura mental y un mecanismo mental diremos que:

> Una estructura mental es cualquier estructura (es decir, alguna cosa construida en la mente) relativamente estable (aunque capaz de desarrollarse) que un individuo usa para dar sentido a una situación matemática. La fuente de una estructura mental es la descripción de la cual ella se origina. Un mecanismo mental es el medio por el cual una estructura puede desarrollarse en la mente de un individuo o un grupo de individuos.
>
> (Stenger, Weller, Arnon, Dubinsky y Vidalovic, 2008, p. 98)

Así pues dentro de este marco teórico la finalidad de enseñanza radica en proporcionar modelos cognitivos para que el individuo construya las estructuras apropiadas para cada nuevo concepto que se presente en una situación específica estableciendo conexiones con otras estructuras.

Dicho modelo teórico establece las conexiones entre los mecanismos mentales (clases de abstracción reflexiva: Interiorización, Coordinación, Encapsulación, Generalización y Reversión) y las construcciones mentales (Acción, Proceso, Objeto Esquema), bajo el supuesto de que el conocimiento no se genera de la nada, el individuo tiene ciertas estructuras muy cercanas o no al concepto, las cuales deben llevarse a las estructuras apropiadas para comprender el concepto, y los mecanismos mentales le permitirán lograr dichas estructuras, así como establecer conexiones entre ellas.

2.1.1 Clases de abstracción reflexiva

Presentamos una descripción de los tipos de abstracción reflexiva y construcciones mentales que propone la teoría APOE, tomando como referencia trabajos realizados por la RUMEC. Este grupo de investigadores han realizado diversos trabajos en las diferentes áreas de la matemática tales como: cálculo, álgebra abstracta y ecuaciones diferenciales (McDonald, Mathews, y Strobel, 2000; Trigueros, 2000 ; Asiala, Cottrill, Dubinsky, y Schwingendorf, 1997; Brown, DeVries, Dubinsky, y Thomas, 1997; Breidenbach, Dubinsky, Hawks,y Nichols, 1992).

Dubinsky considera cinco tipos de mecanismos mentales o tipos de abstracción reflexiva considerando los cuatro dados por Piaget y anexando uno a la teoría Dubinsky (1991). Para explicar más sobre estos mecanismos mentales utilizaremos la interpretación de las ideas de Dubinsky expuestas en el trabajo de (Roa-Fuentes, 2008).

> ***Interiorización***: Piaget caracterizó este mecanismo como la traducción de una sucesión de acciones materiales a un sistema de operaciones interiorizado. Dubinsky resume este mecanismo como la transferencia de una actividad específica del mundo externo al mundo interno. Así mediante este mecanismo es posible que una acción sea transformada en un proceso.
>
> ***Coordinación***: Este mecanismo fue descrito por Piaget como la coordinación general de acciones, refiriéndose a todas las maneras de usar una o más acciones para construir nuevos objetos o acciones. Mediante este mecanismo dos o más procesos pueden coordinarse para generar nuevos procesos.
>
> (Roa-Fuentes, 2008, p.30)
>
> ***Encapsulación***: Este mecanismo es considerado como el más importante para la construcción del conocimiento matemático y consiste básicamente en la conversión de un proceso (una estructura dinámica) en un objeto (una estructura estática).
>
> **Generalización**: Este mecanismo está relacionado con la capacidad del individuo para aplicar un determinado esquema en un contexto distinto, está determinado por su capacidad para determinar los alcances de sus construcciones. En este

> mecanismo los esquemas no cambian, pero otros objetos pueden ser asimilados por un esquema para ser contextualizados en otros contextos.
>
> ***Reversión***: Este mecanismo fue agregado por Dubinsky como un caso particular de abstracción reflexiva. Y consiste básicamente en desencapsular un objeto o revertir el mecanismo que lo generó. De esta manera un individuo puede regresar sobre el proceso siempre que lo requiera.
>
> (Roa-Fuentes, 2008, p.31)

Estos mecanismos mentales tienen la principal función de relacionar en el momento preciso las estructuras y transitar de una a otra estructura o revertirla si un sujeto lo considera necesario. La importancia de estos mecanismos es fundamental, relaciona las estructuras, proporciona las pautas para que un individuo construya su propio conocimiento. Advertimos aquí, que cada individuo es responsable de que estos mecanismo tengan éxito o no, puesto que una forma de describir y establecer conexiones con las estructuras depende de su conocimiento matemático.

2.1.2 Construcciones mentales

A continuación se describen las construcciones mentales que propone la Teoría APOE; entendidas éstas como todas las transformaciones que realizan los individuos para resolver determinadas tareas y que puedan adquirir significado de ellas. Las cuales pueden darse como reconstrucciones exactas (correspondiente a la memoria y a la repetición de métodos, algoritmos previamente conocidos) o adaptaciones de algo previamente aprendido, está ultima es de vital importancia puesto que intervienen directamente con el desarrollo del conocimiento matemático.

> ***Acción***. Según Piaget y adoptado por la teoría APOE, un concepto es concebido primero como una acción, es decir, como una transformación dirigida externamente de un objeto, u objetos previamente concebida. Una acción es externa en el sentido de que cada paso de la transformación debe realizarse de forma explícita y guiada por instrucciones externas; adicionalmente, cada paso debe introducir al siguiente, es decir, los pasos de la acción no pueden todavía ser imaginados y ninguno se puede saltar.(Arnon et al., 2014, p.19)

A continuación mostramos ejemplos de esta estructura mental. Para el caso de función "una persona que requiere una expresión explícita para poder pensar en el concepto de función y puede hacer poco más que sustituir la variable en la expresión y manipularlo se considera que tiene una comprensión acción de las funciones " (Dubinsky et al. 2005a, p. 338) citado en Arnon et al., (2014) en este caso el tener la expresión, se le considera como la sugerencia externa, es decir, guía lo que se debe realizar (sustituir valores específicos).

En Álgebra Lineal si se considera el concepto de *n*-tupla se puede considerar una concepción acción, cuando se consideré una cantidad determinada de números y colocarlos con un orden particular (Arnon et al., 2014).

Cuando las acciones se repiten y se reflexiona sobre ellas, un individuo pasa de depender de señales externas a tener el control sobre ellas y se podría decir que se apropia de dichas acciones y ahora puede realizarlas ya sea externamente o internamente, más aún, puede omitir pasos o revertirlos si lo considera necesario. La interiorización hace esto posible. Cuando esto sucede se dice que un individuo tiene una concepción proceso, al respecto de esto Arnon et al., (2014) mencionan que (Dubinsky et al., 2005a) hace un esfuerzo para dar la descripción de lo que es un proceso e interpreta el caso para las funciones.

> ***Proceso***. Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede ser interiorizada en un proceso mental. Un proceso es una estructura mental que lleva a cabo la misma operación acción que se interioriza, pero totalmente en la mente del individuo, permitiendo así a él o ella para imaginar la realización de la transformación sin tener que ejecutar cada pasó de forma explícita. Así, por ejemplo, una persona con una comprensión de los procesos de la función construirá un proceso mental para una función determinada y pensar en términos de entradas, posiblemente no especificados, y las transformaciones de los insumos para producir salidas (p.339).

La diferencia entre una concepción acción y un proceso radica en el siguiente sentido: una acción se debe hacer la transformación (ya sea física o mental); para un proceso se puede llevar a cabo dicha trasformación sin la necesidad de ir paso a paso (Arnon et al., 2014). Por ejemplo, para el caso del Álgebra Lineal:

En la construcción de una *n*-tupla si las acciones están interiorizadas en un proceso, el sujeto puede construir mentalmente una *n*-tupla aun cuando no se le especifique n; puede ser capaz de construir *n*-tuplas, sin importar el espacio vectorial y su dimensión (Arnon et al., 2014).

La siguiente estructura ocurre cuando un individuo tiene la necesidad de aplicar una acción a un proceso, es decir, se ve en la necesidad de pensar en algo estático y no en algo dinámico. Esto se logra a través del mecanismo encapsulación, al respecto del objeto Dubinsky menciona lo siguiente:

> ***Objeto***. Si uno se da cuenta del proceso en su totalidad, se da cuenta de que las transformaciones pueden actuar en esa totalidad, y realmente puede construir tales transformaciones (explícita o en la imaginación de uno), entonces se dice que el individuo ha encapsulado el proceso en un objeto cognitivo. Para el concepto de función, la encapsulación permite aplicar transformaciones de funciones tales como la formación de un conjunto de funciones, definir las operaciones aritméticas sobre dicho conjunto, dotándola de una topología, etc.
>
> (Dubinsky, Weller, McDonald, & Brown, 2005, p.339)

Consideremos el siguiente ejemplo tomado de Arnon et al. (2014) el cual muestra la encapsulación de un objeto. Si se comparan n-tuplas o se realizan operaciones binarias, serán acciones sobre n-tuplas, dichas acciones deben de aplicarse con éxito y el proceso de formación de una n-tupla será encapsulado en un objeto.

Otra estructura, es el esquema. Los expertos consideran a esta estructura como algo dinámico y en construcción continua, la cual debe ser organizada, ejemplificando las estructuras que un sujeto a construido a cierto concepto matemático.

> ***Esquema***. Se caracteriza por su dinamismo y su reconstrucción continua. Los esquemas están determinados por la actividad matemática que involucra el individuo en situaciones matemáticas específicas. La coherencia de un esquema es determinado por la capacidad del individuo para determinar si se puede utilizar en una situación matemática particular. Una vez que el esquema se construye como una colección coherente de estructuras (acciones, procesos, objetos, y otros esquemas) y las conexiones que se establecen entre esas estructuras, que pueden transformarse en una estructura estática (Objeto) y / o utilizado como una estructura dinámica que asimila otra Objetos relacionados o esquemas.
>
> (Arnon et al., 2014, p.25)

Por ejemplo, si se considera un espacio vectorial, este puede incluir n-tuplas y matrices como objetos, mientras que los polinomios y funciones se pueden considerar como procesos. Estas estructuras pueden estar relacionadas puesto que comparte algunas propiedades: satisfacen los axiomas que definen un espacio vectorial. La coherencia de dicho esquema radica en la definición matemática de lo que es un espacio vectorial, que el sujeto utiliza para determinar si el esquema es aplicable a una situación dada. La construcción de un esquema como un objeto mental, se logra a través del mecanismo de tematización. Este mecanismo permite a un individuo para aplicar transformaciones a la estructura de esquema (Arnon et al., 2014).

En el siguiente diagrama se muestra las conexiones entre las construcciones mentales que están dadas por los mecanismos mentales; además el gráfico busca ejemplificar cómo un individuo construye estructuras matemáticas (figura 2.1).

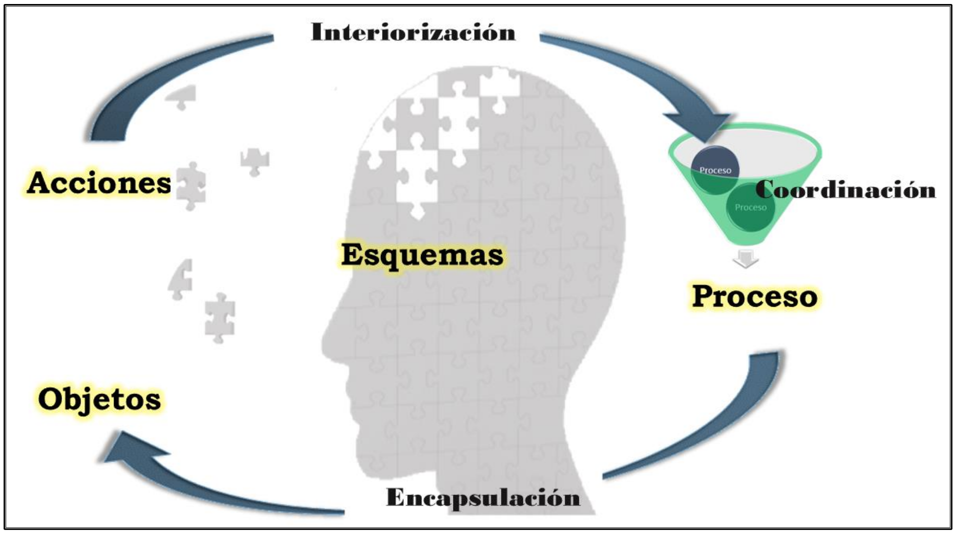


Figura 2.1. Construcciones y Mecanismos mentales (Adaptado de Dubinsky, 1991)

Supongamos que un individuo ante una situación problema requiere encontrar una solución, y su pongamos que el individuo tiene conocimiento de cierto concepto que puede utilizar para resolver el problema, lo primordial es ayudar al individuo a formar las estructuras apropiadas (previas) que se requieren para la construcción de una estructura dicho concepto, supongamos que el individuo ya formó dichas estructuras: estas pueden ser tipos de concepción de ciertos objetos relacionados con el concepto principal para la solución.

Por ejemplo, para el caso de Álgebra Lineal si consideramos una n-tupla, si un individuo sólo se limita, a considerar n-tupla como una cadena de números y los coloca de una manera particular, o responde a sugerencias para hacerlo ya sea de manera explícita o implícita etc. Si el individuo únicamente realiza este tipo de acciones diremos que tiene una *concepción Acción* de una n-tupla. A partir del mecanismo Interiorización puede transformar su concepción acción n-tupla en una concepción proceso, es decir, puede ser capaz de construir mentalmente una n-tupla sin importar el espacio vectorial y su dimensión etc., pero esta vez sin recibir estímulos externos. Notemos aquí que el diagrama especifica la posibilidad de que una concepción acción al ser interiorizada genere uno o más procesos, los cuales tienen que coordinarse para generar un único proceso. Puesto que para pasar de la concepción proceso a concepción objeto mediante el tipo de abstracción reflexiva encapsulación, sólo se requiere de un único proceso para que se encapsule. Luego si el individuo tiene la necesidad de aplicar acciones a la n-tupla, es decir, realiza con éxito acciones sobre la n-tupla, como compara o aplicar operaciones binarias diremos que el individuo ha encapsulado n-tupla y por tanto tiene una concepción objeto.

Cuando un individuo muestre evidencia de un tipo de concepción de un objeto en particular, diremos que ha presentado una concepción de dicha construcción. Hacemos referencia a lo entendido por este marco teórico: como la idea que tiene el estudiante a cerca de un determinado concepto, la cual puede ser una aproximación o no de la definición matemática, McDonald y colaboradores (2000) mencionan al respecto:

> La distinción entre la concepción y el concepto está dada en que la primera es intrapersonal (es decir, es la idea que el individuo tiene para comprender) y la segunda es comunal (es decir, un concepto es el resultado de un acuerdo hecho por matemáticos)
>
> (McDonald et al., 2000, p. 78)

Una vez explicando nuestros constructos teóricos, estamos en condiciones de plantear nuestro problema y objetivo de investigación.

2.2 Pregunta y objetivo de investigación

Consideraremos las ideas que expresa Hoffman y Kunze (1973) respecto al trabajo de las n-tuplas y al cambio de base ordenada. Mencionan la correspondencia biunívoca entre cada n-tupla $(a_1, a_2, .., a_n)$ de F^n con algún vector de V, a saber, el vector

$$v = a_1v_1 + \ a_2v_2, \dots, a_nv_n$$

la cual está dada por

$$v \ \longrightarrow (a_1, a_2, .., a_n).$$

Esta correspondencia es entre el conjunto de todos los vectores de V y el conjunto de todos los n-tuples de F^n. Más aun, mencionan las propiedades de dicha correspondencia y se plantean una interesante cuestión.

> Esta correspondencia tiene la propiedad de que el correspondiente de $(\alpha + \beta)$ es la suma en F^n de los correspondientes de α y β, y el correspondiente de $(c\alpha)$ es el producto en F^n del escalar c y el correspondiente de α.
>
> ¿Por qué no se elige simplemente se elige una base ordena de V y se expresa todo V por su correspondiente n-tupla de coordenadas, ya que así se tiene la conveniencia de operar solo con n-tuplas?

> Esto iría contra nuestro propósito por dos razones. Primera, como la definición axiomática de espacios vectoriales indica, se trata de aprender a razonar con espacios vectoriales como sistemas algebraicos abstractos.
> Segunda, incluso en aquellos casos en que se usan las coordenadas, los resultados más importantes se obtienen de la capacidad que se tenga de cambiar sistemas de coordenadas, es decir, de cambiar la base ordenada.
>
> (Hoffman y Kunze, 1973, p.51)

En este sentido creemos importante hacer el estudio referente al objeto que describe como cambiar las coordenadas de un vector respecto a una base a otra. Así pues, planteada la problemática en general referente al estudio del Álgebra Lineal en particular al tema cambio de base y considerando las ideas anteriores de Hoffman y Kunze. Creemos pertinente hacer un estudio referente al objeto matemático llamado *Matriz de cambio de base* el cual muestra la relación entre el mismo “animal” (usando la expresión de Hillel), y la relación que existe entre el mismo objeto y dos representaciones de el en un mismo espacio vectorial de dimensión finita.

Por los antecedentes, se observa que existen dificultades en los procesos de aprendizaje del Álgebra Lineal en general, y en particular por la investigación de Hillel (2000) partimos del supuesto que existen dificultades para el aprendizaje del tema de cambios de base.

Por tanto en esta investigación buscamos dar respuesta a la siguiente pregunta:

¿Qué construcciones y mecanismos mentales están asociados al concepto matriz de cambio de base en estudiantes de nivel superior?

Para dar respuesta a esta pregunta a lo largo de la investigación trataremos de responder preguntas específicas:

- ¿Qué construcciones y mecanismos mentales hipotéticamente están asociados con la construcción del concepto matriz cambio de base?
- ¿Cómo se puede caracterizar el paso de una construcción a otra?
- ¿Cuáles son las principales dificultades que obstaculizan el aprendizaje de este concepto y cuáles son las posibles causas de estas?

Como una primera fase en nuestro afán de proponer un modelo cognitivo del objeto matemático de interés, nos hemos planteado hacer una investigación de corte cognitivo basándonos en la Teoría APOE. Para diseñar una descomposición genética del concepto matriz cambio de base y con esta herramienta proponer sugerencias didácticas que ayude a estudiantes universitarios a superar las dificultades asociadas a la construcción de este objeto matemático.

2.2.1 Objetivo de la investigación

Una vez determinado nuestro problema de investigación, nos hemos propuesto un objetivo general y objetivos particulares a lo largo de la presente investigación. Los cuales se enuncian a continuación.

2.2.2 Objetivo general

Identificar y analizar las construcciones mentales que construyen los estudiantes y los mecanismos cognitivos asociados al construir el concepto matriz cambio de base, mediante la construcción de una descomposición genética de dicho concepto.

Para ello utilizaremos parte del ciclo de investigación que propone la teoría APOE, a partir del desarrollo de los siguientes objetivos específicos:

- Diseñar una descomposición genética preliminar del concepto matriz cambio de base.
- Identificar y analizar las construcciones y mecanismos mentales que construyen los estudiantes de nivel superior para lograr la matriz cambio de base como un objeto cognitivo.
- Identificar las relaciones que establecen los estudiantes entre los conceptos del algebra lineal y dicho concepto.
- Proponer una descomposición genética validada como el resultado del análisis empírico.
- Reconocer las dificultades de los estudiantes referentes a dicho concepto.
- Dar algunas sugerencias didácticas relacionadas con el aprendizaje del concepto matriz cambio de base.

Capítulo 3

3 DISEÑO METODOLÓGICO DE INVESTIGACIÓN

El presente trabajo tiene por objetivo principal determinar las construcciones y mecanismos mentales de tal manera que podamos describir un modelo cognitivo viable para la construcción del objeto matemático *matriz de cambio de base*. La teoría APOE en su paradigma de investigación propone el desarrollo de tres componentes: un análisis teórico inicial, diseño e implementación de instrumentos y análisis y verificación de los datos (figura 3.1). En este capítulo presentamos el diseño metodológico que hemos considerado para el desarrollo de la investigación, tomando la primera y tercera componente del ciclo de APOE (figura 3.2). Dado que el objetivo principal, es construir una descomposición genética de una matriz de cambio de base, la interacción mutua entre dichas componentes puede detallar el análisis teórico inicial. Ya que el trabajo de los estudiantes permite robustecerla y validarla.

3.1 La investigación desde una perspectiva de la teoría APOE

Un proyecto de investigación y/o plan de estudios basado en la teoría APOE involucra tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza, y recolección y análisis de datos (Arnon et al., 2014) la imagen siguiente muestra cómo se relacionan estas componentes.

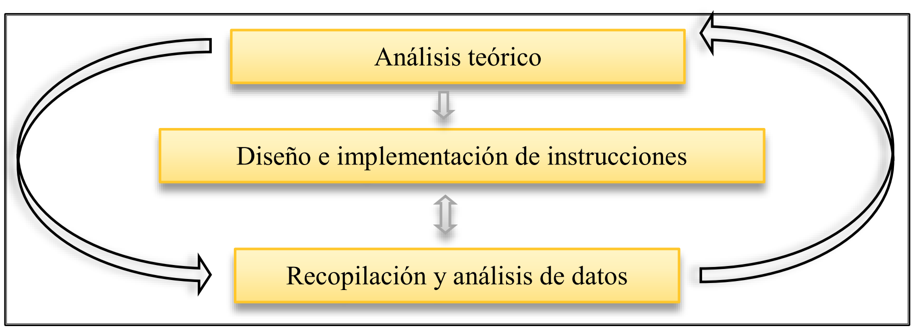


Figura 3.1. Ciclo de investigación (adaptado de Asiala et al., 1996, p. 5)

Con este panorama teórico tomaremos las descripciones generales mostradas en Arnon y colaboradores, para explicar cada componente del ciclo. Una investigación se inicia con un análisis teórico del concepto a estudiar, esto da lugar a una descomposición genética preliminar

¿pero qué es una descomposición genética? Los expertos en teoría APOE la consideran de la siguiente manera:

> Una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar construir con el fin de aprender un concepto matemático específico
>
> (Arnon et al., 2014, p.27)

Dicho modelo cognitivo en una investigación basada en teoría APOE comienza como una hipótesis, la cual se sustenta en las experiencia del investigador respecto al aprendizaje y la enseñanza de un concepto, lo anteriormente publicado sobre el concepto y su desarrollo a través de la historia (Arnon et al., 2014).

Este elemento primordial de la teoría APOE además de describir estructuras y mecanismos mentales, también podría incluir una descripción de las estructuras antecedentes que necesita un individuo a ver construido previamente (Arnon et al., 2014). Dicho modelo cognitivo, también podría dar explicación de la epistemología y la cognición de un concepto matemático.

> Asimismo, por medio de la descripción de las construcciones mentales, permite modelar la epistemología y la cognición del concepto matemático estudiado.
>
> (Roa-Fuentes & Oktaç, 2010)

Cabe aclarar que una descomposición genética no manifiesta lo que sucede en la mente de una persona, ya que esto puede ser imposible de conocer; predecir si una persona aplicará una estructura dada cuando se le solicite; y mucho menos ofrece un análisis exclusivo de cómo se aprenden los conceptos en matemáticas (Arnon et al., 2014).

Con esto la teoría APOE reconoce la posibilidad de que se pueda transitar de una a estructura a otra de diferentes maneras, es decir, que un estudiante siga diferentes escenarios de aprendizaje o diferentes trayectorias de pasar de una acción a un proceso y de un nuevo proceso a un objeto, o del objeto al proceso (Arnon et al., 2014). En este sentido se pone de manifiesto que la descomposición genética no es única.

Así pues, como se había mencionado anteriormente una investigación sobre la base de la teoría APOE se inicia con una análisis del concepto a estudiar, esto arroja una descomposición genética preliminar en el sentido que aún no se prueba experimentalmente, es decir, es una hipótesis. Ahora, dicho análisis impulsa a la segunda componente del ciclo de investigación, el diseño y aplicación de enseñanza el cual a través de distintas actividades promuevan las construcciones mentales requeridas por el análisis.

> El análisis teórico impulsa el diseño y la aplicación de enseñanza a través de actividades destinadas a fomentar las construcciones mentales requeridas por el análisis. Actividades y ejercicios diseñados para ayudar a los estudiantes a construir acciones, interiorizar a acciones en procesos, coordinar dos o más procesos para generar nuevos procesos y encapsular a los procesos en objetos
> (Arnon et al., 2014, p.94).

Al respecto de esta segunda componente, la implementación se lleva a cabo normalmente usando el Ciclo de Enseñanza ACE, en donde básicamente consiste en instrucciones las cuales deben apoyar las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética preliminar. En esta investigación no desarrollaremos la segunda componente, sugerimos al lector interesado consultar (Arnon et al., 2014), para profundizar sobre el ciclo de enseñanza que propone la teoría APOE.

Por otro lado la tercera componente del paradigma de investigación que propone la teoría APOE la recopilación y análisis de los datos, es una componente muy importante puesto que sin evidencia empírica, una descomposición genética sigue siendo una mera hipótesis (Arnon et al., 2014). El propósito del análisis de los datos es responder dos cuestiones según los expertos de la teoría:

- ¿Los estudiantes hacen las construcciones mentales requeridas por el análisis teórico?
- ¿Qué tan bien los estudiantes aprenden el concepto matemático de que se trata?

Los expertos mencionan que hay diferentes formas que se utilizan para investigar estas dos preguntas. Esto depende del objetivo del estudio en particular, éstos pueden ser cuestionarios por escrito, entrevistas semi-estructuradas (audio y/o grabaciones) etc., el análisis se triangula a través de la investigación colaborativa (Arnon et al., 2014), es decir, que los investigadores comparan sus análisis hasta llegar a una aceptación de sus interpretaciones.

Dentro de los instrumentos para recolectar datos las entrevistas en este marco teórico son consideradas como el medio más importante, con el objetivo de que las entrevistas determinen si los estudiantes han hecho las construcciones mentales que se propusieron en la descomposición genética utilizada en el estudio. Para la selección de los participantes esto se puede hacer sobre la base de sus respuestas a un escrito cuestionario o una prueba previamente administrada (Arnon et al., 2014).

Por lo regular las entrevistas son semi-estructuradas en donde el entrevistador sigue un esquema preparado de pregunta. En función de la respuesta del estudiante, el entrevistador puede hacer preguntas de acompañamiento así como hacer aclaraciones o explorar el pensamiento del estudiante más profundamente (Arnon et al., 2014) . Es decir, dichas entrevistas dentro del marco de la teoría APOE no sólo sirven como instrumentos de recolección de datos. También sirven como un medio de reflexión en la cual se puede tener aprendizaje por parte del entrevistado, a partir de las preguntas orientadas.

Como resultado de la aplicación de este ciclo de investigación determinaremos una descomposición genética refinada, para esta etapa de investigación que sin duda aún podrá ser mejorada mediante la repetición de este ciclo.

Por otro lado, existen diferentes tipos de investigación basados en teoría APOE: estudios comparativos, estudios no comparativos, estudios de nivel de desarrollo cognitivo (Arnon et al., 2014), en nuestro caso nos interesa hacer un estudio del desarrollo cognitivo de un grupo de estudiantes universitarios que han llevado cursos de Álgebra Lineal. Esto nos permitirá describir un modelo cognitivo sobre como un individuo puede construir en particular el concepto de matriz de cambio de base.

Así pues, en nuestro afán de describir las estructuras y mecanismos mentales que conformará dicha descomposición genética, comenzamos con el desarrollo de la primera componente, con un análisis de los conceptos en torno a la matriz de cambio de base, los cuales posteriormente fueron precisados dentro de la teoría para formar un conjunto de requisitos previos. Estos conceptos fueron limitados, formando así un conjunto mínimo de conceptos los cuales creemos necesarios para la construcción de la matriz de cambio de base. Es posible considerar más conceptos ligados al concepto de interés, pero necesariamente deben de permanecer el concepto de *base ordenada* y de *coordenadas de un vector*.

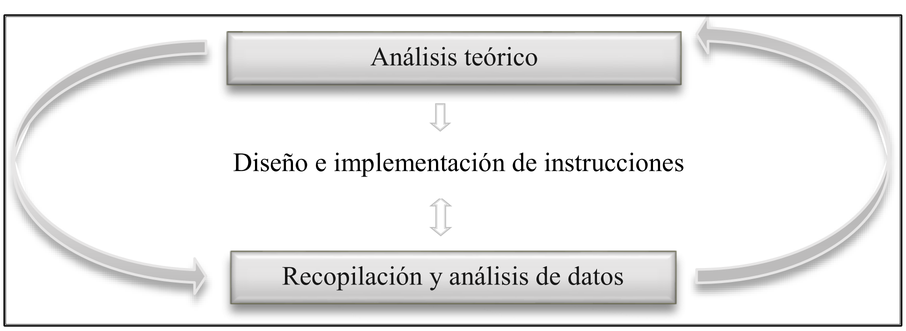


Figura 3.2. Ciclo de investigación (adaptado de Asiala et al. 1996, p. 5).

Para cumplir con el objetivo general de la investigación nos hemos propuestos los objetivos particulares mencionados en el capítulo 2, los cuales iremos desarrollando a medida que se avance en la investigación.

3.2 Análisis teórico de la matriz de cambio de base

Para diseñar la descomposición genética inicial tomamos como referencia nuestra experiencia personal, así como un revisión de libros de álgebra lineal que son usados por maestros que han impartido una o varias veces el curso, entre ellos: *Álgebra lineal* (Grossman, 2008), *Introducción al álgebra lineal* (Anton, 1980), *Álgebra lineal* (Hoffman y Kunze, 1973), *Fundamentos de álgebra lineal y aplicaciones* (Florey, 1980), *Álgebra lineal: Una introducción moderna* (Poole, 2011). En estos libros analizamos cómo se presenta el concepto de matriz cambio de base así como sus propiedades fundamentales.

Sobre este concepto es posible encontrar diferentes definiciones en los libros de texto. En algunos recibe el nombre de "Matriz de transición" o "Matriz de cambio de base" se presenta después de la definición del concepto de base ordenada; a continuación aparecen algunas de las definiciones que hemos tenido en cuenta para la construcción de nuestra descomposición genética.

> **Definición.** La Matriz A de n x n cuyas columnas están das por (8) se llama matriz de transición de la base B_1 a la base B_2. Esto es,
>
> $$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \quad & \uparrow \\ (u_1)_{B_2} & & (u_n)_{B_2} \end{array} \end{array} \tag{9}$$
>
> Nota: Si se cambia el orden en el que se escriben los vectores de la base, entonces también debe cambiarse el orden de las columnas en la matriz de transición.
>
> (Grossman, 2008, p. 369)

Es de resaltar que el autor en esta definición advierte con una nota la consecuencia de alterar el orden en la base de salida y el efecto que causa.

> **Definición**. Si $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ y $B' = \{u'_1, u'_2, \cdots, u'_n\}$ son bases de un espacio vectorial V, entonces la matriz de transición de B a B' es la matriz de n x n
>
> $$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{donde} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{u}_1]_{B'}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{u}_2]_{B'}, \cdots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{u}_n]_{B'}$$

(Anton, 1980, p.237)

Definición. Sean $B = \{u_1,\ u_2\ , \dots, u_n\ \}$ y $C = \{v_1,\ \ v_2, \dots , v_n\}$ bases para un espacio vectorial V. La matriz de n x n cuyas columnas son los vectores coordenados $[u_1]_C$,…, $[u_n]_C$ de los vectores en B con respecto a C se denota $P_{C\leftarrow B}$ y se llama matriz de cambio de base B a C. Esto es,

$$P_{C\leftarrow B} = [[u_1]_C\ [u_2]_C \dots\ [u_n]_C]$$

(Poole, 2011, p.483)

Para expresar esta idea de otra manera, los autores consideraran la transición como el paso de una base “antigua” a una base “nueva”; entonces, la columna j-ésima de la matriz de transición es la matriz de coordenadas del vector j-ésimo de la base anterior con respecto a la nueva base. Estas definiciones y otras hacen notar implícitamente que existe un orden en las bases pero es de mayor riqueza para el estudiante hacer explicita esta observación, más aun se debe explicar previamente el concepto de base ordenada.

Para efectos de esta investigación entenderemos por matriz de cambio de base en el sentido Poole (2011) y consideraremos el siguiente teorema en el cual describe sus propiedades.

Teorema. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo F, y sean β y β' bases ordenadas de V. Entonces Existe una única matriz n x n, necesariamente invertible, con elementos de F, de modo que

$$[\alpha]_\beta = P[\alpha]_{\beta'}$$

$$[\alpha]_{\beta'} = P^{-1}[\alpha]_\beta$$

Para todo vector α de V. Las columnas de P están dadas por

$$P_j = \left[\alpha_j{}'\right]_\beta \qquad j = 1, \cdots, n.$$

(Hoffman & Kunze, 1973, p. 52)

Ahora bien, para tener una primera aproximación sobre un posible modelo cognitivo que dé lugar a las estructuras por construir, empezamos nuestro análisis teórico con base en nuestra experiencia y consulta de libros de texto de Álgebra Lineal. Con esto decidimos dos conceptos primordiales que debe tener un estudiante para abordar la construcción de las estructuras asociadas a la matriz de cambio de base estos son: base ordenada y coordenadas de un vector. A continuación aparecen las definiciones de las que partiremos para describir las estructuras.

> **Definición**. Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, una base ordenada de V es una sucesión finita de vectores linealmente independiente y que genera a V.
>
> (Hoffman & Kunze, 1973, p. 50)

Notemos que la diferencia entre base y base ordenada es simplemente el orden que se establece en la base, este orden ayuda a establecer la i-esima coordenada del vector de coordenadas. Esto toma sentido al considerar bases de un espacio vectorial distintas de la canónica, las cuales se podría decir que no tiene un orden natural. Si se considera B una base arbitraria del espacio vectorial V de dimensión n no necesariamente con un orden natural de los vectores de B, por tanto, será necesario imponer algún orden a estos vectores con el fin que se pueda definir la i-esima coordenada del vector v respecto a la base B. Así que las coordenadas se definen respecto a una sucesión de vectores y no de un conjunto de vectores (Hoffman y Kunze, 1973). Básicamente el orden en la base sirve para establecer qué lugar va ocupar la i-esima coordenada en un vector de coordenadas.

Anteriormente mencionábamos lo expuesto por Hillel (2000) y los dispositivos de notación respecto las componentes y las coordenadas. Nosotros consideraremos la siguiente idea ante esta cuestión.

> A menudo, será de mayor conveniencia usar la matriz de las coordenadas de α respecto a la base ordena β:
>
> $$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{bmatrix}$$
>
> En vez del n-tupla $(x_1, \dots, x_n)$ de coordenadas. Para indicar la dependencia de esta matriz de coordenadas respecto a la base se usará el símbolo
>
> $$[\alpha]_\beta.$$
>
> Para la matriz de coordenadas del vector α respecto a la base ordenada β. Esta notación será particularmente útil cuando procedamos ahora a describir qué sucede a las coordenadas de un vector α cuando se cambia de una base ordenada a otra.
>
> (Hoffman & Kunze, 1973, p.51)

Dentro de una descomposición genética es fundamental determinar las estructuras previas que un individuo debe tener para dar lugar a la construcción de un nuevo concepto y/o noción matemática. Como elementos previos dentro de este análisis teórico consideramos que un individuo debe tener una *concepción Objeto del vector de coordenadas* de un vector respecto a una base ordenada y una *concepción Proceso del concepto de base ordenada*.

A continuación haremos un análisis de la relación entre las estructuras que anteceden a la matriz de cambio de base y describiremos lo que se entenderá por concepción *Objeto del vector de coordenadas* y *concepción Proceso del concepto de base ordenada*.

La relación entre estas estructuras previas está determinada por el concepto de combinación lineal, es decir, dado V un espacio vectorial de dimensión finita n definido sobre un campo K, $v \in V$ y $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V; es posible notar que dicha base tiene n elementos, de esta manera podríamos arreglar esta base en $n!$ formas tales que sus elementos estén en distinto orden, pero esto implica que dado cualquier $v \in V$ existen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ escalares en el campo K tales que v es combinación lineal de los elementos de la base, así tendríamos $n!$ formas de arreglar los escalares en la combinación lineal:

$$
\left.
\begin{aligned}
v &= a_3v_3 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \\
v &= a_4v_4 + a_nv_n + \cdots + a_1v_1 \\
&\;\vdots \\
v &= a_4v_4 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n.
\end{aligned}
\right]
$$

$n!$ Formas de arreglar los escalares en la combinación lineal.

Lo anterior no es más que escribir el vector con los mismos escalares y vectores de la base pero considerando diferente orden que se le puede dar a la base. Resulta necesario establecer un orden entre los elementos de la base B, en donde sólo utilicemos una de las $n!$ formas de arreglar los escalares al escribir el vector v dado en V. Los coeficientes de dicha combinación lineal son las componentes del vector que llamamos matriz de coordenadas de v respecto a la base ordenada dada, la figura 3.3, muestra la relación descrita anteriormente.

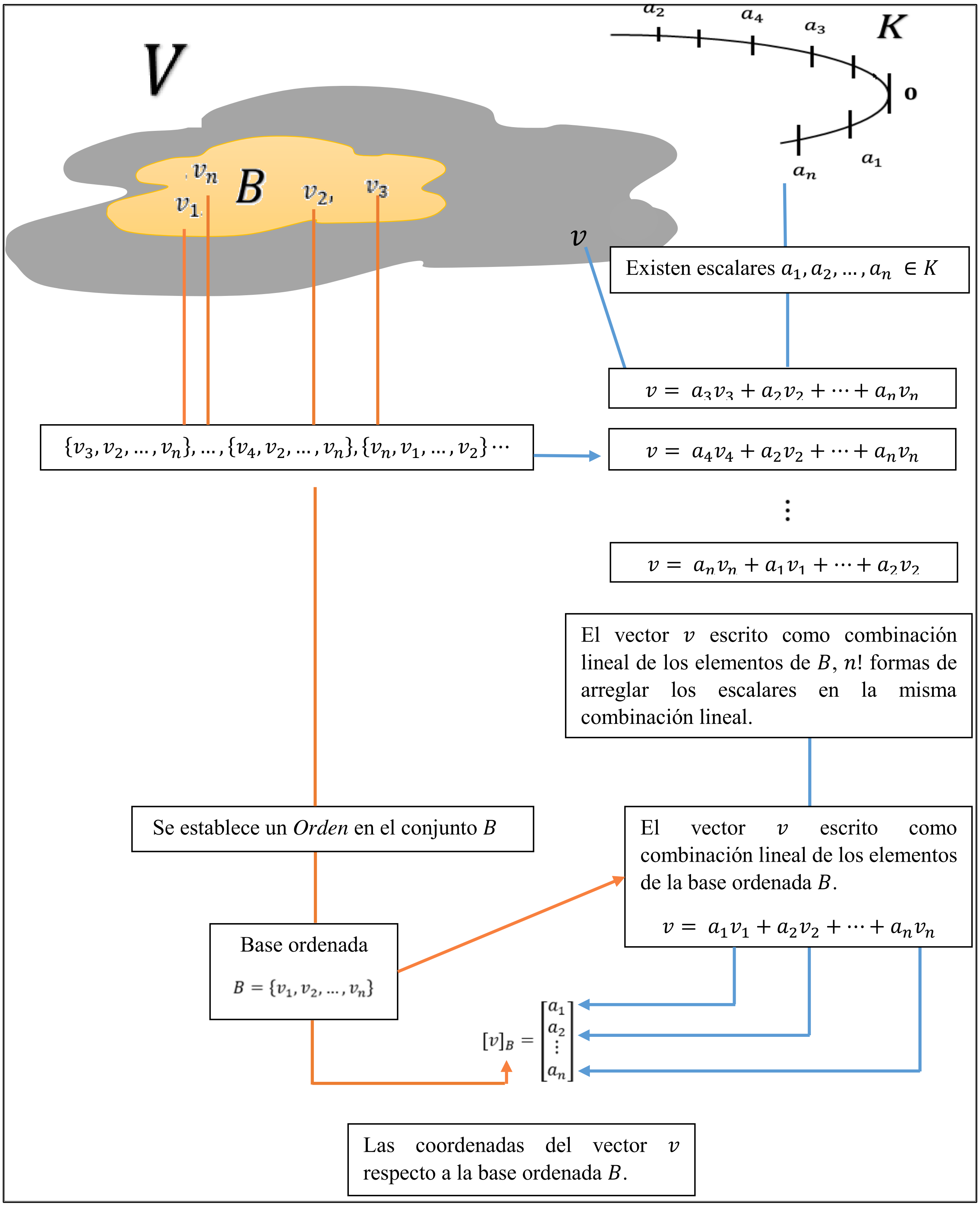


Figura 3.3. Relación entre los conceptos previos a través del concepto de combinación lineal

En la figura 3.3 mostramos cómo relacionamos el proceso de base ordenada, en donde ella es entendida como una sucesión de vectores linealmente independiente que genera al espacio vectorial, y el objeto vector de coordenadas. A continuación definimos con mayor detalle estas estructuras, para ello consideramos una concepción proceso del concepto de base.

> A partir de la reflexión sobre estas acciones, el sujeto es capaz de interiorizarlas en un proceso que le permite establecer si un vector dado o un conjunto de vectores pertenecientes a un espacio vectorial pueden o no ser escritos como combinaciones lineales de los vectores del conjunto original.
>
> (Kú, 2007, p.29)

Considerando lo anterior y nuestra definición de base ordenada, definiremos lo siguiente:

Concepción proceso de base ordenada. Está caracterizada porque el estudiante puede reflexionar sobre el orden de la base B, decidir cuál será dicho orden y establecer si el vector dado v, o cualquier conjunto de vectores del espacio vectorial puede escribirse como una combinación lineal de los elementos de B.

Por otro lado, si se tiene un espacio vectorial V de dimensión finita n sobre el campo K, y sea $v \in V$. Si el individuo logra ver al vector v como el vector de coordenadas como un elemento del espacio K^n; esto es cuando puede establecer un orden único entre los elementos de la base y escribir el vector v como una combinación única de los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ esto es $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$, el individuo deja de pensar en los coeficientes como las coordenadas del vector y lo ve como un elemento de K^n. Resaltemos que el individuo logra ver el vector como un nuevo vector del espacio K^n sobre el cual puede aplicar nuevas operaciones.

Concepción Objeto de las coordenadas de un vector. Si el individuo logra ver al vector $v \in V$ como un vector del espacio K^n sobre el cual puede aplicar acciones específicas (operaciones binarias), diremos que tiene una concepción estática (figura 3.4).

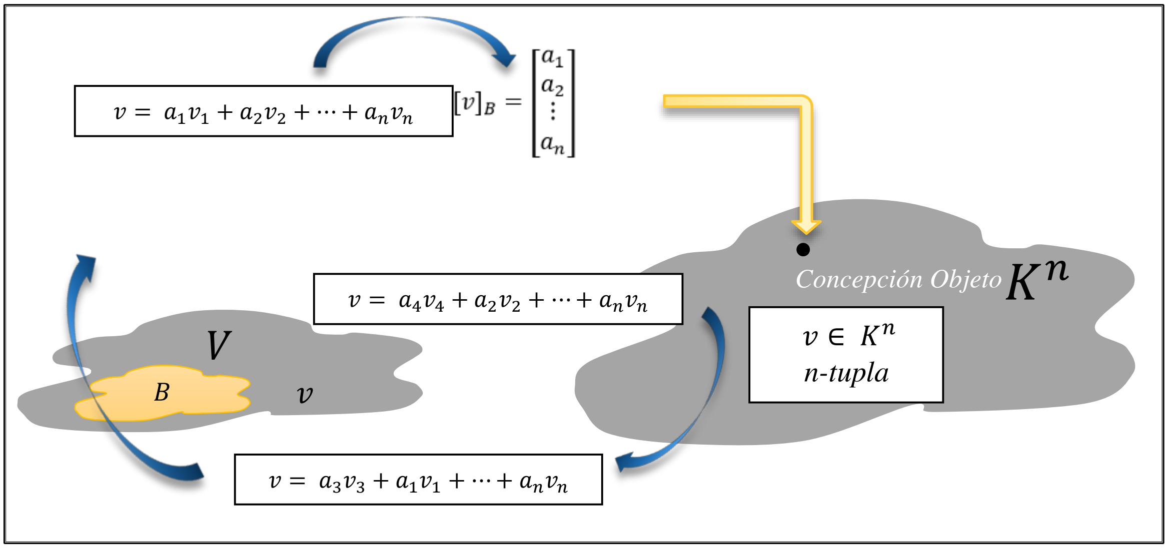


Figura 3.4. Coordenadas de un vector visto desde una concepción objeto.

Con las estructuras descritas y las relaciones establecidas entre ellas damos lugar a la construcción del concepto matriz de cambio de base. A continuación describimos específicamente las estructuras que asociamos a la construcción de dicho concepto y cómo cada una puede lograrse por parte de un individuo a través del desarrollo de mecanismos mentales.

3.2.1 Descomposición genética hipotética del concepto matriz de cambio de base

Acción: esta concepción está caracterizada por el conjunto de transformaciones que un individuo realiza de manera externa para calcular la matriz cambio de base; esto es, dadas dos bases ordenadas B y B_1 del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, él podrá calcular la matriz cambio de base de B a B_1 o de B_1 a B mediante las acciones específicas que logre establecer para construir cada columna de la matriz buscada. Esta estructura, Acción, está directamente asociada con la concepción proceso del concepto de base ordenada. Para explorar un poco más este aspecto, analizamos la siguiente situación.

Problema A. Sea $V = \mathbb{R}^2$ el espacio vectorial definido sobre el campo $\mathbb{R}$ y sean:
$B_1 = \left\{\binom{0}{1}, \binom{1}{0}\right\}$, $B_2 = \left\{\binom{1}{1}, \binom{2}{1}\right\}$, $B_3 = \left\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right\}$, bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

i) Encuentre la matriz $P_{B_1 \to B_2}$
ii) Encuentre la matriz $P_{B_3 \to B_2}$
iii) Encuentre la matriz $P_{B_2 \to B_3}$
iv) ¿La base B_1 es igual a la base B_3? Justifica tu respuesta.
v) ¿La matriz $P_{B_1 \to B_2}$ es igual a la matriz $P_{B_3 \to B_2}$? Justifica tu respuesta.

En este problema se dan tres bases ordenadas B_1, B_2 y B_3 de $\mathbb{R}^2$ dos de ellas B_1, B_3 tienen los mismos vectores en un orden diferente, esta consideración es planteada a propósito dentro de nuestro análisis, para verificar si el estudiante tiene las concepciones previas relacionadas con el concepto de base ordenada para iniciar su construcción de la matriz de cambio de base. Creemos que esta concepción es fundamental para la construcción de dicha matriz, puesto que establece el orden de las columnas de ella y además el orden de las coordenadas de un vector. La omisión de dicho orden puede generar dificultades en los estudiantes, los cuales al tener una concepción acción sólo se limitaran a calcular dicha matriz como se pide en los incisos *i), ii)* y *iii);* de tal manera que al llegar al punto iv) se limitaran a responder con un sí o un no, sin reflexionar previamente sobre el orden de los elementos de las bases dadas, es decir aceptaran que las bases son distintas sin reflexionar sobre lo que implica sobre la matriz de cambio de base.

Para el inciso *v)* un estudiante con una *concepción acción* sólo concluirá que las matrices son distintas sin importarle que ellas fueron construidas con los mismos elementos de dos bases en donde sus vectores están en otro orden.

Proceso: diremos que el individuo ha logrado interiorizar las Acciones descritas en un Proceso, cuando pueda reflexionar sobre la matriz de cambio de base, sin realizar cálculos específicos para encontrarla. La interiorización de las acciones debe permitir que el individuo logre realizar transformaciones mentales que lo lleven a pensar en características de la matriz cambio de base relacionadas con las bases definidas. Esta concepción incluye el trabajo sobre cualquier espacio vectorial V de dimensión finita. Como puede verse en la estructura anterior, sólo consideramos el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, dado que las acciones específicas las asociamos con dicho espacio. La complejidad de la construcción del Proceso estará dada entonces, al determinar la matriz de cambio de base con vectores de otros espacios vectoriales de dimensión finita. Para ver esto consideremos el siguiente ejemplo:

> Problema B. Sean $A = \{a_1, a_2,\ a_3\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ bases ordenadas para un espacio vectorial V, suponga que $a_1 = 4b_1 - b_2$, $a_2 = -b_1 + b_2 + b_3$ y $a_3 = b_2 - 2b_3$.
>
> a) Encuentre la matriz de cambio de base de A a B.
>
> b) Encuentre $[x]_B$ para $x = 3a_1 + 4a_2 + a_3$.
>
> (Lay, 2005, p. 270)

Para el inciso *a)* se tienen las bases A y B, los vectores que las conforman no están dados de manera específica sino como vectores genéricos o generales de un espacio vectorial V. Para la solución del problema, más allá de empezar el cálculo y la búsqueda de dicha matriz, se requiere reflexionar sobre los elementos que la conforman, de esta manera podemos concebir que el estudiante está reflexionando sobre las acciones que puede realizar de manera mental para resolver el problema.

Para resolver el inciso *b)* el estudiante antes de intentar resolver el problema debe reconocer la relación que existe entre las coordenadas de cualquier vector escrito en dos bases cualesquiera; por ejemplo, $[x]_B, [x]_A$ esta relación es precisamente la que otorga la matriz cambio de base que indica cómo pasar de unas coordenadas a otras. Notemos que para ambos incisos la resolución del problema se sustenta más en las propiedades de la matriz cambio de base, que en la forma de calcularla. Así en general la concepción proceso se caracteriza por la capacidad del individuo para ver la matriz cambio de base, como una matriz formada por los vectores coordenadas de una base en términos de la otra; con esta estructura se da paso a la encapsulación.

Objeto: el proceso de matriz cambio de base se encapsula en un objeto, cuando el individuo considera la matriz cambio de base como un elemento del conjunto de matrices $n \times n$ invertibles, donde n depende de la dimensión del espacio vectorial. Esto se da cuando el individuo debe enfrentar situaciones en donde necesite aplicar acciones sobre este nuevo objeto, por ejemplo, al determinar la matriz inversa. Consideremos el siguiente problema:

> Problema C. Sea $B_1 = \{p_0, p_1, p_2\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}_2[x]$ formada por los polinomios:
> $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = 1 + x$ y $p_2 = (1 + x)^2$ y sea la matriz:
> $$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
> Determine los vectores de la base ordenada $B_2 = \{q_0, q_1, q_2\}$, tal que P sea la matriz cambio de base de B_1 a B_2.

En este problema se tienen como datos preliminares, la matriz cambio de base de B_1 a B_2 y los vectores de B_1. El problema radica en encontrar una base de tal manera que la matriz dada represente el cambio de base indicado. En este caso saber que las columnas de la matriz son las coordenadas de los elementos de la primera base en términos B_2, no es de mucha ayuda para el estudiante; así que tendrá que ver dicha matriz como un todo. Esto es determinar la matriz cambio de base de B_2 a B_1 como la matriz P^{-1}. Esta es una transformación específica en donde el estudiante puede empezar a dar muestras de haber encapsulado el Proceso en un Objeto.

Además para finalizar el problema el estudiante deberá utilizar la matriz P^{-1} para deducir quiénes son los vectores de B_2 .

De tal manera que la construcción del Objeto matriz cambio de base, estará condicionado por la experiencia del individuo con situaciones que requieran la aplicación de nuevas transformaciones en donde la matriz se conciba como una "cosa estática" un único objeto y no en términos de sus columnas; condicionadas por los vectores de cada base.

Esquema: Bajo esta concepción creemos que el individuo podrá asociar la matriz cambio de base con la representación matricial de una transformación lineal, esto mediante su reflexión, es decir, considera a la matriz de cambio de base como un caso particular de la matriz asociada a una transformación lineal, el individuo debe tener claro que dada una trasformación lineal $T: V \to W$ definida entre espacios vectoriales de dimensión finita (no necesariamente de la misma dimensión), y sean las bases ordenadas $B_1 = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de V y $B_2 = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ de W, entonces la matriz asociada de mxn a la transformación lineal es: $M = \left([T(v_1)]_{B_2} \quad [T(v_2)]_{B_2} \quad \cdots \quad [T(v_n)]_{B_2}\right)$.

Dicha reflexión podría describirse de la siguiente manera: Una *concepción Proceso* de matriz cambio de base, le permite al individuo establecer las propiedades y darse cuenta que dicha matriz está definida en un mismo espacio vectorial. Por lo que vería a la transformación lineal como un operador lineal. Ahora relacionando ese operador con $I: V \to V$, es decir, la transformación identidad en el mismo espacio esto es $I(v) = v$, para todo $v \in V$. Por lo que la Matriz asociada al operador lineal seria:

$$\begin{aligned} M &= \left([T(v_1)]_{B_2} \quad [T(v_2)]_{B_2} \quad \cdots \quad [T(v_n)]_{B_2}\right) \\ &= \left([I(v_1)]_{B_2} \quad [I(v_2)]_{B_2} \quad \cdots \quad [I(v_n)]_{B_2}\right) \\ &= \left([v_1]_{B_2}, [v_2]_{B_2}, \cdots, [v_n]_{B_2}\right) \\ &= M_{B_1 \to B_2}. \end{aligned}$$

Un individuo con una *concepción Objeto de la matriz de cambio de base* puede tener claro que ésta es una matriz de cambio de base; una matriz n x n.

Es decir, la construcción del esquema podría iniciarse con esta forma de razonar y de caracterizar a la matriz de cambio de base. En esta estructura debe ser claro que depende del individuo y en el nivel del esquema que se encuentre para usar todos los resultados de la matriz asociada a una *transformación lineal* con la Matriz de cambio de base, puesto como se mostró anteriormente dicha matriz es un caso particular de la matriz asociada a una transformación lineal.

La coherencia de este esquema va estar determinado por la variedad de resultados que cumple la matriz de cambio de base, visto como un caso particular de la matriz asociada a una transformación lineal. Así mismo como las propiedades que se relacionan con otros conceptos en el Álgebra Lineal.

Por ejemplo, un problema que nos ayudaría a describir el esquema de la matriz de cambio de base, podría ser el siguiente:

Problema D. Sea $V = \mathbb{R}^2$ el espacio vectorial definido sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y sean:

$B_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}, B_3 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ y sea T un operador lineal sobre $\mathbb{R}^2$ definido por $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ la matriz asociada T en la base canónica B_3 es:

$$[T]_{B_3} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

a) Encuentre la matriz $[T]_{B_2}$.
b) Utilice la matriz de cambio de base $P_{B_2 \to B_3}$ (encontrada en **Problema 1** inciso iii) para calcular $[T]_{B_2}$.

En este problema notemos que en las dos formas de calcular la matriz asociada a la transformación lineal se llega al mismo resultado, la diferencia es que en el segundo inciso se pide al estudiante usar una forma más sofisticada, por así decirlo, en la cual tiene que relacionar la matriz asociada a un operador lineal con la matriz de cambio de base. Con este problema más allá determinar si logran o no resolver el problema, lo que buscamos es encontrar evidencia de la *estructura esquema* del concepto de estudio. Recordemos que en nuestra descomposición genética hipotética mencionamos que el nivel de esquema dependerá de la experiencia de cada uno de los individuos al relacionar la matriz cambio de base como un caso particular de la matriz asociada a una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita.

3.3 Tercera componente del ciclo de investigación de la teoría APOE

Para la tercera componente, realizamos una prueba diagnóstico con base en el análisis teórico[3] que tuvo por objetivos: 1) analizar y verificar el tipo de estructuras previas que un individuo debe tener para abordar la construcción del concepto matriz de cambio de base; 2) identificar algunas dificultades asociadas a la comprensión de la matriz de cambio de base; 3) Seleccionar a los individuos que muestren evidencia de algún tipo de concepción del concepto de interés.

La entrevista consta de problemas que fueron precisados con sustento en el análisis teórico, tiene por objetivo refinar la descomposición genética hipotética. Para lograrlo se identificaron los tipos de concepción y mecanismos mentales respecto a la matriz de cambio de base.

3.3.1 Diagnóstico: Diseño

Con base en el análisis teórico diseñamos un diagnóstico, los objetivos principales del diseño y la aplicación de una prueba diagnóstico en nuestra investigación son: en primer lugar determinar con detalle el tipo de estructuras previas que un individuo debe tener para abordar la construcción del concepto matriz cambio de base; y en segundo lugar, identificar dentro de la población de estudio aquellos individuos que nos pueden dar más información acerca de sus estructuras asociadas con dicho concepto en el momento de la entrevista. Aunque los estudiantes logren resolver cierto tipo de situaciones en la prueba diagnóstico no necesariamente han logrado una estructura y esto se puede llegar a presentarse durante la entrevista.

Por consiguiente, buscamos con la entrevista robustecer nuestra descomposición genética hipotética mediante los datos obtenidos de los estudiantes de tal manera que ésta resulte lo más próximo a una construcción satisfactoria del concepto de estudio apegado a la realidad.

Con base en todos los elementos de la componente del análisis teórico que materializamos en la descomposición genética hipotética planteada en el capítulo anterior proponemos problemas o adaptaciones de problemas que aparecen en algunos libros, los cuales

[3] El análisis teórico, consideró todas las estructuras hipotéticas: *acción*, *proceso*, *objeto* y *esquema* del concepto matriz de cambio de base.

son utilizados en cursos regulares de Álgebra Lineal. Como se verá en el análisis que presentamos a continuación, los problemas de este instrumento los planteamos sólo considerando el caso para los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

3.3.2 Aplicación del diagnóstico

En esta investigación se desarrolló en la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander UIS (Colombia). La prueba diagnóstica fue desarrollada por un total de 28 estudiantes que cursan el programa de Matemáticas o de Licenciatura en Matemáticas. Dichos estudiantes habían llevado por lo menos un curso de Álgebra Lineal. Durante un tiempo aproximado de 120 minutos, los estudiantes respondieron de manera escrita e individual la prueba (figura 3.5).

Álgebra Lineal: Diagnóstico del concepto Matriz de Cambio de Base

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
Unidad Académica de Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Escuela de Matemáticas

Nombre: ____

Carrera que cursa: ____________________________________

1. Sea $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^3$ formada por los vectores:

$$v_1 = (1, 0, -1),\ v_2 = (1, 1, 1), v_3 = (1, 0, 0).$$

(i) ¿Cuáles son las coordenadas del vector (5,-5,1) en términos de la base ordenada β?
(ii) ¿Cuáles son las coordenadas del vector (a, b, c) en términos de la base ordenada β?

2. Sean las bases ordenadas $\beta = \{v_1, v_2\}$ y $\beta' = \{e_1, e_2\}$ del espacio $\mathbb{R}^2$, formadas por los vectores:

$$v_1 = (1,2), v_2 = (2,1) \text{ y } e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$$

(i) Encuentre la matriz de cambio de base de β a β'.
(ii) Encuentre la matriz de cambio de base de β' a β.

3. Dada la matriz de cambio de base $M_{\beta' \to \beta} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donde las bases ordenadas están definidas como:

$$\beta = \{(2,0,1),\ (1,2,0),(1,1,1)\}$$

$$\beta' = \{(6,3,3),(4,-1,3),(5,5,2)\}$$

Y sea el vector $\begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Calcule el vector $\begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}_{\beta}$.

4. Sea la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ y, sean los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ vectores de una base ordenada $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$.
   a) Encuentre una base $\beta' = \{u_1, u_2, u_3\}$ para $\mathbb{R}^3$ tal que $P_{\beta' \to \beta}$ sea la matriz de cambio de base de $\beta' = \{u_1, u_2, u_3\}$ a $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$.
5. ¿Qué entiendes por Matriz de cambio de base?

Figura 3.5. Prueba diagnóstico del concepto matriz de cambio de base.

3.3.3 Objetivo del diseño del diagnóstico y su análisis a priori

A continuación mostramos el análisis a priori del diagnóstico, en dicho análisis se propone la o las soluciones esperadas; éstas obedecen a algún tipo de concepción que podrían evidenciar los estudiantes. Partimos desde las estructuras previas hasta los tipos de concepción respecto a la matriz de cambio de base.

3.3.3.1 Diagnóstico: Diseño y análisis a priori

Cada situación está acompañada de un análisis a priori que busca dar cuenta de su intensión en términos de las posibles respuestas matemáticas; además de un análisis cognitivo en términos de las estructuras que proponemos como previas y las asociadas a la construcción de una concepción del concepto de estudio.

Pregunta 1

Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^3$ formada por los vectores:
$v_1 = (1,0,-1),\ v_2 = (1,1,1),\ v_3 = (1,0,0)$.
(i) ¿Cuáles son las coordenadas del vector $(5,-5,1)$ en términos de la base ordenada B?
(ii) ¿Cuáles son las coordenadas del vector (a,b,c) en términos de la base ordenada B?

En este problema se tiene una base ordenada B del espacio $\mathbb{R}^3$de manera explícita, es decir, se conocen los vectores que conforman dicha base. En la pregunta (i) se pide la escritura de las coordenadas de un vector en particular respecto a la base dada; el inciso (ii) es una variante del inciso anterior puesto que ahora el vector del cual se piden las coordenadas esta dado de manera general. Buscamos evidenciar qué tan familiarizados están los estudiantes con el concepto de coordenadas de un vector y su relación con una base ordenada. Esperamos que para ambos incisos un estudiante forme una combinación lineal con los vectores de las bases dadas e iguale al vector dado, y resuelva el sistema de ecuaciones en términos de los escalares que satisfagan dicha combinación lineal. A continuación presentamos una manera en el cual un estudiante podría resolver el problema.

Solución.

Como $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ es una base ordenada del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, existen escalares $a,b,c\in\mathbb{R}$, tales que:

$$\begin{pmatrix}5\\-5\\1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b+c\\b\\-a+b\end{pmatrix}.$$

Donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}a+b+c&=5\\ b&=-5\\ -a+b&=1.\end{aligned}$$

Luego obtenemos la matriz ampliada que está asociada al sistema de ecuaciones lineales anterior. Resolviendo por medio de eliminación gaussiana hasta llevar a la matriz identidad del lado izquierdo, así obtenemos.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&5\\0&1&0&-5\\-1&1&0&1\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-6\\0&1&0&-5\\0&0&1&16\end{array}\right)\Rightarrow\begin{array}{c}a=-6\\b=-5.\\c=16\end{array}$$

Por tanto tenemos que:

$$\left[\begin{pmatrix}5\\-5\\1\end{pmatrix}\right]_B=\begin{bmatrix}-6\\-5\\16\end{bmatrix}.$$

Como $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ es una base ordenada del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, existen escalares $a_1,b_1,\ c_1\in\mathbb{R}$, tal que:

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+b_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\ c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1+\ c_1\\b_1\\-a_1+b_1\end{pmatrix}$$

donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}a_1+b_1+\ c_1&=a\\ b_1&=b\\ b_1+\ c_1&=c\end{aligned}$$

luego obtenemos la matriz ampliada que está asociada al sistema de ecuaciones lineales anterior y resolviendo por medio de eliminación gaussiana hasta llevar a la matriz en su forma escalonada reducida obtenemos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & a \\ 0 & 1 & 0 & | & b \\ -1 & 1 & 0 & | & c \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & b-c \\ 0 & 1 & 0 & | & b \\ 0 & 0 & 1 & | & a+c-2b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} a_1 = b-c \\ b_1 = b \\ c_1 = a+c-2b. \end{array}$$

Por tanto tenemos que:

$$\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right]_B = \begin{bmatrix} b-c \\ b \\ a+c-2b \end{bmatrix}.$$

En este sentido, teniendo en cuenta el análisis teórico previo podemos considerar que si un estudiante tiene una *concepción Proceso* de base ordenada, podrá escribir como combinación lineal los vectores dados en ambos incisos. Plantear el sistema de ecuaciones, darle solución y así determinar las coordenadas pedidas. Notemos que la *concepción Objeto* de las coordenadas de un vector le ayudara a ver dichos coeficientes como las coordenadas del vector pedido en $\mathbb{R}^3$.

En el caso de que un estudiante tenga una *concepción Acción* de una base ordenada diremos que sólo podrá responder al inciso uno, pues sólo verificará si el vector dado se puede escribir como una combinación lineal de los elementos de la base. En el inciso (ii) a lo más esperamos que el estudiante plantee la escritura del vector (a, b, c) como combinación lineal de la base, pero su concepción no le permitirá encontrar las coordenadas puesto que está limitado al trabajo con vectores concretos y no para un caso general.

Pregunta 2

Sean las bases ordenadas $B = \{v_1, v_2\}$ y $B' = \{e_1, e_2\}$ del espacio $\mathbb{R}^2$, formadas por los vectores:
$v_1 = (1,2)$, $v_2 = (2,1)$ y $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$
(i) Encuentre la matriz de cambio de base de B a B'.
(ii) Encuentre la matriz de cambio de base de B' a B.

En esta pregunta se presentan dos bases ordenadas B, B' del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. El problema pide determinar las matrices de cambio de base $M_{B\to B'}$ y $M_{B'\to B}$. Este problema tiene que ver con el cálculo de dichas matrices, con estos buscamos si es causa de dificultad la notación, la cual asociamos a la falta de la estructura proceso de la matriz de cambio de base. Por ejemplo, supongamos que un estudiante logra escribir las coordenadas de cada vector de una base en términos de la otra base, pero puede cometer el error de confundir la base de llegada con la base de salida por así decirlo y en vez de calcular $M_{B\to B'}$ calcular $M_{B'\to B}$. Esta confusión puede llevarle a plantear mal la ecuación que relaciona las coordenadas de un vector dado en una base, con las coordenadas del mismo vector en la otra. Es decir, no llegaría a la ecuación

$[v]_{B'} = M_{B\to B'}[v]_B$, sino que tomaría la ecuación $[v]_B = M_{B'\to B}[v]_B$ como cierta. Lo cual lo llevará a dar repuestas erróneas en problemas en donde necesite de la ecuación que cumple la matriz de cambio de base.

Consideramos que con una *concepción Proceso* de base ordenada y *concepción Objeto* de coordenadas de un vector, el individuo será capaz de encontrar la matriz que pide el problema. Como mencionamos en nuestro análisis teórico, la relación entre estos tipos de concepciones está determinada por el concepto de combinación lineal. El éxito será garantizado si el individuo tiene al menos una concepción proceso de la matriz de cambio de base y la pone en juego de manera coherente en la solución del problema.

Por ejemplo, un estudiante puede razonar de la siguiente manera: para el cálculo de la matriz de cambio de base de B a B'; como ya está establecido el orden de las bases procederá a escribir cada vector de la base v_1, v_2 como las coordenadas respecto a B'. Luego con una *concepción Objeto* de del vector de coordenadas, podrá ver dichas coordenadas del vector como la *i-esima* columna de la matriz de cambio de base y con ello podrá dar solución al problema.

Solución.

Como B, B' son bases ordenadas entonces $M_{B\to B'} = ([v_1]_{B'} \quad [v_2]_{B'})$, es decir que las columnas de dicha matriz son precisamente las coordenadas de los vectores de B respecto a la base B'. Para calcular dichas coordenadas se tiene que como B' es base $\mathbb{R}^2$ entonces existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que:

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \Rightarrow \left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]_{B'} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

Y

$$v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} \Rightarrow \left[\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right]_{B'} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}.$$

Por lo tanto

$$M_{B\to B'} = ([v_1]_{B'} \quad [v_2]_{B'}) = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}.$$

Para determinar $M_{B'\to B}$ se puede proceder de dos formas. Una de ellas es hacer algo análogo al inciso (i) pero esta vez escribiendo las coordenadas de cada vector de la base B' respecto a la base B, es decir $M_{B'\to B} = ([e_1]_B \quad [e_2]_B)$. Como B es base $\mathbb{R}^2$ entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que:

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+2b\\2a+b\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}a + 2\mathrm{b} = 1\\2a + b = 0.\end{matrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right).$$ Por lo tanto

$$[e_1]_B = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Para calcular $[e_2]_B$, dado que B es base $\mathbb{R}^2$ entonces existen $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 2b_1 \\ 2a_1 + b_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{c} a_1 + 2b_1 = 0 \\ a_1 + b_1 = 1. \end{array}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right).$$ Por lo tanto

$$[e_2]_B = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Luego

$$M_{B' \to B} = ([e_1]_B \quad [e_2]_B) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

La otra forma de calcular $M_{B' \to B}$ es la siguiente; dado que por el inciso (i) tenemos $M_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, entonces

$$(M_{B \to B'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = M_{B' \to B}.$$

Posibles respuestas de estudiantes con una *concepción Proceso* de base y sin *concepción Objeto* de las coordenadas de un vector.

- Para calcular la matriz de cambio de base B a B', pueden escribir las coordenadas de los vectores v_1, v_2 en términos de la base B' y establecer dichas coordenadas como el i-ésimo reglón de la matriz de cambio de base.
- Para calcular la matriz de cambio de base B a B', pueden escribir las coordenadas de los vectores e_1, e_2 en términos de la base B y establecer dichas coordenadas como el i-ésimo reglón de la matriz de cambio de base.

Otra posible respuesta puede ser la confusión de la simbología $M_{B \to B'}$ o $M_{B' \to B}$. Por ejemplo, podemos decir que un estudiante puede tener una *concepción Acción* de base ordenada y una *concepción Objeto* del vector de coordenadas y aun así contestar erróneamente. Dado que puede tener confusión con la simbología, es decir, a pesar de que textualmente se les pide calcular la matriz que va de la base B a B', el estudiante puede proceder a calcular las coordenadas e_1, e_2 respecto a la base B y escribir como la primera columna $[e_1]_B$ y como la segunda columna $[e_2]_B$ de la matriz requerida. En dicho caso a pesar de que está calculando una matriz de cambio de base ($M_{B'\to B}$) pero no es la requerida en el inciso (i), está confusión se la adjudicamos a una falta de *concepción Proceso* de la matriz de cambio de base, puesto que no se está reflexionando sobre la idea intuitiva de transitar entre las bases dadas. Más aun, esta forma de proceder puede asociarse con una concepción acción, dado que un estudiante puede realizar acciones de manera mecánica sin reflexionar sobre cuál es la matriz que necesita.

Pregunta 3

Dada la matriz de cambio de base $M_{B'\to B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donde las bases ordenadas están definidas como:

$$B = \{(2,0,1),(1,2,0),(1,1,1)\}$$
$$B' = \{(6,3,3),(4,-1,3),(5,5,2)\}$$

y sea el vector $\begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Calcule el vector $\begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}_B$.

Este problema contiene información en exceso, es decir, quizá no era necesario poner las bases B, B' explícitamente; pero precisamente con este hecho queremos destacar dos cosas importantes en nuestro análisis: la primera consiste en que los estudiantes al tener la información de los vectores de la base, pueden optar por escribir el vector requerido como combinación lineal de los vectores de la base dada. Esto evidencia que un estudiante cuenta con los requisitos previos que estamos considerando en la descomposición genética hipotética, para dar lugar a la construcción de una concepción de la matriz de cambio de base. La segunda está más enfocada a la concepción de la matriz de cambio de base, es decir, si un estudiante logra reflexionar sobre el significado de tener $M_{B'\to B}$ y las coordenadas del vector requerido respecto a la base B' tendrá todas las condiciones para establecer la relación que existe entre las coordenadas del vector dado, la matriz y las coordenadas del vector pedido $[v]_B = M_{B'\to B}[v]_{B'}$.

Solución.

Sea la matriz de cambio de base $M_{B'\to B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y sea cualquier $v \in \mathbb{R}^3$ se cumple que $[v]_B = M_{B'\to B}[v]_{B'}$, en particular para $v = (4,-9,5)$. Entonces

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}[v]_{B'}$$

Luego como sabemos que $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Otra manera de resolver el problema es la siguiente.
Como $= \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ordenada del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, existen escalares $a, b, c \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b+c \\ 2b+c \\ a+b \end{pmatrix}.$$

De donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2a+b+c &= 4 \\ 2b+c &= -9 \\ 2b+c &= 5. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema anterior

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -9 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow a = 4, b = -5, c = 1.$$ Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De las dos soluciones presentadas creemos que los estudiantes preferirán la segunda, puesto que el hacer explícito los vectores de las bases B, encontraran más sencillo calcular las coordenadas del vector respecto a la base dada. Como lo mencionábamos, esto sólo muestra evidencia de las estructuras previas del concepto de estudio.

Pregunta 4

Sea la matriz $P_{B'\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ y, sean los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ vectores de una base ordenada $B = \{v_1, v_2, v_3\}$.

a) Encuentre una base $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ para $\mathbb{R}^3$ tal que $P_{B'\to B}$ sea la matriz de cambio de base de $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ a $B = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Este problema exige más compresión del concepto que nos interesa, si se quiere dar una respuesta usando la matriz de cambio de base, es necesario tener un tipo de concepción específica. El problema radica entender el significado de las columnas de la matriz de cambio de base, es decir, el estudiante pondrá en juego su conocimiento sobre este concepto, puesto que debe reconocer el significado de las columnas de $P_{B'\to B}$. Por otro lado, la importancia de la concepción Proceso de la matriz de cambio de base y la *concepción objeto* del vector de coordenadas. Puesto que al haber identificado el significado de las columnas como las coordenadas de los vectores u_1, u_2, u_3 respecto a la base B, debe tener claro que ese vector de coordenadas contiene los escalares por los que se tiene que multiplicar cada vector de la base B. Si el estudiante además posee una concepción Proceso de la base ordenada entonces estará en condiciones de calcular cada u_1, u_2, u_3.

Solución.

Se tiene que $P_{B'\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base de la base ordenada B' a la base ordenada B, luego entonces:

$$[u_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, [u_2]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}, [u_3]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Esto no en más que escribir cada uno de los vectores como combinación lineal.

$$[u_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow u_1 = 1v_1 - 3v_2 + 4v_3$$

$$u_1 = 1\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$[u_2]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow u_2 = 2v_1 - 5v_2 + 6v_3$$

$$u_2 = 2\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$[u_3]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow u_3 = 1v_1 - 3v_2 + 4v_3$$

$$u_3 = -1\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la base ordenada buscada es:

$$B' = \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 21 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 32 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \right\}.$$

Por otro lado un estudiante puede hacer lo siguiente. Dado que tiene la matriz de cambio de base y sólo los vectores de una base, puede multiplicar dicha matriz por cada uno de los vectores dados y así determinar cada u_1, u_2, u_3. Puesto que si se deben de relacionar ambas coordenadas de un vector escritas en cuales quiera dos bases por la igualdad de una ecuación entonces haciendo eso garantizarían al menos que hay una igualdad que se cumple, en este razonamiento no se estaría poniendo en juego los tipos de concepciones previos de nuestro concepto, puesto que no se tomaría conciencia sobre las coordenadas del vector y no estaría reflexionando sobre los elementos que genera esa base dada.

Pregunta 5
¿Qué entiendes por Matriz de cambio de base?

Esta pregunta es abierta, sólo pide precisar sobre las ideas que los estudiantes tienen respecto al concepto de estudio; esto nos describirá de alguna manera el porqué de sus razonamientos. Esperamos que elementos relacionados con la base ordenada y las características de las columnas de la matriz cambio de base, a través del concepto de vector coordenadas surjan de los acercamientos a la definición que los estudiantes logren ofrecer.

3.3.4 Objetivo de la entrevista y su análisis a priori

A continuación mostramos el análisis a priori de la entrevista, en dicho análisis se propone la o las soluciones esperadas; éstas obedecen a algún tipo de concepción que podrían evidenciar los estudiantes. Partimos desde las estructuras previas hasta los tipos de concepción respecto a la matriz de cambio de base.

3.3.4.1 Entrevista: Diseño

Una vez aplicado el diagnóstico y realizado el análisis a posteriori determinamos cuáles de los estudiantes serían entrevistados. Para esto seleccionamos aquellos que dieron evidencias de las estructuras que planteamos como necesarias para iniciar el camino hacia la construcción de la matriz de cambio de base, además, de evidencias sobre su concepción de la matriz de cambio de base. Cabe resaltar que nos basamos en el trabajo realizado por los estudiantes en la prueba diagnóstica. Y por tanto aunque logren resolver cierto tipo de situaciones no necesariamente han logrado la estructura, es decir, se puede dar el caso en el que el estudiante pueda calcular una matriz de cambio de base para subespacios de $\mathbb{R}^n$, pero esto no implica que sea capaz de calcular la matriz de cambio de base para espacio vectorial V de dimensión finita sobre en un campo K.

Así pues diseñamos una entrevista semi-estructurada como lo propone la teoría APOE con el objetivo fundamental de refinar la descomposición genética hipotética. El análisis de la entrevista nos permitirá definir cuáles de las estructuras descritas y los mecanismos que inicialmente proponemos de manera hipotética se evidencian en el trabajo de los estudiantes;

además podremos identificar cuáles estructuras y/o mecanismos no hemos tenido en cuenta y son fundamentales en la construcción del concepto que nos interesa.

Con fundamento en el análisis teórico y nuestra experiencia en la construcción del concepto proponemos problemas o adaptaciones de problemas que aparecen en algunos libros de texto, que han sido utilizados por los estudiantes que serán entrevistados. Es importante mencionar que a diferencia del diagnóstico en donde sólo consideramos situaciones que involucraban los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, aquí consideramos el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y subespacios vectoriales de dimensión finita $\mathbb{P}_n[x]$ y un espacio vectorial cualquiera V de dimensión finita (figura 3.6), sugerimos en un estudio posterior trabajar con subespacios del espacio vectorial $\mathbb{M}_{mxn}$.

Álgebra Lineal: Matriz de Cambio de Base

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
Unidad Académica de Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Escuela de Matemáticas

Ejercicio 1

Sea $V = \mathbb{R}^2$ el espacio vectorial definido sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y sean:

$$B_1 = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\},\ B_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\},\ B_3 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}, \text{ bases ordenadas de } \mathbb{R}^2.$$

i) Encuentre la matriz $P_{B_1 \to B_2}$
ii) Encuentre la matriz $P_{B_3 \to B_2}$
iii) Encuentre la matriz $P_{B_2 \to B_3}$
iv) ¿La base B_1 es igual a la base B_3? Justifica tu respuesta.
v) ¿La matriz $P_{B_1 \to B_2}$ es igual a la matriz $P_{B_3 \to B_2}$? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 2

Sean las bases $B_1 = \{ t_3, t_2, t_1 \}$ y $B_2 = \{q_0,\ q_1,\ q_2\}$ bases ordenadas del espació vectorial $\mathbb{P}_2[x]$, definido sobre $\mathbb{R}$. Donde

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = x$$

$$t_3 = x^2$$

$$q_0 = 1 + 2x + x^2$$

$$q_1 = 2 + 9x$$

$$q_2 = 3 + 3x + 4x^2$$

a) Encuentre la matriz cambio de base B_1 a B_2.
b) Encuentre el vector de coordenadas de $[p]_{B_1}$ con $p = -1 + x$ y con ello calcule $[p]_{B_2}$.

Ejercicio 3

Sean $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ bases ordenadas para un espacio vectorial V. Suponga que $a_1 = 4b_1 - b_2$, $a_2 = -b_1 + b_2 + b_3$ y $a_3 = b_2 - 2b_3$.

a) Encuentre la matriz de cambio de base de A a B.
b) Encuentre $[x]_B$ para $x = 3a_1 + 4a_2 + a_3$.

Ejercicio 4

Consideremos la base $B_1 = \{p_0, p_1, p_2\}$ ordenada de $\mathbb{R}_2[x]$ formada por los polinomios:

$p_0(x) = 1$, $p_1(x) = 1 + x$ y $p_2 = (1 + x)^2$ y sea la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Encuentre los polinomios de la base ordenada $B_2 = \{q_0, q_1, q_2\}$, tal que P sea la matriz cambio de base de B_1 a B_2.

Ejercicio 5

Sea $V = \mathbb{R}^2$ el espacio vectorial definido sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y $B_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$ y $B_3 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Si T es una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x_1, x_2) = (x_1, 0).$$

La matriz asociada a T en la base canónica B_3 es $[T]_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Encuentre la matriz $[T]_{B_2}$.
b. Utilice la matriz de cambio de base $P_{B_2 \to B_3}$ (encontrada en Problema 1 inciso iii) para calcular $[T]_{B_2}$.

Ejercicio 6

Considera el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual a n ($P_n[x]$) y dos bases ordenadas β_1 y β_2 de dicho espacio vectorial. Si se quiere construir la matriz de cambio de base $M_{\beta_1 \to \beta_2}$ ¿Qué tamaño tendrá la matriz? ¿Por qué?

Ejercicio 7.

¿Qué entiendes por matriz cambio de base? Escribe tu definición de este concepto.

¿Dadas dos bases de un espacio vectorial de dimensión finita, siempre es posible definir la matriz cambio de base?

¿Dada una matriz cuadrada cualquiera A, siempre A representa una matriz cambio de base?

Figura 3.6. Entrevista respecto al concepto matriz de cambio de base

.

3.3.4.2 Aplicación de la entrevista

La entrevista fue video grabada y transcrita para un análisis más fino de los datos. Fue aplicada a seis estudiantes de la Universidad Industrial de Santander UIS (Colombia), de los cuales uno se encuentra cursando el programa de Licenciatura en Matemáticas y los demás el programa de Matemáticas. Estos estudiantes tomaron los cursos de Álgebra Lineal I y Álgebra Lineal II (en los anexos 2 y 3 aparecen los programas curriculares de dichos cursos respectivamente). La duración de la aplicación de la entrevista oscila en promedio entre 120 y 130 minutos.

3.3.4.3 Entrevista: Análisis a priori

A continuación presentamos el análisis de siete preguntas que conforman la entrevista. Así mismo exponemos una explicación de lo que buscamos en cada situación y de la o las posibles repuestas o argumentos que pueden desarrollar los estudiantes a través de las estructuras y los mecanismos que cada situación pueden generar.

Pregunta 1

Sea $V = \mathbb{R}^2$ el espacio vectorial definido sobre el campo $\mathbb{R}$ y sean:
$B_1 = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $B_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$, $B_3 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

i) Encuentre la matriz $P_{B_1 \to B_2}$
ii) Encuentre la matriz $P_{B_3 \to B_2}$
iii) Encuentre la matriz $P_{B_2 \to B_3}$
iv) ¿La base B_1 es igual a la base B_3? Justifica tu respuesta.
v) ¿La matriz $P_{B_1 \to B_2}$ es igual a la matriz $P_{B_3 \to B_2}$? Justifica tu respuesta.

Esta pregunta está asociada a una estructura acción de la matriz de cambio de base, como puede verse en la descomposición genética hipotética una concepción acción está asociada con el cálculo específico de la matriz cambio de base en particular con el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. En este caso el individuo debe determinar la importancia del orden de la base para calcular la matriz. Como puede verse en el problema las bases B_1 y B_3 están formadas por los mismos vectores en diferente orden; por tanto al comparar las matrices (item v.) el individuo puede analizar la importancia de dicho orden al comparar las columnas que determinan cada matriz.

Los puntos i), ii) y iii) buscan que los individuos realicen acciones específicas que los llevan a calcular cada una de las matrices solicitadas. Estas acciones requieren que un individuo exprese cada vector de la base de salida como combinación lineal de los vectores de la base de llegada. De tal manera que con una *concepción Acción* del vector coordenadas logre determinar cada una de las columnas de la matriz solicitada en cada ítem. Cabe destacar que si el individuo tiene una *concepción Proceso* de combinación lineal podrá en algunos de los casos propuestos determinar dichas columnas sin realizar cálculos específicos.

En la pregunta dos buscamos encontrar evidencias de la interiorización de las acciones. Para esto como consideramos en la descomposición genética preliminar, proponemos una situación que involucra el cálculo de la matriz de cambio de base del espacio vectorial $\mathbb{P}_2[x]$. A continuación planteamos el análisis de este problema.

Pregunta 2

Sean las bases $B_1 = \{ t_3, t_2, t_1 \}$ y $B_2 = \{q_0,\ q_1,\ q_2\}$ bases ordenadas del espació vectorial $\mathbb{P}_2[x]$, definido sobre $\mathbb{R}$. Donde $t_1 = 1, t_2 = x, t_3 = x^2, q_0 = 1 + 2x + x^2, q_1 = 2 + 9x,\ q_2 = 3 + 3x + 4x^2$.

a) Encuentre la matriz cambio de base B_1 a B_2.
b) Encuentre el vector de coordenadas de $[p]_{B_1}$ con $p = -1 + x$ y con ello calcule $[p]_{B_2}$.

En el problema se requiere la matriz de cambio de base $M_{B_1 \to B_2}$, pero ahora entre bases ordenadas del espacio $\mathbb{P}_2[x]$. Notemos que se dan los vectores de forma explícita en las bases pero los subíndices de los elementos de la base no están de manera usual, es decir, de la forma ascendente para el caso de la base de salida. Este hecho lo ponemos porque el individuo debe lograr gracias a su *concepción Proceso* de base ordenada, tomar el orden establecido en las bases y con ello proceder a encontrar la matriz de cambio de base. Si los estudiantes logran construir dicha matriz, diremos que pueden estar dando evidencias de una *concepción Proceso*. Recordemos que dicha concepción la asociamos en la descomposición genética hipotética cuando un individuo logra calcular las columnas de la matriz cambio de base independientemente de la forma de los vectores del espacio vectorial dado. Se espera que los individuos logren calcular dicha matriz, para posteriormente usarla para calcular el vector de coordenadas de un vector específico. Este problema expondrá a los estudiantes a reflexionar sobre cómo están relacionados los vectores de coordenadas con la matriz de cambio de base. Creemos que está reflexión es muy importante para la *interiorización* de las acciones; esto da paso a la estructura proceso, puesto que cuando se logre asimilar y reflexionar (no memorizar) esta relación, el estudiante estará en una *concepción Proceso* de la matriz de cambio de base.

En lo siguiente presentamos un análisis desde la perspectiva de la teoría, es decir, mostramos posibles razonamientos que pueden desarrollar los estudiantes al tratar de resolver el problema planteado.

Como los estudiantes han mostrado tener una *concepción Proceso* de base ordenada, esperamos que sean capaces de escribir cada vector de la base B_1 como combinación lineal de los elementos de la base B_2 (esto sin importar el orden en las bases). Una vez logren dicha combinación lineal, tendrán los escalares que conforman cada uno de los vectores coordenadas como columnas de la matriz de cambio de base. Como mencionamos en la descomposición genética este desarrollo está asociado con una *concepción Objeto* del vector de coordenadas. De tal forma que los escalares determinados en la combinación lineal son ahora vistos como las componentes de dicho vector y a su vez es visto como una columna de la matriz.

A continuación presentamos un camino mediante el cual un estudiante puede resolver el problema.

Solución.

Como B_2 es base es posible escribir cada vector de B_1 como combinación lineal. Existen $a, b, c \in \mathbb{R}$, tales que $x^2 = a(1 + 2x + x^2) + b(2 + 9x) + c(3 + 3x + 4x^2)$ de donde obtenemos $x^2 = (a + 2b + 3c) + (2a + 9b + 3c)x + (a + 4c)x^2$. Por tanto se tiene el siguiente sistema:

$$0 = a + 2b + 3c$$
$$0 = 2a + 9b + 3c$$
$$1 = a + 4c.$$

Resolviendo el sistema se obtiene que $a = 21,\ b = -3,\ c = -5$. Dichos valores determinan las coordenadas del vector x^2 en términos de la base B_2. Por tanto tenemos que el vector de coordenadas $[x^2]_{B_2} = \begin{bmatrix} 21 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$.

Haciendo algo análogo a lo anterior para los vectores x y 1 obtenemos los vectores de coordenadas $[x]_{B_2} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $[1]_{B_2} = \begin{bmatrix} -36 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$. Luego la matriz requerida es:

$$M_{B_1 \to B_2} = \begin{pmatrix} 21 & 8 & -36 \\ -3 & -1 & 5 \\ -5 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Presentamos otra vía por la cual un estudiante puede resolver el problema. Esta solución fue expuesta por parte de los estudiantes para el caso de espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ después de la recolección de datos del diagnóstico. En consecuencia creemos que podrá aparecer de manera natural en el desarrollo de la entrevista. La forma de proceder requiere total dominio de las estructuras que planteamos como iniciales para la construcción de la matriz de cambio de base. Puesto que con una *concepción Proceso* de base ordenada el estudiante podrá plantear como combinación lineal los vectores de una base en términos de la otra y como esto lo hacen para cada vector de la base de salida, entonces tendrán el mismo sistema igualado a cada uno de los vectores de donde resulta un tipo de matriz ampliada. El cual al llevar la parte de la izquierda de la matriz construida a la identidad, quedará del lado derecho la matriz de cambio de base buscada, es decir:

> En análisis a posteriori del diagnóstico hicimos una ilustración (figura 4.10) que muestra la forma de proceder por parte del estudiante. Basándonos en dicha ilustración procedemos a resolver el problema. Se pide calcular la matriz de cambio de base de $B_1 = \{x^2, x, 1\}$ y $B_2 = \{1+2x+x^2,\ 2+9x, 3+3x+4x^2\}$, es decir, $M_{B_1 \to B_2}$. Es posible escribir como columnas cada coordenada de los vectores de cada base para formar las matrices *base de llegada* y *base de salida,* es decir:
>
> $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
>
> Luego se procede a reducir la matriz que se construyó con los elementos de la base de llegada a la matriz de identidad, de donde obtenemos:
>
> $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 21 & 8 & -36 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -2 & 9 \end{array}\right).$$
>
> Luego podemos concluir que la matriz de cambio de base requerida es:
>
> $$M_{B_1 \to B_2} = \begin{pmatrix} 21 & 8 & -36 \\ -3 & -1 & 5 \\ -5 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

En nuestro análisis a posteriori del diagnóstico sólo mencionamos el uso de este algoritmo pero no dimos una explicación matemática. A continuación, mostraremos en qué argumentos matemáticos se sustenta esta forma de resolver el problema de la matriz de cambio de base.

> **Teorema**. Sean $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ y $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bases para un espacio vectorial V. Sean $B = [[u_1]_\varepsilon \cdots [u_n]_\varepsilon]$ y $C = [[v_1]_\varepsilon \cdots [v_n]_\varepsilon]$, donde ε es cualquier base para V. Entonces la reducción por renglón aplicada a la matriz aumentada $[C|B]$ de n x $2n$ produce
>
> $$[C|B] \to [I|M_{\beta \to \mathcal{C}}].$$
>
> (Poole, 2011, p. 488)

Demostración.
Sea $M_{\beta \to \mathcal{C}}$ la matriz de cambio de base de β a $\mathcal{C}$. Por definición la i-ésima columna de $M_{\beta \to \mathcal{C}}$ es la siguiente

$$[u_i]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}.$$

Esto quiere decir que $u_i = a_{1i}v_1 + a_{2i}v_2 + \cdots + a_{ni}v_n$. Ahora si $\mathcal{E}$ es cualquier base para V entonces las coordenadas del vector u_i respecto a la base $\mathcal{E}$ son:

$$[u_i]_{\mathcal{E}} = [a_{1i}v_1 + a_{2i}v_2 + \cdots + a_{ni}v_n]_{\mathcal{E}} = a_{1i}[v_1]_{\mathcal{E}} + a_{2i}[v_2]_{\mathcal{E}} + \cdots a_{ni}[v_n]_{\mathcal{E}}$$

Escribiendo esto en forma matricial como

$$[[v_1]_{\mathcal{E}}\ [v_2]_{\mathcal{E}}\ \cdots [v_n]_{\mathcal{E}}] \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} = [u_i]_{\mathcal{E}}.$$

Notemos que esto ahora se puede resolverse aplicando la eliminación de Gauus-Jordan a la matriz aumentada

$$[[v_1]_{\mathcal{E}}\ [v_2]_{\mathcal{E}}\ \cdots [v_n]_{\mathcal{E}} | [u_i]_{\mathcal{E}}].$$

Al resolver el sistema de ecuaciones sólo encontraríamos la i-ésima columna de $M_{\beta \to \mathcal{C}}$, así tendremos n de tales sistemas de ecuaciones, una para cada columna de $M_{\beta \to \mathcal{C}}$ pero la matriz de coeficientes $[[v_1]_{\mathcal{E}}\ [v_2]_{\mathcal{E}}\ \cdots [v_n]_{\mathcal{E}}]$ es la misma en cada caso. Por tanto, se puede resolver todos los sistemas simultáneamente al reducir por renglón la matriz aumentada de n x $2n$

$$[[v_1]_{\mathcal{E}}\ [v_2]_{\mathcal{E}}\ \cdots [v_n]_{\mathcal{E}} | [u_1]_{\mathcal{E}}\ [u_2]_{\mathcal{E}}\ \cdots\ [u_n]_{\mathcal{E}}].$$

Ahora como $\mathcal{C}$ es base entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente, también lo es $\{[v_1]_{\mathcal{E}}\ [v_2]_{\mathcal{E}}\ \cdots [v_n]_{\mathcal{E}}\}$ por Teorema 6.7[4] Por lo tanto, la matriz cuyas columnas son $[v_1]_R\ [v_2]_R\ \cdots [v_n]_R\}$ tiene la matriz identidad I de n x n para su forma escalonada reducida por renglón, por el teorema fundamental. Por tanto la eliminación de Gauus-Jordan necesariamente producirá cada una de las columnas de la matriz de cambio de base, es decir:

$$[C|B] \to [I|M_{\beta \to \mathcal{C}}].$$

Si B_c es la base estándar del espacio vectorial de dimensión finita dado, este método es particularmente fácil de usar, puesto en dicho caso $B = M_{B \to \mathcal{E}}$ y $C = M_{B \to \mathcal{E}}$. Intuitivamente esto es;

[4] Teorema 6.7. Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base para un espacio vectorial V y sean $u_1, u_2, \dots, u_k$ vectores en V. Entonces $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ es linealmente independiente en V y si y sólo sí $\{[u_1]_B, [u_2]_B, \dots, [u_k]_B\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$. (Poole, 2011, p. 470).

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un campo K, consideremos dos bases ordenadas $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ y sea la base B_c la base canónica de V. Supongamos que tenemos el problema de calcular la matriz de cambio de base de la base B a la base B_1 es decir $M_{B\to B_1}$. Veamos la siguiente imagen:

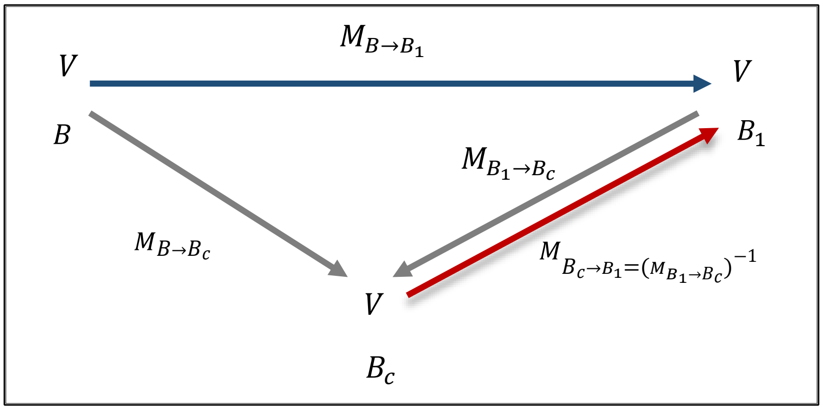


Figura 3.7. Diagrama conmutativo para calcular la matriz de cambio de base.

El diagrama anterior muestra una manera de calcular la matriz de cambio de base $M_{B\to B_1}$ en el cual usamos a la base canónica como un puente que conectara a las bases ordenadas B y B_1. Notemos que las matrices de cambio de base de B y B_1 hacia la canónica son $M_{B\to B_c}$ y $M_{B_1\to B_c}$ respectivamente. Además notemos que si $M_{B_1\to B_c}$ es la matriz de cambio de base de B_1 a B_c entonces la matriz inversa de dicha matriz es el cambio de base; de la base B_c a B_1, es decir: $\left(M_{B_1\to B_c}\right)^{-1} = M_{B_c\to B_1}$. Por lo tanto el diagrama ilustra que: $M_{B\to B_1} = \left(M_{B_c\to B_1}\right)\left(M_{B\to B_c}\right)$.

Para dar respuesta a la parte b) del problema. Primero un estudiante puede calcular $[p]_{B_1}$ con $p = -1 + x$, como B_1 es base ordenada, existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que;

$$-1 + x = a(x^2) + b(x) + c(1)$$

de donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones: $-1 = c$, $1 = b$, $0 = a$

Luego entonces $[p]_{B_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Luego para calcular $[p]_{B_2}$ usamos el hecho que cumple la matriz de cambio de base $M_{B_1\to B_2}$, es decir:

$$[p]_{B_2} = M_{B_1\to B_2}[p]_{B_1}.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$[p]_{B_2} = \begin{pmatrix} 21 & 8 & -36 \\ -3 & -1 & 5 \\ -5 & -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ -6 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Problema 3

Sean $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ bases ordenadas para un espacio vectorial V y suponga que $a_1 = 4b_1 - b_2$, $a_2 = -b_1 + b_2 + b_3$ y $a_3 = b_2 - 2b_3$.

a) Encuentre la matriz de cambio de base de A a B.

b) Encuentre $[x]_B$ para $x = 3a_1 + 4a_2 + a_3$.

(Lay, 2007, p.276)

Este problema lo hemos relacionado con una concepción Proceso de la matriz de cambio de base. Las bases A y B dadas de forma en que los vectores están de manera genérica o generales, no permite que el estudiante sólo realice cálculos. El individuo debe de reflexionar sobre los elementos que conforman la matriz cambio de base. Es decir, sobre qué representan las columnas de una matriz de cambio de base. Creemos que si el estudiante a construido una *concepción Proceso* de base ordenada entenderá que cada vector de la base A ya está escrito como combinación lineal de los vectores de la base B, y con su *concepción Objeto* del vector de coordenadas el individuo podrá establecer que esas coordenadas forman una columna de la matriz de cambio de base. Notemos que el dinamismo de esta estructura se da inevitablemente, puesto que se está pensando en la matriz en función de cada una de sus columnas.

Con el inciso b) buscamos que el estudiante relacione las coordenadas de un vector escrito en dos bases diferentes con la matriz de cambio de base. De igual forma esperamos la interiorización de las acciones específicas, por ejemplo: el estudiante deduce las coordenadas del vector x en términos de la base A esto lo puede lograr por su *concepción Proceso* de base ordenada y toma esas coordenadas como el vector de coordenadas de x escrito en la base A y con ello puede reflexionar sobre cómo están o podrían estar relacionados los vectores de coordenadas $[x]_B, [x]_A$. Una posible solución (Anexo 1, problema B).

Problema 4

Consideremos la base $B_1 = \{p_0, p_1, p_2\}$ ordenada de $\mathbb{R}_2[x]$ formada por los polinomios:

$p_0(x) = 1$, $p_1(x) = 1 + x$ y $p_2 = (1 + x)^2$ y sea la matriz: $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Encuentre los polinomios de la base ordenada $B_2 = \{q_0, q_1, q_2\}$, tal que P sea la matriz cambio de base de B_1 a B_2.

Esta situación necesita de una *concepción Objeto* que describimos en nuestro análisis teórico a partir de las acciones específicas sobre el concepto matriz de cambio de base. En este caso el individuo deberá aplicar una acción específica a la matriz P que es un cambio de base de B_1 a B_2, al calcular la matriz inversa P^{-1}. Posterior a ello debe regresar al proceso de matriz de cambio de base para deducir que las columnas de P^{-1} son las coordenadas de los vectores de la base B_2 escritos como combinación lineal de los vectores de la base B_1, así pues basara su reflexión ahora en las columnas de dicha matriz P^{-1}. Ese dinamismo lo podrá desarrollar necesariamente si ha construido una *concepción Proceso* de la matriz de cambio de base. Y por tanto con su *concepción Proceso* de base ordenada podrá deducir quiénes son los vectores buscados.

Problema 5

Sea $V = \mathbb{R}^2$ el espacio vectorial definido sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y sean:

$B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $B_3 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ y sea T un operador lineal sobre $\mathbb{R}^2$ definido por $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ la matriz asociada T en la base canónica B_3 es:

$[T]_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Encuentre la matriz $[T]_{B_2}$.
b) Utilice la matriz de cambio de base $P_{B_2 \to B_3}$ (encontrada en **Problema 1** inciso iii) para calcular $[T]_{B_2}$.

Solución.

Para resolver el a) se pide calcular la matriz asociada a T en la base B_2, luego aplicando T a cada uno de los vectores de B_2 obtenemos:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}.$$

Luego calculando las coordenadas de los vectores encontrados respecto a la base B_2, es decir:

$$\left[T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_{B_2}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}_{B_2}$$

$$\left[T\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right]_{B_2}=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}_{B_2}.$$

Estas coordenadas representa las columnas de la matriz asociada a T requerida, es decir:

$$[T]_{B_2}=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&2\end{pmatrix}.$$

Para resolver el inciso b) sabemos que $[T]_{B_2}=M^{-1}[T]_{B_3}M$ con $M=P_{B_2\to B_3}$, luego como $P_{B_2\to B_3}$ es conocido, resta calcular M^{-1}, pero $M^{-1}=(P_{B_2\to B_3})^{-1}=P_{B_3\to B_2}$ entonces sustituyendo:

$$P_{B_2\to B_3}=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}, P_{B_3\to B_2}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$[T]_{B_3}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}[T]_{B_2}&=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\\&=\left[\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

En las dos formas de calcular la matriz asociada al operador lineal se llega al mismo resultado, la diferencia es que en el segundo inciso se pide al estudiante usar una forma más sofisticada, por así decirlo, en la cual tiene que relacionar la matriz asociada a un operador lineal con la matriz de cambio de base. Con este problema más allá determinar si logran o no resolver el problema, lo que buscamos es encontrar evidencia de la *estructura esquema* del concepto de estudio. Recordemos que en nuestra descomposición genética hipotética mencionamos que el nivel de esquema dependerá de la experiencia de cada uno de los individuos al relacionar la matriz cambio de base como un caso particular de la matriz asociada a una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita.

Las siguientes preguntas relacionan la dimensión del espacio vectorial dado con el orden (tamaño) que se espera obtener de la matriz de cambio de base. Esta pregunta hará que los estudiantes reflexionen un poco sobre dicha matriz. Analizando por ejemplo, que la dimensión de $\mathbb{R}^n$ es n y por tanto cualquier matriz que represente un cambio de base en él será una matriz $n \times n$; pero en el caso de los polinomios de grado menor o igual a n ($\mathbb{P}_n[x]$), una matriz de cambio de base dentro de este espacio será de tamaño $n + 1 \times n + 1$. Estas son características de la matriz y por tanto las asociamos con una estructura objeto del concepto matriz de cambio de base.

Esperamos que los estudiantes con una *concepción Proceso* de base ordenada, puedan dar bases ordenadas conocidas y determinar la dimensión en cada uno de los espacios vectoriales. Mediante una reflexión sobre las características de los elementos involucrados y sin realizar cálculos específicos el estudiante tendrá que asociar la información quizá de la siguiente manera: como la matriz cambio de base se define sobre el mismo espacio vectorial finito, entonces si se consideran dos bases estas tienen que tener el mismo número de vectores. Ahora por cada vector definido en una base, dicho vector se tiene que escribir como combinación lineal de los elementos de la otra. Dado que el proceso se realiza para n vectores de la base de salida y se encuentran n coeficientes en la combinación lineal, los cuales resultan ser las coordenadas del vector de coordenadas (interiorización de acciones específicas).

Con una *concepción Objeto* del vector de coordenadas el estudiante tendrá claro que dicho vector es una columna de la matriz de cambio de base. Así pues se tendría que el orden de la matriz es $n \times n$ siendo n la dimensión del espacio vectorial dado.

Pregunta 6

Consideremos el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual a n ($\mathbb{p}_n[x]$) y dos bases ordenadas B_1 y B_2 de dicho espacio vectorial. Si se quiere construir la matriz de cambio de base $M_{B_1 \to B_2}$ ¿qué tamaño tendrá la matriz? ¿Por qué?

Solución.

Supongamos que B_1 y B_2 son bases ordenadas del espacio vectorial $\mathbb{P}_n[x]$, como la dimensión de $\mathbb{P}_n[x]$ es $n + 1$, una base conocida para este espacio vectorial es $\{1, x, \cdots, x^n\}$. Luego usando el hecho de que cualesquiera dos bases de un mismo espacio vectorial tiene el mismo número de elementos, entonces ambas bases B_1 y B_2 tienen n + 1 vectores. Ahora bien, como hay que escribir $n + 1$ vectores como combinación lineal de los elementos de la otra base, entonces se encuentran $n + 1$ escales que forman una columna para la matriz de cambio de base. Como este proceso se hace para $n+1$ vectores de la base, se tiene que la matriz es de tamaño $(n+1)$ x $(n+1)$.

$n+1$ Escalares forman una columna

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n+1)1} & \cdots & a_{(n+1)(n+1)} \end{pmatrix}_{(n+1) \text{ x } (n+1)}$$

$n+1$ Columnas, después de escribir los $n+1$ vectores como combinación lineal de la base de salida.

Recordemos que en nuestro análisis a priori mencionamos que un estudiante con una *concepción Proceso* es capaz de calcular la matriz de cambio de base para espacios de dimensión finita independiente del espacio dado.

Problema 7

¿Qué entiendes por matriz cambio de base? Escribe tu definición de este concepto.

¿Dadas dos bases de un espacio vectorial de dimensión finita, siempre es posible definir la matriz cambio de base?

¿Dada una matriz cuadrada cualquiera A, siempre A representa una matriz cambio de base?

En esta última pregunta buscamos la definición matemática del concepto de estudio. A diferencia de la pregunta del diagnóstico en donde sólo buscábamos la idea que tiene el estudiante de la matriz de cambio de base. Las otras dos preguntas las planteamos con la intensión de establecer una reflexión sobre las condiciones esenciales para la existencia de la matriz de cambio de base y que converjan a reflexiones como considerar a los cambio de base como el conjunto de todas las matrices cuadradas e invertibles.

Capítulo 4

4 ANÁLISIS DE DATOS

En este capítulo se presenta el análisis de los datos del diagnóstico y la entrevista a la luz de la descomposición genética. Para esto se inicia con el análisis de las estructuras previas encontradas en el trabajo de los estudiantes para dar inicio al estudio de las estructuras y mecanismos mentales que se asocian con la construcción de la matriz de cambio de base.

4.1 Análisis de los datos obtenidos en el diagnóstico

Los datos obtenidos a partir del análisis del diagnóstico los analizamos con base en los requisitos previos planteados en la descomposición genética hipotética para iniciar con la construcción del concepto matriz de cambio de base. Así mismo tomando nuestro análisis a priori mostramos evidencia de las respuestas por parte de los estudiantes que no fueron consideradas en dicho análisis y verificamos las que esperábamos. Después de haber analizado las respuestas dadas por los veintiocho estudiantes presentamos evidencia de algunos de ellas.

Para organizar los datos usados abreviaciones del tipo **ES10**; en donde **ES10** significa estudiante número 10, en algunos casos. Para nombrar las imágenes usaremos **ES10.P3** Seguido del punto, **P3** denota el problema tres del diagnóstico, y seguido se denota al inciso al cual se refiere la respuesta por parte del estudiante, esto si el problema tiene más de uno. En el caso de las imágenes de la entrevista utilizaremos por ejemplo, **ES10.Pe3.i)**; en donde **ES10** significa estudiante 10. Seguido del punto, **Pe3** denota el problema tres de la entrevista, y seguido el inciso denota al cual se refiere la respuesta por parte del estudiante.

A continuación presentamos la evidencia encontrada y transcripciones del análisis a priori del diagnóstico que fundamentan nuestras observaciones.

4.1.1 Evidencia del vector de coordenadas

Para iniciar el camino hacia la construcción del concepto matriz de cambio de base, en nuestro análisis a priori sugerimos que un estudiante debe de tener dos requisitos previos: una *concepción Proceso* de base ordenada y *concepción Objeto* del vector de coordenadas. Particularmente en el problema uno de la prueba diagnóstico, consideramos que se pueden evidenciar estas estructuras. En la primera situación, encontramos evidencias en donde el estudiante dos realiza los procedimientos que habíamos planteado en el análisis a priori. En este caso, este estudiante da muestra de tener una *concepción Proceso* de base ordenada y una *concepción Objeto* del vector de coordenadas. Los procedimientos del **ES2** pueden verse específicamente en las siguientes imágenes.

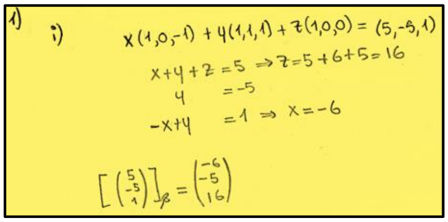


Figura 4.1. Procedimiento del ES2.P1.i).

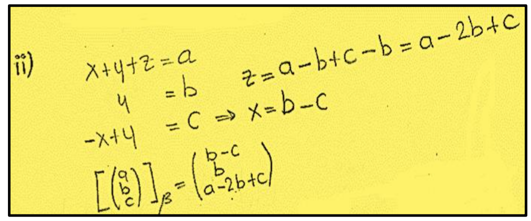


Figura 4.2. Procedimiento del ES2.P1.ii).

Esta forma de solución muestra evidencia clara de lo expuesto en nuestro análisis a priori y prevé que el estudiante tiene condiciones para iniciar la construcción del concepto de matriz de cambio de base.

Además también predecimos que si un estudiante sólo posee una concepción Acción de base ordenada, sólo será capaz de verificar o decidir si un vector en concreto puede o no ser escrito como combinación lineal de los elementos de la base. Por ejemplo, hay evidencia de ello en la resolución del **ES1**, puesto que para el caso concreto resulta relativamente sencillo. Pero para el caso que el vector está dado en forma general sólo plantea el vector como una combinación lineal de los vectores de la base, llega a simplificar pero sin plantear el sistema. Al parecer cuando el vector es dado en términos generales, es necesario haber interiorizado las acciones específicas realizadas sobre casos particulares, para comprender cuál es la pregunta en la expresión $(a, b, c) = (\alpha + \rho + \theta, \rho, -\alpha + \rho)$. Esto seguramente se relaciona con la necesidad de un tipo de construcción específica donde sea claro lo que varía y lo que se mantiene constante. En este caso, la necesidad de identificar cuáles son los escalares que hacen posible escribir la combinación lineal; esta es una característica propia de una estructura proceso (figura 4.3).

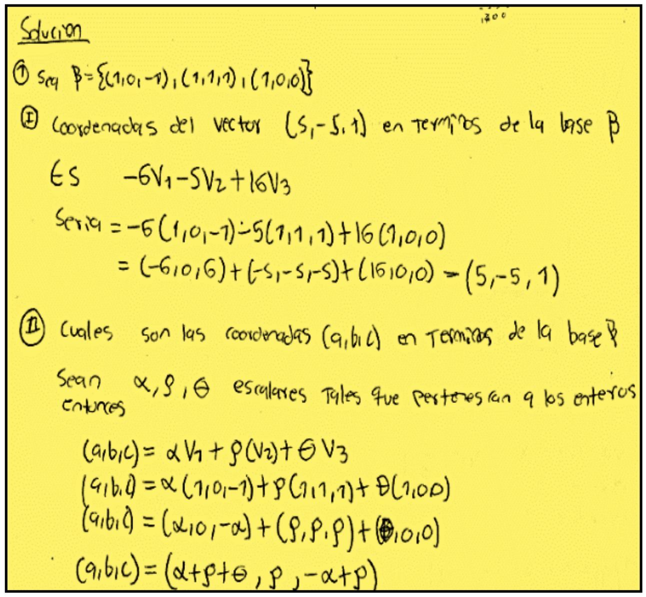


Figura 4.3. Procedimiento del ES1.P1.

Por otro lado en nuestro análisis a priori no contemplamos formas de resolución al problema 1 sin poseer los requisitos previos. Evidencia de esto, es la forma que procedieron los estudiantes 21 y 22.

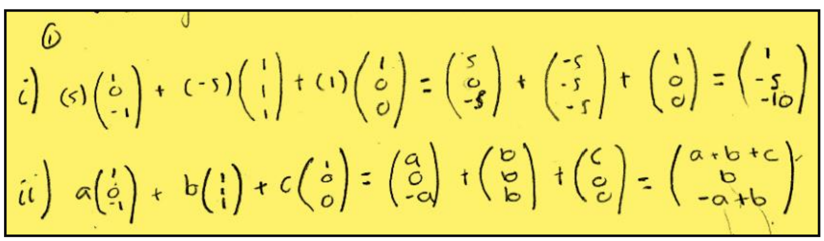


Figura 4.4. Procedimiento del ES21.P1.

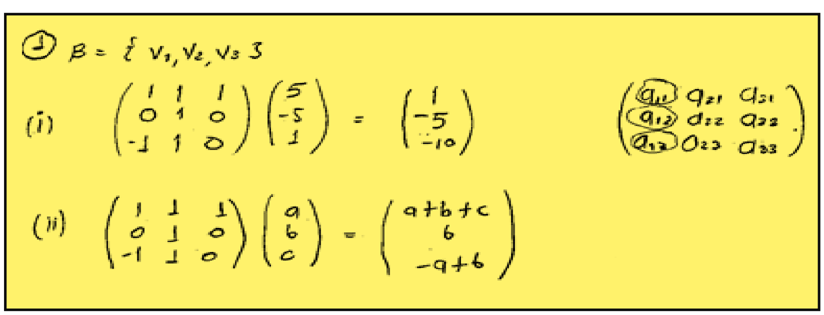


Figura 4.5. Procedimiento del ES22.P1.

Las soluciones expuestas por estos estudiantes tienen la misma esencia, forman una matriz con los vectores de la base y multiplican por el vector dado, el cual se quiere encontrar las coordenadas. Esta forma de razonar muestra la falta de requisitos previos, puesto que hay ausencia de lo que caracteriza a una concepción Acción de base ordenada puesto que no son capaces de determinar para un caso particular si el vector puede ser escrito como combinación lineal de los vectores de la base y falta de *concepción Objeto* del vector de coordenadas puesto que no consideran los escalares de la combinación lineal que generan al vector dado como un nuevo vector.

4.1.2 Una manera alternativa de resolver el problema uno de la prueba diagnóstico

La resolución de los estudiantes **ES9** y **ES10** consiste en utilizar la matriz asociada a un sistema de ecuaciones y procede a la solución mediante Gauss-Jordán y con ello dan solución a los incisos de la pregunta uno del diagnóstico (figura 4.6).

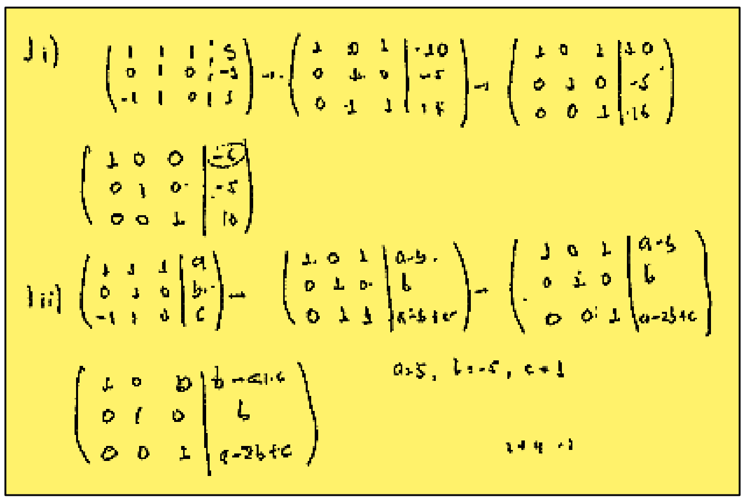


Figura 4.6. Procedimiento del ES9.P1.

En términos de la teoría podemos decir que el estudiante tiene una *concepción Objeto* de coordenadas de un vector y posiblemente piensan como un individuo con una *concepción Acción* del concepto base ordenada. La manipulación de ambos conceptos muestra total control en saber que transponer los vectores dados de la base como columnas, con ello obtiene el sistema asociado al sistema de ecuaciones que generan los elementos de la base y posterior a ello pone del lado derecho de la matriz ampliada, el vector del cual se quieren calcular las coordenadas. Este razonamiento requiere más investigación, podemos suponer las estructuras descritas. Pero de manera natural, es necesario hacer énfasis en otro tipo de situaciones en donde se evidencie el tipo de construcciones descritas respecto a esta situación. Esta forma de resolver el problema uno no fue propuesta en el análisis a priori véase la siguiente forma de responder a la pregunta por parte del estudiante (figura 4.7).

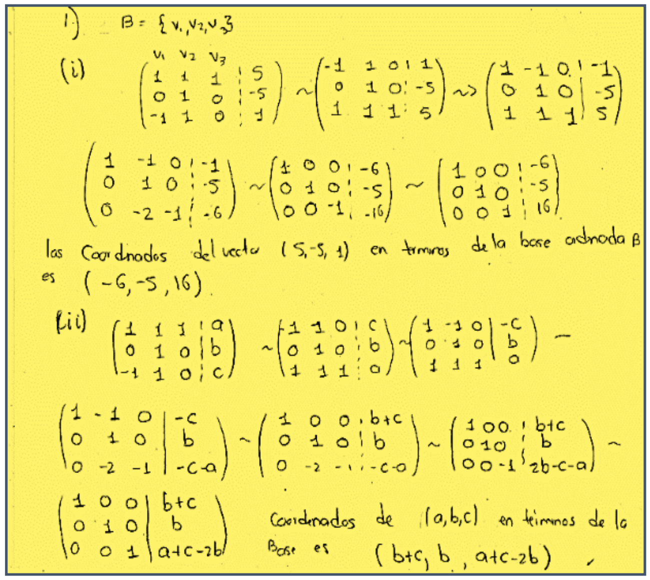


Figura 4.7. Procedimiento del ES10.P1.

A pesar de que el estudiante 10 comete un error aritmético en la imagen anterior, sólo analizamos su forma de razonar para dar el resultado al problema planteado.

En general la mayoría de estudiantes fueron capaces de responder correctamente al primer inciso mediante una de las dos maneras expuestas anteriormente con lo que nos dan evidencia de tener las estructuras necesarias descritas en el análisis a priori para iniciar la construcción del concepto matriz de base.

4.1.3 Relacionando los tipos de requisitos previos con la matriz de cambio de base

Después de analizar las diferentes respuestas por parte de los estudiantes respecto a la pregunta 2 del diagnóstico. Encontramos evidencia de nuestra posible forma de proceder por parte del estudiante para dar solución al problema, así como la confusión entre las matrices de cambio de base $M_{B\to B'}$ con $M_{B'\to B}$.

En la siguiente imagen mostramos evidencia por parte del **ES27** resolviendo el problema de la manera que fue propuesto en el análisis a priori, así encontró la matriz de cambio de base $M_{B\to B'}$.

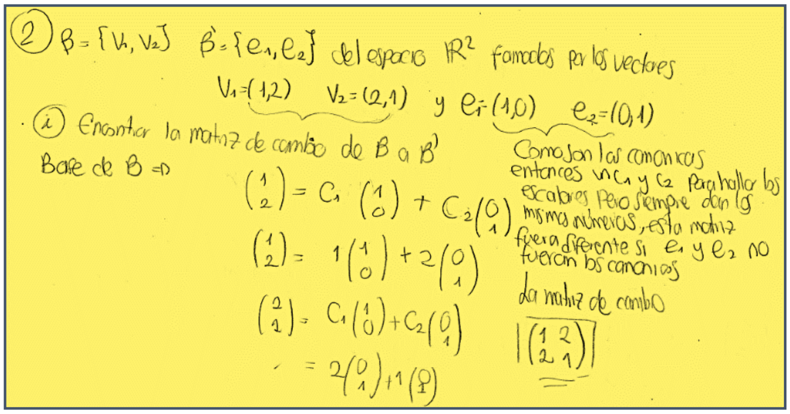


Figura 4.8. Procedimiento del ES27.P2.i).

El cálculo de la matriz de cambio de base de $M_{B' \to B}$ por parte del **ES27** a pesar de que calcula dos veces las coordenadas del mismo vector e_1 respecto a la base B, está procediendo como se planteó en el análisis a priori (figura 4.9).

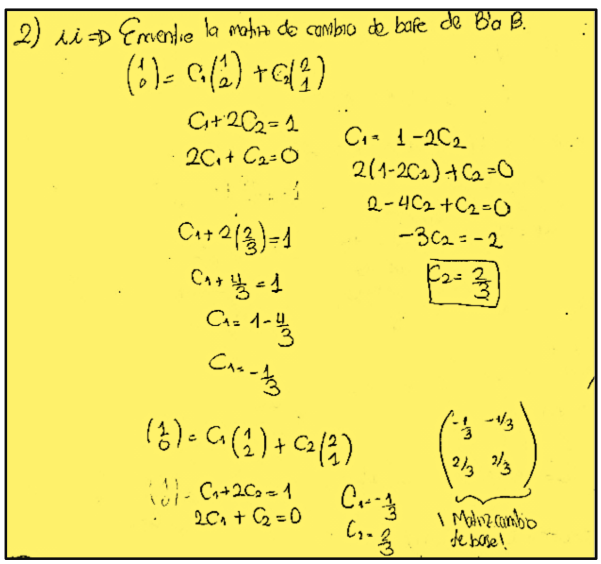


Figura 4.9. Procedimiento del.ES27.P2.ii).

Desde nuestra perspectiva teórica mencionábamos que un individuo mediante acciones específicas logra calcular la matriz de cambio de base, así como lo muestra la imagen anterior diríamos que el **ES27** está razonando con una *concepción Acción* de la matriz de cambio de base.

4.1.4 El método de Gauus-Jordan para calcular una matriz de cambio de base

Una de las soluciones por parte de algunos estudiantes sigue el razonamiento expuesto por **ES15**, es un algoritmo que se puede describir de la siguiente manera: se tienen las bases ordenadas B y B_1 y si se quiere calcular la matriz de cambio de base de B a B_1, es decir $M_{B\to B_1}$ se procede de la siguiente manera. Se construye la matriz ampliada tomando los vectores de las bases como las columnas, del lado izquierdo se pone la matriz construida con los vectores de la base B_1 y del lado derecho se pone la matriz construida con los vectores de la base B (figura 4.10).

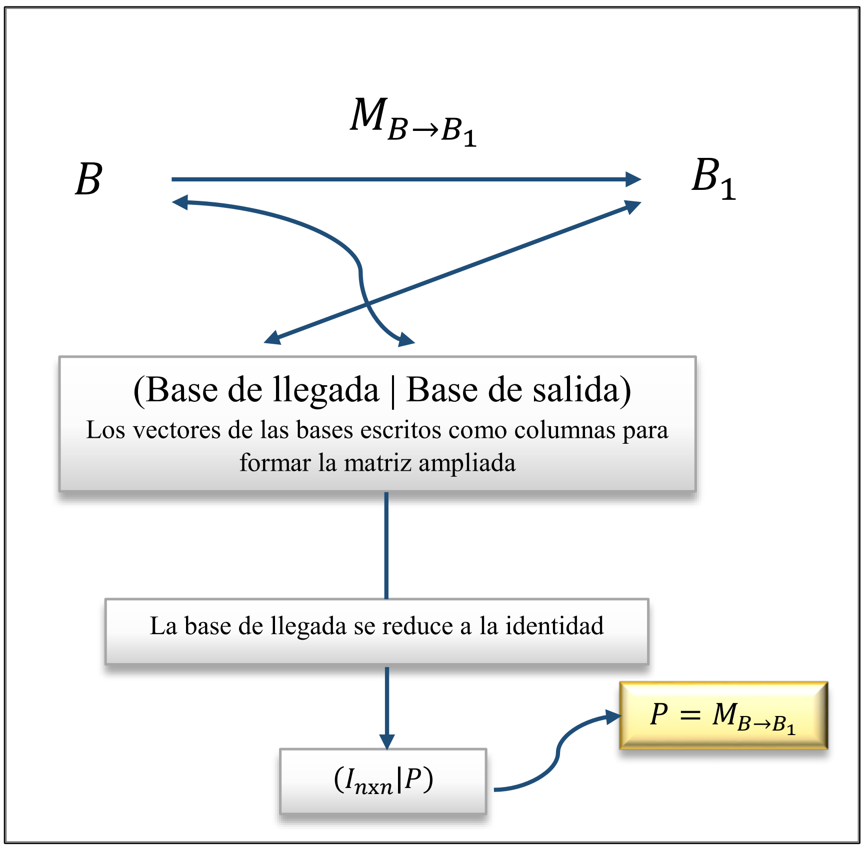


Figura 4.10. Algoritmo para encontrar la matriz de cambio de base de la base B a la base B_1.

Ya que se tiene dicha matriz se lleva a la forma escalonada reducida de tal forma que la identidad quede del lado de la base de llegada y la matriz que quede del lado derecho será la matriz de cambio de base $M_{B\to B_1}$, esta es la forma de dar solución al problema propuesto por parte del **ES15** (figura 4.11).

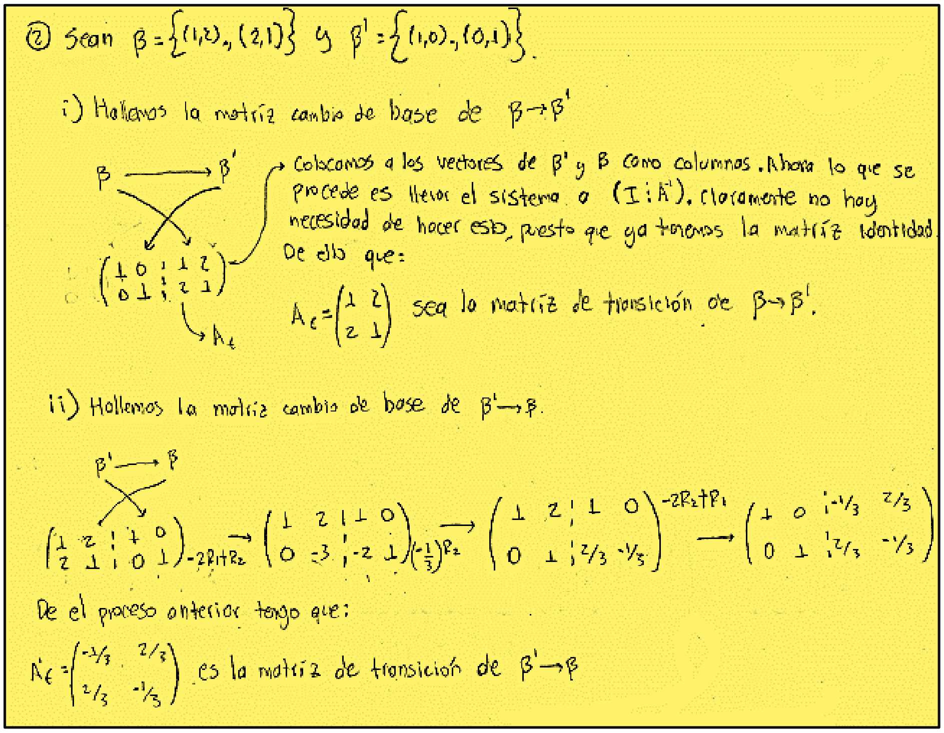


Figura 4.11. Procedimiento del ES15.P2.

Este algoritmo es una manera más global de hacer los cálculos para encontrar la matriz de cambio de base. Esto es una forma de proceder de los estudiantes la cual puede ayudar a la compresión del concepto de estudio. Aunque esta forma de calcular dicha matriz no está exenta de la confusión entre $M_{B\to B'}$ o $M_{B'\to B}$, por ejemplo, el **ES22** utiliza la forma de proceder descrita, se muestra evidencia de ello en la siguiente imagen. En donde el estudiante encuentra $M_{B'\to B}$ cuando tenía que encontrar $M_{B\to B'}$.

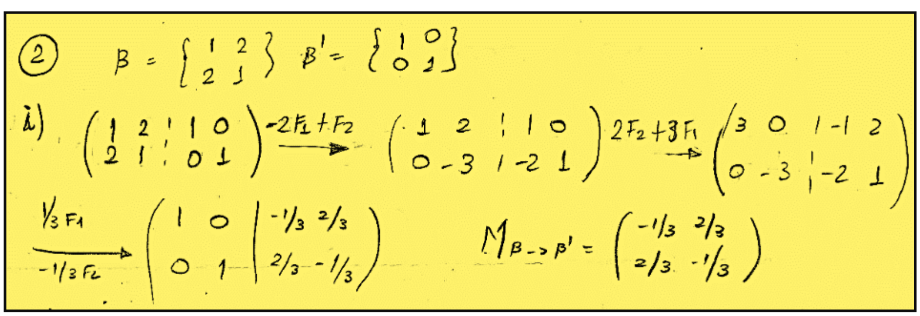


Figura 4.12. Procedimiento del ES22.P2.i).

Por otro lado, advertimos de la posible confusión entre la matriz $M_{B\to B'}$ y la matriz $M_{B'\to B}$. En la respuesta del estudiante **ES13** ante el problema dos del diagnóstico puede verse este tipo de confusión con la matriz, véase la siguiente forma en la que procedió el estudiante (figura 4.13).

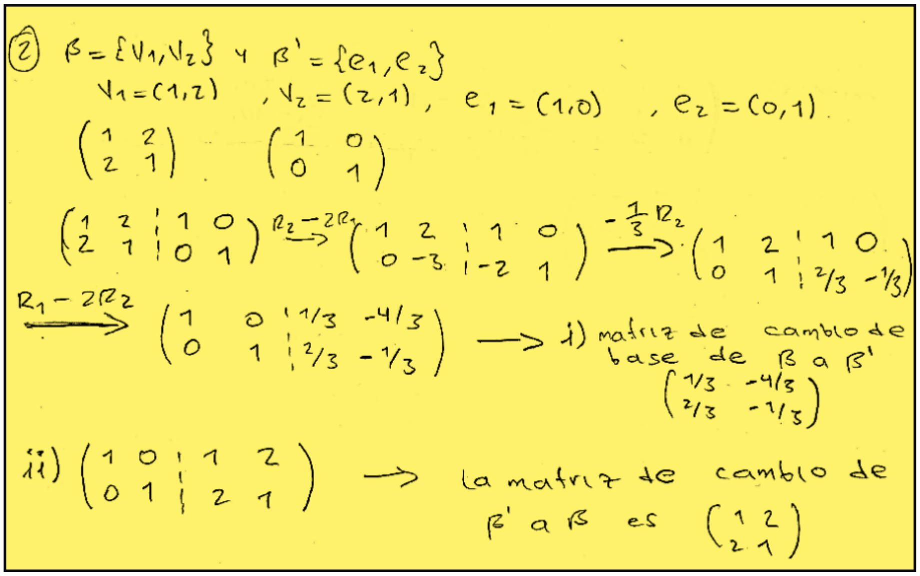


Figura 4.13 Procedimiento del ES13.P2.

En términos de nuestra perspectiva teórica podríamos decir que este tipo de confusión se puede dar porque no sean interiorizado las acciones específicas. Puesto que, no logra establecer *la relación que hay entre la matriz encontrada y las columnas de dicha matriz,* este es un claro ejemplo en donde se muestra la independencia del algoritmo con una estructura mental más sofisticada. Expliquemos más a detalle esta interesante situación.

El **ES13** construye dos matrices al considerar los vectores de las bases B, B' como vectores columnas, es decir: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Su algoritmo sugiere hacer una matriz aumentada en donde coloque en la parte izquierda y derecha las matrices anteriores, esto es:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

El estudiante sabe que al reducir la parte izquierda a la identidad, entonces en la parte derecha tendrá una matriz de cambio de base. Es claro que esta forma de proceder por parte del estudiante como algoritmo está bien ejecutada. Puesto que encuentra una matriz de cambio de base. Pero el estudiante no está interiorizando que las columnas de la matriz que obtiene son precisamente las coordenadas de los vectores de la base B', escrito como combinación lineal de los vectores de la base B. Por lo que confundió en ambos incisos la matriz requerida.

En general este problema de calcular la matriz de cambio de base, a pesar de ser para bases de un espacio vectorial real de dimensión dos, causó mucha dificultad en los estudiantes, puesto que al parecer no sean interiorizado las acciones específicas y eso da lugar a construir matrices de cambio de base, pero no las pedidas.

4.1.5 En busca de los requisitos previos o una concepción de la matriz de cambio de base

En el problema tres del diagnóstico mencionábamos que contenía información de más, y esperábamos que el estudiante de alguna manera no se dejara llevar por ello y trataran de usar la igualdad $[v]_B = M_{B'\to B}[v]_{B'}$. Encontramos en: **ES2, ES15, ES16** y **ES26** evidencia de que existe, tanto los requisitos previos así como algún tipo de concepción respecto a la matriz de cambio de base. Para ser más específicos podríamos decir que los estudiantes están reflexionando posiblemente con una *concepción objeto* del concepto matriz de cambio de base, puesto que ante los cálculos antepone una reflexión de una propiedad que cumple la matriz, es decir considera a la matriz como un todo y le aplica una acción específica, veamos el procedimiento del **ES15** (figura 4.14).

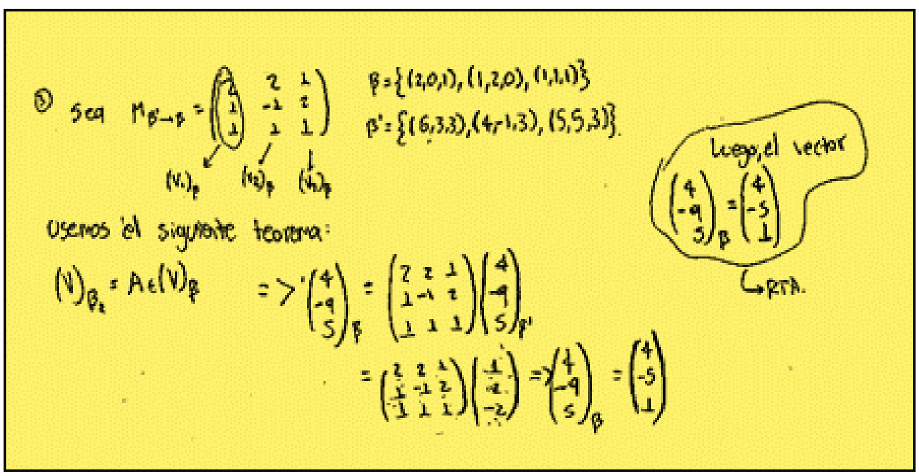


Figura 4.14. Procedimiento del ES15.P3.

En nuestro análisis a priori también contemplamos que un estudiante puede optar por escribir el vector requerido como combinación lineal de los vectores de la base dada y con ello dar respuesta a la pregunta. Encontramos evidencia por parte de un estudiante 16 que utiliza esta forma de razonar, no para dar solución al problema si no como comprobación de su resultado. Con lo que manifiesta total control de los requisitos previos y de algún tipo de concepción de la matriz de cambio de base (figura 4.15).

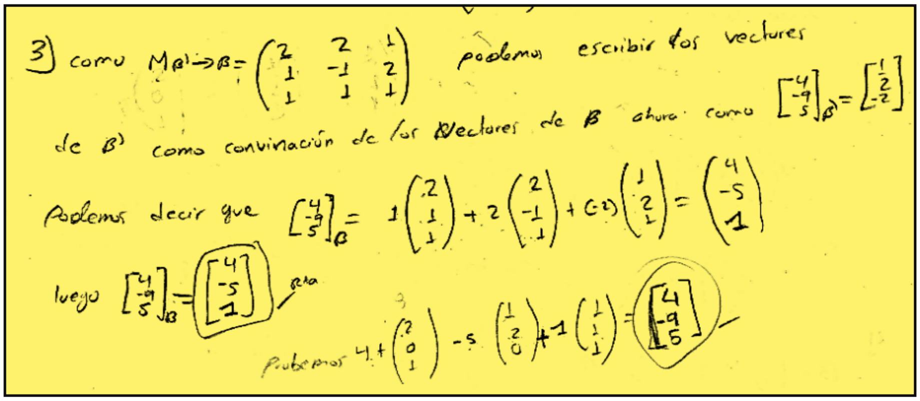
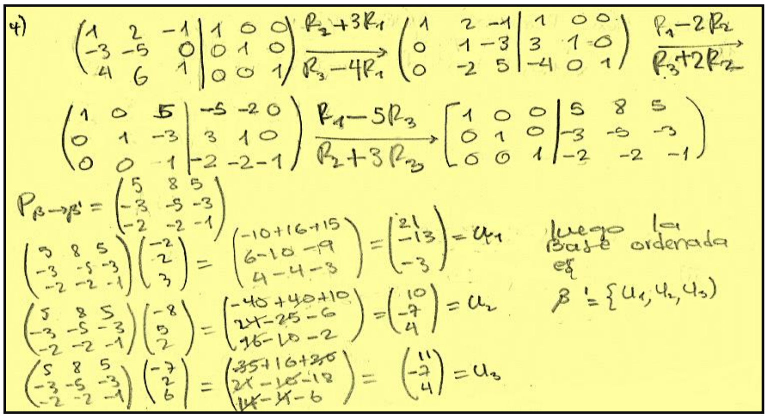


Figura 4.15. Procedimiento del ES16.P3.

4.1.6 Relacionando los requisitos previos con una concepción de la matriz de cambio de base (problema 4 del diagnóstico)

Este problema exige que las concepciones de base ordenada y vector de coordenadas estén presentes, y se relacionen mutuamente como lo describimos en el análisis a priori. El **ES2** al tratar de responder a esta cuestión a pesar de haber mostrado una *concepción Proceso* de base ordenada y *concepción Objeto* del vector de coordenadas, no logra relacionar estos dos conceptos para dar solución: sin embargo da evidencia de conocer que si tiene la matriz de cambio de base $P_{B'\to B}$ entonces su inversa es $P_{B\to B'}$, con ayuda de eso establece que el producto de $P_{B\to B'}\, v_i = u_i$ con $i = 1, 2,3$ y así encuentra quienes son los vectores de la base B'. El razonamiento de este individuo pasa por desadvertido la importancia de las columnas de la matriz de cambio de base, aunque la idea de calcular la matriz inversa y a través de ella y calcular los vectores de la base pedida no la consideramos en nuestro análisis a priori (figura 4.16).



4) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-4R_1]{R_2+3R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+2R_2]{R_1-2R_2}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2+3R_3]{R_1-5R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right)$

$P_{\beta\to\beta'} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 \\ -3 & -5 & -3 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

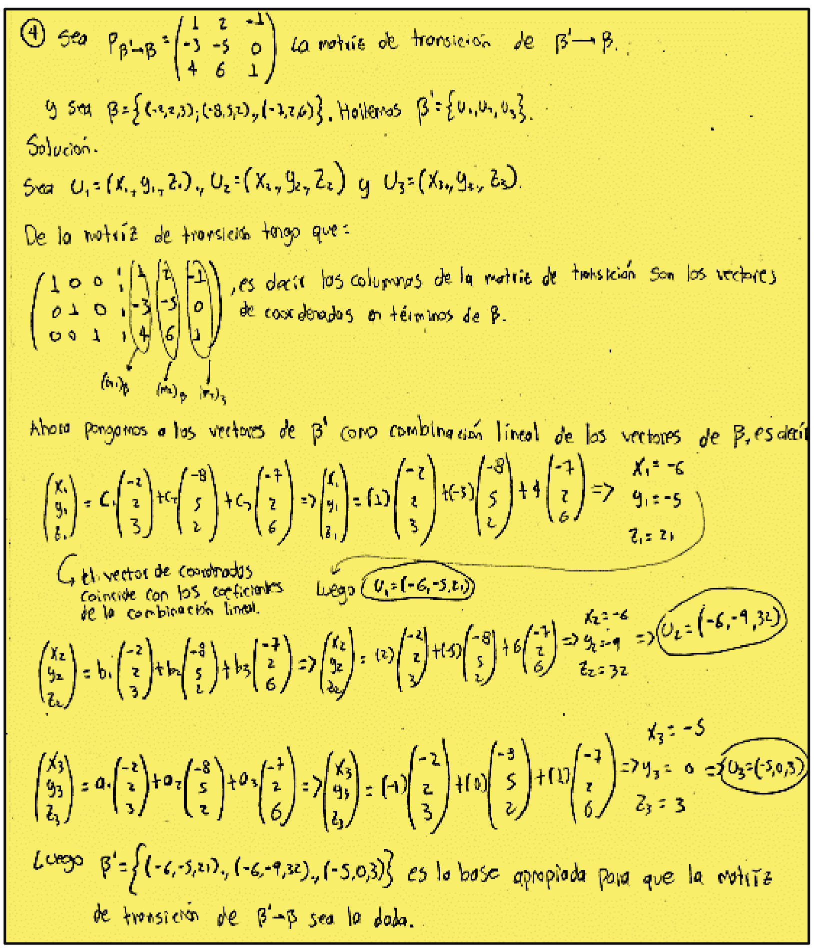
$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 \\ -3 & -5 & -3 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10+16+15 \\ 6-10-9 \\ 4-4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix} = u_1$ Luego la Base ordenada es

$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 \\ -3 & -5 & -3 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40+40+10 \\ 24-25-6 \\ 16-10-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} = u_2$ $\beta' = \{u_1, u_2, u_3)$

$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 \\ -3 & -5 & -3 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35+16+30 \\ 21-10-18 \\ 14-4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} = u_3$

Figura.4.16. Procedimiento del ES2P4.

Además de los requisitos previos en el análisis a priori advertimos que era necesario una *concepción Proceso* del concepto matriz de cambio de base. En la solución de este estudiante **ES15** da evidencia de ello. La solución respecto a este problema se muestra en la siguiente imagen.



④ Sea $P_{\beta'\to\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de transición de $\beta' \to \beta$.

y sea $\beta = \{(-2,2,3);(-8,5,2),(-7,2,6)\}$. Hallemos $\beta' = \{u_1, u_2, u_3\}$.

Solución.

Sea $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ y $u_3 = (x_3, y_3, z_3)$.

De la matriz de transición tengo que:

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 1 \end{array}\right)$, es decir los columnas de la matriz de transición son los vectores de coordenadas en términos de β.

$(u_1)_\beta$ $(u_2)_\beta$ $(u_3)_\beta$

Ahora pongamos a los vectores de β' como combinación lineal de los vectores de β, es decir

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = (1)\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $x_1 = -6$, $y_1 = -5$, $z_1 = 21$

El vector de coordenadas coincide con los coeficientes de la combinación lineal.

Luego $u_1 = (-6, -5, 21)$

$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = b_1\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + b_3\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = (2)\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-5)\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $x_2 = -6$, $y_2 = -9$, $z_2 = 32$ $\Rightarrow u_2 = (-6, -9, 32)$

$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (0)\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + (1)\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $x_3 = -5$, $y_3 = 0$, $z_3 = 3$ $\Rightarrow u_3 = (-5, 0, 3)$

Luego $\beta' = \{(-6,-5,21),(-6,-9,32),(-5,0,3)\}$ es la base apropiada para que la matriz de transición de $\beta' \to \beta$ sea la dada.

Figura 4.17. Procedimiento del E15.P4.

De igual forma mostramos que el **ES20** manifiesto que saber que representa las columnas de la matriz dada, es decir, parte de saber que representan las columnas de una matriz de cambio de base (figura 4.18).

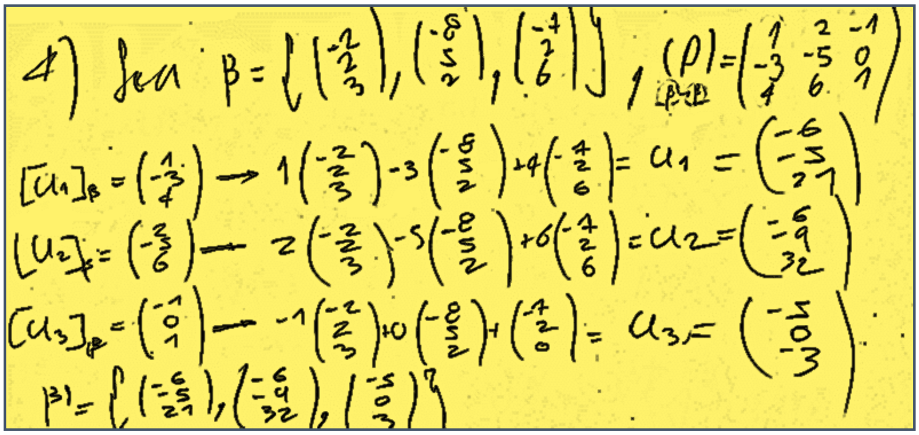


Figura 4.18. Procedimiento del ES20.P4.

Lo expuesto por **ES15** y **ES20** es muy importante para nosotros puesto que esta forma de razonar nos ayudara a detallar el mecanismo *interiorización* dado que muestran total control en saber que representa cada columna de la matriz, consideraremos estas importantes ideas a la hora de describir dicho mecanismo.

En la pregunta cinco del diagnóstico no pedimos la definición del concepto de estudio, pero si se le pedía al estudiante que expresara lo que entendía de dicho concepto.

Pregunta 5

¿Qué entiende por matriz de cambio de base?

A continuación mostramos evidencia de lo que los estudiantes consideran como matriz de cambio de base. Referente a su noción del concepto de estudio el estudiante **ES4** ve a la matriz de cambio de base como un instrumento el cual cumple determinada función.

ES4

"Para mí, es una ayuda para efectuar una función que vaya de una base a otra solamente con hacer algunos cálculos"

Otra idea manifestada por parte de los estudiantes es considerar a la matriz de cambio de base entendida como una función.

> **ES9**
> "Es una función lineal que mapea elementos de un espacio de salida a uno de llegada"

Otra idea es ver a la matriz como aquella que es igual a su inversa, esto lo expuso el **ES13** en su respuesta y no fue considerada en el análisis a priori. Puesto que esperábamos respuestas más descriptivas que relacionarán la función principal de dicha matriz.

> **ES13**
> "la matriz de cambio de base es aquella para la cual las matrices coinciden en su inversa"
> **ES16**
> "La matriz de cambio de base es la matriz inversa a la base y es la matriz que nos ayuda a encontrar las coordenadas de cierto vector como combinación de los vectores da la base dada"

Mostramos evidencia de las ideas expuestas por los estudiantes, la cual se asemeja mucho a la que esperábamos.

> **ES15**
> "La matriz cambio de base es un mecanismo para poner a los vectores de una base en términos de otra base dada. Dicha matriz es de mucha ayuda pues nos proporciona los escalares de todas las combinaciones lineales que necesitamos para poner los vectores en términos de la otra base"
>
> **ES26**
> "Matriz de cambio de base, es aquella que, teniendo dos bases β' y β, me permite pasar un vector en base β a un vector en base β', es decir, esa matriz permite el cambio de las coordenadas de un vector en términos de la base ordenada β, a términos de la base ordenada β', y viceversa."
>
> **ES28**
> "Es la matriz que me permite transformar un vector expresado en cierta base en otra nueva base"
>
> **ES2**
> "Si $T[x] = A[x]$ donde $A = [T]_{B \to B'}$ para algunos B, B' que generan es decir
> Sea una T, lineal $\ni L(V_{B'}^{m}, W_{B}^{n})$ donde $gen\, B = V \wedge gen\, B' = W$. Una matriz de transformación es una matriz que al multiplicarla por un elemento de V me da un único elemento en W donde es $dim\, V = m \wedge \dim W = m \Rightarrow A$ es de m x m"

Notemos el esfuerzo de **ES2** para dar su definición de la matriz cambio de base de manera muy formal, más aun, trata de definirla como una matriz de transformación. Supondremos que intenta definir a la matriz de cambio de base como un caso particular de la matriz asociada a una transformación lineal, lo cual es muy importante puesto que hipotéticamente creemos que así se puede iniciar la construcción del esquema de matriz de cambio de base.

Después de la aplicación y la recolección de datos del diagnóstico encontramos que los estudiantes dan evidencia de ser una buena muestra para implementar diseños de clase e iniciar un posible modelo cognitivo hacia la construcción de una *concepción objeto* del concepto matriz de cambio de base, puesto que la mayoría de ellos mostró poseer las estructuras previas y contestar adecuadamente la pregunta en la que relacionan las *concepción de base Ordenada* y *concepción Objeto del vector de coordenadas* (pregunta 1). Referente a las demás cuestiones del diagnóstico podemos concluir brevemente que un poco menos de la mitad de los estudiantes tienen un tipo de *concepción Acción* de la matriz de cambio base y que muy pocos logran interiozar las acciones específicas para dar paso a otra estructura mental.

Este diagnóstico exploratorio, referente a la pregunta donde se cuestiona sobre su idea de la matriz de cambio de base revela que algunos estudiantes la describen como una función, la cual no definen la regla de correspondencia ni el dominio y contradominio. Esto de considerar a la matriz de cambio de base como una función es de vital importancia, puesto que nos ayudará a describir el mecanismo encapsulación que explicaremos más adelante.

En nuestro afán de robustecer nuestra descomposición hipotética optamos por entrevistar aquellos estudiantes que fueron capaces de mostrar algún tipo de concepción de la matriz de cambio de base y además sus procedimientos de resolución dan evidencia de estar en vía de una estructura mental más allá de la *concepción Acción*.

4.2 Análisis de los datos obtenidos de la entrevista

Los datos obtenidos después de la aplicación de la entrevista son analizados con base en las construcciones propuestas en la descomposición genética hipotética en donde se busca identificar las estructuras que los estudiantes muestran sobre el concepto matriz de cambio de base, y analizar aquellas que evidencien y no fueron consideradas. En lo siguiente haremos una descripción de las construcciones que identificamos y analizamos. Para dar evidencia mostrando extractos de la transcripción de la entrevista, así como imágenes las cuales contienen las producciones realizadas por parte de los estudiantes.

4.2.1 La importancia del orden en las bases para calcular una matriz de cambio de base

La base ordena se pueden considerar como un concepto en el cual autores de libros de texto y maestros de cursos de Álgebra Lineal abusamos del uso de notación, es decir, dada una base B de un espacio vectorial V sin mayores preámbulos se le considera con el orden en el cual aparecen los vectores, se hace sólo una aclaración y se olvida recalcar esto lo cual se creé que a medida que el estudiante se ejercita al calcular el vector de coordenadas es el mismo estudiante que le dará sentido al orden de la base. La importancia del orden en la base para nuestro estudio es fundamental, puesto que para cada orden establecido se puede tener una matriz de cambio de base, de ahí que estableciendo el orden se establece la unicidad de dicha matriz (con un orden específico en sus columnas). Así que el estudiante al iniciar su construcción de la matriz de cambio de base, primeramente debe establecer el orden en las bases, con la concepción proceso de base ordenada el estudiante será capaz de realizarlo. Por ejemplo, el **ES20** cuando se le cuestiona sobre el orden de las bases, descarta el orden porque analiza las bases como conjuntos (Figura 4.19).

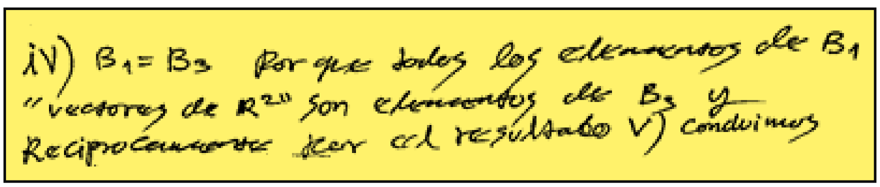


Figura 4.19. Procedimiento de ES20.Pe1.iv).

Más aun recalca su respuesta diciendo:

ES20: *Lo que quise decir que todos los que están acá están acá* (señala).

$$B_1 = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}, \qquad B_3 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ES20: *Salvo el orden, en conjuntos el orden no importa, se pueden hasta repetir y todo.*

Se deja al estudiante continuar a fin de que en la pregunta cinco del problema uno, confronte su razonamiento (véase figura 3.6) a continuación mostramos fragmentos de la entrevista.

ES20: *mmm ¿son iguales?... no porque... se puede mostrar por contradicción.*
E: ¿No, por qué... por qué no son iguales?

ES20: *Tendría que ser... dos matrices son iguales si y sólo si son iguales por componente a componente se podría demostrar por contradicción, supongamos que son iguales y se llega a la contradicción... o sea entonces si son iguales el -1 tendría que ser igual al 2 (escribe).*

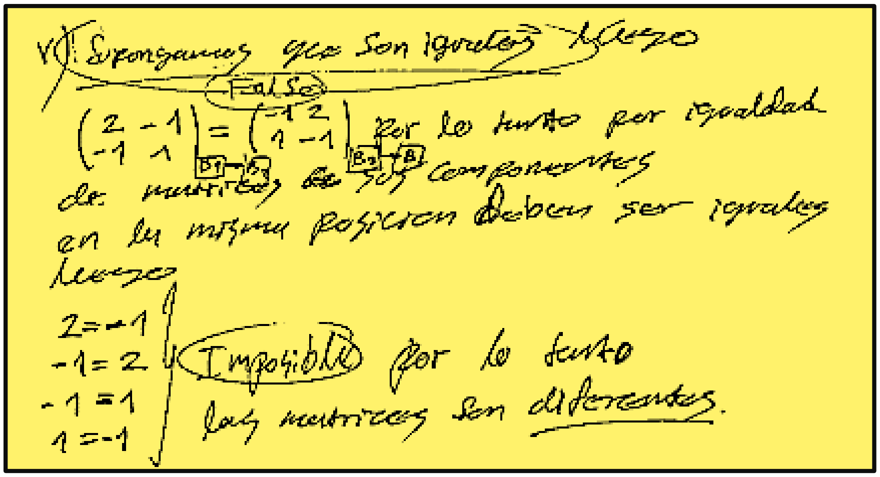
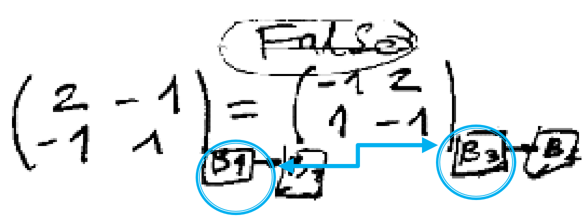


Figura 4.20. Procedimiento de ES20.Pe1.v).

El estudiante concluye que las matrices de cambio de base son distintas (figura 4.20), sin reflexionar en el orden de la base de salida como se predijo en el análisis a priori, así que se le cuestiona el hecho de llegar a matrices de cambio de base distintas si parte de bases ordenadas que menciona son iguales. Tras su propia reflexión, llega a la conclusión deseada. Pero se resiste a interiozar la importancia del orden en una base ordenada, mostramos evidencia en el siguiente fragmento.

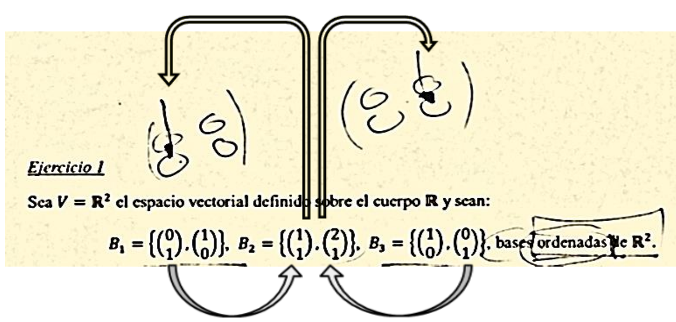
ES20: *Esta es de B_1 a B_2 y esta de B_3 a B_2* .
E: ¿Haber y quien es la base B_1?
ES20: B_1 es pues, la base canónica.
E: Es esta ¿Quién es la base B_3? En la pregunta cuatro tú me dijiste que estas bases eran iguales, entonces la pregunta que te quiero hacer.
ES20: *Porque las bases…*
E: Ahora si estas saliendo de una misma base que tú me dijiste, a la otra base. Estas dos bases llegan a esta ¿no? (señala B_2). ¿Por qué la matriz de cambio de base es distinta? (Señala las matrices $M_{B_1 \to B_2}$ y $M_{B_3 \to B_2}$).
ES20: *Claro si esto es igual a esto* (señala).



> ***ES20:*** *Y no estamos llegando a lo mismo ¿Por qué son distintas? Entonces, en álgebra sí importa el orden.*
>
> E: Ok. ¿Entonces esto tiene que ver a que llegas a matrices distintas?
>
> **ES20**: *En álgebra sí importa el orden, en conjuntos no importan el orden.*

El estudiante no queda muy convencido de que la diferencia entre una base y una base ordenada radica que en la segunda hay una sucesión definida en ella, es decir, se establece un orden en la base y así deben de considerarse los vectores con el orden establecido, el estudiante sólo considera a la base ordenada como un conjunto de vectores que cumplen ciertas propiedades. Pero al reflexionar nuevamente sobre sus propias ideas y la operatividad con la matriz de cambio de base, salen a la luz dos cosas importantes para nosotros: *la importancia del orden en la base*, *las acciones específicas* que realizó para calcular la matriz de cambio de base (véase el siguiente fragmento de la entrevista).

> E: ¿Por qué cuando calculas los cambios de base te dan distintos? Si se supone que estas bases son iguales (señala B_1, B_3). ¿Por qué cuando calculas de esta base a esta? (Señala de B_1 a B_2) te sale diferente de calcular de esta a esta. (Señala B_3 a B_2) ¿Por qué?
>
> **ES20**: *Porque primero yo consigo las componentes, o sea primero yo encuentro las componentes de este vector en esta base y ese va como la primera columna de la matriz de cambio (escribe). Mientras ese paso que acabe de hacer es el segundo paso que hago en la otra matriz de cambio o sea algo así (escribe).*



> E: Ok
>
> **ES20**: *Cuando en la primera matriz estoy encontrando la primera columna en ese mismo paso es como si estuviese encontrando la segunda columna de la otra matriz.*

Lo expuesto por **ES20** muestra la importancia del orden y cuál es la repercusión en el cálculo de la matriz de cambio de base y ratifica que una de las acciones específicas para su construcción del concepto matriz de cambio de base es tomar cada vector de la base de salida y escribirlo como combinación lineal de los vectores de la base de llegada, además menciona que las componentes que encuentre después de escribir los vectores en una base respecto a la otra base formaran la primera columna de dicha matriz. Según nuestra descomposición hipotética el estudiante empieza a mostrar evidencia de una concepción acción del concepto de interés.

A continuación, presentamos fragmentos de la entrevista del **ES28** en donde se le cuestiona sobre el orden en la bases; en la pregunta uno de la entrevista (figura 3.6), allí se evidenciaba una concepción proceso de base ordenada por parte de este estudiante.

ES28: *¿La base B_1 es igual a la base B_3? justifica tú respuesta. ¿ B_1 es igual a B_3? es que si afirmo que las bases son iguales entonces tendría que afirmar que la matriz de cambio son iguales porque están cambiando de la misma base a la misma base. Pero entonces si lo llevo a la práctica. Me tendría que resultar el mismo vector, es decir si yo tomo (escribe).*

t(v)

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a-b\\ -a+b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2b-a\\ a-b\end{pmatrix}$$

E: ¿Entonces?

ES28: *Entonces, está mal concluir que… pero es que sí tienen que ser la mismas bases, pero no dan los mismos… no pues si no es la misma matriz de transición es porque no es la misma base.*

E: A ver, ambas son bases y generan a $\mathbb{R}^2$ y además son linealmente independientes ¿qué más? ¿Tienen los mismos elementos?

ES28: *Sí, tienen los mismos elementos, ha pero el primer elemento de esta base… no pues, la otra también… no sé qué el orden que… de esos vectores en esa base.*

E: Bueno ahí el problema nos dice que son bases ordenadas.

ES28: *Bases ordenadas, por ejemplo, si yo cojo un vector, si yo tomo, si lo expreso en términos de esa base. O sea así por ejemplo* (escribe).

$$\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix} = 3}$$

E: Aja.

ES28: *Pero entonces, no sería lo mismo que (3,2)… no, no,* (escribe).

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = 3}$$

Como el estudiante evidenciaba una estructura proceso de base ordenada y tener control sobre ella, se decidió cuestionarlo sobre el vector de coordenadas, esto con el fin de hacerle notar la importancia del orden en las bases, veamos el siguiente fragmento de la entrevista.

E: A ver lo que pasa… ¿cómo encuentras si yo te doy el vector (2,1) como combinación lineal de estos dos? (señala).

Ejercicio 1

Sea $V = \mathbb{R}^2$ el espacio vectorial definido sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y sean:

$$B_1 = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\},\ B_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\},\ B_3 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}, \text{ bases ordenadas de } \mathbb{R}^2.$$

ES28: *¿El vector* (2,1) *como combinación lineal de estos dos?*

E: Aja, y además te dice que las bases son ordenadas es decir si yo te pido las coordenadas de este vector (2,1) en esta base, según tú como la encuentras… ¿de esta manera? (señala)

$$1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

ES28: Sí.

E: ¿Entonces cuáles son las coordenadas? ¿El vector (2,1) escrito en esta base es igual a quién? Sí, pero ¿Cuáles son las coordenadas?

ES28: *¿Las coordenadas?*

E: Las coordenadas del vector, aja las coordenadas del vector (2,1) escritas en esa base ¿quiénes son?

ES28: *Pues uno, y dos.*

E: Aja, y se pueden escribir con una notación. Entonces escribe ese vector en esas dos bases y compáralos.

ES28: (Escribe).

$$1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}_{\beta_1} \qquad \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_{\beta_3}$$

E: ¿Son iguales?

ES28: *No son iguales porque no tienen las mismas coordenadas.*

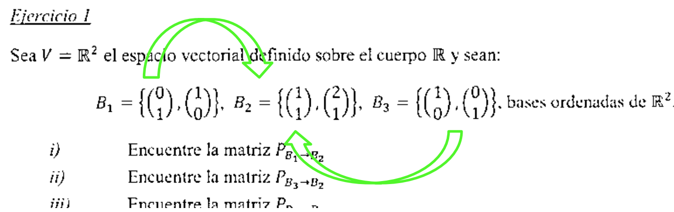
E: Ok. No son iguales porque no tienen las mismas coordenadas, entonces que es lo que está pasando. En la pregunta cuatro nos preguntan si las bases son iguales.

ES28: *Si estamos hablando de las bases ordenadas no estamos hablando de las mismas bases.*

E: A Ok. ¿Entonces en una base ordenada que es lo que importa?

ES28: *El orden de los vectores que la componen.*

E: A ok, y por ejemplo, en la pregunta cinco las matrices de transición van de la base… (Señala)


Ejercicio 1

Sea $V = \mathbb{R}^2$ el espacio vectorial definido sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y sean:

$$B_1 = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\},\ B_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\},\ B_3 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}, \text{ bases ordenadas de } \mathbb{R}^2.$$

i) Encuentre la matriz $P_{B_1 \to B_2}$

ii) Encuentre la matriz $P_{B_3 \to B_2}$

iii) Encuentre la matriz

E: A pesar de que estas dos base B_3, B_1 tienen los mismos elementos pero en distinto orden ¿Qué podemos concluir?

ES28: *Que las matrices son diferentes.*

E: Aquí ya lo habías puesto.

ES28: *Sí una idea*.

E: ¿Ahora que podemos concluir en la pregunta cuatro?

ES28: Escribe.

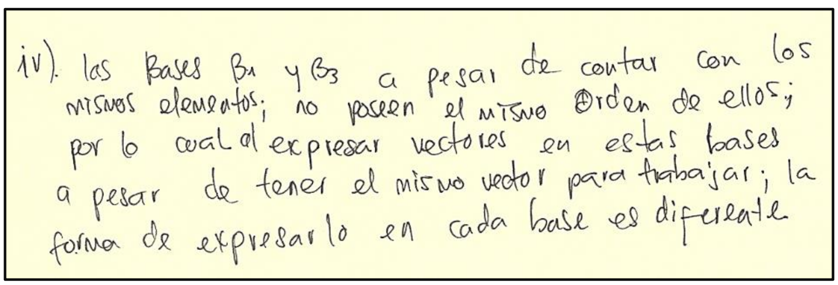

iv). las Bases B_1 y B_3 a pesar de contar con los mismos elementos; no poseen el mismo orden de ellos; por lo cual al expresar vectores en estas bases a pesar de tener el mismo vector para trabajar; la forma de expresarlo en cada base es diferente

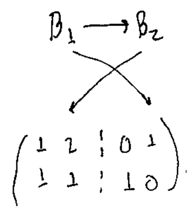
Figura 4.21. Respuesta del ES28.Pe1.iv).

Quizá esto de tener bases con los mismos vectores y ordenarlos de una manera diferente y decir que ahora son distintas suena algo extraño para un estudiante que carece de un tipo de concepción proceso de base ordenada, puesto que no se interiorizado la acción de establecer que vector va primero, que vector después y así sucesivamente. Lo anterior toma sentido en la ejercitación y cálculo de las coordenadas de un vector, es decir, la importancia del orden en la base toma sentido cuando se escriben las coordenadas de un vector respecto a esa base. Así con esta reflexión el estudiante interioriza la sucesión definida en la base y con ello porque dichas bases son distintas. Respecto al orden en las bases tanto el estudiante 20 y 28 tuvieron que reflexionar sobre el orden de las bases porque omitían la importancia de ello. Podemos concluir respecto al orden que este se manifiesta en los estudiantes de dos maneras: como *concepción proceso* y *concepción objeto*, el primero cuando establece que vector se antepone al siguiente y así sucesivamente, y el segundo cuando lo considera como un conjunto ordenado (se considera el orden establecido en la base).

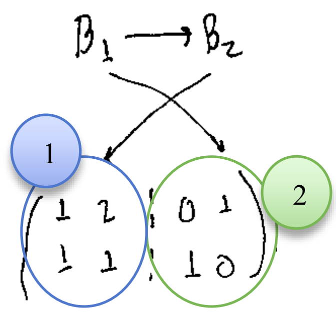
4.2.2 Concepción acción de la matriz de cambio de base

En la descomposición genética hipotética consideramos que los estudiantes podrían iniciar la construcción del concepto matriz de cambio a partir de las estructuras: *concepción proceso* de base ordenada y *concepción objeto* del vector de coordenadas. Para construir la matriz de cambio de base planteamos la aplicación de acciones específicas sobre dichas estructuras; por ejemplo, el estudiante 15 en la pregunta 1, para calcular dicha matriz realiza las siguientes acciones.

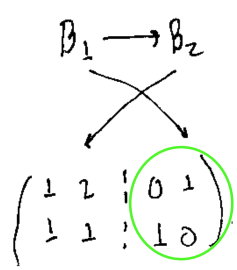
ES15: *Entonces quiero la Matriz de cambio de* B_1 *a* B_2*, entonces la matriz que voy a colocar aquí es* B_2*, y aquí* B_1 (escribe)



ES15: *Ahora lo que tengo que hacer es llevar esta matriz a la forma escalonada reducida ¿sí?* (Señala 1). *Y lo que me queda aquí es la matriz de transición de* B_1 *a* B_2 (señala 2).



E: Ok. Entonces vas llevar esto a la identidad ¿Y lo que te quedara de este lado que va a ser? (Señala).



ES15: *La matriz de transición de* B_1 *a* B_2*.*
E: A, ok.

ES15: Entonces a este renglón le voy a restar el reglón uno… (Comienza a resolver el problema y escribe).

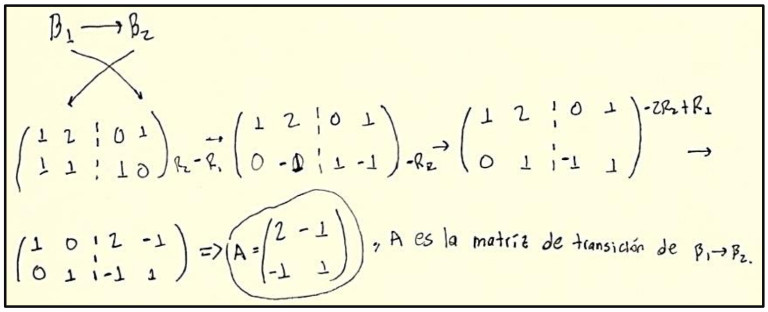


Figura 4.22. Respuesta del ES15.Pe1.i).

Estas acciones específicas de considerar los vectores transpuesto de los vectores de las bases y colocarlos en una forma de matriz para ambas bases, construir una matriz ampliada, aplicar operaciones elementales para reducir la parte izquierda como señalaba el estudiante. Son las acciones que realiza para determinar la matriz requerida.

En el análisis a priori de la entrevista contemplamos esta forma de proceder por parte del estudiante, puesto que con la prueba diagnóstico detectamos aquellos que por lo menos eran capaces de escribir las coordenadas de un vector dado respecto a una base y calcular la matriz de cambio de base. Esta forma de calcularla aparecía en sus producciones de los estudiantes.

Otra de las acciones específicas que esperábamos es la que muestra el estudiante 28 quien rápidamente menciona que para calcular la matriz de cambio de base requiere expresar los vectores de la base de salida como combinación lineal de la base de llegada (ver fragmento de la entrevista y la siguiente figura 4.23).

ES28: *Bueno aquí nos piden la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2.*
E: Ok.

ES28: *Entonces lo que tendría que hacer es expresar los vectores de la base B_1 en términos de la base B_2.*

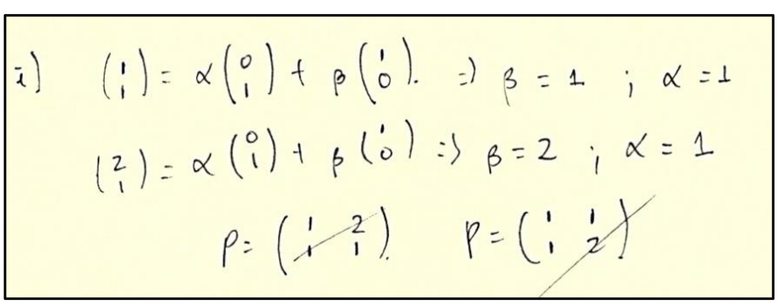


Figura 4.23. Respuesta del ES28.Pe1.i).

Notemos que el estudiante menciona escribir los vectores de la base B_1 en términos de la base B_2, pero lo que hace realmente es expresar los vectores de la base B_2 en términos de la base B_1. Cuando le cuestionamos sobre lo que estaba realizando el estudiante menciona que el cálculo de la matriz siempre lo había hecho mecánicamente, pero acepta que la acción específica que decía realizar la estaba haciendo de forma equivocada. Al corregir el procedimiento logra darle respuesta satisfactoria al problema. Esto se evidencia en el siguiente fragmento de la entrevista.

ES28: *Escribir una base como combinación lineal de la otra. La verdad sí, pues sí eso es lo que me genera duda de la base B_1 a la base B_2 siempre lo he hecho de una forma muy mecánica y no me había puesto a pensar en eso. Luego algunos autores manejan esta notación y le ponen la flechita al revés. Pues sí, porque yo necesito hacer la transición de base B_1 a base B_2.*
E: ¿Entonces?
ES28: *Necesito expresar a estos en términos de esta base [B_1 a B_2].*
E: Ok, a ver ¿qué dijiste? Necesitas expresar estos…
ES28: *En términos de esta base, y fue todo lo contrario a lo que hice*.
E: Ok.
ES28: *Voy a escribir la correcta* (escribe).

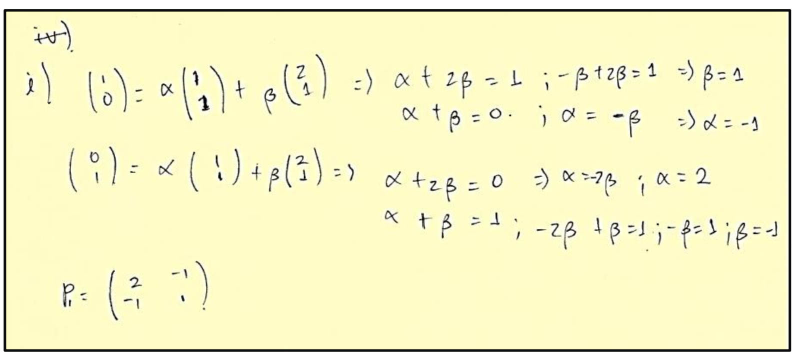

iv)
i) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha + 2\beta = 1 \; ; -\beta + 2\beta = 1 \Rightarrow \beta = 1$
$\alpha + \beta = 0. \; ; \alpha = -\beta \Rightarrow \alpha = -1$
$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha + 2\beta = 0 \Rightarrow \alpha = -2\beta \; ; \alpha = 2$
$\alpha + \beta = 1 \; ; -2\beta + \beta = 1 \; ; -\beta = 1 \; ; \beta = -1$
$P_1 = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$

Figura 4.24. Respuesta corregida del ES28.Pe1.i).

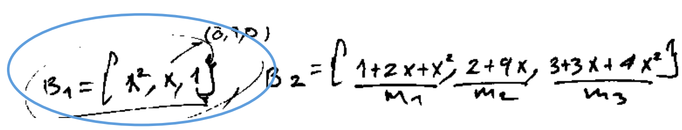
Para iniciar la construcción de la matriz de cambio de base en los problemas planteados de la entrevista, se utilizaban una de las dos acciones específicas que se mostraron anteriormente para el caso de subespacios de $\mathbb{R}^n$. Es decir, los estudiantes optan por escribir primero cada vector de la base de salida como combinación lineal de la base de llegada o transponer los vectores de las bases; aunque realmente al hacer esto no muestran control de lo que están haciendo, no mencionan que usan como puente a la base canónica del subespacio vectorial dado.

Por otro lado las producciones de los estudiantes eran las que se esperaban puesto que mostraban esa forma de proceder en la prueba diagnóstico. Resulta interesante cuando el espacio vectorial es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_n[x]$ puesto que los estudiantes optan por usar las acciones específicas: poner los vectores de la base de salida y de llegada como vectores columna de una matriz, construir una matriz ampliada y reducir una parte de la matriz ampliada a la identidad y así obtener una matriz de cambio de base. Aunque lo ideal es usar esta forma de proceder cuando se quiere un cambio de base de la base canónica a cualquier base de un espacio vectorial Vde dimensión finita puesto que se simplifica mucho.

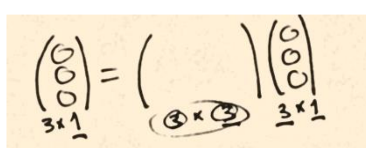
4.2.3 Concepción proceso de la matriz de cambio de base

Como ya describimos anteriormente los estudiantes desarrollaron dos procedimientos para construir la matriz de cambio de base. Esas acciones específicas fueron interiorizadas por algunos estudiantes, la interiorización se da cuando el estudiante reflexiona sobre las componentes de la matriz de cambio de base, es decir, cuando asimilan que cada columna de la matriz está relacionada con la escritura de los vectores de salida como combinación lineal de los vectores de llegada. Además cuando pueden predecir el tamaño de la matriz sin resolver el problema y cuando son conscientes del efecto que causa el orden en las bases. Esto es, que para cada orden dado en el conjunto de la base existirá una única matriz. Por ejemplo, el estudiante 20 predice el tamaño de la matriz de cambio de base antes de calcularla para el subespacio $\mathbb{P}_2[x]$; consideremos el siguiente fragmento de la entrevista:

ES20: *Listo, sin tener que escribir esto (señala los vectores de la base B_1). Monto los que son, además me están diciendo que son bases esto genera* (señala).

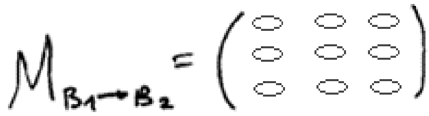


ES20: *Todos los polinomios de… en x de segundo grado y son linealmente independientes, todas esas cuestiones. Esta también genera a todos los polinomios de segundo grado en x y también son linealmente independientes listo. Son tres componentes entonces hay tres cositos acá y tres cositos acá, esto es de tamaño… tres por uno y este es tres por uno también…por lo tanto ¿qué tendría que ser esto para*



que me de tres por uno?… este es tres obligatoriamente (escribe).

ES20: *Bueno ya no es dos por dos como la anterior ahora es tres por tres* (escribe).



Una vez un individuo logra interiorizar las acciones puede construir un proceso; el cual en nuestra descomposición genética se caracteriza por todas aquellas acciones mentales que lo llevan a reflexionar sobre las características de la matriz. Por ejemplo, qué representa cada una de las columnas de dicha matriz, reconocer la diferencia entre $M_{B_1 \to B_2}$ y $M_{B_2 \to B_1}$, interiorizar que por cada orden que se de en la base de salida las columnas de la matriz cambian. Además de ser consciente que dichas columnas son linealmente independiente, más aún que son una base para el espacio vectorial $F^{n\mathrm{x}1}$. Evidencia de esto es el trabajo realizado por el estudiante 15, es de vital importancia para nosotros la forma de razonar por parte del estudiante, a través de su reflexión interioriza las acciones en un proceso. Veamos el siguiente fragmento respecto a la pregunta tres de la entrevista:

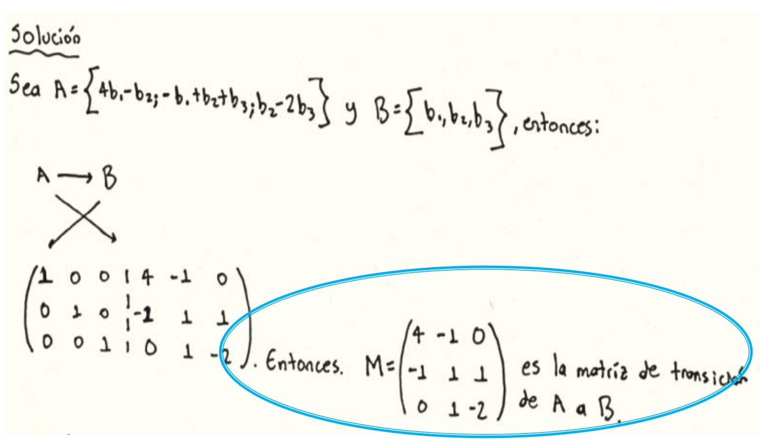
ES15: *No estoy muy seguro, pero lo voy a hacer como hice el de polinomios del ejercicio anterior.*

E: Ok.

ES15: *Pero no estoy seguro. O sea esta es la base A, y esta es la base B. Y me piden la matriz de transición de A a B.*

E: A ver calcúlela.

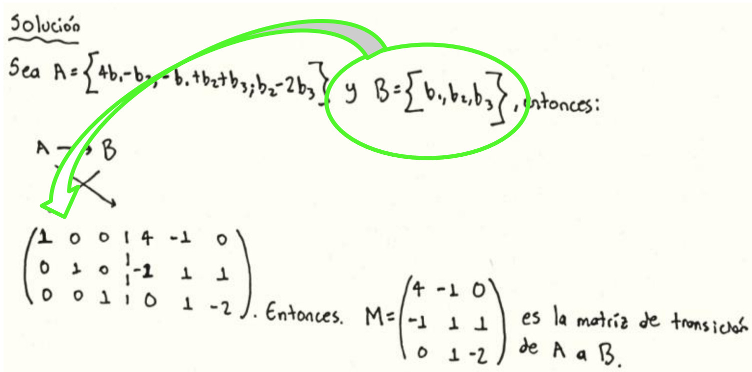
ES15: *Sí señor, pero no sé. Estoy asumiendo que son polinomios, puede que no sean polinomios.*



E: A ver, aquí encuentras la matriz y la encuentras bien.

ES15: *¿Sí está bien?*

E: Sí, pero hay un detalle ¿Si esta consiente de lo que está haciendo? ¿Por qué escribe esta matriz cuando la base es b_1, b_2, b_3? (Señala).



ES15: *Es lo que le digo, yo creo que asumí que el espacio vectorial eran polinomios*.

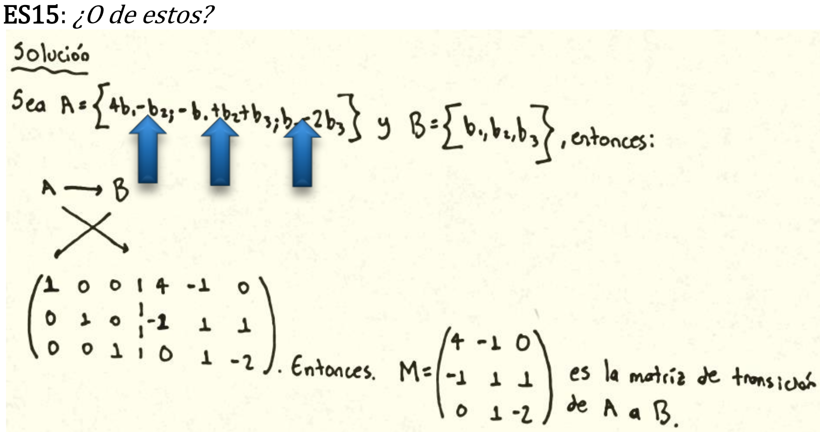
E: Ahora si no consideras polinomios y lo trabajas así, como un espacio vectorial V. Supongamos que ya la encontraste con tu procedimiento. ¿Qué te está representando cada columna de esa matriz?

ES15: *El vector de coordenadas, no ¿el vector de coordenadas? Sí, creo que es el vector de coordenadas de, el vector de coordenadas en términos de* B_1. *Si no estoy mal.*

E: El vector de coordenadas…

ES15: *De* B_1 *de cada uno de estos vectores* (señala).

ES15: *¿O de estos?*

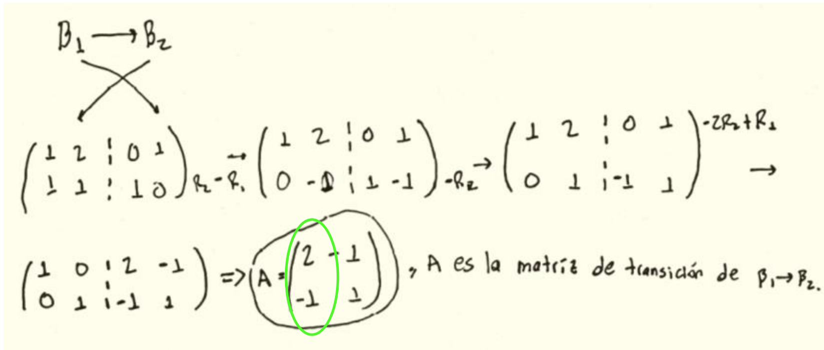


E: ¿Cómo?

ES15: *Es que no me acuerdo muy bien, pero yo estoy seguro. Que este es un vector de coordenadas de los vectores de A o de los vectores de B.*

Notemos aquí que el estudiante tiene pleno dominio de las acciones específicas que tiene que hacer, en este caso, transponer los vectores de la base como vectores columna y así formar una matriz ampliada con los vectores de ambas bases. Así que el entrevistador toma la decisión de hacerlo reflexionar sobre sus propias ideas para evidenciar la interioriorización de dichas acciones. A continuación, mostramos un fragmento de la entrevista donde se logra dicho mecanismo.

E: Bueno regresemos a este problema (se le entrega el problema 1, segundo inciso). ¿Qué me está representando la columna de esta matriz?



ES15: *El vector de coordenadas en términos de* B_1 *en esta base.*

E: ¿Es decir?

ES15: *Los coeficientes de la combinación lineal.*

E: ¿De quién?

ES15: *Ya, ya, ya, ya… Es el vector de coordenadas de uno de los vectores de* B_2 *en términos de* B_1.

E: Saca tu hoja de cuentas.

ES15: *Usted me puso a calcular este vector si ok.*

E: Sí.

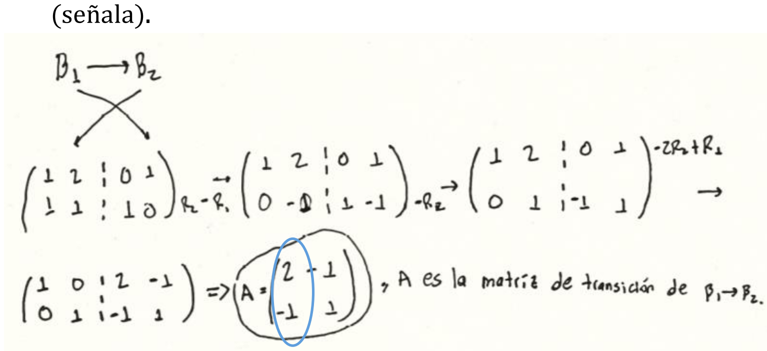
ES15*: En este caso me dio (2,1).*

E: Sí, pero esta es la que va de B_1 a B_2.

ES15: *Sí.*

E: Ok. ¿Lo calculaste y te dio?

ES15: *(2,1) y aquí medio (2,-1). Si yo calculara (2,1) me tendría que dar esto* (señala).



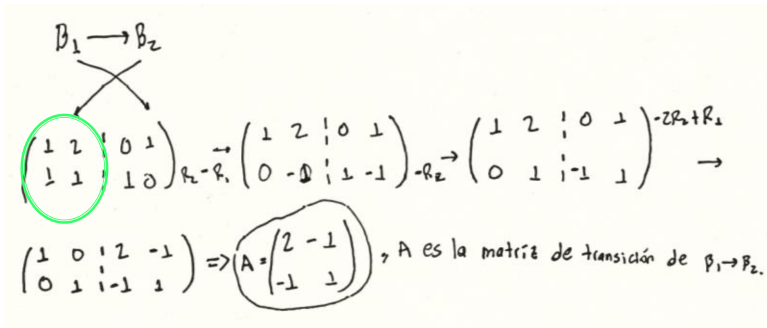
ES15: *Voy a calcular a ver.*

E: Ok, la pregunta era ¿qué me está representando cada columna de la matriz?

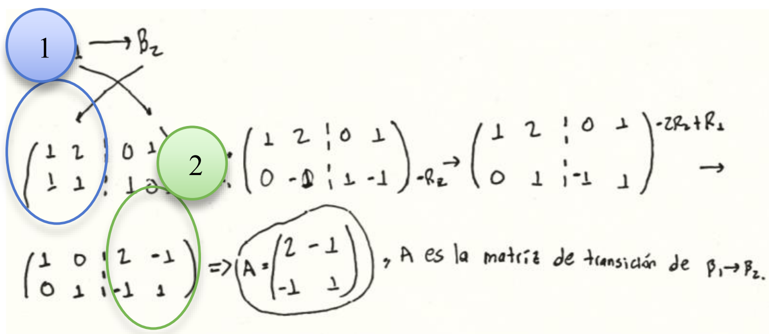
ES15: *En términos de* B_1 *no es, porque me dio (1,2). Entonces voy a calcular el mismo vector, ¡ah! no mentiras.*

Notemos aquí que el estudiante ve al vector $(2,-1)$ con una *concepción objeto* el cual desencapsula para analizar de qué vector está representando las coordenadas. El entrevistador opta por hacerlo reflexionar sobre su forma de calcular las coordenadas de un vector respecto a una base esto con el fin que interiorice la acción de que vectores tiene que escribir como combinación lineal y con ello que representa las columnas de una matriz de cambio de base veamos el siguiente fragmento de la entrevista.

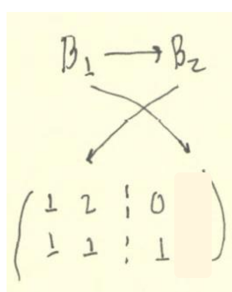
E: Regresemos más atrás, ¿Qué significa resolver esta parte de aquí?



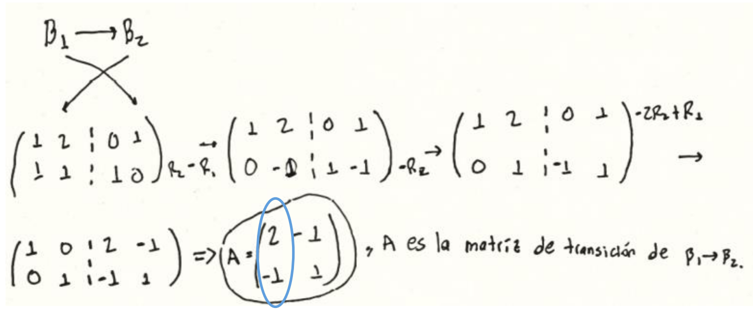
ES15: *Hallar la inversa de esta matriz* (Señala 1). *Hallar el cambio de base.*
E: Bueno, aquí si te queda un cambio de base (señala 2).



E: Pero a ver, ¿qué estaría significando esto? (se cubre una de las columnas de la parte derecha de la matriz ampliada). Es decir, que le quites una columna y resuelvas.



ES15: *El vector de coordenadas en términos de B_2*.
E: ¿Pero qué vector?
ES15: *El (0,1).*
E: Ok. Y encuentras ¿qué cosa? Las coordenadas, y cuales son.
ES15: *Este* (señala).



E: Sí.

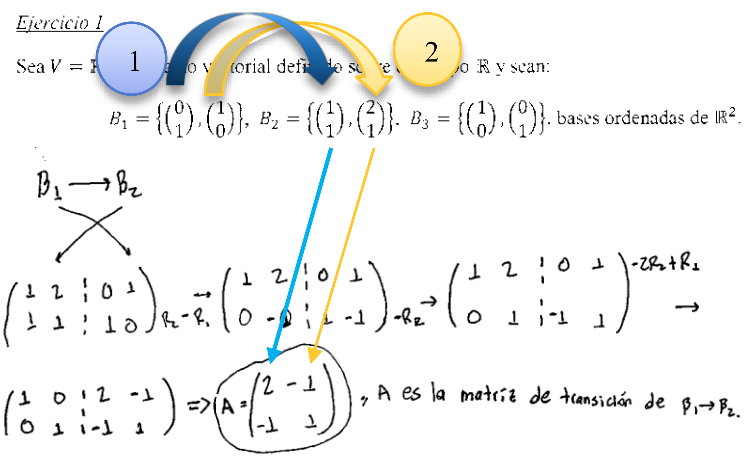
ES15: *¿Pero si es eso?*

E: Entonces qué significan las columnas de una matriz de cambio de base.

ES15: *El vector de coordenadas de la base 1 en términos de la base 2. Lo dije muy enredado.*

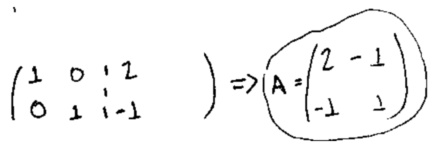
E: No, creo que está bien. Es decir,… bueno aquí tengo las dos bases B_1 y B_2 ¿Qué debo de hacer para encontrar la matriz de cambio de base que va de B_1 a B_2?

ES15: *Hallar el vector de coordenadas en términos de la otra base y ponerlos como columnas. ¿Sí? A ver, por lo menos yo quiero este vector en términos de esta base.* (Señala 1). *Hallo el vector y lo coloco como columna. Después cojo este vector y lo pongo en términos de esta base y lo pongo como columna* (señala 2).



Aquí el estudiante da evidencia que está interiorizando acciones específicas y comienza a pensar en un dinamismo en función de las columnas de la matriz de cambio de base. Ahora se le cuestiona sobre su forma de construir la matriz de cambio base, esto con el fin de que el estudiante notará que su manera de proceder es hacer algo análogo a escribir cada vector de la base de llegada como combinación lineal de a base de llegada.

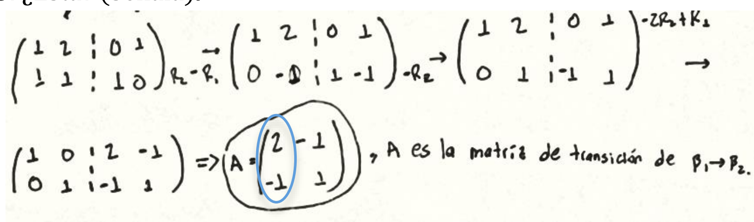
E: Ok, ¿Qué es lo que pasa aquí en su algoritmo cuando hace esto? (cubre una de las columnas de la parte derecha de la matriz ampliada)



ES15: *Encuentro las… solución del sistema, yo sigo insistiendo que encuentro el vector de coordenadas*

E: Exacto, ¿entonces esta columna qué es?

ES15: ¿Está? (Señala).



E: Aja.

ES15: *El vector de coordenadas*.

E: ¿De quién?

ES15: De… este (señala el primer vector de la base B_1) en términos de B_2.

E: ¿Y después este quién es? (señala la segunda columna de la matriz que encuentra el estudiante)

ES15: El vector de coordenadas de este vector (señala el segundo vector de B_1) en términos de B_2.

El estudiante volvió a dar evidencia sobre la construcción de la matriz de cambio de base, es decir, sugiere encontrar el vector de coordenadas en términos de la base de llegada y posterior a ello colocarlo como una columna. Después de esta reflexión el estudiante 15 interioriza las acciones específicas para dar paso al proceso. En el siguiente fragmento se puede encontrar evidencia de ello:

E: Regresemos al problema 3 ¿Qué es lo que te dan?

ES15: *Me dan dos bases de un espacio vectorial V, me dicen que los vectores del espacio vectorial A están en términos por decirlo así en términos de B, pues sí por que $a_1 = 4b_1 - b_2$ pero estos son vectores de esta base* (señala la base B).

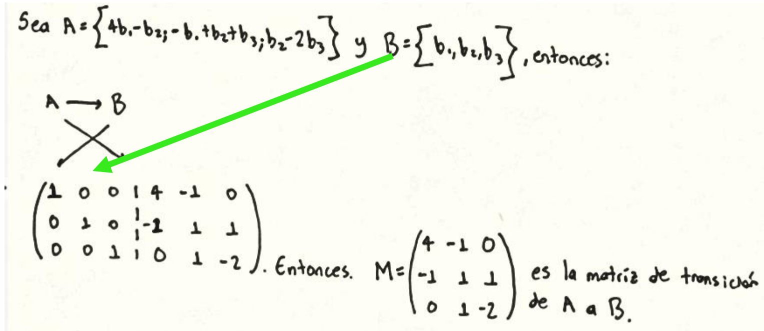
E: Ahora si yo te pido la matriz de cambio de base de A a B ¿Cuál es? ¿Va ser aquella matriz que, qué?

ES15: *Que… tenga como columnas los vectores de coordenadas de A en términos de B.*

E: Aja, y entonces ¿cómo encuentras eso?

ES15: *Con mi algoritmo o un sistema de ecuaciones*.

E: Ok, pero cuando usas tú algoritmo ¿por qué pones que b_1 es $(1,0,0)$? (Señala).



ES15: *Si es que, lo que le dije. Yo asumí, creo que está mal asumir eso que el espacio vectorial es un espacio vectorial de polinomios grado dos.*

Hasta aquí, el estudiante dejaba de pensar en una base en particular, y considera la base dada. Ahora, como el estudiante ya interiorizo que para todo vector de la base de salida lo tiene que escribir como combinación lineal, puede deducir qué representan las columnas de cualquier matriz cambio de base, es decir, ya se apropió que cada columna de la matriz son las coordenadas de un vector en términos de una base específica, veamos el siguiente fragmento de la entrevista donde se evidenciaba aún más la interiorización de ciertas acciones, así como una estructura proceso de la matriz de cambio de base.

E: Ok, pero a ver qué información tenemos, tenemos dos bases ordenadas de un espacio vectorial V, ¿Qué más te dice?

ES15: *Que la base A en términos de B.*

E: ¿Y eso te ayuda en algo?

ES15: *Yo creo que sí.*

E: ¿En qué? ¿Qué significa que a_1 lo puedas escribir como $4b_1 - b_2$?

ES15: *Que el vector a_1 está en términos de B. O sea, este vector que acabo de escribir hay sí, ya miré. Este es el vector a_1 que pertenece a* A *¿sí? Y está en combinación lineal con b_1 y b_2 que son vectores de B. Entonces este vector uno está en combinación lineal de B, pues sí es obvio no pero si es evidente porque B es base. Igual pasa para a_2 y a_3.*

E: ¿De ahí puedes deducir algo?

ES15: ¿En cuanto a esta matriz?

E: A encontrar la matiz de cambio de base.

ES15: *Sí.*

E: ¿Sí, qué?

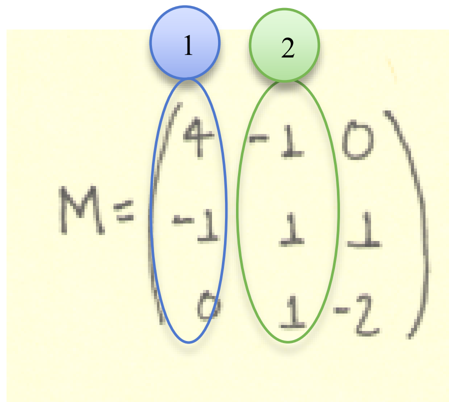
ES15: *Esto quedaría escrito.*

E: Ok, pero aquí la forma de razonar es diferente

ES15: *Sí, sí, sí… como habíamos pensado ahorita, como habíamos llegado a la conclusión de que las columnas de la matriz de transición de B_1 a B_1 eran los vectores de coordenadas de la base a la que se quería llegar. ¿Sí?*

E: Ok.

ES15: *Entonces como a_1 está en términos de B, a_2 también y a_3 también me están queriendo decir que si yo coloco los vectores de coordenadas como columnas estoy hallando la matriz de transición es decir este vector (señala 1). Es el vector de coordenadas de a_1 en términos de B, y este es el vector de coordenadas de a_2 en términos de B* (señala 2)…



ES15: *A bueno, entonces lo escribo* (el estudiante escribe su respuesta).

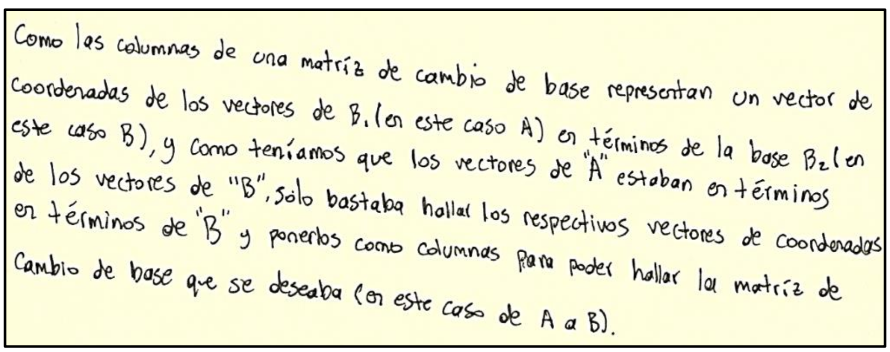
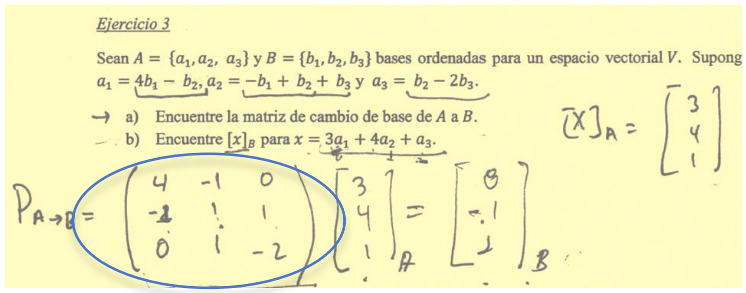

Como las columnas de una matríz de cambio de base representan un vector de coordenadas de los vectores de B_1(en este caso A) en términos de la base B_2(en este caso B), y como teníamos que los vectores de "A" estaban en términos de los vectores de "B", sólo bastaba hallar los respectivos vectores de coordenadas en términos de "B" y ponerlos como columnas para poder hallar la matríz de cambio de base que se deseaba (en este caso de A a B).

Figura 4.25. Respuesta del ES15.Pe3.a).

Los datos recaudados y expuestos sugieren que una vez interiorizadas las acciones específicas, y se alcanza una estructura proceso de la matriz de cambio de base no importan si las bases son de un espacio vectorial euclidiano. Esta estructura se podría describir en función de sus columnas las cuales el estudiante entiende que representan. Es importante el hecho de que el estudiante empieza a señalar las columnas de una en una y expresar que representa cada una, es decir, que intuitivamente usa el cuantificador universal (∀). Esto con el fin de expresar que las acciones de escribir cada vector como combinación lineal y de ahí quedarse con la información que dan los escalares encontrados para considerar el vector de coordenadas y ponerlo como columna. Tiene que realizar esto para cada vector de la base de salida.

El estudiante 9 ya tiene construida la estructura proceso y la forma de proceder se diferencia con la del estudiante 15. Veamos el siguiente fragmento de la entrevista.

ES9: *Esa sería la del primer punto, ya que ya me están dando la combinación lineal de cada elemento ordenado a la otra base*



E: Eso lo puedes escribir

ES9: *Sí.* (Escribe) *"Ya que se las combinaciones lineales de cada elemento de la base A de los elementos de la base B entonces su representación serán los coeficientes en su orden"*

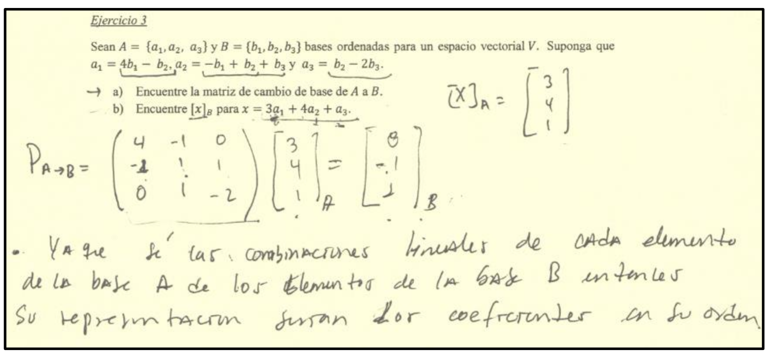


Figura 4.26. Respuesta del ES9.Pe3.a).

La forma inmediata de proceder por parte del estudiante 9 da evidencia de haber interiorizado la acción específica que representa cada columna de la matriz de cambio de base. Más aun, el trabajo que realiza lo hace sin importarle el espacio vectorial el cual estaba dado en forma general, esto describe un control sobre su estructura proceso.

Para el ejercicio 3 de la entrevista una de las acciones específicas que realiza el estudiante 28 es considerar una base conocida para la base de llegada, a pesar de que el problema considera una base en la cual sus elementos están de manera general. Este estudiante se ve en la necesidad de organizar su concepción de base ordenada, puesto que deja de pensar en una base conocida para pesar en una base cualquiera de un espacio vectorial dado; consideremos el siguiente fragmento de la entrevista.

ES28: *Encuentre, a ver... Entonces yo podría tomar a B como un vector como la base canónica. Es que no me están expresando a b_1 a B, como una... a ver... la base A depende de la base B, B podría ser una base... pero podría particularizar o sea podría tomar valores arbitrarios por ejemplo, en este caso la base canónica. Porque si aquí ya depende de los componentes de la base en B.*

E: Ok. Pero bueno en este caso nos están diciendo que el espacio vectorial es uno, un espacio vectorial V. Si fuera para $\mathbb{R}^3$ entonces sí podrías utilizar...

ES28: *Las bases canónicas... mmm.*

E: Vuelve a leer el problema y con los datos que están ahí trata de resolverlo.

ES28: *Pero estos valores no los conozco* (señala).

Ejercicio 3

Sean $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ bases ordenadas para un espacio vectorial V. Suponga que $a_1 = 4b_1 - b_2$, $a_2 = -b_1 + b_2 + b_3$ y $a_3 = b_2 - 2b_3$.

a) Encuentre la matriz de cambio de base de A a B.

b) Encuentre $[x]_B$ para $x = 3a_1 + 4a_2 + a_3$.

E: A ver ¿El primer punto que nos pide?

ES28: *Encuentre la matriz de cambio de base de la base A a la base B.*

E: ¿Eso qué significa?

ES28: *Expresar los vectores de A en términos de los vectores de la base B, que sería esto mismo que tengo acá.* (Señala)

Ejercicio 3

Sean $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ bases ordenadas para un espacio vectorial V. Suponga que $a_1 = 4b_1 - b_2$, $a_2 = -b_1 + b_2 + b_3$ y $a_3 = b_2 - 2b_3$.

a) Encuentre la matriz de cambio de base de A a B.

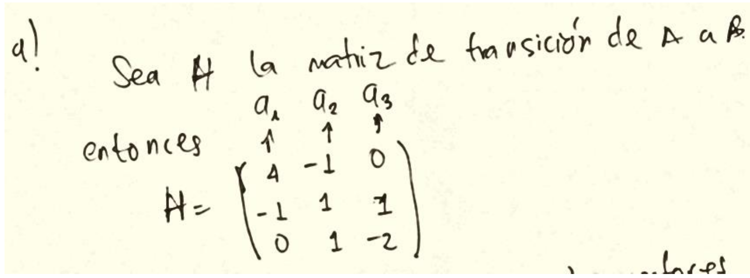
b) Encuentre $[x]_B$ para $x = 3a_1 + 4a_2 + a_3$.

El estudiante 28 muestra evidencia de que una acción que debe realizar para la construcción de la matriz de cambio de base es escribir los vectores de una base en términos de la otra, además, menciona expresar los vectores en términos de una base lo cual se da cuenta que el ejercicio ya se lo está proporcionando, más aun, mencionaba que precisamente los escalares de la combinación lineal son las componentes de la primera columna de la matriz. Ver el siguiente fragmento de la entrevista.

ES28: *Entonces... ahaaa. Entonces hay que expresarlos, por ejemplo, dice: encuentre la matriz de cambio de base A ha base B, si yo quiero encontrar la matriz de cambio de la base A a la base B tengo que coger mis vectores de la base A que son a_1, a_2, a_3 y expresarlos en la base B, pero esto ya me lo está dando el ejercicio.*

E: ¿Entonces?

ES28: *Entonces, entonces con a_1 voy a obtener los componentes de mi primera columna de la matriz de transición, a ver, a ver... si estoy entendiendo bien...* (escribe).


a) Sea H la matriz de transición de A a B

entonces

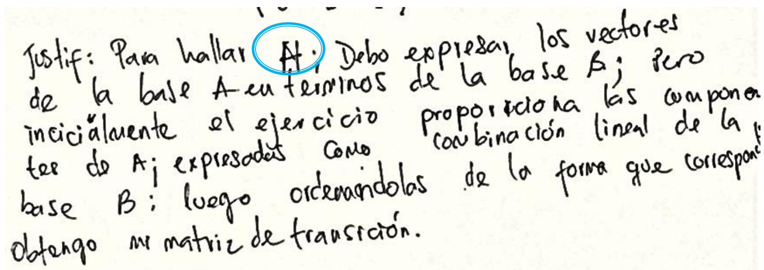
$$H=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

E: ¿Esa es la matriz de transición de A a B, por qué?

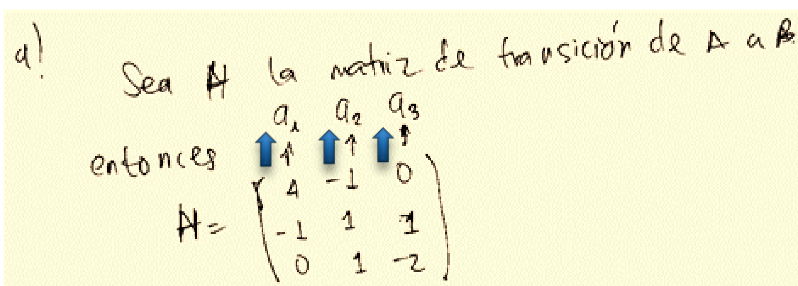
ES28: *Entonces, ¿lo justifico aquí en palabras?*

E: Sí.

ES28: *Para hallar la matriz de… Vamos a ponerle acá H para que no se confunda*.


Justif: Para hallar H: Debo expresar los vectores de la base A en términos de la base B; pero inicialmente el ejercicio proporciona las componentes de A; expresados como combinación lineal de la base B; luego ordenándolas de la forma que correspon[de] obtengo mi matriz de transición.

ES28: *Luego ordenándolas mm… ¿Cómo expreso eso? Lo que yo quiero decir es que por ejemplo, esta columna corresponde a_1, esta columna corresponde a a_2 y esta columna corresponde a a_3* (escribe y señala).


a) Sea H la matriz de transición de A a B

entonces

$$H=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

E: ¿Cómo corresponde a a_1?

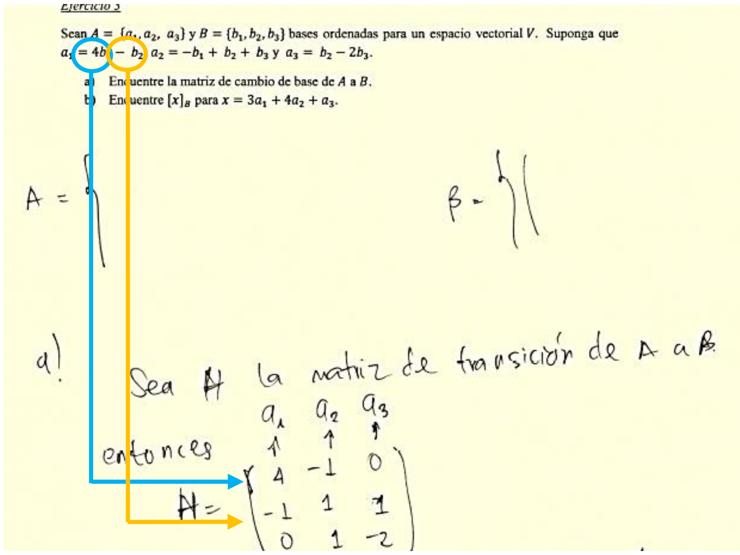
ES28: *corresponde porque mmm.*

E: ¿En qué sentido?

ES28: *En el sentido que a_1 sería el primer vector de la matriz… de la base A expresado términos en la base B, entonces a_1 esta expresado.*

E: Ok.

ES28: *Entonces la primera componente, o sea si yo multiplico un escalar por la primera componente de la base B voy a obtener el primer término de esa columna en este caso va ser cuatro, para el segundo caso lo mismo si yo multiplico el escalar por la base b_2 voy a obtener la segunda componente de esa columna, en este caso, como estoy asumiendo pues estoy asumiendo no, el ejercicio me está dando este vector expresado en estos términos entonces el segundo componente sería -1 (señala).*



ES28: *no aparece b_3 entonces sería cero. Voy con a_2 que sería la segunda columna, sería la segunda columna… el segundo vector de la base A expresado en la base B. Entonces empiezo igual el mismo razonamiento -1, 1 positivo en b_2 y uno positivo en b_3 siguiendo el orden en que se me dan mis componentes. Y de la misma forma para a_3.*

E: Ok.

ES28: Quiero escribir eso… voy a escribir (escribe "Para hallar H; debo expresar los vectores de la base A en términos de la base B; pero inicialmente el ejercicio proporciona las componentes de A; expresadas como combinación lineal de la base: luego ordenándolas de la forma que corresponden tengo mi matriz de transición).

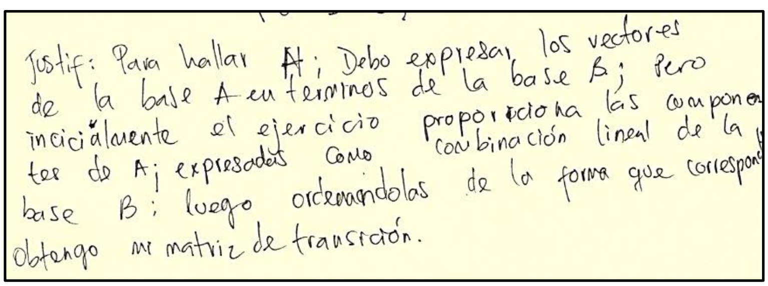


Figura 4.27. Respuesta del ES28.Pe3.a).

Notemos que el trabajo del estudiante 28 antes de proceder con los cálculos antepone la reflexión y a través de ella y la interiorización de acciones específicas como expresar vectores en términos de otra base es como da paso a una estructura más dinámica.

En otra situación el estudiante 28 evidenció que ha logrado interiorizar las acciones en un proceso, al hablar de expresar los vectores de una base en términos de otra. Veamos la siguiente figura 4.28 en donde aparece su respuesta ante la pregunta siete inciso dos de la entrevista.

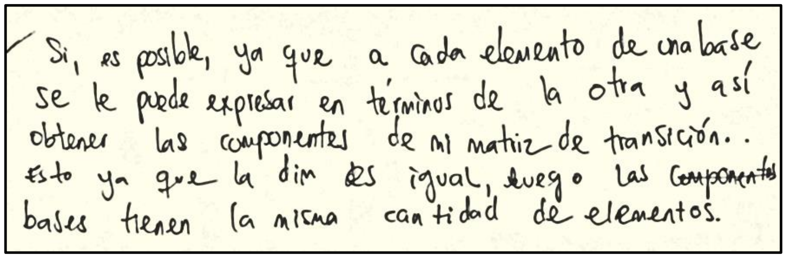


Figura 4.28. Respuesta del ES28.Pe7.ii).

Cuando se cuestiona al estudiante 28 si cualquier matriz cuadrada representa un cambio de base, él considera tener dificultad para generalizar eso, veamos la siguiente fracción de la entrevista.

ES28: *Es que me cuesta generalizar, decir que siempre que una matriz sea cuadrada va representar una matriz de cambio de base*.

E: busque una matriz cuadrada que no sea un cambio de base.

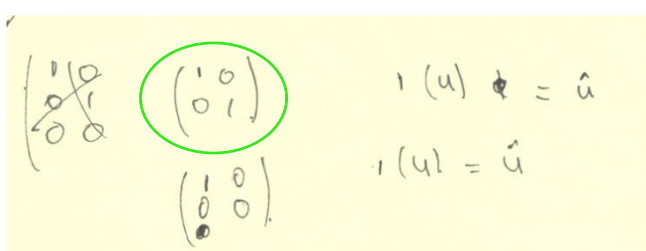
ES28: *Un contra ejemplo. Estaba pensando en la canónica.*

E: ¿Qué necesita una matriz para que sea cambio de base? Una matriz cuadrada y que condiciones.

ES28: *Que las componentes sean los escalares que me sirvan para representar una matriz… aun vector de una base en términos de la otra.*

E: ¿Y siempre es posible hacer eso? es decir yo te doy cualquier matriz ¿tú puedes encontrar dos bases en las cuales las columnas me representen las coordenadas de los vectores de una base en otra? ¿Eso es posible?

ES28: *Siempre, siempre,… es que no se me ocurre un contra ejemplo a ver yo comenzaría con la matriz* (escribe).



E: Esa que pone ahí si fuera un cambio de base me está diciendo que la columna (1,0) son las coordenadas del vector de la primera base como combinación lineal de la segunda.

ES28: *Sí, pero si se podría hacer*.

E: ¿Para esa sí?

ES28: S*í porque… no sé, es que no veo un contra ejemplo que me sirva.*

E: A ver, considera $\mathbb{R}^2$ y tomate dos bases. O bueno yo te doy una matriz cuadrada la (1,0) y (0,0) como columna, ahora el problema se reduce a encontrar dos bases de tal manera que eso sea un cambio de base.

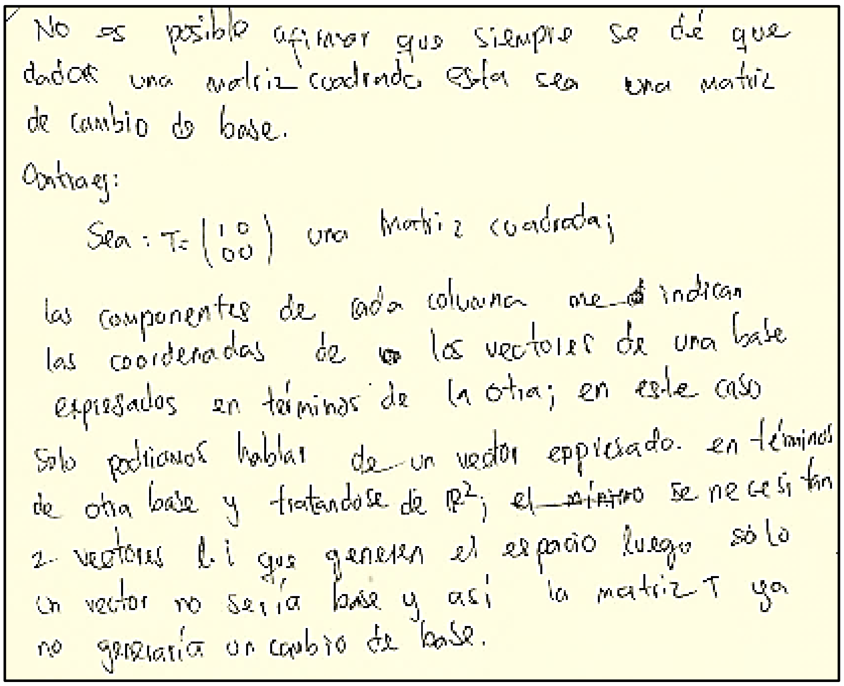
ES28: *No, porque acá solamente estaría, solamente tendría un vector y un vector no es base porque no me generaría a todo a $\mathbb{R}^2$.*

E: ¿Entonces?

ES28: *Entonces es una matriz cuadrada que no me serviría para ser un cambio de base, lo podría plantear como un contra ejemplo.*

E: ¿Entonces que se puede concluir?

ES28: No es posible afirmar… (Escribe).



No es posible afirmar que siempre se dé que dada una matriz cuadrada esta sea una matriz de cambio de base.

Contraej:

Sea: $T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ una matriz cuadrada;

las componentes de cada columna me indican las coordenadas de los vectores de una base expresados en términos de la otra; en este caso solo podríamos hablar de un vector expresado en términos de otra base y tratandose de $\mathbb{R}^2$; el ~~mínimo~~ se necesitan 2 vectores l.i que generen el espacio luego sólo un vector no sería base y así la matriz T ya no generaría un cambio de base.

Figura 4.29. Respuesta del ES28.Pe7.iii).

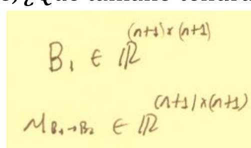
Una vez que sea necesario aplicar acciones o transformaciones a la concepción proceso de la matriz de cambio de base, el estudiante necesita ver a la matriz como un todo y ya no en función de lo que representa cada una de las columnas de dicha matriz, más bien encapsula esta estructuras para tener una concepción más sofisticada, en donde puede echar mano ante una situación problema cuando lo el estudiante lo considere necesario y ahora sí aplicar las acciones específicas. Así pues diremos que el estudiante tiene las condiciones para promover su concepción a la siguiente estructura.

4.2.4 Concepción objeto de la matriz de cambio de base

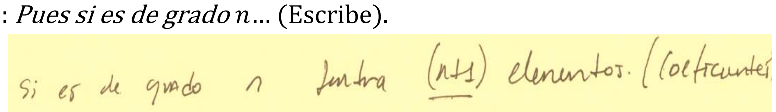
La concepción proceso de la matriz de cambio de base debe encapsularse en un objeto, sobre el cual es posible aplicar nuevas acciones. En la descomposición genética hipotética planteamos que un individuo con este tipo de concepción debe mostrar control sobre la aplicación de acciones como: usar la matriz para obtener por un vector escrito en una base en términos de otra, calcular la inversa de la matriz para determinar otro cambio de base, entre otras.

Es muy importante que el estudiante mediante el mecanismo encapsulación logre pasar a otra estructura, una característica que podría describir este mecanismo es lo siguiente: si el estudiante logra establecer el tamaño de la matriz y lo asocia con la dimensión de los espacios involucrados. Analicemos el caso del estudiante 9 al preguntarle sobre el tamaño de una matriz de cambio de base en el problema 6 de la entrevista.

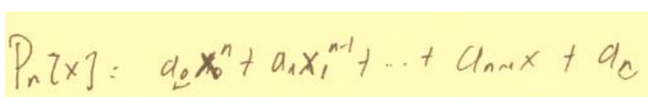
ES9: *Al ser un polinomio de grado* n *cada vector va tener* $n + 1$ *elementos.*
E: Ok.
ES9: *Y luego pues el cambio, ¿Qué tamaño tendrá la matriz?*



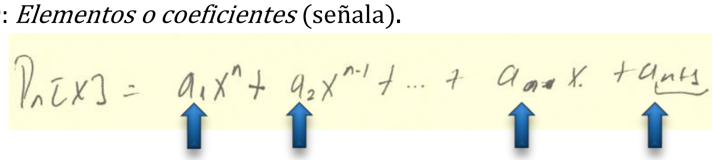
E: Puedes escribir algo más.
ES9: *Pues si es de grado* n… (Escribe).



E: ¿Cómo sabes?
ES9: *Porque un polinomio de esta forma* (escribe).



ES9: *Entonces si empezamos en cero va tener hasta* n, *va a tener* $n + 1$.
E: Ok, ya tienes $n + 1$.
ES9: Ahora si empezamos de uno entonces sería.
E: ¿Tendrías $n + 1$ qué?
ES9: *Elementos o coeficientes* (señala).

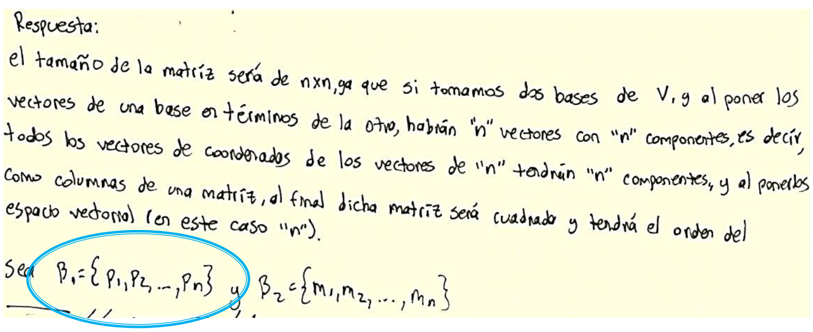


E: Ya, por lo tanto te quedaría…
ES9: *El tamaño total sería* $n + 1$ *al cuadrado.*

Aunque no da más explicaciones el estudiante 9 da evidencia de tener a lo largo de la entrevista una estructura proceso de matriz de cambio de base y lograr encapsularlo en el objeto. Esto a través de los cuestionamientos del investigador y su propia reflexión sobre la situación, mostraremos más adelante esta situación.

Analicemos la solución del estudiante 15 al preguntarle sobre el tamaño de una matriz de cambio de base en el problema 6 de la entrevista. El estudiante da evidencias de encapsular el proceso y parece lograrlo a través del desarrollo de la entrevista. Primeramente trata de considerar dos bases del espacio vectorial dado, y con ello predecir el tamaño de la matriz. Cuando se le cuestiona sobre una base conocida del espacio vectorial dado, es ahí cuando el mismo estudiante rápidamente predice el tamaño, y es capaz de justificar su razonamiento.

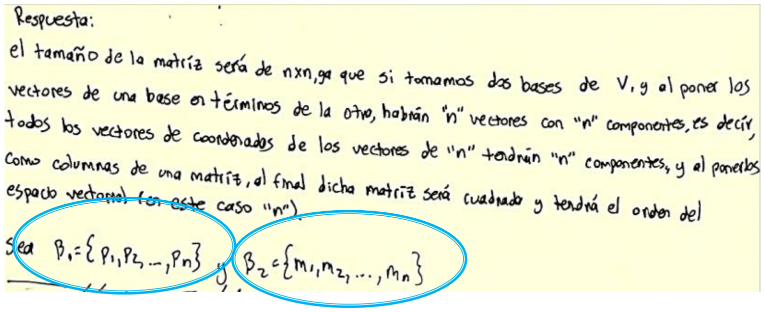
ES15: Yo dije que el tamaño de la matriz será n x n.
E: ¿Por qué?
ES15: *Si tomamos dos bases de V.*
E: A ver dé una base.
(El estudiante escribe)


Respuesta:
el tamaño de la matriz será de nxn, ya que si tomamos dos bases de V, y al poner los vectores de una base en términos de la otra, habrán "n" vectores con "n" componentes, es decir, todos los vectores de coordenadas de los vectores de "n" tendrán "n" componentes, y al ponerlos como columnas de una matriz, al final dicha matriz será cuadrado y tendrá el orden del espacio vectorial (en este caso "n").
Sea $B_1=\{p_1,p_2,\dots,p_n\}$ y $B_2=\{m_1,m_2,\dots,m_n\}$

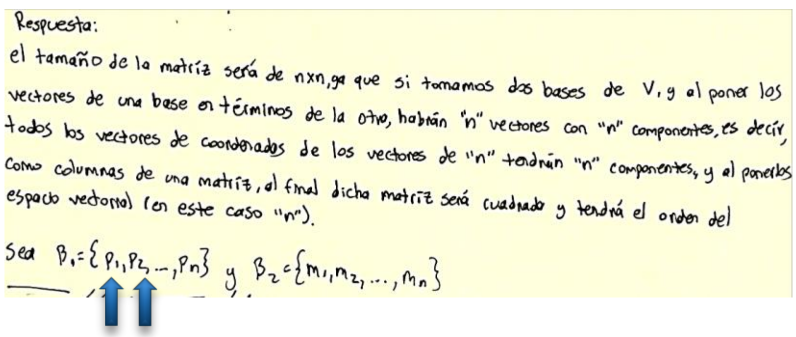
E: ¿Cuántos elementos tiene?
ES15: n.
E: ¿Entonces esa es una base de quién?
ES15: *Esta es una base de* $\mathbb{P}_n[x]$
E: ¿Y $\mathbb{P}_n[x]$ son los polinomios de grado?
ES15: *Menor o igual a* n.
E: ¿Podría dar una base conocida?
ES15: *Pues la canónica sirve*.
E: ¿Cuál sería esa?
ES15: $1, x, x^2 \dots$
E: ¿Y cuantos elementos tiene?
ES15: $n+1$, *sí* $n+1$.
E: Aja, ¿y eso que quiere decir?
ES15: Que el tamaño de la matriz ser $(n+1)\ x\ (n+1)$.
E: ¿Por qué?
ES15: *Porque la base tiene* $n+1$ *vectores.*

E: *Ok, una base de aquí tiene* $(n+1)$ *y de ahí como concluye que el tamaño de la matriz es* $(n+1)\ x\ (n+1)$ *. Bueno hasta aquí te creo, ya me diste una base y tiene* $(n+1)$ *vectores, y ahora ¿por qué dices que el tamaño de la matriz es de?*

ES15: *Sí, listo la matriz es de tamaño* $(n+1)\ x\,(n+1)$ *porque esta base tiene* $(n+1)$ *vectores y esta base también tiene* $(n+1)$ *(señala).*


Respuesta:
el tamaño de la matríz será de nxn, ya que si tomamos dos bases de V, y al poner los vectores de una base en términos de la otra, habrán "n" vectores con "n" componentes, es decír, todos los vectores de coordenadas de los vectores de "n" tendrán "n" componentes, y al ponerlos como columnas de una matríz, al final dicha matríz será cuadrado y tendrá el orden del espacio vectorial (en este caso "n").
Sea $B_1=\{p_1,p_2,\dots,p_n\}$ y $B_2=\{m_1,m_2,\dots,m_n\}$

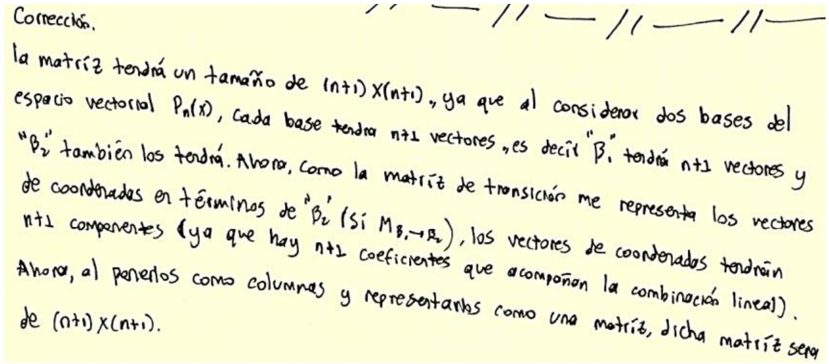
ES15: *Entonces al hallar la matriz de transición de* B_1 *a* B_2*, lo que estoy haciendo es poner este vector en términos de estos vectores y ponerlos como columnas entonces este primer vector, tendrá* n *componentes,* $n+1$ *componentes, este otro vector tendrá* $n+1$ *componentes* (señala).


Respuesta:
el tamaño de la matríz será de nxn, ya que si tomamos dos bases de V, y al poner los vectores de una base en términos de la otra, habrán "n" vectores con "n" componentes, es decír, todos los vectores de coordenadas de los vectores de "n" tendrán "n" componentes, y al ponerlos como columnas de una matríz, al final dicha matríz será cuadrado y tendrá el orden del espacio vectorial (en este caso "n").
Sea $B_1=\{p_1,p_2,\dots,p_n\}$ y $B_2=\{m_1,m_2,\dots,m_n\}$

ES15: *Entonces al hallar el vector de coordenadas también va a tener* $n+1$ *componentes, porque son los coeficientes de la combinación lineal. Entonces al poner mis* $n+1$ *vectores así, (hace señas con la mano, como sí los acomodara como columnas) va a ver* $n+1$ *un vectores como columnas ¿sí? Y cada vector tiene* $n+1$ *componentes, o sea van a ver* $n+1$ *filas.*

E: Ok, ¿y entonces por eso tendría el tamaño de?

ES15: $(n+1)\ \ x\ \ (n+1)$*, entonces lo arreglo* (el estudiante corrige su respuesta, escribe).



Corrección.

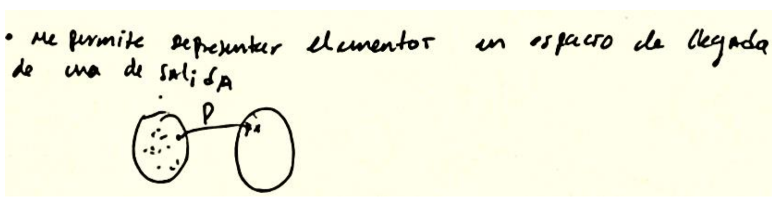
la matríz tendrá un tamaño de (n+1) X(n+1), ya que al considerar dos bases del espacio vectorial $P_n(x)$, cada base tendrá n+1 vectores, es decir "β_1" tendrá n+1 vectores y "β_2" también los tendrá. Ahora, como la matríz de transición me representa los vectores de coordenadas en términos de "β_2" (si $M_{\beta_1 \to \beta_2}$), los vectores de coordenadas tendrán n+1 componentes (ya que hay n+1 coeficientes que acompañan la combinación lineal). Ahora, al ponerlos como columnas y representarlos como una matríz, dicha matríz será de (n+1) X(n+1).

Figura 4.30. Respuesta corregida del ES15.Pe6.

Lo expuesto por el estudiante 15 muestra cómo logra evidenciar una estructura proceso de la matriz de cambio de base, ya que para el espacio vectorial dado es capaz de dar una base conocida y a partir de ahí empezar su análisis basado en el dinamismo de esta estructura sobre las columnas de la matriz de cambio de base. Este tipo de concepción le permitió encapsular dicho proceso en un objeto.

Consideremos las ideas de ES9 y ES2 la primera obtenida como evidencia después de la entrevista y la segunda idea plasmada en el diagnóstico.

ES9



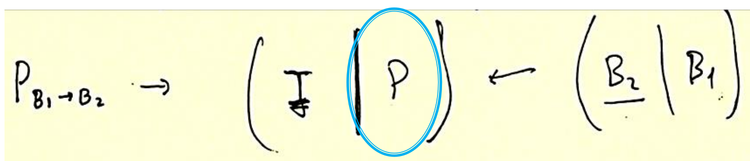
ES2

"Si $T[x] = A[x]$ donde $A = [T]_{B \to B'}$ para algunos B, B' que generan es decir Sea una T, lineal $\ni L(V^m_{B'}, W^n_B)$ donde $gen\, B = V \ \wedge gen\, B' = W$. Una matriz de transformación es una matriz que al multiplicarla por un elemento de V me da un único elemento en W donde es $dim\, V = m \ \wedge \dim W = m \Rightarrow A$ es de m x m"

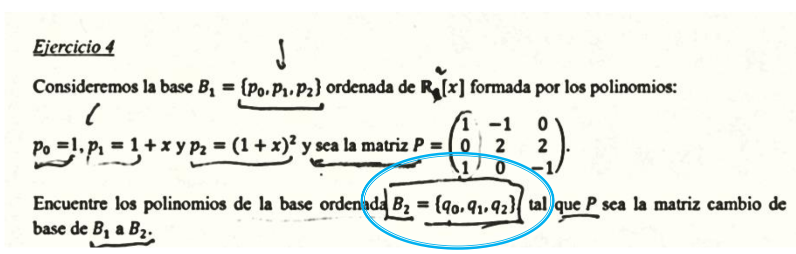
Estas ideas respecto a la definición que tienen sobre la matriz de cambio de base, son ideas cercanas a definir una función entre un mismo espacio vectorial en donde se consideraría a la matriz como la regla de correspondencia en la cual lo que recibe como entrada son vectores coordenados en una base y regresa coordenadas en otra base, es decir, la encapsulación se lograría cuando un individuó considera a la matriz cuadrada en donde su tamaño está asociado con la dimensión del espacio vectorial. Cuando se consideré a la matriz de cambio de base como una función cuyo dominio y contradominio es F^{nx1} de tal manera que al evaluar esta función f que recibe como entrada la matriz de coordenadas de un vector y devuelve la matriz de coordenadas del mismo vector respecto a otra base, esto es, $f: F^{nx1} \longrightarrow F^{nx1}$ en donde $f([x]_B) = M_{B \to B_1}[x]_B = [x]_{B_1}$ o $f_1: F^{nx1} \longrightarrow F^{nx1}$ en donde $f_1\big([x]_{B_1}\big) = M_{B_1 \to B}[x]_{B_1} = [B]_B$.

Ya encapsulado el proceso se da paso al objeto, el estudiante 9 muestra aplicar acciones específicas sobre el concepto matriz de cambio de base, puesto que ve a la matriz como un todo cuando calculaba su inversa y posterior a ello es capaz de revertir el proceso que lo genero y vuelve a ver a la matriz cambio de base en función de sus columnas para dar solución al problema cuatro de la entrevista. Esto se evidencia en el siguiente fragmento.

ES9: *Entonces para llegar a eso... Yo sé qué... si quiero que P sea esto. Entonces lo que debo llegar es lo siguiente, bebo tener la identidad y debo tener P acá. Sí, esto debe ser el resultado de... Hacer esto sí.*



ES9: *Entonces ¿qué pasa? Se asume como P ya... asumo que P se ya la matriz de cambio de base. Lo que debo encontrar es esto* (señala).



Ejercicio 4

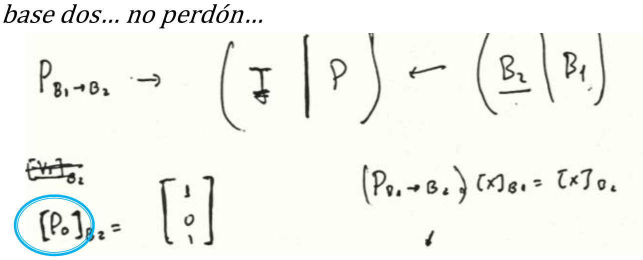
Consideremos la base $B_1 = \{p_0, p_1, p_2\}$ ordenada de $\mathbb{R}_2[x]$ formada por los polinomios:

$p_0 = 1$, $p_1 = 1 + x$ y $p_2 = (1+x)^2$ y sea la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Encuentre los polinomios de la base ordenada $B_2 = \{q_0, q_1, q_2\}$ tal que P sea la matriz cambio de base de B_1 a B_2.

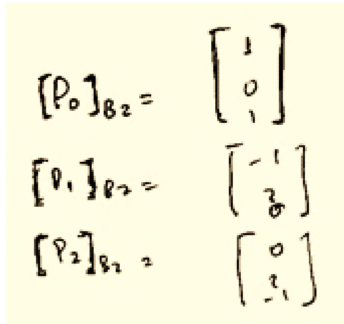
E: Ok, de hecho ya te están dando P.

ES9: *Sí, exacto. Asumo que el elemento uno de la Matriz P esta ordenado en la base 2, entonces para llegar la.... Sí o sea... es de la base uno a la base dos... no perdón...*



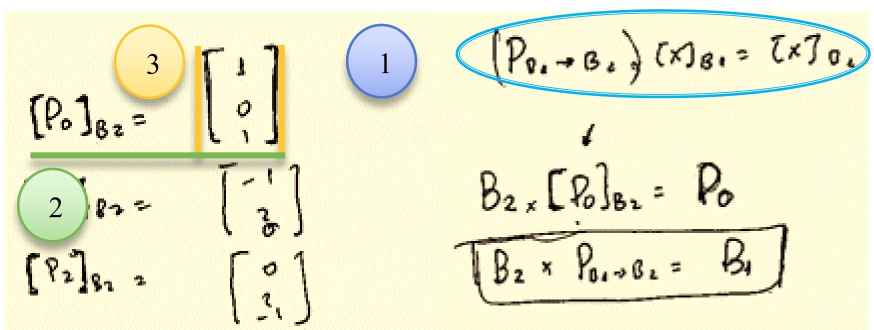
ES9: *Esto* p_0 *ordenado a la base* B_2 *es igual a* (escribe $[p_0]_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$).

E: Aja son las…
ES9: *Son los elementos de B_1 ordenados en la base B_2. O sea que p_1 ordenado a la base B_2 sería y p_2 ordenado en la base B_2 sería* (escribe).



El estudiante 9 deja de pensar en el dinamismo en función de las columnas de la matriz y tiene la necesidad de tratar a la matriz de cambio de base como un todo, a cual le quiere aplicar una acción específica veamos el siguiente fragmento.

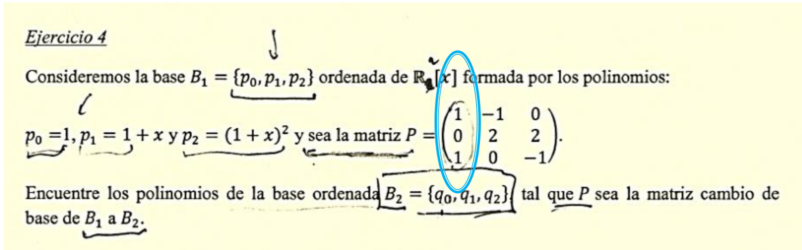
ES9: *Y multiplico por un vector en la base* b_1 *obtengo esto ¿sí? (señala 1). Este elemento ordenado* (señala 2).
(El estudiante tarda unos minutos reflexionando en silencio).
E9: *Esto es* (señala 3).



E: A ver ¿cómo lo estas intentando resolver?
ES9: *Pues yo sé que la matriz P tomándola como cambio de base, pues serían los elementos de la base B_1 visto en la base B_2.*
E: Ok, ahí los tienes. ¿Eso te ayuda?
ES9: *Sí es una multiplicación de matrices sólo que estoy tratando de deducirla… a ver se supone que…*

En el siguiente fragmento el estudiante 9 evidenciaba dicha acción que aplica a la matriz de cambio de base, esto es al calcular su inversa. Para lograrlo el estudiante ha encapsulado del proceso de matriz de cambio de base como objeto.

E: Ok, a ver aquí que tendrías…
ES9: *Se supone que yo multiplico esto* (señala).



Ejercicio 4

Consideremos la base $B_1 = \{p_0, p_1, p_2\}$ ordenada de $\mathbb{R}_2[x]$ formada por los polinomios:

$p_0 = 1, p_1 = 1 + x$ y $p_2 = (1+x)^2$ y sea la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Encuentre los polinomios de la base ordenada $B_2 = \{q_0, q_1, q_2\}$ tal que P sea la matriz cambio de base de B_1 a B_2.

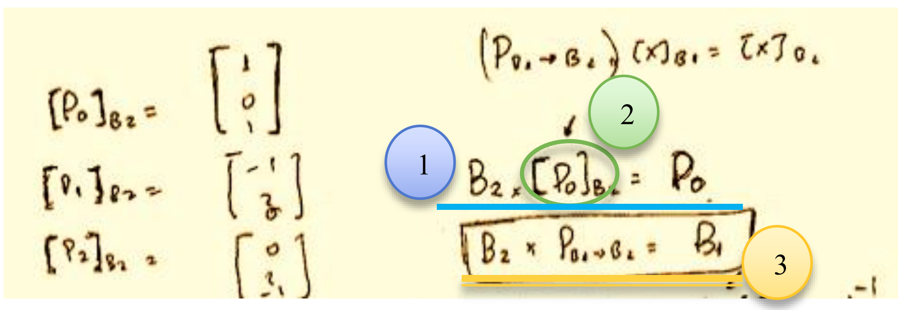
ES9: *Por la base B_2 ¿Qué me daría?*

E: ¿Cuando dices la base B_2 te refieres a?

ES9: *Si, a este elemento, llamemos... llamemos B_2 por este que medaría* (escribe 1)*. Me daría p_0.*

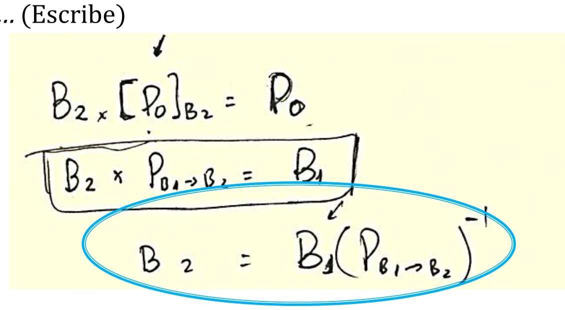
E: ¿Qué base 2, está? (señala $B_2 = \{q_0, q_1, q_2\}$)

ES9: *La base que debo calcular (señala $B_2 = \{q_0, q_1, q_2\}$). Multiplicada por esto medaría p_0 ¿no?* (señala 2)*... Ahora necesito hallar la matriz. (El estudiante reflexiona) o sea que B_2 por...* (Escribe 3).



E: ¿Por qué?

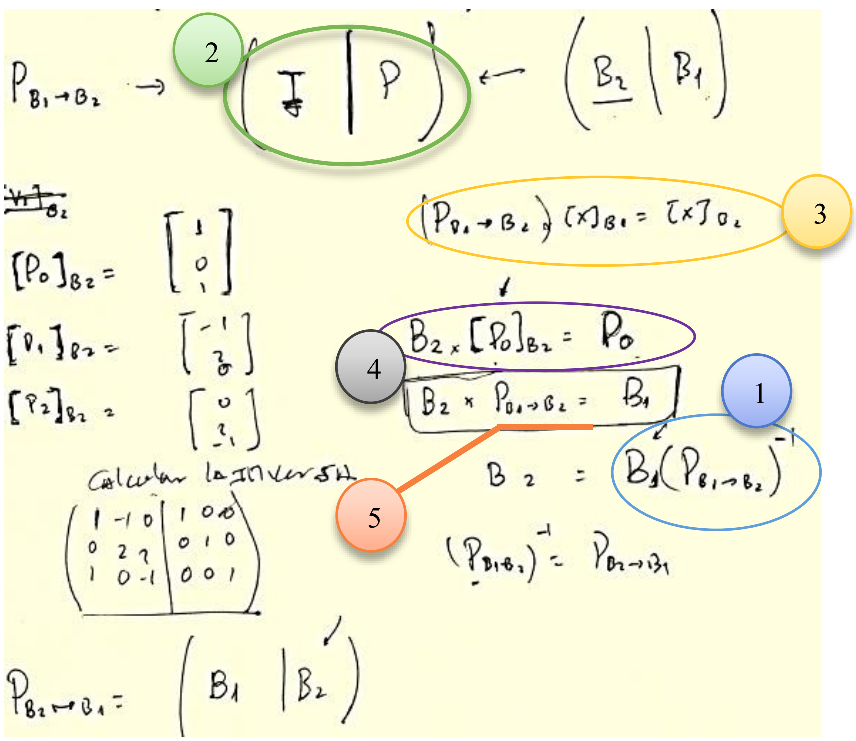
ES9*: Pues porque si cojo cada elemento voy a tener multiplicación de matrices (hace señas de que multiplicaría B_2 por cada $[p_0]_{B_2}, [p_1]_{B_2}, [p_3]_{B_2}$), entonces ya está resuelto, B_2 sería igual a B_1 por...* (Escribe)



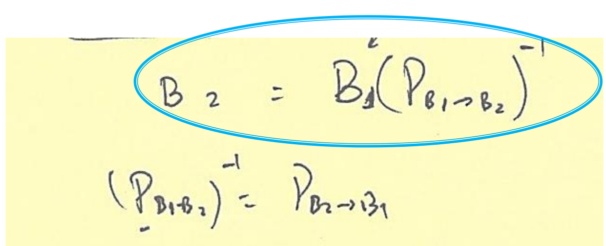
Lo planteado por el estudiante 9 ante su propia reflexión y sus concepciones proceso base ordenada, y de matriz, hicieron que tratará al vector de coordenadas como la matriz de coordenadas, aunque explícitamente no menciona este concepto, pero mencionaba una multiplicación de matrices. Es decir, se queda con la información que le da cada componente y lo encapsula en una matriz de coordenadas para que posteriormente pueda multiplicar por B_2 (notemos que se refiere a B_2 como una matriz construida con los vectores de la base).

Continuando con la entrevista sale a la luz la acción específica que aplica para dar solución al problema.

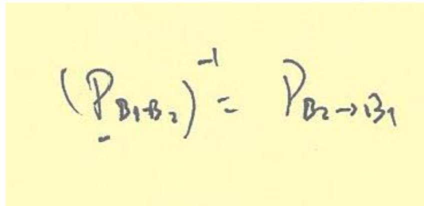
ES9: ¿Si la calculo?
E: ¿Cuál?
ES9: Esta (señala 1). *¿Hago la inversa?*
E: Bueno la idea aquí ¿cuál es?
ES9: *Bueno pues… esta representación me saca de dudas* (señala 2). *El hecho de que los elementos de mi cambio de base son los elementos de la base B_1 representados en la base B_2* (señala 3). *En otras palabras es la combinación lineal de los elementos de B_2 o resolver el sistema Gauss-Jordán, teniendo en cuenta B_2. Entonces sí yo tengo este elemento y lo multiplico por esta base pues me daría p_0* (señala 4). *¿Qué es el elemento B_1? Entonces si cojo toda la matriz* (señala 5, $P_{B_1 \to B_2}$).



ES9: *Por B_2 voy a obtener B_1. Entonces B_2 sería B_1 por la inversa del cambio de base y ya.* (Señala).

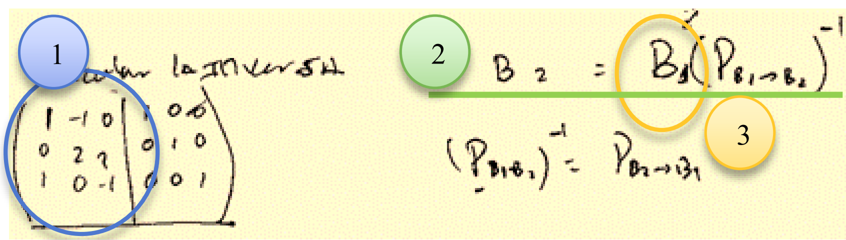


ES9: *Ahora la inversa del cambio de base pues es* (escribe)

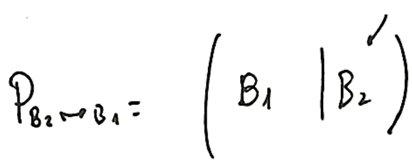


Los planteamientos del estudiante 9 ante el problema evidenciaron que logra encapsular el proceso de la matriz de cambio de base en un objeto. El siguiente fragmento muestra finalmente la acción específica que realiza sobre dicho objeto.

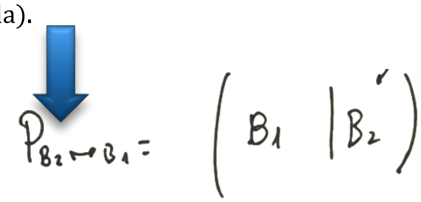
ES9: *Y ya, lo puedo resolver por dos formas. Encontrando la inversa de esta* (señala 1). *O qué... calculando el cambio de base para resolver esto* (señala 2). *Tengo* B_1. *Puedo hacer esto* (escribe 3)...



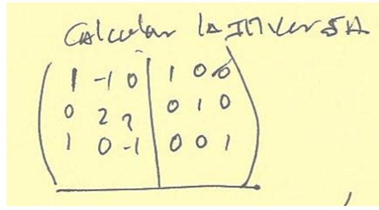
ES9: *Al calcular la inversa, al calcular la inversa. Obtengo la matriz que me cambio de* B_2 *a* B_1 *que es tener la base* B_1 *aquí y la base* B_2 *acá* (escribe).



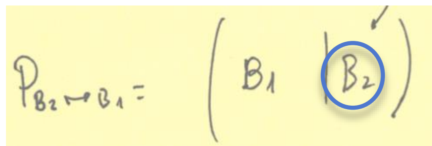
E: Mmmju... a ver, trata de calcularla.
ES9: *¿Esta?* (Señala).



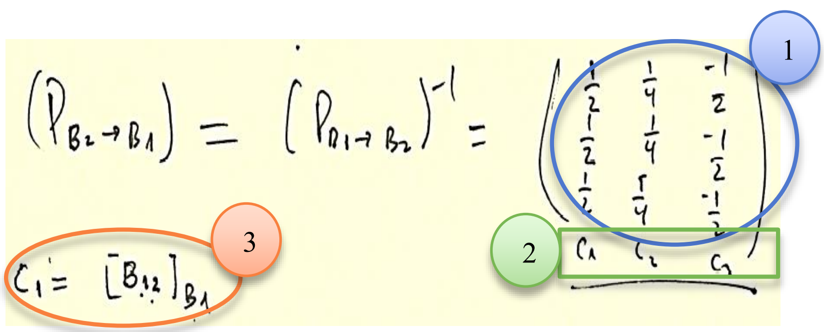
E: ¿Cuál ibas a hacer?
ES9: *No pues la única que puedo hacer en estos momentos es esta.*



ES9: *Pero si tuviera... al igual puedo hacer esto pero si tuviera*...
E: No si quieres una primero, ya después haces la otra.
ES9: *No pues la otra no se puedo porque no conozco* B_2 (señala).



E: De hecho es lo que estás buscando. Digo B_2 la base.
ES9: *Sí, sí.* (Comienza a escribir). *Bueno entonces ya. Esto sería esto* (escribe 1).
E: ¿Por ejemplo ahí, que nos está representado cada columna?
ES9: *Señor.*
E: De la matriz de cambio de base que encontraste ahorita ¿qué te representa cada columna?
ES9: *A bueno pues, digamos* c_1, c_2, c_3 (escribe 2). c_1 *es el elemento uno de la base 2 ordenado en la base* B_1 (escribe 3).

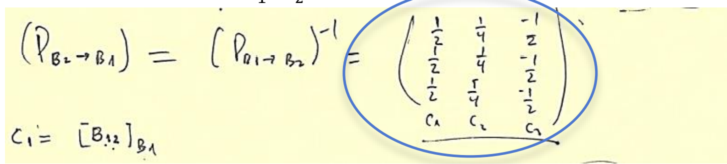


E: ¿El elemento que perdón?
ES9: *Uno de la base* B_2 *ordenado a la base* B_1.
E: El elemento uno de la base...
ES9: B_2 *ordenado a la base* B_1.

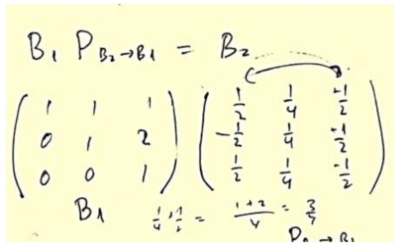
Una vez aplicada la acción específica a la matriz de cambio de base (calcular su inversa) el estudiante, volvió aplicar otra acción específica (multiplicar el cambio de base encontrado $P_{B_1 \to B_2}$ por los vectores como de la base B_1), esto con el fin de encontrar los vectores que conforman a la base B_2.

E: Ok. ¿Y usted está buscando?

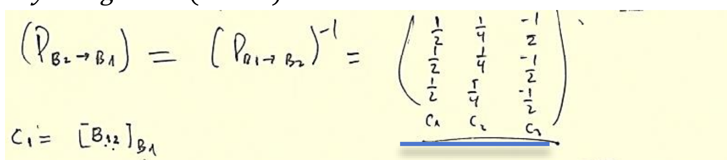
ES9: *Bueno no, pues calcular la inversa y multiplicar o sea* B_1 *por esta matriz* (señala: $B_2 = B_1(P_{B_1 \to B_2})^{-1}$). O *sea* B_1 *por esta matriz* (señala).



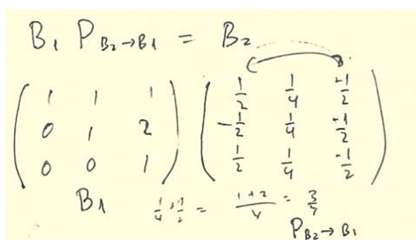
ES9: *Y eso me va dar* B_2 (escribe).



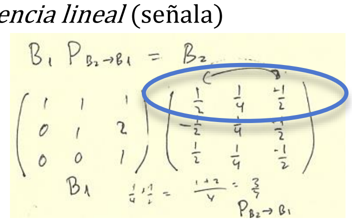
ES9: *Ok ya tengo esto* (señala).



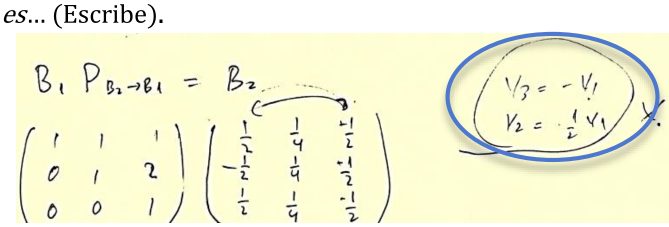
ES9: *Ya tengo* B_1 *ya sólo toca multiplicar.*
E: Ok, a ver encuentre a q_0, q_1, q_2.
ES9: *Esto es esto y esto es lo otro*. (Escribe).



ES9: *Pero tampoco sé si está bien calculado* $P_{B_2 \to B_1}$*, parece que no. Porque no hay independencia lineal* (señala)

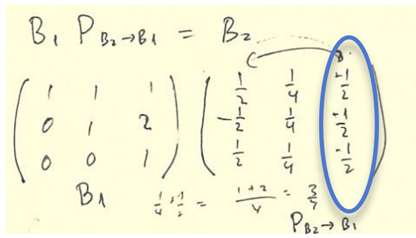


ES9: v_3 *es*… (Escribe).

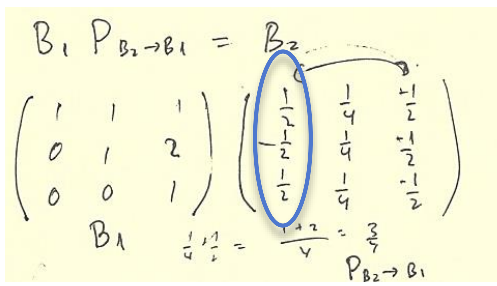


Notemos que el estudiante 9 no sólo encapsulo el objeto de matriz de cambio de base, además logra regresar al proceso, puesto que esta consiente que la matriz de cambio de base está bien calculada. Entonces las columnas deben de ser linealmente independientes, y eso muestra evidencia contundente del control que tiene sobre el objeto de estudio, esto se puede apreciar en la siguiente transcripción de la entrevista.

ES9: *Entonces si estaba mal pero. Así como estaba está mal calculado porque, este vector* (señala).

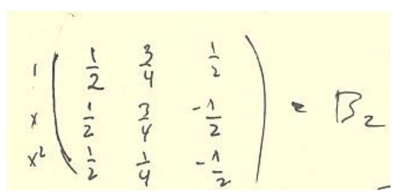


ES9: *Es menos el primero y este es un medio de este.* (Escribe)



E: Sí lo que me dijiste, entonces por tu primer argumento no sería una matriz de cambio de base.

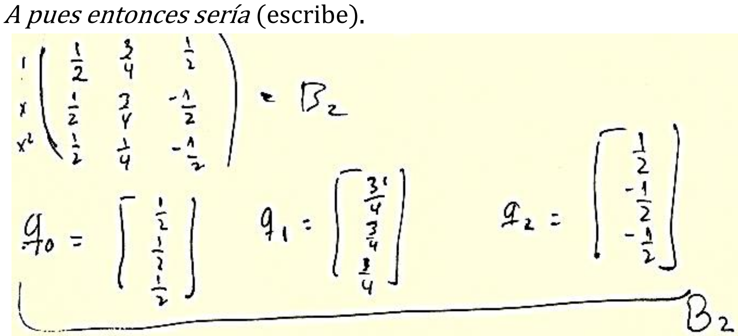
ES9: *Entonces multiplico* (escribe).



ES9: *Y esto sería B_2.*

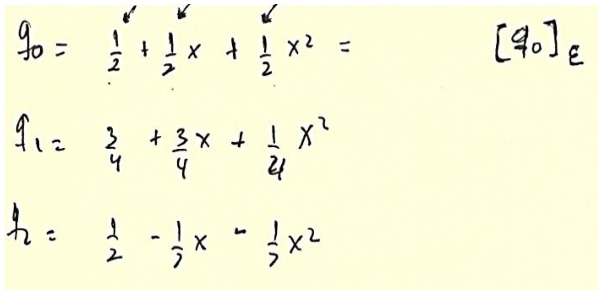
E: Ok. ¿Pero quienes serían q_0, q_1, q_2?

ES9: *A pues entonces sería* (escribe).



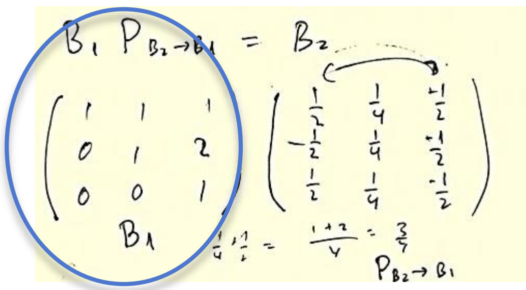
E: Estamos en el espacio de polinomios, y q_0 entendería que me lo tienes que dar como polinomio y me estás dando…

ES9: *A bueno, asumiría que es así* (escribe).



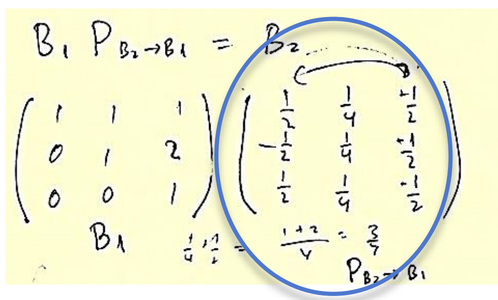
E: Ok, a ver recapitulando encontraste una matriz inversa. Salvo cálculos la encontraste y de ahí multiplicaste por…

ES9: *La base* B_1*, esto es* B_1 (señala).



E: ¿La base B_1?

ES9: *Y esto es el cambio de base de* B_2 *a* B_1*.*



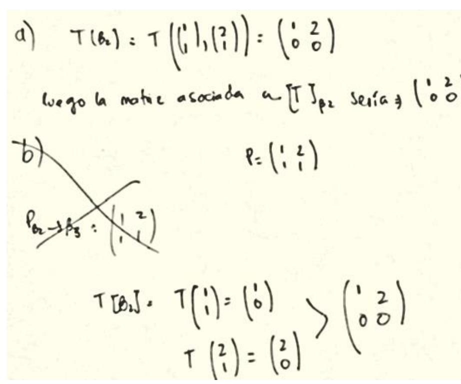
E: Y ya sabes que cada columna teda ¿qué?

ES9: *Meda… cada columna me da los elementos de la base* B_2*.*

A pesar de que el estudiante 9 comete errores aritméticos al calcular la inversa de la matriz $P_{B_1 \to B_2}$ da evidencia de haber encapsulado el objeto, puesto que está muy consiente que si tiene $P_{B_1 \to B_2}$ la matriz inversa será el cambio de base de $P_{B_2 \to B_1}$. Después de calcular desencapsula el objeto, y considera a la matriz de cambio de base en función de sus columnas.

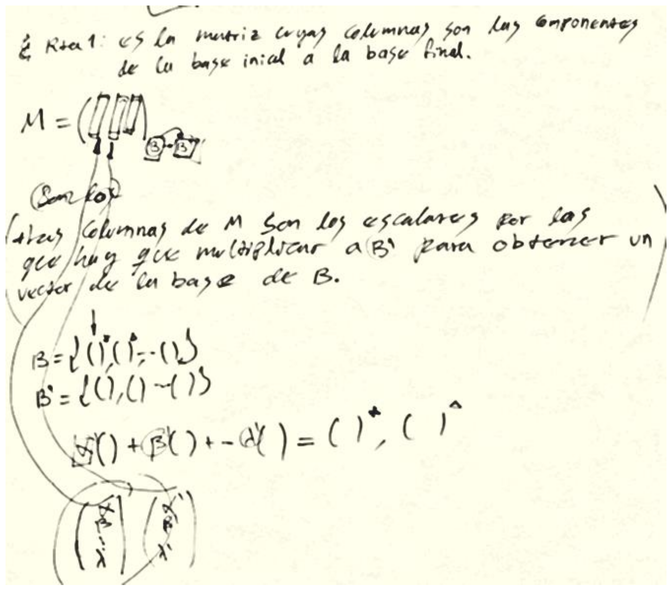
Por otro lado analizaremos algunos elementos qué podrían dar paso inicial a la construcción del esquema; este dependerá de la experiencia de cada uno de los individuos al relacionar la matriz cambio de base, por ejemplo, como un caso particular de la matriz asociada a una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita. Buscamos información de esta estructura con la pregunta cinco de la entrevista. Los estudiantes entrevistados mostraron que a lo más son capaces de aplicar ciertas acciones específicas al objeto matriz de cambio de base puesto que no mostraron evidencia de conectar, a la matriz de cambio de base con la matiz asociada a una transformación lineal. Más aún, los entrevistados mostraron mucha dificultad para calcular la matriz asociada a una transformación lineal esto quizá por el cansancio y duración de la entrevista lo cual pudo llevarlos a no contestar más para no ser cuestionados.

Particularmente este problema lo consideramos un poco más complicado en comparación con los demás; dado que no es suficiente tener una concepción objeto de la matriz de cambio de base. Se requiere establecer relaciones con estructuras de otros conceptos, lo ideal es considerar a la matriz cambio de base como un caso de una matriz asociada a una transformación lineal y aplicar un resultado. Por ejemplo, el estudiante 28 a lo más es capaz de calcular las imágenes de los vectores de la base B_2 pero olvida expresar esas imágenes como combinación lineal de los elementos de la base B_2, posiblemente este hecho asociado a la falta de una concepción Acción de la matriz asociada a una transformación lineal.

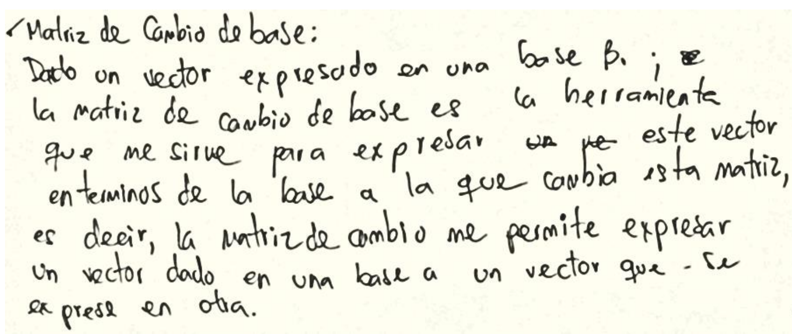


A los estudiantes entrevistados se les pidió en la pregunta siete que dieran su definición del concepto de matriz de cambio de base. Esperábamos respuestas muy cercanas al concepto en términos de la definición formal. A continuación aparecen algunas de las respuestas dadas.

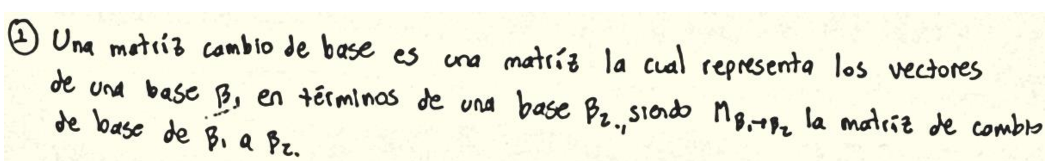
ES20



ES28



ES15



A pesar que los estudiantes 15, 9, 20 y 28 muestran una estructura más allá de acción, dichos estudiantes sólo describen la función de la matriz, el procedimiento de cómo encontrarla o la utilidad de la misma. Es claro el nulo uso del lenguaje formal para dar una definición matemática. Esto manifiesta su forma de concebir al objeto de estudio y posiblemente su forma de haberlo construido y relacionarlo con otros conceptos.

Capítulo 5

5 CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

En este capítulo se presentan las conclusiones generales de nuestro proyecto, resaltando los principales hallazgos después de la aplicación de la prueba diagnóstico y la entrevista. Mostramos el aporte teórico; la descomposición genética del concepto *Matriz de Cambio de Base* validada con base en el trabajo realizado por los estudiantes. Además proponemos algunas sugerencias didácticas para el tratamiento del concepto matriz de cambio de base en cursos regulares de Álgebra Lineal, así como algunas propuestas para futuras investigaciones.

5.1 Rediseño de la descomposición genética validada del concepto matriz de cambio de base

Primero se describe de manera general las estructuras y mecanismos mentales asociados a la hora de construir la matriz de cambio de base. En segundo mostramos procedimientos matemáticos que son el reflejo propio que tiene un individuo respecto a dichas estructuras.

5.1.1 Descomposición genética validada del concepto matriz cambio de base

Después de la aplicación de la prueba diagnóstico y la recolección de datos de las entrevistas videograbadas, describiremos las estructuras y mecanismos asociados a la matriz de cambio de base que se encontraron como evidencia, y realimentamos la descomposición genética hipotética.

Acción: esta concepción está caracterizada por el conjunto de transformaciones que un individuo realiza de manera externa para calcular la matriz cambio de base; esto es, dadas dos bases ordenadas B y B_1 del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, él podrá calcular la matriz cambio de base de B a B_1 o de B_1 a B mediante las acciones específica que logre establecer para construir cada columna de la matriz buscada. Esta estructura, Acción, está directamente asociada con la concepción proceso del concepto de base ordenada.

La ***interiorización*** de esta acciones surge a partir de la reflexión de los estudiantes sobre las componentes de la matriz de cambio de base, es decir, cuando asimilan que cada columna de la matriz está relacionada con la escritura de los vectores de salida como combinación lineal de los vectores de llegada; esto se asocia directamente con las relaciones que establece con las estructuras previas de base y vector de coordenadas. Además cuando pueden predecir el tamaño de la matriz y cuando es consciente del efecto que causa el orden en las bases.

En el caso de considerar las n-tuplas de las bases dadas como columnas, se debe interiorizar que dichos vectores se escriben en una tercera base (usualmente la base canónica del espacio vectorial de dimensión finita dado), además de interiorizar que matrices construidas van de cada lado (véase figura 4.10) para posteriormente aplicar el método de Gauss-Jordan.

Proceso: diremos que el individuo ha logrado interiorizar las Acciones descritas en un Proceso, cuando pueda reflexionar sobre la matriz de cambio de base, sin realizar cálculos específicos para encontrarla, por ejemplo, para el caso que la base de llegada sea una base canónica. La interiorización de las acciones permite que el individuo logre realizar transformaciones mentales que lo lleven a pensar en características de la matriz cambio de base relacionadas con las bases definidas (cada columna de la matriz está relacionada con la escritura de los vectores de salida como combinación lineal de los vectores de llegada, es decir, esta estructura se puede describir en función de sus columnas las cuales el individuo entiende que representan). Esta concepción incluye el trabajo sobre cualquier espacio vectorial V de dimensión finita. Como puede verse en la estructura anterior, sólo consideramos el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, dado que las acciones específicas las asociamos con dicho espacio. La complejidad de la construcción del Proceso estará dada entonces, al determinar la matriz de cambio de base en espacios vectoriales de dimensión finita sobre cualquier campo K.

El mecanismo de ***encapsulación*** puede ser generado por un individuo cuando considera la matriz de cambio de base como una matriz cuadrada y establece que su tamaño está relacionado con la dimensión del espacio vectorial. Más aun, cuando logra concebir a la matriz de cambio de base como una función cuyo dominio y contradominio es $F^{n\text{x}1}$ de tal manera que al evaluar esta función f que recibe como entrada la matriz de coordenadas de un vector y devuelve la matriz de coordenadas del mismo vector respecto a otra base, esto es, $f: F^{n\text{x}1} \longrightarrow F^{n\text{x}1}$ en donde $f([x]_B) = M_{B\to B_1}[x]_B = [x]_{B_1}$ o $f_1: F^{n\text{x}1} \longrightarrow F^{n\text{x}1}$ en donde $f_1\big([x]_{B_1}\big) = M_{B_1\to B}[x]_{B_1} = [x]_B$. Una vez el individuo tiene necesidad de aplicar acciones específicas se da paso a la construcción del objeto.

Objeto: el proceso de matriz cambio de base se encapsula en un objeto, cuando el individuo considera la matriz como un elemento del conjunto de matrices $n \times n$ invertibles, donde n depende de la dimensión del espacio vectorial. Esto se da cuando el individuo debe enfrentar situaciones en donde necesite aplicar acciones sobre este nuevo objeto. Por ejemplo, al determinar la matriz inversa, utilizar a la matriz de cambio de base para obtener las coordenadas de un vector respecto a otra base (puesto que vea a la matriz como una regla de correspondencia entre un mismo espacio vectorial), entre otras.

Respecto a la desencapsulación consideramos que el objeto se regresa en el proceso que lo genero cuando se considera a la matriz de cambio de base respecto a que representan sus columnas.

5.1.2 Procedimientos matemáticos según la concepción respecto a la matriz de cambio de base

Un individuo con una concepción acción limita su trabajo en un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, puede realizar las siguientes transformaciones las cuales obedecen a dos caminos en pro de construir la matriz de cambio de base:

Método 1. (Ver figura 4.11)

- Identificar la sucesión en la base para tener una forma de decidir que vector va primero, que vector va después y así sucesivamente.
- Considerar los vectores de las bases dadas como columnas.
- Construir una matriz ampliada con los vectores de las bases dadas como columnas.
- Aplicar operaciones elementales para reducir una matriz a su forma escalonada reducida.

Método 2. (Ver figura 4.8)

- Identificar la sucesión en la base para tener una forma de decidir que vector va primero, que vector va después y así sucesivamente.
- Escribir como combinación lineal los vectores de una base respecto a otra base.
- Escribir como una columna el vector de coordenadas.

Estas transformaciones o acciones específicas de los diferentes conceptos que se pueden realizar a la hora de construir una matriz de cambio de base, están asociadas con la experiencia de cada individuo.

Un individuo con una concepción proceso puede hacer todas las transformaciones anteriores pero ahora al trabajar en un espacio vectorial V de dimensión finita sobre un campo

K. Más aun, el individuo al tomar conciencia de que representan las columnas de la matriz cambio de base:

- Reconoce que las columnas de la matriz $M_{B\to B_1}$son linealmente independientes.
- Distingue cuál es la diferencia entre las matrices $M_{B\to B_1}$ y $M_{B_1\to B}$, es decir, distingue que la matriz $M_{B\to B_1}$ tiene como i-esima columna a $[v_i]_{B_1}$ mientras que $M_{B_1\to B}$ tiene como i-esima columna a $[u_i]_B$.
- Puede hasta calcular la matriz de cambio de base cuando la base de llegada es la base canónica de $\mathbb{R}^n$ sin hacer cálculos matemáticos, esto al considerar como columnas los vectores de la base de salida.

Cuando un individuo tiene una estructura sofisticada como el objeto, las acciones que podría aplicar son algunas de las siguientes:

- Calcular la inversa de $M_{B\to B_1}$ para determinar $M_{B_1\to B}$.
- Considerar la matriz de cambio de base para calcular las coordenadas de un vector en otra base mediante una multiplicación, es decir:

$$M_{B\to B_1}[v]_B = [v]_{B_1}$$
$$M_{B_1\to B}[v]_{B_1} = [v]_B.$$

Para la construcción de la matriz de cambio de base, se proponen dos formas de proceder que se sustentan en las producciones de los estudiantes, en donde ellos mencionan intuitivamente conceptos, los cuales nosotros precisamos matemáticamente y los asociados a algún tipo de concepción.

5.2 Construcción de la matriz de cambio de base

Con sustento en la teoría APOE y particularmente en las concepciones que se tiene de algunos conceptos relacionados con la Matriz de Cambio de base, validamos que para que un estudiante logre una estructura objeto de este concepto, es necesario que tenga las estructuras previas *base ordenada como un proceso* y *vector de coordenadas como objeto*. Una estructura mental necesaria que no fue contemplada pero es de vital importancia a la hora de la construcción del objeto matriz de cambio de base es la *concepción objeto de la matriz de coordenadas* (en el sentido de Hoffman y Kunze (1973); en esta concepción el individuo se queda con la información de las componentes del vector de coordenadas para considerarlo ahora un vector del espacio vectorial $K^{n\text{x}1}$ al cual puede aplicar acciones específicas cuando lo requiera, notemos que precisamente cada columna de la matriz de cambio de base es una matriz de coordenadas.

En la construcción de la *Matriz de Cambio de Base* el estudiante inicia estableciendo el orden en las bases dadas, este orden se presenta como un objeto o un proceso: el primero refiere a considerar a las bases como conjuntos ordenados y tomar el orden establecido; el segundo se da cuando el estudiante establece qué vector se antepone al siguiente y así sucesivamente hasta ordenar las bases.

Ahora si V es un espacio vectorial sobre el campo K de dimensión finita n, y sean $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $B_1 = \{u_1, u_2, \dots u_\text{n}\}$ bases ordenadas, entonces el estudiante con una concepción proceso de base ordenada puede escribir el vector v_1 de la base B como combinación lineal de los elementos de la base B_1, es decir, asume la existencia de los $a_{ij} \in K$, con $i = 1, \dots, n$ y $j = 1$ tal que $v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 \dots + a_{n1}u_\text{n}$. El estudiante debe de coordinar el proceso de vector de coordenadas y el proceso de combinación lineal para generar las coordenadas de v_1 respecto a la base B y a su vez almacenar la información que le brinda cada componente de dicho vector teniendo como resultado el proceso $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$, esto es encapsulado por parte del estudiante cuando se queda con la información de los componentes para ver al vector como una matriz de coordenadas $[v_1]_{B_1} \in K^{n\text{x}1}$ una vez construido este objeto, tiene que regresar sobre el proceso de la matriz de coordenadas

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}.$$

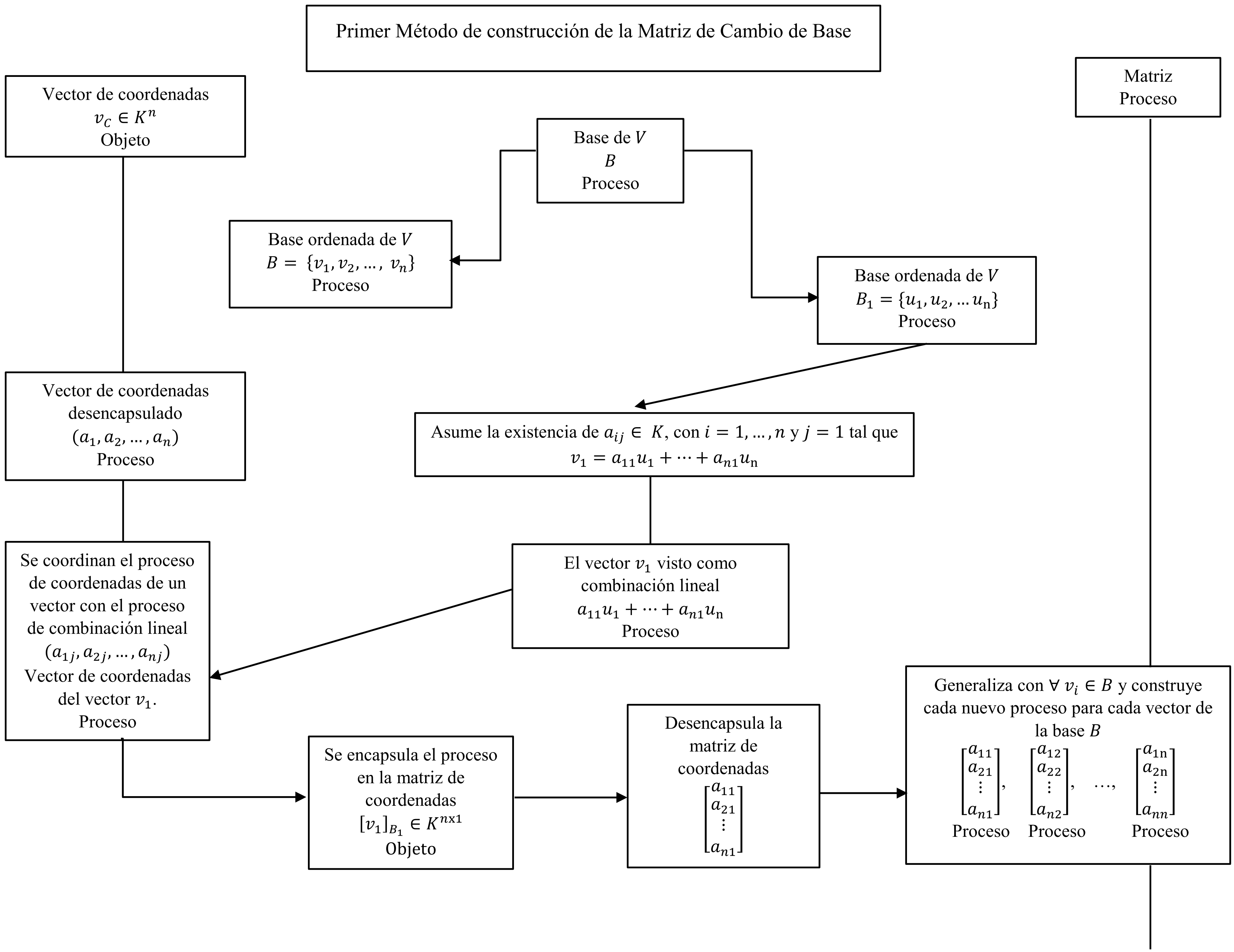
Con el cuantificador para todo ($\forall$), generaliza que tiene que construir para cada $v_i \in B$ con $i = 1, \dots, n$ los *n*-procesos de las matrices de coordenadas

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Una vez que tenga los *n*-procesos de las matrices de coordenadas de los vectores n vectores de la base de B en términos de la base B_1, estos se coordinan con el proceso de Matriz para considerar una matriz como una secuencia de columnas verticales

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mathrm{n}} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2\mathrm{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

La cual es encapsulada en el objeto matriz de cambio de base $M_{B\to B_1}$, cuando considera a dicha matriz como un elementó del conjunto de matrices cuadradas e invertibles o como una función (véase la siguiente ilustración).


Primer Método de construcción de la Matriz de Cambio de Base
Vector de coordenadas $v_C \in K^n$ Objeto
Base de V B Proceso
Matriz Proceso
Base ordenada de V $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ Proceso
Base ordenada de V $B_1 = \{u_1, u_2, \ldots u_n\}$ Proceso
Vector de coordenadas desencapsulado $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ Proceso
Asume la existencia de $a_{ij} \in K$, con $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1$ tal que $v_1 = a_{11}u_1 + \cdots + a_{n1}u_n$
El vector v_1 visto como combinación lineal $a_{11}u_1 + \cdots + a_{n1}u_n$ Proceso
Se coordinan el proceso de coordenadas de un vector con el proceso de combinación lineal $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$ Vector de coordenadas del vector v_1. Proceso
Se encapsula el proceso en la matriz de coordenadas $[v_1]_{B_1} \in K^{nx1}$ Objeto
Desencapsula la matriz de coordenadas $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$
Generaliza con $\forall\, v_i \in B$ y construye cada nuevo proceso para cada vector de la base B
$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$
Proceso Proceso Proceso

Se coordinan los proceso de matriz de coordenadas y el proceso de matriz para generar la matriz de cambio de base

$$M_{B\to B_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Proceso

Se encapsula el proceso en la Matriz de Cambio de Base cuando ve a la matriz como un elemento del conjunto de matrices cuadradas e invertibles o es vista como una transformación lineal en un mismo espacio.

$$\boldsymbol{M_{B\to B_1}}$$

$$\boldsymbol{M_{B\to B_1}[x]_B = [x]_{B_1}}$$

Objeto

Por otro lado identificamos que la construcción de la matriz de cambio de base se presenta también de la siguiente manera:

El estudiante inicia estableciendo el orden en las bases dadas, este orden se presenta como un objeto o un proceso: el primero refiere a considerar a las bases como conjuntos ordenados y tomar el orden establecido, el segundo cuando establece que vector se antepone al siguiente y así sucesivamente hasta ordenar las bases. En términos matemáticos diremos que el estudiante podrá identificar y ordenar la sucesión finita de vectores linealmente independientes en cualquiera que sea el caso.

Si V es un espacio vectorial sobre el campo K de dimensión finita n, y sean $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $B_1 = \{u_1, u_2, \dots u_n\}$ y $B_c = \{z_1, z_2, \dots z_n\}$ bases ordenadas de V, entonces el estudiante con una concepción proceso de base ordenada puede escribir el vector v_i, u_j de la base B y B_1 respectivamente como combinación lineal de los elementos de la base B_c, es decir, asume la existencia de los $b_{ij}, c_{ij} \in K$, con $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, n$ tal que $v_i = b_{1i}z_1 + b_{2i}z_2 \dots + b_{ni}z_n$ y $u_j = c_{1j}z_1 + c_{2j}z_2 \dots + c_{nj}z_n$. Coordina el proceso de combinación lineal y el proceso de vector de coordenadas, para obtener los procesos vector de coordenadas respecto a la base B_c, es decir, $(b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{ni})$ y $(c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj})$ esto es encapsulado por parte del estudiante cuando se queda con la información de los componentes para ver los vectores como una matriz de coordenadas $[v_1]_{B_1} \in K^{nx1}$, y una vez construido este objeto, tiene que regresar sobre el proceso de la matriz de coordenadas

$$\begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix}.$$

Con el cuantificador $\forall$ coordina que tiene que construir para cada $v_i, u_j \in B$ con $i, j = 1, \dots, n$ los *n*-procesos de las matrices de coordenadas

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix}.$$

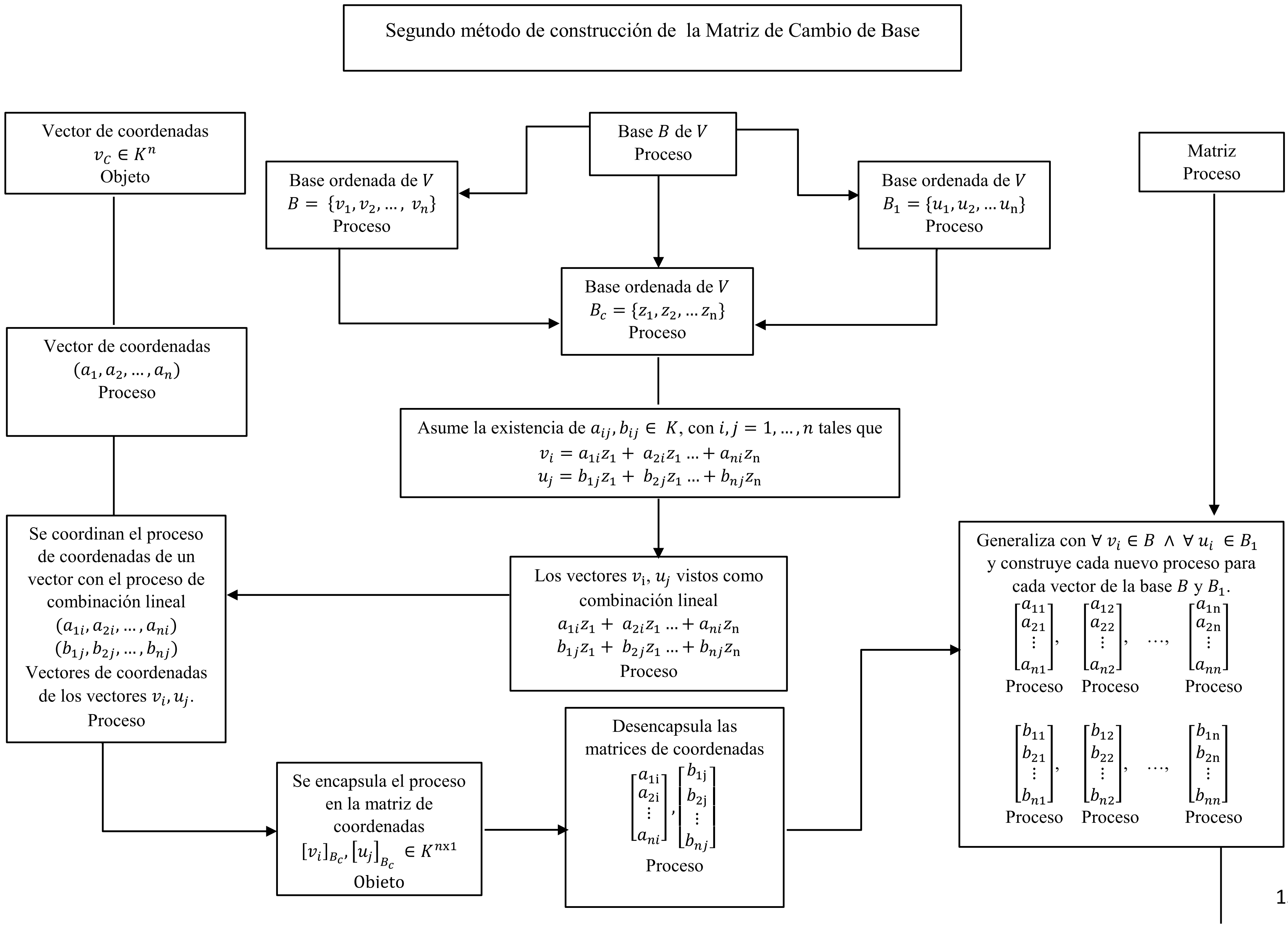
Una vez que tenga los *n*-procesos de las matrices de coordenadas de los vectores *n* vectores de la base de B, B_1 en términos de la base B_c, estos se coordinan con el proceso de Matriz para considerar dos matrices como una secuencia de columnas verticales

$$\beta = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1\mathrm{n}} \\ b_{21} & b_{22} & \vdots & b_{2\mathrm{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & c_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \text{ y } \beta_1 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1\mathrm{n}} \\ c_{21} & c_{22} & \vdots & c_{2\mathrm{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

A su vez estos dos procesos se vuelven a coordinar parar formar una matriz ampliada como una secuencia de columnas verticales, esto es:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1\mathrm{n}} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1\mathrm{n}} \\ c_{21} & c_{22} & \vdots & c_{2\mathrm{n}} & b_{21} & b_{22} & \vdots & b_{2\mathrm{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} & b_{n1} & c_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right).$$

Se encapsula en el objeto matriz ampliada en el objeto matriz de n x $2n$ a la cual se le puede aplicar el método de Gauss-Jordán, por lo que se obtendría del lado izquierdo I_{nxn}, y del lado derecho se obtiene $M_{B \rightarrow B_1}$. (Véase el siguiente diagrama).


Segundo método de construcción de la Matriz de Cambio de Base
Vector de coordenadas $v_C \in K^n$ Objeto
Base B de V Proceso
Base ordenada de V $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ Proceso
Base ordenada de V $B_1 = \{u_1, u_2, \dots u_n\}$ Proceso
Matriz Proceso
Base ordenada de V $B_c = \{z_1, z_2, \dots z_n\}$ Proceso
Vector de coordenadas $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ Proceso
Asume la existencia de $a_{ij}, b_{ij} \in K$, con $i, j = 1, \dots, n$ tales que $v_i = a_{1i}z_1 + a_{2i}z_1 \dots + a_{ni}z_n$ $u_j = b_{1j}z_1 + b_{2j}z_1 \dots + b_{nj}z_n$
Se coordinan el proceso de coordenadas de un vector con el proceso de combinación lineal $(a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})$ $(b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj})$ Vectores de coordenadas de los vectores v_i, u_j. Proceso
Los vectores v_i, u_j vistos como combinación lineal $a_{1i}z_1 + a_{2i}z_1 \dots + a_{ni}z_n$ $b_{1j}z_1 + b_{2j}z_1 \dots + b_{nj}z_n$ Proceso
Generaliza con $\forall\, v_i \in B \wedge \forall\, u_i \in B_1$ y construye cada nuevo proceso para cada vector de la base B y B_1.
$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}$, …, $\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$
Proceso Proceso Proceso
$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{bmatrix}$, …, $\begin{bmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{bmatrix}$
Proceso Proceso Proceso
Desencapsula las matrices de coordenadas $\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$ Proceso
Se encapsula el proceso en la matriz de coordenadas $[v_i]_{B_c}, [u_j]_{B_c} \in K^{nx1}$ Obieto

Se coordinan los proceso de matriz de coordenadas y el proceso de matriz para generar dos matrices como una secuencia de columnas

$$\beta = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \vdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & c_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \vdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Proceso

A su vez estos dos procesos se vuelven a coordinar parar formar una matriz ampliada como una secuencia de columnas verticales, en donde β_1 le corresponde la parte izquierda y β la parte derecha esto es:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \vdots & c_{2n} & b_{21} & b_{22} & \vdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} & b_{n1} & c_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right)$$

Proceso

Se encapsula en el objeto matriz ampliada en el objeto matriz de $nx2n$, la a la cual se le puede aplicar el método de Gauss-Jordán, por lo que se obtendría del lado izquierdo I_{nxn}, y del lado derecho se obtiene $M_{B\to B_1}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & d_{21} & d_{22} & \vdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{array}\right)$$

Proceso de matriz de cambio de base

Se encapsula el proceso en la Matriz de Cambio de Base cuando ve a la matriz como un elemento del conjunto de matrices cuadras e invertibles o es vista como una transformación lineal en un mismo espacio.

$$\boldsymbol{M_{B\to B_1}}$$

$$\boldsymbol{M_{B\to B_1}[x]_B = [x]_{B_1}}$$

Objeto

Respecto a las dos formas de construir la matriz de cambio de bases anteriormente descritas podríamos preguntarnos: ¿Cuál de las dos formas de calcular la matriz de cambio de base propicia la construcción de las estructuras o son necesarias las dos formas?

Quizá faltaría un estudio el cual responda esta pregunta, por ahora nos conformaremos con responder que la primera vía se tiene que construir una a una las columnas de la matriz requerida, en cambio por la segunda vía los cálculos son más globales, es decir, que como algoritmo la segunda vía es más adecuada para el cálculo de una matriz de cambio de base para el caso de $\mathbb{R}^n$, y a través de la repetición del algoritmo podría el estudiante construir una concepción acción.

Ahora si se considera un espacio V de dimensión finita entonces la primera vía parece ser una mejor manera para propiciar la interiorización puesto que en la descomposición genética que se propone considera asimilar que representa cada columna de la matriz, y en la primera vía al construir uno a uno los vectores de coordenadas y ponerlos como columnas se puede propiciar esto.

5.2 Sugerencias didácticas del concepto matriz de cambio de base

Algo relevante encontrado en esta investigación es la concepción que tienen los estudiantes sobre el concepto de matriz de cambio de base, los datos analizados muestran el poco o nulo nivel de formalidad que los estudiantes tienen sobre la definición de este concepto. En algunos casos describen para qué sirve o la ven como una transformación en la cual sólo mencionan su función (pasar de unas coordenadas a otra) sin dar dicha transformación. Los datos de la entrevista y del diagnóstico revelan que los estudiantes omiten que la matriz de cambio de base está definida entre bases ordenas (suelen suprimir el orden al dar su definición) dado el concepto de estudio, el orden en las bases importa y es fundamental puesto que establece el orden de las columnas de la matriz, se sugiere que se presenten bases ordenadas a los estudiantes de tal modo que no tenga el orden convencional y el trabajo en subespacios de $\mathbb{R}^n$ con bases distintas a la canónica.

5.3 Futuras investigaciones

Para refinarse la descomposición genética también se podrían considerar otros espacios vectoriales de dimensión finita, este podría ser $\mathbb{M}_{m \times n}$, el espacio de matrices de tamaño $m \times n$.

Por otro lado, después de aportar con una descomposición genética del concepto y en lo didáctico con algunas sugerencias, que se deben considerar en el tratamiento del concepto matriz de cambio de base, es fundamental aplicar la segunda componente del ciclo de investigación que propone la teoría APOE, es decir, diseñar actividades de clase tomando en cuenta la descomposición genética del concepto y así promover la construcción del concepto y una estructura mental más sofisticada. Estos diseños deben de ser sutiles, en el sentido que el estudiante comprenda la importancia de la matriz de cambio de base, y que el estudiante vea la importancia de calcular dicha matriz.

Otra de las futuras investigaciones que se puede desarrollar es investigar sobre esquema del concepto matriz de cambio de base, creemos que se puede empezar a manifestar cuando el estudiante ve a la matriz de cambio de base como un caso particular de la matriz asociada a una transformación lineal.

También se podría investigar sobre las dos formas de construir la matriz de cambio de base, presentadas en esta investigación, las cuales están asociadas a la experiencia por parte de los estudiantes. Se podría tratar de responder la siguiente pregunta: ¿Cuál de las dos formas de calcular la matriz de cambio de base propicia la construcción de las estructuras o son necesarias las dos formas?

Otra investigación que se podría realizar es el estudio sobre la forma de calcular la matriz de cambio de base, teniendo en cuenta el siguiente teorema:

Teorema. Sean $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ y $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bases para un espacio vectorial V. Sean $B = [[u_1]_\varepsilon \cdots [u_n]_\varepsilon]$ y $C = [[v_1]_\varepsilon \cdots [v_n]_\varepsilon]$, donde ε es cualquier base para V. Entonces la reducción por renglón aplicada a la matriz aumentada $[C|B]$ de n x $2n$ produce

$$[C|B] \to [I|M_{\beta\to\mathcal{C}}]$$

(Poole, 2011, p. 488)

La idea fundamental es transitar de las bases dadas a una tercera base, la cual hipotéticamente afirmamos que dicha base es invisible para los estudiantes cuando trabajan en subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$, tenemos la hipótesis de que el estudiante al decir transponer los vectores para construir las matrices B y C que enuncia el teorema lo hace como un mero algoritmo y no con reflexión total de lo que sucede; el trabajo sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^{1xn} = \mathbb{R}^n$ ahora debe hacerse en $\mathbb{R}^{nx1}$.

En general los resultados presentados en este documento buscan ser material de trabajo y reflexión para profesores en ejercicio respecto a la importancia de la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra Lineal centrada en los procesos de cognición que se desarrollan al construir conceptos abstractos, en este caso los involucrados a la matriz de cambio de base.

BIBLIOGRAFÍA

Anton, H. (1980). *Introducción al álgebra lineal* (1st ed.). México: Editorial Limusa.

Arnon, L., Cottill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory a framework for research and curriculum education*. New York: Springer Netherlands.

Asiala, M., Anne, B., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In J. Kaput, H. Shoenfeld, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education, 6* (pp. 1–32). Michigan: American Mathematical Society.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997). The de velopment of students graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 399–431.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(3), 247–285.

Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., & Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups and subgroups. Journal of Mathematical Behavior. *Journal of Mathematical Behavior*, *16(3)*, 187–239.

Chargoy, R. (2006). *Dificultades asociadas al concepto de base de un espacio vectorial*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Da Silva, A., & Lins, R. (2002). An Analysis of the production of meaning for the notion of basis in linear algebra (p. 106). Proceedings of the 2nd international conference on the teaching of mathematics at the undergraduate level.

Dorier, J.-L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (Volumen 23, pp. 1–81). Grenoble, Francia: Kluwer Acedemic Publishers.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (Volumen 23, pp. 85–124). Grenoble, Francia: Kluwer Acedemic Publishers.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in avanced mathematical thinking. In T. David (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–123). Dordrecht: Springer Netherlands.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva píagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, *8 (3)*, 24–41.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis:part1. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(3), 335–359. http://doi.org/10.1007/s10649-005-2531-z

Florey, F. G. (1980). *Fundamentos de Álgebra ineal y aplicaciones*. Cali, Colombia: Dossat, S.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach toresearch in mathematics education. *Zeitschrift Der Mathematik*, *39*, 127–135.

Grossman, S. I. (2008). *Álgebra lineal* (6th ed.). México: McGRAW-HIL.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra*. (pp. 191–207). Grenoble, Francia: Kluwer Acedemic Publishers.

Hoffman, K., & Kunze, R. (1973). *Álgebra lineal*. México: Prentince-Hall.

Kú, D. (2007). *Aprendizaje de la base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Lay, D. C. (2007). *Álgebra Lineal y sus aplicaciones*. (L. M. Cruz Castillo, Ed.). México: Perarson educación.

McDonald, M. A., Mathews, D., & Strobel, K. H. (2000). *Understanding sequences: A tale of two objects*. (E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput, Eds.)*Research in Collegiate Mathematics Education IV*. Providence: American Mathematical Society.

Montiel, M., & Bhatti, U. (2010). Advanced Mathematics Online: Assessing Particularities in the Online Delivery of a Second Linear Algebra Course. *Online Journal of Distance Learning Administration*., *XIII*(II). Retrieved from http://www.westga.edu/~distance/ojdla/summer132/montiel_bhatti132.html

Montiel, M., Wilhelmi, M. R., & Vidadkovic, D. (2012). Vectors, change of basis and matrix representation: onto-semiotic approach in the analysis of creating meaning. *International Journal of Mathematical Education in Scicence and Technology*, *43*(1), 11–32.

Oktaç, A., & Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *13*(4), 373–385. Retrieved from http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33529137022

Ortega, P. (2002). Una estrategia didáctica para la enseñanza del álgebra lineal con el uso del sitema de cálculo algebraico Derive. *Revista Complutense de Educación*, *13*(2), 645–675.

Ortiz, J., & Rico, L. (2004). La enseñanza del álgebra lineal utilizando modelización y calculadora gráfica. Un estudio con profesores en formación. *Actas Del VIII SEIEM*, 1–8.

Poole, D. (2011). *Álgebra Lineal*. *Una introducción moderna* (3rd ed.). México: Cengage Learning Editores.

Roa-Fuentes, S. (2008). *Construcciónes y Mecanismos Mentales Asociados al concepto Transformación Lineal*. Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoaericana de Investigación En Matemática Educativa*, *13*(1), 89–112. Retrieved from http://www.redalyc.org/pdf/335/33512271005.pdf

Stenger, C., Weller, K., Arnon, I., Dubinsky, E., & Vidalovic, D. (2008). A search for a constructivist approach for understanding the uncountable set P(n). *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *11*(1), 93–125.

Trigueros, M. (2000). Students conceptions of solution curves and equilibrium in systems of differential equations. In M. L. Fernandez (Ed.), (pp. 93–97). Columbus, Ohio: Proceedings of the 22nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, *17(1)*, 5–31.

ANEXOS

Anexo 1. Solución a los problemas planteados para describir ejemplos de estructuras

Sol. ***Problema A***. *i)* Para determinar la matriz de cambio de base $P_{B_1 \to B_2}$ escribimos las coordenadas de los vectores de la base B_1 respecto a la base B_2, es decir $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{B_2}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2}$ para encontrar dichas coordenadas se procede de la siguiente manera, dado que B_2 es base de $\mathbb{R}^2$ entonces existen escalares $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tales que se cumple:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix}.$$

Donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{gathered} 0 = a_1 + 2a_2 \\ 1 = a_1 + a_2. \end{gathered}$$

Resolviendo el sistema se obtiene que $a_1 = 2, a_2 = -1$ entonces $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

De igual forma para encontrar $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2}$, como B_2 es base de $\mathbb{R}^2$ entonces existen escalares $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tales que se cumple:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix}.$$

Donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{gathered} 1 = a_1 + 2a_2 \\ 0 = a_1 + a_2. \end{gathered}$$

Resolviendo el sistema se obtiene que $a_1 = -1, a_2 = 1$ entonces $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto encontramos la matriz $P_{B_1 \to B_2} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{B_2} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2} \right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

ii) Nos piden determinar la matriz $P_{B_3 \to B_2}$ cambio de base que va de la base B_3 a la base B_2 para determinar dicha matriz escribimos las coordenadas de los vectores de la base B_3 respecto a la base B_2, es decir $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{B_2}$ notemos que estas coordenadas las hemos calculado en el inciso *i)* por lo que:

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto encontramos la matriz $P_{B_3 \to B_2} = \left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_{B_2} \quad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_{B_2}\right) = \begin{pmatrix}-1 & 2\\1 & -1\end{pmatrix}.$

iii) Para determinar la matriz de cambio de base $P_{B_2 \to B_3}$ escribimos las coordenadas de los vectores de la base B_2 respecto a la base B_3, es decir $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}_{B_3}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}_{B_3}$ note que B_3 es la base canónica por tanto.

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}_{B_3} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}_{B_3} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto encontramos que $P_{B_2 \to B_3} = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}.$

iv) ¿La base B_1 es igual a la base B_3? ¿Por qué?

Para responder esta cuestión no tamos que como conjuntos B_1 y B_3 tienen los mismos elementos por tanto son dos conjuntos iguales pero B_1 y B_3 por hipótesis son bases ordenadas entonces importa el orden y por tanto.

$$B_1 = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\} \neq \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} = B_3.$$

Quizá esto de tener los mismos objetos y ordenarlos de una manera diferente y decir que ahora son distintos suena algo extraño, pero esta convención en la mayoría de libros no se profundiza pero toma sentido en la ejercitación y cálculo de coordenadas de un vector por ejemplo; consideremos las base B_1 y B_3 de $\mathbb{R}^2$ dadas en el ejercicio anterior y se nos pide calcular las coordenadas del vector $(1,2) \in \mathbb{R}^2$ respecto a B_1 y B_3 se tiene que:

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}_{B_3} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Es claro que estamos escribiendo el mismo vector pero en diferentes representaciones y dichas representaciones son distintas.

v) ¿La matriz $P_{B_1 \to B_2}$ es igual a la matriz $P_{B_3 \to B_2}$? ¿Por qué?

Sabemos que dos matrices son iguales si y sólo si tienen el mismo tamaño y entrada por entrada son iguales, por tanto

$$P_{B_1 \to B_2} = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}-1 & 2\\1 & -1\end{pmatrix} = P_{B_3 \to B_2}.$$

A pesar de que ambas matrices representan el cambio de dos bases con los mismos vectores a la base B_2, que dichas matrices sean diferentes radica en el orden de las bases más no de sus elementos.

Sol. ***Problema B***.

a) Se pide determinar la matriz cambio de base de A a B la cual denotaremos por $P_{A\to B}$, se tienen unas condiciones que se deben cumplir estas son:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 4b_1 - b_2 \\
a_2 &= -b_1 + b_2 + b_3 \\
a_3 &= b_2 - 2b_3
\end{aligned}
$$

Sólo basta notar que son precisamente los vectores de la base A escritos como combinación lineal respecto a los elementos de la base B y reflexionando en como son los elementos de la matriz de cambio de base se concluye que:

$$P_{A\to B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

La cual es la matriz requerida.

b) Una de las propiedades que cumple la matriz cambio de base es que

$$[x]_B = P_{A\to B}[x]_A \qquad (1)$$

De esta ecuación conocemos la matriz cambio de base, sólo resta conocer las coordenadas del vector x respecto a los elementos de la base A. Ahora bien de $x = 3a_1 + 4a_2 + a_3$ concluimos que $[x]_A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ entonces sustituyendo en (1):

$$[x]_B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3)(4) + (-1)(4) + 0(1) \\ -3 + 4 + 1 \\ 12 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Sol. ***Problema C***. Supongamos que P es la matriz cambio de base de B_1 *a* B_2, entonces P^{-1} es la matriz cambio de base B_2 a B_1, calculando dicha matriz se obtiene:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Luego entonces se debe satisfacer que:

$[q_0]_{B_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, de donde obtenemos $q_0 = \frac{1}{2}(1 + x^2)$.

$[q_1]_{B_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, de donde obtenemos $q_1 = \frac{1}{4}(3 + 3x + x^2)$.

$[q_2]_{B_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, de donde obtenemos $q_2 = \frac{1}{2}(1 - x - x^2)$.

Por lo tanto la base ordenada $B_2 = \{q_0, q_1, q_2\}$ con:

$q_0, = \frac{1}{2}(1 + x^2)$, $q_1 = \frac{1}{4}(3 + 3x + x^2), q_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x - x^2$. Satisface que P sea la matriz cambio de base de B_1 a B_2.

Anexo 2. Plan de estudios de la carrera de Licenciado en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander.

UIS, patrimonio científico y cultural

Sabado, 20 de junio de 2015 — *Actualizado hace: 1 día(s)*

Contáctenos | Visítenos | Búsqueda | Directorio | Mapa del Sitio | Guía de Navegación

Inicio | La UIS | Unidades Académicas | Programas Académicos | Investigación y Extensión | Profesores | Estudiantes | Gestión Administrativa | Eventos | Emisoras

Plan de Estudios de la Licenciatura en Matemáticas

R: Requisitos — CA: Créditos Aprobados

NIVEL I

Código Asignatura	Nombre Asignatura	Créditos	Horas Teóricas	Horas Prácticas	Requisitos
20252	CALCULO I	4	4	0	
20273	GEOMETRIA EUCLIDIANA	4	4	0	
22979	ALGEBRA LINEAL I	4	4	0	
23423	CULTURA FISICA Y DEPORTIVA	1	0	2	
24736	FUNDAMENTOS DE PEDAGOGIA	3	3	0	
24948	VIDA Y CULTURA UNIVERSITARIA	0	1	0	
25124	TALLER DE LENGUAJE I	3	2	2	
	Total Créditos:	19			

NIVEL II

Código Asignatura	Nombre Asignatura	Créditos	Horas Teóricas	Horas Prácticas	Requisitos
20253	CALCULO II	4	4	0	R: 20252
23272	ALGEBRA LINEAL II	4	4	0	R: 22979
24737	PSICOLOGIA DEL DESARROLLO	3	3	0	
24739	DISEÑO Y PLANEACION CURRICULAR	3	3	0	R: 24736
25127	TALLER DE LENGUAJE II	3	2	2	R: 25124
25282	FUNDAMENTOS DE MATEMATICAS	4	4	0	
	Total Créditos:	21			

NIVEL II

Código Asignatura	Nombre Asignatura	Créditos	Horas Teóricas	Horas Prácticas	Requisitos
20253	CALCULO II	4	4	0	R: 20252
23272	ALGEBRA LINEAL II	4	4	0	R: 22979
24737	PSICOLOGIA DEL DESARROLLO	3	3	0	
24739	DISEÑO Y PLANEACION CURRICULAR	3	3	0	R: 24736
25127	TALLER DE LENGUAJE II	3	2	2	R: 25124
25282	FUNDAMENTOS DE MATEMATICAS	4	4	0	
	Total Créditos:	21			

NIVEL III

Código Asignatura	Nombre Asignatura	Créditos	Horas Teóricas	Horas Prácticas	Requisitos
20254	CALCULO III	4	4	0	R: 20253
20267	TEORIA DE CONJUNTOS	4	4	0	R: 20273
22950	FISICA I	4	4	2	
24442	FUNDAMENTACION DIDACTICA	4	4	0	R: 24739
24738	TEORIAS DEL APRENDIZAJE	3	3	0	R: 24737
	Total Créditos:	19			

NIVEL V

Código Asignatura	Nombre Asignatura	Créditos	Horas Teóricas	Horas Prácticas	Requisitos
20268	ALGEBRA MODERNA I	4	4	0	R: 20267
20274	ANALISIS MATEMATICO I	4	4	0	R: 20254
24170	ESTADISTICA I	4	4	0	R: 20253
24444	DIDACTICA DEL CALCULO	4	4	0	R: 20255
24741	EVALUACION DEL APRENDIZAJE	4	4	0	R: 24738 R: 24740
	Total Créditos:	20			

NIVEL VI

Código Asignatura	Nombre Asignatura	Créditos	Horas Teóricas	Horas Prácticas	Requisitos
22140	SEMINARIO: PRACTICA PEDAGOGICA	3	3	0	R: 24740
23424	INGLES I	4	5	0	
24178	ESTADISTICA II	4	4	0	R: 24170
24443	DIDACTICA DE LA ARITMETICA Y EL ALGEBRA	4	4	0	R: 20268
24742	TECNOLOGIAS Y EDUCACION	3	2	3	
25283	EPISTEMOLOGIA E HISTORIA DE LAS MATEMATICAS	3	3	0	R: 20245
	Total Créditos:	21			

NIVEL VII					
Código Asignatura	Nombre Asignatura	Créditos	Horas Teóricas	Horas Prácticas	Requisitos
23425	INGLES II	4	5	0	R: 23424
24445	DIDACTICA DE LA PROBABILIDAD Y LA ESTADISTICA	4	4	0	R: 24178
25285	PRACTICA DOCENTE I	5	5	0	R: 22140
	ASIGNATURA DE CONTEXTO	4			
	ASIGNATURAS TECNICAS PROFESIONALES	4			
	Total Créditos:	21			

NIVEL VIII					
Código Asignatura	Nombre Asignatura	Créditos	Horas Teóricas	Horas Prácticas	Requisitos
25286	PRACTICA DOCENTE II	10	10	0	R: 25285
25287	ETICA	3	3	0	R: 25284
	ASIGNATURA DE CONTEXTO	4			
	ASIGNATURAS TECNICAS PROFESIONALES	4			
	Total Créditos:	21			

NIVEL IX					
Código Asignatura	Nombre Asignatura	Créditos	Horas Teóricas	Horas Prácticas	Requisitos
	Total Créditos:	0			

NIVEL X					
Código Asignatura	Nombre Asignatura	Créditos	Horas Teóricas	Horas Prácticas	Requisitos
	Total Créditos:	0			

Electivas				
Código Asignatura	Nombre Asignatura	Créditos	Horas Teóricas	Horas Prácticas
20282	CRIPTOGRAFIA	4	4	0
20868	FILOSOFIA DE LA EDUCACION	2	2	0
20871	TECNICAS DE ENSENANZA	4	4	0
20872	MEDIOS DIDACTICOS	3	3	0
20876	METODOLOGIA DEL APRENDIZAJE	3	3	0
24185	INTRODUCCION AL ANALISIS FUNCIONAL	4	4	0
24423	GEOMETRIA FRACTAL	5	4	0
25288	INTRODUCCION A LA GEOMETRIA FRACTAL	4	4	0
25289	INTRODUCCION A LAS CATEGORIAS	4	4	0
25290	LOGICA MATEMATICA	4	4	0
25415	INT.A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES	4	4	0

Anexo 3. Plan de estudios de la carrera de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander.

Plan de Estudios de Matemáticas

R: Requisitos CA: Créditos Aprobados

NIVEL I

Código Asignatura	Nombre Asignatura	Créditos	Horas Teóricas	Horas Prácticas	Requisitos
20252	CALCULO I	4	4	0	
20273	GEOMETRIA EUCLIDIANA	4	4	0	
22979	ALGEBRA LINEAL I	4	4	0	
23423	CULTURA FISICA Y DEPORTIVA	1	0	2	
24173	PROGRAMACION I	3	5	0	
24948	VIDA Y CULTURA UNIVERSITARIA	0	1	0	
25124	TALLER DE LENGUAJE I	3	2	2	
	Total Créditos:	**19**			

NIVEL II

Código Asignatura	Nombre Asignatura	Créditos	Horas Teóricas	Horas Prácticas	Requisitos
20253	CALCULO II	4	4	0	R: 20252
22950	FISICA I	4	4	2	
23272	ALGEBRA LINEAL II	4	4	0	R: 22979
23424	INGLES I	4	5	0	
25282	FUNDAMENTOS DE MATEMATICAS	4	4	0	
	Total Créditos:	**20**			

NIVEL III

Código Asignatura	Nombre Asignatura	Créditos	Horas Teóricas	Horas Prácticas	Requisitos
20245	TEORIA DE NUMEROS	4	4	0	R: 25282
20254	CALCULO III	4	4	0	R: 20253
20267	TEORIA DE CONJUNTOS	4	4	0	R: 20273
22953	FISICA II	4	4	2	R: 20252 R: 22950
23425	INGLES II	4	5	0	R: 23424
	Total Créditos:	**20**			

NIVEL IV

Código Asignatura	Nombre Asignatura	Créditos	Horas Teóricas	Horas Prácticas	Requisitos
20255	ECUACIONES DIFERENCIALES	4	4	0	R: 20254
20268	ALGEBRA MODERNA I	4	4	0	R: 20267
24170	ESTADISTICA I	4	4	0	R: 20253
24175	MATEMATICA COMPUTACIONAL	4	4	0	R: 20245
24176	PROGRAMACION II	3	5	0	R: 24173
	Total Créditos:	**19**			

NIVEL V

Código Asignatura	Nombre Asignatura	Créditos	Horas Teóricas	Horas Prácticas	Requisitos
20269	ALGEBRA MODERNA II	4	4	0	R: 20268
20274	ANALISIS MATEMATICO I	4	4	0	R: 20254
24171	ANALISIS NUMERICO	4	4	0	R: 20255 R: 24176
24178	ESTADISTICA II	4	4	0	R: 24170
24181	OPTIMIZACION	4	4	0	R: 23272
	Total Créditos:	**20**			

NIVEL VI

Código Asignatura	Nombre Asignatura	Créditos	Horas Teóricas	Horas Prácticas	Requisitos
20275	ANALISIS MATEMATICO II	4	4	0	R: 20274
20280	TOPOLOGIA I	4	4	0	R: 20274
25283	EPISTEMOLOGIA E HISTORIA DE LAS MATEMATICAS	3	3	0	R: 20245
25417	SEMINARIO	4	4	0	R: 20268
	ASIGNATURA DE CONTEXTO	4			
	Total Créditos:	**19**			

NIVEL VII					
Código Asignatura	Nombre Asignatura	Créditos	Horas Teóricas	Horas Prácticas	Requisitos
20285	GEOMETRIA DIFERENCIAL	4	4	0	R: 20280
24182	VARIABLE COMPLEJA	4	4	0	R: 20275
24183	TRABAJO DE GRADO I	5	2	0	R: 25417
	ASIGNATURA DE CONTEXTO	4			
	ASIGNATURAS TECNICAS PROFESIONALES	4			
	Total Créditos:	**21**			

NIVEL VIII					
Código Asignatura	Nombre Asignatura	Créditos	Horas Teóricas	Horas Prácticas	Requisitos
20284	ETICA	3	2	2	R: 25417
24184	TRABAJO DE GRADO II	10	1	0	R: 24183
	ASIGNATURAS TECNICAS PROFESIONALES	4			
	Total Créditos:	**17**			