UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

UAGro

UNA CARACTERIZACIÓN DE LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO FRACCIÓN EN TERCER AÑO DE PRIMARIA

Tesis que presenta:

Lic. Alicia Nájera Leyva

Para obtener el grado de:

Maestra en Docencia de la Matemática

Directores de tesis:

Dra. María S. García González

Dr. Carlos Valenzuela García

Chilpancingo-Guerrero, México. Diciembre de 2018.

Índice

RESUMEN………………………………………………………………….. I

INTRODUCCIÓN………………………………………………………………. III

CAPÍTULO 1
ANTECEDENTES Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN……….. 1

1.1 Antecedentes……………………………………………………….. 2
1.2 Problema de investigación……………………………………. 11

CAPÍTULO 2
REFERENTE TEÓRICO……………………………………………… 13

2.1 Fenomenología didáctica de las fracciones………………….. 14
2.1.1 Usos y aspectos de las fracciones………………….. 17
2.2 Los desafíos matemáticos……………………………………. 20

CAPÍTULO 3
METODOLOGÍA……………………………………………………. 23

3.1 Etapas de la metodología…………………………………….. 24
3.2 Caracterización del modelo de enseñanza de las fracciones… 26
3.2.1 Caracterización en preescolar………………………… 27
3.2.2 Caracterización en los primeros tres años de primaria…………………………………………………... 28
3.3 Diseño del instrumento para caracterizar la comprensión de los alumnos sobre la fracción……………………………………... 31
3.3.1 Cuestionario para identificar la comprensión de la fracción………………………………………………………. 31
3.4 Validación del instrumento…………………………………… 35
3.5 Aplicación del instrumento…………………………………… 37

CAPÍTULO 4
ANÁLISIS DE DATOS…………………………………………………..... 39

4.1 Resultados generales de las respuestas de los alumnos……..... 40
4.2 Análisis de las actuaciones de los estudiantes………………... 47
4.2.1 Análisis de las respuestas dadas por la alumna A31... 48
4.2.2 Análisis de las respuestas dadas por el alumno A17... 51
4.2.3 Análisis de las respuestas dadas por el alumno A4..... 54
4.3 Caracterización de la comprensión de los alumnos…………... 57

CAPÍTULO 5
CONCLUSIONES Y CONTRIBUCIONES..…………………………. 59

5. 1 Conclusiones………………………………………………… 60
5.2 Secuencia didáctica 1: Las pulseras………………………….. 64
5.3 Secuencia didáctica 2: El reparto de dulces………………….. 66
5.4 Secuencia didáctica 3: Los animales del bosque……………... 67

BIBLIOGRAFÍA…………………………………………………….. 69

ANEXOS
Anexo 1: Caracterización del modelo de enseñanza…………….. 73
Anexo 2: Cuestionario…………………………………………... 103
Anexo 3: Actividad: Las pulseras……………………………….. 107
Anexo 4: Actividad: El reparto de dulces……………………….. 111
Anexo 5: Actividad: Los animales del bosque………………….. 113

Resumen

Estimado lector, el presente resumen está elaborado en primera persona, y es debido a que es la voz de una docente Normalista con 15 años de experiencia en educación primaria en el estado de Guerrero, México, que decidió ingresar a un posgrado en Docencia de la Matemática para mejorar su práctica docente. Este trabajo de tesis es el primer acercamiento a la mejora de mi práctica docente, por ello me permito contarlo.

La experiencia como docente frente a grupo en nivel primaria, me ha dejado ver que el tema de las fracciones es muy importante para los estudiantes desde que se les presentan en la escuela, hasta cuando las ponen en práctica en la vida cotidiana. Además, un reto particular como docente y que manifiestan otros colegas es la necesidad de aprender más sobre este tema, mismo que se ha caracterizado como un tópico complejo de enseñar, a pesar de que los alumnos desde la educación preescolar ya tienen la noción de fraccionar el entero a la mitad o en más partes iguales, eso por mencionar un ejemplo.

Lo anterior y la importancia sobre el estudio de las fracciones que han destacado otros investigadores, despertaron mi interés para adoptar ese tema como objeto de estudio y desarrollar esta tesis. En ésta se expone una caracterización de la comprensión que tienen mis alumnos de tercer año de primaria sobre las fracciones, partiendo de lo que se propone en los planes y programas de estudio para ese grado escolar.

Para identificar lo que se propone sobre las fracciones en la escuela mexicana, se realizó una caracterización del modelo de enseñanza desde preescolar hasta tercer año de primaria. Para lo anterior se tomaron en cuenta distintos usos y aspectos de las fracciones que sirven como marco de referencia y que podrían aparecer en los planes y programas de estudio, así como en las actividades de los libros de texto gratuitos proporcionados por la Secretaria de Educación Pública (SEP). Del resultado de dicho análisis, se obtuvo que el uso más priorizado es la fracción como fracturador, en sus aspectos operador fracturante y relación de fractura, es decir, que las actividades se enfocan en fracturar elementos en partes y establecer una relación parte/todo.

Los resultados de la caracterización del modelo de enseñanza permitieron diseñar un instrumento para caracterizar la comprensión que tienen los alumnos sobre las fracciones en

términos de los usos y aspectos de las fracciones, los procesos que realizan y los errores que comenten al trabajar con tareas relacionadas con el tema. Al respecto, se encontró que los alumnos tienen una comprensión de la fracción relacionada ampliamente con el uso de la fracción como fracturador. Sin embargo, en sus procedimientos dejan ver que su comprensión aún está vinculada con las cantidades y los números naturales.

Introducción

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de las fracciones como problemática en el ámbito de la Matemática Educativa han sido estudiados desde diferentes enfoques por muchos investigadores (Kieren, 1993, Usiskin, 1979; Behr, Lesh, Post y Silver, 1983; Figueras 1996; Streefland, 1991; Fandiño, 2009; Steffe y Olive, 2010; por mencionar algunos). Los resultados de estas investigaciones han permitido identificar por ejemplo, en el currículum mexicano, y más precisamente en los libros de texto, diferentes modelos para la enseñanza de las fracciones, entre ellos, el modelo de áreas, el modelo discreto y el modelo de la recta numérica que buscan promover un conocimiento más amplio sobre este tema.

A pesar de lo anterior, en investigaciones recientes se muestra evidencia de que las fracciones siguen siendo uno de los conceptos más complejos para tratar en clase, cuyo aprendizaje enfrenta grandes dificultades para la mayoría de los alumnos (Siegler, Fazio, Bailey y Zhou, 2013, y Petit, Laird y Marsden, 2010).

Por otra parte, en un gran número de investigaciones se destaca la importancia del estudio del conocimiento que tienen los alumnos sobre las fracciones desde la educación básica. Autores como Siegler *et al*. (2012) señalan que un buen conocimiento de las fracciones es predictor de un buen desempeño de la matemática desde primaria hasta niveles más altos.

Fandiño (2009) ha señalado que la mayoría de las veces se introduce la "definición inicial *parte/todo*", que luego no tiene la fuerza para satisfacer todos los significados que la fracción asumirá en los cursos posteriores de los estudios. Debido a que la definición *parte/todo* es fácilmente comprensible para el estudiante, entra de inmediato en su pensamiento produciendo un modelo mental que difícilmente tendrá la fuerza, para adecuarse a las distintas necesidades que poco a poco se le presentan al estudiante. Lo señalado anteriormente motivó a conocer la comprensión que de la fracción tienen estudiantes de tercer año de primaria, nivel escolar en donde la enseñanza de la fracción es oficial en el currículum mexicano. Consideramos que el conocimiento de la comprensión de la fracción en este momento de la vida escolar del estudiante, es relevante para el profesor, pues podrá hacer intervenciones en caso de identificar una comprensión escasa.

De esta manera el objetivo de investigación planteado fue caracterizar la comprensión de estudiantes de tercer año de primaria sobre la fracción, mediante un cuestionario basado en los usos y aspectos de las fracciones en el sentido de Freudenthal (1983). Respecto de la comprensión de un concepto, se adoptó la postura de Gallardo, González y Quispe (2008), y se estableció que un alumno comprende el concepto de fracción, si es capaz de resolver problemas que demanden sus diferentes usos y aspectos. Así, entre más usos y aspectos pueda trabajar el alumno, mejor será su comprensión. Esta definición de comprensión de la fracción se hizo operativa al valorarla por medio de los procesos y errores de los estudiantes al enfrentar tareas que demandan los diferentes usos y aspectos de las fracciones.

El reporte de esta investigación se sintetiza en la presente tesis en 5 capítulos, una sección de anexos y la bibliografía. Enseguida se describen cada uno de ellos.

El capítulo 1 presenta el problema de investigación

Además se muestran los antecedentes que delimitaron el problema de investigación, así como la pregunta de investigación y el objetivo planteados.

En la enseñanza de las matemáticas en la Educación Básica se ha identificado que hay serias dificultades de aprendizaje en los estudiantes; una de las más recurrentes es el trabajo con números fraccionarios. Esta hipótesis coincide con los resultados de los estudiantes en evaluaciones nacionales e internacionales, por ejemplo, PISA 2015 (OCDE, 2016) y PLANEA 2018 (INEE, 2018). Dicha dificultad se agudiza por la enseñanza y el aprendizaje, memorísticos y mecanizados que se promueve en las aulas, que difícilmente permiten al estudiante transitar del tratamiento concreto al abstracto.

En el capítulo 2 se presenta la fenomenología didáctica de las fracciones

Misma que es reinterpretada por Valenzuela *et al*. (2017) y Valenzuela (2018), se trata de un marco interpretativo, que sirve para caracterizar los modelos de enseñanza existentes, los que se diseñen y los objetos mentales fracción que tienen los alumnos en un determinado nivel educativo.

El capítulo 3 se dedica a describir las etapas metodológicas

La investigación presentada en esta tesis es de carácter cualitativo, se trata de un estudio descriptivo, donde mediante un estudio de casos se diseñan, validan e implementan actividades para la enseñanza de las fracciones en tercer grado de educación primaria. Se describen las etapas en las que la metodología fue dividida.

En el capítulo 4 se describe el análisis de los datos

Dicho análisis se centra en describir la caracterización de la comprensión de la fracción de los participantes, enfocándose en los procesos y los errores de sus actuaciones al resolver situaciones que demandan los diferentes usos y aspectos de las fracciones.

En el capítulo 5 se exponen las conclusiones del trabajo de tesis

Se responde la pregunta de investigación y se describe el alcance del objetivo propuesto, además se describen 3 actividades para la enseñanza de las fracciones en tercer grado de primaria, centradas en el uso fracturador y medida.

En la sección de la bibliografía se exponen los referentes utilizados en el estudio

Compuestos de tesis de investigación, artículos, libros de texto y de investigación, planes y programas de estudio.

Se incluyen además 5 anexos

Se trata del reporte de la caracterización del modelo de enseñanza (ANEXO 1), las actividades del cuestionario para valorar la comprensión de la fracción(ANEXO 2) y las actividades de intervención didáctica diseñadas (ANEXOS 3, 4 y 5).

Capítulo 1

ANTECEDENTES Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se muestran los antecedentes que delimitaron el problema de investigación. Se incluye también el objetivo de investigación.

1.1 ANTECEDENTES

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de las fracciones, y más precisamente los números racionales, como problemática en el ámbito de la Matemática Educativa han sido estudiados desde diferentes enfoques por muchos investigadores. Algunas contribuciones importantes son por ejemplo los trabajos de Kieren (1988; 1992; 1993), Freudenthal (1983), Figueras (1988; 1996) y Streefland (1991), o más recientemente aquellos desarrollados por Fandiño (2009) y Quispe, Gallardo y González (2010), entre otros.

Freudenthal (1983) es un referente principal al hablar de las fracciones. Él señala que desde un punto de vista riguroso el objeto matemático que importa es el *número racional* más que la *fracción*, sin embargo las fracciones son el recurso fenomenológico del número racional, esto significa que mediante el tratamiento de la fracción se acerca a la definición del número racional. Resalta que la "fracción" es la palabra con que entra en la enseñanza el número racional y está relacionada con romper, mientras que "número racional" está relacionado con "razón", en el sentido de la proporción de medidas.

Dicho autor menciona también que la didáctica de las fracciones está caracterizada por tendencias unificadoras, se empieza por los números naturales, que se enfocan desde varias perspectivas y cuando llega el turno de las fracciones, se supone que los alumnos están lo suficientemente avanzados como para quedarse satisfechos con un único enfoque desde la realidad. Este supuesto desde su punto de vista es erróneo, y él considera que es el motivo por el cual la enseñanza de las fracciones es más difícil que la de los números naturales, y por el que mucha gente nunca las aprende. Por su parte, concibe a las fracciones con una amplia riqueza fenomenológica en sus diferentes usos y aspectos: En el lenguaje cotidiano se usa la fracción como 1) descriptor y como 2) comparador en un nivel menos abstracto; y además de estos, en la propia matemática se usa la fracción como 3) fracturador, 4) comparador, 5) operador, 6) medida o mensurador y 7) número. La definición de cada uno de ellos se encuentra en el capítulo dos.

Siguiendo con los aspectos conceptuales de las fracciones, Fandiño (2009) resalta que detrás del término "fracción", se esconden varias acepciones y esto genera confusión en los estudiantes, particularmente ella enumera 12 acepciones, a las que se refiere como *significados* que la palabra "fracción" puede asumir en matemáticas y por tanto en el proceso de enseñanza – aprendizaje, algunos de ellos se corresponden con los citados por Freudenthal (1983). Enseguida se describen cada uno de estos para conocimiento del lector, con base en el artículo de Fandiño (2009).

a) *La fracción como parte de una unidad-todo, a veces continua, a veces discreta*

Si se considera la fracción como una relación parte – todo, hay una gran diferencia dependiendo de si el "todo" (la unidad) está constituido por algo continuo o si está constituido por un conjunto discreto, esto lleva a las siguientes clasificaciones.

<u>El todo es una unidad continua:</u> Por ejemplo, la superficie de un rectángulo o una pizza.

<u>El todo es una unidad discreta:</u> Por ejemplo, 12 personas, 12 canicas o 12 juguetes.

b) La fracción como cociente

La escritura *a/b* fue propuesta en precedencia en los términos de *parte/todo*, dada una unidad, dividirla en *b* partes (iguales, congruentes, que puedan sobreponerse, consideradas en últimas intercambiables) y tomar *a*; la unidad de partida podía ser continua, y por lo tanto producir pocos problemas; o también podía ser discreta, es decir un conjunto de *c* elementos, y por lo tanto producir problemas de "compatibilidad" entre *b* y *c*.

Pero es posible ver la fracción *a/b* como una división no necesariamente efectuada sino simplemente indicada: $a \div b$; en este caso la interpretación más intuitiva no es la *parte / todo*, sino la siguiente: tenemos *a* objetos y los dividimos en *b* partes.

A veces la operación de división indicada *a/b* es también efectuada; por ejemplo, $\frac{3}{5}$ puede indicar una fracción *parte/todo*, una división indicada (3 objetos para distribuir entre 5 personas) pero también el cociente 0.6 si tal división es efectuada. Sólo que la escritura 0.6 no produce ya el efecto operatorio que producía la fracción $\frac{3}{5}$ que la originó, generando así dos sentidos distintos ($\frac{1}{5}$ tres veces, o 3 objetos para distribuir en 5 personas). Es entonces evidente que la misma escritura $\frac{3}{5}$ está indicando situaciones que, a los ojos de quien aprende, puede tener interpretaciones muy distintas.

c) *La fracción como relación*

A veces la fracción *a/b* se usa explícitamente para indicar la relación entre a y b y entonces se escribe *a:b*; el signo ":" sustituye "/", no solo indicando la operación de división (indicada solamente o por efectuar) sino también al hacer explícito un sentido de relación entre dos magnitudes que tienen nexos entre ellas, *a* es a *b*.

Así, si tenemos un segmento AB de 20 cm de largo y uno CD de 25, el primero son los $\frac{4}{5}$ del segundo, lo que puede escribirse: AB= $\frac{4}{5}$ CD o bien AB: CD = 4:5. La escritura 4:5 indica la relación entre las longitudes de los dos segmentos. Nada impide pensar en ejemplos discretos, un conjunto P de 20 objetos y uno Q de 25 objetos; es obvio que la relación entre las cantidades de P y de Q sigue siendo de 4:5 que con frecuencia se lee "de 4 a 5".

Si se toma la longitud del segmento CD como unitaria o la cantidad de objetos del conjunto Q como unitaria, entonces la longitud de AB o la cantidad de objetos del conjunto P se puede expresar con la fracción $\frac{4}{5}$, restituyendo a esta escritura una interpretación bastante cercana a la parte/todo. Entre otras características fuertes de la fracción como relación está el hecho de que numerador y denominador aparecen como intercambiables, y no tienen ya esa valencia semántica tan estricta del significado parte todo.

d) *La fracción como operador*

Con mucha frecuencia la fracción es considerada un operador multiplicativo, este es uno de sus significados más usados en la escuela, por ejemplo, "encontrar un segmento CD que sea los $\frac{4}{5}$ de un segmento AB que mide 20 cm" lleva a decir que CD medirá 16 cm.

La fracción como operador, actúa sobre los números puros más que sobre los conjuntos o sobre los objetos, es de hecho una nueva operación que combina división y multiplicación. A veces se presentan situaciones complicadas: "Hallar los $\frac{4}{5}$ de un conjunto de 22 peras" presenta un problema de intuición, dado que 22 no es divisible por 5. Una vez que se pierde el aspecto intuitivo, nada evita, entonces, que se opere intercambiando entre ellas las dos operaciones: (4x22) ÷5. Este procedes es lícito, y produce el mismo resultado numérico, pero muestra además que la fracción como operador no es la fracción como *parte/todo*.

e) La fracción en probabilidad

Suponga que desea evaluar la probabilidad según la cual, lanzando dos dados, se obtiene un múltiplo de 4. Los casos posibles son 36, los eventos favorables son 9 (que salga 4, que se presenta en 3 casos; 8, que se presenta en 5 casos; 12, que se presenta en 1 caso). Entonces la probabilidad de ese evento se puede expresar con la escritura $\frac{9}{36}$, es decir el número de casos favorables al evento, con respecto al número de casos posibles. Así, $\frac{9}{36}$ expresa una medida, el grado de posibilidad de satisfacción del evento, un límite para apostar, la probabilidad; dicha fracción es equivalente a $\frac{1}{4}$, pero solo aritméticamente porque intuitivamente esta transformación dice poco. Dice mucho más otra fracción equivalente: $\frac{25}{100}$ especialmente si la escribimos de una forma más común: 25% de probabilidad. Cabe señalar que en unas interpretaciones esta idea la asociamos a la fracción como *parte/todo,* tomando en cuenta un todo discreto.

f) La fracción en los puntajes

Las fracciones en los puntajes son un objeto matemático que tiene características propias, intuitivas, pero poco cercanas a la definición que fue dada al inicio (parte/todo). Considérese el siguiente ejemplo.

Laura trata de darle al blanco y tiene a disposición 5 tiros; centra el objetivo 2 veces; descansa un poco y, en la segunda tanda, tiene a disposición 3 tiros; centrando el blanco otras 2 veces. Andrés centra el objetivo 3 veces de 5 en la primera tanda y en la segunda tanda solo una vez. Entonces tanto Laura como Andrés dieron en el blanco 4 veces sobre 8 lanzamientos de los que disponían. Expresemos “matemáticamente lo que sucedió.

Laura 1°	Laura 2°	Total Laura	Andrés 1°	Andrés 2°	Total Andrés
$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{8}$

Debemos tener muchas dudas al aceptar esta descripción del juego de Laura y Andrés porque, aceptándolo, nos encontramos frente a una “adición” entre fracciones estructurada así: $\frac{2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{4}{8}$, bastante extravagante… y aun así $\frac{4}{8}$ es equivalente a $\frac{1}{2}$ y no se puede negar que Laura golpeó el blanco la mitad de las veces que lanzó.

g) La fracción como número racional

En este caso se da particular atención a cuestiones que tienen que ver con la operatividad: equivalencia entre fracciones, adiciones entre fracciones etcétera.

El numero racional 0.5, por ejemplo, no es otra cosa que la clase de equivalencia [(1; 2), (2; 4), (4; 8)…, (3; 6), (6; 12), (9;18), (5; 10), (10; 20)…] formada por todos y solo aquellas infinitas parejas ordenadas de números (*a*; *b*), tales que: *a* y *b* son elementos de los naturales y *b* es distinto de 0, y entre los cuales aparece el par (1,2) o bien, si se prefiere, $b=2\times a$. Según Fandiño (2009), es fácil comprender que no podemos cargar, especialmente en un aula escolar, a ningún nivel, con este lastre; por lo cual se elige con frecuencia un representante de esta clase, la mayoría de las veces aquél “reducido a los términos mínimos”, o la “fracción irreducible”, en nuestro caso (1; 2), y se usa este al puesto de la clase de equivalencia. Es más, escribiendo directamente en forma fraccionaria $\frac{1}{2}$, arrastramos con nosotros la secuela infinita de las parejas-fracciones equivalentes. Por lo que, tanto 0.5 como $\frac{1}{2}$, se aceptan como representantes del mismo número racional, aun siendo originalmente, entes esencialmente distintos. Cabe señalar que según nuestra interpretación, es necesario tener siempre en cuenta en la enseñanza de la equivalencia de las fracciones, que ayuda justo a comprender el concepto de clases de equivalencia, y con ellos de los números racionales.

h) La fracción como punto de una recta orientada

En los libros de texto se llega a encontrar en las actividades de aula la siguiente propuesta: “Ubicar $\frac{3}{4}$ en la recta numérica", responder a esta demanda significa evaluar aquella fracción como si fuera un número racional, aplicar la relación de ordene, diseñar una marca (que indicará dicha fracción) entre el origen (0) y la unidad (1) en una posición apropiada y oportuna. En tal caso, la fracción es vista como un valor-punto sobre la recta orientada, mucho más cercana a ser un número racional que una fracción.

Cuando escribimos, $\frac{3}{4}<\frac{6}{7}$, estamos tratando directamente las fracciones como números racionales. Si queremos disponer las dos fracciones sobre la recta numérica, sabemos que $\frac{3}{4}$ estará antes de $\frac{6}{7}$. Para verificar la exactitud de lo que estamos diciendo y/o para disponer bien los puntos sobre la semirrecta, transformaremos las dos fracciones en otras equivalentes pero más oportunas: $\frac{21}{28}$ y $\frac{24}{28}$. Así todo resulta más evidente. La fracción indica en este caso una distancia, la distancia entre el origen y el punto-fracción. Obviamente se trata de una distancia relativa, dado que depende de la unidad de medida. De esta interpretación subrayamos el hecho de que la fracción en una recta orientada, tal como lo señala Fandiño (2009), también puede ser vista como un segmento dirigido con una cierta longitud, por lo cual lo asociamos a una medida.

i) La fracción como medida

Sobre las botellas de vino con frecuencia se lee 0.75 L, que indica una cantidad, una medida, en la unidad decimal litro. Cualquier persona está en capacidad de entender que se trata de $\frac{3}{4}$ de un litro, sin embargo, ¿se trata de una fracción en el sentido primitivo (una unidad-todo dividida en 4 partes iguales de las cuales se tomaron 3) o simplemente de un número para expresar una cantidad? Una cosa es tener una botella graduada de 1 litro y decidir llenar los ¾, y otra bien distinta es tener una botella de vino que ya tiene como medida 0.75. La cantidad de vino en la botella a veces tiene sentido pensarla como número racional, a veces como fracción, pero en ningún caso es necesario o conviene hacer referencia a la definición original de fracción. Es mucho más espontáneo un uso directo de la medida así como viene indicada.

j) La fracción indicadora de cantidad de elección

Se requiere premiar los clientes del Gran Almacén y el director decide hacer un descuento escogiendo casualmente los clientes: en 1de cada 10, el primero en entrar recibe un bono, luego el 11-écimo, luego el 21-ésimo y así sucesivamente. Por lo tanto, uno cada diez. Al final, ¿cuántos clientes habrán recibido el bono? Es obvio $\frac{1}{10}$ significa más cosas: que el bono fue dado a $\frac{1}{10}$ de los clientes del dia (redondeando por defecto: Si los clientes fueron 80.7 recibieron el bono; si fueron 81 o 88, el bono lo reciben 8); pero $\frac{1}{10}$ significa también, en este caso, “1 de cada 10”que no es, estrictamente, la fracción que pretende dividir una unidad-todo en 10 partes iguales.

k) La fracción como porcentaje

De vez en cuando es más fácil expresar 75% bajo la forma de fracción $\frac{75}{100}$ *o* $\frac{3}{4}$, a veces conviene dejarlo indicado bajo forma de porcentaje, y otras veces es preferible el número decimal 0.75. En el caso de la botella de vino serían ridículas las dos primeras escrituras y por lo tanto se privilegia la tercera. En las cosas que tienen que ver con la probabilidad, es más intuitivo expresar dichas medidas con una de las dos primeras escritura. Si se obtiene un préstamo en el banco, el interés se expresa en porcentaje: 3.5%. En conclusión, aunque las escrituras matemáticas resultan formalmente equivalentes, no son del todo equi-significantes en la práctica cotidiana; lo que significa que hay significados distintos que cada uno de nosotros reconoce dentro de las distintas variedades de escrituras formales.

l) La fracción en el lenguaje cotidiano

De acuerdo con Fandiño (2009) muchos de los investigadores que se ocupan de la didáctica de las fracciones actualmente se inclinan por un primer contacto “informal”, como es, después de todo, el estilo didáctico más difundido y generalizado hoy en día. Puede por lo tanto ser de ayuda un momento en el cual se exploran distintos campos y distintos usos de las fracciones en la vida diaria; el estudiante debería controlar lingüística y cognitivamente estos usos y poner algunos propios, hasta alcanzar una conceptualización estable y significativa del término; sobre esta conceptualización se podrá, en un segundo momento, construir un conocimiento sucesivo. Es posible tomar unos ejemplos: en la lectura del reloj, en música, en la práctica cotidiana.

Hasta aquí terminamos la descripción de los significados de la fracción de Fandiño (2009). Por nuestra parte distinguimos principalmente siete usos de la fracción, en el sentido de Freudenthal (1983), dos que se emplean en el lenguaje cotidiano: descriptor y comparador, y cinco usos en un nivel más abstracto: fracturador, comparador, operador, medida y número, las descripciones de ellos se muestran en el capítulo 2. Otros autores cuyas investigaciones han aportado para entender más sobre los distintos significados o usos de las fracciones, o más precisamente como se mencionó antes, de los números racionales, son Kieren (1988) y Behr, Lesh, Post y Silver (1983), los cuales consideran cuatro subconstructos de los números racionales, asociados directamente con las fracciones; estos son, el subconstructo parte-todo, medida, razón y operador. Estas interpretaciones son ampliamente usadas como marco de referencia en investigaciones, por ejemplo en el trabajo de Valdemoros, Ramírez y Lamadrid, (2015).

Por otro lado, de acuerdo con Quispe *et al*. (2010), las características fenomenológicas de los significados de la fracción se reflejan también a nivel cognitivo, al mostrarse como condicionantes de la comprensión que los estudiantes poseen de este concepto, al respecto, con base en la literatura, señalan 5 particularidades del aprendizaje y la comprensión de las fracciones:

1. La comprensión de la fracción exige la identificación y el dominio de sus distintos significados.
2. La comprensión de los significados de la fracción genera dificultades intrínsecas de distinta índole, si bien algunos de ellos (por ejemplo, parte-todo) suelen mostrarse más asequibles que otros (p.ej., medida).
3. El predominio en el aprendizaje de unos determinados significados llega a interferir u obstaculizar el uso y la comprensión del resto de significados.
4. La comprensión de la fracción se ve perjudicada por aquellas propuestas curriculares que priorizan el aprendizaje de ciertos significados (p.ej., parte-todo, cociente) en detrimento de otros (p. ej., medida, razón, operador).
5. La valoración y el desarrollo de la comprensión de la fracción demanda que las tareas matemáticas en el aula abarquen la mayor diversidad posible de situaciones y fenómenos diferentes en los que se requiera o tenga sentido el uso de todos los significados de la fracción (p. 363).

Respecto a la particularidad 4, la investigación de Calderón (2012), en Guerrero, particularizó sobre los significados asociados al concepto de fracción y presentes en los libros de texto de educación básica, primaria y secundaria. Como resultado encontró que en primaria se priorizan los significados fracturador y medida, mientras que en secundaria se priorizan los significados, medida, operador, número racional, y lenguaje cotidiano (ver Tabla 1.1).

Por nuestra parte, consideramos de suma importancia la particularidad 1, esto es, la comprensión de la fracción exige la identificación y el dominio de sus distintos significados, por ello desde la postura de Freudenthal (1983) y Gallardo, González y Quispe (2008), consideramos que los estudiantes tendrán una mejor comprensión de la fracción si en la enseñanza se priorizan los diferentes usos y aspectos de este concepto.

Los resultados de las investigaciones antes referenciadas han permitido identificar principalmente: (1) marcos de referencia sobre la estructura de los racionales/fracciones y su relación con otros objetos matemáticos, (2) ideas relacionadas con la comprensión del concepto fracción y (3) tendencias de los significados en la enseñanza en México.

En el currículum mexicano, y más precisamente en los libros de texto se han identificado diferentes modelos para su enseñanza, por ejemplo, modelo de áreas, modelo discreto, modelo de la recta numérica que buscan promover un conocimiento más amplio sobre este tema (Valenzuela, 2018). Sin embargo, en investigaciones recientes se muestra evidencia de que las fracciones siguen siendo uno de los conceptos más complejos para tratar en clase, cuyo aprendizaje enfrenta grandes dificultades para la mayoría de los alumnos (ver por ejemplo Siegler, Fazio, Bailey y Zhou, 2013, y Petit, Laird y Marsden, 2010).

Tabla 1.1. Significados de la fracción en el libro de texto de primaria y secundaria.

SIGNIFICADOS ASOCIADOS AL CONCEPTO FRACCIÓN EN EL LIBRO DE TEXTO							
	GRADO ESCOLAR	**SIGNIFICADOS DE LA FRACCIÓN**					
		FRACTURADOR	**COMPARADOR**	**MEDIDA**	**OPERADOR**	**NÚMERO RACIONAL**	**EN EL LENGUAJE COTIDIANO**
PRIMARIA	**1°**						
	2°	*		*			
	3°	*		*		*	*
	4°	*	*	*	*	*	*
	5°	*		*	*	*	*
	6°			*	*	*	*
SECUNDARIA	**1°**			*	*	*	*
	2°		*	*	*	*	*

Fuente: Calderón, 2012.

1.2 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Centramos la atención en el estudio de las fracciones en la educación básica debido a que desde un punto de vista didáctico, compartimos la idea de que las fracciones son el recurso fenomenológico para introducir los números racionales (Freudenthal, 1983), y que éstas pueden ser usadas en diversas situaciones y con diferentes significados para mejorar su comprensión, y como consecuencia de los números racionales. Además, es considerado como uno de los temas más complejos para enseñar y en el cual los alumnos enfrentan mayor dificultad para responder situaciones en las que están involucradas las fracciones.

En materia del logro del aprendizaje en PISA 2015 México alcanzó 408 puntos respecto a la media OCDE (490 puntos) en el rendimiento en matemáticas (OCDE, 2016). En educación primaria en 2018 la prueba PLANEA, señala que 15% de los estudiantes de 6° de primaria se encuentran en el dominio satisfactorio, que implica resolver problemas que requieren de operaciones básicas con números decimales y multiplicar una fracción por un número natural, y solamente el 8% se encuentra en el dominio sobresaliente, logrando resolver problemas que requieren operaciones básicas con números decimales y fraccionarios, que implican conversiones. El 59% se encuentra en el dominio insuficiente, al resolver operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) con números naturales (INEE, 2018). Estos resultados son poco alentadores, y se repiten en cada evaluación de las pruebas, al parecer el logro del aprendizaje no mejora significativamente en nuestro país.

Estos resultados son evidencia de que la problemática relacionada con la enseñanza y aprendizaje de las fracciones desde edades tempranas aún persiste. Al respecto, se tiene la hipótesis de que una de las razones podría estar vinculada con el hecho de que la enseñanza de las fracciones se sigue haciendo desde un mismo enfoque, empleando principalmente el modelo de áreas, dejando de lado las potencialidades que tienen otros modelos que sirven para enseñar otros usos de las fracciones, por ejemplo el modelo de la recta numérica.

Por otra parte, en un gran número de investigaciones se destaca la importancia del estudio del conocimiento que tienen los alumnos sobre las fracciones desde la educación básica. Autores como Siegler *et al*. (2012) señalan que un buen conocimiento de las fracciones es predictor de un buen desempeño de la matemática desde primaria hasta niveles más altos. Así mismo, Usiskin (1997) y Kieren (1992) afirman que el conocimiento de las fracciones y los números racionales se relaciona con muchos otros conceptos de la matemática y sus aplicaciones, su conocimiento se extiende más allá de la aritmética, como por ejemplo al Álgebra, Cálculo y Geometría.

Lo señalado en este apartado, además de los 15 años de experiencia docente en nivel primaria de la autora de esta tesis, ha motivado a plantearse como objetivo de investigación *caracterizar la comprensión de estudiantes de primaria sobre la fracción, mediante un cuestionario basado en los usos y aspectos de las fracciones en el sentido de Freudenthal (1983)*. A manera de hipótesis se establece que esta caracterización contribuye al diseño de actividades que propicien la mejora de la comprensión de este concepto en sus primeros años de estudio. Con este objetivo, se pretende dar respuesta a la pregunta: ¿Qué características tiene la comprensión de los alumnos de tercer año de primaria sobre las fracciones, en términos de los usos y aspectos de este concepto? De manera que, al responder esa pregunta, se logren proponer actividades de enseñanza para contribuir a la comprensión de la fracción de alumnos de dicho nivel escolar.

Capítulo 2

REFERENTE TEÓRICO

En este capítulo se describe el marco interpretativo que proponen Valenzuela et al. (2017) y Valenzuela (2018) que sirve para caracterizar los modelos de enseñanza existentes, los que se diseñen y los objetos mentales de la fracción que tienen los alumnos en un determinado nivel educativo; aunque cabe señalar que en la presente investigación, no se hace referencia a objeto mental, sino a la comprensión de un concepto en el sentido de Gallardo, González y Quispe (2008).

Se describe además el planteamiento teórico–metodológico llamado *desafíos matemáticos* (SEP, 2016 d) que sirve tanto para diseñar actividades como para su implementación.

Aclaramos al lector que el desarrollo de este capítulo se basa en el artículo de Valenzuela, García y Nájera (en prensa).

La comprensión de los conceptos matemáticos es uno de los constructos que más relevancia cobra dentro de la enseñanza de las matemáticas, sin embargo la definición de comprensión dentro de la Matemática Educativa no es unánime y depende de la postura teórica desde la que se mire, por ejemplo desde una postura fenomenológica y epistemológica del concepto Gallardo, González y Quispe (2008) señalan que:

> ...el uso intencional del conocimiento matemático en situaciones pertenecientes a su ámbito fenómeno -epistemológico da cuenta de la comprensión, de *lo que un individuo utiliza y cómo lo utiliza*, en los términos ya señalados, *proporciona información específica sobre lo que comprende y cómo lo comprende* (p. 367).

El vínculo epistemológico al que se refieren los autores es a la naturaleza matemática del concepto, lo que podemos denominar conocimiento, por su parte, la fenomenología está referida a las diferentes situaciones en las que el concepto puede presentarse, por ejemplo los usos y aspectos de la fracción en el sentido de Freudenthal (1983), o los significados atribuidos al concepto de fracción propuestos por Fandiño (2009).

Particularmente adoptamos la postura de Gallardo, González y Quispe (2008) sobre la comprensión de los conceptos, misma que la hacemos operativa al valorarla por medio de los procesos y errores de los estudiantes al enfrentar tareas que demandan los diferentes usos y aspectos de las fracciones en el sentido de Freudenthal (1983).

2.1 FENOMENOLOGÍA DIDÁCTICA DE LAS FRACCIONES

En palabras de Freudenthal (1983) la fenomenología de un concepto matemático, una estructura matemática o una idea matemática se define como:

> La descripción de un *noumenon* en su relación con los *phainomena* para los cuales es el medio de organización, indicando cuáles son los *phainomena* para cuya organización fue creado y a cuáles puede ser extendido, de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre esos fenómenos (pp. 27).

En otros términos, de la cita anterior se entiende que al hacer una fenomenología didáctica se pretende describir aquellos fenómenos que son organizados por medio de unos determinados conceptos, que de acuerdo con Puig (1997) pueden ser llamados medios de organización (ver Figura 2.1). Tales fenómenos se pueden encontrar ya sea dentro o fuera del ámbito matemático y, además, como menciona el autor antes citado, están presentes en el mundo de los alumnos y se proponen en la enseñanza. La relación “fenómenos - medios de organización” marca el uso que posteriormente se empleará cuando el análisis fenomenológico se lleve a la enseñanza: se plantearán los fenómenos que deben ser organizados con la intención de que los estudiantes vayan elaborando objetos mentales lo más rico posible de estos medios de organización (conceptos).

Desde un punto de vista didáctico, Freudenthal (1983) menciona que el objetivo en el sistema escolar es básicamente la constitución de objetos mentales y en segundo lugar la adquisición de conceptos. La constitución de objetos mentales de los alumnos se entiende como el conjunto de ideas que ellos han elaborado sobre un concepto matemático (el objeto pensado) y su relación con los fenómenos que este organiza. El objeto mental de un alumno sobre un concepto matemático mejora cuando él logra resolver una gama amplia de problemas que se relacionan con los distintos fenómenos que organiza el concepto en un determinado nivel, y así, se dice que su objeto mental está más próximo a la adquisición del concepto.

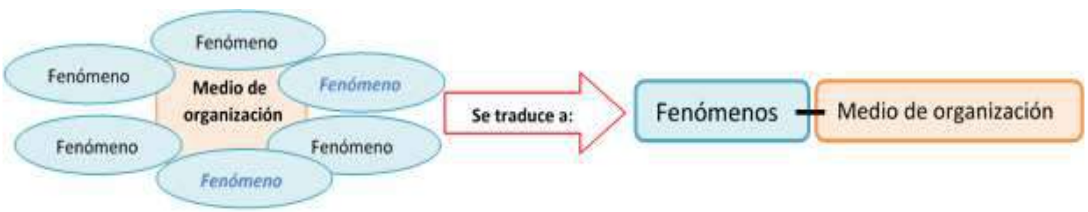


Figura 2.1. Esquematización sobre el proceso de elaborar una fenomenología didáctica.

Con respecto al análisis fenomenológico, vale la pena aclarar que, en un determinado nivel, de acuerdo con las interpretaciones de Puig (1997), el medio de organización que constituye ciertos fenómenos puede llegar a ser un fenómeno que es organizado por otro medio de organización, formando así una cadena de fenómenos-medios de organización (ver Figura 2.2). Por ejemplo, el concepto número organiza el fenómeno de la cantidad, pero, en otro nivel, el número es un fenómeno organizado por el sistema decimal de numeración. Así mismo, los números naturales, los enteros y los racionales, son medios de organización de determinados fenómenos, pero también, en un nivel más avanzado, serán fenómenos organizados por el concepto número.

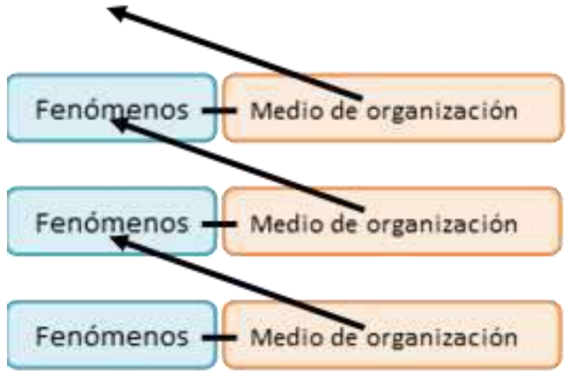


Figura 2.2. Cadena de fenómenos-medios de organización.

Teniendo en cuenta este marco, y en términos generales se entiende que, para la constitución y mejoramiento de objetos mentales, los alumnos deben experimentar fenómenos que se relacionan con un concepto o estructura matemática, de manera que este sea su medio de organización. En este caso, se proponen situaciones que promuevan una experimentación donde se usen las fracciones, pero para ello, es necesario realizar una fenomenología didáctica del concepto fracción.

Aunado a lo anterior Quispe, Gallardo y González (2010) argumentan que un estudiante comprende un conocimiento matemático si es capaz de emplearlo, en alguna de sus formas posibles, en todas aquellas situaciones pertenecientes a su esfera fenómeno – epistemológica, por nuestra parte consideramos que un alumno comprende un concepto, en particular las fracciones, si es capaz de resolver problemas que demanden diferentes usos de la fracción en el sentido de Freudenthal (1983). Así, entre más usos pueda trabajar el alumno, mejor será su comprensión.

El ejemplo de fenomenología didáctica de las fracciones hecha por Valenzuela *et al*. (2017) a partir de las ideas de Freudenthal (1983) y otros investigadores como Kieren (1988), parte desde los usos de las fracciones en el lenguaje cotidiano, hasta la descripción de los usos y aspectos de las fracciones que se emplean en la enseñanza, así como su construcción formal desde la matemática. Además de este marco interpretativo, para el diseño del instrumento para caracterizar la comprensión de los alumnos sobre la fracción, se recurrió al enfoque didáctico conocido como *desafíos matemáticos*, que se sugiere para el estudio de las matemáticas en el Programa de Estudios de la Secretaría de Educación Pública en México, (SEP, 2016 d). En seguida detallamos cada uno de estos fundamentos teóricos.

2.1.1 Usos y aspectos de las fracciones

De la fenomenología didáctica para las fracciones hecha por Valenzuela *et al*. (2017), distinguimos principalmente siete usos de ese concepto, dos que se emplean particularmente en el lenguaje cotidiano: descriptor y comparador, y cinco usos en un nivel más abstracto: fracturador, comparador, operador, medida y número, tal como se muestra en la Figura 2.3.

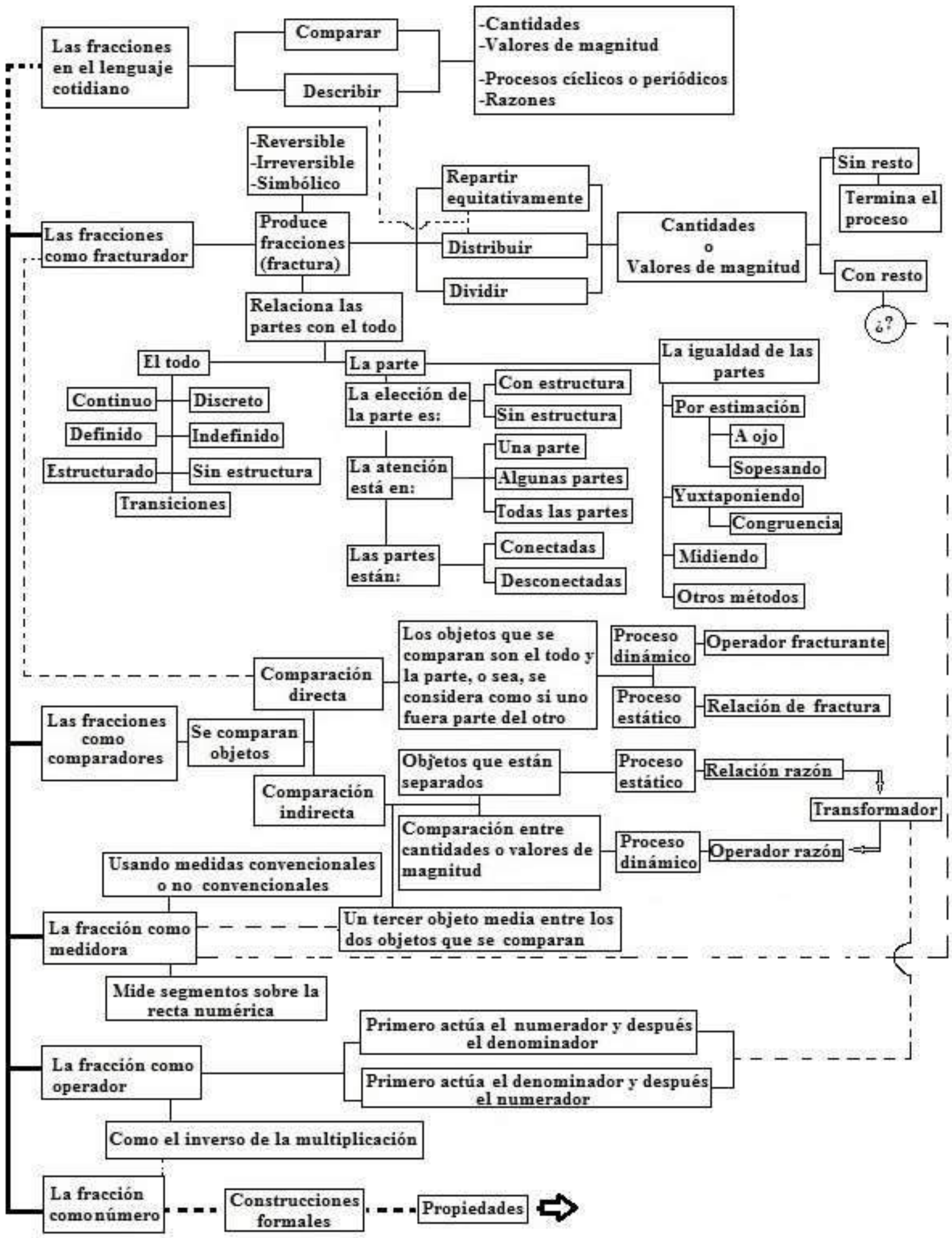


Figura 2.3. Usos y aspectos de las fracciones (tomado de Valenzuela et al. 2017, p. 229).

En el lenguaje cotidiano las fracciones se usan para *describir* o *comparar cantidades* (ver Figura 2.4), valores de magnitud, procesos cíclicos o periódicos y razones. Estos usos precisan de ser resaltados porque se asume el hecho de que no necesariamente resultan de un conocimiento escolarizado, por ejemplo, es común que los los niños usan expresiones como: "la mitad de pan", "la mitad de una naranja" o "la otra mitad", sin ser conscientes de que están haciendo referencia a un concepto matemático llamado fracción.

Figura 2.4. La fracción para describir cantidad de refresco.

El tercer uso es *la fracción como fracturador*, se usa para producir fracciones (fracturar), por medio de las cuales se relacionan las partes con un todo continuo o discreto. Esto podría surgir a partir de dejar expresada una división, realizar un reparto equitativo (ver Figura 2.5) o una distribución. La fracción que surge de los procesos anteriores describe la cantidad o magnitud que toca a cada objeto o individuo entre los que se hace la distribución o reparto. Los procesos de causar fracciones pueden ser dinámicos o estáticos. En los procesos dinámicos se dice que la fracción aparece en su aspecto operador fracturante, mientras que, en los procesos estáticos, se usa la fracción en su aspecto relación de fractura.

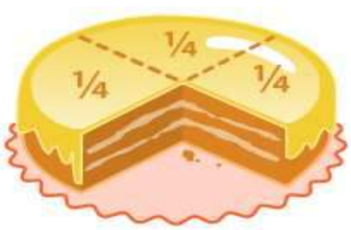


Figura 2.5. Reparto equitativo de un pastel.

El cuarto uso es la *fracción como comparador*, se usa la fracción para comparar cantidades, magnitudes u objetos que se separan unos de otros, ya sea por experimentación o de forma imaginaria (Figura 2.6). Dicha comparación se puede hacer de manera directa o indirecta. Cuando se hace una comparación directa, la fracción se piensa como fracturador, es decir se compara la parte con un todo. Para hacer una comparación indirecta se emplea un tercer objeto que media entre los objetos que se comparan. En los procesos de comparación dinámicos se usa la fracción como comparador en su aspecto operador razón, mientras que, en los procesos estáticos, en su aspecto relación razón.

Figura 2.6. El litro media la comparación de los diferentes envases.

El quinto uso es la *fracción como medidora,* se emplea para medir segmentos sobre la recta numérica, o cuando la fracción precede a una magnitud, por ejemplo, ½ pollo (Ver Figura 2.7), cabe señalar que este ejemplo también puede considerarse como parte del lenguaje cotidiano, y la fracción en la Figura 2.4 (medio litro de yoli) también sirve para ejemplificar la fracción como medida.

Figura 2.7. La fracción como medidora.

El sexto uso es *la fracción como operador*, se usa cuando la fracción transforma a una cantidad, esta transformación puede ser de dos tipos, primero actúa el numerador y después el denominador o viceversa. Por ejemplo, ½ de 4 es 2, la fracción transforma al número 4 en el número 2. La fracción como operador se acerca cada vez más al campo de los números, puede ser vista como el inverso de la multiplicación, o como un transformador, que transforma una cantidad en otra.

El séptimo uso es *la fracción como número*, este se usa cuando se le da un tratamiento meramente numérico a la fracción y se reconocen algunas de sus propiedades, como por ejemplo, la equivalencia, el orden y la densidad de las fracciones.

2.2 LOS DESAFÍOS MATEMÁTICOS

Un desafío matemático consiste en secuencias de situaciones matemáticas que tienen como objetivo despertar el interés de los alumnos e invitarlos a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados que emiten (SEP, 2016 d).

El planteamiento teórico-metodológico de los desafíos matemáticos es acorde a las exigencias que el Sistema Educativo Mexicano plantea para el docente como profesional de la enseñanza de las matemáticas, pues reclama un conocimiento profundo del contenido matemático y didáctico de esta asignatura en aras de transformar a la clase en un espacio social de construcción de conocimientos donde los alumnos aprenden a enfrentar diferentes tipos de problemas, de formular argumentos, de emplear distintas técnicas en la resolución de problemas, y de usar el lenguaje matemático para comunicar o interpretar sus ideas. Por esta razón, se decidió adoptar a los desafíos matemáticos como referente conceptual y metodológico para el diseño de las actividades del instrumento para caracterizar la comprensión de los alumnos sobre la fracción.

Las actividades matemáticas que se presentan a los alumnos, de acuerdo con los desafíos matemáticos exhiben las siguientes características para ser resueltas:

- Involucran diversas estrategias de solución.
- El alumno debe usar sus conocimientos previos, el desafío consiste en reestructurar lo que ya sabe, para modificarlo, ampliarlo, rechazarlo o volver a aplicarlo.

- El conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos lo puedan usar hábilmente para solucionar problemas y lo puedan reconstruir en caso de olvido.
- La actividad intelectual fundamental en estos procesos de estudio se apoya más en el razonamiento que en la memorización.

Las actividades diseñadas bajo esta metodología pretenden que tanto alumnos como docentes se enfrenten a retos matemáticos, en donde apliquen técnicas eficaces y argumenten sus razonamientos.

Capítulo 3

METODOLOGÍA

La investigación presentada en esta tesis es de carácter cualitativo, se trata de un estudio descriptivo, donde mediante un estudio de caso se caracteriza la comprensión de estudiantes de tercer año de primaria sobre el concepto fracción.

3.1 ETAPAS DE LA METODOLOGÍA

De acuerdo al objetivo de investigación, el presente estudio se ciñe a la investigación cualitativa, ya que se enfoca en entender el fenómeno de la comprensión del concepto fracción explorándolo desde la perspectiva de un grupo de estudiantes. Como diseño de investigación se recurrió al estudio de caso, entendido como una indagación empírica en profundidad sobre un fenómeno contextualizado en el mundo real (Yin 2013; Hijmans y Wester, 2009, citados en Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Particularmente se pretendió acceder a la comprensión de los estudiantes de manera empírica, esto es, mediante la identificación de sus procesos y errores al resolver actividades que involucran los diferentes usos y aspectos de las fracciones.

En Hernández, Fernández y Baptista (2014), se señala una tipología de los estudios de caso que se relaciona con el número de unidades o entidades a considerar:

1. Un solo caso o unidad de análisis.

2. Múltiples unidades de análisis o casos (en primera instancia, evaluar cada uno por sí mismo holística o integralmente, para después establecer tendencias y comunalidades).

3. Múltiples casos “cruzados”, “anidados” o “entrelazados” (la diferencia con la clase anterior es que desde el inicio se pretende revisar comparativamente los casos entre sí para tratar de detectar similitudes y diferencias).

En la presente investigación la tipología seguida es la primera, se trata de un solo caso, nuestra unidad de análisis son un grupo de estudiantes de tercer grado de primaria que han sido seleccionados por que la autora, al ser su profesora de grupo, aseguró que estaban más familiarizados con el uso fracturador, y que a muchos les costaba entender la definición de fracción. Además de que el grado escolar en el que se encuentran es el primero en dónde la fracción se aborda formalmente de acuerdo al plan y programa de estudios de la Secretaría de Educación Pública. Nuestro supuesto para la elección de este caso, es que el momento escolar en el que se encuentran los estudiantes es propicio para que se familiaricen con más usos y aspectos de las fracciones y con ello logren mejorar la comprensión de este concepto.

Para alcanzar el objetivo de investigación propuesto, se diseñó un esquema metodológico conformado por 6 etapas (ver Figura 3.1).

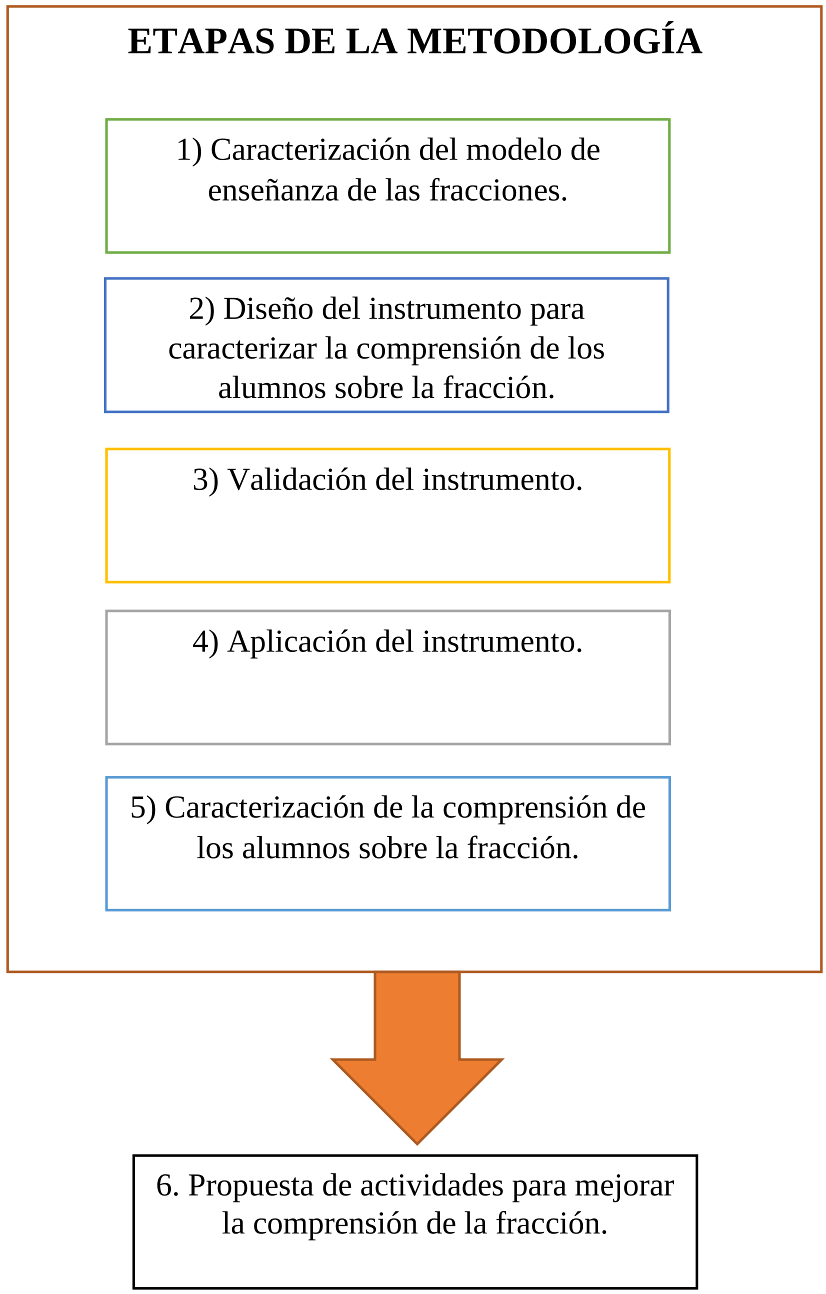


Figura 3.1. Etapas de la metodología.

3.2 CARACTERIZACIÓN DEL MODELO DE ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES

Los planes de estudio, los programas de estudio y los libros de texto permiten un punto de partida común para la enseñanza, señalando los contenidos que los alumnos deben de aprender, representando de esta manera un modelo de enseñanza de los contenidos escolares. El primer paso de la caracterización fue la revisión de los planes y programas de estudio de primaria (SEP, 2011, a; b; c) con la finalidad de ubicar los momentos en los que las fracciones eran introducidas implícitas o explícitamente en la escuela. Producto de esta revisión se encontró que la enseñanza de la fracción se formaliza en el tercer año de primaria.

Con base en el resultado anterior, se delimitaron prescolar y tercer año de primaria, como el rango en los que se procedería a caracterizar el modelo de enseñanza de las fracciones. El segundo paso fue identificar en las versiones de libros de texto mexicanos del profesor, desafíos matemáticos de primero, segundo y tercer año escolar (SEP, 2016a; b; c), y en los álbumes de preescolar (SEP, 2015 a; b; c) las lecciones en dónde las fracciones estaban presentes (datos de identificación y referencia). Una vez ubicadas las lecciones, el tercer paso fue interpretar con base en la fenomenología didáctica de las fracciones (Valenzuela *et al*., 2017) los usos y aspectos de la fracción (evidencia e interpretación).

Enseguida para aclarar al lector la actividad del paso 3, se presenta un ejemplo de cada nivel escolar abordado. El análisis completo se puede consultar en el ANEXO 1 de esta tesis.

3.2.1 Caracterización en preescolar

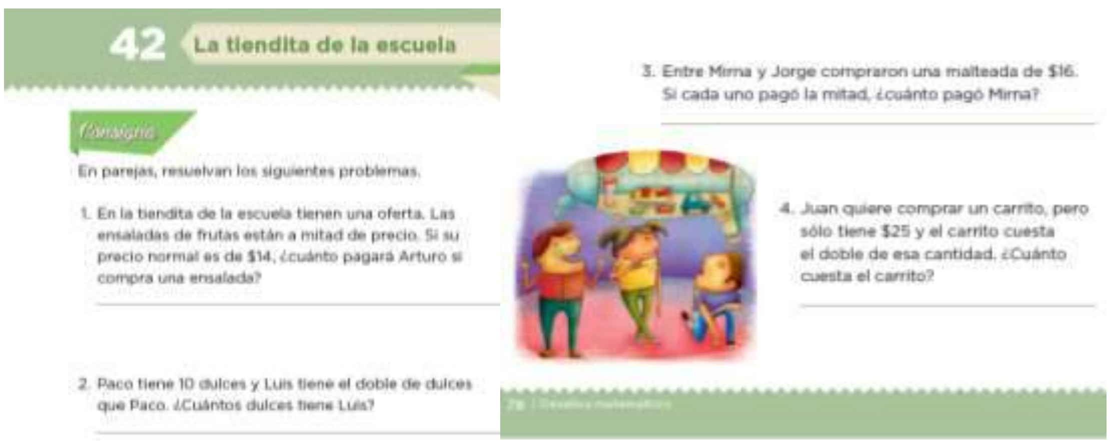
Tabla 3.1. Preescolar.

<table>
<tr><th>Datos de identificación</th><th>Datos de referencia</th></tr>
<tr><td>Nivel escolar: Preescolar
Grado: 1
Libro: Mi álbum
Actividad: El mercado
Página: 32</td><td>Contenido: Fracciones
Campo formativo: 2. Pensamiento Matemático
Competencias que se favorece: Resuelve problemas en situaciones que le son familiares y que implican agregar, reunir, quitar, igualar, comparar y repartir objetos.
Aprendizaje esperado: Comprende problemas numéricos que se le plantean, estima sus resultados y los representa usando dibujos, símbolos y/o números.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Evidencia
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Interpretación: Usos y aspectos de la fracción
<u>La fracción en el lenguaje cotidiano como descriptor</u>
En la actividad el mercado, la ilustración muestra frutas enteras y partidas, puede observarse que una señora tiene en las manos lo que pareciera media papaya y la otra mitad está en la balanza, una niña camina comiendo una rebanada de sandía.
En esta actividad identificamos el uso de la fracción en el lenguaje cotidiano, como descriptor, pues se usa para describir partes de una fruta entera.
Consideramos que debido al nivel escolar, la fracción se presenta a los niños desde un contexto cercano como lo es el mercado, puede ser que ellos se refieran al concepto de fracción con palabras familiares como “rebanadas”, “mitad” o “pedazo”, favoreciendo así la competencia de resolver problemas en situaciones que le son familiares, como lo marca el programa de estudios.</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia.

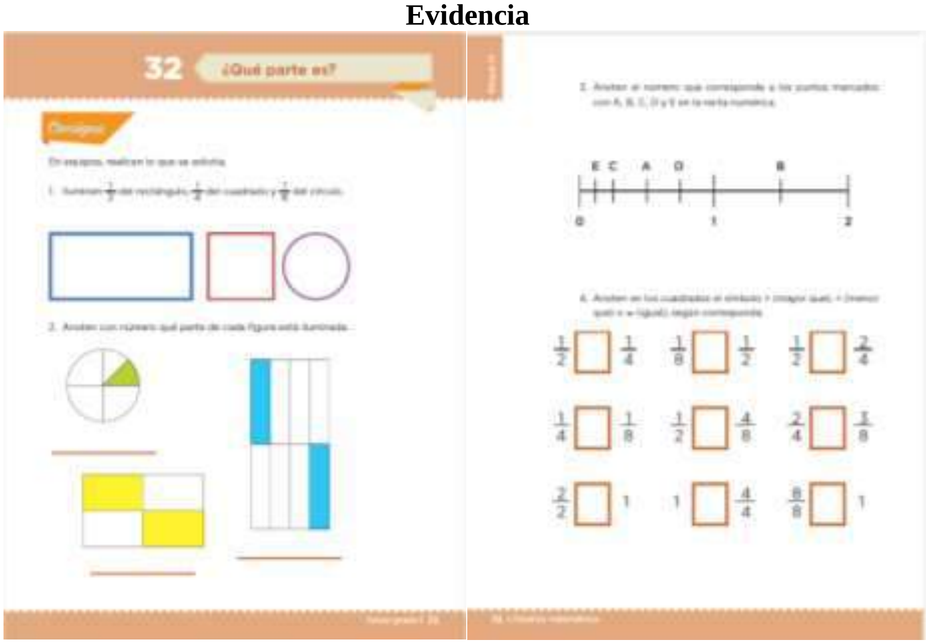
3.2.2 Caracterización en los primeros tres años de primaria

Tabla 3.2. Primer año de primaria.

<table>
<tr><th>Datos de identificación</th><th>Datos de referencia</th></tr>
<tr><td>Nivel escolar: Primaria
Grado: 1
Libro: Desafíos
Bloque: IV
Página: 78
Lección: 42, La tiendita de la escuela</td><td>Intención didáctica: Que los niños identifiquen números con base en las relaciones “el doble de” o “la mitad de”.
Contenido: Resolución de problemas que impliquen la determinación y el uso de relaciones entre los números (estar entre, uno más que, uno menos que, mitad de, doble de, 10 más que, etcétera).
Eje temático: 2. Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Competencias que se favorece: Resolver problemas de manera autónoma.
Aprendizaje esperado: Utiliza unidades arbitrarias de medida para comparar, ordenar, estimar y medir longitudes.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Evidencia

42 La tiendita de la escuela
Consigna
En parejas, resuelvan los siguientes problemas.
1. En la tiendita de la escuela tienen una oferta. Las ensaladas de frutas están a mitad de precio. Si su precio normal es de $14, ¿cuánto pagará Arturo si compra una ensalada?
2. Paco tiene 10 dulces y Luis tiene el doble de dulces que Paco. ¿Cuántos dulces tiene Luis?
3. Entre Mirna y Jorge compraron una malteada de $16. Si cada uno pagó la mitad, ¿cuánto pagó Mirna?
4. Juan quiere comprar un carrito, pero sólo tiene $25 y el carrito cuesta el doble de esa cantidad. ¿Cuánto cuesta el carrito?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Interpretación: Usos y aspectos de la fracción
<u>La fracción como comparador y como operador</u>
En la actividad la tiendita de la escuela, la intención didáctica es que los estudiantes identifiquen números con base en las relaciones “el doble de” o “la mitad de”, en esta última relación se precisa de las fracciones.
Particularmente los problemas 1 y 3 establecen la relación la mitad de, esto es ½ de, por tal razón la fracción aparece en sus usos comparador y operador.
Se usa la fracción para comparar dos cantidades, el precio de la ensalada, 14 pesos, y su mitad, 7 pesos, esta comparación se establece de manera directa, pues para conocer el precio de la oferta, el estudiante tiene que fracturar el entero (14 pesos) en dos partes iguales (7 pesos cada una), en este caso se establece una relación de fractura.
La fracción podría también parecer como operador, pues la fracción ½ se podría emplear para transformar al 14 en 7.</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 3.3. Tercer año de primaria.

<table>
<tr><th>Datos de identificación</th><th>Datos de referencia</th></tr>
<tr><td>Nivel escolar: Primaria
Grado: 3
Libro: Desafíos
Bloque: III
Página: 73-74
Lección: 32, ¿Qué parte es?</td><td>Intención didáctica: Que los alumnos reflexionen acerca del significado de algunas fracciones al tener que representarlas gráficamente, o bien para interpretarlas o compararlas.
Contenido: Uso de fracciones del tipo m/2n (medios, cuartos, octavos, etcétera) para expresar oralmente y por escrito medidas diversas.
Eje temático: 2. Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Competencias que se favorece: Resolver problemas de manera autónoma.
Aprendizaje esperado: Resuelve problemas de reparto cuyo resultado sea una fracción de la forma m/2n.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Evidencia

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Interpretación: Usos y aspectos de la fracción
<u>La fracción como fracturador, medida y número</u>
La fracción en el uso fracturador se presenta en el ejercicio 1 y 2. En el ejercicio 1, el todo es continuo, por tratarse de un solo elemento y se reparte en partes iguales. Los alumnos deben tener claro que ½ es una de dos partes iguales de una unidad, ¼ una de cuatro partes y 1/8 uno de ocho partes. En el ejercicio 2 aumenta un poco el grado de dificultad, en el círculo deben pensar en la parte coloreada que es la mitad de ¼ o sea 1/8.
En el ejercicio 3, aparece el uso medida, el segmento de recta es una unidad, los alumnos representarán fracciones a partir de identificar en cuantas partes será fraccionada la unidad. La medida será 1/8, 2/8 equivalente a 1/4, 3/8, y la siguiente medida corresponderá a 4/8, equivalente a 1/2, y así sucesivamente irán agregando las medidas en la recta numérica.
En el ejercicio 4, aparece la fracción como número, al observar cada par de fracciones los alumnos anotarán los símbolos > (mayor que) < (menor que) o = (igual) según corresponda.</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia.

Como resultado de la caracterización del modelo de enseñanza de fracciones hasta tercer año de primaria, se encontró que el uso que más se prioriza en la educación básica preescolar es el de fracturador, y aparece de manera implícita, como se muestra en el ejemplo expuesto anteriormente, además se encontró que en la educación preescolar es más común que las actividades tengan relación con la vida diaria del alumno, entonces los usos de la fracción aparecen implícitos y como descriptores en un reparto equitativo. En la Tabla 3.4 se puede observar que la fracción como fracturador aparece en segundo y tercer año de educación preescolar.

Tabla 3.4. Usos y aspectos de la fracción en el libro de texto de preescolar.

	PREESCOLAR		
USOS	**1°**	**2°**	**3°**
Fracturador	0	1	1
Comparador	0	0	0
Medida	0	0	0
Operador	0	0	0
Número racional	0	0	0
En el lenguaje cotidiano	Descriptor	Describe el resultado de un reparto equitativo	Describe el resultado de un reparto equitativo

Fuente: Elaboración propia.

En la educación primaria las lecciones expresan relación con la vida diaria del alumno de manera explícita. El uso más priorizado es fracturador y el menos priorizado es el de medida. El uso fracturador aparece con más frecuencia en tercer año de educación primaria como puede verse en la Tabla 3.5, en el primer año de educación primaria la fracción se presenta como comparador y como operador, en el segundo año no aparece la fracción, y en tercer año de educación primaria es cuando aparecen las fracciones en sus diferente usos, pero tiene más frecuencia el de fracturador.

Tabla 3.5. Usos y aspectos de la fracción en el libro de texto de primaria (1-3 grado).

	PRIMARIA		
USOS	**1°**	**2°**	**3°**
Fracturador	0	0	14
Comparador	1	0	1
Medida	0	0	7
Operador	1	0	1
Número racional	0	0	2
En el lenguaje cotidiano	Reparto equitativo		Descriptor

Fuente: elaboración propia.

Con base en esta caracterización nos percatamos que los usos de la fracción: fracturador, comparador, medida, operador y número racional caracterizan el modelo de enseñanza de este concepto en tercer año de primaria.

3.3 DISEÑO DEL INSTRUMENTO PARA CARACTERIZAR LA COMPRENSIÓN DE LOS ALUMNOS SOBRE LA FRACCIÓN

La caracterización del modelo de enseñanza de las fracciones que se elaboró, corroboró que todos los usos de la fracción aparecen a lo largo de la enseñanza en tercer grado, unos con menor frecuencia, comparador, operador y número racional, y otros con mayor frecuencia, fracturador y medida. Este resultado fue positivo para realizar la caracterización de la comprensión de la fracción, ya que garantizó la presencia de los usos y aspectos de las fracciones en tercero de primaria.

Con base en el referente teórico adoptado, en este trabajo se dice que un alumno comprende la fracción, si es capaz de resolver problemas que demanden diferentes usos de la fracción en el sentido de Freudenthal (1983), es decir, cuando se habla de caracterizar la comprensión de los alumnos sobre la fracción, se refiere a describir los procesos y errores de los estudiantes al enfrentar problemas que involucren uno o más usos de las fracciones.

Para caracterizar la comprensión de la fracción se diseñó un instrumento, a manera de cuestionario de actividades, estuvo influenciado por el tipo de problemas sobre fracciones que aparecen en los libros revisados, así como por la definición de cada uno de los usos de las fracciones, de acuerdo al referente teórico adoptado, la metodología de los desafíos matemáticos y la experiencia docente de la autora al tratar con el tema de fracciones. Se esperaba que mediante la resolución de las actividades por parte de los estudiantes, se identificaran sus procesos y errores que dieran cuentan de su comprensión de la fracción.

Una vez diseñadas las actividades, se validaron. La validación consistió en la resolución de las actividades por parte de profesores y estudiantes. Enseguida presentamos las actividades considerando las observaciones de la validación, y posteriormente los resultados de la validación.

3.3.1 Cuestionario para identificar la comprensión de la fracción

El cuestionario se compone de 5 actividades donde se emplean las fracciones, cada una de ellas implica una situación con un contexto cercano al estudiante, como las fiestas de cumpleaños, el recreo, los paseos en bicicleta y las carreras, éstas implican el trabajo con algún uso particular de las fracciones, aunque eventualmente se pueden emplear más de un uso. En cada actividad se plantean preguntas desafiantes que pretenden que los estudiantes razonen y argumenten sus respuestas, de acuerdo con los planteamientos teóricos y metodológicos de los desafíos matemáticos. Las actividades están redactadas en enunciados que los estudiantes tienen que leer y analizar para poder dar respuesta.

Actividad 1

Hoy es el cumpleaños de Raúl y va a repartir su pastel en partes iguales entre él, su mamá, su papá, 3 hermanos y sus 6 amigos.

a) ¿Qué fracción del pastel debe comer cada uno para que no sobre pastel?
b) ¿Qué fracción del pastel le repartió Raúl en total a todos sus amigos?
c) ¿Qué fracción del pastel le repartió Raúl en total a todos sus hermanos?
d) ¿A quién le repartió más pastel Raúl, al grupo de sus amigos o al de sus hermanos?, ¿Por qué?

Figura 3.1. Actividad 1 para el estudio de las fracciones en primaria.

Esta actividad demanda los usos de la fracción como fracturador y comparador para un todo continuo y definido (ver Figura 3.1). En el inciso a, el estudiante debe establecer una relación de fractura a partir de fracturar el pastel (lo puede hacer de manera simbólica, dejando expresada una partición en la imagen que se propone o recurrir a otras representaciones y usar la fracción en su aspecto operador fracturante), esto para identificar la parte que le toca a cada uno de los invitados, o sea, $\frac{1}{12}$.

En las preguntas de los incisos (b) y (c), se requiere que el estudiante establezca una relación de fractura. En (b), es necesario establecer la relación $\frac{6}{12}$, que corresponde a la fracción del pastel que Raúl repartió a sus amigos. En (a), se debe establecer la relación $\frac{3}{12}$, que corresponde a la cantidad de pastel que Raúl le dio a sus hermanos. En ambos casos, la relación que resulta describe la cantidad de pastel que le toca a cada grupo (amigos y hermanos).

Los resultados de los incisos (b) y (c) deben ser comparados, para que se pueda dar respuesta al inciso (d) satisfactoriamente, identificando que el grupo de los amigos de Raúl es quien ha recibido mayor cantidad de pastel. En este último inciso se usa la fracción como comparador, e incluso se pueden comparar esas cantidades y establecer una relación razón, ya que la cantidad de pastel que se les repartió a los hermanos, es la mitad de la que se les repartió a los amigos.

Actividad 2

En la explanada de la escuela se reunieron 12 profesores porque van a formar 3 equipos con la misma cantidad de integrantes, para vigilar a los niños durante el recreo, ¿cuántos profesores estarán en cada equipo?

Escribe tu respuesta:____

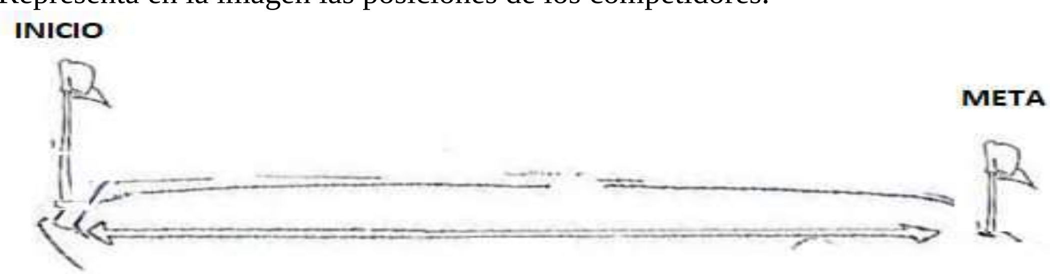
Figura 3.2. Actividad 2 para el estudio de las fracciones en primaria.

Esta actividad (ver Figura 3.2), también demanda el uso de la fracción como fracturador, aquí, la exigencia recae en el aspecto operador fracturante para establecer una relación de fractura como resultado de una distribución del total de profesores (un todo discreto y definido) que estará en cada uno de los tres grupos que se formarán.

En este caso, el resultado de la distribución describe la cantidad de profesores que habrá por cada uno de los grupos para cuidar a los niños durante el recreo.

Actividad 3

En una carrera compiten 3 personas, en el momento que Jaime observa la carrera los competidores se encuentran a diferente distancia de la meta: El competidor uno se encuentra a $\frac{1}{2}$ de la meta, el segundo competidor a $\frac{1}{4}$, y el tercero se encuentra a $\frac{1}{8}$. Representa en la imagen las posiciones de los competidores.



a) ¿Cuál de los competidores ha recorrido más?, ¿por qué?
b) Si en total la carrera es de 6 km, ¿cuántos kilómetros ha recorrido cada competidor?

Figura 3.3. Actividad 3 para el estudio de las fracciones en primaria.

Esta actividad (ver Figura 3.3) exige principalmente el uso de la fracción como medida, para medir segmentos sobre la recta numérica. Para dar respuesta en (a), el estudiante puede fracturar la distancia del inicio a la meta, o bien, solo comparar las partes que cada competidor ha recorrido, por lo que aparece la fracción como fracturador en su aspecto operador fracturante.

Para responder el inciso (b), es necesario que el estudiante opere utilizando la fracción para transformar la cantidad 6 km, según la fracción de la carrera que ha recorrido cada uno de los competidores. Esto es $\frac{1}{2}(6)= 3$, $\frac{1}{4}(6)= 1.5$, $\frac{1}{8}(6)= 0.75$. En este caso la fracción se usa como operador, que transforma una cantidad en otra.

Actividad 4

Ana y Paty hacen diariamente un recorrido de 1 km en bicicleta por varias calles como

entrenamiento para un maratón. Un día que estaban cansadas, Ana solo recorrió $\frac{5}{8}$ de la ruta habitual, mientras que Paty recorrió $\frac{3}{4}$ de la ruta.

a) ¿Quién de las dos recorrió más?

b) ¿Cuánto más recorrió una que la otra?

Figura 3.4. Actividad 4 para el estudio de las fracciones en primaria.

Esta actividad (ver Figura 3.4), al igual que en la actividad 3, pone énfasis en el uso de la fracción como medida, pero a diferencia de la anterior, no se presenta un gráfico que ayude al estudiante a modelar el planteamiento del problema. Para dar respuesta en el inciso (a), el estudiante puede elegir entre dos estrategias, la comparación de los recorridos de Ana y Paty, y la fractura del kilómetro recorrido.

Para dar respuesta al inciso (b), el estudiante puede hacer una comparación entre las fracciones que Ana y Paty recorrieron y establecer un orden, esto es $\frac{3}{4} > \frac{5}{8}$ en este caso se usa la fracción como número, pero también puede recurrir al aspecto fracturador en el caso que dejen expresadas las particiones e indicadas las fracciones del camino que recorrieron Ana y Paty. El uso de la fracción como operador también se usa para calcular la distancia que cada niña ha recorrido. En este caso, Paty recorrió $\frac{3}{4}$ de un kilómetro, o sea, 0.75 km, mientras que Ana recorrió $\frac{5}{8}$ de un kilómetro, o sea, 0.625 km. Es verdad que las operaciones que aquí se sugieren no son habituales para los alumnos, pero esto puede ser una oportunidad para introducir los números decimales a partir de algo tan familiar para ellos, como es el kilómetro.

Actividad 5

Esta actividad (ver Figura 3.5), se centra en el uso medida, pero a diferencia de las anteriores, la intención es completar el entero, con el conocimiento de la parte; así, se sabe que 2 km representan $\frac{1}{4}$ del recorrido de Pedro, lo que lleva a identificar que las $\frac{3}{4}$ partes que faltan corresponden a 6 km, por lo que el recorrido total es de 8 km.

Pedro ha recorrido en bici 2 km, que representan $\frac{1}{4}$ del total que debe recorrer. ¿Cuántos kilómetros debe recorrer Pedro en total?

R:_______________________________

Figura 3.5. Actividad 5 para el estudio de las fracciones en primaria.

En el anexo 2, se exhiben las actividades a manera de cuestionario, tal como se presentó a los participantes.

3.4 VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO

El cuestionario para identificar la comprensión de la fracción fue validado con 5 profesores de diferentes niveles educativos, primaria, secundaria y bachillerato, una estudiante de segundo de secundaria y un estudiante de cuarto año de primaria. En el caso de los profesores se les pidió además de resolverlo que hicieran observaciones respecto de la dificultad de las actividades, su redacción, la terminología empleada en ellos, el tiempo que estimaban para resolverlo y alguna recomendación u observación de las actividades. La finalidad de la validación fue garantizar que las actividades fueran consistentes, coherentes y capaces de ser resueltas por estudiantes de tercer año de primaria. Al hacer el análisis de las respuestas de los profesores obtuvimos lo siguiente:

Profesor 1.- Da clases en una escuela preparatoria con 9 años de experiencia docente. Él argumentó que en el cuestionario no se específica a que grado es dirigido pero que hace reflexionar al alumno, que la redacción de los problemas era buena y la terminología adecuada, respecto al tiempo sugirió 40 minutos para contestarlo y recomendó que se utilicen más recursos visuales por tratarse de estudiantes de primaria.

Profesor 2.- Da clases en una escuela telesecundaria con 8 años de experiencia docente. Él argumentó que la dificultad de las actividades depende de la interpretación subjetiva de cada estudiante, señaló que se les debe dar entre 10 a 15 minutos para contestarlo. Comentó que en el último problema no se presenta cuánto es el total que debe recorrer Pedro, lo que nos indica que no comprendió el enunciado del problema.

Profesor 3.- Da clases en una escuela primaria con 11 años de experiencia docente. Él argumentó que las actividades 1 y 3 tienen una dificultad alta y las actividades 2, 4 y 5 tienen una dificultad moderada. Sugirió ampliar un poco más la información de los enunciados de cada problema situándolos en un contexto cercano a los estudiantes. Particularmente en la actividad 1 él no tomó en cuenta a Raúl como una de las personas que están consideradas para hacer el reparto del pastel, solo consideró a 11 personas, respecto al tiempo señaló que se necesitan 2 horas por lo menos para contestarlo.

Profesor 4.- Da clases en un internado en el nivel primaria, tiene 6 años de experiencia docente. Él Argumentó que la actividad 1 es confusa porque no se sabe si considerar o no a Raúl en el reparto del pastel y sugirió que se especifique entre quienes se hará el reparto en el problema 1. La actividad 2 la consideró fácil, la actividad 3 difícil, la 4 con dificultad media y la 5 de fácil resolución. En cuanto al tiempo propuso que se les diera una hora para contestarlo.

Profesor 5.- Da clases en una secundaria y tiene 3 años de experiencia docente. Él argumentó que las últimas actividades son difíciles para un alumno de 8 años de edad y sugirió que se les pidiera a los alumnos apoyarse de un método gráfico en las actividades 4 y 5. En cuanto al tiempo opinó que se les dieran 40 minutos.

Con respecto a la dificultad de las actividades encontramos que los profesores señalan que la actividad 1 es confusa debido a que el enunciado no es claro porque no se especifica si Raúl entra o no en el reparto. Por esta razón se hizo la modificación del enunciado de la actividad 1. Las actividades 2 y 5 fueron valoradas como fáciles de resolver a excepción del profesor 3 que no comprendió y por tal motivo no resolvió la actividad 5. Las actividades 3 y 4 fueron consideradas difíciles pues sugieren que tienen que apoyarse de un recurso gráfico para poder contestarlo.

Con respecto a las respuestas de los estudiantes obtuvimos lo siguiente.

Estudiante de 2° de secundaria: Contestó el cuestionario sin dificultad a excepción de la actividad 3 en donde ubicó a los competidores respecto del inicio y no de la meta y señaló que el competidor 1 había recorrido más distancia. En la actividad 1 la estudiante realizó el reparto entre 12 personas y en el problema 4 hizo uso de una representación gráfica de las fracciones para dar respuesta. Esta estudiante resolvió el cuestionario en casa en un promedio de 15 minutos.

Estudiante de 4° de primaria: En la actividad 1 si incluye a Raúl en el reparto sin dificultad, entendió que implícitamente Raúl también se incluye en el reparto. En la actividad 3, inciso a) no identificó la recta del dibujo como un todo por ello no logró contestar y en el inciso b) no estableció la relación entre la cantidad de kilómetros y la distancia recorrida en fracciones. En la actividad 4 hizo uso de la recta numérica para responder, eso concuerda con la sugerencia del profesor número 5 de apoyarse en un recurso gráfico. Las actividades 2 y 5 las resolvió sin dificultad alguna. Este alumno resolvió el cuestionario en su casa bajo la vigilancia de su padre en media hora.

Los resultados de la validación influyeron para modificar solamente el enunciado de la actividad 1, para incluir a Raúl explícitamente en el reparto, el resto de las actividades se quedó igual, el tiempo que se les dio para contestarlo fue de una hora.

3.5 APLICACIÓN DEL INSTRUMENTO

Respondieron el cuestionario un grupo de tercer año de primaria de la Escuela Primaria Urbana Federal Pedro Ascencio Alquisiras, ubicada en la ciudad de Chilpancingo, Guerrero, México. La autora de esta tesis era la profesora a cargo de este grupo. En este grupo ya se había introducido el tema de fracciones semanas antes del diagnóstico, la profesora comentó que estaban más familiarizados con el uso fracturador, y que a muchos les costaba aun entender la definición de la fracción.

El cuestionario lo aplicó la profesora frente a grupo, en horario normal de la clase de matemáticas, indicando a sus estudiantes que quería conocer la forma en que resuelven el tipo de problemas propuestos. Los resultados de esta aplicación señalaron un bajo éxito en la resolución de las actividades por los alumnos. Las 5 actividades demandaban en su conjunto 11 preguntas, en promedio cada estudiante obtuvo 2 respuestas correctas. Solo una alumna logró responder correctamente a 6 de los 11 incisos del cuestionario, y un alumno no logró resolver correctamente ninguno de los incisos. El análisis detallado del cuestionario, esto es, la caracterización de la comprensión de los alumnos sobre la fracción, se muestra en el Capítulo 4.

Capítulo 4

ANÁLISIS DE DATOS

En este capítulo se describen las respuestas de los alumnos durante la prueba que sirvió como instrumento para caracterizar su comprensión sobre la fracción.

Tres apartados organizan este capítulo. Los resultados generales de las actuaciones de los alumnos se muestran en el primero. El segundo contiene el análisis de las actuaciones de la alumna A31, quien respondió correctamente a más reactivos, así como de los alumnos A4 y A17, quienes respondieron a menos reactivos. Lo anterior se hace para identificar: 1) los procesos que siguen los alumnos para responder y 2) los errores que cometen, de esta manera, y teniendo en cuenta los usos y aspectos de las fracciones, se hace la caracterización de la comprensión que tienen los alumnos sobre la fracción, lo que constituye el tercer apartado.

4.1 RESULTADOS GENERALES DE LAS RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS

En este apartado se da cuenta de los resultados generales de las respuestas dadas por los alumnos durante la aplicación del instrumento para caracterizar la comprensión de los alumnos sobre la fracción. El análisis se hizo a través de la construcción de una matriz cuyas entradas son el código asignado al tipo de respuesta dadas por los alumnos. Se codificó con 0 a las respuestas incorrectas y a la ausencia de respuesta, mientras que el 1 se utilizó para aquellas respuestas correctas. Teniendo en cuenta el diseño de las actividades que forman el instrumento se procede a la descripción sobre el porcentaje de éxito obtenido por los alumnos para cada actividad e inciso.

Como puede verse en la Figura 4.1, las columnas representan cada actividad, en ellas se especifican los usos y aspectos de las fracciones que se tomaron en cuenta para su diseño. Las filas corresponden a las respuestas dadas por los alumnos, a cada alumno se le codificó con la letra A seguido del número de lista.

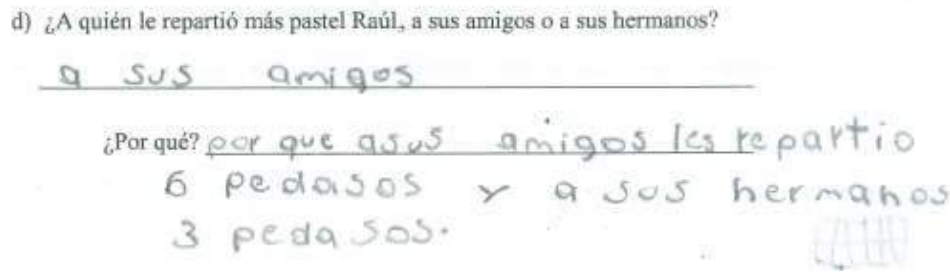
De manera visual, se puede observar que la mayoría de las entradas de la matriz son 0, lo que permite afirmar en un primer momento que el éxito obtenido por los alumnos es bajo. Particularmente, en la Figura 4.1 se puede observar que un alumno, A4 no logró responder correctamente a ninguno de los incisos, mientras que la alumna A31 es quien respondió correctamente a más de los incisos del cuestionario, respondiendo de esa manera a 6 de los cuestionamientos.

Para la actividad 1 se propusieron en total cuatro incisos, como se mencionó antes, los tres primeros tienen relación explicita con el uso de la fracción como fracturador, ya sea en su aspecto relación u operador, mientras que en el inciso d se tiene que hacer una comparación parte-parte. En la Figura 4.1 se puede ver que en el inciso d es en el que los alumnos tuvieron mayor éxito, de 31 posibles respuestas, 13 alumnos respondieron correctamente. Las respuestas están basadas principalmente en la comparación entre el número de partes que le dio Raúl a los amigos en comparación con las partes que repartió a sus hermanos, centrándose en la cantidad de partes, y no necesariamente en la comparación entre fracciones.

	Actividad 1				Actividad 2	Actividad 3			Actividad 4		Actividad 5	Total
	Fracción como fracturador (modelo continuo)				Fracturador (modelo discreto)	Medida/Número			Medida/Número		Medida	
	Operador fracturante	Relación Fractura	Relación Fractura	Comparador	Rel. Fract y Descriptor	R.Fractura (modelo continuo)	Comparador	Operador	Comparador	Operador/ Número	Completar el todo	
	inciso a	inciso b	inciso c	inciso d		gráfica	inciso a	inciso b	inciso a	inciso b		
A1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	2
A2	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	3
A3	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	3
A4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A5	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2
A6	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
A7	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
A8	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	3
A9	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	3
A10	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
A11	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
A12	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
A13	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	2
A14	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
A15	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	3
A16	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	4
A17	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	3
A18	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
A19	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	5
A20	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	3
A21	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	3
A22	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	2
A23	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	3
A24	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	2
A25	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	2
A26	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
A27	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
A28	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2
A29	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
A30	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	3
A31	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	6
Total	6	3	4	13	20	6	9	0	5	1	2	

Figura 4.1. Matriz del tipo de respuestas dadas por los alumnos.

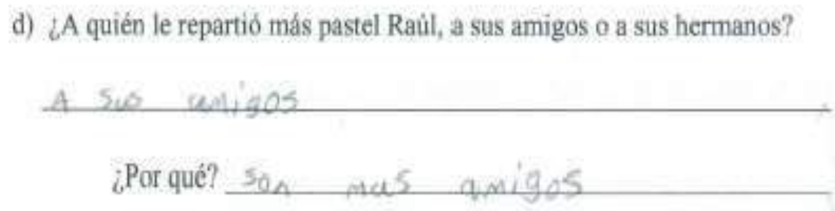
Enseguida las Figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5 son ejemplos del tipo de respuestas que los alumnos A14, A16, A3, A5 y A6 dieron al inciso d de la actividad 1, las cuales muestran evidencia de lo descrito en el párrafo anterior.


d) ¿A quién le repartió más pastel Raúl, a sus amigos o a sus hermanos?

a sus amigos

¿Por qué? por que a sus amigos les repartio 6 pedasos y a sus hermanos 3 pedasos.

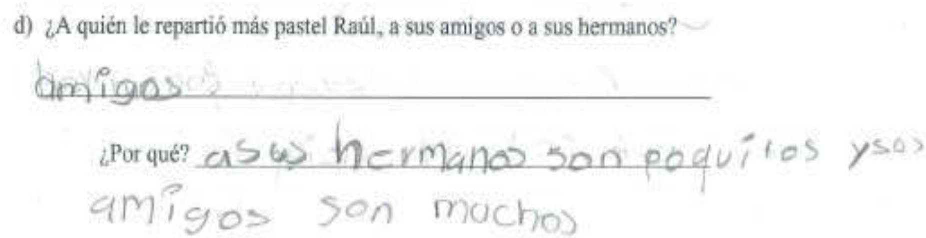
Figura 4.1. A14: Respuesta d), actividad 1.


d) ¿A quién le repartió más pastel Raúl, a sus amigos o a sus hermanos?

A sus amigos

¿Por qué? son mas amigos

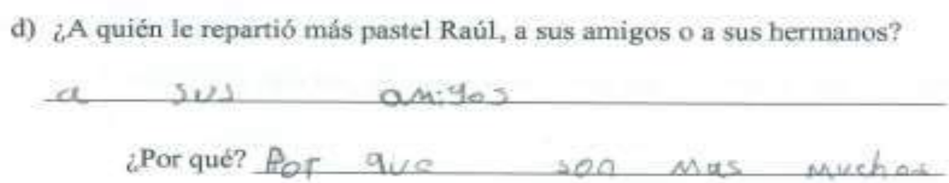
Figura 4.2. A16: Respuesta d), actividad 1.


d) ¿A quién le repartió más pastel Raúl, a sus amigos o a sus hermanos?

amigos

¿Por qué? a sus hermanos son poquitos y sus amigos son muchos

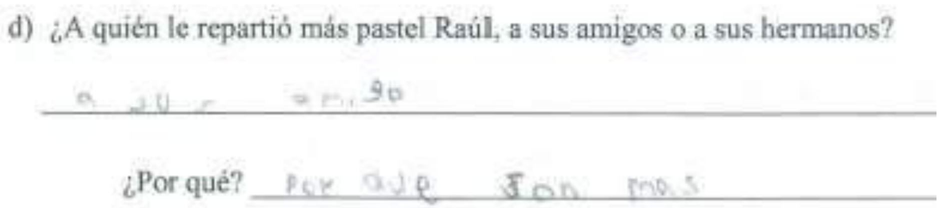
Figura 4.3. A3: Respuesta d), actividad 1.


d) ¿A quién le repartió más pastel Raúl, a sus amigos o a sus hermanos?

a sus amigos

¿Por qué? Por que son mas muchos

Figura 4.4. A5: Respuesta d), actividad 1.

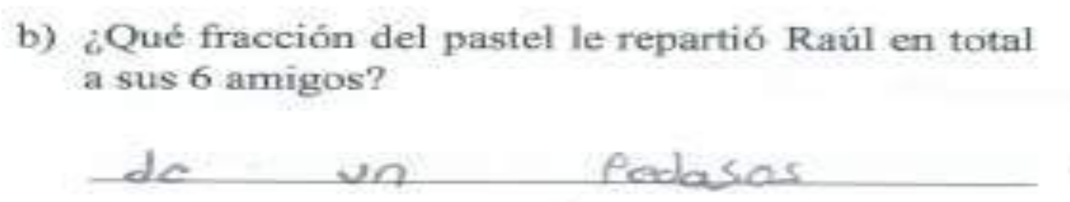

d) ¿A quién le repartió más pastel Raúl, a sus amigos o a sus hermanos?

a su amigo

¿Por qué? por que son mas

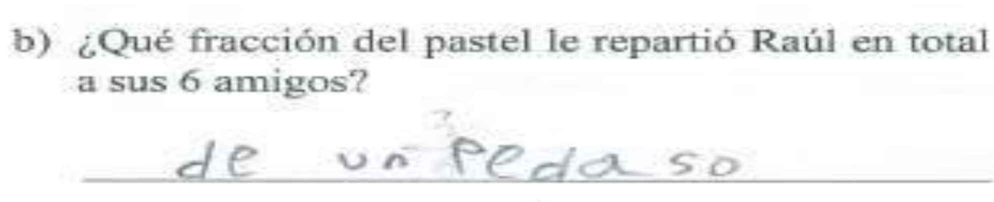
Figura 4.5. A6: Respuesta d), actividad 1.

Por otro lado, en la actividad 1 los alumnos tuvieron menor éxito para responder el inciso b, en el cual se tenía que establecer una relación de fractura entre la parte del pastel que repartió Raúl a todos sus amigos y el todo (pastel). Uno de los errores más comunes al responder este inciso fue que los estudiantes no reconocieron el total de las partes en las que se dividió el pastel como el denominador de la fracción, tampoco reconocieron el número de esas partes que se les dieron a los amigos como el numerador de la fracción, es decir, no establecieron la relación parte-todo. En cambio, los alumnos escribieron que los amigos de Raúl recibieron un pedazo de pastel, otros sí respondieron que recibieron 6 pedazos, pero no lo expresan en forma de fracción. Ejemplos de este resultado se pueden consultar en las Figura 4.6, 4.7, 4.8 y 4.9.


b) ¿Qué fracción del pastel le repartió Raúl en total a sus 6 amigos?

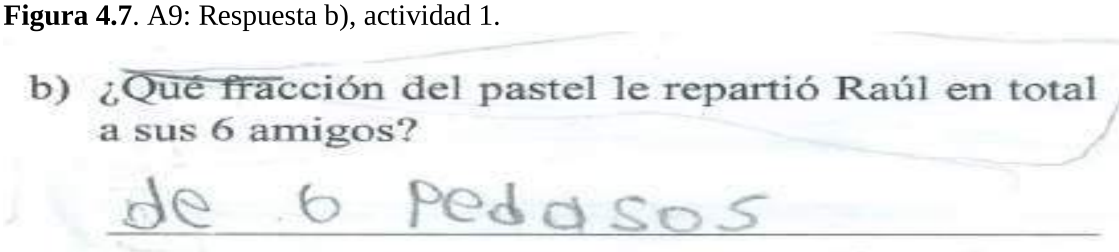
de un pedasos

Figura 4.6. A5: Respuesta b), actividad 1.


b) ¿Qué fracción del pastel le repartió Raúl en total a sus 6 amigos?

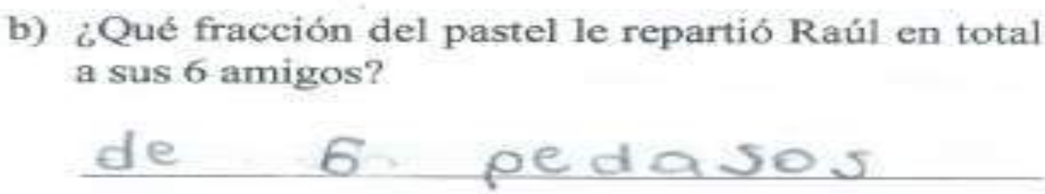
de un pedaso

Figura 4.7. A9: Respuesta b), actividad 1.


b) ¿Qué fracción del pastel le repartió Raúl en total a sus 6 amigos?

de 6 pedasos

Figura 4.8. A7: Respuesta b), actividad 1.


b) ¿Qué fracción del pastel le repartió Raúl en total a sus 6 amigos?

de 6 pedasos

Figura 4.9. A14: Respuesta b), actividad 1.

Con relación a los resultados de la actividad 2, la cual se centra en los usos de la fracción como fracturador, en un todo discreto, y descriptor, que describe el resultado de un reparto equitativo, se puede ver en la Figura 4.1 que fueron 20 de 31 alumnos los que respondieron correctamente. Esta actividad se considera la de menor dificultad y aparte sirve para confirmar la idea de que los alumnos tienen menos dificultades en estos procesos de reparto cuando el todo es un modelo discreto y la atención está puesta en el número de elementos que componen la parte. Este resultado se asocia al hecho de que los alumnos centran su atención en la cantidad de elementos que resultan del reparto, y que además son cantidades enteras.

En las Figura 410 y 4.11 se puede ver que el error más común en las respuesta de la actividad 2 es que los alumnos no hicieron la distribución de los profesores en los tres equipos como se plantea en el enunciado, ellos consideran nuevamente el 12 (el todo) como el resultado del reparto.

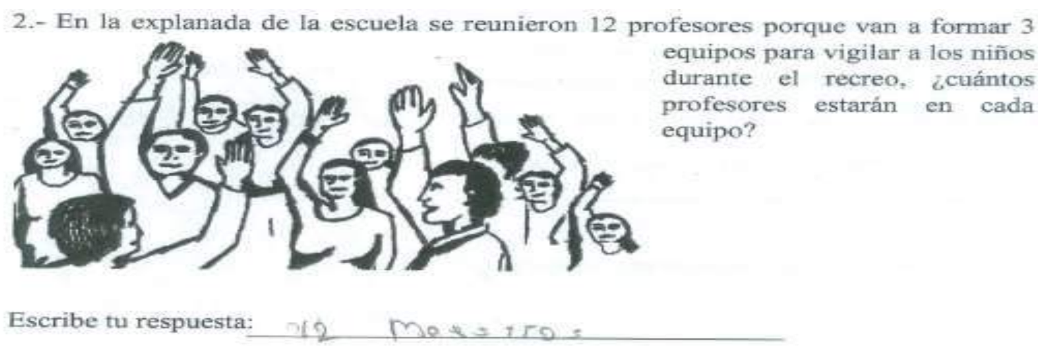


Figura 4.10. A6: Respuesta actividad 2.

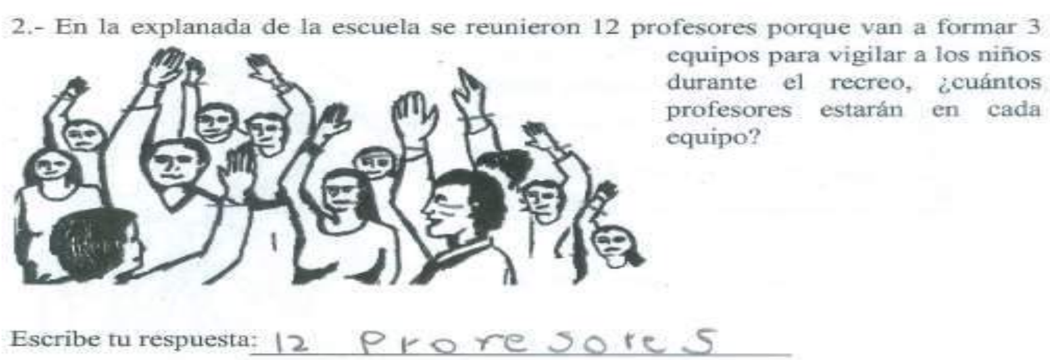
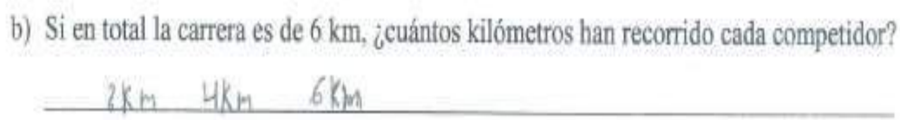


Figura 4.11. A14: Respuesta actividad 2.

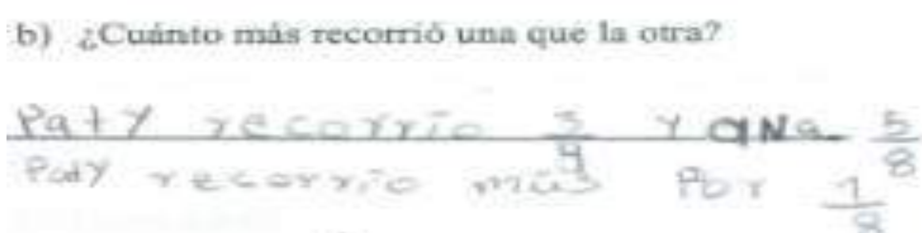
En la actividad 3 se consideran 2 incisos y la representación gráfica de fracciones en la recta numérica. La fracción como medida y número son los usos que se priorizan en esta actividad, aunque también aparece la fracción como operador (en el inciso b, ver Figura 4.1). En este último inciso es en el que los alumnos tuvieron menor éxito, solo un alumno respondió correctamente, el resto dieron respuestas ambiguas, otros intentaron dar los kilómetros correspondientes al $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$, pero no lo hacen correctamente, por ejemplo, el alumno A2 fracciona de dos en dos kilómetros (ver Figura 4.12).


b) Si en total la carrera es de 6 km, ¿cuántos kilómetros han recorrido cada competidor?

2Km 4Km 6Km

Figura 4.12. A2: Respuesta b), actividad 3.

Las fracciones como medida y como número también son usadas en el diseño de la actividad 4, en este caso se propusieron dos incisos, en el inciso a se debe hacer una comparación numérica para establecer un orden, y en el inciso b también se hace una comparación para ver qué tanto una fracción es mayor que otra. En este último inciso los alumnos tuvieron poco éxito, solo la alumna A31 respondió correctamente tal como se muestra en la Figura 4.13.


b) ¿Cuánto más recorrió una que la otra?

Paty recorrío $\frac{3}{8}$ y Ana $\frac{5}{8}$

Paty recorrío más por $\frac{1}{8}$

Figura 4.13. A31: Respuesta b), actividad 4.

En la actividad 5 también aparece la fracción como medida, en este caso se propone una unidad fraccionaria que sirve como medida para después completar un todo. Es una actividad que se considera de alta complejidad, solo dos alumnos respondieron correctamente (A15 y A31), el resto de los alumnos que respondieron a esta pregunta lo hicieron apoyándose de la información que aparece en el enunciado del problema, es decir, sus respuestas eran 2 kilómetros o $\frac{1}{4}$, tal como se muestra en las Figuras 4. 14, 4.15, 4.16 y 4.17.

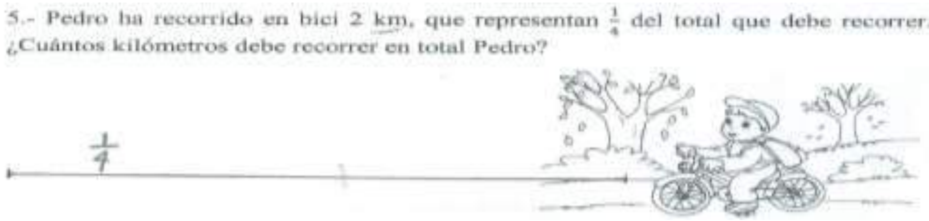


Figura 4.14. A1: Respuesta actividad 5.

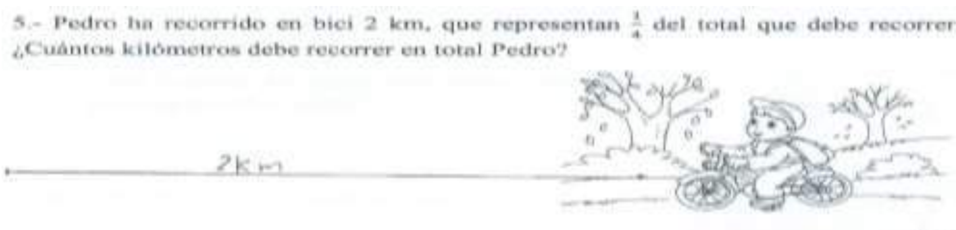


Figura 4.15. A2: Respuesta actividad 5.

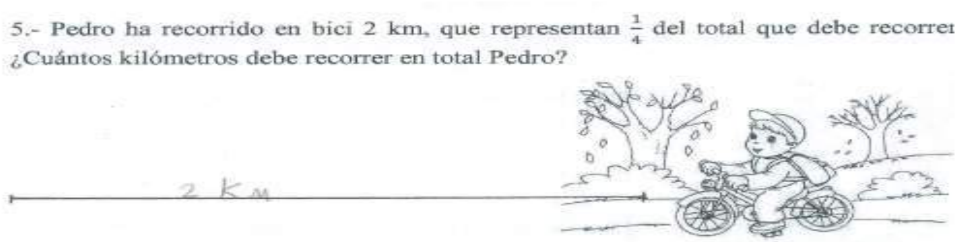


Figura 4.16. A3: Respuesta actividad 5.

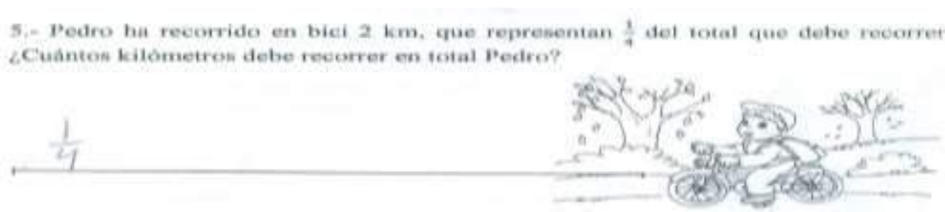


Figura 4.17. A16: Respuesta actividad 5.

Tomando en cuenta los usos y aspectos de las fracciones, se puede concluir de manera general, que los alumnos de tercer año que participaron en este estudio tuvieron más éxito para responder preguntas relacionadas con el uso de la fracción como fracturador, en cambio, como se muestra en la gráfica de la Figura 4.18, cuando tuvieron que responder cuestiones que se relacionan con el uso de la fracción como medida o número, ellos tuvieron poco éxito, menos del 20%.

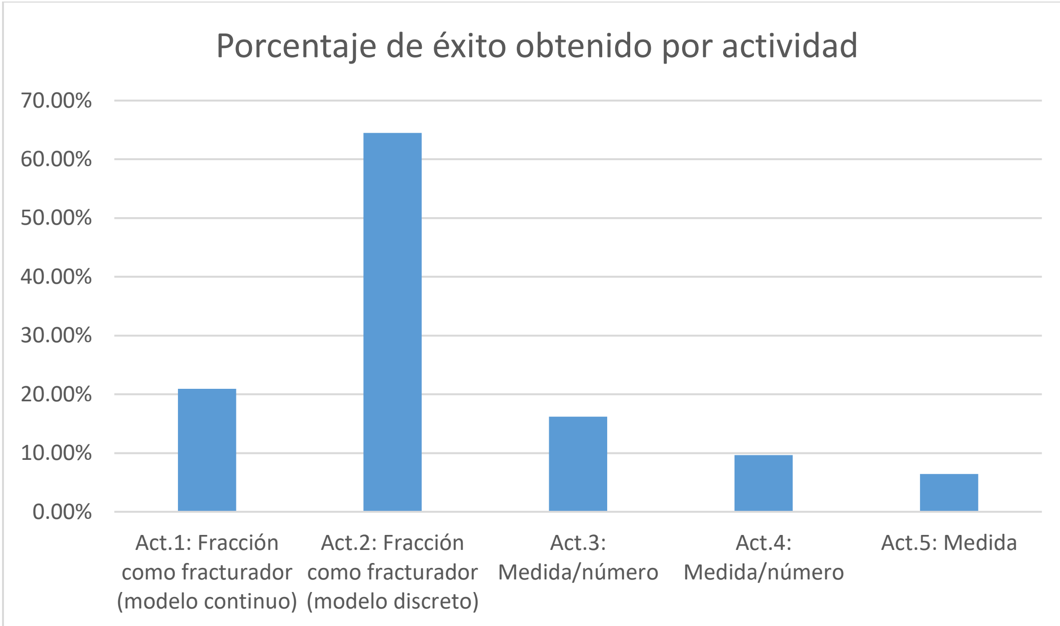


Figura 4.18. Porcentaje de éxito obtenido por actividad (usos y aspectos de las fracciones)

Como se mencionó antes, el éxito obtenido en la actividad 2 se relaciona con el hecho de que los alumnos se centran en el número de elementos que contiene una parte de un todo discreto, el cual es un número entero.

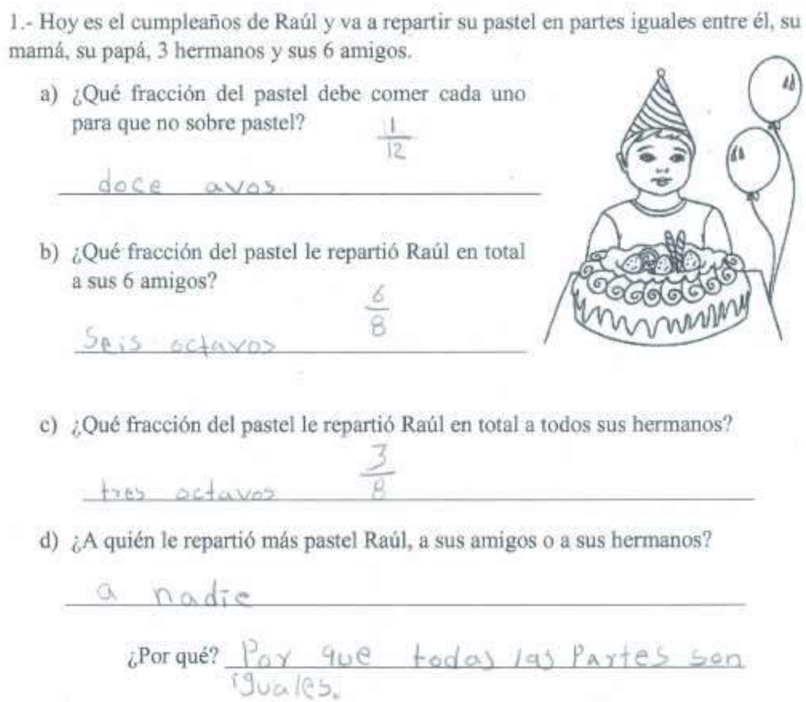
Para ejemplificar como se identificaron los procesos que siguen los alumnos y errores que cometieron, se muestran a continuación como ejemplo las actuaciones de los alumnos A39 por ser quien tuvo mayor éxito, y de A17 y A4 por ser parte de los de menor éxito. El resto del análisis se expone como una tabla en el Anexo 6.

4.2 ANÁLISIS DE LAS ACTUACIONES DE LOS ESTUDIANTES

De un total de 11 respuestas esperadas, los alumnos A31 y A19 obtuvieron un número mayor de respuestas correctas, 6 y 5 respectivamente. A31 pudo responder como se esperaba en las actividades 2, 4 y 5. La primera está relacionada con la fracción como fracturador empleando un modelo discreto, y las otras dos con los usos de la fracción como medida y número. A17 y A4 son alumnos que tuvieron más errores al responder las actividades. Las actuaciones de A31, A17 y A4 se describen a continuación.

4.2.1 Análisis de las respuestas dadas por la alumna A31

La alumna A31 tiene 9 años de edad y es descrita por su profesora como una niña con buen desempeño académico, muy responsable, atenta al realizar sus actividades en clase, y muestra interés por aprender. Las respuestas que dio A31 a la actividad 1 se pueden ver en la Figura 4.19.


1.- Hoy es el cumpleaños de Raúl y va a repartir su pastel en partes iguales entre él, su mamá, su papá, 3 hermanos y sus 6 amigos.

a) ¿Qué fracción del pastel debe comer cada uno para que no sobre pastel? $\frac{1}{12}$

doce avos

b) ¿Qué fracción del pastel le repartió Raúl en total a sus 6 amigos? $\frac{6}{8}$

Seis octavos

c) ¿Qué fracción del pastel le repartió Raúl en total a todos sus hermanos? $\frac{3}{8}$

tres octavos

d) ¿A quién le repartió más pastel Raúl, a sus amigos o a sus hermanos?

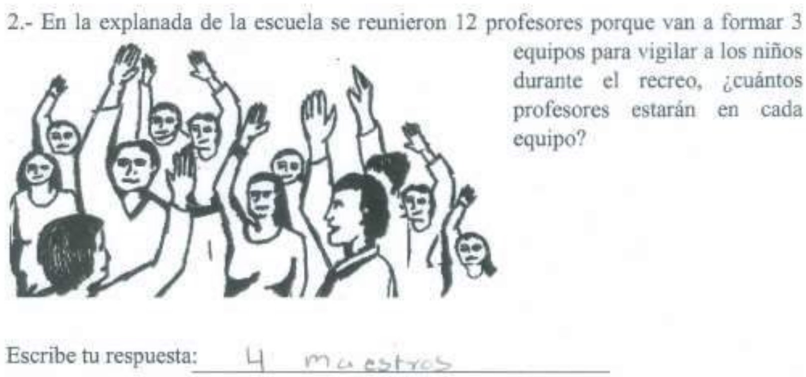
a nadie

¿Por qué? Por que todas las Partes son iguales.

Figura 4.19. A31: Respuestas actividad 1.

A31 pudo correctamente establecer una relación de fractura en un modelo continuo en una situación de reparto equitativo, identificando adecuadamente el numerador y denominador de la fracción (inciso a). Sin embargo, para responder a los incisos b y c no tomó en cuenta que el denominador era 12, al parecer tuvo un error de cambio, es decir, cambió un valor numérico por otro; este tipo de errores no se consideran conceptuales. Para responder el inciso d la alumna se centró en la unidad fraccionaria ($\frac{1}{12}$ y no en las fracciones $\frac{3}{12}$ y $\frac{6}{12}$, este hecho se sustenta en la respuesta que dio "a nadie le tocará más pastel porque todas las partes son iguales".

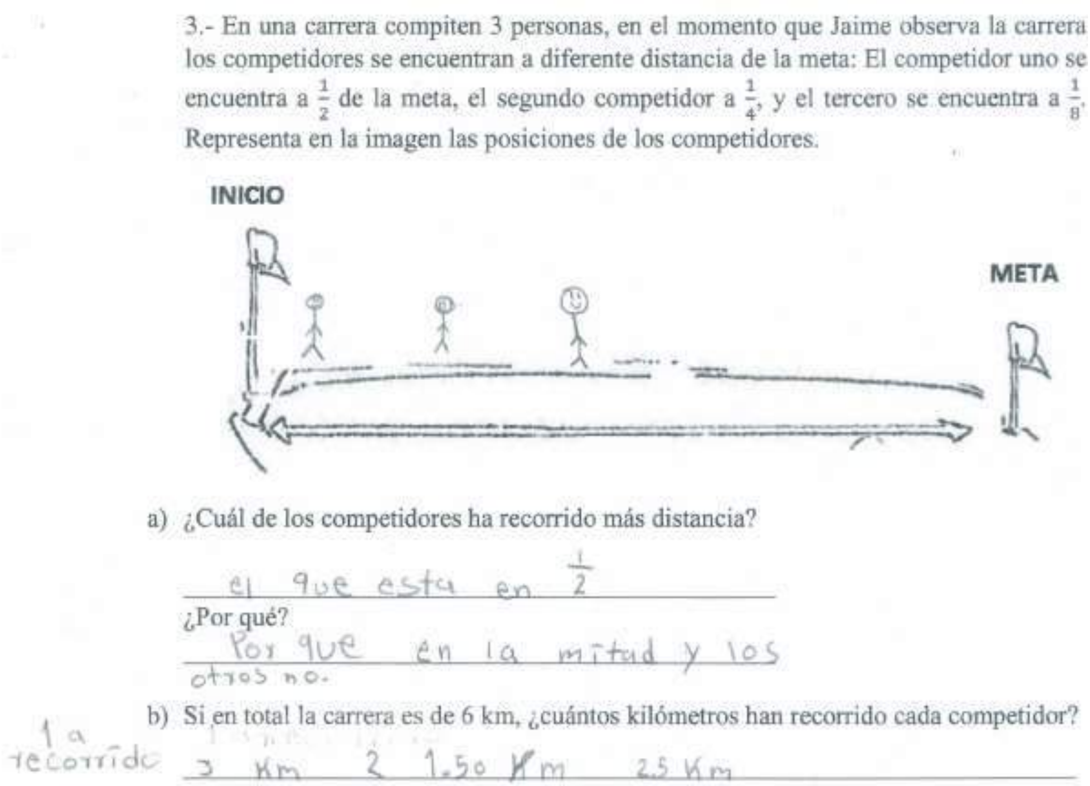
La actividad 2 la respondió correctamente (ver Figura 4.20), dejando indicada solamente la respuesta y no hay rastro de que haya hecho una división o requerido de una representación gráfica para hacer el reparto equitativo.


2.- En la explanada de la escuela se reunieron 12 profesores porque van a formar 3 equipos para vigilar a los niños durante el recreo, ¿cuántos profesores estarán en cada equipo?

Escribe tu respuesta: 4 maestros

Figura 4.20. A31: Respuesta actividad 2.

El proceso que siguió la Alumna A31 para responder la actividad 3 es adecuado, sin embargo, no tomó en cuenta correctamente el sistema de referencias, para ubicar las fracciones no se centró en el valor faltante para llegar a la meta, sino que consideró las fracciones como si representaran el valor recorrido (ver Figura 4.21).


3.- En una carrera compiten 3 personas, en el momento que Jaime observa la carrera los competidores se encuentran a diferente distancia de la meta: El competidor uno se encuentra a $\frac{1}{2}$ de la meta, el segundo competidor a $\frac{1}{4}$, y el tercero se encuentra a $\frac{1}{8}$. Representa en la imagen las posiciones de los competidores.

a) ¿Cuál de los competidores ha recorrido más distancia?

el que esta en $\frac{1}{2}$

¿Por qué?

Por que en la mitad y los otros no.

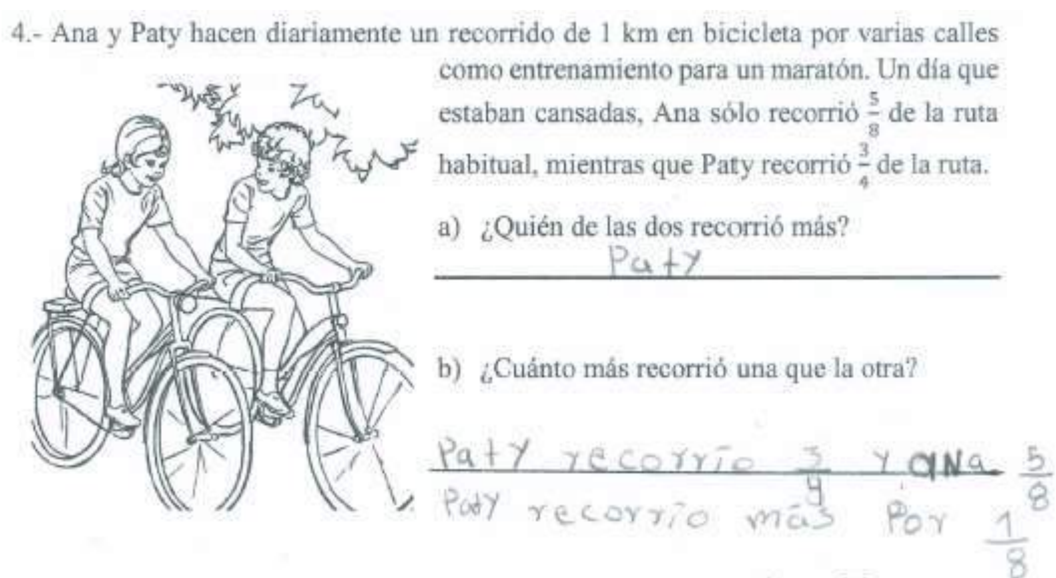
b) Si en total la carrera es de 6 km, ¿cuántos kilómetros han recorrido cada competidor?

1 a recorrido 3 Km 2 1.50 Km 2.5 Km

Figura 4.21. A31: Respuesta actividad 3.

La interpretación hecha sobre la ubicación de los competidores tuvo como consecuencia que A31 respondiera incorrectamente el inciso a, aunque cabe destacar, que aparentemente reconoce que la fracción $\frac{1}{2}$ es mayor que $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$. Para responder el inciso b también hay evidencia de que A31 reconocer que la mitad de 6 km son 3 km (recorrido del primer competidor); es probable que para calcular el recorrido del segundo competidor la alumna haya realizado el cociente $\frac{1}{4} = 0.5$ y después ese resultado multiplicarlo por 6, de manera que obtiene 1.50 km; no es claro como obtiene el tercer cálculo (2.5 km que representan el recorrido del tercer competidor).

La actividad 4 fue respondida correctamente por A31. Aparentemente la alumna comparó las fracciones $\frac{6}{8}$ y $\frac{5}{8}$, ya que como puede verse en la Figura 4.22, en un principio, para representar el recorrido que hizo Paty la alumna escribió $\frac{6}{8}$, después lo borró y dejó la fracción $\frac{3}{4}$, dejando indicado correctamente la diferencia de $\frac{1}{8}$ entre ambos recorridos.


4.- Ana y Paty hacen diariamente un recorrido de 1 km en bicicleta por varias calles como entrenamiento para un maratón. Un día que estaban cansadas, Ana sólo recorrió $\frac{5}{8}$ de la ruta habitual, mientras que Paty recorrió $\frac{3}{4}$ de la ruta.

a) ¿Quién de las dos recorrió más?

Paty

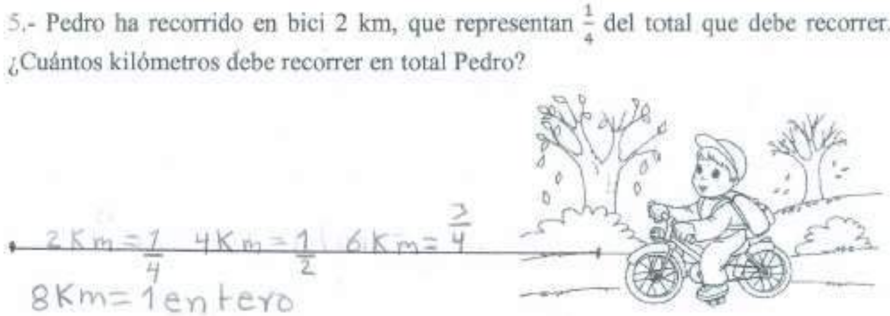
b) ¿Cuánto más recorrió una que la otra?

Paty recorrio $\frac{3}{4}$ y ana $\frac{5}{8}$

Paty recorrio más por $\frac{1}{8}$

Figura 4.22. A31: Respuesta actividad 4.

La actividad 5 también fue respondida correctamente, como puede verse en la Figura 4.23, ella deja expresada la igualdad entre la fracción que recorrió Pedro y la cantidad de kilómetros recorridos, ese proceso le ayudó para identificar que en total recorrió 8 kilómetros.


5.- Pedro ha recorrido en bici 2 km, que representan $\frac{1}{4}$ del total que debe recorrer. ¿Cuántos kilómetros debe recorrer en total Pedro?

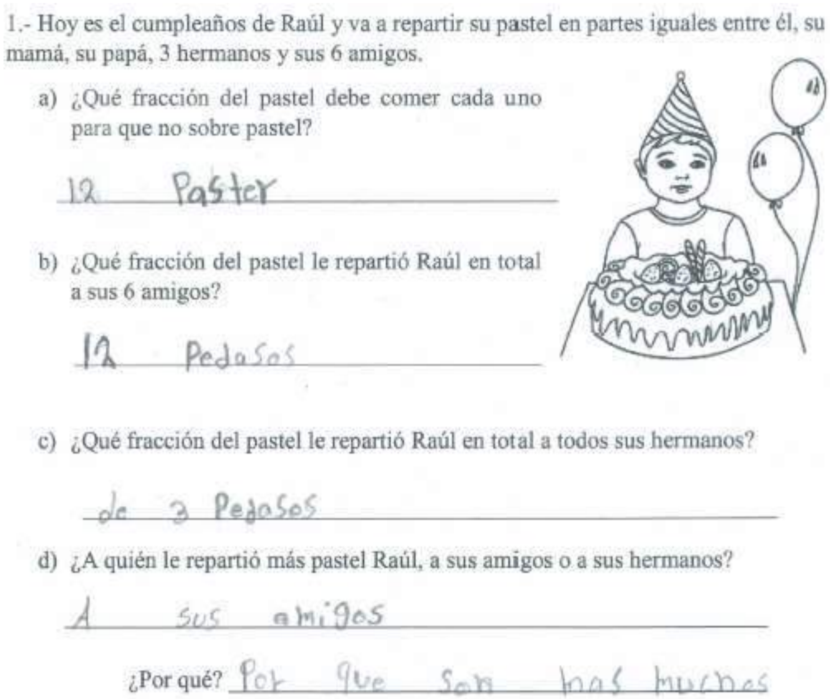
2Km = $\frac{1}{4}$ 4Km = $\frac{1}{2}$ 6Km = $\frac{3}{4}$

8Km = 1 entero

Figura 4.23. A31: Respuesta actividad 5.

4.2.2 Análisis de las respuestas dadas por el alumno A17

El alumno A17 tiene 8 años de edad y es descrito como un niño que muestra poco interés en la clase, además tiene problemas de ausentismo escolar. Las respuestas que dio en la actividad 1 se pueden ver en la Figura 4.24.


1.- Hoy es el cumpleaños de Raúl y va a repartir su pastel en partes iguales entre él, su mamá, su papá, 3 hermanos y sus 6 amigos.

a) ¿Qué fracción del pastel debe comer cada uno para que no sobre pastel?

12 Paster

b) ¿Qué fracción del pastel le repartió Raúl en total a sus 6 amigos?

12 Pedasos

c) ¿Qué fracción del pastel le repartió Raúl en total a todos sus hermanos?

de 3 Pedasos

d) ¿A quién le repartió más pastel Raúl, a sus amigos o a sus hermanos?

A sus amigos

¿Por qué? Por que son mas muchos

Figura 4.24. A17: Respuesta actividad 1.

Se puede observar que el alumno también presenta problemas de escritura. De la actividad 1, A17 respondió correctamente los incisos a y d, aunque cabe señalar que la respuesta dada en el inciso a no está expresada como fracción, sino que se centró en las partes en las que se divide el pastel, o sea en el denominador, por lo que no logró establecer la relación de fractura que se esperaba. Por otro lado, el inciso d lo respondió haciendo la comparación entre la cantidad de amigos y de hermanos que tiene Raúl, sin centrarse en la comparación entre las fracciones. El proceso que siguió para responder los incisos b y c no es claro, al parecer en el inciso c se centró en el número de amigos en vez del número de hermanos.

La respuesta de la actividad 2 fue considerada correcta aunque hay evidencia (ver Figura 4.25) de que su primera respuesta era 2 equipos, y además en su respuesta dice "equipos" en vez de identificar que lo que se reparte son los profesores. No hay evidencia del proceso que siguió para responder.

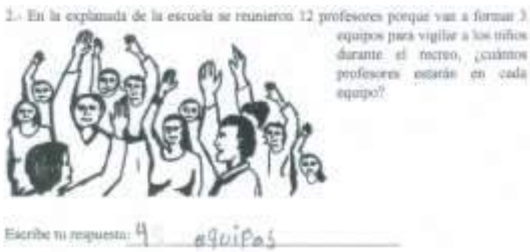


Figura 4.25. A17: Respuesta actividad 2.

Para la actividad 3 el alumno A17 ubicó a los competidores sobre la pista, pero no se observa un criterio que obedezca el orden que se propone en el problema (ver Figura 4.26). Los incisos a y b son respondidos incorrectamente, el alumno dice que ganó el primero porque recorrió más, no es claro si se refiere al primero como aquel que recorrió $\frac{1}{2}$ o al que va más delante y que él lo ubicó sin tener en cuenta el orden sugerido.

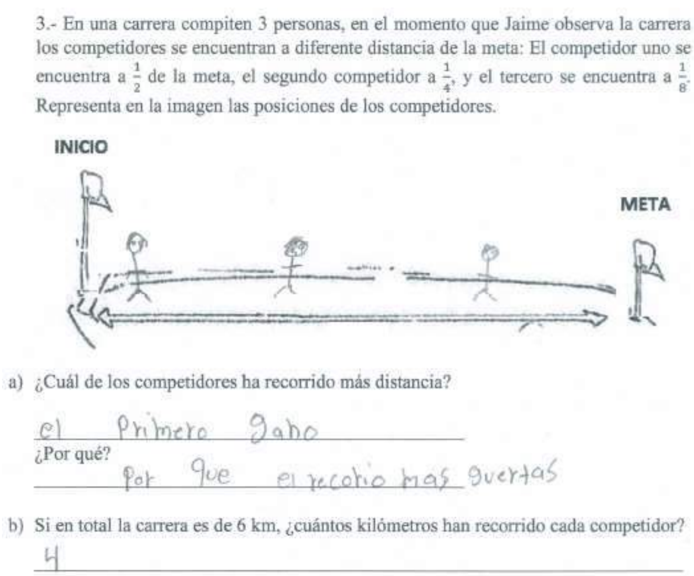


Figura 4.26. A17: Respuesta actividad 3.

La actividad 4 da evidencia de que el alumno A17 no logró usar la fracción como medida y tampoco pudo comparar las fracciones $\frac{5}{8}$ y $\frac{3}{4}$. El proceso que siguió para responder se basa en reescribir la fracción que está en el enunciado usando otra notación (ver Figura 4.27), esta notación la usa para responder ambos incisos, a y b.

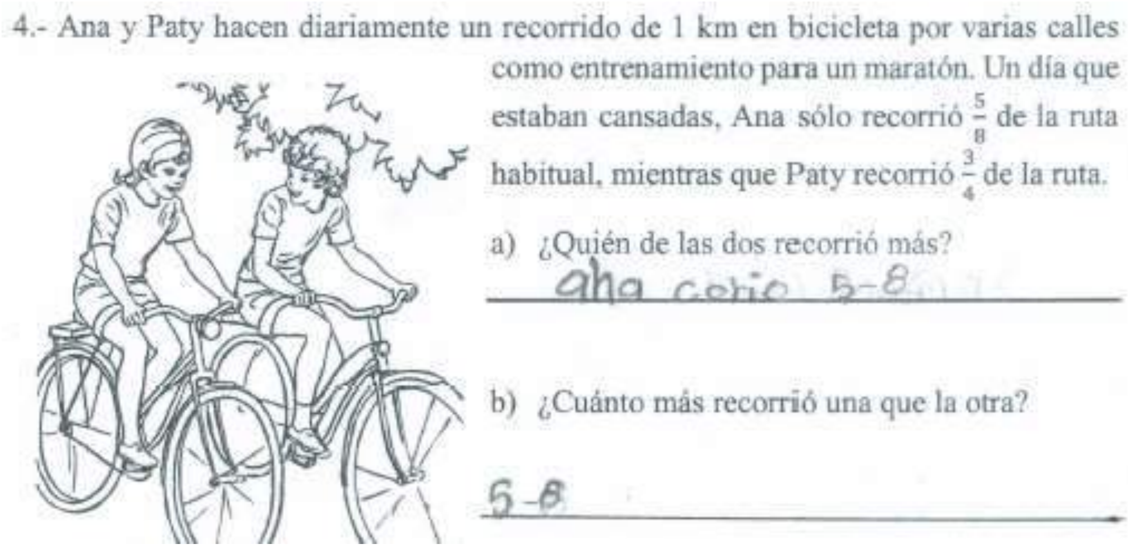


Figura 4.27. A17: Respuesta actividad 4.

Otra actividad en la que el alumno muestra dificultades con la estructura simbólica de la fracción y su significado es la 5, ya que para responder usa la notación de fracción, pero en este caso, invierte el numerador por el denominador de la fracción que se da en el problema, ver la Figura 4.28.

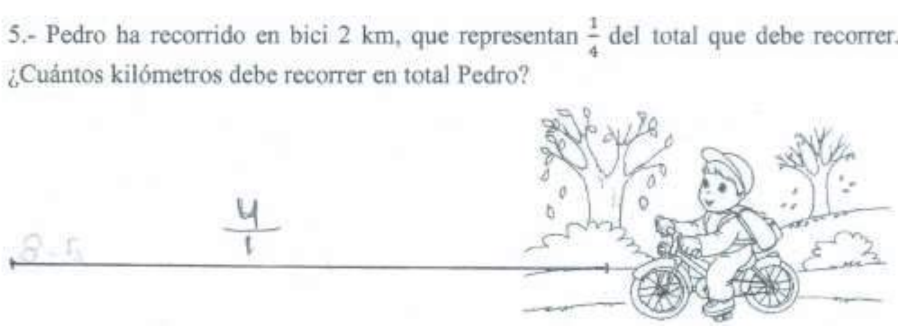
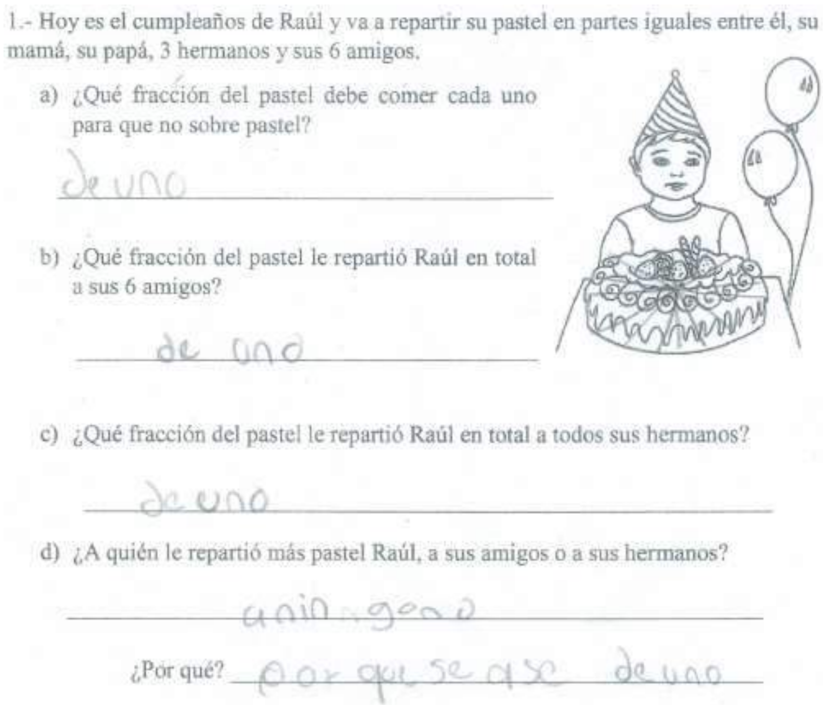


Figura 4.28. A17: Respuesta actividad 5.

La mayoría de las respuestas del alumno A17 son ambiguas, e incluso se observa que para responder repite información que se proporciona en los problemas, por lo que se supone que además de las dificultades para usar las fracciones en diversos contextos, la comprensión de los enunciados de los problemas pudieran estar influyendo en sus respuestas erróneas.

4.2.3 Análisis de las respuestas dadas por el alumno A4

El alumno A4 tiene 8 años de edad, es un alumno que apenas se había integrado al grupo, de acuerdo con el criterio de su profesora, él muestra interés en las matemáticas, pero es muy inquieto y distraído. A4 respondió de forma incorrecta todas las actividades. Las respuestas de la actividad 1 se pueden consultar en el Figura 4.29.


1.- Hoy es el cumpleaños de Raúl y va a repartir su pastel en partes iguales entre él, su mamá, su papá, 3 hermanos y sus 6 amigos.

a) ¿Qué fracción del pastel debe comer cada uno para que no sobre pastel?

de uno

b) ¿Qué fracción del pastel le repartió Raúl en total a sus 6 amigos?

de uno

c) ¿Qué fracción del pastel le repartió Raúl en total a todos sus hermanos?

de uno

d) ¿A quién le repartió más pastel Raúl, a sus amigos o a sus hermanos?

a ningono

¿Por qué? por que se ase de uno

Figura 4.29. A4: Respuesta actividad 1.

Uno de los propósitos al proporcionar figuras o imágenes en las actividades era para identificar si los alumnos se apoyan en ellas para responder. En este caso A4 utilizó la figura del pastel para dejar expresada una partición, en ese proceso dinámico hay evidencia de que el alumno hizo particiones, aunque tuvo errores de conteo y dificultades técnicas para conservar la igualdad de las partes. Aparentemente el alumno se centró en la unidad fraccionaria, pero no como una fracción, sino como una cantidad entera (una rebanada o pedazo), en este mismo sentido respondió los incisos de la actividad 1.

El uso de la fracción como facturador para establecer una relación de fractura en modelos discretos también se le dificultó al alumno, no es claro el proceso que siguió para responder la actividad 2, e incluso en su respuesta, como puede verse en la Figura 4.30 no especifica a que se refiere con el número 6, es decir, no indica si son profesores o grupos. La falta de esa especificación también se observó en las respuestas de otros alumnos.

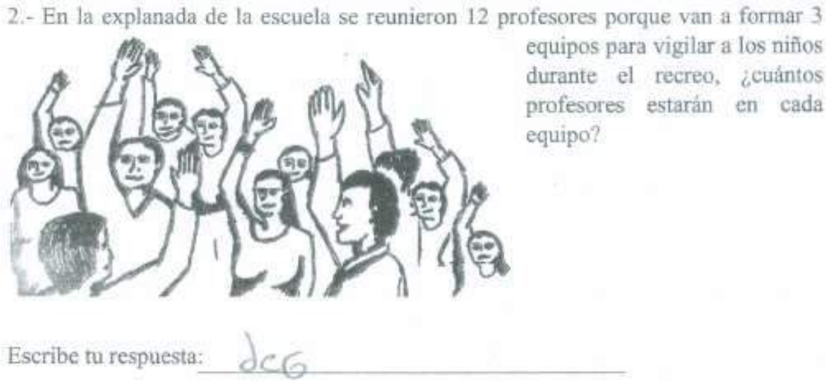


Figura 4.30. A4: Respuesta actividad 2.

A pesar de que el alumno tiene dificultades técnicas para ubicar exactamente a los competidores sobre la pista en la actividad 3, se observa que el proceso que siguió es adecuado, sin embargo, al igual que A31 no tomó en cuenta correctamente el sistema de referencias; para ubicar las fracciones no se centró en el valor faltante para llegar a la meta, sino que consideró las fracciones como si representaran el valor recorrido (ver Figura 4.31). Este mismo error fue cometido por otros alumnos.

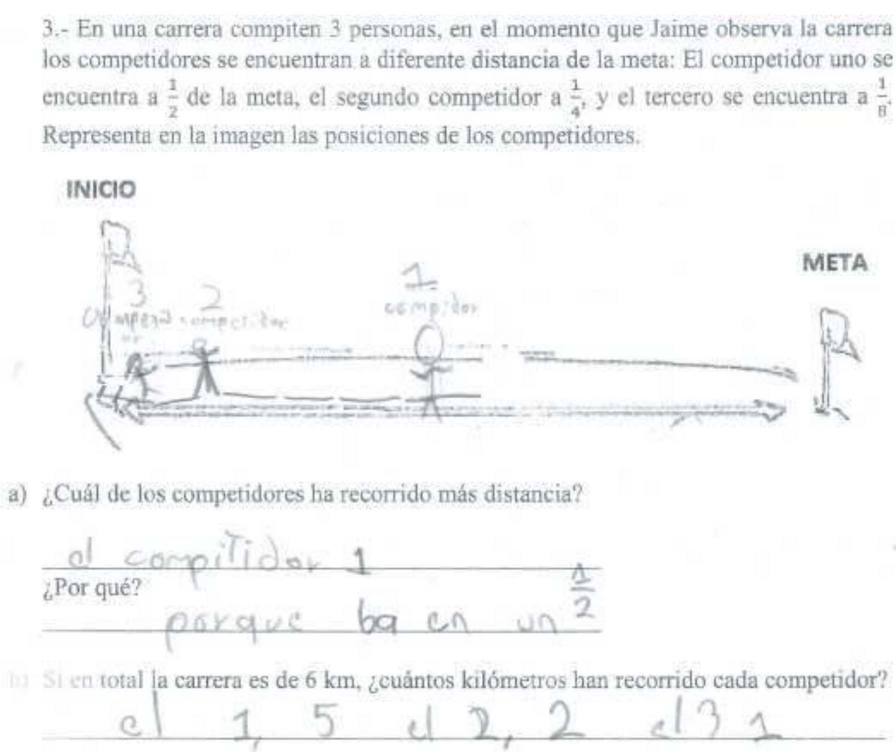
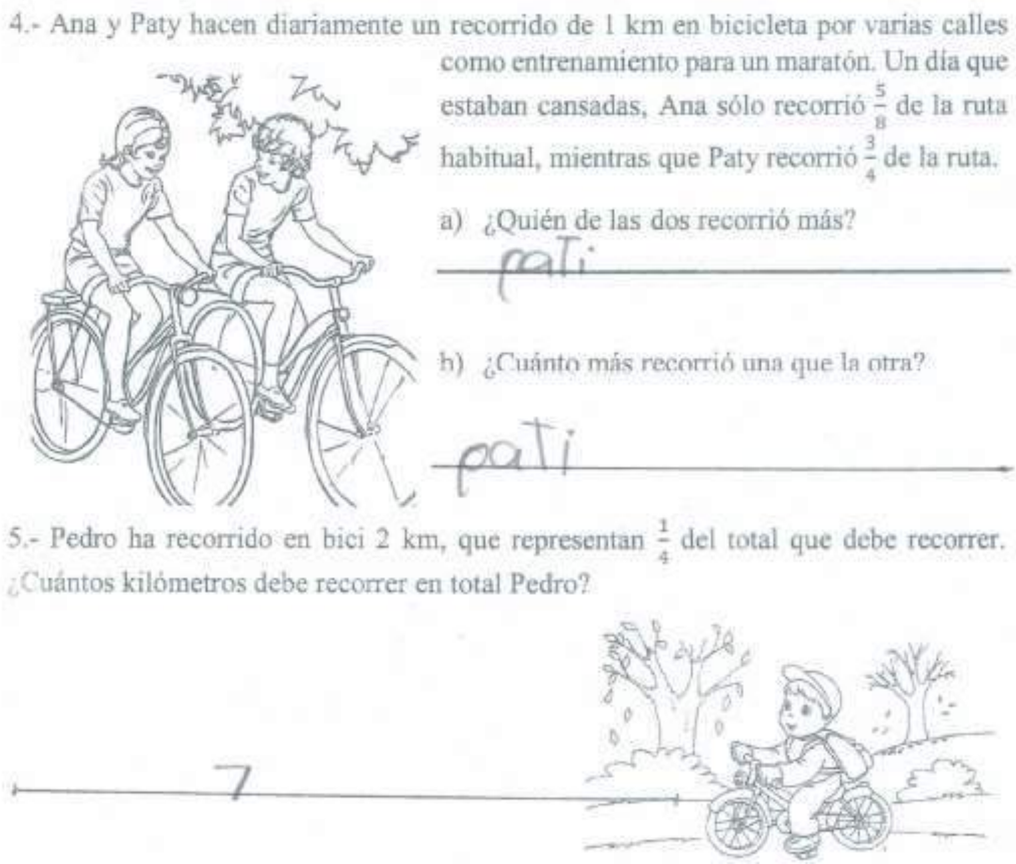


Figura 4.31. A4: Respuesta actividad 3.

Aparentemente, teniendo en cuenta el proceso que siguió el alumno para ubicar a los competidores, se observa que reconoce que $\frac{1}{2}$ es una fracción mayor que $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$, y además que $\frac{1}{4}$ es mayor que $\frac{1}{8}$, ya que como puede verse en la Figura 4.31 asigna correctamente el orden de los competidores. Para responder el inciso b el alumno hizo una reconstrucción del todo y una nueva partición. Consideró el recorrido del primer competidor como el todo, después lo partió en seis partes aparentemente iguales, las cuales representan los 6 kilómetros.

Las actividades 4 y 5 fueron respondidas de manera incorrecta y no hay evidencia del proceso que siguió el alumno A4 (ver Figura 4.32). En la actividad 4 se observa que la respuesta del inciso b no obedece a lo que se le solicita, repite el nombre de Paty.


4.- Ana y Paty hacen diariamente un recorrido de 1 km en bicicleta por varias calles como entrenamiento para un maratón. Un día que estaban cansadas, Ana sólo recorrió $\frac{5}{8}$ de la ruta habitual, mientras que Paty recorrió $\frac{3}{4}$ de la ruta.

a) ¿Quién de las dos recorrió más?

pati

b) ¿Cuánto más recorrió una que la otra?

pati

5.- Pedro ha recorrido en bici 2 km, que representan $\frac{1}{4}$ del total que debe recorrer. ¿Cuántos kilómetros debe recorrer en total Pedro?

7

Figura 4.32. A4: Respuesta a actividades 4 y 5.

En la actividad 5 (ver Figura 4.32) la respuesta del alumno es “7”, sin especificar que son 7 kilómetros, además, a pesar de que en la actividades anteriores se había apoyado de las representaciones gráficas, en esta actividad ya no usó este recurso.

4.3 CARACTERIZACIÓN DE LA COMPRENSIÓN DE LOS ALUMNOS

Del análisis de las respuestas dadas por los alumnos se puede observar que en términos de los usos y aspectos de las fracciones, ellos muestran mayor comprensión cuando resuelven problemas relacionados con el uso de la fracción como fracturador, específicamente para fracturar un todo discreto cuando se presenta una situación de distribución, sin embargo, esto se asocia al hecho de que el resultado de la distribución son números enteros, tal como se observó en la actividad 2. Dicho resultado se puede constatar con las respuesta que dieron los alumnos en el inciso d de la actividad 1, en la cual hacen comparaciones, pero en vez de centrarse en las fracciones, se centran en la cantidades enteras.

En cuanto a los procesos que siguen los alumnos para responder a las actividades se pueden resaltar los siguientes.

1) Algunos alumnos recurren a las representaciones gráficas o pictóricas para realizar procesos de partición e identificar las partes (número de partes o tamaño de las partes).
2) Para establecer una relación de fractura los alumnos cuentan los elementos que constituyen el todo y las partes que se deben tomar. En estos procesos algunos alumnos tienen errores de conteo a veces quizá por descuido, como es el caso de A31.
3) En algunas actividades, los alumnos copian solamente los datos de los enunciados de los problemas y responden sin sentido, como es el caso del alumno A4 y A17.
4) Pocos alumnos, como A31, recurren a la equivalencia de fracciones simples, como por ejemplo $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.
5) Al responder la actividad 5 hay alumnos como A31 que establecen relaciones entre los kilómetros y la fracción como una parte que se utiliza para completar el todo.
6) Uno de los procesos de interés que aparece en las respuestas de A4 es la reestructuración del todo.

7) Para hacer comparaciones entre fracciones en un modelo continuo en situaciones de reparto equitativo, los alumnos comparan cantidades enteras, y no necesariamente la fracción.
8) En cambio, en las actividades donde se usa la fracción como medida y utilizan “la recta numérica como modelo” los alumnos pueden establecer correctamente un orden entre las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$.
9) Los alumnos no identifican el sistema de referencia en la actividad 3, como se mencionó quizá es por la dificultad de comprender el enunciado del problema.

Sobre los errores más comunes que cometieron los alumnos podemos enlistar los siguientes.

1) Errores en el conteo de las partes para establecer una relación de fractura
2) Errores en el conteo de los elementos que constituyen un todo discreto.
3) Invierten el numerador por el denominador
4) Los alumnos tratan de hacer divisiones para responder la actividad 3, pero tienen errores al emplear el algoritmo de la división.

Capítulo 5

CONCLUSIONES Y CONTRIBUCIONES

En este capítulo se exponen las conclusiones de una investigación que tuvo como objetivo caracterizar la comprensión sobre la fracción de estudiantes de tercer año de primaria, mediante un cuestionario basado en los usos y aspectos de las fracciones en el sentido de Freudenthal (1983).

5. 1 CONCLUSIONES

¿Qué características tiene la comprensión de los alumnos de tercer año de primaria sobre las fracciones, en términos de los usos y aspectos de este concepto?, es la pregunta de investigación que motivó la presente tesis. Para poder responderla, se estableció el modelo metodológico expuesto en el Capítulo 3, mismo que consistió en caracterizar el modelo de enseñanza de las fracciones desde preescolar hasta tercer año de primaria.

El resultado de la caracterización del modelo de enseñanza señaló que el uso que más se prioriza en los libros de textos (libros para el maestro "desafíos", SEP, 2016a;b;c; y "mi álbum preescolar", SEP 2015 a;b;c) es el de fracturador, tal como la literatura lo señala, pero además permitió identificar que en tercer grado de primaria, hay lecciones que abordan los 7 usos y aspectos de la fracción señalados por Freudenthal (1983), a saber, lenguaje cotidiano: descriptor y comparador, fracturador, comparador, operador, medida y número. Este último resultado sentó las bases para caracterizar la comprensión de la fracción desde los usos y aspectos de la fracción, pues aseguraba que los alumnos son enfrentados a situaciones donde aparecen todos estos usos y aspectos de la fracción en tercer año de primaria, resultado que fue corroborado por la autora de esta tesis, quien había desarrollado el tema de fracciones con su grupo (participantes del estudio) resolviendo todas las lecciones sobre fracción del libro de texto de tercer año.

Posterior a conocer el modelo de enseñanza de las fracciones en tercer año de primaria, se procedió a elaborar el instrumento que sirvió para caracterizar la comprensión de la fracción. Se trata de un cuestionario de actividades influenciado por el tipo de problemas sobre fracciones que aparecen en los libros revisados, así como por la definición de cada uno de los usos y aspectos de las fracciones, de acuerdo con el referente teórico adoptado, la metodología de los desafíos matemáticos y la experiencia docente de la autora de la tesis al tratar con el tema de fracciones (Anexo 2). Mediante la resolución de las actividades por parte de los estudiantes, se identificaron sus procesos y errores que dan cuentan de su comprensión de la fracción.

Como resultado, se encontró que los alumnos tienen una comprensión de la fracción relacionada ampliamente con el uso de la fracción como fracturador. Sin embargo, en sus procedimientos dejan ver que su comprensión aún está vinculada con las cantidades y los números naturales. El esquema 5.1 resume los hallazgos de la comprensión de los estudiantes sobre la fracción en términos de procesos y errores.

En términos de los usos y aspectos de las fracciones, los estudiantes muestran mayor comprensión cuando resuelven problemas relacionados con el uso de la fracción como fracturador, consideramos que ello se debe a que están más familiarizados con este uso, identificamos además la facilidad que muestran para fracturar un todo discreto cuando se presenta una situación de distribución, sin embargo, esto se asocia al hecho de que el resultado de la distribución son números enteros, tal como se observó en la actividad 2. Dicho resultado se puede constatar con las respuesta que dieron los alumnos en el inciso d de la actividad 1, en la cual hacen comparaciones, pero en vez de centrarse en las fracciones, se centran en la cantidades enteras.

Identificamos que el uso de la fracción como medida, para medir segmentos sobre la recta numérica (actividades 3, 4 y 5) es complicado para los estudiantes, interpretamos que esto obedece a que han trabajado pocas lecciones sobre este uso en clase, este hecho fue corroborado con la profesora de los participantes.

Esquema 5.1. Caracterización de la comprensión de la fracción.

Caracterización de la comprensión de la fracción en estudiantes de tercer año de primaria

Procesos

- Se recurre a las representaciones gráficas o pictóricas para realizar procesos de partición e identificar las partes (número de partes o tamaño de las partes).
- Para establecer una relación de fractura se cuentan los elementos que constituyen el todo y las partes que se deben tomar.
- Se recurre a la equivalencia de fracciones simples.
- Aparece la necesidad de reestructurar el todo.
- Se comparan cantidades enteras, y no necesariamente la fracción para hacer comparaciones entre fracciones en un modelo continuo en situaciones de reparto equitativo.
- Se establece correctamente un orden entre las fracciones al trabajar con la recta numérica como modelo.

Errores

- Conteo de las partes para establecer una relación de fractura.
- Conteo de los elementos que constituyen un todo discreto.
- Invertir el numerador por el denominador.
- Al emplear el algoritmo de la división.

Un resultado colateral que encontramos al analizar las actuaciones de los estudiantes, es la dificultad de interpretar los enunciados de los problemas, si los estudiantes no comprende los enunciados se obstaculiza su resolución. Aunado a ello se encuentran las múltiples faltas de ortografía, que dan cuenta que no solo hay problemas en el área de matemáticas.

A manera de hipótesis se estableció que la caracterización de la comprensión de la fracción es un antecedente fundamental para el diseño de actividades que propicien la mejora de la comprensión de la fracción en los primeros años de estudio. Por ello, con base en los resultado delas actuaciones de los estudiantes, la autora de la tesis diseñó y aplicó al grupo, posterior al trabajo de tesis, 3 secuencias didácticas que promueven el uso medida y fracturador, enseguida solo se reporta el diseño de actividades, la aplicación e incidencias que tuvo en el grupo no son asunto de este reporte. Solo se puede decir que si bien las actividades son muy sencillas, sirvieron para reforzar la comprensión del uso medida en el grupo participante y en la profesora, a decir de la autora de esta tesis, el conocimiento que adquirió para el diseño de actividades ha cambiado su forma de enseñanza y espera seguir trabajándola en sus cursos posteriores.

5.2 SECUENCIA DIDÁCTICA 1: LAS PULSERAS

El objetivo perseguido por esta secuencia es reconocer los procesos que siguen los alumnos para hacer un reparto equitativo, así como conocer qué fracciones pueden surgir de manera espontánea en una situación donde se construye un sistema de medida que se emplea para medir objetos de distintas magnitudes. Se particulariza en el uso fracturador, se prioriza el proceso de fractura irreversible.

La situación se enmarca en el contexto de la construcción de pulseras, mediante la división de un listón en ocho partes iguales, cada una de estas partes debe ser usada para elaborar una pulsera. Las Tablas 5.1 y 5.2 muestran esta secuencia didáctica, el Anexo 3 muestra la secuencia tal como fue presentada a los estudiantes.

Tabla 5.1. Secuencia didáctica "las pulseras".

<table>
<tr><th>GRADO</th><th colspan="2">CICLO ESCOLAR</th><th>ZONA ESCOLAR</th><th>MAESTRA DE GRUPO</th></tr>
<tr><td>3°</td><td colspan="2">2017 - 2018</td><td>006</td><td>Alicia Nájera Leyva</td></tr>
<tr><td colspan="5">MATEMÁTICAS</td></tr>
<tr><td colspan="2">BLOQUE</td><td colspan="3">III</td></tr>
<tr><td colspan="2">TEMA</td><td colspan="3">La fracción se usa como medida</td></tr>
<tr><td colspan="2">OBJETIVO</td><td colspan="3">Reconocer los procesos que siguen los alumnos para hacer un reparto equitativo, y verificar que fracciones pueden surgir de manera espontánea en una situación donde se construye un sistema de medida que se emplea para medir objetos de distintas magnitudes.

El proceso de fractura es: Irreversible se va a dividir un listón en ocho partes iguales para que los alumnos se hagan una pulsera.</td></tr>
<tr><td colspan="2">APRENDIZAJE ESPERADO</td><td colspan="3">Que el alumno resuelva problemas de reparto cuyo resultado sea una fracción de la forma m/2n.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ÁMBITO</td><td colspan="3">Estudio.</td></tr>
<tr><td colspan="2">CONTENIDO</td><td colspan="3">Fracciones equivalentes.</td></tr>
<tr><td colspan="2">COMPETENCIA QUE SE FAVORECE</td><td colspan="3">Resolver problemas de manera autónoma.</td></tr>
<tr><td colspan="2">MATERIAL</td><td colspan="3">4 listones de diferente color.
4 tijeras.
Pintarrones de colores.</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia.

SITUACIÓN CONTEXTUAL

La maestra Alicia tiene 31 alumnos en el grupo de 3° "B", con ella serán 32 integrantes, se van a distribuir en cuatro equipos que tengan la misma cantidad de personas, incluyéndola a ella. La maestra les dará un listón a cada equipo para que cada quien tenga una pulsera del mismo tamaño. La actividad consiste en que los alumnos vayan fraccionando el listón en partes iguales hasta obtener ocho partes con las que se elaborarán su pulsera. Los equipos estarán representados por los siguientes alumnos:
Al equipo de Flor Azucena le tocará un pedazo de listón rojo
Al equipo de Marcos le tocará un pedazo de listón verde
Al equipo de Cristal le tocará un pedazo de listón amarillo
Al equipo de Kevin le tocará un pedazo de listón Azul.

DESARROLLO

Primero se intervendrá con los alumnos para decidir cuántos alumnos formarán un equipo.
Aquí se tendría que hacer una distribución en el pizarrón o en un papel bond llevar explicada la forma de cómo se hará la distribución.
$32 \div 4 = 8$

Primer equipo

Segundo equipo

Tercer equipo

Cuarto equipo

Cuando los alumnos sepan de cuántos integrantes formarán un equipo, por medio de la lista de asistencia se nombrarán los integrantes hasta quedar formados los cuatro equipos.

ACTIVIDADES

La indicación de la maestra es que su listón lo observen para que identifiquen que antes de ser fraccionado estuvo entero y ese entero es un todo o es una unidad que podemos repartir en partes iguales. La segunda indicación es que su listón (entero) lo dividan en dos partes.
Las actividades contempladas para los alumnos son las siguientes:
Observen el listón que se les entregó, este listón lo llamaremos entero, y es un todo o una unidad que van a dividir en partes iguales a lo largo de esta actividad.
A) Primero dividan el listón (entero) en dos partes iguales.
Escribe la fracción que representa cada parte del listón dividido.
B) Dibuja la imagen del listón entero y las partes divididas.
NOTA: Se vigilará que las partes que han dividido sean iguales y se hará intervención para que los alumnos contesten correctamente.

Tabla 5.2. Continuación de "las pulseras".
Fuente: Elaboración propia.

5.3 SECUENCIA DIDÁCTICA 2: EL REPARTO DE DULCES

Esta secuencia se diseñó con la intención de promover el uso fracturador en un todo discreto, esto es, cuando hay un conjunto de elementos que forman el todo (Ver Anexo 4). En este caso el proceso de fractura es reversible, se divide una bolsita con 24 dulces en diferentes partes iguales, pero se es capaz de volver a formar el todo, a diferencia del caso de la fractura del listón de la situación de las pulseras. La situación se inscribe en el reparto de dulces, reunidos en equipo de 8 integrantes, reciben una bolsa que contiene 24 dulces, se plantean diferentes preguntas en las que dada la cantidad de dulces se les pregunta por la fracción que representan, y dada una fracción se les cuestiona sobre el número de dulces que equivalen a esa fracción. En la Tabla 5.3 y 5.4 se detalla la secuencia.

Tabla 5.3 Secuencia didáctica "reparto de dulces".

GRADO	**CICLO ESCOLAR**	**ZONA ESCOLAR**	**MAESTRA DE GRUPO**
3°	2017 - 2018	006	Alicia Nájera Leyva
MATEMÁTICAS			
BLOQUE	IV.		
TEMA	El reparto.		
OBJETIVO	La situación pretende trabajar la fracción en el uso fracturador (el todo como unidad discreto), así como en el aspecto operador fracturante. El proceso de fractura es reversible, se va a dividir una bolsita con 24 dulces en partes iguales. El objetivo es que los alumnos por medio de repartir equitativamente los dulces identifiquen la escritura numérica de las fracciones, para que puedan representar medios, cuartos y octavos.		
APRENDIZAJE ESPERADO	Resuelve problemas que impliquen dividir mediante diversos procedimientos.		
ÁMBITO	Estudio.		
CONTENIDO	Escritura de fracciones. División de un entero en partes iguales. Suma de fracciones con el mismo denominador. Fracciones equivalentes.		
COMPETENCIA QUE SE FAVORECE	Resolver problemas de manera autónoma.		
MATERIAL	Lista de asistencia Hojas blancas Ocho bolsas con 24 dulces cada una Pintarrones de colores		

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5.4. Continuación de “reparto de dulces”.

SITUACIÓN CONTEXTUAL
Se repartirá a los cuatro equipos una bolsita con 24 dulces que le tocará a cada equipo para que se los puedan repartir en partes iguales a cada uno de los integrantes del equipo. Los alumnos tendrán que identificar que fracción representa el total.
DESARROLLO
Para esta actividad fue retomada la distribución de los equipos que se establecieron en la secuencia “Las pulseras”. Se formaron cuatro equipos de ocho alumnos. Reunidos en equipos se les entregó una bolsa de dulces. A continuación a cada integrante se le entregó una hoja de papel en donde contestaron las siguientes preguntas. • ¿En cuántas partes iguales tienes que dividir la bolsa de dulces para que a cada integrante le toque lo mismo? • ¿Cuántos dulces le corresponden a cada integrante? • Si dos integrantes juntan sus dulces, ¿Qué fracción del total de dulces representan?, ¿Por qué? • Si se juntan 8 dulces ¿Qué fracción del total de dulces representan?, ¿Por qué? • ¿A cuántos dulces equivale ½ del total? • Representen con los dulces la fracción ¼, y en la hoja de actividades dibujen la cantidad de cuartos que forman un entero. • ¿Es posible volver a formar el entero con los cuartos obtenidos? Si respondes si explica por qué. Para finalizar la clase se recurrirá al ejemplo de las pulseras para enfatizar la reversibilidad del todo discreto y del todo continuo.

Fuente: Elaboración propia.

5.4 SECUENCIA DIDÁCTICA 3: LOS ANIMALES DEL BOSQUE

Esta secuencia (ver detalles en Anexo 5) promueve el uso de la fracción como medida, para medir segmentos sobre la recta numérica. El estudiante puede fracturar la distancia del puente, o bien, solo comparar las partes que cada animalito ha recorrido, por lo que aparece la fracción como fracturador en su aspecto operador fracturante. La Tabla 5.5 presenta la planeación de esta secuencia.

Tabla 5.5. Secuencia didáctica “los animales del bosque”.

GRADO	**CICLO ESCOLAR**	**ZONA ESCOLAR**	**MAESTRA DE GRUPO**
3°	2017 - 2018	006	Alicia Nájera Leyva
MATEMÁTICAS			
BLOQUE	IV.		
TEMA	La fracción en el uso medida.		
OBJETIVO	Se pretende trabajar la fracción como medida y como operador fracturante.		
APRENDIZAJE ESPERADO	Resuelve problemas que impliquen dividir mediante diversos procedimientos.		
ÁMBITO	Estudio.		
CONTENIDO	Fracciones equivalentes, suma de fracciones, ubicación de fracciones en la recta real. Completar el entero a partir de una fracción dada. Conversión de la unidad de medida del metro a centímetros.		

<table>
<tr><td>COMPETENCIA QUE SE FAVORECE</td><td>Validar procedimientos y resultados.</td></tr>
<tr><td>MATERIAL</td><td>Un metro de madera
Tiras de papel de color con la medida de la recta
Representación de los animalitos
Pintarrones de colores.</td></tr>
<tr><td colspan="2">SITUACIÓN CONTEXTUAL
En el interior del bosque vivían tres animalitos: Una liebre, una rana y un grillo. Un día decidieron ir a tomar agua del otro lado de un puente que estaba cerca de su casa de cada uno de ellos. El puente mide 1.60 metros. El grillo se encuentra a 1/8 de cruzar el puente, la rana a ¼ y la liebre a ½.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">ACTIVIDADES
Se les propuso con base en la imagen responder las siguientes preguntas.
Representa en la recta las posiciones de los animalitos del bosque.
¿Cuál de los tres animalitos ha recorrido más distancia? , ¿Por qué?
¿Cuántos metros ha recorrido cada animalito?
¿Qué fracción de distancia le falta a cada animalito para cruzar el puente?</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia.

Bibliografía

Avilés, F. (2015). *Desarrollo de la habilidad para operar con fracciones: una experiencia de intervención docente*. Tesis de Maestría no publicada, Docencia de la matemática. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Bautista, V. (2013). *Propuesta para la enseñanza de las fracciones en nivel primaria usando argumentos históricos*. Tesis de Licenciatura no publicada, Licenciatura en Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. y Silver, E. (1983). Rational Number Concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, (pp. 91-125). New York: Academic Press.

Calderón, K. (2012). *Significados asociados al concepto de fracción en los libros de texto de educación básica*. Tesis de Licenciatura no publicada, Licenciatura en Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Castro, M. (2014). *Propuesta de Aprendizaje de número fraccionario como clase de equivalenci*a. Tesis de Maestría no publicada, Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Cristóbal, P. (2005). *Estrategias didácticas que promueven las habilidades de los alumnos de sexto grado de educación primaria para calcular fracciones*. Tesis de Maestría no publicada, Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Fandiño, M. I. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Magisterio.

Figueras, O. (1988). *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales*. Tesis de Doctorado. Cinvestav, México.

Figueras, O. (1996). Juntando partes. Hacia un modelo cognitivo y de competencia en la resolución de problemas de reparto. En F. Hitt (Ed.), *Didáctica, investigaciones en Matemática Educativa* (pp. 173-196). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Holland: D. Reide Publishing Company.

Gallardo, J., González, J. L y Quispe, W. (2008). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. *Relime*, 11(3), 355-382.

García, I. (2012). *Un estudio sobre el concepto fracción en situaciones de medición, división y la relación parte-todo con estudiantes de nivel medio superior*. Tesis de Licenciatura no publicada, Licenciatura en Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

García, I. (2015). *Suma de fracciones con diferente denominador. Un estudio sobre el conocimiento de un profesor de secundaria*. Tesis de Maestría no publicada, Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw Hill Education.

Herrera, C. (2005). *Identificación de heurísticas en alumnos de nivel básico al resolver problemas de números fraccionarios en su representación gráfica*. Tesis de Maestría no publicada, Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

INEE (2018). *Planea resultados nacionales 2018. 6° de primaria, lenguaje y comunicación, matemáticas*. Recuperado el 22 de noviembre de 2018 de http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2018/RESULTADOS_NACIONALES_PLANEA2018_INEE.pdf

Kieren T. E. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. En R. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 323–371). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieren, T. E. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (págs. 162-181). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieren, T. E. (1993). Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. En T. P. Carpenter, E. Fennema, y Romberg T. A (Eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research* (pp. 49-84). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

OCDE (2016). *PISA 2015. Resultados Clave*. Recuperado el 22 de noviembre de 2018 de https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus-ESP.pdf

Peláez, N. (2013). *Niveles de comprensión sobre el concepto de fracción en estudiantes de séptimo grado*. Tesis de Maestría no publicada, Docencia de la matemática. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Petit, M., Laird, R., y Marsden, E. (2010). *A Focus on Fractions: Bringing Research to the Classroom*. New York: Routledge-Taylor Francis Group.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Ed.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp.61-94). Barcelona: Horsori/ICE.

Quispe, W., Gallardo, J. y González, J. L. (2010). ¿Qué comprensión de la fracción fomentan los libros de texto de matemáticas peruanos? *PNA*, 4(3), 111-131.

SEP (2011a). *Programa de estudio, Guía para la Educadora. Educación Básica*. *Primer grado*. Dirección General de Desarrollo Curricular (DGDC) y Dirección General de Formación Continua de Maestros en Servicio (DGFCMS). México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.

SEP (2011b). *Programas de estudio, Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Segundo grado.* Dirección General de Desarrollo Curricular (DGDC) y Dirección General de Formación Continua de Maestros en Servicio (DGFCMS). México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.

SEP (2011c). *Programas de estudio, Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Tercer grado.* Dirección General de Desarrollo Curricular (DGDC) y de la Dirección General de Formación Continua de Maestros en Servicio (DGFCMS). México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.

SEP (2015a).*Mi álbum. Preescolar. Primer grado*. México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.

SEP (2015b). *Mi álbum. Preescolar. Segundo grado*. México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.

SEP (2015c). *Mi álbum. Preescolar*. *Tercer grado*. México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.

SEP (2016a). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Primer grado*. México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.

SEP (2016b). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Segundo grado*. México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.

SEP (2016c). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Tercer grado*. México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.

SEP (2016d). *Desafíos matemáticos línea de trabajo educativo*. Orientaciones para el trabajo en el aula. México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.

Siegler, R., Fazio, L., Bailey. D. y Zhou, X. (2013). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences*, 17(1), 151–152.

Siegler, S., Duncan, J., Davis-Kean, E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., et al. (2012) Early predictors of high school mathematics achievement. *Journal of the Association for Psychological Science*, 23(7), 691-697.

Steffe, L. y Olive, J. (2010). *Children's Fractional Knowledge*. Dordrecht Heidelberg London: Springer New York.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education. A paradigm of development research*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Urdaneta, S. (2014). *Intervención didáctica mediante la articulación de estilos de aprendizaje y estrategias de enseñanza para mejorar el rendimiento académico en la comprensión de textos en inglés*. Venezuela: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Usiskin, Z. (1979). The Future of Fractions. *Arithmetic Teacher*, 26, 18-20.

Valdemoros, M. Ramírez, M.E. y Lamadrid, P. (2015). Núcleos de significación y pensamiento en la enseñanza de fracciones. *Acta del XIV CIAEM-IACME. Chiapas, México*. Recuperado de http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/826/347

Valenzuela, C. (2018). *Modelo de enseñanza para fracciones basado en la recta numérica y el uso de applets: estudio en comunidades marginadas*. Tesis de doctorado no publicada. CINVESTAV, IPN. México.

Valenzuela, C., Figueras, O., Arnau, D. y Gutiérrez-Soto, J. (2016). Hacia un modelo de enseñanza para las fracciones basado en el uso de applets. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 5(2), 1-20.

Valenzuela, C., Figueras, O., Arnau, D. y Gutiérrez-Soto, J. (2017). Mental object for fractions of middle school students with truancy problems. En Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Valenzuela, C., García, M.S. & Nájera, L. (En prensa). Actividades para iniciar el estudio de las fracciones en educación primaria. En Hernández L. (Ed.). *Aportes en la investigación matemática basados en la investigación*. México: BUAP.

Anexo 1

CARACTERIZACIÓN DEL MODELO DE ENSEÑANZA

Los resultados del análisis de las lecciones de los libros de texto proporcionados por las SEP, desde preescolar hasta tercer grado de primaria, se detallan en este anexo. Dicho análisis se hizo para caracterizar el modelo de enseñanza de esos grados, particularmente interesa identificar los distintos usos y aspectos de las fracciones que aparecen en las actividades propuestas en los libros, para esto se tomó en cuenta el referente teórico propuesto por Valenzuela (2018) descrito en el Capítulo 2.

La caracterización hecha sirvió para identificar en cuál de los usos de las fracciones se enfocan las actividades, y a partir de ese resultado orientar el diseño de las actividades de exploración y evaluación que se proponen en esta tesis para tercer año de primaria, teniendo en cuenta además lo que demanda el currículo de este grado escolar.

El análisis se hizo siguiendo el orden de los grados escolares, se identificaron primero las actividades en la que aparecían las fracciones, se distinguieron los usos de las fracciones que aparecen y sus características.

A.1 Análisis de las lecciones de los libros de texto de preescolar

En los libros de preescolar aparecen pocas actividades en las que se usan las fracciones, y de hecho en ninguna ese tema es el enfoque principal, sin embargo las hemos considerado para el análisis.

Tabla 1. Primer grado.

<table>
<tr><th>Datos de identificación</th><th>Datos de referencia</th></tr>
<tr><td>Nivel escolar: Preescolar
Grado: 1
Libro: Mi álbum
Actividad: El mercado
Página: 32</td><td>Contenido: Fracciones
Campo formativo: 2. Pensamiento Matemático
Competencias que se favorece: Resuelve problemas en situaciones que le son familiares y que implican agregar, reunir, quitar, igualar, comparar y repartir objetos.
Aprendizaje esperado: Comprende problemas numéricos que se le plantean, estima sus resultados y los representa usando dibujos, símbolos y/o números.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Evidencia

</td></tr>
</table>

Interpretación: Usos y aspectos de la fracción

La fracción en el lenguaje cotidiano como descriptor

En la actividad **el mercado,** la ilustración muestra frutas enteras y partidas, puede observarse que una señora tiene en las manos lo que pareciera media papaya y la otra mitad está en la balanza, una niña camina comiendo una rebanada de sandía.

En esta actividad identificamos el uso de la fracción en el lenguaje cotidiano, como descriptor, pues se usa para describir partes de una fruta entera.

Consideramos que debido al nivel escolar, la fracción se presenta a los niños desde un contexto cercano como lo es el mercado, puede ser que ellos se refieran al concepto de fracción con palabras familiares como "rebanadas", "mitad" o "pedazo", favoreciendo así la competencia de resolver problemas en situaciones que le son familiares, como lo marca el programa de estudios.

Tabla 2. Segundo grado.

Datos de identificación	Datos de referencia
Nivel escolar: Preescolar **Grado:** 2° **Libro:** Mi álbum **Actividad:** ¿Qué hacen? **Página:** 24	**Contenido:** Fracciones **Campo formativo:** 2. Pensamiento Matemático Competencias que se favorece: Resuelve problemas en situaciones que le son familiares y que implican agregar, reunir, quitar, igualar, comparar y repartir objetos. **Aprendizaje esperado:** Comprende problemas numéricos que se le plantean, estima sus resultados y los representa usando dibujos, símbolos y/o números.

Evidencia

Interpretación: Usos y aspectos de la fracción

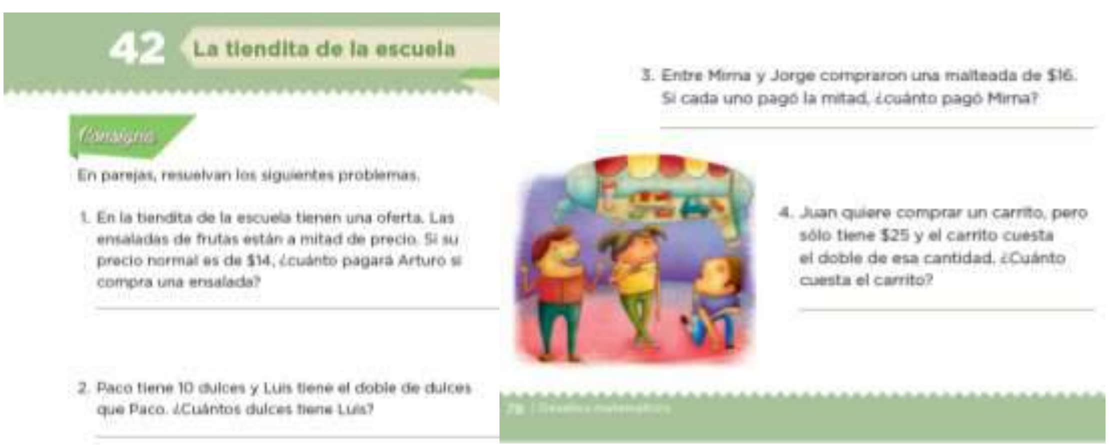
La fracción en el lenguaje cotidiano como descriptor

En la ilustración están representando varias profesiones y oficios tales como: Doctora, escultora, topógrafo, futbolista, cartero, carpintero, mecánico, conserje, policía, y vendedora de frutas. Solo en donde está la Sra. Que vende frutas es la que se relaciona con las fracciones pues tiene frutas enteras y partidas en cuartos.
Ejemplo: Una sandía = 1 entero.
La vendedora de la fruta decide partir una sandía en cuatro rebanadas iguales (en fracción sería ¼).
Ahora ¼ + ¼ + ¼ + ¼ = 1 entero. (Una sandía entera).

Primaria

Tabla 3. Primer año de primaria.

<table>
<tr><th>Datos de identificación</th><th>Datos de referencia</th></tr>
<tr><td>Nivel escolar: Primaria
Grado: 1
Libro: Desafíos
Bloque: IV
Página: 78
Lección: 42, La tiendita de la escuela</td><td>Intención didáctica: Que los niños identifiquen números con base en las relaciones “el doble de” o “la mitad de”.
Contenido: Resolución de problemas que impliquen la determinación y el uso de relaciones entre los números (estar entre, uno más que, uno menos que, mitad de, doble de, 10 más que, etcétera).
Eje temático: 2. Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Competencias que se favorece: Resolver problemas de manera autónoma.
Aprendizaje esperado: Utiliza unidades arbitrarias de medida para comparar, ordenar, estimar y medir longitudes.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Evidencia</td></tr>
</table>



42 La tiendita de la escuela

Consigna

En parejas, resuelvan los siguientes problemas.

1. En la tiendita de la escuela tienen una oferta. Las ensaladas de frutas están a mitad de precio. Si su precio normal es de $14, ¿cuánto pagará Arturo si compra una ensalada?
2. Paco tiene 10 dulces y Luis tiene el doble de dulces que Paco. ¿Cuántos dulces tiene Luis?
3. Entre Mirna y Jorge compraron una malteada de $16. Si cada uno pagó la mitad, ¿cuánto pagó Mirna?
4. Juan quiere comprar un carrito, pero sólo tiene $25 y el carrito cuesta el doble de esa cantidad. ¿Cuánto cuesta el carrito?

Interpretación: Usos y aspectos de la fracción

<u>La fracción como comparador y como operador</u>

En la actividad **la tiendita de la escuela**, la intención didáctica es que los estudiantes identifiquen números con base en las relaciones “el doble de” o “la mitad de”, en esta última relación se precisa de las fracciones.

Particularmente los problemas 1 y 3 establecen la relación *la mitad de*, esto es *½ de*, por tal razón la fracción aparece en sus usos comparador y operador.

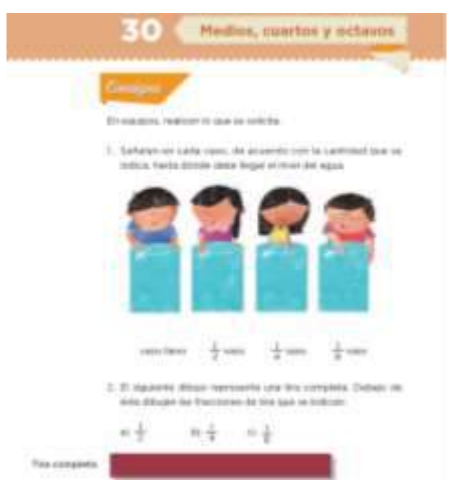
Se usa la fracción para comparar dos cantidades, el precio de la ensalada, 14 pesos, y su mitad, 7 pesos, esta comparación se establece de manera directa, pues para conocer el precio de la oferta, el estudiante tiene que fracturar el entero (14 pesos) en dos partes iguales (7 pesos cada una), en este caso se establece una relación de fractura.

La fracción podría también parecer como operador, pues la fracción ½ se podría emplear para transformar al 14 en 7.

Tabla 4 parte 1. Tercer año de primaria.

Datos de identificación	Datos de referencia
Nivel escolar: Primaria **Grado**: 3° **Libro**: Desafíos **Bloque**: III **Página**: 70,71 **Lección**: 30, medios, cuartos y octavos	**Intención didáctica**: Que los alumnos se familiaricen con la escritura numérica de las fracciones, así como con diferentes representaciones de medios, cuartos y octavos. **Contenido**: Uso de fracciones del tipo m/2n (medios, cuartos, octavos, etcétera) para expresar oralmente y por escrito medidas diversas. **Eje temático**: Sentido numérico y pensamiento algebraico. **Competencia que se favorece**: Resolver problemas de manera autónoma. **Aprendizaje esperado**: Resuelve problemas de reparto cuyo resultado sea una fracción de la forma m/2n.

Evidencia 1



Interpretación: Usos y aspectos de la fracción

<u>La fracción como Fracturador en el aspecto operador fracturante.</u>

El proceso de fractura es:

Simbólico, para dividir la altura de los vasos en partes iguales y establecer relaciones de fractura (1/2,1/4,1/8).

El todo es:

- Continuo
- Definido
- Estructurado

Tabla 4 parte 2. Tercer año de primaria.

Evidencia 2

Interpretación: Usos y aspectos de la fracción

La fracción en el lenguaje cotidiano como descriptor

En el lenguaje cotidiano:

- Describir: Se usa como descriptor de un recipiente que sirve para medir el contenido de litros que tienen otros recipientes.

La fracción actúa como:

- Medida / Mide la cantidad de litros o metros que tienen recipientes o un cable respectivamente.

Tabla 5 parte 1. Tercer año de primaria.

Datos de identificación	Datos de referencia
Nivel escolar: Primaria **Grado**: 3° **Libro**: Desafíos **Bloque**: III **Página**: 72 **Lección**: 31, Con el metro	**Intención didáctica**: Uso de fracciones Que los alumnos establezcan relaciones entre el metro, ½ metro, ¼ de metro y 1/8 de metro al tener que construirlos y usarlos para medir. **Contenido**: Uso de fracciones del tipo m/2n (medios, cuartos, octavos, etcétera) para expresar oralmente y por escrito medidas diversas. **Eje temático**: Sentido numérico y pensamiento algebraico. **Competencia que se favorece**: Resolver problemas de manera autónoma. **Aprendizaje esperado**: Resuelve problemas de reparto cuyo resultado sea una fracción de la forma m/2n.

Evidencia 1

Interpretación: Usos y aspectos de la fracción

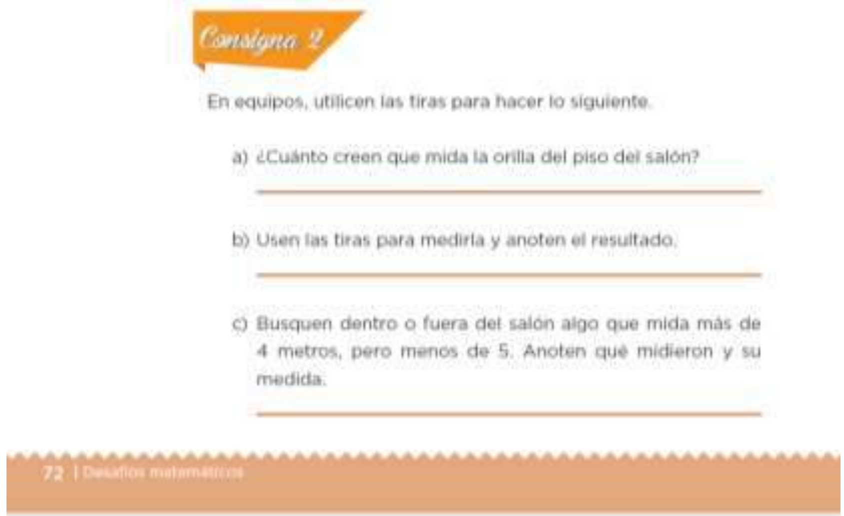
<u>La fracción como Fracturador en el aspecto operador fracturante</u>

El proceso de fractura es:
Irreversible, para dividir el metro en
(1/2, ¼)
El todo es:

- Continuo
- Definido
- Estructurado

Tabla 5 parte 2. Tercer año de primaria.

Evidencia 2



Consigna 2

En equipos, utilicen las tiras para hacer lo siguiente.

a) ¿Cuánto creen que mida la orilla del piso del salón?

b) Usen las tiras para medirla y anoten el resultado.

c) Busquen dentro o fuera del salón algo que mida más de 4 metros, pero menos de 5. Anoten qué midieron y su medida.

72 | Desafíos matemáticos

Interpretación: Usos y aspectos de la fracción

<u>La fracción como Fracturador en el aspecto operador fracturante</u>

Tabla 6.Tercer año de primaria.

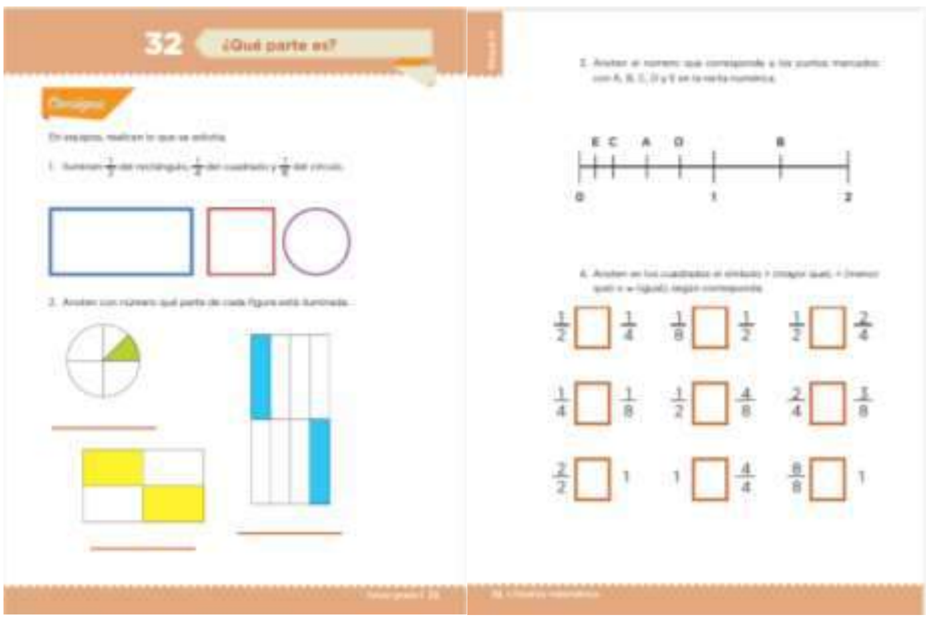
<table>
<tr><th>Datos de identificación</th><th>Datos de referencia</th></tr>
<tr><td>Nivel escolar: Primaria
Grado: 3
Libro: Desafíos
Bloque: III
Página: 73-74
Lección: 32, ¿Qué parte es?</td><td>Intención didáctica: Que los alumnos reflexionen acerca del significado de algunas fracciones al tener que representarlas gráficamente, o bien para interpretarlas o compararlas.
Contenido: Uso de fracciones del tipo m/2n (medios, cuartos, octavos, etcétera) para expresar oralmente y por escrito medidas diversas.
Eje temático: 2. Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Competencia que se favorece: Resolver problemas de manera autónoma.
Aprendizaje esperado: Resuelve problemas de reparto cuyo resultado sea una fracción de la forma m/2n.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Evidencia

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Interpretación: Usos y aspectos de la fracción
<u>La fracción como fracturador, medida y número</u>
La fracción en el uso fracturador se presenta en el ejercicio 1 y 2. En el ejercicio 1, el todo es continuo, por tratarse de un solo elemento y se reparte en partes iguales. Los alumnos deben tener claro que ½ es una de dos partes iguales de una unidad, ¼ una de cuatro partes y 1/8 uno de ocho partes. En el ejercicio 2 aumenta un poco el grado de dificultad, en el círculo deben pensar en la parte coloreada que es la mitad de ¼ o sea 1/8.
En el ejercicio 3, aparece el uso medida, el segmento de recta es una unidad, los alumnos representarán fracciones a partir de identificar en cuantas partes será fraccionada la unidad. La medida será 1/8, 2/8 equivalente a 1/4, 3/8, y la siguiente medida corresponderá a 4/8, equivalente a 1/2, y así sucesivamente irán agregando las medidas en la recta numérica.
En el ejercicio 4, aparece la fracción como número, al observar cada par de fracciones los alumnos anotarán los símbolos > (mayor que) < (menor que) o = (igual) según corresponda.</td></tr>
</table>

Tabla 7.Tercer año de primaria.

Datos de identificación	Datos de referencia
Nivel escolar: Primaria **Grado**: 3 **Libro**: Desafíos **Bloque**: III **Página**: 75 **Lección**: 33, En partes iguales	**Intención didáctica**: Que los alumnos usen representaciones gráficas y números fraccionarios para expresar resultados de problemas de reparto. **Contenido**: Uso de fracciones del tipo m/2n (medios, cuartos, octavos, etcétera) para expresar oralmente y por escrito el resultado de repartos. **Eje temático**: Sentido numérico y pensamiento algebraico. **Competencia que se favorece**: Resolver problemas de manera autónoma. **Aprendizaje esperado**: Resuelve problemas de reparto cuyo resultado sea una fracción de la forma m/2n.
Evidencia	


33 En partes iguales

Consigna

En equipos, resuelvan los siguientes problemas.

1. Se va a repartir una cartulina entre dos niños, de manera que les toque lo mismo y que no sobre.

¿Cuánto le tocará a cada uno?

2. Se van a repartir 3 cartulinas entre 4 niños, de manera que les toque lo mismo y que no sobre.

¿Cuánto le tocará a cada uno?

3. Se van a repartir 5 barritas de amaranto entre 8 niños, de manera que les toque lo mismo y que no sobre.

¿Cuánto le tocará a cada uno?

Interpretación: Usos y aspectos de la fracción

La fracción actúa en el problema 1, 2 y 3. Como Fracturador / operador fracturante

El proceso de fractura es:

Irreversible, para repartir equitativamente objetos entre 2, 4 y 8 niños y establecer relaciones de fractura, tales como ($\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}$).

Además, la fracción describe la cantidad de lo que se reparte a cada niño.

El todo es:

- Continuo en el P1 y discreto en P2 y P3
- Definido
- Estructurado

Tabla 8 parte 1. Tercer año de primaria.

Datos de identificación	Datos de referencia
Nivel escolar: Primaria **Grado**: 3 **Libro**: Desafíos **Bloque**: III **Páginas**: 76, 77, 78, 79. **Lección**: 34, ¿A quién le tocó más?	**Intención didáctica**: Que los alumnos usen números fraccionarios para representar resultados de reparto. **Contenido**: Uso de fracciones del tipo m/2n (medios, cuartos, octavos, etcétera) para expresar oralmente y por escrito el resultado de repartos. **Eje temático**: Sentido numérico y pensamiento algebraico. **Competencia que se favorece**: Resolver problemas de manera autónoma. **Aprendizaje esperado**: Resuelve problemas de reparto cuyo resultado sea una fracción de la forma m/2n.

Evidencia 1

Evidencia 2

Tabla 8 parte 2. Tercer año de primaria.

Interpretación: Usos y aspectos de la fracción

<u>La fracción actúa en el problema 1 y 2. Como Fracturador / operador fracturante</u>

El proceso de fractura es:
Irreversible, para repartir equitativamente sin resto de objetos entre 4 y 8 niños, y establecer relaciones de fractura tales como ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, y $\frac{1}{8}$). Además, la fracción describe la cantidad de lo que se reparte a cada niño.
Las fracciones se comparan para determinar cuál es mayor o menor.
El todo es:

- Continuo en P1, y discreto en P2
- Definido
- Estructurado

Evidencia 3

Bloque III

3. En cada equipo se van a repartir galletas de granola, de manera que a todos les toque lo mismo y que no sobre.

Equipo de Luis **Equipo de Carla**

a) ¿Creen que a Carla le toque la misma cantidad de galleta que a Luis?

____

¿Por qué?

____

____

b) ¿Creen que a Carla le toquen más de $\frac{3}{4}$ de galleta?

____

c) Comprueben si sus respuestas son correctas. ¿Cuánta galleta le tocó a Carla?

____

d) ¿Y a Luis?

____

Tabla 8 parte 3. Tercer año de primaria.

Evidencia 4


4. En cada equipo se van a repartir pizzas, de manera que a todos les toque lo mismo y que no sobre.

Equipo de Rosa

Equipo de Fernando

a) ¿A Rosa y a Fernando les tocará la misma cantidad de pizza?

¿Por qué?

b) ¿Cuántas pizzas más tendría que comprar el equipo de Rosa para que cada uno pueda comer media pizza más que los niños del equipo de Fernando?

Interpretación: Usos y aspectos de la fracción

La fracción actúa en el problema 3 y 4. Como: **Fracturador /** operador fracturante

El proceso de fractura es:
Irreversible, para repartir equitativamente galletas y pizzas entre 4 y 8 niños y establecer relaciones de fractura, tales como $(\frac{3}{4},\frac{6}{8},\frac{1}{8})$.
Además, la fracción describe la cantidad de lo que se reparte a cada niño.
Las fracciones se comparan para determinar cuál es mayor o menor. En P4, aparece una fracción equivalente.

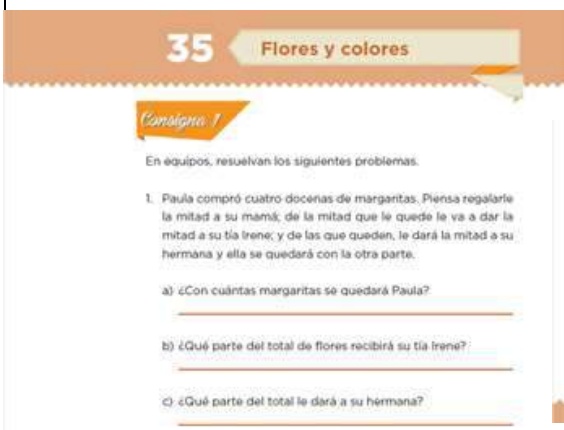
El todo es:

- Discreto
- Definido
- Estructurado

Tabla 9 parte 1. Tercer año de primaria.

Datos de identificación	Datos de referencia
Nivel escolar: Primaria **Grado**: 3 **Libro**: Desafíos **Bloque**: III **Páginas**: 80,81. **Lección**: 35, Flores y colores	**Intención didáctica**: Que los alumnos identifiquen las fracciones que resultan de subdividir varias veces un conjunto en la misma proporción o razón. **Contenido**: Uso de fracciones del tipo m/2n (medios, cuartos, octavos, etcétera) para expresar oralmente y por escrito el resultado de repartos. **Eje temático**: Sentido numérico y pensamiento algebraico. **Competencia que se favorece**: Resolver problemas de manera autónoma. **Aprendizaje esperado**: Resuelve problemas de reparto cuyo resultado sea una fracción de la forma m/2n.

Evidencia 1



35 Flores y colores

Consigna 1

En equipos, resuelvan los siguientes problemas.

1. Paula compró cuatro docenas de margaritas. Piensa regalarle la mitad a su mamá; de la mitad que le quede le va a dar la mitad a su tía Irene; y de las que queden, le dará la mitad a su hermana y ella se quedará con la otra parte.

a) ¿Con cuántas margaritas se quedará Paula?

b) ¿Qué parte del total de flores recibirá su tía Irene?

c) ¿Qué parte del total le dará a su hermana?

d) ¿Qué fracción del total representa la cantidad de flores que se quedará Paula?

80 | Desafíos matemáticos

Evidencia 2

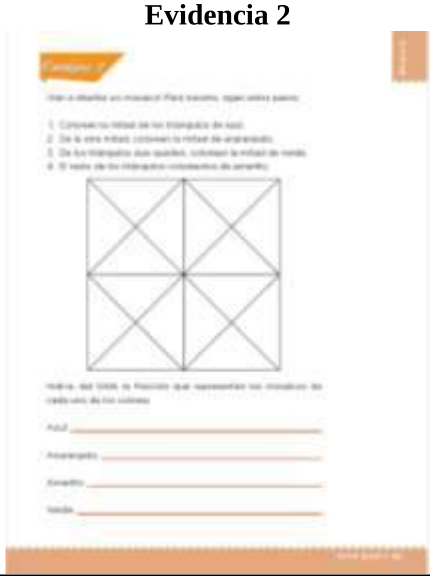


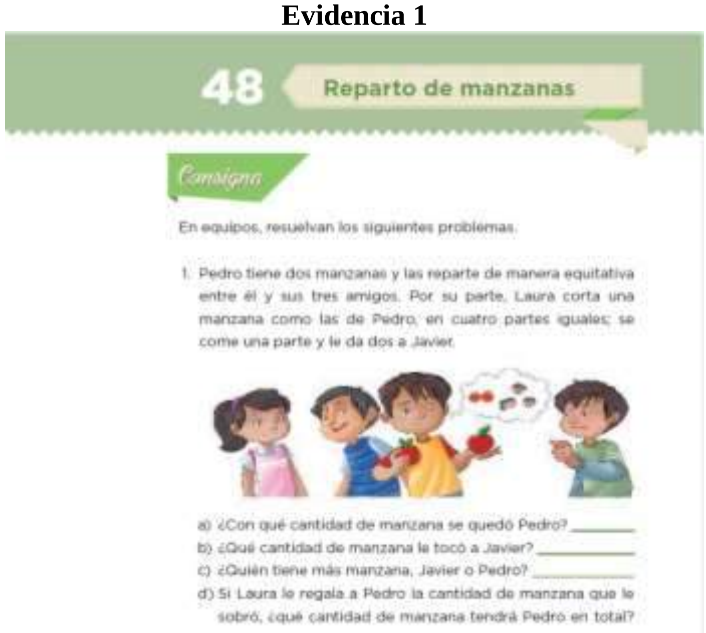
Tabla 9 parte 2. Tercer año de primaria.

Interpretación: Usos y aspectos de la fracción
<u>La fracción actúa en el problema 1 y 2. Como   Fracturador / Operador fracturante</u> El proceso de fractura es: Reversible en P1y simbólico en P2, para repartir equitativamente flores entre personas y triángulos en distintos colores, para establecer relaciones de fractura tales como (1/2,1/4,1/8). Además, la fracción describe la cantidad de lo que se reparte. El todo es: Discreto Definido Estructurado La fracción actúa en el problema 1 y 2. Como: operador/que transforma una cantidad en otra. Por ejemplo ½ de 48 es 24, o ½ de 16 es 8.

Tabla 10 parte 1. Tercer año de primaria.

Datos de identificación	Datos de referencia
Nivel escolar: Primaria **Grado**: 3 **Libro**: Desafíos **Bloque**: IV **Páginas**: 106, 107. **Lección**: 48, Reparto de manzanas	**Intención didáctica**: Que los alumnos reflexionen sobre la equivalencia de expresiones aditivas como ¼ + ¼ = ½, ¼ + ¼ + ¼ = ½ + ¼, al resolver problemas de reparto y medición. **Contenido**: Identificación de escrituras equivalentes (aditivas, mixtas) con fracciones en casos sencillos con igual numerador o igual denominador. **Eje temático**: Sentido numérico y pensamiento algebraico. **Competencia que se favorece**: Resolver problemas de manera autónoma. **Aprendizaje esperado**: Resuelve problemas de reparto cuyo resultado sea una fracción de la forma m/2n.

Evidencia 1


48 Reparto de manzanas

Consigna

En equipos, resuelvan los siguientes problemas.

1. Pedro tiene dos manzanas y las reparte de manera equitativa entre él y sus tres amigos. Por su parte, Laura corta una manzana como las de Pedro, en cuatro partes iguales; se come una parte y le da dos a Javier.

a) ¿Con qué cantidad de manzana se quedó Pedro? ______
b) ¿Qué cantidad de manzana le tocó a Javier? ______
c) ¿Quién tiene más manzana, Javier o Pedro? ______
d) Si Laura le regala a Pedro la cantidad de manzana que le sobró, ¿qué cantidad de manzana tendrá Pedro en total?
______

Interpretación: Usos y aspectos de la fracción
La fracción actúa en el problema 1. Como Fracturador / operador fracturante El proceso de fractura es: Irreversible, para repartir equitativamente manzanas para establecer relaciones de fractura tales como (1/2,1/4,3/4). La fracción también describe la cantidad de manzana que recibe cada niño. Y compara las fracciones resultantes. El todo es: Discreto Definido Estructurado

Tabla 10 parte 2. Tercer año de primaria.

Evidencia 2

2. Un conejo, una rana y un chapulín tienen que cruzar un puente que mide 2 metros de largo. El conejo da saltos de $\frac{1}{2}$ metro, la rana de $\frac{1}{4}$ y el chapulín de $\frac{1}{8}$. Contesten las siguientes preguntas.

106 | Desafíos matemáticos

Bloque IV

a) ¿Cuál de los tres animales da saltos más largos?

b) Si el conejo da 3 saltos, la rana 6 y el chapulín 12, ¿qué distancia ha recorrido cada animal?

c) ¿Cuántos saltos tiene que dar cada uno para cruzar el puente?

Evidencia 3


3. Catalina tiene una panadería. Cada día usa un costal de harina y lo divide en partes iguales: una es para hacer bolillo, otra para preparar pan dulce y otra para elaborar pasteles.

a) ¿Qué parte del costal utiliza para cada tipo de pan?

b) Un día no hizo pan dulce y usó esa harina para preparar pasteles, ¿qué parte utilizó para los pasteles?

Interpretación: Usos y aspectos de la fracción

La fracción actúa en el problema 2. Como: **Medidora/** que mide segmentos en la recta numérica

Tabla 11. Tercer año de primaria.

<table>
<tr><th>Datos de identificación</th><th>Datos de referencia</th></tr>
<tr><td>Nivel escolar: Primaria
Grado: 3
Libro: Desafíos
Bloque: IV
Páginas: 108.
Lección: 49, Dosis de medicamento</td><td>Intención didáctica: Que los alumnos establezcan equivalencias entre números mixtos y suma de fracciones.
Contenido: Identificación de escrituras equivalentes (aditivas, mixtas) con fracciones. Comparación de fracciones en casos sencillos con igual numerador o igual denominador.
Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Competencia que se favorece: Resolver problemas de manera autónoma.
Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Evidencia</td></tr>
</table>

49 Dosis de medicamento

Consigna

De manera individual, resuelve el siguiente problema: para curar un resfriado, el médico le recetó a Luis tomar media pastilla de medicamento diariamente, durante siete días. Su mamá compró una caja con seis pastillas e hizo una tabla como la siguiente. Complétala y contesta las preguntas.

Día	1	2	3	4	5	6	7
Pastillas consumidas	$\frac{1}{2}$						

a) ¿Alcanzarán las seis pastillas para terminar el tratamiento?

Explica tu respuesta.

b) ¿Cuántas pastillas habrá tomado a lo largo de cinco días?

c) ¿En cuántos días habrá tomado $1\frac{1}{2}$ pastillas?

d) ¿Sobrarán pastillas al terminar el tratamiento?

Explica tu respuesta.

108 | Desafíos matemáticos

<table>
<tr><td>
Interpretación: Usos y aspectos de la fracción
<u>La fracción actúa como: Fracturador / operador fracturante</u>
El proceso de fractura es:
Irreversible, para repartir equitativamente seis pastillas durante 7 días, y por día se reparte 1/2 pastilla.
La fracción ½ se utiliza como medida para terminar la cantidad de pastillas que se toman por día. Además, en este problema aparen expresiones con fracciones que se usan en el lenguaje cotidiano.
El todo es:
continuo
Definido
Estructurado
</td></tr>
</table>

Tabla 12 parte 1. Tercer año de primaria.

<table>
<tr><th>Datos de identificación</th><th>Datos de referencia</th></tr>
<tr><td>Nivel escolar: Primaria
Grado: 3
Libro: Desafíos
Bloque: IV
Páginas: 109, 110.
Lección: 50, Moños</td><td>Intención didáctica: Que los alumnos anticipen, argumenten y verifiquen que cantidad es mayor, dadas dos cantidades con igual numerador e igual denominador.
Contenido: Identificación de escrituras equivalentes (aditivas, mixtas) con fracciones en casos sencillos con igual numerador o igual denominador.
Eje temático: Sentido numérico y pensamiento algebraico.
Competencia que se favorece: Resolver problemas de manera autónoma.
Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Evidencia 1

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Interpretación: Usos y aspectos de la fracción
<u>La fracción actúa como Fracturador / operador fracturante</u>
El proceso de fractura es:
Irreversible, y divide la longitud de listones.
Uno podría apoyarse en la recta numérica como recurso, por lo que la fracción aparece como:
- Medidora / que mide segmentos en la recta numérica.</td></tr>
</table>

Tabla 12 parte 2. Tercer año de primaria.

Evidencia 2

2. Los siguientes dibujos representan un metro de cada listón. Anota en la línea el color que le corresponda y colorea la parte que se necesita para hacer un moño.

Metro de listón: ____________

Metro de listón: ____________

Individualmente, resuelve los siguientes problemas.

1. Se tienen 2 lazos, uno mide $\frac{3}{2}$ metros y el otro $\frac{3}{4}$. ¿Cuál es más pequeño?

¿Por qué?

2. Se necesita $\frac{1}{4}$ de metro de cuerda para amarrar una bolsa. Para amarrar las suyas, Luis ocupó $2\frac{2}{4}$ metros y Sonia utilizó $1\frac{1}{2}$ metros. ¿Cuántas bolsas sujetó cada uno?

Sonia: ________ Luis: ________

Interpretación: Usos y aspectos de la fracción

La fracción actúa como relación de fractura

El proceso de fractura es:

Simbólico, y divide un rectángulo.

El todo en ambos problemas es:

- Continuo
- Definido
- Estructurado

La fracción actúa como medida y comparador

- Medidora / Mide el largo de objetos
- Comparador/ compara el largo de los objetos para determinar cuál de ellos es más o menos corto.

Tabla 13. Tercer año de primaria.

Datos de identificación	Datos de referencia
Nivel escolar: Primaria **Grado**: 3 **Libro**: Desafíos **Bloque**: IV **Páginas**: 111. **Lección**: 51, De varias formas	**Intención didáctica**: Que los alumnos usen diversas formas aditivas para representar una fracción mixta. **Contenido**: Identificación de escrituras equivalentes (aditivas, mixtas) con fracciones en casos sencillos con igual numerador o igual denominador. **Eje temático**: Sentido numérico y pensamiento algebraico. **Competencia que se favorece**: Resolver problemas de manera autónoma. **Aprendizaje esperado**: Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética.

Evidencia

Interpretación: Usos y aspectos de la fracción

La fracción actúa como:

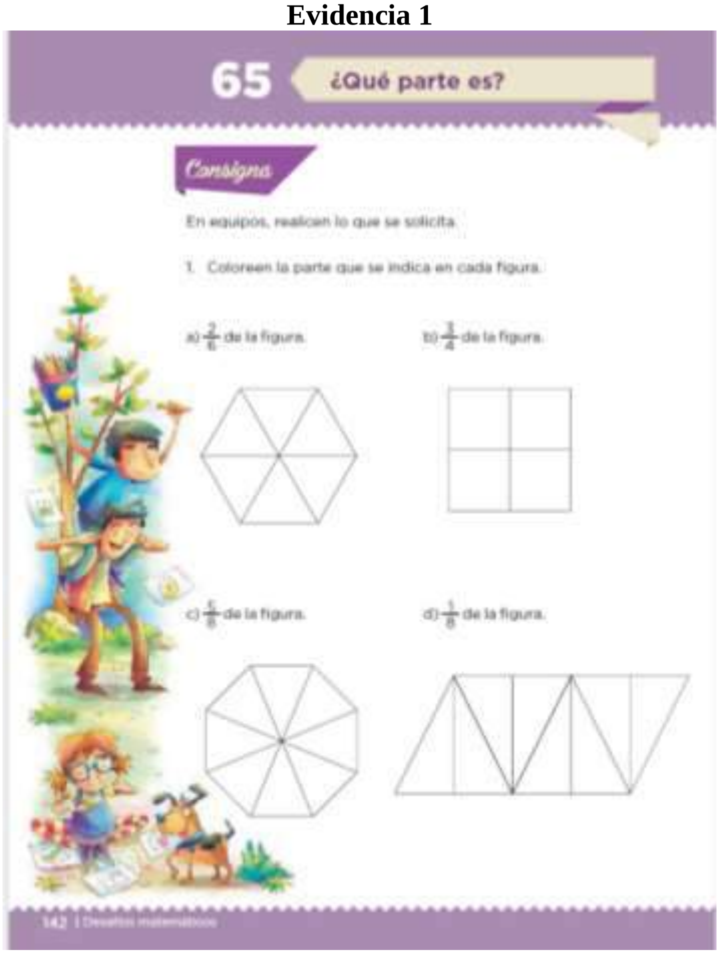
Descriptor / describe la cantidad de litros que tiene un recipiente.

Compara dichas cantidades para completar otra determinada cantidad de pintura.

Tabla 14 parte 1. Tercer año de primaria.

Datos de identificación	Datos de referencia
Nivel escolar: Primaria **Grado**: 3 **Libro**: Desafíos **Bloque**: V **Páginas**: 142, 143,144. **Lección**: 65, ¿Que parte es?	**Intención didáctica**: Que los alumnos analicen el significado de un número fraccionario para representarlo gráficamente o para referir con número una representación gráfica. **Contenido**: Elaboración e interpretación de representaciones gráficas de las fracciones. Reflexión acerca de la unidad de referencia. **Eje temático**: Sentido numérico y pensamiento algebraico. **Competencia que se favorece**: Resolver problemas de manera autónoma. **Aprendizaje esperado**: Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética.

Evidencia 1



65 ¿Qué parte es?

Consigna

En equipos, realicen lo que se solicita.

1. Coloreen la parte que se indica en cada figura.

a) $\frac{2}{6}$ de la figura.

b) $\frac{3}{4}$ de la figura.

c) $\frac{5}{8}$ de la figura.

d) $\frac{1}{8}$ de la figura.

142 | Desafíos matemáticos

Tabla 14 parte 2. Tercer año de primaria.

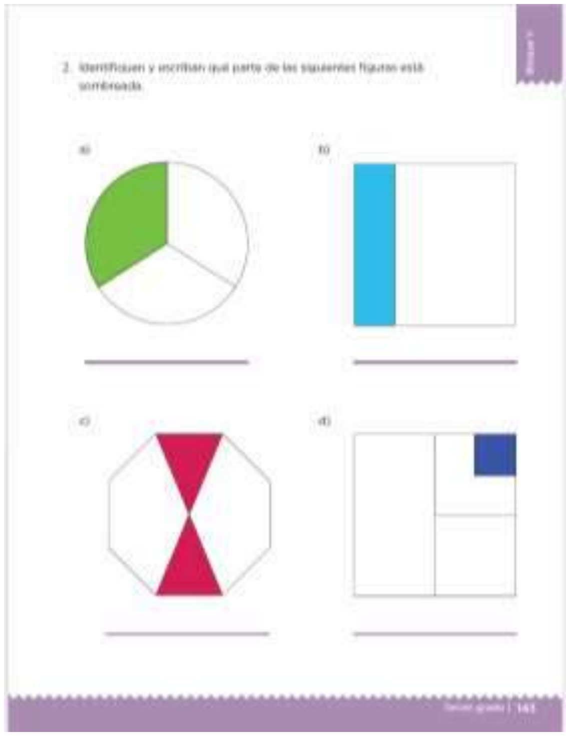
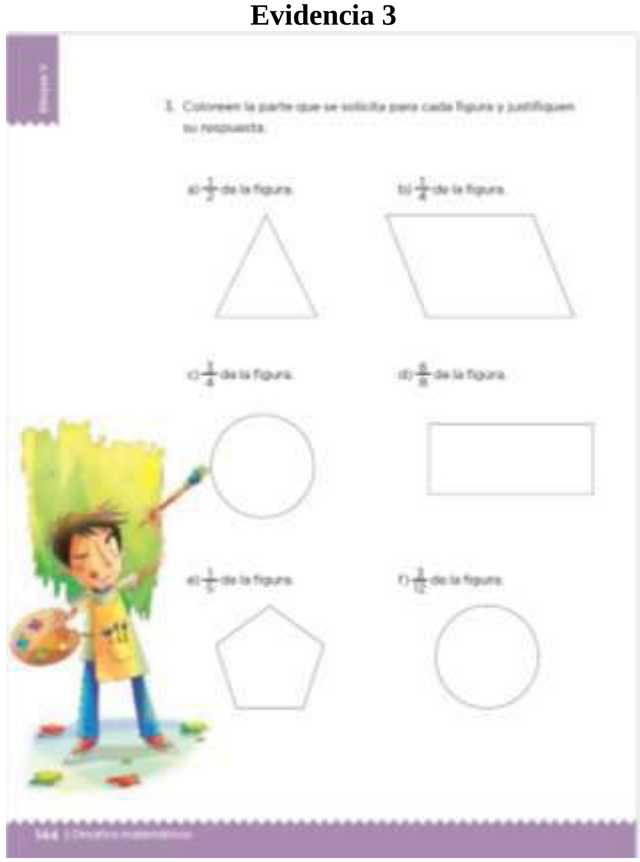
Evidencia 2

Evidencia 3


Tabla 14 parte 3. Tercer año de primaria.

Interpretación: Usos y aspectos de la fracción

La fracción actúa en el problema 1, 2 y 3 como:

- **Fracturador /** Relación de fractura en el 1 y 2. En el 3 operador fracturante.

El proceso de fractura es:
Simbólico, para dividir figuras geométricas y establecer relaciones de fractura.
El todo es:

- Continuo
- Definido
- Estructurado

La elección de las partes en P1 la tiene que definir el alumno, mientras que en P2 ya está definida.

Tabla 15 parte 1. Tercer año de primaria.

Datos de identificación	Datos de referencia
Nivel escolar: Primaria **Grado**: 3 **Libro**: Desafíos **Bloque**: V **Páginas**: 145.146,147. **Lección**: 66, ¿Cómo eres?	**Intención didáctica**: Que los alumnos usen la equivalencia de fracciones para identificarlas en representaciones gráficas, y que establezcan relaciones entre las partes y el todo. **Contenido**: Elaboración e interpretación de representaciones gráficas de las fracciones. Reflexión acerca de la unidad de referencia. **Eje temático**: Sentido numérico y pensamiento algebraico. **Competencia que se favorece**: Resolver problemas de manera autónoma. **Aprendizaje esperado**: Utiliza unidades de medida estándar para estimar y medir longitudes.

Evidencia 1

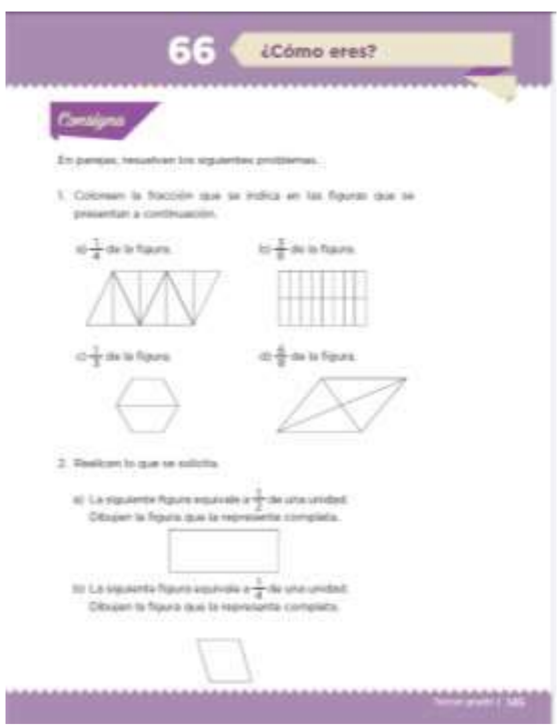
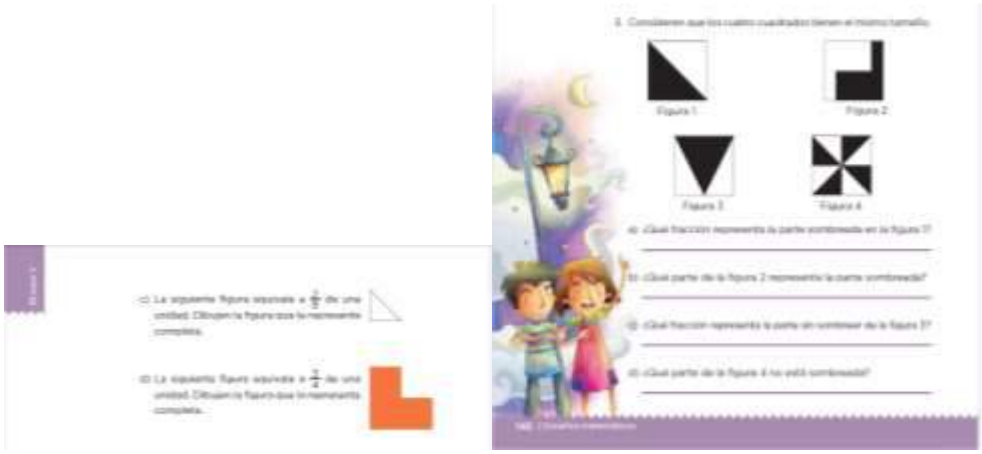
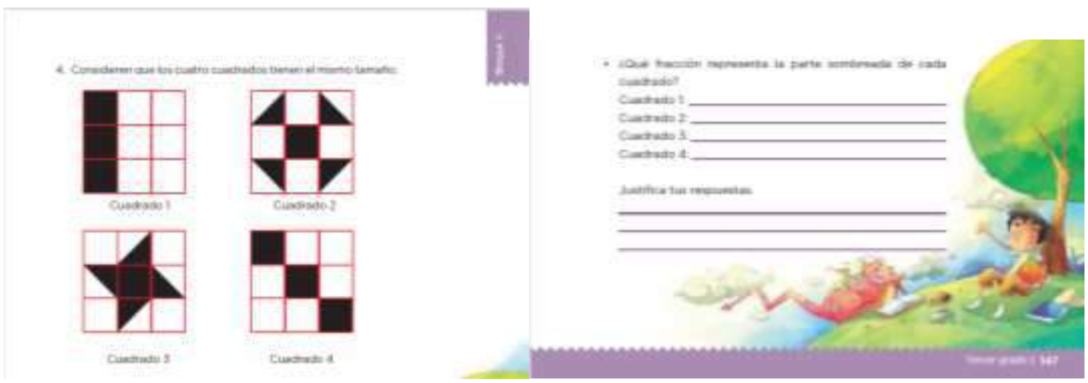


Tabla 15 parte 2. Tercer año de primaria.

Evidencia 2



Evidencia 3



Interpretación: Usos y aspectos de la fracción

<u>La fracción actúa en el problema 1, 2, 3 y 4 como:</u>

- **Fracturador /** En el problema 1, 3 y 4 Relación de fractura en el 2 operador fracturante.

El proceso de fractura es:

Simbólico, para dividir figuras geométricas y establecer relaciones de fractura de ($\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$,)

El todo es:

- Continuo
- Definido
- Estructurado

Tabla 16. Tercer año de primaria.

Datos de identificación	Datos de referencia
Nivel escolar: Primaria **Grado**: 3 **Libro**: Desafíos **Bloque**: V **Páginas**: 148 **Lección**: 67, ¿Estás seguro?	**Intención didáctica**: Que los alumnos usen procedimientos informales para resolver problemas aditivos con números fraccionarios. **Contenido**: Elaboración e interpretación de representaciones gráficas de las fracciones. Reflexión acerca de la unidad de referencia. **Eje temático**: Sentido numérico y pensamiento algebraico. **Competencia que se favorece**: Resolver problemas de manera autónoma. **Aprendizaje esperado**: Utiliza unidades de medida estándar para estimar y medir longitudes.

Evidencia

67 ¿Estás seguro?

Consigna

De manera individual, resuelve los siguientes problemas.

1. Ernesto hace moños con listones de colores. Tenía $\frac{3}{4}$ de metro de listón rojo y sólo ocupó $\frac{1}{4}$. ¿Cuánto listón le quedó?

2. Estela colecciona balones; los que aparecen en el dibujo representan $\frac{1}{3}$ de su colección. ¿Cuántos tiene en total?

3. Alma compró 2 litros de leche y ocupó $\frac{3}{4}$ de litro para preparar atole. ¿Cuánta leche le quedó?

148 | Desafíos matemáticos

Interpretación: Usos y aspectos de la fracción

La fracción actúa en el problema 1, como

- **Medida/** En el problema 1, 2 y 3 Relación de fractura

El proceso de fractura es:

Simbólico, para dividir fracciones y establecer relaciones de fractura de $(\frac{1}{3}, \frac{1}{4})$

El todo es:

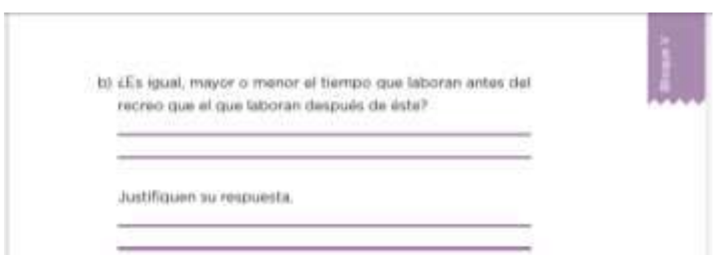
- Continuo
- Definido
- Estructurado

Tabla 17 parte 1. Tercer año de primaria.

Datos de identificación	Datos de referencia
Nivel escolar: Primaria **Grado**: 3 **Libro**: Desafíos **Bloque**: V **Páginas**: 150, 151,152. **Lección**: 69, Más fracciones	**Intención didáctica**: Que los alumnos usen la adición y la sustracción de fracciones para resolver problemas. Contenido: Resolución de problemas sencillos de suma o resta de fracciones (medios, cuartos, octavos). **Eje temático**: Sentido numérico y pensamiento algebraico. **Competencia que se favorece**: Resolver problemas de manera autónoma. **Aprendizaje esperado**: Utiliza unidades de medida estándar para estimar y medir longitudes.

Evidencia 1


69 Más fracciones


b) ¿Es igual, mayor o menor el tiempo que laboran antes del recreo que el que laboran después de éste?

Justifiquen su respuesta.

Tabla 17 parte 2. Tercer año de primaria.

<table>
<tr><td>

Evidencia 2

3. Para la fiesta de Luis, su mamá compró 3 pasteles medianos y los dividió en 8 partes iguales. Asistieron 10 niños y 9 niñas; a cada uno le dieron una rebanada de pastel.

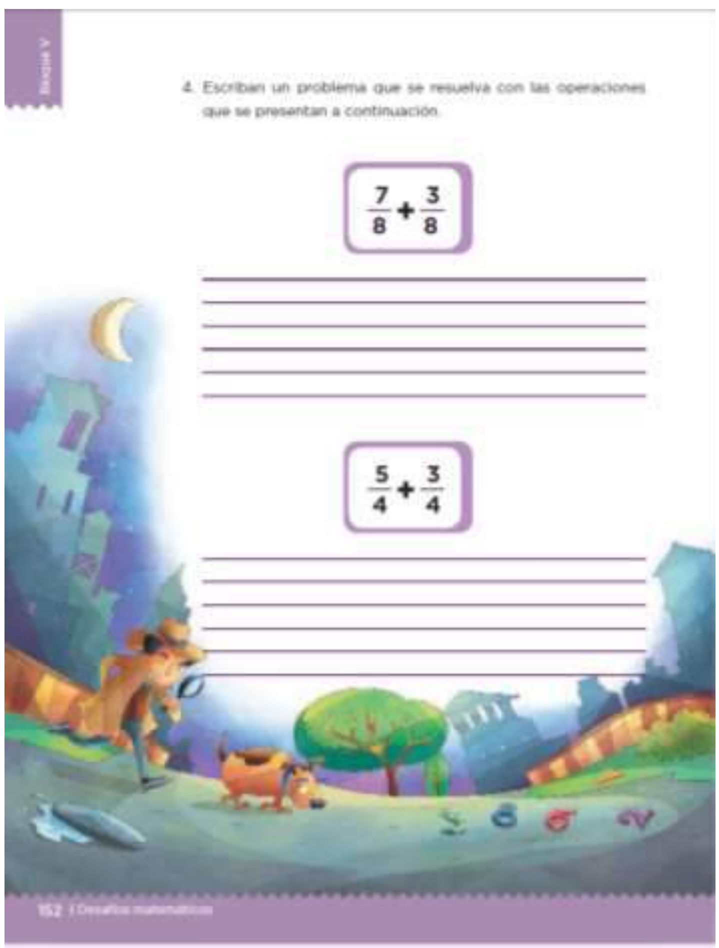
a) ¿Qué parte de un pastel le tocó a cada niño?

b) ¿Qué parte de un pastel sobró?

c) Escriban con fracciones las operaciones que utilizaron para saber las respuestas de las preguntas anteriores.

</td></tr>
<tr><td>

Evidencia 3



4. Escriban un problema que se resuelva con las operaciones que se presentan a continuación.

$\frac{7}{8}+\frac{3}{8}$

$\frac{5}{4}+\frac{3}{4}$

152 | Desafíos matemáticos

</td></tr>
</table>

Tabla 17 parte 3. Tercer año de primaria.

Evidencia 2
Interpretación: Usos y aspectos de la fracción La fracción actúa en el problema 1, 2 y 3 como: Fracturador / En el problema 1, 2 Y 3 como: Relación de fractura en el problema 4 como: operador fracturante. El proceso de fractura es: Simbólico, para repartir equitativamente horas y objetos y establecer relaciones de fractura de (1/2,1/4,1/8,) El todo es: Continuo Definido Estructurado

Anexo 2

CUESTIONARIO

Se presenta el conjunto de actividades, a manera de cuestionario que sirvieron para evaluar los conocimientos de los estudiantes antes y después de la intervención didáctica.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN GUERRERO

Escuela Primaria Urbana Federal
“Pedro Ascencio Alquisiras”
C.C.T. 12DPR599A

Nombre completo del alumno o (a):___________________________________

____

Lugar y fecha: ____

Grado y grupo: ____

Edad: ____

Lee con atención las siguientes preguntas del cuestionario y contesta cuidadosamente lo que se te pide.

CUESTIONARIO

1.- Hoy es el cumpleaños de Raúl y va a repartir su pastel en partes iguales entre él, su mamá, su papá, 3 hermanos y sus 6 amigos.

a) ¿Qué fracción del pastel debe comer cada uno para que no sobre pastel?

____

b) ¿Qué fracción del pastel le repartió Raúl en total a todos sus amigos?

____

c) ¿Qué fracción del pastel le repartió Raúl en total a todos sus hermanos?

____

d) ¿A quién le repartió más pastel Raúl, al grupo de sus amigos o al de sus hermanos?

____

¿Por qué?____

2.- En la explanada de la escuela se reunieron 12 profesores porque van a formar 3 equipos para vigilar a los niños durante el recreo, ¿cuántos profesores estarán en cada equipo?

Escribe tu respuesta____

3.- En una carrera compiten 3 personas, en el momento que Jaime observa la carrera los competidores se encuentran a diferente distancia de la meta: El competidor uno se encuentra a $\frac{1}{2}$ de la meta, el segundo competidor a $\frac{1}{4}$, y el tercero se encuentra a $\frac{1}{8}$. Representa en la imagen las posiciones de los competidores.

a) ¿Cuál de los competidores ha recorrido más? ¿Por qué?

____

b) Si en total la carrera es de 6 km, ¿cuántos kilómetros han recorrido cada competidor?

____

4.- Ana y Paty hacen diariamente un recorrido de 1 km en bicicleta por varias calles como entrenamiento para un maratón. Un día que estaban cansadas, Ana sólo recorrió $\frac{5}{8}$ de la ruta habitual, mientras que Paty recorrió $\frac{3}{4}$ de la ruta.

a) ¿Quién de las dos recorrió más?

____

b) ¿Cuánto más recorrió una que la otra?

____

5.- Pedro ha recorrido en bici 2 km, que representan $\frac{1}{4}$ del total que debe recorrer. ¿Cuántos kilómetros debe recorrer en total Pedro?

____

Has terminado el cuestionario de fracciones espero hayas leído muy bien las indicaciones. Hasta luego.

Anexo 3

ACTIVIDAD: LAS PULSERAS

El objetivo perseguido por esta secuencia fue reconocer los procesos que siguen los alumnos para hacer un reparto equitativo, así como conocer qué fracciones pueden surgir de manera espontánea en una situación donde se construye un sistema de medida que se emplea para medir objetos de distintas magnitudes. Se particulariza en el uso fracturador, se prioriza el proceso de fractura irreversible.

La situación se enmarca en el contexto de la construcción de pulseras, mediante la división de un listón en ocho partes iguales, cada una de estas partes debe ser usada para elaborar una pulsera.

Nombre: ____

No. De Lista: ____________________ Equipo: _______________________________

Contesta las siguientes preguntas de acuerdo con la indicación de tu maestra.

ACTIVIDAD I

Observen el listón que se les entregó, este listón lo llamaremos entero, y ese **un todo o una unidad** que van a dividir en partes iguales a lo largo de esta actividad.

A) Primero dividan el listón (entero) en dos partes iguales.

Escribe la fracción que representa cada parte del listón dividido.

____

B) Dibuja la imagen del listón entero y las partes divididas.

ACTIVIDAD II

Tomen cada una de las dos partes en que han divido el listón y vuélvanlas a dividir en dos partes iguales.

A) Escribe la fracción que representa este nuevo corte del total del listón entregado al equipo.

A) Dibuja la imagen del listón entero y las partes divididas.

ACTIVIDAD III

Como actividad final cada uno de los integrantes debe tener una pulsera del mismo tamaño elaborada con el listón que han cortado.

A) Explica lo qué tienen que hacer para obtener ocho pulseras del mismo tamaño.

B) ¿Qué parte del listón entero tiene la pulsera?

____

C) Dibuja la imagen del listón entero y las pulseras que se pueden hacer con él.

Anexo 4

ACTIVIDAD: EL REPARTO DE DULCES

Esta secuencia se diseñó con la intención de promover el uso fracturador en un todo discreto, esto es, cuando hay un conjunto de elementos que forman el todo. En este caso el proceso de fractura es reversible, se divide una bolsita con 24 dulces en diferentes partes iguales, pero se es capaz de volver a formar el todo, a diferencia del caso de la fractura del listón de la situación de las pulseras.

La situación se inscribe en el reparto de dulces, reunidos en equipo de 8 integrantes, reciben una bolsa que contiene 24 dulces, se plantean diferentes preguntas en las que dada la cantidad de dulces se les pregunta por la fracción que representan, y dada una fracción se les cuestiona sobre el número de dulces que equivalen a esa fracción.

ACTIVIDAD

Para esta actividad será retomada la distribución de los equipos que se establecieron en la actividad I “Las pulseras”. Se formarán cuatro equipos de ocho alumnos.

Reunidos en equipos, respondan las siguientes preguntas.

a) ¿En cuántas partes iguales tienes que dividir la bolsa de dulces para que a cada integrante le toque lo mismo?
b) ¿Cuántos dulces le corresponden a cada integrante?
c) Si dos integrantes juntan sus dulces, ¿Qué fracción del total de dulces representan?, ¿Por qué?
d) Si se juntan 8 dulces ¿Qué fracción del total de dulces representan?, ¿Por qué?
e) ¿A cuántos dulces equivale ½ del total?
f) Representen con los dulces la fracción ¼, y en la hoja de actividades dibujen la cantidad de cuartos que forman un entero.
g) ¿Es posible volver a formar el entero con los cuartos obtenidos? Si respondes si explica por qué.

Anexo 5

ACTIVIDAD: LOS ANIMALES DEL BOSQUE

Esta secuencia promueve el uso de la fracción como medida, para medir segmentos sobre la recta numérica.

ACTIVIDAD

En el interior del bosque viven tres animalitos: Una liebre, una rana y un grillo. Un día decidieron ir a tomar agua al otro lado de un puente que está cerca de su casa de cada uno de ellos. El puente mide 1.60 metros. El grillo se encuentra a 1/8 de cruzar el puente, la rana a ¼ y la liebre a ½.

a) Representa en la recta las posiciones de los animalitos del bosque.

b) ¿Cuál de los tres animalitos ha recorrido más distancia?, ¿por qué?

____

c) ¿Cuántos metros ha recorrido cada animalito?

____

d) ¿Qué fracción de distancia le falta a cada animalito para cruzar el puente?

____

UNA CARACTERIZACIÓN DE LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO FRACCIÓN EN TERCER AÑO DE PRIMARIA