



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

Unidad Académica de Matemáticas

Maestría en Matemáticas Aplicadas

Una generalización del modelo presa-depredador

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE :

Maestro en Matemáticas Aplicadas

PRESENTA:

Gabriel Catalán Angeles

ASESORES:

Dr. Jorge Sánchez Ortiz

Dr. Martín Patricio Árciga Alejandre

27 de abril de 2018

Índice general

1. Preliminares	3
1.1. Conceptos Básicos	3
1.2. Estabilidad	7
1.3. Método de Runge Kutta de cuarto orden (RK4)	10
1.4. Algunas propiedades importantes	11
1.5. Modelo Lotka-Volterra	17
1.6. Modelo Lotka-Volterra fraccionario	20
2. Aplicación del Método de la Perturbación Homotópica (MPH) al modelo Lotka-Volterra	22
2.1. Homotopía	22
2.2. Idea básica del MPH	23
2.3. Multipaso del Método de Perturbación Homotópica (MMPH)	24
2.4. Aplicación del MPH al modelo de crecimiento exponencial	24
2.5. Aplicación del MPH al modelo logístico	25
2.6. Aplicación del MPH al modelo Lotka-Volterra fraccionario	28
2.7. Aplicación del MMPH al modelo Lotka-Volterra	33
2.8. Error del MMPH aplicado en el modelo Lotka-Volterra	40
Referencias	41

Introducción

De antemano se sabe que ninguna especie vive aislada. El estudio de estas interacciones ha proporcionado uno de los modelos más interesantes en ecología, conocido como "modelo presa-depredador".

El primer tratado teórico de la dinámica de las poblaciones fue presentado por Malthus, «Ensayo sobre el principio de las poblaciones». Verhulst en su trabajo «La ecuación logística», formó un modelo matemático basado en el «Principio de la población». Otro resultado interesante fue presentado por Lotka y Vito, presentaron por primera vez las ecuaciones diferenciales del tipo presa-depredador. Esto ayudó, tanto a ecologistas como a matemáticos, a utilizar sistemas presa-depredador más complejos pero más realistas.

Recientemente, Boudjellaba y Sari estudiaron el modelo presa-depredador 3-dimensional, donde la dinámica del depredador es lenta en comparación con la presa. Por otra parte, Ahmed, El-Sayed y El-Saka, resolvieron el modelo presa-depredador fraccional y el modelo del conejo de orden fraccionario. Afirmaron que la estabilidad del sistema para el orden fraccionario es la misma que su homólogo de orden entero. Esto motivó a Das y Gupta encontrar una solución analítica aproximada al modelo histórico Lotka-Volterra para derivadas de tiempo fraccionario con la ayuda de métodos poderosos como el Método de la Perturbación Homotópica.

En el año 2009, Das, Gupta, y Rajeev, resolvieron el modelo presa-depredador fraccionario apoyándose del MPH tomando las constantes $a = b = c = d = 1$, en donde las constantes a , b , c y d representan los coeficientes en el sistema presa-depredador (Das y Gupta, 2011).

Además, se han estudiado como un caso particular al modelo Lotka-Volterra, el siguiente

sistema diferencial

$$\begin{aligned}D_+^\alpha x &= x(1 - y), \\D_+^\beta y &= y(-1 + x),\end{aligned}\tag{1}$$

donde $\beta = r\alpha$, con r un número natural (Pilar, Trujillo, Vazquez & Rivero, 2011).

En este trabajo, se presenta una solución aproximada obtenida al aplicar el Método de la Perturbación Homotópica al sistema

$$\begin{aligned}{}^cD_{0+}^\alpha x(t) &= ax(t) - bx(t)y(t) \\{}^cD_{0+}^\beta y(t) &= -cy(t) + dx(t)y(t),\end{aligned}\tag{2}$$

donde $\alpha, \beta \in (0, 1]$, a, b, c y d son constantes no negativas y ${}^cD_{0+}^\alpha, {}^cD_{0+}^\beta$ denotan la derivada fraccionaria del tipo Caputo, de orden α y β respectivamente.

Preliminares

Iniciamos este capítulo definiendo los conceptos de órbita, puntos de equilibrio, posteriormente mencionaremos el modelo Lotka -Volterra y por último damos a conocer las definiciones de derivación e integración fraccionaria del tipo Riemann-Liouville y Caputo, lo cual usaremos para generalizar el modelo Lotka-Volterra al caso fraccionario.

1.1. Conceptos Básicos

Definición 1. *Sea la ecuación diferencial*

$$X' = F(X). \tag{1.1}$$

Una órbita γ es el conjunto $\gamma = \{X(t) : t \in (\alpha, \omega)\}$, donde α, ω son constantes reales.

Definición 2. *El conjunto de órbitas se denomina espacio de fases de la ecuación diferencial.*

Definición 3. *Sea la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = F(y). \tag{1.2}$$

Diremos que el punto a tal que $F(a) = 0$ es punto de equilibrio de la ecuación (1.1).

Note que si $dy/dx = 0$, entonces $y(x) = a$ es una solución particular de (1.1).

Ejemplo 1. *Sea la ecuación diferencial $dx/dt = ax$. Entonces la solución general de esta ecuación es*

$$x(t) = ke^{at}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \text{ es una constante.}$$

El signo de a es crucial:

- Si $a > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} ke^{at}$ es igual a ∞ cuando $k > 0$, y $-\infty$ cuando $k < 0$.
- Si $a = 0$, ke^{at} es una constante.
- Si $a < 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} ke^{at} = 0$.

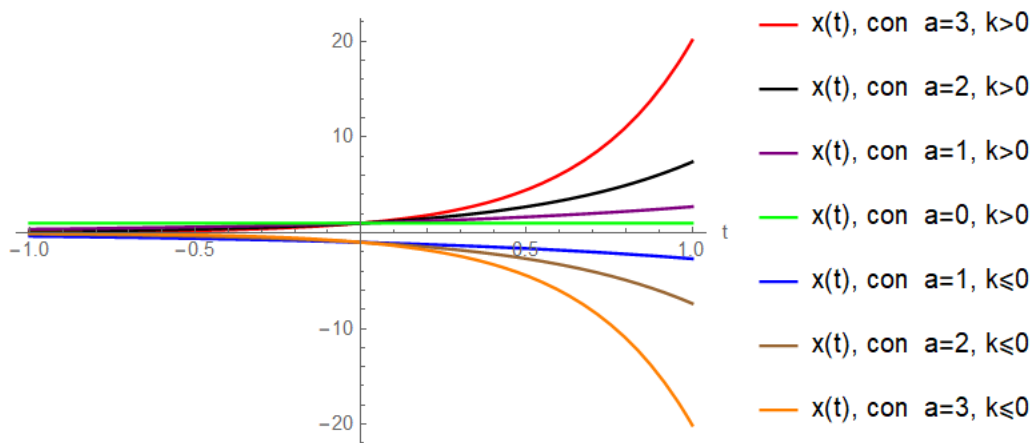


Figura 1.1: Gráfica de las curvas solución, $a \geq 0$.

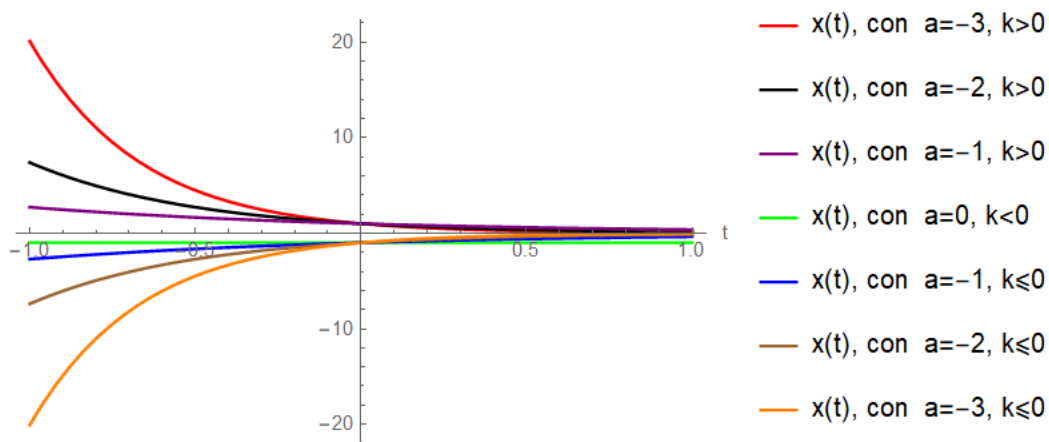


Figura 1.2: Gráfica de las curvas solución, $a \leq 0$.

Definición 4. Diremos que el punto de equilibrio es una fuente cuando las soluciones próximas a dicho punto, se alejan cuando $t \rightarrow \infty$.

Definición 5. El punto de equilibrio es un pozo cuando las soluciones próximas a dicho punto tienden hacia el punto, cuando $t \rightarrow \infty$.

Del ejemplo 1, note que el punto de equilibrio es la solución constante cero, lo cual, en la Fig. 1.1 es el caso de un punto de equilibrio fuente, mientras que en la Fig. 1.2 es un punto de equilibrio pozo.

Ahora definimos las nulclinas en un sistema diferencial.

Definición 6. *Sea un sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{aligned}x'_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n), \\x'_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n), \\&\dots \\x'_n &= f_n(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Las x_j - nulclinas es el conjunto de puntos donde $x'_j = 0$, es decir, las x_j - nulclinas es el conjunto de puntos determinado por $f_j(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Ejemplo 2. *Sea el sistema diferencial*

$$\begin{aligned}x' &= ax - bxy, \\y' &= -cy + dxy,\end{aligned}\tag{1.3}$$

en donde a, b, c y d son constantes positivas. Entonces las x -nulclinas son $x = 0$, $a - by = 0$ y las y -nulclinas son $y = 0$, $-c + dx = 0$.

Ahora, para definir un ciclo límite, necesitamos del concepto de órbita cerrada.

Definición 7. *Sea X la solución del sistema (1.1). Sea $T > 0$ un número mínimo que satisfice*

$$X(T + t) = X(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Se dice que $X(t)$ es una órbita cerrada o solución periódica del sistema (1.1) con periodo minimal T .

Definición 8. *Un ciclo límite es una órbita cerrada $\gamma \subset w(X)$ o $\gamma \subset \alpha(X)$ para algún X .*

Un caso posible de ciclo límite se ilustra en la siguiente figura.

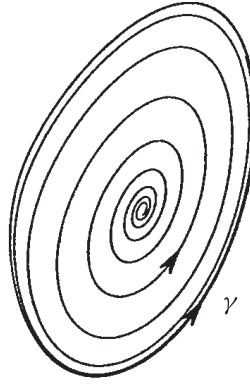


Figura 1.3: Solución que tiende a un ciclo límite.

En este caso, γ es llamado ω -ciclo límite o α -ciclo límite, respectivamente, según sea el caso. En el caso $w(X)$ se considera $t \rightarrow \infty$ y en $\alpha(X)$, $t \rightarrow -\infty$. Para nuestro propósito sólo consideraremos el caso $w(X)$.

Definición 9. *Un punto espiral es un punto de equilibrio aislado al cual todas las trayectorias vecinas convergen (pero no entran) o bien divergen (pero no salen).*

Corolario 1. *Sea γ un ω -ciclo límite. Si $w(X) = \gamma$, donde $X \notin \gamma$, entonces X tiene una vecindad O tal que $\gamma = w(Y)$, para todo $Y \in O$. En otras palabras, el conjunto*

$$\{Y | w(Y) = \gamma\} - \gamma$$

es abierto.

Demostración. Sea γ un ciclo límite y supongamos que $\phi_t(X)$ es una espiral hacia γ cuando $t \rightarrow \infty$. Sea S una sección en $Z \in \gamma$.

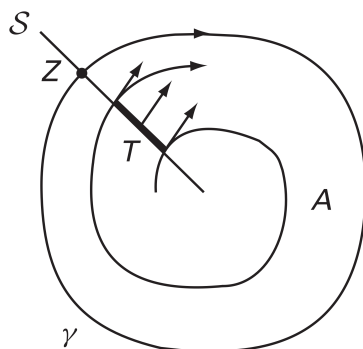


Figura 1.4: Se muestra la región A.

De la Figura 1.4 notamos que existe T tal que $T \subset S$ disjunto de γ , acotado por $\phi_{t_0}(X)$ y $\phi_{t_1}(X)$ con $t_0 < t_1$. No hay intersección entre T y X cuando $t \in (t_0, t_1)$. La región anular A que es acotado por γ y $T \cup \{\phi_t(X) | t_0 \leq t \leq t_1\}$ es invariante, así como es $O = A - \gamma$. Note que O es abierto. \square

Otro resultado se enuncia en la siguiente proposición.

Corolario 2. *Sea H una primera integral en un sistema plano. Si H no es constante en cualquier conjunto abierto, entonces no existe ciclo límite.*

Demostración. Supongamos que existe un ciclo límite γ . Sea $c \in \mathbb{R}$ un valor constante de H sobre γ . Si $X(t)$ es una solución de espirales hacia γ , entonces $H(X(t)) \equiv c$ por continuidad de H . Aplicando el Corolario 1 tenemos un conjunto abierto cuyas soluciones tienden a γ . Así H es constante en un conjunto abierto. \square

En la siguiente sección, daremos a conocer la estabilidad de Liapunov.

1.2. Estabilidad

El estudio del equilibrio juega una regla central en las ecuaciones diferenciales.

Un punto de equilibrio, debe satisfacer un cierto criterio para decidir si es estable, esto es:

Definición 10. *Un punto de equilibrio se dice estable si las soluciones cercanas permanecen cercanas para cualquier tiempo futuro.*

Un punto de equilibrio que no es estable, se dirá que es inestable.

Más precisamente, supongamos que X^* es un punto de equilibrio de la ecuación (1.1). Entonces X^* es estable si para cada vecindad V de X^* en \mathbb{R}^n existe una vecindad V_1 en V tal que cada solución $X(t)$ con $X(0) = X_0$, está definida y pertenece a V para todo $t > 0$.

Definición 11. *Del comentario anterior, si V_1 se puede elegir arbitrariamente, obtenemos que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = X^*.$$

Entonces diremos que X^ es asintóticamente estable.*

Un método para la determinación de la estabilidad de un punto de equilibrio se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 1 (Estabilidad de Liapunov). *Consideremos la ecuación (1.1). Sea X^* un punto de equilibrio. Sea $L : O \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un conjunto abierto O que contiene X^* . Supongamos además que:*

1. $L(X^*) = 0$ y $L(X) > 0$ si $X \neq X^*$.
2. $L' \leq 0$ en $O \setminus \{X^*\}$.

Se dice que X^ es estable. Si además satisface*

$$L' < 0, \text{ en } O \setminus \{X^*\} \tag{1.4}$$

entonces X^ es asintóticamente estable.*

Definición 12. *Una función L que satisface las condiciones 1 y 2 del Teorema 1 es llamada función de Liapunov. Si además satisface (1.3), L se llama función estricta de Liapunov.*

Ejemplo 3. *Construir una función de Liapunov para el sistema (1.3).*

Supongamos que L es de la forma

$$L(x, y) = F(x) + G(y).$$

Determinemos L' que denota la derivada de L respecto de t .

$$L'(x, y) = \frac{d}{dt}L(x(t), y(t)) = \frac{dL}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dL}{dy} \frac{dy}{dt}.$$

Como $x' = x(a - by)$ y $y' = y(-c + dx)$ se tiene que

$$L'(x, y) = x(a - by) \frac{dF}{dx} + y(-c + dx) \frac{dG}{dy}.$$

Por otra parte, sabemos que x y y son variables independientes. Encontramos la función $f(x, y)$ tal que

$$\frac{x}{dx - c} \frac{dF}{dx} = \frac{y}{by - a} \frac{dG}{dy} = f(x, y). \quad (1.5)$$

Puesto que,

$$\frac{x}{dx - c} \frac{dF}{dx} = f(x, y)$$

implica que $f(x, y) = f_1(x)$, donde $f_1(x)$ es una función que sólo depende de x pues x y y son independientes. Análogamente, para el caso de y existe una función $f_2(y)$ que sólo depende de y tal que $f(x, y) = f_2(y)$. Pero $f_1(x) = f_2(y)$ por (1.5), lo cual se cumple si $f(x, y)$ es una constante. Supongamos que $f(x, y) = 1$. Obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= d - \frac{c}{x}, \\ \frac{dG}{dy} &= b - \frac{a}{y}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Al integrar resulta que

$$\begin{aligned} F(x) &= dx - c \log(x), \\ G(y) &= by - a \log(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$L(x, y) = dx - c \log(x) + by - a \log(y). \quad (1.7)$$

Además, de (1.5) se sigue que $L' \equiv 0$. Es decir, $L(x, y)$ es una función constante para valores de x, y positivos, según la igualdad (1.7).

Observación 1. La función L dada en (1.7) tiene un mínimo absoluto en $(c/d, a/b)$.

Demostración. Del sistema (1.6) se sigue que

$$\left. \frac{\partial L}{\partial x} \right|_{x=c/d} = \left. \frac{\partial L}{\partial y} \right|_{y=a/b} = 0.$$

Por otra parte,

$$\frac{dF}{dx} < 0 \text{ si } x < \frac{c}{d} \text{ y } \frac{dF}{dx} > 0 \text{ si } x > \frac{c}{d}.$$

Luego,

$$\frac{dG}{dy} < 0 \text{ si } y < \frac{a}{b} \text{ y } \frac{dG}{dy} > 0 \text{ si } y > \frac{a}{b}.$$

Por lo tanto, $(c/d, a/d)$ es un mínimo absoluto de L . □

Enseguida se da a conocer una propiedad importante para las funciones de Liapunov estricto.

Corolario 3. *Si L es una función de Liapunov estricto en un sistema plano, entonces no existe ciclo límite.*

Demostración. Si L es una función de Liapunov estricto, entonces $L' < 0$. Es decir, L no es constante, por lo tanto, aplicando el Corolario 2 no existe ciclo límite. □

Antes de expresar algunos conceptos y propiedades propias del cálculo fraccionario, las cuales serán aplicadas en el desarrollo del Capítulo 3, mencionamos uno de los métodos para aproximar la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias, el método de Runge Kutta.

1.3. Método de Runge Kutta de cuarto orden (RK4)

Uno de los procedimientos más exactos para obtener soluciones aproximadas del problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

es el método de Runge Kutta de cuarto orden.

La fórmula utilizada para este método consiste en calcular la nueva aproximación y_{n+1} (no se debe olvidar que la variable independiente es t y la variable dependiente es y) de la siguiente manera:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

donde h es el paso por iteración y

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_1}{2}\right), \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_2}{2}\right), \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3). \end{aligned}$$

Ejemplo 4. *La ecuación diferencial*

$$\frac{dx}{dt} = ax \left(1 - \frac{x}{N} \right), \text{ tal que } x(t_0) = x_0 \quad (1.8)$$

tiene como solución general

$$x(t) = \frac{N}{1 + Ae^{-at}}. \quad (1.9)$$

Dados $a = 1$, $N = 40$ y tomando distintos casos de x_0 no negativos, vamos a graficar las curvas solución de (1.8) y la solución aproximada generada al aplicar el método de RK4 para $t \in [0, 8]$.

Notemos que la ecuación diferencial (1.8) tiene un punto de equilibrio pozo en $x = 40$. En la Figura 1.5 nos da una idea de este hecho.

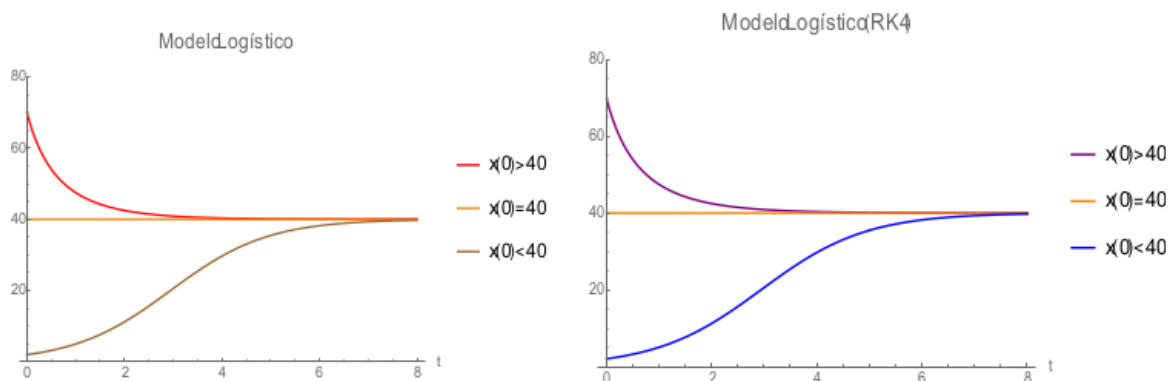


Figura 1.5: Gráficas de la curva solución del modelo logístico.

1.4. Algunas propiedades importantes

En esta sección definimos los operadores de derivación e integración del tipo Riemann Liouville y de Caputo. Así como también damos a conocer algunas propiedades importantes como la propiedad de semigrupo de la integral fraccionaria, entre otros.

Definición 13. *La función $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

se conoce como función Gamma de Euler.

Ejemplo 5. *Demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n + 1) = n!$.*

Demostración. La demostración se hará por inducción matemática.

Por Definición 13 se tiene

$$\Gamma(2) = \int_0^{\infty} te^{-t} dt.$$

Haciendo integración por partes $u = t$ y $v = -e^{-t}$ tenemos

$$\Gamma(2) = -te^{-t} \Big|_{\tau=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_{\tau=0}^{\infty} = 1.$$

Supongamos que se cumple para todo k menor igual que n , es decir, se cumple:

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Luego,

$$\Gamma(n+2) = \int_0^{\infty} t^{n+1} e^{-t} dt.$$

Nuevamente integrando por partes, $u = t^{n+1}$ y $v = -e^{-t}$ tenemos

$$\Gamma(n+2) = -te^{-t} \Big|_{\tau=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} (n+1)t^n e^{-t} dt = (n+1) \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = (n+1)n! = (n+1)!.$$

Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\Gamma(n+1) = n!$. □

Teorema 2. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (1.10)$$

Demostración. Note que

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{\infty} s^{x-1} e^{-s} ds \int_0^{\infty} t^{y-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} s^{x-1} t^{y-1} e^{-s-t} ds dt.$$

Luego, haciendo el cambio de variable $s = u^2$, $t = v^2$ obtenemos

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} u^{2(x-1)} v^{2(y-1)} e^{-u^2-v^2} uv dudv = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} u^{2x-1} v^{2y-1} e^{-u^2-v^2} dudv.$$

Ahora usando coordenadas polares $u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$ se tiene:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{2(x+y-1)} (\cos \theta)^{2x-1} (\sin \theta)^{2y-1} e^{-r^2} r d\theta dr.$$

Haciendo otro cambio de variable $t = r^2$ llegamos a que

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{x+y-1} (\cos \theta)^{2x-1} (\sin \theta)^{2y-1} e^{-t} d\theta dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} t^{x+y-1} e^{-t} dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2x-1} (\sin \theta)^{2y-1} d\theta \\ &= \Gamma(x+y) \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2x-1} (\sin \theta)^{2y-1} d\theta \right). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Por otra parte, sabemos que $\cos^2\theta + \sen^2\theta = 1$, entonces

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2x-1} (\sen \theta)^{2y-1} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \cos^2\theta)^y (\cos^2\theta)^x}{1 - \cos^2\theta} (-\sen \theta \cos \theta) d\theta.$$

Si $w = \cos^2\theta$ se sigue que

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \cos^2\theta)^y (\cos^2\theta)^x}{1 - \cos^2\theta} (-\sen \theta \cos \theta) d\theta = \int_1^0 \frac{(1-w)^y w^x}{-(1-w)w} dw.$$

Por último, sea $t = 1 - w$. Entonces

$$\int_1^0 \frac{(1-w)^y w^x}{-(1-w)w} dw = \int_0^1 \frac{t^y (1-t)^x}{t(1-t)} dt = \int_0^1 t^{y-1} (1-t)^{x-1} dt.$$

Se sigue que

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2x-1} (\sen \theta)^{2y-1} d\theta = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt. \quad (1.12)$$

Por lo tanto, por (1.11) se tiene que

$$\int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

□

La siguiente definición es una generalización de la función exponencial.

Definición 14. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{R}(\alpha) > 0$. La función de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ se define como

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

Note que $E_1(z) = e^z$.

Las siguientes definiciones son conocidas como integrales fraccionaria izquierda y derecha de Riemann-Liouville.

Definición 15. Sea $\Omega = [a, b]$ donde $(-\infty < a < b < \infty)$ un intervalo en el eje real. La integral fraccionaria de Riemann-Liouville, denotada por I_{a+}^α de orden $\alpha \in \mathbb{C}$, ($\mathcal{R}(\alpha) > 0$) se define por

$$(I_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a, \quad (1.13)$$

donde Γ es la función Gamma. Esta integral es conocida como integral derecha fraccionaria.

Por otra parte, bajo las mismas hipótesis, se define la integral izquierda fraccionaria de Riemann-Liouville $(I_{b-}^\alpha f)(x)$ como sigue

$$(I_{b-}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b. \quad (1.14)$$

Ejemplo 6. Sea $f(x) = x^\gamma$, tal que $x \in \mathbb{R}$, $\gamma > -1$ y $\alpha > 0$. Entonces

$$(I_{0+}^\alpha f)(x) = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\alpha + \gamma + 1)} x^{\alpha + \gamma}. \quad (1.15)$$

Demostración. Por Definición 15 tenemos que

$$(I_{0+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^\gamma dt.$$

Haciendo el cambio de variable $s = t/x$ obtenemos

$$\begin{aligned} (I_{0+}^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-xs)^{\alpha-1} (xs)^\gamma x ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} x^{\alpha-1} x^\gamma x s^\gamma ds \\ &= \frac{x^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^\gamma ds. \end{aligned}$$

Luego, aplicando el Teorema 2 a la última igualdad se tiene:

$$(I_{0+}^\alpha f)(x) = \frac{x^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \right] = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma}.$$

□

Definición 16. Bajo las mismas condiciones que en la Definición 15, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, denotada por D_{a+}^α se define como

$$(D_{a+}^\alpha f)(x) = D(I_{a+}^{1-\alpha} f)(x), \quad (x > a). \quad (1.16)$$

Definición 17. Sean $\alpha \in (0, 1]$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, f una función real adecuada (por ejemplo $f \in L_1(a, b)$). La derivada fraccionaria de Caputo está definida por

$${}^c D_{0+}^\alpha f(x) = (I_{a+}^{1-\alpha} Df)(x), \quad x > a,$$

esto es,

$${}^c D_{0+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a+}^x \frac{f'(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad (\tau > a).$$

Observación 2. Sea k una constante y $\alpha > 0$. Entonces

$${}^c D_{a+}^\alpha k = 0 \quad \text{y} \quad I_{a+}^\alpha k = \frac{k(t-a)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}. \quad (1.17)$$

Demostración. De antemano se sabe que la derivada de orden entero de una constante k es cero. Luego por Definición 17 se tiene que

$${}^c D_{a+}^\alpha k = I_{a+}^{1-\alpha} 0 = 0.$$

Por otra parte, aplicando la Definición 15 tenemos

$$I_{a+}^\alpha k = \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau = \frac{-k(t - \tau)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \Big|_{\tau=a}^{\tau=t} = \frac{k(t - a)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}.$$

□

Observación 3. *La integral y derivada fraccionarias de Riemann-Liouville y la derivada fraccionaria de Caputo son operadores lineales.*

Antes de presentar el siguiente resultado, es necesario definir el conjunto $L_p(a, b)$.

Definición 18. *Sea $\Omega = [a, b]$, $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ un intervalo finito o infinito en \mathbb{R} . Denotamos por $L_p(a, b)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ el espacio de funciones medibles de Lebesgue sobre Ω que cumplen que $\|f\|_p < \infty$, donde*

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

El siguiente resultado es conocido como la propiedad de semigrupo de la integración fraccionaria.

Teorema 3. *Sean $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $p \geq 1$ tal que $\alpha + \beta < 1/p$. Si $f(x) \in L_p(a, b)$, entonces*

$$\begin{aligned} (I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta f)(x) &= (I_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x), \\ (I_{b-}^\alpha I_{b-}^\beta f)(x) &= (I_{b-}^{\alpha+\beta} f)(x), \end{aligned} \tag{1.18}$$

en casi todo $[a, b]$.

Demostración. Por Definición 15

$$(I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} dt \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t - \tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau.$$

Ahora, aplicando el Teorema de Fubini tenemos

$$\begin{aligned} (I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_\tau^x (x - t)^{\alpha-1} (t - \tau)^{\beta-1} f(\tau) dt d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau) \int_\tau^x (x - t)^{\alpha-1} (t - \tau)^{\beta-1} dt d\tau. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $t = \tau + u(x - \tau)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
(I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau) \int_0^1 [(1-u)(x-\tau)]^{\alpha-1} [u(x-\tau)]^{\beta-1} (x-\tau) dt d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau) (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du \int_a^x f(\tau) (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau.
\end{aligned}$$

Aplicando el Teorema 2 en la última igualdad se tiene que

$$\begin{aligned}
(I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \right) \int_a^x f(\tau) (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(\tau) (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau \\
&= (I_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x).
\end{aligned}$$

La demostración de la segunda ecuación es análoga, tomando el cambio de variable $t = \tau + u(b - \tau)$. □

Observación 4. *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 3, se tiene que:*

$$\begin{aligned}
(I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f)(x) &= (I_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f)(x), \\
(I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} f)(x) &= (I_{b-}^{\beta} I_{b-}^{\alpha} f)(x).
\end{aligned}$$

Demostración. Del Teorema 3 se sigue que

$$(I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f)(x) = (I_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x) = (I_{a+}^{\beta+\alpha} f)(x) = (I_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f)(x).$$

La prueba de la segunda igualdad es análoga. □

Teorema 4. *Sea $f \in L_1(a, b)$ y $\alpha \in (0, 1]$. Si $f \in AC[a, b]$ o $f \in C[a, b]$, entonces*

$$(I_{a+}^{\alpha} {}^c D_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) - f(a). \tag{1.19}$$

Demostración. De la Definición 17 y el Teorema 3 se tiene que

$$\begin{aligned}
(I_{a+}^{\alpha} {}^c D_{a+}^{\alpha} f)(x) &= (I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{1-\alpha} {}^c D_{a+}^{\alpha} f)(x) = (I_{a+}^1 Df)(x) \\
&= \int_a^x \frac{f(t)}{dt} dt = f(x) - f(a).
\end{aligned}$$

□

1.5. Modelo Lotka-Volterra

Se parte de las siguientes hipótesis:

- La especie depredadora sólo se alimenta de la especie presa, mientras que ésta se nutre de un recurso que se encuentra en el hábitat en grandes cantidades.
- Los parámetros de edad y sexo no se cuentan.
- Las características son las mismas en todo el hábitat.
- La probabilidad de interacción entre las especies presa y depredador es la misma.

Por lo que sólo existen dos variables: el tamaño poblacional de la especie depredadora y y el de la especie presa x , que dependen únicamente del tiempo. Por lo tanto, si no existen depredadores, la población de presas crecería, mientras que sino hubiese presas, la especie depredadora decrecería, esto es,

$$x'(t) = ax(t), \quad y'(t) = -cy(t). \quad (1.20)$$

Ahora bien, como ambas especies conviven en un mismo tiempo y se relacionan es necesario modificar ambas ecuaciones con un término que dependa de la interacción, beneficiosa para depredadores, desfavorable para presas, razón por la cual se toma con signo negativo en el crecimiento de presas y positivo para los depredadores

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t), \\ y'(t) &= -cy(t) + dx(t)y(t) \end{aligned} \quad (1.21)$$

donde a , b , c y d son constantes no negativas.

Significado de los parámetros:

- **a** representa la tasa instantánea de aumento de presas en ausencia de depredadores.
- **c** es la tasa instantánea de disminución de depredadores en el caso de ausencia de presas.
- **b** mide la susceptibilidad de las presas respecto a la interacción con los depredadores.
- **d** mide la capacidad de depredación de las presas.

Por otra parte, note que los puntos de equilibrio del sistema (1.21) están dados por los puntos $(0, 0)$ y $(c/d, a/b)$, pues el sistema linealizado de (1.21) es de la forma

$$X' = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix} X, \text{ tal que } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo el punto de equilibrio $(0, 0)$ en la matriz anterior y calculando los eigenvalores encontramos que son a y $-c$. Como a y c son positivos entonces tenemos una silla. Los eigenvectores respectivos son los ejes x e y . Estamos en el caso de un punto de equilibrio inestable. Ahora, evaluando $(c/d, a/b)$ en la matriz del sistema y determinando los eigenvalores obtenemos $\pm\sqrt{ac}$, pero aún no podemos decidir la estabilidad de este punto.

Haremos un bosquejo de las nulclinas de este sistema, las cuales se han determinado en el Ejemplo 2.

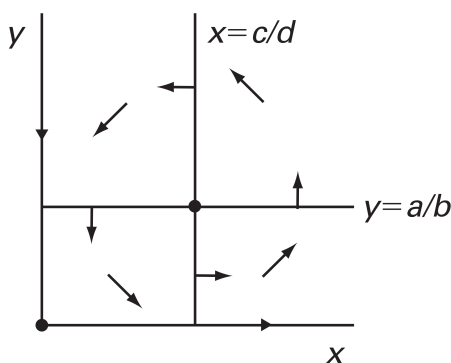


Figura 1.6: Nulclinas no cero del sistema presa-depredador.

Note que las nulclinas no cero dividen la región $x, y > 0$ en cuatro regiones básicas. Podemos pensar que las soluciones giran en dirección contraria del movimiento de las manecillas del reloj, alrededor del punto de equilibrio. Necesitamos saber exactamente cual es el caso: espiral hacia el punto de equilibrio, espiral hacia un ciclo límite, espiral que tiende a ∞ que pasa a través de los ejes coordenados o posiblemente es una órbita cerrada.

La respuesta se expresa en el siguiente teorema.

Teorema 5. *Cada solución del sistema presa-depredador es una órbita cerrada (excepto el punto de equilibrio Z y los ejes coordenados).*

Demostración. Consideremos la solución W , $W \neq Z$ que no pasa en el eje x ni en el eje y . Esta solución es espiral que gira alrededor de Z , cruzando cada nulclina de manera infinita. Esto nos lleva a una doble sucesión infinita

$$t_0 > t_{-1} > t_{-2} > \dots ,$$

$$t_0 < t_{-1} < t_{-2} < \dots ,$$

tal que $\phi_{t_n}(W)$ pertenece a la línea $x = c/d$ y $t_n \rightarrow \pm\infty$ cuando $n \rightarrow \pm\infty$. Si W no es una órbita cerrada, la sucesión $\phi_{t_n}(W)$ es monótona en $x = c/d$. Del Corolario 3 sabemos que no existe ciclo límite, entonces $\phi_{t_n}(W) \rightarrow Z$ cuando $n \rightarrow \infty$ ó cuando $n \rightarrow -\infty$.

Ahora, del Ejemplo 3 se sigue que L es constante en W , entonces $L(W) = L(Z)$. Pero esto contradice el hecho de la minimalidad de $L(Z)$ dada en la Observación 1.

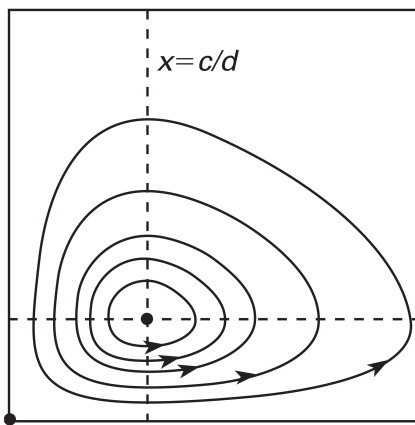


Figura 1.7: El retrato de fase del sistema presa-depredador es una órbita cerrada.

Por lo tanto, W es una órbita cerrada.

□

Ejemplo 7. Sea la condición inicial $x_0 = 3$ y $y_0 = 1$. Entonces el retrato de fase del sistema

$$\begin{aligned} x' &= 0.4x - 0.37xy, \\ y' &= -0.3y + 0.05xy, \end{aligned} \tag{1.22}$$

está dado por lo siguiente.

Aplicando el Método de Runge Kutta con $h = 0.01$ y $t \in [0, 60]$ graficamos la curva parametrizada:

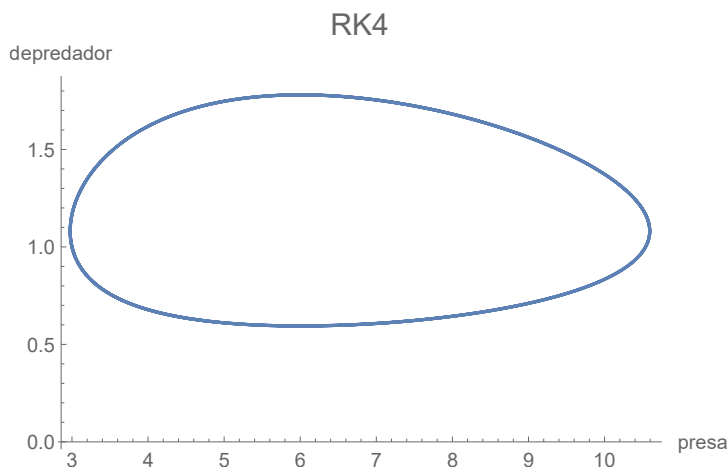


Figura 1.8: Retrato de fase del sistema 1.22 obtenida al aplicar RK4.

Nótese que es una órbita cerrada. Esto es, las funciones x y y son funciones periódicas respecto a t , que se ha demostrado en el Teorema 5.

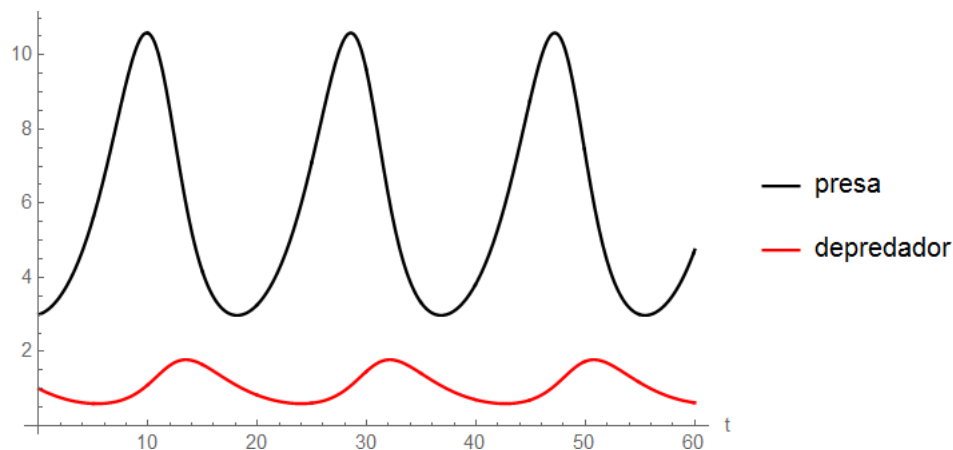


Figura 1.9: Funciones periódicas.

1.6. Modelo Lotka-Volterra fraccionario

Los sistemas complejos (vidrios, cristales líquidos, ecosistemas, etc.) se caracterizan por presentar un gran número de elementos unitarios que interaccionan entre ellos, lo que hace

que estos sistemas manifiesten una evolución anómala en el tiempo.

Entonces como alternativa para resolver estas desventajas aparecen las ecuaciones fraccionarias, con las propiedades de no localidad y memoria. Sin embargo, quedan aún abiertas cuestiones como qué definición de derivada fraccionaria es mejor usar.

Por otra parte, sabemos que la solución del sistema (1.20) está dada por las expresiones:

$$x(t) = C_1 e^{at}, \quad y(t) = C_2 e^{-ct} \quad (1.23)$$

lo cual implica que la evolución de las poblaciones en el tiempo sigue una ley exponencial clásica.

Pero es posible encontrar poblaciones tal que su crecimiento no verifican el modelo ordinario, por ejemplo el crecimiento descontrolado de las células cancerígenas, el lento crecimiento de la población humana en situaciones como la guerra, epidemias, etc., lo que nos lleva a pensar que se trata una ley exponencial pero no necesariamente como la clásica, más bien como exponenciales generalizadas.

Por ejemplo, las poblaciones x e y podrían crecer como exponenciales generalizadas:

$$x(t) = C_1 E_\alpha(at^\alpha), \quad y(t) = C_2 E_\alpha(-ct^\alpha). \quad (1.24)$$

Considerar el sistema anterior es equivalente a introducir una derivada fraccionaria de Caputo en (1.20), esto es,

$${}^c D_{0+}^\alpha x(t) = ax(t), \quad {}^c D_{0+}^\alpha y(t) = -cy(t). \quad (1.25)$$

Llegamos entonces al modelo fraccionario generalizado siguiente:

$$\begin{aligned} {}^c D_{0+}^\alpha x(t) &= ax(t) - bx(t)y(t) \\ {}^c D_{0+}^\beta y(t) &= -cy(t) + dx(t)y(t), \end{aligned} \quad (1.26)$$

donde $\alpha, \beta \in (0, 1]$, a, b, c y d son constantes no negativas y ${}^c D_{0+}^\alpha, {}^c D_{0+}^\beta$ denotan la derivada fraccionaria del tipo Caputo, de orden α y β respectivamente.

Aplicación del Método de la Perturbación Homotópica (MPH) al modelo Lotka-Volterra

Comenzamos este capítulo definiendo una homotopía. Luego, damos una idea general de Método de la Perturbación Homotópica. Posteriormente aplicaremos este método para resolver al modelo exponencial y logístico. Por último, mediante este método, aproximamos la solución del modelo Lotka-Volterra fraccionario.

2.1. Homotopía

Definición 19. Sean $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ dos funciones continuas cualesquiera. Una homotopía de f_0 a f_1 es una función continua

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

tal que para cualquier $x \in X$ se tiene

$$H(x, 0) = f_0(x),$$

$$H(x, 1) = f_1(x).$$

En tal caso se dice que f_0 es homotópica a f_1 .

Ejemplo 8. Sean $f_0(x) = x^2$ y $f_1(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

Construimos una homotopía $H : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$H(x, p) = (1 - p)f_0(x) + pf_1(x).$$

Es decir,

$$H(x, p) = (1 - p)x^2 + px.$$

Note que

$$H(x, 0) = x^2 = f_0(x), \quad H(x, 1) = x = f_1(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.2. Idea básica del MPH

Consideremos la siguiente ecuación diferencial no lineal

$$A(u) - f(r) = 0, \tag{2.1}$$

$r \in \Omega$, con condiciones de frontera $B(u, \partial u / \partial n) = 0, r \in \Gamma$, donde A es un operador diferencial general, B es un operador de frontera, $f(r)$ es una función analítica conocida, Γ es la frontera de Ω .

El operador A puede ser dividido en dos partes, L y N , donde L es lineal y N es no lineal. Por lo tanto la ecuación (2.1) podemos reescribirla como sigue:

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0.$$

Construimos una homotopía $v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, \tag{2.2}$$

donde $p \in [0, 1]$ es un parámetro, $r \in \Omega$ y u_0 es una aproximación inicial de (2.2) que satisface las condiciones de frontera. Asumimos que la solución de la ecuación (2.2) puede ser escrita como una serie de potencias en p :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots$$

Haciendo que p tienda a 1, la solución aproximada de (2.1) es

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

2.3. Multipaso del Método de Perturbación Homotópica (MMPH)

Sea $[a, b]$ un intervalo. Hacemos una partición $P = \{t_0 = a, t_1, t_2, \dots, t_n = b\}$ de $[a, b]$, tal que

$$t_k = t_0 + k\Delta t, \text{ para cada } k = 1, \dots, n \text{ y } \Delta t = \frac{b-a}{n}.$$

Sea $u_1(t)$ la solución obtenida al aplicar el MPH en $[t_0, t_1]$, con aproximación inicial u_0 que se ha elegido de antemano. Ahora bien, tomamos como aproximación inicial $u_1(t_1)$ para generar la solución $u_2(t)$ en $[t_1, t_2]$ aplicando el mismo método. Siguiendo el mismo razonamiento generamos la solución $u_k(t)$ en $[t_{k-1}, t_k]$ considerando como aproximación inicial $u_{k-1}(t_{k-1})$. Luego, como

$$\bigcup_{k=1}^n [t_{k-1}, t_k] = [a, b],$$

se sigue que la solución en $[a, b]$ es de la forma

$$x(t) = u_k(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \text{ para cada } k = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

2.4. Aplicación del MPH al modelo de crecimiento exponencial

Tomamos como ejemplo mas simple la ecuación diferencial

$$x' = ax, \quad x(0) = x_0.$$

Construimos la siguiente homotopía

$$(1-p)(v' - x'_0) + p(v' - av) = 0, \quad p \in [0, 1].$$

Despejando v' en la igualdad anterior obtenemos

$$v' = apv. \quad (2.4)$$

Supongamos que la solución en (2.4) es

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots, \quad x_0 = v_0. \quad (2.5)$$

Ahora, sustituyendo (2.5) en (2.4) y agrupando potencias de p obtenemos

$$v'_{n+1} = av_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Luego,

$$v_n = x_0 \frac{(at)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

Entonces

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} p^k v_k = \sum_{k=0}^{\infty} v_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_0 (at)^k}{k!} = x_0 e^{at}.$$

2.5. Aplicación del MPH al modelo logístico

Consideremos la ecuación diferencial (1.8). Construimos la siguiente homotopía

$$(1-p)(v' - x'_0) + p\left(v' - av + \frac{a}{N}v^2\right) = 0, \quad p \in [0, 1].$$

La ecuación anterior se reduce a

$$v' = pv - pv^2. \quad (2.7)$$

Supongamos que la solución de la ecuación (2.7) es de la forma

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots, \quad x_0 = v_0. \quad (2.8)$$

Sustituimos la ecuación (2.8) en (2.7) y agrupando potencias de p obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} p^i v'_i &= a \sum_{i=0}^{\infty} p^{i+1} v_i - \frac{a}{N} \left[v_0^2 + p(2v_0v_1) + p^2(2v_0v_2 + v_1^2) + p^3 \sum_{j=0}^3 v_j v_{3-j} \right. \\ &\quad \left. + \dots + p^k \sum_{j=0}^k v_j v_{k-j} + \dots \right]. \end{aligned}$$

De la ecuación anterior, formamos las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
v'_0 &= 0, \\
v'_1 &= av_0 - \frac{a}{N}v_0^2, \\
v'_2 &= av_1 - \frac{a}{N}(2v_0v_1), \\
v'_3 &= av_2 - \frac{a}{N}(2v_0v_2 + v_1^2), \\
&\dots \\
v'_{k+1} &= av_k - \frac{a}{N}\sum_{j=0}^k v_jv_{k-j}.
\end{aligned}$$

Sólo determinamos los primeros 10 términos v_i .

$$\begin{aligned}
v_1(t) &= \frac{a}{N}(N - x_0)x_0(t - t^*), \\
v_2(t) &= \frac{a^2}{2N^2}(N - 2x_0)(N - x_0)x_0(t - t^*)^2, \\
v_3(t) &= \frac{a^3}{6N^3}x_0(N^3 - 7N^2x_0 + 12Nx_0^2 - 6x_0^3)(t - t^*)^3, \\
v_4(t) &= \frac{a^4}{24N^4}x_0(N^4 - 15N^3x_0 + 50N^2x_0^2 - 60Nx_0^3 + 24x_0^4)(t - t^*)^4, \\
v_5(t) &= \frac{a^5}{120N^5}(N - x_0)x_0(N^4 - 30N^3x_0 + 150N^2x_0^2 - 240Nx_0^3 + 120x_0^4)(t - t^*)^5, \\
v_6(t) &= \frac{a^6}{720N^6}(N - x_0)x_0(N^5 - 62N^4x_0 + 540N^3x_0^2 - 1560N^2x_0^3 + 1800Nx_0^4 - 720x_0^5) \\
&\quad \times (t - t^*)^6, \\
v_7(t) &= \frac{a^7}{5040N^7}x_0(N^7 - 127N^6x_0 + 1932N^5x_0^2 - 10206N^4x_0^3 + 25200N^3x_0^4 - 31920N^2 \\
&\quad \times x_0^5 + 20160Nx_0^6 - 5040x_0^7)(t - t^*)^7, \\
v_8(t) &= \frac{a^8}{40320N^8}(N - x_0)x_0(N^7 - 254N^6x_0 + 5796N^5x_0^2 - 40824N^4x_0^3 + 126000N^3x_0^4 \\
&\quad - 191520N^2x_0^5 + 141120Nx_0^6 - 40320x_0^7)(t - t^*)^8, \\
v_9(t) &= \frac{a^9}{362880N^9}x_0(N^9 - 511N^8x_0 + 18660N^7x_0^2 - 204630N^6x_0^3 + 1020600N^5x_0^4 \\
&\quad - 2739240N^4x_0^5 + 4233600N^3x_0^6 - 3780000N^2x_0^7 + 1814400Nx_0^8 \\
&\quad - 362880x_0^9)(t - t^*)^9, \\
v_{10}(t) &= \frac{a^{10}}{3628800N^{10}}(N - x_0)x_0(N^9 - 1022N^8x_0 + 55980N^7x_0^2 - 818520N^6x_0^3 \\
&\quad + 5103000N^5x_0^4 - 16435440N^4x_0^5 + 29635200N^3x_0^6 - 30240000N^2x_0^7 \\
&\quad + 16329600Nx_0^8 - 3628800x_0^9)(t - t^*)^{10}.
\end{aligned}$$

Se sigue que nuestra solución aproximada es

$$x(t) = \sum_{i=0}^{10} v_i(t).$$

Tomemos como ejemplo $a = 1$ y $N = 40$. Aplicamos el MMPH con $\Delta t = 0.01$, $t \in [0, 60]$ y grafiquemos la curva solución $x(t)$ respecto de t para distintos casos de x_0 no negativos.

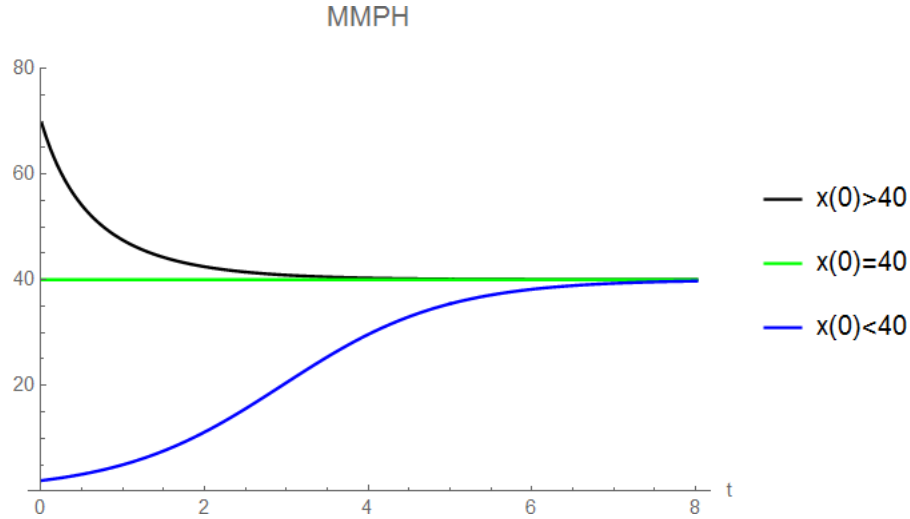


Figura 2.1: Curva solución aproximada del modelo logístico.

Notemos que las gráficas de las Figs. 1.3 y 2.1 son idénticas. Más aún, en la Fig. 2.2 graficamos la diferencia entre la solución exacta dada en (1.3) y la solución aproximada obtenida al aplicar el MMPH con 3 términos, con los parámetros previos.

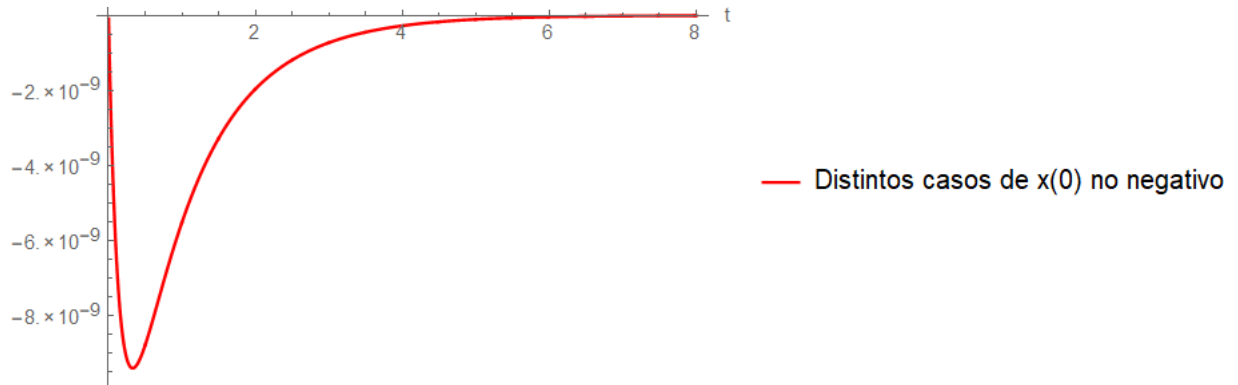


Figura 2.2: Diferencia entre la solución (1.9) y la solución obtenida por MMPH.

2.6. Aplicación del MPH al modelo Lotka-Volterra fraccionario

Del sistema (2), construimos una homotopía dada en la ecuación (5) como sigue

$$\begin{aligned} (1-p)(v^\alpha - x_0^\alpha) + p(v^\alpha - av + bvw) &= 0, \\ (1-p)(w^\beta - y_0^\beta) + p(w^\beta + cv - dvw) &= 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

considerando las aproximaciones iniciales:

$$\begin{aligned} x_0 = v_0(t) &= v(t^*), \quad 0 \leq t^* \leq t, \\ y_0 = w_0(t) &= w(t^*), \quad 0 \leq t^* \leq t. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Supongamos que la solución de (2.9) tiene la forma,

$$\begin{aligned} v &= v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots, \\ w &= w_0 + pw_1 + p^2w_2 + p^3w_3 + \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde $v_i, w_i, i \in \mathbb{N}$ son funciones que serán determinadas.

Por lo tanto, la solución aproximada es

$$\begin{aligned} x &= \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots, \\ y &= \lim_{p \rightarrow 1} w = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \dots. \end{aligned}$$

Por otra parte, el sistema (2.9) se reduce a

$$\begin{aligned} v^\alpha &= p(av - bvw), \\ w^\beta &= p(-cv + dvw) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sustituyendo el sistema anterior en (2.11) obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i^\alpha &= ap \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i - bp \left(v_0 w_0 + p[v_0 w_1 + v_1 w_0] + p^2[v_0 w_2 + v_1 w_1 + v_2 w_0] \right. \\
&\quad \left. + p^3[v_0 w_3 + v_1 w_2 + v_2 w_1 + v_3 w_0] + \cdots + p^k \sum_{j=0}^k v_j w_{k-j} \cdots \right), \\
\sum_{i=0}^{\infty} p^i w_i^\beta &= -cp \sum_{i=0}^{\infty} p^i w_i + dp \left(v_0 w_0 + p[v_0 w_1 + v_1 w_0] + p^2[v_0 w_2 + v_1 w_1 + v_2 w_0] \right. \\
&\quad \left. + p^3[v_0 w_3 + v_1 w_2 + v_2 w_1 + v_3 w_0] + \cdots + p^k \sum_{j=0}^k v_j w_{k-j} \cdots \right).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
v_0^\alpha &= 0, \\
v_1^\alpha &= av_0 - bv_0 w_0, \\
v_2^\alpha &= av_1 - b(v_0 w_1 + v_1 w_0), \\
v_3^\alpha &= av_2 - b(v_0 w_2 + v_1 w_1 + v_2 w_0), \\
&\dots \\
v_{n+1}^\alpha &= av_n - b \sum_{j=0}^n v_j w_{n-j}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
w_0^\beta &= 0, \\
w_1^\beta &= -cw_0 + dv_0 w_0, \\
w_2^\beta &= -cw_1 + d(v_0 w_1 + v_1 w_0), \\
w_3^\beta &= -cw_2 + d(v_0 w_2 + v_1 w_1 + v_2 w_0), \\
&\dots \\
w_{n+1}^\beta &= -cw_n + d \sum_{j=0}^n v_j w_{n-j}.
\end{aligned}$$

Aplicando el Ejemplo 4, las Observaciones 1, 2 y 3 y los Teoremas 2 y 3, calculamos v_i y w_i , donde $i = 1, \dots, 5$:

$$\begin{aligned}
v_1(t) &= \frac{v_0(a - bw_0)}{\Gamma(1 + \alpha)}(t - t^*)^\alpha, \\
v_2(t) &= \frac{v_0(a - bw_0)^2}{\Gamma(1 + 2\alpha)}(t - t^*)^{2\alpha} - \frac{bv_0w_0(-c + dv_0)}{\Gamma(1 + \alpha + \beta)}(t - t^*)^{\alpha + \beta}, \\
v_3(t) &= \frac{v_0(a - bw_0)^3}{\Gamma(1 + 3\alpha)}(t - t^*)^{3\alpha} + \frac{bv_0w_0(-a + bw_0)}{\Gamma(1 + 2\alpha + \beta)} \left[-c + 2dv_0 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Gamma(1 + \alpha + \beta)(-c + dv_0)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta)} \right] (t - t^*)^{2\alpha + \beta} - \frac{(c - dv_0)^2 w_0 bv_0}{\Gamma(1 + \alpha + 2\beta)} (t - t_i)^{\alpha + 2\beta}, \\
v_4(t) &= \frac{v_0(a - bw_0)^4}{\Gamma(1 + 4\alpha)}(t - t^*)^{4\alpha} + \frac{bv_0w_0(a - bw_0)^2}{\Gamma(1 + 3\alpha + \beta)} \left[c - 2dv_0 - d - \left(\frac{\Gamma(1 + 2\alpha + \beta)}{\Gamma(1 + 2\alpha)\Gamma(1 + \beta)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\Gamma(1 + \alpha + \beta)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta)} \right) (-c + dv_0) - \frac{\Gamma(1 + 2\alpha + \beta)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \alpha + \beta)} \right] (t - t^*)^{3\alpha + \beta} \\
&\quad + \frac{bv_0w_0(-c + dv_0)}{\Gamma(1 + 2\alpha + \beta)} \left[\left(1 + \frac{\Gamma(1 + \alpha + 2\beta)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + 2\beta)} \right) (-c + dv_0)(-a + bw_0) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Gamma(1 + \alpha + 2\beta)(-c + dv_0)b}{\Gamma(1 + \beta)\Gamma(1 + \alpha + \beta)} + dv_0(-a + 2bw_0) - \frac{\Gamma(1 + \alpha + \beta)(a - bw_0)dv_0}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta)} \right] \\
&\quad \times (t - t^*)^{2(\alpha + \beta)} - \frac{bv_0w_0(c - dv_0)^3}{\Gamma(1 + \alpha + 3\beta)}(t - t^*)^{\alpha + 3\beta}, \\
v_5(t) &= \frac{v_0(a - bw_0)^5}{\Gamma(1 + 5\alpha)}(t - t_i)^{5\alpha} + \frac{(a - bw_0)^3 bv_0w_0}{\Gamma(1 + 4\alpha + \beta)} \left[-\frac{\Gamma(1 + 3\alpha + \beta)dv_0}{\Gamma(1 + 2\alpha)\Gamma(1 + \alpha + \beta)} \right. \\
&\quad - \frac{\Gamma(1 + 3\alpha + \beta)(-c + dv_0)}{\Gamma(1 + \beta)\Gamma(1 + 3\alpha)} - \frac{\Gamma(1 + 3\alpha + \beta)dv_0}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + 2\alpha + \beta)} - dv_0 - (-c + dv_0) \\
&\quad \times \frac{\Gamma(1 + \alpha + \beta)\Gamma(1 + 2\alpha) + \Gamma(1 + 2\alpha + \beta)\Gamma(1 + \alpha)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + 2\alpha)\Gamma(1 + \beta)} - [\Gamma(1 + 2\alpha + \beta)dv_0 \\
&\quad \left. + \Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \alpha + \beta)(1 - c + 2dv_0)] / \Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \alpha + \beta) \right] (t - t_i)^{4\alpha + \beta} \\
&\quad + \frac{bv_0w_0}{\Gamma(1 + 3\alpha + 2\beta)} \left[-\frac{\Gamma(1 + 2\alpha + 2\beta)(c - dv_0)^2(a - bw_0)^2}{\Gamma(1 + 2\alpha)\Gamma(1 + 2\beta)} - \frac{4^{\alpha + \beta}\Gamma(1/2 + \alpha + \beta)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1 + \alpha + \beta)} \right. \\
&\quad \times (-c + dv_0)(-a + bw_0) - \frac{\Gamma(1 + 2\alpha + 2\beta)bv_0w_0(-c + dv_0)(-a + bw_0)}{\Gamma(1 + \beta)\Gamma(1 + 2\alpha + \beta)} \left(-c + 2dv_0 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Gamma(1 + \alpha + \beta)(-c + dv_0)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta)} \right) + a(-c + dv_0) \left((-c + dv_0)(-a + bw_0) + dv_0(-a \right. \\
&\quad \left. + 2bw_0) - \frac{\Gamma(1 + \alpha + 2\beta)(-c + dv_0)(a - bw_0)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + 2\beta)} - \frac{\Gamma(1 + \alpha + \beta)(a - bw_0)dv_0}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Gamma(1 + \alpha + 2\beta)}{\Gamma(1 + \beta)} \frac{b(-c + dv_0)}{\Gamma(1 + \alpha + \beta)} \right) - \frac{\Gamma(1 + 2\alpha + 2\beta)dv_0(a - bw_0)(-c + dv_0)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \alpha + 2\beta)} \\
&\quad \times \left(\frac{\Gamma(1 + \alpha + \beta)(a - bw_0)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta)} + a - 2bw_0 \right) - bv_0(-c + dv_0) \left(dv_0(-a + 2bw_0) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\Gamma(1 + \alpha + 2\beta)(-c + dv_0)(a - bw_0)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + 2\beta)} + (-c + dv_0)(-a + bw_0) - \frac{\Gamma(1 + \alpha + \beta)dv_0}{\Gamma(1 + \alpha)} \\
& \times \left(\frac{(a - bw_0)}{\Gamma(1 + \beta)} + \frac{\Gamma(1 + \alpha + 2\beta)b(-c + dv_0)}{\Gamma(1 + \beta)\Gamma(1 + \alpha + \beta)} \right) - v_0 d(-a + bw_0) \left((-c + dv_0)(-a + bw_0) \right. \\
& + bw_0(-c + 2dv_0) + \frac{\Gamma(1 + 2\alpha + \beta)dv_0(-a + w_0)}{\Gamma(1 + \alpha + \beta)} + \frac{\Gamma(1 + \alpha + \beta)(-c + dv_0)bw_0}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta)} \\
& \left. + \frac{\Gamma(1 + 2\alpha + \beta)(-c + dv_0)(-a + bw_0)}{\Gamma(1 + 2\alpha)\Gamma(1 + \beta)} \right) \left] (t - t_i)^{3\alpha + 2\beta} + \frac{bv_0w_0(c - dv_0)^2}{\Gamma(1 + 2\alpha + 3\beta)} \right. \\
& \times \left[\frac{\Gamma(1 + \alpha + 3\beta)bw_0(-c + dv_0)}{\Gamma(1 + \alpha + \beta)\Gamma(1 + 2\beta)} + (a - bw_0)(-c + dv_0) - \frac{\Gamma(1 + \alpha + 3\beta)(c - dv_0)}{\Gamma(1 + \beta)\Gamma(1 + \alpha + 2\beta)} \right. \\
& \times bw_0 - \frac{\Gamma(1 + \alpha + 3\beta)(a - bw_0)(c - dv_0)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + 3\beta)} - v_0 d \left(w_0(a - 3bw_0) + \frac{\Gamma(1 + \alpha + \beta)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta)} \right. \\
& \times \left. \left. (a - bw_0) + \frac{\Gamma(1 + \alpha + 2\beta)(a - bw_0)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + 2\beta)} - \frac{\Gamma(1 + \alpha + 2\beta)b}{\Gamma(1 + \beta)\Gamma(1 + \alpha + \beta)} \right) \right] (t - t_i)^{2\alpha + 3\beta} \\
& + \frac{bv_0w_0(c - dv_0)^4}{\Gamma(1 + \alpha + 4\beta)} (t - t_i)^{\alpha + 4\beta}.
\end{aligned}$$

Luego para los primeros 5 términos de w :

$$\begin{aligned}
w_1(t) &= \frac{w_0(-c + dv_0)}{\Gamma(1 + \beta)} (t - t^*)^\beta, \\
w_2(t) &= \frac{w_0(-c + dv_0)^2}{\Gamma(1 + 2\beta)} (t - t^*)^{2\beta} + \frac{dv_0w_0(a - bw_0)}{\Gamma(1 + \alpha + \beta)} (t - t^*)^{\alpha + \beta}, \\
w_3(t) &= \frac{w_0(-c + dv_0)^3}{\Gamma(1 + 3\beta)} (t - t^*)^{3\beta} + \frac{dv_0w_0(-c + dv_0)}{\Gamma(1 + \alpha + 2\beta)} \left[\frac{\Gamma(1 + \alpha + \beta)(a - bw_0)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta)} \right. \\
& \left. + a - 2bw_0 \right] (t - t^*)^{\alpha + 2\beta} + \frac{dv_0w_0(a - bw_0)^2}{\Gamma(1 + 2\alpha + \beta)} (t - t^*)^{2\alpha + \beta}, \\
w_4(t) &= \frac{w_0(-c + dv_0)^4}{\Gamma(1 + 4\beta)} (t - t^*)^{4\beta} + \frac{dv_0w_0(-c + dv_0)^2}{\Gamma(1 + \alpha + 3\beta)} \left[-bw_0 - \frac{\Gamma(1 + \alpha + 2\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(1 + \alpha + \beta)\Gamma(1 + \beta)} \right. \\
& \times \left. \frac{bw_0}{\Gamma(\beta)} + \left(a - 2bw_0 + \frac{\Gamma(1 + \alpha + \beta)(a - bw_0)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta)} \right) + \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1 + \alpha + 2\beta)(a - bw_0)}{\Gamma(1 + 2\beta)\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(\beta)} \right] \\
& \times (t - t^*)^{\alpha + 3\beta} + \frac{dv_0w_0(a - bw_0)}{\Gamma(1 + 2\alpha + 2\beta)} \left[\frac{\Gamma(1 + \alpha + \beta)bw_0(c - dv_0)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta)} + \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1 + 2\alpha + \beta)}{\Gamma(1 + 2\alpha)\Gamma(\beta)} \right. \\
& \times \left. \frac{(a - bw_0)(-c + dv_0)}{\Gamma(1 + \beta)} + \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1 + 2\alpha + \beta)(a - bw_0)dv_0}{\Gamma(1 + \alpha + \beta)\Gamma(\beta)\Gamma(1 + \alpha)} + (-c + dv_0)(a - bw_0) \right. \\
& \left. + bw_0(c - 2dv_0) \right] (t - t^*)^{2\alpha + 2\beta} + \frac{dv_0w_0(a - bw_0)^3}{\Gamma(1 + 3\alpha + \beta)} (t - t^*)^{3\alpha + \beta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_5(t) = & \frac{w_0(-c + dv_0)^5}{\Gamma(1 + 5\beta)}(t - t^*)^{5\beta} + \frac{dv_0 w_0(-c + dv_0)^5}{\Gamma(1 + \alpha + 4\beta)} \left[-\frac{\Gamma(1 + \alpha + 3\beta)bw_0(-c + dv_0)}{\Gamma(1 + \alpha + \beta)\Gamma(1 + 2\beta)} \right. \\
& - \frac{\Gamma(1 + \alpha + 3\beta)bw_0(-c + dv_0)}{\Gamma(1 + \beta)\Gamma(1 + \alpha + 2\beta)} + \frac{\Gamma(1 + \alpha + 3\beta)(a - bw_0)(-c + dv_0)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + 3\beta)} - \frac{c}{\Gamma(1 + \alpha)} \\
& \times \frac{1}{\Gamma(1 + \beta)\Gamma(1 + \alpha + \beta)\Gamma(1 + 2\beta)} [\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + 2\beta)(\Gamma(1 + \beta)\Gamma(1 + \alpha + \beta)(-3bw_0 \\
& + a) - \Gamma(1 + \alpha + 2\beta)dv_0) + \Gamma(1 + \alpha + \beta)(a - bw_0)(\Gamma(1 + \alpha + \beta)\Gamma(1 + 2\beta) + \Gamma(2\beta \\
& + 1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta))] + \frac{dv_0}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta)\Gamma(1 + \alpha + \beta)\Gamma(1 + 2\beta)} [\Gamma(1 + \alpha + \beta)(-bw_0 \\
& + a)(\Gamma(1 + 2\beta)\Gamma(1 + \alpha + \beta) + \Gamma(1 + \beta)\Gamma(1 + \alpha + 2\beta)) + \Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + 2\beta)(\Gamma(\beta \\
& + 1)\Gamma(1 + \alpha + \beta)(a - 3bw_0) - \Gamma(1 + \alpha + 2\beta)bw_0)] + bw_0(-c + dv_0) \Big] (t - t^*)^{\alpha+4\beta} \\
& + \frac{dv_0 w_0(-c + dv_0)}{\Gamma(1 + 2\alpha + 3\beta)} \left[\frac{4^{\alpha+\beta}\Gamma(1/2 + \alpha + \beta)bdv_0 w_0(-a + bw_0)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1 + \alpha + \beta)} + \frac{\Gamma(1 + 2\alpha + 2\beta)}{\Gamma(1 + 2\alpha)\Gamma(1 + 2\beta)} \right. \\
& \times (-c + dv_0)(a - bw_0)^2 - \frac{\Gamma(1 + 2\alpha + 2\beta)bw_0(-a + bw_0)}{\Gamma(1 + \alpha)(\Gamma(1 + \beta))^2\Gamma(1 + 2\alpha + \beta)} (\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta)(c \\
& - 2dv_0) + \Gamma(1 + \alpha + \beta)(-dv_0 + c)) + \frac{\Gamma(1 + 2\alpha + 2\beta)dv_0(a - bw_0)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \alpha + 2\beta)} \left(\frac{\Gamma(1 + \alpha + \beta)}{\Gamma(1 + \alpha)} \right. \\
& \times \left. \left. \frac{(a - bw_0)}{\Gamma(1 + \beta)} + a - 2bw_0 \right) + (-bw_0 + a) \left(-ac - 3bdv_0 w_0 + \frac{\Gamma(1 + 2\alpha + \beta)}{\Gamma(1 + 2\alpha)\Gamma(1 + \beta)} \right. \right. \\
& \times (-c + dv_0)(a - bw_0) + 2bcw_0 + adv_0 + \frac{\Gamma(1 + \alpha + \beta)bw_0(c - dv_0)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta)} + \frac{dv_0(a - bw_0)}{\Gamma(1 + \alpha + \beta)} \\
& \times \left. \left. \frac{\Gamma(1 + 2\alpha + \beta)}{\Gamma(1 + \alpha)} \right) + bw_0 \left(-\frac{\Gamma(1 + \alpha + \beta)dv_0(a - bw_0)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta)} + \frac{\Gamma(1 + \alpha + 2\beta)(-c + dv_0)}{\Gamma(1 + \beta)\Gamma(1 + \alpha + \beta)} \right. \right. \\
& \times \left. \left. b + 2bdv_0 w_0 - adv_0 + (-c + dv_0)(-a + bw_0) \left(1 + \frac{\Gamma(1 + \alpha + 2\beta)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + 2\beta)} \right) \right) \right] \\
& \times (t - t^*)^{2\alpha+3\beta} + \frac{dv_0 w_0(a - bw_0)^2}{\Gamma(1 + 3\alpha + 2\alpha)} \left[\frac{\Gamma(1 + 3\alpha + \beta)(a - bw_0)dv_0}{\Gamma(1 + 2\alpha)\Gamma(1 + \alpha + \beta)} + (-c + dv_0)(-bw_0 \right. \\
& + a) + \frac{\Gamma(1 + 3\alpha + \beta)(a - bw_0)(-c + dv_0)}{\Gamma(1 + 3\alpha)\Gamma(1 + \beta)} + \frac{\Gamma(1 + 3\alpha + \beta)dv_0(a - bw_0)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + 2\alpha + \beta)} + bw_0 \\
& \times \left(c - d - 2dv_0 + \frac{\Gamma(1 + \alpha + \beta)(c - dv_0)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 + \beta)} + \frac{\Gamma(1 + 2\alpha + \beta)(c - dv_0)}{\Gamma(1 + 2\alpha)\Gamma(1 + \beta)} - \frac{dv_0}{\Gamma(1 + \alpha)} \right. \\
& \times \left. \left. \frac{\Gamma(1 + 2\alpha + \beta)}{\Gamma(1 + \alpha + \beta)} \right) \right] (t - t^*)^{3\alpha+2\beta} + (a - bw_0)^4 \frac{dv_0 w_0}{\Gamma(1 + 4\alpha + \beta)} (t - t^*)^{4\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución aproximada es $(x(t), y(t))$, en donde

$$x(t) = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5,$$

$$y(t) = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5.$$

2.7. Aplicación del MMPH al modelo Lotka-Volterra

Sea $[0, b_0]$ un intervalo. Hacemos una partición $P = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_n = b_0\}$ de $[0, b_0]$, tal que

$$t_k = k\Delta t, \text{ para cada } k = 1, \dots, n \text{ y } \Delta t = \frac{b_0}{n}, \text{ con } n \text{ suficientemente grande.}$$

Sea (x_{01}, y_{01}) una aproximación inicial de (x, y) tal que $x(0) = x_{01}$ y $y(0) = y_{01}$.

Entonces la solución aproximada $(x_k(t), y_k(t))$ en $[t_{k-1}, t_k]$ para cada $k = 1, \dots, n$ está dada por

$$\begin{aligned}x_k(t) &= v_0 + v_1 + v_2 + \dots, & v_0 &= x_{k-1}(t_{k-1}), \\y_k(t) &= w_0 + w_1 + w_2 + \dots, & w_0 &= y_{k-1}(t_{k-1}).\end{aligned}$$

Los v_i, w_i , para cada $i = 1, \dots, 5$ se han determinado en la Sección 2.6, tomando $t^* = t_{k-1}$ y $(x_0, y_0) = (x_{k-1}(t_{k-1}), y_{k-1}(t_{k-1}))$ en cada paso k . Por lo tanto, la solución aproximada en $[0, b_0]$ es (x, y) tal que

$$\begin{aligned}x(t) &= x_k(t), & t &\in [t_{k-1}, t_k], \\y(t) &= y_k(t), & t &\in [t_{k-1}, t_k],\end{aligned}$$

para toda $k = 1, \dots, n$.

Ejemplo 9. *Aplicando el MPH resolvemos el sistema con condición inicial (3, 1):*

$$\begin{aligned}x' &= 0.4x - 0.37xy \\y' &= -0.3y + 0.05xy.\end{aligned}$$

Aplicando los resultados de la sección 2.5 tenemos que

$$\begin{aligned}
x(t) &= v_0 + v_0(0.4 - 0.37w_0)(t - t^*) + \left[\frac{1}{2}(0.4 - 0.37w_0)^2 - 0.185(-0.3 + 0.05v_0)w_0 \right] v_0 \\
&\times (t - t^*)^2 + \left[\frac{1}{6}v_0(0.4 - 0.37w_0)^3 - 0.0616667(0.3 - 0.05v_0)^2v_0w_0 + 0.0616667(-0.3 \right. \\
&+ 2(-0.3 + 0.05v_0) + 0.1v_0)v_0(-0.4 + 0.37w_0)w_0 \left. \right] (t - t^*)^3 + \left[\frac{1}{24}v_0(0.4 - 0.37w_0)^4 \right. \\
&- 0.0154167(0.3 - 0.05v_0)^3v_0w_0 + 0.0154167(-0.3 + 0.05v_0)v_0(1.11(-0.3 + 0.05v_0) \\
&- 0.1v_0(0.4 - 0.37w_0) + 4(-0.3 + 0.05v_0)(-0.4 + 0.37w_0) + 0.05v_0(-0.4 + 0.74w_0)) \\
&\times w_0 + 0.0154167(0.25 - 5(-0.3 + 0.05v_0) - 0.25v_0)v_0(0.4 - 0.37w_0)^2w_0 \left. \right] (t - t^*)^4 \\
&+ \left[\frac{1}{120}v_0(0.4 - 0.37w_0)^5 + 0.00308333(0.3 - 0.05v_0)^4v_0w_0 + 0.00308333 \left(\frac{1}{2} \left(-2(0.7 \right. \right. \right. \\
&+ 0.1v_0) - 0.3v_0 \left. \right) - 9(-0.3 + 0.05v_0) - 0.55v_0 \left. \right) v_0(0.4 - 0.37w_0)^3w_0 + 0.00308333v_0 \\
&\times w_0(0.4(-0.3 + 0.05v_0)(1.11(-0.3 + 0.05v_0) - 3(-0.3 + 0.05v_0)(0.4 - 0.37w_0) - 0.1 \\
&\times v_0(0.4 - 0.37w_0) + (-0.3 + 0.05v_0)(-0.4 + 0.37w_0) + 0.05v_0(-0.4 + 0.74w_0)) - 0.2 \\
&\times (-0.3 + 0.05v_0)v_0(0.4 + 2(0.4 - 0.37w_0) - 0.74w_0)(0.4 - 0.37w_0) - 6 \left(\frac{30 - 50v_0}{100} \right. \\
&\times (0.4 - 0.37w_0) \left. \right)^2 - 0.3(-0.3 + 0.05v_0)(-0.4 + 0.37w_0) - 0.37(-0.3 + 0.05v_0)(1.11 \\
&\times (-0.3 + 0.05v_0) - 3(-0.3 + 0.05v_0)(0.4 - 0.37w_0) - 0.1v_0(0.4 - 0.37w_0) + (-0.3 \\
&+ 0.05v_0)(-0.4 + 0.37w_0) + 0.05v_0(-0.4 + 0.74w_0))w_0 - 1.48(-0.3 + 0.05v_0)(-0.3 \\
&+ 2(-0.3 + 0.05v_0) + 0.1v_0)(-0.4 + 0.37w_0)w_0 - 0.05v_0(-0.4 + 0.37w_0)(4(+0.05v_0 \\
&- 0.3)(-0.4 + 0.37w_0) + 0.15v_0(-0.4 + 0.37w_0) + 0.74(-0.3 + 0.05v_0)w_0 + 0.37(-0.3 \\
&+ 0.1v_0)w_0)) + 0.00308333(0.3 - 0.05v_0)^2v_0w_0(-4(0.3 - 0.05v_0)(0.4 - 0.37w_0) + (0.4 \\
&\times -0.37w_0)(-0.3 + 0.05v_0) - 1.48(0.3 - 0.05v_0)w_0 + 2.22(-0.3 + 0.05v_0)w_0 - 0.05v_0 \\
&\times (-1.11 + 5(0.4 - 0.37w_0) + (0.4 - 1.11w_0)w_0)) \left. \right] (t - t^*)^5, \\
y(t) &= w_0 + (-0.3 + 0.05v_0)w_0(t - t^*) + \left[\frac{1}{2}(-0.3 + 0.05v_0)^2w_0 + 0.025v_0 \times (0.4 - 0.37w_0) \right. \\
&\times w_0 \left. \right] (t - t^*)^2 + \left[\frac{1}{6}(0.3 - 0.05v_0)^3w_0 + 0.00833333v_0(0.4 - 0.37w_0)^2w_0 + 0.00833333 \\
&\times v_0w_0(-0.3(0.4 - 0.37w_0) + 2(-0.3 + 0.05v_0)(0.4 - 0.37w_0) - 0.05v_0 \times (-0.4 + 0.37 \\
&\times w_0) - 0.37(-0.3 + 0.05v_0)w_0) \right] (t - t^*)^3 + \left[-\frac{1}{24}(0.3 - 0.05v_0)^4w_0 + 0.00208333v_0 \right. \\
&\times (0.4 - 0.37w_0)^3w_0 + 0.00208333v_0w_0(-1.11(-0.3 + 0.05v_0)^2 + 0.05(-0.3 + 0.05v_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times v_0(0.4 - 0.74w_0) + 2(-0.3 + 0.05v_0)^2(0.4 - 0.37w_0) - 3(0.3 - 0.05v_0)^2(-0.4 + 0.37 \\
& \times w_0) + 0.3(-0.3 + 0.05v_0)(-0.4 + 0.74w_0) - 0.37(0.3 - 0.05v_0)^2w_0) + 0.00208333v_0 \\
& \times w_0(4(-0.3 + 0.05v_0)(0.4 - 0.37w_0)^2 + 0.15v_0(0.4 - 0.37w_0)^2 - 0.74(-0.3 + 0.05v_0) \\
& \times (0.4 - 0.37w_0)w_0 + 0.37(-0.3 + 0.1v_0)(-0.4 + 0.37w_0)w_0) \Big] (t - t^*)^4 + \left[\frac{1}{120}(-0.05 \right. \\
& \times v_0 + 0.3)^5w_0 + 0.000416667v_0(0.4 - 0.37w_0)^4w_0 + \frac{1}{120}(-0.015v_0(0.4 - 0.37w_0)^3w_0 \\
& + 0.2(-0.3 + 0.05v_0)v_0(0.4 - 0.37w_0)^3w_0 + 0.0275v_0^2(0.4 - 0.37w_0)^3w_0 + 0.0185v_0(-5 \\
& \times (-0.3 + 0.05v_0)(0.4 - 0.37w_0)^2 - 2(-0.3 + 0.1v_0)(0.4 - 0.37w_0)^2 - 0.025(2 + 6v_0) \\
& \times (0.4 - 0.37w_0)^2)w_0^2) + \frac{1}{120}(0.2(0.3 - 0.05v_0)^3v_0(0.4 - 0.37w_0)w - 0 - 0.185(-0.05 \\
& \times v_0 + 0.3)^2(-0.3 + 0.05v_0)v - 0w_0^2 + 0.0185(-0.3 + 0.05v_0)^3v_0w_0^2 - 0.015v_0w_0(-1.11 \\
& \times (-0.3 + 0.05v_0)^2 + 0.3(0.3 - 0.05v_0)(0.4 - 0.74w_0) + 0.05(-0.3 + 0.05v_0)v_0(-0.74 \\
& \times w_0 + 0.4) + 5(0.3 - 0.05v_0)^2(0.4 - 0.37w - 0) - 0.37(0.3 - 0.05v_0)^2w_0) + 0.0025v_0^2 \\
& \times w_0(-1.11(-0.3 + 0.05v_0)^2 + 0.3(0.3 - 0.05v_0)(0.4 - 0.74w_0) + 0.05(-0.3 + 0.05v_0) \\
& \times v_0(0.4 - 0.74w_0) + 5(0.3 - 0.05v_0)^2(0.4 - 0.37w_0) - 0.37(0.3 - 0.05v_0)^2w_0) + \frac{1}{120} \\
& \times (0.3(0.3 - 0.05v_0)^2v_0(0.4 - 0.37w_0)^2w_0 + 0.0185v_0(1.11(-0.3 + 0.05v_0)^2 - 3(-0.05 \\
& \times v_0 + 0.3)^2(0.4 - 0.37w_0) - 0.1(-0.3 + 0.05v_0)v_0(0.4 - 0.37w_0) + (0.3 - 0.05v_0)^2 \\
& \times (-0.4 + 0.37w_0) + 0.05(-0.3 + 0.05v_0)v_0(-0.4 + 0.74w_0))w_0^2 + 0.00555v_0^2(0.05v_0 \\
& - 0.3)(-0.4 + 0.37w_0)w_0^2 + 0.01v_0^2(0.4 - 0.37w_0)w_0(3(-0.3 + 0.05v_0)(0.4 - 0.37w_0) \\
& - 0.37(-0.3 + 0.05v_0)w_0) + 0.074(-0.3 + 0.05v_0)v_0w_0^2(-0.4(-0.3 + 0.05v_0) - 0.02v_0 \\
& - 2(-0.3 + 0.05v_0)(0.4 - 0.37w_0) + 0.37(-0.3 + 0.05v_0)w_0 + 0.0185v_0w_0) - 0.015w_0 \\
& \times v_0(4(-0.3 + 0.05v_0)(0.4 - 0.37w_0)^2 + 0.15v_0(0.4 - 0.37w_0)^2 - 0.74(-0.3 + 0.05v_0) \\
& \times (0.4 - 0.37w_0)w_0 + 0.37(-0.3 + 0.1v_0)(-0.4 + 0.37w_0)w_0) + 0.0025v_0^2w_0(4(0.05v_0 \\
& - 0.3)(0.4 - 0.37w_0)^2 + 0.15v_0(0.4 - 0.37w_0)^2 - 0.74(-0.3 + 0.05v_0)(0.4 - 0.37w_0)w_0 \\
& + 0.37(-0.3 + 0.1v_0)(-0.4 + 0.37w_0)w_0) \Big] (t - t^*)^5.
\end{aligned}$$

Aplicando el MMPH dada en la sección 2.6, tomando $\Delta t = 0.01$ en el intervalo $[0, 60]$ graficamos el retrato fase:

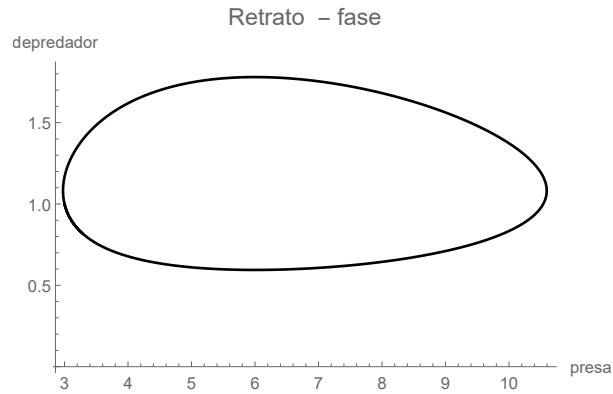


Figura 2.3: Caso $\alpha = \beta = 1$, $t \in [0, 60]$.

Nótese que la gráfica es una solución periódica, lo cual se distingue mejor si graficamos cada variable respecto de t .

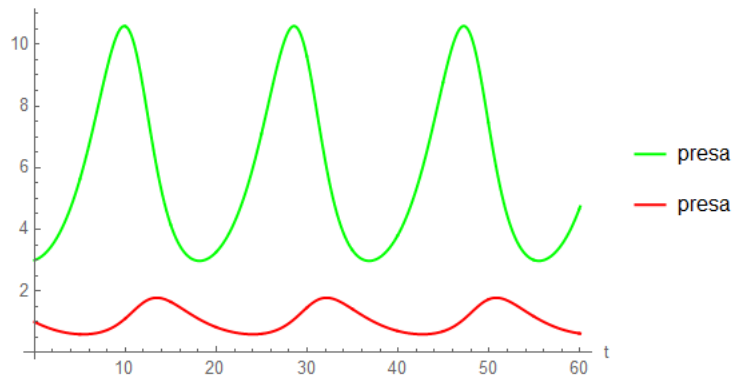


Figura 2.4: Caso solución periódica.

Al graficar respecto al tiempo nos damos cuenta de que primero ha de crecer la especie presa para que la depredadora tenga alimento y pueda llegar a su máximo, haciendolo más tarde que la especie anterior. Una vez que la especie depredadora alcanza su máximo es cuando la especie presa empieza a descender y por consiguiente el alimento empieza a escasear, lo que produce una disminución de la población de la especie depredadora; aunque dicho proceso se producirá con más lentitud respecto de la presa. Se repite el mismo suceso.

Por otra parte, del Ejemplo 5 y las gráficas previas, notamos que las curvas solución generada por el MMPH y RK4 son idénticas.

Mejor aún, graficaremos la diferencia de las soluciones obtenidas por RK4 y MMPH tanto para $x(t)$ así como también para $y(t)$ respecto a t , con 3 términos tanto para la presa como para el depredador en MMPH.

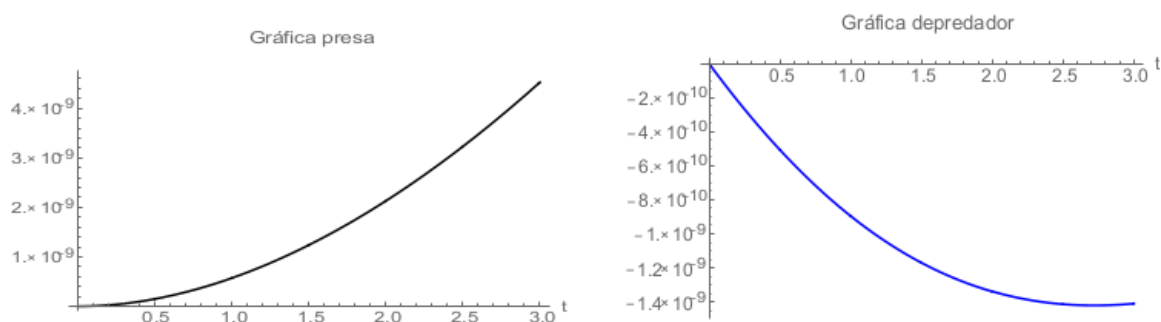


Figura 2.5: Diferencia entre las soluciones obtenidas por RK4 y MMPH aplicada al Modelo Lotka-Volterra.

Ahora, con la solución aproximada obtenida al aplicar el MMPH al modelo presa-depredador (Sección 2.6 y 2.7) y considerando las mismas condiciones iniciales y parámetros, excepto para α y β , graficamos las siguientes curvas en donde $t \in [0, 25]$:

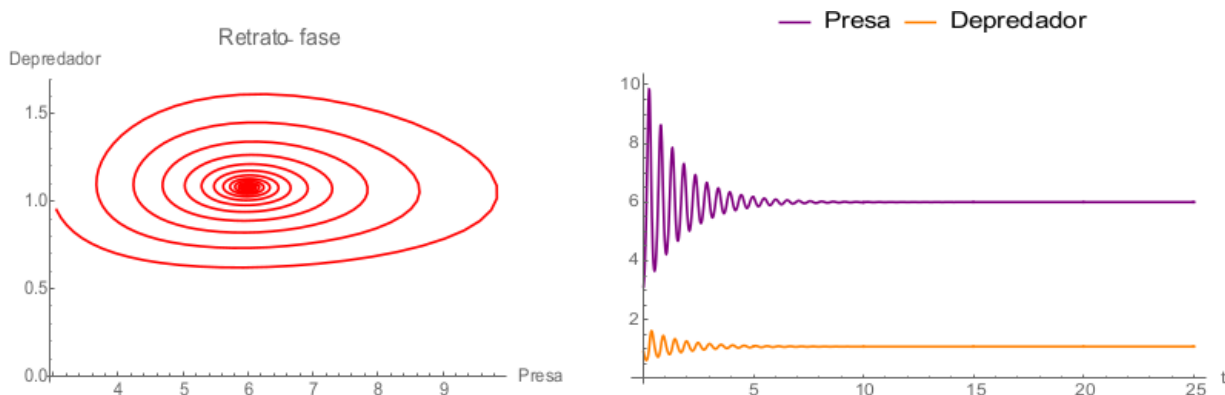


Figura 2.6: Caso $\alpha = \beta = 0.25$.

Luego,

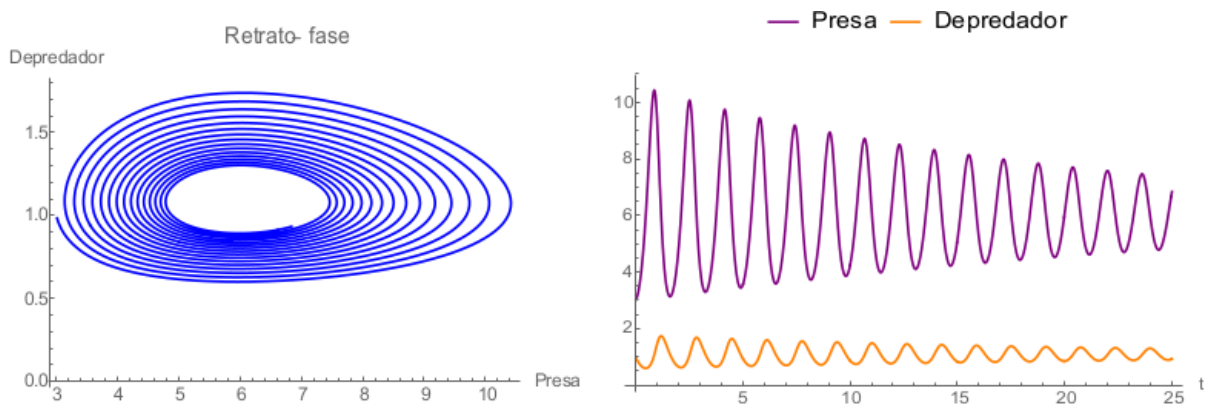


Figura 2.7: Caso $\alpha = \beta = 0.5$.

Por último,

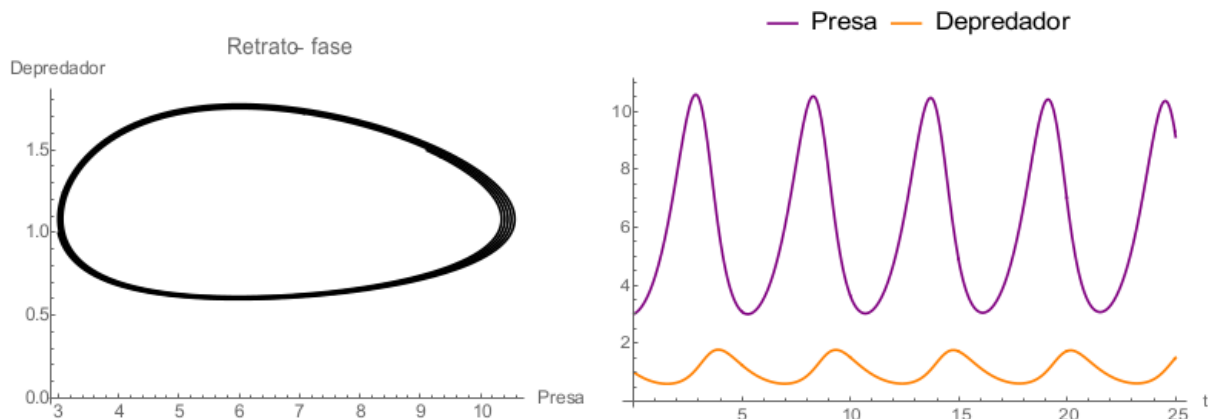


Figura 2.8: Caso $\alpha = \beta = 0.75$.

De las Figs. 2.6, 2.7 y 2.8, observamos que los retratos de fase son espirales pozo. Note que la aproximación de la curva al punto de equilibrio depende, en gran medida, del orden de la derivada. Entre mas cercano sea el orden a cero, la aproximación requiere de un tiempo corto. Además, en los 3 casos, todos alcanzaran un equilibrio, pero en tiempos distintos. En el caso $\alpha = \beta = 0.25$ es más rápida. Pero en general, $\alpha, \beta \in (0, 1]$ son arbitrarios.

Grafiquemos algunos casos donde $\alpha \neq \beta$.

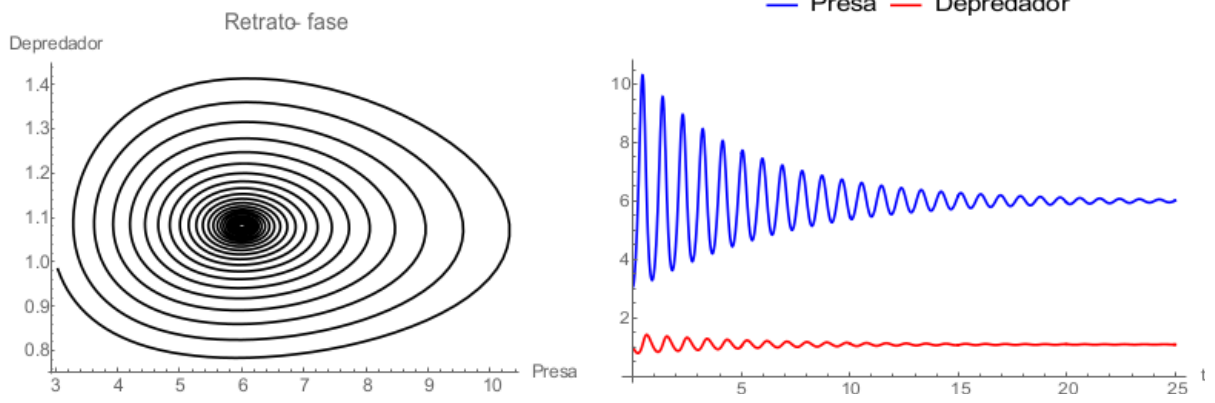


Figura 2.9: Caso $\alpha = 0.25$ y $\beta = 0.5$.

Otro caso:

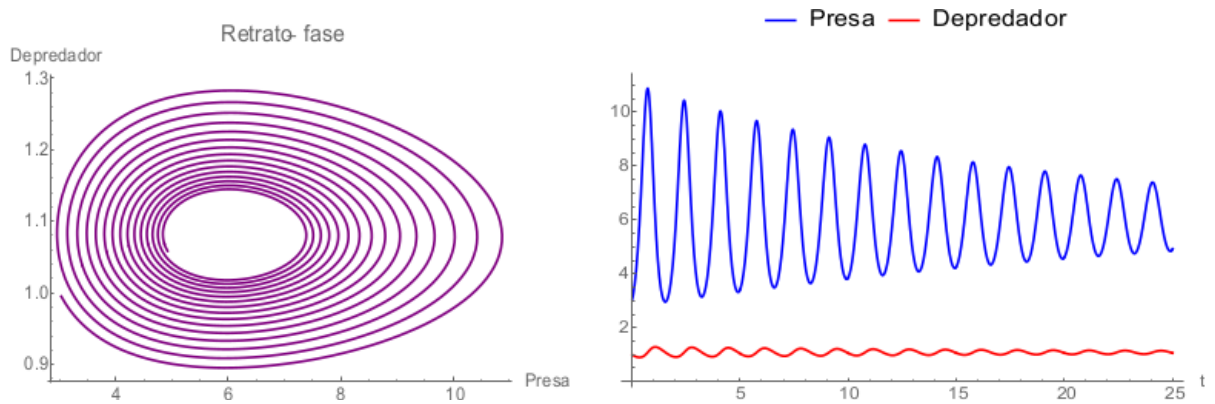


Figura 2.10: Caso $\alpha = 0.25$ y $\beta = 0.75$.

También se considera:

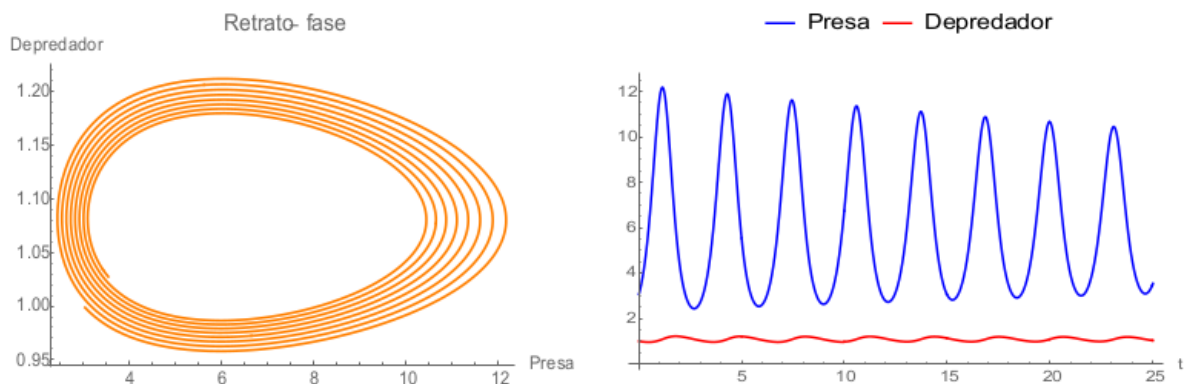


Figura 2.11: Caso $\alpha = 0.25$ y $\beta = 1$.

De las 3 últimas gráficas, $\alpha = 0.25$ juega un papel importante. Por ejemplo, en la Fig. 2.9, la tendencia hacia el punto de equilibrio es mas lento que en el caso de la Fig. 2.6, y eso se puede distinguir mejor en las gráficas respecto a t ; en la Fig. 2.6 el equilibrio ocurre aproximadamente en $t = 10$, mientras que en Fig. 2.9 sucede en un tiempo cercano a 25. Y si lo comparamos con la Fig, 2.7, es mucho más evidente, no hay acercamiento al punto de equilibrio, a menos que se prolongue el tiempo.

Por otra parte, la Fig. 2.11 nos muestra que al variar tan sólo uno de los órdenes de derivación, ya no se cumple el Teorema 4.

De hecho, será el caso de un espiral pozo el retrato fase.

2.8. Error del MMPH aplicado en el modelo Lotka-Volterra

De las Secciones 2.6 y 2.7, tomando $\alpha \leq \beta$, concluimos que el error de la solución aproximada es de la forma $O((\Delta t)^{(k+1)\alpha})$ para la solución $x(t)$, en donde $v_i, w_i, i = 1, \dots, k$ se han determiando.

Esto es,

$$x(t) = \sum_{i=0}^k v_i + O((\Delta t)^{(k+1)\alpha}). \quad (2.13)$$

Mientras tanto,

$$y(t) = \sum_{i=0}^k w_i + O((\Delta t)^{k\alpha+\beta}). \quad (2.14)$$

Si $\alpha \geq \beta$, es análogo.

Referencias

Pilar, M., Trujillo, J.J., Luis, V., Rivero, M.,(2011). *Fractional dynamics of populations*. Applied Math. and Computation 218, 1089-1095.

Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J., (2006). *Theory and Applications Fractional Differential Equations*. Printed in The Netherlands, Fisrt Edition.

Smale S., Hirsch M. W., Devaney R. L., (2004). *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Printed USA, Academic Press is an imprint et Elsevier.

Juan He, J. (1999). *Homotopy Perturbation Technique*. Compute Methods Appl. Mech. Engrg. 178, 257-262.

Rafei, M., Daniali, H., Ganji, D. D., Pashaei, H. (2007). *Solution of the prey and predator problem by homotopy perturbation method*. Applied Mathematics and Computation 188, 1419-1425.

Das, S. and Gupta P. K. (2011). *A mathematical model on fractional Lotka-Volterra equations*. Journal of Theoretical Biology 277, 1-6.

Gorenflo, R., Kilbas, A. A., Mainardi, F., Rogosin, S. V. (2014). *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014.

Chowdhury, M.S.H., Hashim, I., Roslan, R. (2008). *Simulation of the predator-prey problem by the homotopy-perturbation method revised*. Journal of the Juliusz Schauder Center, Volume 31, 263-270.