



UAGro

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

LOS PROBLEMAS DE CONTEO EN LOS LIBROS DE TELESECUNDARIA

Tesis que presenta:

Lic. Agustín Solano López

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Directores de tesis:

**M.C. Erika Sughey Maldonado Mejía
M.C. Maribel Vicario Mejía**



CHILPANCINGO, GRO., MÉXICO

ENERO DE 2019

ÍNDICE

Introducción	I
Capítulo I. Antecedentes y planteamiento del objetivo	
1.1. Errores y dificultades en la resolución de problemas combinatorios en el nivel superior	1
1.2. Algunos estudios acerca de la resolución de problemas combinatorios en secundaria	3
1.2.1. La “Combinatoria en libros de texto de secundaria	3
1.2.2. Dificultades que presentan los estudiantes de secundaria en la resolución de problemas combinatorios	5
1.3. La resolución de problemas de conteo en preescolar y primaria	7
1.4. Planteamiento del problema y pregunta de investigación	13
1.5. Justificación	14
Capítulo 2. Referentes teóricos y Método	
2.1. Referentes teóricos	15
2.1.1. Razonamiento combinatorio	15
2.1.2. Modelos combinatorios	18
2.1.3. Reglas generales de la combinatoria y técnicas de conteo	19
2.2. Método	21
2.2.1. Revisión bibliográfica	21
2.2.2. Revisión del Plan y Programa de Estudio de 2006 y 2011	22
2.2.3. Revisión de libros de texto de telesecundaria	23
Capítulo 3. Resultados	
3.1 Revisión de los Planes y Programas de Estudio 2006 y 2011 de Educación Básica Secundaria	24
3.1.1. Plan y Programa de Estudio de 2006	24
3.1.2. Plan y Programa de Estudio de 2011	24
3.2. Revisión de libros de texto de matemáticas de Telesecundaria	28
3.2.1. Matemáticas I. Primer Grado. Volumen I	28
3.3.1. Matemáticas II. Segundo Grado. Volumen I	40
Capítulo 4. Conclusiones y reflexiones	
4.1. Conclusiones	53
4.3. A manera de reflexión	54
Referencias bibliográficas	56

INTRODUCCIÓN

La Combinatoria es un tema de relevancia que ayuda en el desarrollo del pensamiento formal (Piaget, Inhelder, 1955), esta tiene una diversidad de aplicaciones, desde actividades muy sencillas, tales como elegir un platillo en un restaurante hasta ámbitos más complejos como la ciencia, la técnica y la optimización (García, 2016), sin embargo, es necesario identificar los factores que permitan tener un efecto en el éxito de los estudiantes al resolverlos, así como en la misma práctica del profesor (Lookwood y Gibson, 2016).

De acuerdo con la experiencia de servicio que tiene el profesor que realiza la investigación, el tratamiento didáctico que regularmente se da a los Problemas de Conteo es la reproducción o aplicación de las fórmulas correspondientes a las operaciones combinatorias o técnicas de conteo, prescindiendo así de un aprendizaje significativo por parte de los estudiantes. Lo anterior puede ser a causa de la misma naturaleza del contenido, del desconocimiento por parte del profesor, así como de las propias dificultades que él tenga respecto a esta temática orillando así que en ocasiones este contenido sea excluida para su enseñanza y solo reproduzca lo que se desarrolla en el libro de texto. En este sentido, dado que el libro de texto es el principal recurso didáctico propuesto para el profesor, es necesario conocer cómo es que se plantea esta temática en los libros de texto.

Dado la explicación anterior y aunado a ello las limitadas investigaciones que hagan referencia de la estructura de los Problemas de Conteo, así como de los conceptos bajo los cuales están sustentados, en libros de texto en el nivel de secundaria, principalmente en la modalidad de Telesecundaria motivó el planteamiento de la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo se presentan los problemas de conteo en el libro de texto de telesecundaria?

Este trabajo se estructura en cuatro capítulos. En el Capítulo 1, se presentan estudios relacionados con esta temática, particularmente los que se centran en las dificultades que se tienen al trabajar con la Combinatoria y en aquellos que estudian las estrategias que se usan al trabajar con este contenido en el nivel preescolar y primaria.

En el Capítulo 2, se describen los elementos teóricos que sustentan este estudio, como son la definición de Combinatoria así como de sus elementos, entre estos los modelos combinatorios, los principios y técnicas de conteo.

En el Capítulo 3 se detalla el método que se empleó para responder a la pregunta de investigación y el cumplimiento del objetivo, este fue: la revisión de los planes y programas de estudio que dan un soporte institucional al tema investigado y el análisis de los libros de texto de matemáticas correspondiente al primer y segundo grado en la modalidad de Telesecundaria utilizando los criterios propuestos en Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994).

Finalmente, en el capítulo 4 se exponen las reflexiones finales y se contesta a la pregunta de investigación y los alcances de los objetivos planteados en este trabajo.

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES

Y

PLANTEAMIENTO

DEL OBJETIVO

CAPÍTULO I.

1. Antecedentes y planteamiento del objetivo

1.1. Errores y dificultades en la resolución de problemas combinatorios en el nivel superior

Aunque los problemas combinatorios son fáciles de establecer y proporcionan situaciones de resolución de problemas enriquecidas y accesibles, existe evidencia de que los estudiantes tienen dificultades para resolver problemas de conteo correctamente (Lockwood y Gibson, 2016; Roa, Batanero y Godino, 2001). A continuación, se muestran algunos de ellos.

Roa, Batanero y Godino (2001), analizaron la resolución de problemas combinatorios por alumnos con alta preparación matemática para aportar una explicación semiótica de los errores cometidos. En su análisis identifican, que los alumnos en la resolución de problemas utilizan elementos como son: símbolos, términos, técnicas, operaciones, conceptos y justificaciones puestos en juego correcta o incorrectamente. Es decir, muestran complejidad y diversidad de estilos de resolución, ejemplo de ello, es que algunos de los jóvenes aplicaron la regla del producto, de la suma, tienen nociones de la idea de combinación; otras respuestas, como en el caso de problemas de partición, arrojan inseguridad en las definiciones de las operaciones combinatorias, resuelven enumerando y considerando indistinguibles tanto los objetos como los conjuntos.

En la investigación se detallan dos tipos de situaciones (Roa et. al., 2001, p. 202):

- a) El del estudiante que recuerda las definiciones de las operaciones combinatorias y sabe aplicarlas a los problemas propuestos.
- b) El del alumno que ha olvidado estas definiciones o no sabe aplicarlas y recurre a otras estrategias.

Logran especificar que los dos métodos de resolución mantienen elementos comunes, como son: la identificación del conjunto de configuraciones a enumerar, el planteamiento de problemas relacionados pero diferentes al dado por el enunciado, traducción entre modelos combinatorios, descomposición en partes, reglas de la suma, producto y cociente. Los autores afirman que lo anterior puede explicar por qué en algunos problemas no hay mucha diferencia en la dificultad de resolución para sujetos con y sin instrucción. Es por ello que sugieren dar una importancia significativa a la enseñanza de estrategias de resolución de problemas, la enumeración sistemática y el uso del diagrama de árbol.

Roa, Batanero y Godino (2003), analizaron las estrategias generales y estrategias aritméticas que aplican los estudiantes universitarios al resolver problemas combinatorios simples y compuestos, en su estudio destacan que la dificultad la observaron cuando los alumnos utilizaron estrategias como son traducir y descomponer el problema, en el primer caso se considera un error cuando al reformular el problema, se llega a otro cuya solución difiere de la que tenía el problema original. Respecto al segundo caso se da cuando el alumno fija una o más variables para reducir el problema a otro más sencillo, sin embargo, generaliza incorrectamente, o no tiene en cuenta los casos ya fijados; cabe señalar que estas actividades fueron identificadas a partir del análisis de contenido de sus producciones escritas. Concluyen, que los alumnos no emplean estrategias para reducir la complejidad del problema; además, que en la enseñanza no se aprovechan los problemas combinatorios para mostrar el uso de técnicas generales ni específicas de resolución de problemas; por otro lado, las estrategias que emplean espontáneamente para resolver un problema son:

- La traducción del problema a otro equivalente es más frecuente en los problemas de partición y colocación.
- El alumno fija variables en los problemas con mayor tamaño de solución, pues no puede hacer una enumeración sistemática o de generalizar directamente cuando los parámetros tienen un tamaño elevado.

- La descomposición en problemas compuestos en partes y en los de partición y colocación, al no reconocer la operación combinatoria.
- El uso de la regla del producto es generalizado en los problemas compuestos.

1.2. Algunos estudios en la resolución de problemas combinatorios en secundaria

Los estudios centrados en los Problemas de Conteo en el nivel básico son escasos, sin embargo, se encuentran otros más generales centrados en la Combinatoria y en el razonamiento combinatorio.

1.2.1. La “Combinatoria” en los libros de texto de secundaria

Espinoza y Roa (2014) se interesaron en la caracterización del significado institucional del objeto matemático “Combinatoria” presente en los libros de texto de Matemáticas utilizados en la Educación Secundaria en España; es decir, el tratamiento o aplicación de la Combinatoria en los libros de texto, puesto que se le considera como el recurso didáctico más utilizado en el proceso de enseñanza y aprendizaje, por lo que analizaron las siguientes editoriales: SM, Anaya y Santillana publicados en el 2008. Las variables que emplearon para describir el desarrollo teórico del tema son: ubicación del capítulo de Combinatoria en el libro de texto, contenidos incluidos, notación empleada y orden de presentación, tratamiento dado a las definiciones, modelo combinatorio considerado en el enunciado del concepto combinatorio, utilización de recursos didácticos, presencia de consideraciones históricas y ejemplos/ejercicios introductorios y posteriores a los contenidos sobre Combinatoria.

En su revisión encontraron que la estructura de los ejemplos y ejercicios presentes en la editorial SM es: ejemplos introductorios, -ejemplos posteriores a la definición-ejercicios posteriores a la definición. Por otro lado, en la editorial Anaya aparecen ejemplos introductorios-ejercicios posteriores a la definición y en Santillana solo se encuentran en ejemplos posteriores a la definición-ejercicios posteriores a la definición.

Respecto al análisis de las tareas propuestas en el libro de texto de la Editorial Santillana, seleccionado al azar; los autores manifiestan que contiene 87 tareas planteadas que los estudiantes deben resolver, aunque algunas de ellas incluyen bajo una misma numeración varias tareas independientes; en total contabilizaron 170 tareas como lo muestra la tabla 1.

Tabla 1. Tipo de tarea combinatoria.

Tipo de tarea	Frecuencia	%
Reconocimiento de la fórmula	94	55,3
Identificación de la operación combinatoria	66	38,8
Enumeración	6	3,5
Demostración o búsqueda de propiedades	4	2,4
Total	170	100

Otro aspecto relevante en las tareas fue que en la mayoría corresponde al reconocimiento de la fórmula combinatoria, mientras que un porcentaje considerable de tareas se relacionan con la identificación de una operación combinatoria, por ejemplo, planteamientos como el siguiente: “¿de cuántas formas podemos colocarnos 2 anillos diferentes en una mano de modo que no estén en el mismo dedo?”

Los modelos de selección y colocación son los que aparecen con mayor frecuencia y en similar proporción. También encontraron dos tareas del modelo de particiones, sin embargo, una cantidad considerable no corresponde a ningún modelo. Un aspecto que puede aumentar la dificultad de la tarea es la presencia de variables en los parámetros. De los cuales 38 actividades presentan que el parámetro n es una variable de tipo indeterminada dado que no se debe calcular su valor.

Espinoza y Roa (2014), llegan a dos conclusiones, la primera se refiere al análisis del desarrollo teórico del tema de Combinatoria, donde manifiestan que coinciden con los resultados obtenidos sobre el orden en que se presentan las operaciones combinatorias tienen relación con las investigaciones de Navarro-Pelayo (1991). Mientras que solo uno de los

manuales sigue las recomendaciones de Fischbein y Gazit (1988), quienes consideran que la primera operación combinatoria que se debe estudiar cuando se utiliza el diagrama en árbol es la de variaciones con repetición, seguido por las permutaciones y por último las combinaciones que ofrecen mayor dificultad a los alumnos.

Respecto a la notación que se emplea para las operaciones combinatorias, se basan en Hadar y Hadas (1981) quienes mencionan que la dificultad que poseen los estudiantes de elegir una notación que represente de forma adecuada la información y condiciones dadas en las tareas, aumenta debido a que algunos textos emplean diferentes notaciones para las operaciones combinatorias. Acerca de las expresiones algebraicas, que también se denotan como fórmulas, se presentan para calcular las operaciones combinatorias, donde dos de los textos emplean expresiones más simplificadas. También argumentan que los contenidos combinatorios son presentados primero con un ejemplo introductorio luego como uno o varios ejemplos después de la definición y por último diversos ejercicios posteriores a la definición.

La segunda, hace referencia al análisis de las tareas propuestas en el capítulo de Combinatoria de uno de los libros seleccionados, donde señalan que se desarrolla con mayor énfasis a actividades relacionadas al reconocimiento de la fórmula combinatoria que se debe utilizar, en cambio aparecen una cantidad considerable de tareas donde se debe de identificar la operación combinatoria. En cambio, hay escasas tareas de enumeración y de demostración o búsqueda de propiedades. Identifican una distribución homogénea de los contenidos combinatorios utilizados para resolver las tareas que se proponen. Y las operaciones combinatorias más frecuentes son las combinaciones ordinarias seguida por las permutaciones ordinarias y por último las variaciones con repetición, también hay ejercicios reducidos donde se utilice el diagrama de árbol.

1.2.2. Dificultades que presentan los estudiantes de secundaria en la resolución de técnicas combinatorias

García (2016), analiza el razonamiento de estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) para identificar las dificultades que pueden tener aplicando las técnicas combinatorias que estudiarán en próximos cursos. Este autor distingue por las ideas del enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática utilizada por Godino, Batanero y Font (2007), que admite que los objetos matemáticos se originan de las prácticas realizadas durante la resolución de determinados tipos de problemas de conteo. Es por ello que el objetivo lo estructura de la siguiente manera:

- O1. Analizar la dificultad relativa de los problemas de permutación, medida en porcentaje de respuestas correctas, en función del curso escolar y de las variables de tarea: tipo de permutación y modelo implícito del enunciado, ya que se había detectado en trabajos previos su influencia en dicha dificultad.
- O2. Analizar las estrategias que usan los estudiantes para resolver este tipo de problemas. No se espera que los estudiantes usen las operaciones combinatorias, pero se puede estudiar si llegan a dar una fórmula, usando previamente las reglas de la suma y producto; si realizan una enumeración sistemática o no sistemática; si se apoyan en un esquema gráfico, o cualquier otra estrategia.
- O3. Identificar los principales conflictos semióticos latentes en las respuestas y estrategias de los estudiantes. Se verá si se confunde el tipo de elementos y si se tiene en cuenta el orden y la repetición.
- O4. Comparar todos estos resultados con los obtenidos por Navarro-Pelayo (1994). Esta autora utilizó todas las operaciones combinatorias, pero respecto a las permutaciones su estudio es más limitado que el nuestro. Estudiaremos si se mantienen los porcentajes de repuestas correctas o encontramos cambios.

En esta tesis se obtienen varias conclusiones, en primer lugar, toma en cuenta la dificultad de los problemas, de donde obtiene que el razonamiento sobre los problemas de permutación mejora entre los alumnos con la edad, esto lo argumenta por los resultados obtenidos en cuestionarios aplicados, pero que han tenido menos dificultades para resolver los problemas de selección que los de colocación, de acuerdo con los resultados de Navarro-Pelayo,

Batanero y Godino (1997). Además, encuentra que los jóvenes no han conseguido deducir por sí mismo la fórmula precisa que resuelve la estructura combinatoria de cada problema, pues esta deducción requeriría la aplicación recursiva de la regla del producto, sin embargo, tratan de aplicar el uso de la enumeración.

1.3. La resolución de problemas de conteo en preescolar y primaria

English (1992) plantea una serie de problemas agradables para niños de cuatro a doce años que implica vestir ositos de juguetes en todas las posibles combinaciones diferentes de blusas y pantalones, este material fue elaborado de madera, la cual puede confeccionarse de cartón o de papel para uso individual, grupal o toda la clase. En el caso de las prendas fueron hechas de cartulina de colores y respaldadas con material autoadhesivo para que puedan sujetarse correctamente a los osos.

En este caso los estudiantes deben tener una comprensión firme de los términos “mismos conjuntos” y “conjuntos diferentes”, por lo que es importante permitir que los alumnos, en un primer momento, experimenten con materiales para que se familiaricen con dichos términos.

English (1992) señala, que en el caso de los osos pueden formularse interrogantes como las siguientes: ¿todos tienen trajes diferentes?, ¿cómo lo sabes?, ¿algún osito tiene el mismo atuendo?, ¿cómo puedes saber si tienen los mismos atuendos?, en este caso, los cuestionamientos son de importancia cuando los niños afirman que diferentes conjuntos tienen elementos comunes, ejemplo de ello son: una playera azul con pantalones rojos frente a una playera amarilla con pantalones rojos; la investigación subraya que varios niños tuvieron dificultades para distinguir la diferencia entre los conjuntos, ya que afirmaron que los conjuntos de playera azul con pantalones amarillos no son diferentes porque cada uno incluye playeras y pantalones de idéntico color.

También observó que ciertos estudiantes decidieron formar conjuntos solo con pantalones, mientras que otros trataron de hacer trajes adicionales invirtiendo la posición de las playeras

y los pantalones en los osos, describen que fue un aspecto placentero para ellos, a pesar de que no era viable. English (1992) se interesa en estas observaciones, ya que presentan particularidades porque mostraron un lado creativo de las respuestas de los niños en edad preescolar.

La autora especifica que los problemas para grados intermedios se aplicaron a setenta y dos estudiantes de entre siete y doce años y descubrió que los niños de mayor edad trabajaban de manera placentera puesto que se trataba de osos de peluche. Hace mención que ciertos niños utilizaron estrategias como son: dibujos, listas y tablas; y uno más a través de un método más sofisticado como el diagrama de árbol.

El estudio realizado reafirma el uso didáctico de materiales que llaman la atención, en este caso son objetos de osos graciosos con diferentes conjuntos de vestimenta, esto hace posible relacionar el contexto cotidiano de los alumnos, la cual consiste en vestirse, una actividad que realizan diariamente, y que en este caso logran que los niños mejoren la comprensión de la combinatoria.

Por lo que Varga (1969, citado por English, 1992, p. 77) señala que, en gran parte del mundo real, se presta para las actividades con materiales manipulativos, sin embargo, no se hace, ya que los jóvenes tienen un conocimiento previo de los conceptos abstractos. Ante ello, English (1992), menciona que es esencial que a los estudiantes se les dé la oportunidad de descubrir ideas combinatorias en lugar de seguir ciegamente las reglas que se les otorgan en las sesiones donde se estudian los temas de combinatoria.

Por último, English hace énfasis en que los estudiantes necesitan tomar en cuenta el patrón o regla que se desobedece, puesto que se utilizan estrategias más apegadas a su realidad social, esto no garantiza que se obtengan una solución correcta, por tal motivo se requiere monitorear el progreso de los intentos de solución. Esto indica que la utilidad de los materiales concretos en la dinámica de trabajo de los alumnos permite reflejar el aprendizaje que se establece como meta, los cuales permitan una interconexión, que, en un primer momento, investigue

los diferentes puntos de vista, así como de diversas interpretaciones del mundo natural y social, esto conlleva a pensar que se requieren contar con otras formas de alcanzar nociones significativas y ampliar aprendizajes.

Rivera (2013) investiga qué elementos de la combinatoria se proponen y cómo son planteados en los documentos oficiales de la educación primaria, así como las acciones asociadas a los elementos de la combinatoria que realizan los niños de primaria al resolver problemas combinatorios. Para ello analizó los libros de texto de primaria correspondientes al primer grado hasta el sexto grado, bajo los criterios: situación planteada, elemento de la combinatoria, recursos para organizar y tratar la información, términos utilizados y estructura de la lección.

Rivera (2013) reporta que los elementos de la combinatoria que se presentan en gran parte de los ejercicios planteados en el libro de texto son las nociones de conjunto, relación y orden. Asimismo, con menor frecuencia y de manera explícita el principio multiplicativo y la permutación, en cambio la técnica de combinación y variación aparece de manera implícita y no se definen. Respecto a las situaciones que se plantean, algunas hacen referencia a actividades cotidianas que se reproducen en zonas urbanas, tales como ir de compras, cambios de ropa, distintas formas de elegir platillos en un restaurante, formar claves de teléfono o de una caja fuerte, formas de repartir flores, placas de automóviles, fachadas de una casa, etcétera. Respecto a los recursos y formas de representación que se emplean en los libros de texto son los dibujos de todas las posibilidades y la construcción de tablas.

Los términos utilizados para hacer referencia a los elementos de la combinatoria son:

- Conjunto: colección, agrupación, características en común, clasifica, en qué se parecen.
- Relación: une, corresponde, alcanzarán, tantos como.
- Orden: orden, posición.

- Principio multiplicativo y las técnicas de conteo: de cuántas maneras, formas diferentes, combinaciones, permutación (Rivera, 2013, p. 65).

Para los grados de primero a tercero, el trabajo se centra más en la identificación y formación de “colecciones” dada una característica o bien dada la colección se identifique una característica en común o la relación que cumple la agrupación (Rivera, 2013, p. 65), de igual forma se estudia el orden, puesto que es importante para el valor posicional de los dígitos de un número dado. El principio multiplicativo, se utiliza para resolver un problema a través de la multiplicación.

Para grados posteriores, de cuarto a sexto grado, se emplean los conjuntos, relaciones y orden de manera implícita. De manera análoga se encuentra la permutación sin repetición como la técnica de conteo que más se trabaja. Las variaciones y combinaciones son asimiladas como obtención de distintas formas o combinaciones para obtener todas las opciones posibles. Rivera propone investigar sobre los elementos de la combinatoria que manipula el profesor, así como el tratamiento que da a estos contenidos en el aula. Por otro lado, también precisa que las guías escolares son un material que regularmente utilizan los estudiantes, por lo que es necesario indagar el tratamiento que se le da a esta temática.

En esta misma dinámica, Ramos (2016), también en el nivel primaria, indaga ¿cómo se plantean los conocimientos de combinatoria en la propuesta institucional de formación del docente de primaria y de su quehacer profesional?, de manera que contribuya a la propuesta de una alternativa de enseñanza de la combinatoria como apoyo para la práctica del profesor.

Ramos (2016) reporta que tanto en documentos oficiales de formación de profesores como de enseñanza en la primaria y el tratamiento de la combinatoria es limitado y poco profundo; incluso determinista en la escuela primaria. Observa que la formación que recibe el docente de primaria con su quehacer profesional, se mantiene una desvinculación entre los mismos, mientras el docente recibe una formación que de manera general le permite conocer las técnicas de conteo y el diagrama de árbol, en su quehacer diario no enfrentará el reto de

proponer para sus estudiantes actividades que los exhorta a razonar de una manera no determinista.

Ramos planteó cinco actividades que atiende los principios y técnicas de conteo proponiendo el uso de material concreto y señala algunas consideraciones para el profesor, la cual consiste en que reflexione respecto a la enseñanza de este contenido, ya que se requiere que el estudiante relacione las situaciones contextuales de la vida diaria que desde la combinatoria puede atender presentadas de manera correcta a través de la acción conjunta del estudiante con el profesor. También reconoce la importancia y necesidad de la enseñanza de la estadística y la probabilidad para una formación integral básica y ésta puede ser en parte mejorada a través de la investigación sobre el papel del profesor en la enseñanza de este tema.

Por consiguiente, English (1992) argumenta que el razonamiento combinatorio es una herramienta matemática útil en la colección de esquemas de representación de los estudiantes (Johnson, 1991; NCTM, 1989, citado por English, 1992, p. 77). Por lo que es esencial que a los estudiantes se les dé la oportunidad de descubrir ideas combinatorias en lugar de seguir reglas institucionalizadas aprendidas por los profesores o de los libros de texto. Sin embargo, aclara que los estudiantes sean capaces de reconocer el patrón o una regla llevaría a resolver un problema exitosamente, aunque esto no garantice siempre la obtención de una solución concreta.

Por otro lado, Ramos (2016), también en el nivel primaria, indaga bajo la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo se plantean los conocimientos de combinatoria en la propuesta institucional de formación del docente de primaria y de su quehacer profesional?, y cuyo objetivo es: identificar el conocimiento de combinatoria planteado en la propuesta institucional de la formación del docente de primaria y de la propuesta institucional de la educación primaria misma, que en teoría se moviliza para el tratamiento de la combinatoria, y de esta manera se proponga una alternativa de enseñanza de la combinatoria como apoyo para la práctica del profesor.

La investigadora opina que tanto documentos oficiales de formación de profesores como de enseñanza en la primaria y el tratamiento de la combinatoria es limitado y poco profundo; incluso determinista en la escuela primaria. Observa que la formación que recibe el docente de primaria con su quehacer profesional, se mantiene una desvinculación entre los mismos, mientras el docente recibe una formación que de manera general le permite conocer las técnicas de conteo y el diagrama de árbol, en su quehacer diario no enfrentará el reto de proponer para sus estudiantes actividades que los exhorte a razonar de una manera no determinista.

Por tal motivo Ramos planteó cinco actividades que atiende los principios y técnicas de conteo que proponen el uso de material concreto y señala algunas consideraciones para el profesor que apoyen su labor de guiar a los estudiantes en su camino de dar sentido a sus acciones. También reconoce la importancia y necesidad de la enseñanza de la estadística y la probabilidad para una formación integral básica y ésta puede ser en parte mejorada a través de la investigación sobre el papel del profesor en la enseñanza de este tema.

Los resultados de Rivera (2013) son similares a las indagaciones realizadas con jóvenes universitarios, en el sentido de que los niños presentaron dificultades al abordar problemas de tipo combinatorio. La propuesta de Ramos (2016) sigue las orientaciones de Steinbring (2005) para el diseño de sus actividades, esto es el triángulo epistemológico que se muestra en la Figura 1. Las actividades tienen la característica de que no prevalece el ejercicio de la multiplicación, ya que prioriza el trabajo con las técnicas de conteo, que no es de un modo sistemático. Es necesario agregar que retoma las ideas de Fischbein (1975), acerca de las intuiciones, por lo que sugieren el uso de material concreto.

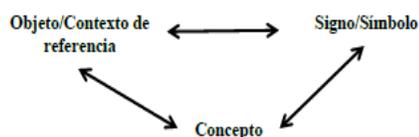


Figura 1. Triángulo epistemológico de Steinbring (Tomado de La Combinatoria en la educación primaria: una alternativa de enseñanza).

Los resultados de las investigaciones que atienden la problemática existente respecto a la Combinatoria, en particular a los problemas de conteo, sugieren adecuar estrategias para resolver estos problemas, la aplicación de procedimientos de enumeración, el uso correcto de diagramas y tablas, así como de material manipulativo para robustecer el aprendizaje de esta temática.

1.4. Planteamiento del problema y pregunta de investigación

La importancia de la combinatoria en las investigaciones que se han realizado, proyectan conclusiones que se originan a partir de los planteamientos, dificultades y errores de los problemas combinatorios, presentados por alumnos **en todos los niveles educativos**, esto señala que dicho tema es de interés pues forma parte de la curricula institucional.

Es importante reconocer que existen autores que han elaborado propuestas pertinentes para la enseñanza de los Problemas de Conteo, también de trabajos que conciben la importancia de mostrar planteamientos más contextualizados, como lo señala English (1992), quien propone trabajar con material manipulable. Sin embargo, se destaca que es necesario un seguimiento progresivo ya que es recurrente caer en aprendizajes erróneos si el procedimiento de resolución no es tratado de manera adecuada. Por otra parte existen investigaciones que analizan cómo aparecen el tema de **Combinatoria en los libros de textos**, tal es el caso de Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994), quienes indagan sobre cómo se presentan los contenidos de Combinatoria en los textos que usan los profesores y alumnos, la cual se basó en una muestra de 12 libros editados entre 1975 y 1989 en España. Por otro lado, en México, las investigaciones de Rivera (2013) y Hernández (2016) plantean el desarrollo de situaciones problemáticas donde los alumnos de educación primaria, resuelvan las actividades de una manera más contextualizada.

En contraste, desde mi experiencia como profesor rural de telesecundaria he presentado dificultades para entender los elementos que conforman los Problemas de Conteo, pues ello implica conocer la funcionalidad de este contenido a través de su estructura, así como la importancia y la manera en cómo se presenta en los libros de texto, ya que son una

herramienta didáctica y una guía fundamental para el desarrollo de mi actividad docente, así como del estudiante. Considero que para la resolución de una o varias situaciones problemáticas que involucren a la Combinatoria es necesario interiorizarla y comprenderla, logrando así que sea significativa para los alumnos. Por otro lado, en México la investigación en las escuelas cuya modalidad es Telesecundaria ha sido poco explorada, y además por la importancia que tiene el libro de texto tanto para la enseñanza como para el aprendizaje, en este estudio se planteó la siguiente pregunta de investigación ¿Cómo se presentan los problemas de conteo en el libro de texto de telesecundaria?

Por lo tanto, se exponen los siguientes objetivos:

- Describir el tratamiento del tema de conteo en los libros de texto de Telesecundaria.
- Clasificar los problemas de Conteo de acuerdo con los principios y técnicas de conteo y los modelos implícitos en ellos.

1.5. Justificación

La Telesecundaria es un modelo de educación mexicana con el objetivo de impartir la educación secundaria a través de transmisiones televisivas en las zonas rurales o de difícil acceso de la República Mexicana y para abatir el analfabetismo. En este subsistema, la funcionalidad que tienen los libros de texto para el profesor consiste en articular recursos impresos, audiovisuales e informáticos. Para cada asignatura se tienen dos volúmenes, la información elemental y las actividades de aprendizaje. En general, los libros de texto se utilizan como una guía que permite observar de manera general el curso, para los cuales se proponen secuencias didácticas con los temas y otros recursos que se puedan relacionar. De esta manera, le facilita al profesor la manera de organizar el trabajo entre los alumnos. Por tal motivo se hace necesaria revisar cómo se desarrolla del tema de Problemas de Conteo en los libros de telesecundaria editados en el año de 2006 y que durante más de una década fue un tema recurrente en esta modalidad.

El libro de texto es uno de los recursos didácticos principales que más se utiliza en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Espinoza y Roa, 2014), por lo que los investigadores se han centrado en identificar cómo es que se trata el contenido de la Combinatoria. Por otro lado, los estudios acerca de la combinatoria en México se han centrado en identificar los elementos de la combinatoria que están presentes en los libros de texto de la educación primaria que abarcan 6 grados (Rivera, 2013) y en una propuesta de enseñanza para este mismo nivel educativo (Ramos, 2016). Sin embargo, poco se ha explorado en la educación secundaria, en particular en la modalidad denominada como Telesecundaria. Por los estudios analizados y por las características del contexto donde se desarrolla la enseñanza y el aprendizaje de los Problemas de Conteo, la experiencia docente del investigador, así como la participación decidida de hacer un estudio en la cual se refleje características concretas de esta temática para explorar y conocer de manera apropiada el contenido que se desarrolla en el siguiente documento es necesaria la investigación que se propone.

CAPÍTULO 2

REFERENTES TEÓRICOS Y MÉTODO

2. Referentes teóricos y Método

2.1 Referentes teóricos

Los elementos sustanciales que se utilizan para la enseñanza de los Problemas de Conteo son los principios aditivo y multiplicativo, las técnicas de conteo conformados por la variación, permutación y combinación. En la Combinatoria definida por Rusin (2002, en Sriraman y English 2004) como el arte de contar como “un área de la matemática en la cual se estudian familias de conjuntos (usualmente finitas) con ciertas características en los arreglos de sus elementos o subconjuntos, y se preguntan ¿cuáles son las posibles combinaciones y cuántas son?, encontramos los modelos combinatorios implícitos como son: colocación, selección y división o partición.

2.1.1 Razonamiento combinatorio

El concepto de Combinatoria tiene un terreno muy amplio para su exploración, descripción o análisis, ya que no solo se limita en resolver problemas con las diferentes técnicas de conteo. De acuerdo con Batanero et al. (1997), Bernoulli explica que la Combinatoria es el arte de enumerar todas las formas posibles en las que se puede mezclar y combinar un número determinado de objetos para asegurarse de que no se pierda ningún resultado posible. Para Hart (1992, citado en Batanero et al., 1997), la Combinatoria es como la matemática de la cuenta.

Para Navarro-Pelayo et al. (1996) reflexionan que la Combinatoria, no solo es una herramienta de cálculo para la Probabilidad, esta idea ha sido sustentada por Piaget e Inhelder (1951), quienes argumentan que si un sujeto no posee capacidad combinatoria, no tendrá capacidad para usar la idea de Probabilidad, salvo en casos de experimentos aleatorios muy elementales, es decir, se relacionan la aparición del concepto de azar con la idea de permutación y la estimación correcta de probabilidades con el desarrollo de concepto de combinación (Navarro-Pelayo, et al., 1996, p. 1).

El uso de los diagramas de árbol en Probabilidad y en Combinatoria permite identificar la relación entre el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento compuesto y las técnicas de conteo (variaciones, permutaciones y combinaciones). Por lo que el espacio muestral necesita un proceso de construcción combinatorio, que se genera por operaciones elementales en eventos simples. Esto indica que la capacidad combinatoria es un componente fundamental del pensamiento formal, esto es sustentado por Inhelder y Piaget (1955), ya que coinciden en que el razonamiento hipotético-deductivo opera con las posibilidades que el sujeto descubre y evalúa, por medio de operaciones combinatorias.

Heitele (1975) incluyó la Combinatoria en su lista de diez ideas estocásticas fundamentales que deberían estar presentes, explícita o implícitamente, en cada situación de enseñanza. De acuerdo con Batanero et al. (1997), esta conexión es notable en los principales temas probabilísticos del currículo de matemáticas, por lo que un nivel adecuado de razonamiento combinatorio está vinculado al logro de los objetivos curriculares principales. Y he aquí donde radica su importancia, como lo sustenta Rivera (2013), ya que el razonamiento combinatorio está vinculado a diferentes conceptos y procedimientos que hacen su aparición a medida que el sujeto se enfrenta y realiza acciones respecto a una situación de tipo combinatorio.

De manera concreta, el estudio del razonamiento combinatorio lo observamos en el estudio que desarrollaron Navarro, Batanero y Godino (1996) aplicaron un cuestionario con 13 ítems a una muestra de 720 alumnos de 14 y 15 años para evaluar el razonamiento combinatorio, donde 352 recibieron instrucción en Combinatoria y 368 no presentaban la enseñanza del mismo contenido; mencionan que un punto importante en la evaluación del razonamiento combinatorio fue identificar el tipo de error en las soluciones de los alumnos, son errores comunes a los diferentes modelos de selección, colocación y partición, respecto a cada ítem:

- Cambiar el tipo de modelo matemático en el enunciado del problema: Consiste en cambiar un problema de selección por un problema de partición.

- Error de orden: Se presenta cuando confunden los criterios de combinaciones y variaciones, dicho de otra manera, es considerar el orden de los elementos cuando es irrelevante o no considerar el orden cuando es esencial.
- Error de repetición: Cuando no considera la posibilidad de repetir los elementos cuando esto es posible, o repite los elementos cuando no es posible hacerlo.
- Confundir el tipo de objetos: Considerar objetos idénticos cuando son distinguibles, o bien qué objetos diferentes son indistinguibles.
- Enumeración no sistemática: Resolver el problema por enumeración, mediante ensayo y error, sin un procedimiento recursivo que lleve a la formación de todas las posibilidades.
- Respuesta intuitiva errónea: Sólo dan una solución numérica errónea, sin justificar la respuesta.
- No recordar la fórmula correcta de la operación combinatoria que ha sido identificada correctamente.
- No recordar el significado de los valores de los parámetros en la fórmula combinatoria.
- Interpretar errónea del diagrama del árbol: Se presentó cuando construyeron un diagrama de árbol de manera inadecuada o interpretaron incorrectamente el diagrama producido

Errores adicionales, específicos de los problemas de colocación y partición:

- Confusión en el tipo de celdas (tipo de subconjuntos): Distinguir celdas (subconjuntos) idénticas o que no es posible diferenciar las celdas (subconjuntos) distinguibles.
- Error en las particiones formadas
 - a) La unión de todos los subconjuntos en una partición no contiene a todos los elementos del conjunto total.
 - b) Olvidar algunos tipos posibles de partición.

Su investigación arroja que los jóvenes presentaron dificultades en resolver problemas, a pesar de que los problemas se resolvían con una operación combinatoria. Describen que en los alumnos sin instrucción existe poca diferencia entre los tres tipos de modelos (selección, colocación y partición). Por otra parte, los alumnos que tenían nociones de la enseñanza de

Combinatoria presentaron una reducción general de la dificultad en los problemas de selección, de variaciones, permutaciones y permutaciones con repetición.

2.1.2. Modelos combinatorios

Los modelos combinatorios están implícitos en el enunciado de los problemas combinatorios simples, de acuerdo con Dubois (1984, citado por Navarro-Pelayo, 1996) se pueden clasificar tres modelos diferentes: selección, colocación y partición o división de un conjunto en subconjuntos.

En el modelo combinatorio de *selección* se considera un conjunto de m objetos (generalmente distintos) de los cuales se extrae una muestra de n de ellos, ejemplo de ello puede ser el siguiente problema: Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar la pizarra. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas formas puede elegir tres de estos alumnos? Ejemplo: Elisa, Fernando y María. Algunos verbos claves que pueden identificar a este modelo son: seleccionar, tomar, extraer, sacar, etc.

En el caso del modelo de colocación, hace referencia a una serie de n objetos en m celdas, un ejemplo de ello lo encontramos en la siguiente situación: se disponen de tres cartas iguales. Se desea colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo sumo, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Otros verbos claves son: colocar, introducir, asignar, guardar, etc. Aunque, hay otras posibilidades en este modelo que pueden depender de lo siguiente:

- Si los objetos a colocar son idénticos o no.
- Si las celdas son idénticas o no.
- Si deben ordenarse los objetos colocados dentro de las celdas
- Las condiciones que se añadan a la colocación, como el máximo número de objetos en cada celda, o la posibilidad de tener celdas vacías, etc.

El modelo combinatorio partición, la cual se trata de dividir un conjunto de n objetos en m subconjuntos, se puede visualizar la colocación de n objetos en m celdas como la partición de un conjunto de n elementos en m subconjuntos (las celdas), el cual se puede visualizar en la siguiente situación: María y Carmen tienen cuatro cromos numerados del 1 al 4. Deciden repartírselos entre las dos (dos cromos para cada una). ¿de cuántos modos se pueden repartir los objetos? Algunas palabras claves que se asocian a este modelo son: dividir, partir, descomponer, separar, etc.

2.1.3. Reglas generales de combinatoria y técnicas de conteo

Dado que los problemas combinatorios son variados, éstas se solucionan mediante dos reglas fundamentales: la regla de la suma y la regla del producto; y con las Técnicas de Conteo como son: permutaciones, variaciones y combinaciones.

La regla de la suma o **principio aditivo**, es que: si cierto objeto A puede ser escogido de m maneras, y otro objeto B, de n maneras, la elección en A o B se puede efectuar de $m + n$ modos (Vilenkin, 1972: p. 14), es decir, que el número total de hacer una elección es igual a la suma de los números de elección de todas las clases.

La regla del producto o **principio multiplicativo**: si el objeto A se puede escoger de m maneras y si, después de cada una de estas elecciones, el objeto B se puede escoger de n modos, la elección del par (A, B) en el orden indicado se puede efectuar de mn formas (Vilenkin, 1972: p.14).

Wilhelmi (2004) define las técnicas de conteo (permutación, variación y combinación) de la siguiente manera:

Permutaciones: Permutar, generalmente quiere decir “variar la disposición u orden en que estaban dos o más cosas”. Es decir, para estos arreglos es precisar si las cosas son o no indistinguibles, para asegurar de que el nuevo arreglo es distinto al anterior.

Permutaciones ordinarias o sin repetición P_n : son los distintos grupos o arreglos que se pueden formar, de modo que en cada grupo entren los n elementos y que un grupo se diferencie de los demás en el orden de colocación de los elementos.

$$P_n = n!$$

Permutaciones con repetición $PR_n^{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k}$: Se llaman permutaciones con repetición de n elementos, distribuidos en k grupos de $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k$ elementos indistinguibles, respectivamente, de tal forma que $a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k = n$ a las distintas configuraciones que se pueden formar con los n elementos, de tal forma que cada una de ellas se diferencie de las demás en el orden de colocación de sus elementos, excluyendo las reordenaciones de elementos indistinguibles (que pertenecen a un mismo grupo). Entonces se tiene que:

$$PR_n^{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_{k-1}! \cdot a_k!}$$

Variaciones: Variar quiere decir “hacer que una cosa sea diferente en algo de lo que antes era”. Es decir, en matemáticas, una variación de una familia de elementos se refiere a la modificación de alguno de sus elementos o del orden en que se presentan.

Variaciones ordinarias o sin repetición $V_{n,k}$: son arreglos de n elementos tomados de k en k , de tal forma que en cada grupo entren k elementos distintos, y que un grupo se diferencie de los demás, ya sea en alguno de sus elementos, o en su orden de colocación. Se tiene:

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Variaciones con repetición $VR_{n,k}$: Se llaman variaciones con repetición de n elementos, tomados de k en k , a los distintos grupos que se pueden formar con los n elementos, de tal forma que en cada grupo entren k elementos iguales o distintos y que un grupo se diferencie de los demás, bien en algún elemento, bien en su orden de colocación. Se denota por:

$$VR_{n,k} = n^k$$

Combinaciones: en lenguaje común, combinar es “nir cosas diversas, de manera que formen un compuesto”. En matemáticas, se hace referencia al número de conjuntos de un

determinado número de elementos que se pueden formar con un universo de objetos, sin importar el orden de selección, sino qué elementos se toman.

Combinaciones ordinarias o sin repetición $C_{n,k}$: se llaman combinaciones ordinarias o sin repetición de n elementos, tomados de k en k , los distintos conjuntos de k elementos distintos, es decir, un conjunto se diferencia de otro en, al menos, un elemento, no importando el orden de colocación o selección. Se tiene:

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

Ante ello podemos concluir que en el caso de los libros de Telesecundaria se observa un proceso que se divide en dos momentos: en una primera fase utiliza los recursos visuales como son diagramas de árbol, tablas, y de manera implícita el uso de los principios aditivo y multiplicativo, análogamente, en un segundo momento aparecen las Técnicas de Conteo, donde los alumnos perciben que ya no es factible contar uno a uno todos los resultados posibles, ello implica utilizar los mismos procedimientos pero ubicando una notación algebraica que satisfagan la obtención de todos los resultados posibles.

2.2. Método

Este trabajo se desarrolló siguiendo las siguientes fases:

2.2.1. Revisión bibliográfica

Esta fase consistió en la revisión de diversas investigaciones que atienden algún aspecto referente a los problemas combinatorios en los distintos niveles educativos, como son: el nivel superior, medio superior y básico. Por otro lado, también permitió percatarse que los estudios acerca de la combinatoria en México se han centrado en identificar los elementos de la combinatoria que están presentes en los libros de texto de la educación primaria (Rivera, 2013) y en una propuesta de enseñanza para este mismo nivel educativo (Ramos, 2016), lo cual da evidencia que poco se ha explorado en la educación secundaria, en particular en el subsistema denominado como Telesecundaria. Siendo esto último una de las razones del interés en desarrollar este estudio.

2.2.2. Revisión de plan y programa de estudio de 2006 y 2011

Los Planes y Programas de Estudio tienen una función importante en el proceso educativo ya que rigen los objetivos y contenidos que son implementados por los maestros para que los alumnos interactúen con actividades organizadas por asignaturas relacionadas entre sí, y que poseen una continuidad. Por otra parte, los Programas de Estudio se identifican por estar divididas en asignaturas, las cuales conforman a un Plan de Estudio, en el caso de secundaria se caracterizan por ser orientadoras para el desarrollo de propósitos, enfoques y sugerencias para una evaluación apropiada, también podemos encontrar una organización por bloques.

Estos documentos se emplearon con la finalidad de explicar que los libros de textos de matemáticas funcionaron con un plan y programa específico, sin embargo, a través de los cambios en educativos por reformas en este rubro, hace posible diferenciar el contexto institucional en cómo se trabaja antes y después un mismo contenido, como es el caso de los Problemas de Conteo.

Por lo anterior es necesario atender este aspecto importante porque puntualiza la manera en que se plantea el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática escolar. En el Plan y Programa de Estudios 2006, (SEP, 2006) se pretende que, con el estudio de las matemáticas, los alumnos aprendan a plantear y resolver problemas en distintos contextos, así como a justificar la validez de los procedimientos y resultados y a utilizar adecuadamente el lenguaje matemático para comunicarlos. En lo que respecta al contenido de Problemas de Conteo, se sugiere su estudio en el bloque 1 para el primero y el segundo grado de Telesecundaria. Uno de los objetivos de este bloque para ambos grados es que los alumnos resuelvan problemas de conteo con apoyo de representaciones gráficas (arreglos rectangulares, diagramas de árbol u otros recursos) y cálculos numéricos identificando regularidades.

En el Plan y Programa de Estudio de 2011, (SEP, 2011), pasa algo similar, los temas de Problemas de Conteo se estudian en los mismos grados y en el mismo bloque que en el plan y programa 2006. Sin embargo, en los programas de 2011 se puede percibir que para el tema en cuestión no tiene un aprendizaje esperado definido tanto para el primer como para el segundo grado, pero en su eje Nociones de probabilidad tiene como objetivo identificar y

practicar juegos de azar sencillos y registro de los resultados, así como la elección de estrategias en función del análisis de resultados posibles y la comparación de dos o más eventos a partir de todas las opciones que resulten.

2.2.3. Revisión de libros de texto de telesecundaria

Para este estudio se revisaron los libros de texto que utiliza el estudiante: Matemáticas I, 1er Grado, Volumen I y Matemáticas II, 2do Grado, Volumen I.

Para la revisión de cada uno de los textos se adaptaron los criterios empleados en Batanero et al. (1994) con la finalidad de identificar los elementos sustanciales del tema de conteo, es decir, cómo se presenta el tema problemas de conteo en los libros de texto. Estos son:

- a. **Contenidos incluidos y orden de presentación:** Se refiere a los contenidos institucionalmente establecidos, los cuales incluyen de manera implícita los siguientes modelos: colocación, selección y partición o división, así como los principios aditivo y multiplicativo.
- b. **Notación empleada:** Corresponde a los símbolos y fórmulas que se emplean para dar solución a los problemas que se plantean en las dos secuencias del libro de texto.
- c. **Definiciones presentadas; modelos combinatorios.** Hace referencia aquellos conceptos que se encuentran definidos para realizar aclaraciones del contenido que se expone.
- d. **Recursos didácticos.** Hace mención de los materiales que se ocupan en los temas de problemas de conteo, estos pueden ser: visuales, audiovisuales y manipulables.
- e. **Tipo y número de ejemplos y su distribución en el texto.** Son los que se utilizan para estructurar el desarrollo del tema de cada secuencia, está dada por indicaciones por ciertos enunciados verbales, así como las operaciones combinatorias implicadas.

CAPÍTULO 3

ANÁLISIS DE RESULTADOS

3Análisis de Resultado

3.1.Revisión de los planes y programas de estudio 2006 y 2011 de Educación Básica Secundaria

3.1.1. Plan y programa de estudio de 2006

El plan de estudios de 2006 está orientado a que los alumnos aprendan a plantear y resolver problemas en distintos contextos, es decir, pretende que los jóvenes justifiquen la validez de los procedimientos y resultados utilizando adecuadamente el lenguaje matemático para comunicarlos. Por lo que es responsabilidad de la escuela garantizar que a través de las sesiones identifiquen y evalúen experimentos aleatorios con base en la medida de la probabilidad (SEP, 2006).

De acuerdo al interés de este estudio, la competencia que se desarrolla es el manejo de la información, la cual se relacionan con: la búsqueda, evaluación y sistematización de información; el pensar, reflexionar, argumentar y expresar juicios críticos; analizar, sintetizar y utilizar información; el conocimiento y manejo de distintas lógicas de construcción del conocimiento en diversas disciplinas y en los distintos ámbitos culturales (SEP, 2006, p. 11).

El propósito del eje Manejo de la información, implica la resolución de problemas que requieren análisis, la organización, la representación y la interpretación de datos provenientes de diversas fuentes (SEP, 2006, p. 9). En cuanto al enfoque (SEP, 2006), manifiesta que es necesario llevar al aula actividades de estudio que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados.

3.1.2. Plan y Programa de Estudio de 2011

El programa de Estudio 2011 contempla a la asignatura de matemáticas en el Campo de formación: Pensamiento matemático, la cual articula y organiza el tránsito de la aritmética y la geometría y de la interpretación de información y procesos de medición, al lenguaje

algebraico; del razonamiento intuitivo al deductivo, y de la búsqueda de información a los recursos que se utilizan para representarla (SEP, 2011). Cabe señalar que estos procesos de enseñanza-aprendizaje se apoyan más en el razonamiento que en la memorización.

De acuerdo con la SEP (2011), el énfasis de este campo radica en el planteamiento se realiza con base en la solución de problemas, en la formulación de argumentos para expresar sus resultados, así como en el diseño de estrategias y sus procesos para la toma de decisiones. Por lo que su objetivo es pasar de la aplicación mecánica de un algoritmo a la representación algebraica. Por tal motivo, su estudio se orienta a aprender a resolver y formular preguntas en las que sea útil la herramienta matemática (SEP, 2006, p. 49), ello implica generar una necesidad de justificar la validez de los procedimientos y resultados que encuentren, a través del uso de este lenguaje.

A manera de conclusión, ambos planes y programas de estudio coinciden en que los alumnos conciban que la matemática es de gran utilidad en la vida cotidiana, por lo que en los documentos revisados destacan el planteamiento, la resolución, la justificación y validez de los procesos que manejan para obtener un resultado correcto a través de un lenguaje matemático para comunicarlos dentro y fuera del aula.

En el caso de los Programas de estudio coinciden en el mismo eje (Manejo de la información), el resultado del estudio del bloque 1, espera que los alumnos resuelvan problemas de conteo con apoyo de representaciones gráficas. En tanto que para el segundo grado existe la expectativa de que los alumnos resuelvan problemas de conteo mediante cálculos numéricos.

En los programas de estudio de 2011, se encuentra que uno de los propósitos del estudio de las Matemáticas para la educación secundaria es: calcular la probabilidad de experimentos aleatorios simples, mutuamente excluyentes e independientes (SEP, 2011), ello pretende que los jóvenes infieran sobre las posibilidades de que ocurra un evento determinado mediante el azar y reconociendo que un suceso afecte o no a otro.

Se puede apreciar que el libro de texto de Telesecundaria tiene más vinculación con el Plan y programa de estudio de 2006, donde el tema de Problemas de Conteo aparece de la siguiente manera:

Los Problemas de Conteo aparece en el bloque I de primer grado en el eje Manejo de la información, con las siguientes características:

- *Tema: Representación de la información*
 - *Subtema: Diagramas y tablas*
 - ✓ *Conocimientos y habilidades:* Resolver problemas de conteo utilizando diversos recursos, tales como tablas, diagramas de árbol y otros procedimientos personales
 - ✓ *Orientaciones didácticas:* En este grado se trata de sistematizar estos recursos y encontrar regularidades que permitan acortar caminos para encontrar soluciones. La dificultad de estos problemas tiene que ver, entre otras variables, con la cantidad y el tipo de elementos que se van a combinar (SEP, 2006, pág. 32).

De la misma manera, en segundo grado dicho tema se encuentra en el bloque I en el eje *Manejo de la información*, con las siguientes especificaciones

- *Tema: Representación de la información*
 - *Subtema: Diagramas y tablas*
 - ✓ *Conocimientos y habilidades:* Anticipar resultados en problemas de conteo, con base en la identificación de regularidades. Verificar los resultados mediante arreglos rectangulares, diagramas de árbol u otros recursos.
 - ✓ *Orientaciones didácticas:* En este grado se continuará con el desarrollo del razonamiento combinatorio por medio de problemas de conteo, y se utilizarán diagramas de árbol y arreglos rectangulares como recursos para organizar la información y averiguar el total de

combinaciones posibles. Señalan que esto facilitará a los alumnos encontrar procedimientos sistemáticos de enumeración y finalmente enunciar algunas fórmulas de recuento sencillas (SEP, 2006, p. 72).

Sin embargo, en función del Plan y Programa de Estudio de 2011, esto implicaba adaptar el contenido a los aprendizajes esperados. En este programa, el contenido de Problemas de conteo no aparece como tal, puesto que son documentos originados de una reforma educativa la cual considera adaptar los libros de textos del alumno a los aprendizajes esperados, bajo este sentido solo aparecen los siguientes subtemas:

En el bloque IV para primer grado se desarrolla el eje *Manejo de la información*, donde se encuentra las actividades de esta investigación con tres temas; de los cuales solo aparece un contenido referente a los Problemas de conteo, sin embargo, no da más detalle:

➤ *Nociones de probabilidad:*

- Resolución de problemas de conteo mediante diversos procedimientos.
Búsqueda de recursos para verificar los resultados (SEP, 2011, p. 34).

Conteo. Sin embargo, se trabaja con el eje Manejo de la información , con temas, tales como:

Proporcionalidad y funciones, Nociones de probabilidad y, Análisis y representación de datos.

Del mismo modo, para el primer grado de secundaria, los aprendizajes esperados no se expresan de manera explícita con el tema de Problemas de conteo, ya que dichos aprendizajes no se relaciona con la secuencia 8 del libro de texto de Telesecundaria. No obstante en el eje de Manejo de la información, solo describe la práctica de los juegos de azar sencillos y su registro, también indica la elección de estrategias para obtener los resultados posibles, este

contenido solo se encuentra en el bloque IV, pero no presenta mucho énfasis ya que en el libro de texto el mismo tema se localiza en el bloque 1.

Análogamente para el segundo grado el aprendizaje esperado solo enfatiza en comparar la condición de la probabilidad en eventos simples, en donde señalan atender el contenido de nociones de probabilidad, donde se proponen actividades de dos o más eventos a partir de sus resultados posibles, utilizando las siguientes oraciones: “es más probable que...” y “es menos probable que.”

3.2. Revisión de libros de texto de matemáticas del alumno de Telesecundaria

Los libros de texto presentan una importancia para el desarrollo de las actividades escolares, es decir repercuten en el qué y el cómo se enseña, ya que son los recursos inmediatos que tienen los profesores y alumnos para realizar una sesión de clases. Esto nos lleva a reflexionar sobre qué características cumple la Combinatoria en los libros de textos, principalmente en Telesecundaria. A continuación, se detalla lo encontrado en cada uno de los criterios que se emplearon para la revisión de cada libro de texto.

3.2.1. Matemáticas I. Primer Grado, Volumen I

El libro de Matemáticas de Primer Grado para Telesecundaria presenta el tema de Problemas de Conteo en la Secuencia 8, la cual presenta 4 sesiones.

Sesión 1

En este caso solo se estudia la primera actividad que permite entender el tema principal que se describe a continuación: Ana vive en el centro de la ciudad de Puebla, en la esquina que forman las calles 2 Norte y 6 Oriente. Ella va a la escuela que está ubicada en 4 Norte y 12 Oriente. El mapa muestra el recorrido que ayer hizo Ana para ir de su casa a la escuela. (SEP, 2006, p. 90), las preguntas detonadoras para este problema se enuncian de la siguiente manera:

- a) En el mapa de su libro, cada quién marque con color verde otro recorrido que podría hacer Ana para ir de su casa a la escuela.
- b) En este recorrido, ¿cuáles son las calles por las que pasa Ana para llegar a la escuela?
- c) Marca en tu mapa con color azul el recorrido que trazó tu compañero, ¿por cuáles calles pasa este nuevo recorrido? (SEP, 2006 p. 91)

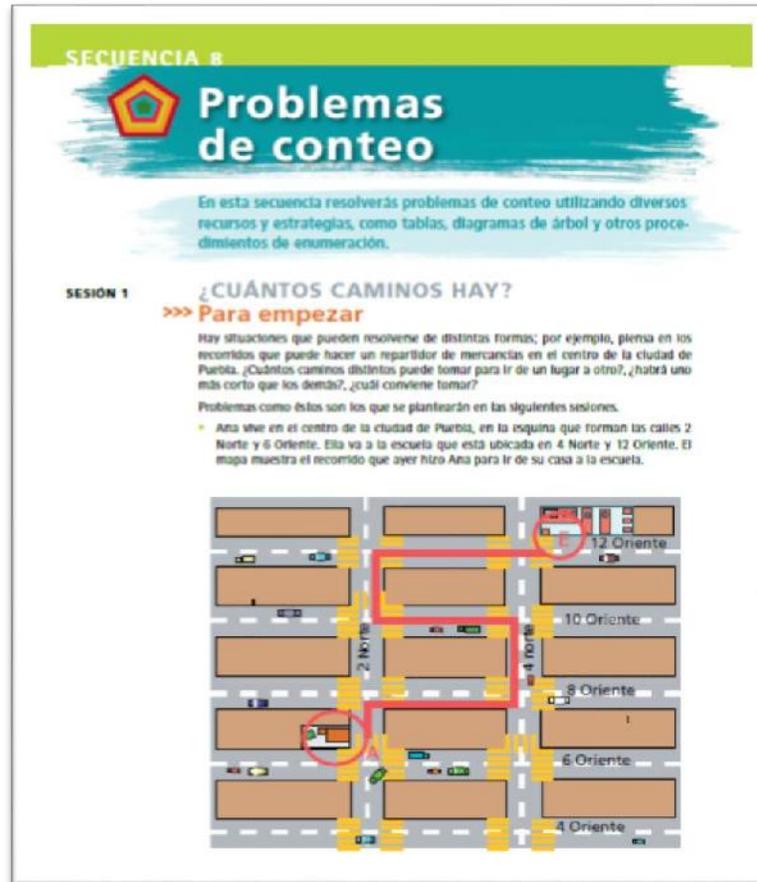


Figura 1. Sesión 1 del libro de matemáticas de primer grado

a) Contenidos incluidos y orden de presentación

Es el principio aditivo, porque se pide contar los recorridos, uno a uno, que puede hacer Ana de su casa a la escuela.

b) Notación empleada

Los símbolos o letras que se utilizan son: N, N, O, N y ($\uparrow\uparrow\rightarrow\uparrow$). Estos, permiten mostrar los diferentes recorridos que puede hacer Ana para ir de su casa a la escuela.

c) Definiciones presentadas; modelos combinatorios

No presenta definiciones específicas del principio aditivo, sin embargo, se presentan procedimientos de enumeración que permiten encontrar todos los recorridos posibles de caminar de un punto a otro, que se distingue con símbolo, una letra o un nombre.

d) Recursos didácticos

El recurso didáctico al que se hace referencia es visual. Solo se presentan mapas con nombres de las calles, de los cuales habrá de apoyarse para encontrar todos los caminos posibles, y en su caso, los recorridos más cortos.

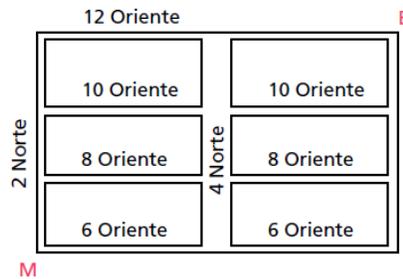


Figura 2. Ejemplo de mapa presentado en la sesión 1 (Tomado de Matemáticas I. Volumen I).

e) Tipo y número de ejemplos y su distribución en el texto

Los problemas y ejemplos aparecen bajo el contexto de letras, símbolos y objetos visuales tales como los mapas, en los que indica o pide contestar: ¿cuáles son las calles...?, ¿cuántas formas diferentes hay...?, ¿cuántas formas diferentes tiene Ana...?, ¿De cuántas formas diferentes puede...?, por lo que se observa el uso del principio aditivo al enumerar de cuántas formas diferentes se puede caminar de un punto A a otro punto identificado como el punto E.

Para encontrar los procedimientos de enumeración parte de hacer consideraciones sin restricción, luego se limita a ciertas condiciones, por ejemplo, recorrido corto, las cuales consta del menor número de cuadras que se puede caminar y en las que no hay regreso.

Por último, se emplea un ejercicio con la finalidad de aplicar lo que se aprende en la sesión:

Encuentra el mapa 5 los diferentes recorridos que puede seguir alguien para ir del punto M a la escuela (E), caminando el menor número de cuadras. Representalos en tu cuaderno utilizando las letras N y O. Posteriormente se contestan las siguientes cuestiones:

- ¿Cuántas cuadras tiene el recorrido más corto?
- ¿De cuántas formas diferentes puedes caminarlo para llegar a la escuela?
- En el **mapa 6**, ¿cuántas cuadras forman al recorrido más corto que se puede seguir para ir de M a E?
- ¿De cuántas formas diferentes lo puedes realizar? ¿Se puede realizar el siguiente recorrido N, N, O, O, N, N? (SEP, 2006, p. 92).

Sesión 2. ¿De cuántas formas?

En esta sesión 2 (*Figura 3*), contiene cinco ejercicios. En este caso el problema de introducción que nos ocupa es el siguiente: En la pastelería “La gran rebanada” elaboran pasteles de diferentes sabores, formas y decorados. Cuando alguien hace su pedido, el vendedor debe llenar un formato como el siguiente: (SEP, 2006, p. 93).

En este caso se pregunta lo siguiente:

- ¿Cuántos pasteles diferentes pueden elaborar en esa pastelería?
- ¿Habrá más de 10 pasteles diferentes? ¿Más de 20? ¿Más de 40? (SEP, 2006, p. 94).

¿DE CUANTAS FORMAS? SESION

>>> Para empezar

Existen situaciones en las que se debe elegir un producto o servicio entre varios que se ofrecen. Por ejemplo, en la compra de zapatos se pueden elegir diferentes modelos y colores; lo mismo sucede al comprar ropa, autos o cualquier otro artículo.

>>> Consideremos lo siguiente

En la pastelería “La gran rebanada” elaboran pasteles de diferentes sabores, formas y decorados. Cuando alguien hace un pedido, el vendedor debe llenar un formato como el siguiente:

La gran rebanada Pastelería	
Nombre del cliente:	Num. de pedido:
Num. de vendedor:	Fecha de entrega: Mes:
Instrucciones: en cada caso, marcar con “X” la opción deseada.	
Formas	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Sabores	
<input type="checkbox"/> Chocolate	
<input type="checkbox"/> Tres leches	
<input type="checkbox"/> Vainilla	
Decorados	
<input type="checkbox"/> Crema	
<input type="checkbox"/> Flores	

Figura 3. Sesión 2 del libro de matemáticas del primer grado.

a) Contenidos incluidos y orden de presentación

El contenido que aparece es el principio multiplicativo ya que permite obtener todos los resultados posibles realizando esta operación básica: $3 \times 2 \times 3$, tomando en cuenta los elementos de cada conjunto que se proporciona en el problema. Sin embargo, el principio que se utiliza es el aditivo ya que se encuentra de manera explícita.

b) Notación empleada

En esta sesión las notaciones que aparecen en el texto son pictóricas, enunciados verbales y simbólicas. Como pictórica se asocia a las formas de un pastel, en los enunciados verbales involucra los sabores, decorados y rellenos, mientras que las simbólicas incluyen RR y aa que son atribuidos a los genes de las flores (dominante y recesivo).

En el primer caso las respuestas se pueden obtener mediante las siguientes tablas:

Tabla 2. Pasteles circulares que se forman a partir de los sabores y decorados.

○ Pastel circular	Decorado cereza (c)	Decorado fresa (f)	Decorado nuez (n)
Chocolate (Ch)	Chc		
Tres leches (l)		l-f	
Vainilla (V)			

□ Pastel cuadrado	Decorado cereza (c)	Decorado fresa (f)	Decorado nuez (n)
Chocolate (Ch)			
Tres leches (l)			
Vainilla (V)		V-f	

En tanto que, en el segundo problema, también se puede resolver mediante una tabla:

Planta RR	Planta aa	
	a	a
R	Ra	Ra
R	Ra	Ra

Planta Ra	Planta Ra	
	R	a
R		
a		

Tabla 3. Plantas que se forman a partir de sus genes dominantes y recesivos.

c) Definiciones presentadas; modelos combinatorios

No aparecen definiciones establecidas ni modelos combinatorios, en cambio, en el apartado a lo que llegamos, denota que el diagrama de árbol es un recurso que permite visualizar y enumerar todos los resultados de un problema de conteo, los cuales están compuestos por niveles y ramas.

d) Recursos didácticos

Las tablas, como en la figura 4, y los diagramas de árbol son dos recursos para encontrar de manera sistemática todos los resultados posibles en un problema de conteo. Se usan símbolos para enumerar los diferentes resultados. Cuando se realiza un conteo de modo sistemático, el resultado será siempre el mismo, no importa el recurso que se utilice.

La gran rebanada Pastelería	
Nombre del cliente:	Num. de pedido:
	Precio:
	Anticipo:
Num. de vendedor:	Fecha de entrega:
	Hora:
Instrucciones: en cada caso, marcar con "X" la opción deseada	
Formas	
<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	
Sabores	
<input type="checkbox"/> Chocolate <input type="checkbox"/> Tres leches <input type="checkbox"/> Vainilla	
Decorado	
<input type="checkbox"/> Cereza <input type="checkbox"/> Nuez <input type="checkbox"/> Fresa	

Figura 4. Ejemplo de tabla que se muestra en la sesión (Tomada de Matemáticas I. Volumen I).

e) Tipo de ejercicios y su distribución en el texto

Los ejercicios y problemas son del tipo: completar y elaborar tablas, así como diagramas de árbol; responder a preguntas tales como “cuántos tipos diferentes de pastel... o flores”. No se propone el uso del material manipulativo, sin embargo, se pide la enumeración de todas las posibilidades. Se trabaja el principio aditivo promoviendo una enumeración sistemática bajo el uso de diagrama de árbol y de las tablas.

En esta sesión no interviene una operación combinatoria para la resolución de los problemas, pero sí se trabaja con 2, 3 o 4 conjuntos con una cantidad diferente de elementos. Por ejemplo: dados los 3 conjuntos: formas $\{\square, \circ\}$, sabores $\{\text{chocolate, tres leches, vainilla}\}$, decorados

{cereza, fresa y nuez} se pide responder a la pregunta: ¿cuántos tipos diferentes de pastel de forma circular hay con sabor chocolate?, ¿cuántos tipos diferentes de pastel con decorado de nuez y sabor vainilla hay?, ¿cuántos tipos diferentes de pastel con decorado de fresa hay? y ¿Cuántos pasteles diferentes pueden elaborar en esa pastelería?, de manera progresiva se incorporan condiciones, en este caso se agregan dos ingredientes más para responder a la pregunta: ¿cuántos pasteles distintos pueden elaborarse ahora en la pastelería?

Por último, se plantea un ejercicio que pide contestar:

¿De qué color serán las flores?

- a) ¿Cuántas flores son rojas? (recuerda que son las que por lo menos tiene una letra **R**)
- b) ¿Cuántas flores son azules (**aa**)?(SEP. 2006, p. 97).

Sesión 3. ¿Cuántos viajes hay...?

En la sesión 3 aparecen dos ejercicios, de los cuales el primer problema fue analizado y que formula lo siguiente: Una línea de autobuses cubre las principales ciudades del estado de Sinaloa: Los Mochis, Escuinapa, Culiacán y Mazatlán. La línea de autobuses sólo ofrece viajes directos, es decir, no hace paradas intermedias (si va de los Mochis a Mazatlán, no hace parada en Culiacán). ¿Cuántos viajes diferentes ofrece la línea de autobuses? (SEP, 2006, p. 97).

Por lo que se les pide que realicen lo siguiente:

- a) Completen la tabla de la izquierda.
- b) Si una persona sale de Culiacán viajando en esta línea de autobuses, ¿a cuántos destinos diferentes puede llegar?
- c) Si una persona llega a Mazatlán, ¿de cuántas ciudades diferentes pudo haber salido?
- d) En total, ¿cuántos viajes diferentes hay? (SEP, 2006, p. 98).

SESIÓN 3

¿CUÁNTOS VIAJES HAY...?

>>> Para empezar

En esta sesión vas a seguir estudiando estrategias de conteo, ahora considerando los distintos viajes que una línea de autobuses ofrece.

>>> Consideremos lo siguiente

Una línea de autobuses cubre las principales ciudades del estado de Sinaloa: Los Mochis, Escuinapa, Culiacán y Mazatlán. La línea de autobuses sólo ofrece viajes directos, es decir, no hace paradas intermedias (si va de Los Mochis a Mazatlán, no hace parada en Culiacán). ¿Cuántos viajes diferentes ofrece la línea de autobuses?

Comparen sus respuestas



Figura 5. Sesión 3 del libro de matemáticas del primer grado (Tomado de *Matemáticas I. Volumen I*).

a) Contenidos incluidos y orden de presentación

En este problema el principio multiplicativo es el procedimiento principal puesto que en las explicaciones hace énfasis en que la multiplicación es la operación que permite encontrar el número total de opciones existentes ($4 \times 3 = 12$). Sin embargo, al resolver los primeros ejercicios con ayuda de un listado y de un diagrama de árbol, lo alumnos tienden a encontrar la respuesta mediante el conteo uno a uno de todos los resultados posibles, ello implica el uso del principio aditivo.

b) Notación empleada

No presenta una notación específica, solo presenta la indicación para determinar el número total de viajes que la línea ofrece, por lo que se puede multiplicar el número de ciudades de salida por el número de ciudades de llegada; ejemplo de ello es el siguiente enunciado: si hay cuatro ciudades de salida y tres ciudades de llegada el número total de viajes es $4 \times 3 = 12$ (SEP, 2006, p. 99); por lo tanto, la multiplicación es la operación que permite encontrar el número total de opciones existentes.

c) Definiciones presentadas; modelos combinatorios

En esta sesión solo explica el uso de las tablas y los diagramas de árbol, señalan que son dos recursos para encontrar de manera sistemática todos los resultados posibles en un problema de conteo. Manifiestan que en ambos casos se ha hecho uso de códigos para enumerar los diferentes resultados.

d) Recursos didácticos

Para este ejercicio utilizan los diagramas de árbol (*Figura 6*), las tablas y un material audiovisual denominado “¿Saben cuántos hay?”, son recursos que ayudan a encontrar todas y cada una de las opciones existentes en un problema de conteo. Por otro lado, carece de algún otro tipo de material manipulativo o de alguna dinámica de juego.

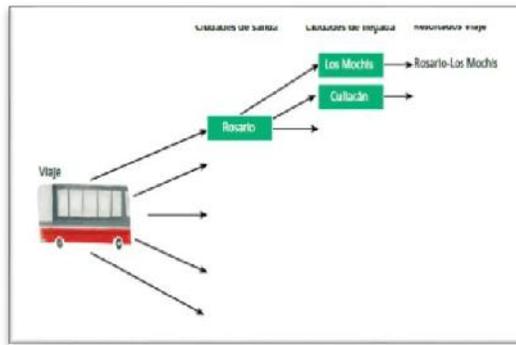


Figura 6. Ejemplo de diagrama de árbol (Tomado de Matemáticas I. Volumen I).

e) Tipo y número de ejemplos y su distribución en el texto

Los ejemplos que aparecen en esta sesión son del tipo: completa la tabla, resuelve el problema mediante un diagrama de árbol, así como el plantemiento de acertijos con restricciones, tal como: “Mi amigo Juan me planteó un acertijo. Me dijo que el número de su casa tiene dos cifras, que ninguna de las dos es 0 y que son diferentes entre sí (SEP, 2006, p. 100).

Ello implica sistematizar los resultados a través de los recursos dados como tablas de doble entrada y diagramas de árbol; en tanto que el uso de restricciones aparecen de manera gradual dados los conjuntos de ciudad de salida, ciudad de llegada, así como el conjunto de cifras; los cuales se indagan a las siguientes preguntas: ¿cuántos viajes diferentes hay?, ¿cuántos viajes diferentes ofrece ahora la línea de autobuses?, ¿cuántas opciones diferentes de viaje

hay?, y ¿cuántos pares de números existen en total que cumplen con las condiciones del problema?

Sesión 4. Otros contextos.

En esta sesión dan a conocer cuatro ejercicios, en esta investigación solo se revisa el primero que trata de obtener los resultados posibles que pueden obtenerse al lanzar dos dados una vez, esto se debe completar en el diagrama de árbol como se muestra en la *Figura 7*.

En esta actividad se pide responder a las siguientes preguntas:

- El resultado (2,1) significa que en el lanzamiento cayó 2 en el dado A, ¿qué cayó en el dado B?
- ¿Qué significa el resultado (1,2)?
- ¿Y el resultado (6,6)?
- ¿Cuántos resultados diferentes en total puede haber al lanzar dos dados?

De esos resultados, ¿en cuántos se cumplen las siguientes condiciones?:

- “En los dos dados cae el mismo número”
- “En el dado A cae un número mayor que en el dado B”
- “En el dado A cae un número par” (SEP, 2006, p, 102)

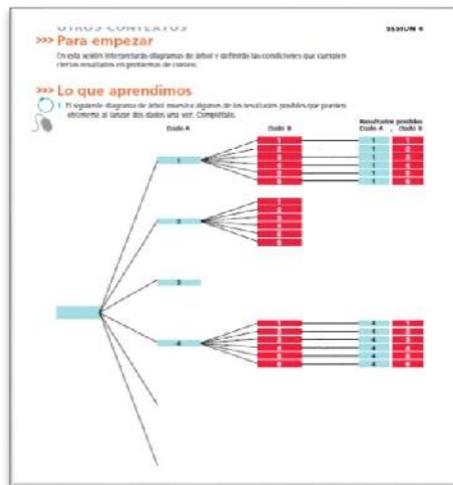


Figura 7. Sesión 4 del libro de matemáticas del primer grado (Tomado de *Matemáticas I. Volumen I*).

a) **¿Cuántos resultados diferentes** en total puede haber al lanzar dos dados?

De manera implícita aparecen el principio aditivo y el multiplicativo, que se pueden interpretar en el diagrama de árbol con la intención de definir las condiciones que cumplen los resultados posibles en un Problema de Conteo.

a) **Contenidos incluidos y orden de presentación**

De manera explícita solo aparece una actividad donde se utiliza la adición, la cual indica que deben sumar los puntos: (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), etc., que corresponden a la notación que se utiliza, con la finalidad de obtener un resultado cuantitativo. Esta situación problemática puede resolverse mediante una tabla y diagrama de árbol (Figura 8).

b) **Notación empleada**

De manera explícita solo aparece una actividad donde se utiliza la adición, la cual indica que deben sumar los puntos: (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), etc., con la finalidad de obtener un resultado cuantitativo. Esta situación problemática puede resolverse mediante una tabla y diagrama de árbol (figura 8).

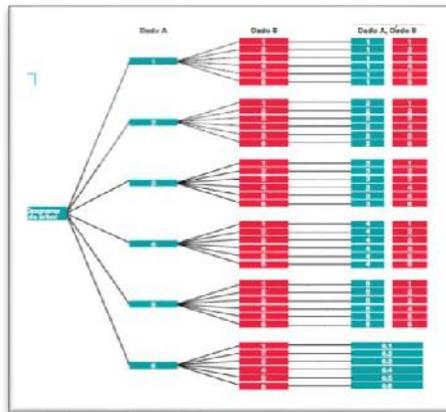


Figura 8. Ejemplo de diagrama de árbol (Tomado de *Matemáticas I. Volumen I*).

c) **Definiciones presentadas; modelos combinatorios**

En esta sesión 4 no se observan definición de modelos combinatorios, sin embargo, mencionan que los diagramas de árbol y las tablas son recursos que ayudan a encontrar todas y cada una de las opciones existen en un problema de conteo. Señalan que la multiplicación es la operación que permite encontrar el número total de opciones existentes.

d) Recursos didácticos

Nuevamente los recursos utilizados son el diagrama de árbol (Figura 9), la cual deben completar para la resolución de la actividad. A pesar de que son actividades que cierra este tema en primer grado, se nota la ausencia de algún material manipulable o una dinámica de juego.

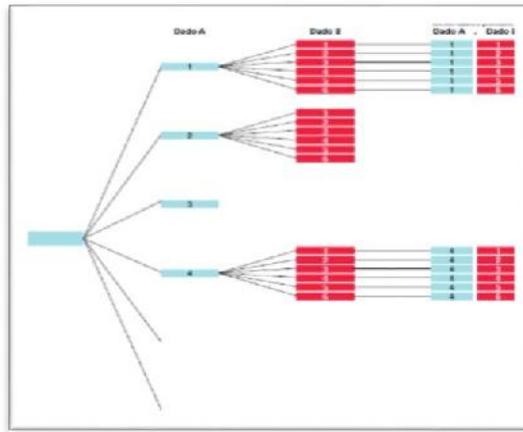


Figura 9. Ejemplo de diagrama de árbol que se muestra en la sesión (Tomado de *Matemáticas I. Volumen I*).

e) Tipo y número de ejemplos y su distribución en el texto

Los ejercicios que se dan a conocer son del tipo: completar un diagrama de árbol que muestra algunos de los resultados posibles para luego contestar preguntas como ¿cuántos resultados diferentes en total puede haber al lanzar dos dados?, y después deliberar: ¿cuántos resultados hay en los que en ambos dados caen números impares?, y ¿cuántos resultados hay en los que ambos dados caen números pares? Posteriormente se desarrolla un ejercicio con restricciones: Las claves de larga distancia constan de tres dígitos. Supongan que el primero debe elegirse de los números del 2 al 5. El segundo tiene que ser 0 o 1. El tercero tiene que ser mayor que 5.

- ¿Cuántas claves distintas se pueden formar?
- Elaboren tablas de doble entrada para representar los resultados. ¿Cuántas claves de larga distancia inician con 20?
- ¿Cuántas claves de larga distancia terminan con 9?

- d) ¿Cuántas claves de larga distancia tienen el mismo número en los 3 dígitos? (SEP, 2006, p. 103).

3.3.1. Matemáticas II. Segundo Grado, Volumen I

En el caso de segundo grado, los Problemas de conteo, se encuentra en la secuencia 9 del libro de Matemáticas II. Volumen I. y está conformada por tres sesiones.

3.3.2. Sesión 1. ¿Cómo nos estacionamos?

Esta sesión cuenta con ocho ejercicios de los cuales solo el primero se revisa para esta investigación y que se encuentra descrito de la siguiente manera: En un edificio nuevo hay cinco departamentos y cinco lugares para estacionarse. Los lugares de estacionamiento se identifican con letras de la A a la E. Se han habitado dos departamentos únicamente, el de Sofía y el de Miguel, quienes estacionan cada noche su auto en alguno de los lugares (SEP, 2006, p. 118).

Ello implica responder las siguientes cuestiones:

- a) Un día Sofía llegó primero y escogió el lugar B; cuando llega Miguel, ¿cuántos lugares tiene para escoger?
- b) Otro día Miguel llegó primero y escogió el lugar D; cuando llega Sofía, ¿cuántos lugares tiene para escoger?
- c) ¿Cuántos lugares tiene para escoger la primera persona en llegar?
- d) ¿Cuántos lugares tiene para escoger la segunda persona en llegar?
- e) ¿De cuántas maneras distintas pueden estacionarse Sofía y Miguel? (SEP, 2006, p. 119)

SECUENCIA 9

Problemas de conteo

En esta secuencia vas a identificar regularidades para resolver problemas de conteo. Verificarás tus resultados utilizando arreglos rectangulares, diagramas de árbol u otros recursos.

SESIÓN 1 **¿CÓMO NOS ESTACIONAMOS?**

>>> Para empezar

¿De cuántas formas?

Existen situaciones en las que queremos ordenar o repartir varios objetos y resulta útil conocer de cuántas maneras distintas podemos realizarlo. En los problemas de conteo se responde la pregunta ¿de cuántas formas? Es importante contar de manera sistemática y para ello conviene saber desarrollar patrones. En ocasiones contar los casos de uno en uno no resulta práctico, ya que puede requerir de mucho tiempo y además se corre el riesgo de no contarlos todos.

En la secuencia 8 de tu libro *Matemáticas I Volumen I* resolviste problemas de conteo utilizando tablas, diagramas de árbol y enumeraciones. En esta secuencia conocerás otras técnicas de conteo. En la secuencia 32 de este libro aprenderás a calcular probabilidades y tomar decisiones utilizando las técnicas de conteo.

>>> Consideremos lo siguiente

En un edificio nuevo hay cinco departamentos y cinco lugares para estacionarse. Los lugares de estacionamiento se identifican con letras de la A a la E. Se han habilitado dos departamentos únicamente, el de Sofía y el de Miguel, quienes estacionan cada noche su auto en alguno de los lugares. Por ejemplo, Sofía puede estacionarse en el lugar D y Miguel en el lugar B. ¿Cuáles son todas las formas en las que se pueden estacionar Sofía y Miguel? ¿En total cuántas son?

Comparen sus respuestas. Comenten los procedimientos que utilizaron.

Figura. 10. Sesión 1 del libro de matemáticas de segundo grado (Tomado de *Matemáticas II. Volumen I*).

a) Contenidos incluidos y orden de presentación

De manera explícita se menciona el principio multiplicativo, así como la técnica de variación y permutación .. Para el principio multiplicativo se apoyan del diagrama de árbol, en una actividad que consiste en aparcar automóviles. Posteriormente se percibe la técnica de variación y la de permutación como certeza de que la nueva disposición es distinta de las demás, de manera que se ocupan todos los elementos de un conjunto. Se reconoce que el modelo implícito en esta sesión es el de colocación ya que se puede identificar mediante la siguiente pregunta: ¿Cuántos lugares tiene para escoger?, ¿cuántos lugares tiene para escoger

la primera persona en llegar?, ¿de cuántas maneras distintas pueden estacionarse Sofía y Miguel?, y ¿de cuántas formas pueden estacionarse Sofía, Miguel y Paco?

b) Notación empleada

Número que representan las posibilidades que tiene cada elemento en cada subconjunto, tal como se muestra en la Figura 11.

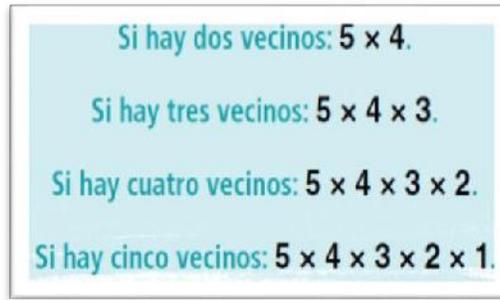


Figura 11. Uso de la multiplicación para obtener todos los resultados posibles (Tomado de Matemáticas II. Volumen I).

c) Definiciones presentadas; modelos combinatorios

Las definiciones no aparecen de manera explícita, sin embargo, dan explicaciones del razonamiento empleado para la situación que de alguna manera se relaciona con la variación y la permutación. Por ejemplo, en la sección A lo que llegamos se explica lo siguiente: cuando todos los lugares están vacíos, cualquier vecino tiene cinco opciones para escoger. Cuando ya está ocupado un lugar, los otros vecinos tienen cuatro lugares para escoger. Si hay dos lugares ocupados, los tres vecinos restantes tienen tres lugares para escoger. Luego, si hay tres lugares ocupados, quedan dos lugares para los dos vecinos restantes. Finalmente, queda un lugar para el último vecino (SEP, 2006, p. 122).

d) Recursos didácticos

Como una manera de sistematizar todos los resultados posibles se recurre a las tablas y los diagramas de árbol, tal como se muestra en la Figura 12.

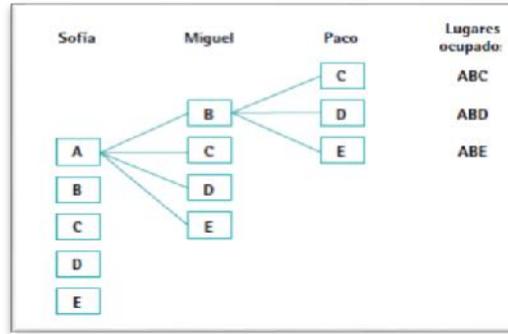


Figura 12. Ejemplo de diagrama de árbol que se muestra en la sesión 1 (Tomado de *Matemáticas II. Volumen I*).

e) Tipo y número de ejemplos y su distribución en el texto

Los ejercicios que contempla esta sesión, son del tipo: hacen falta varias opciones, encuéntralas todas y escríbelas en tu cuaderno; completa en tu cuaderno, utiliza el diagrama de árbol para responder las siguientes preguntas: ¿de cuántas maneras distintas pueden estacionarse Sofía, Miguel y Paco?,

En la sección Lo que aprendimos, podemos hallar las siguientes actividades que refuerzan el contenido visto en esta sesión:

1. Con los dígitos 2, 4, 8, 5 queremos formar números de tres cifras; en cada número no se puede repetir ninguno de los dígitos. ¿Cuántos números podemos formar? Haz una lista con todos los números
2. En una telesecundaria, dos alumnos deben escoger un día, de lunes a viernes, en el que les va a tocar hacer las tareas de limpieza del salón; cada uno debe escoger un día distinto. ¿De cuántas maneras puede hacerse el rol de limpieza de esa semana? Haz un diagrama de árbol para representar todos los roles distintos.
3. Cuatro alumnos van con el médico a que les pongan una vacuna y ninguno quiere pasar primero, ¿de cuántas formas distintas pueden ordenarse para pasar con el médico? (SEP. 2006, p. 122).

Sesión 2. La casa de cultura.

La sesión 2 contiene siete actividades, en esta investigación solo se revisará la primera actividad que consiste en lo siguiente: Fernanda asiste a la Casa de Cultura de su municipio; en esta Casa de la Cultura se imparten cuatro talleres: danza, música, teatro y dibujo. Fernanda se va a inscribir sólo a dos de los talleres. ¿Cuántas formas posibles tiene para inscribirse? (SEP. 2006, p. 123).

En esta primera actividad presenta planteamientos como escribir una lista donde hacen falta varias de las opciones que tiene Fernanda, encuéntralas todas. Además presenta un diagrama de árbol donde se representan las formas en que Fernanda puede inscribirse, por último se desarrollan las siguientes interrogantes:

- ¿Cuántas opciones hay en el diagrama?
- Cada una de las opciones está repetida: ¿cuántas veces aparece cada una?
- Subraya cuál de las siguientes operaciones sirve para calcular el número total de formas que tiene Fernanda para inscribirse:
 - 4×3
 - $\frac{4 \times 3}{2}$
- ¿Por qué es la operación correcta? (SEP. 2006, 125).

LA CASA DE CULTURA SESIÓN 2

»» Para empezar

La Casa de Cultura es un lugar en los municipios y barrios en el que se fomentan la cultura, el arte y la educación. En la Casa de Cultura hay bibliotecas públicas, se imparten talleres y cursos, y se organizan conferencias, vistas de teatro, exposiciones, conciertos y presentaciones de libros.

La Casa de Cultura tiene como objetivo contribuir a que la población tenga la oportunidad de acercarse a diversas expresiones artísticas y también preservar las tradiciones del lugar donde se sitúa.

»» Consideremos lo siguiente

Fernanda asiste a la Casa de Cultura de su municipio; en esta Casa de Cultura se imparten cuatro talleres: danza, música, teatro y dibujo. Fernanda se va a inscribir sólo a dos de los talleres. ¿Cuántas formas posibles tiene para inscribirse?

Comparten sus respuestas. Expliquen cómo hicieron para encontrar las distintas formas que tiene Fernanda para inscribirse. ¿Es lo mismo si es Fernanda si Fernanda pone en la lista de inscripción "música y teatro" o si pone "teatro y música"?

Casa de Cultura
Inscripción a los talleres

Nombre: Fernanda

Dirección (escriba en los siguientes espacios):

_____ y _____

Fecha

Figura 13. Sesión 2 del libro de matemáticas de segundo grado (Tomado de Matemáticas II. Volumen I).

a) Contenidos incluidos y orden de presentación

Se presentan las técnicas de combinación y variación, y de manera implícita el modelo combinatorio Partición o división que lo podemos identificar cuando se tiene que indicar el orden de preferencia y debe responder a la siguiente interrogante: ¿de cuántas maneras distintas se puede llenar la hoja de inscripción? En esta sesión, en primer lugar se trabaja con conjuntos de 4 elementos y cuyos arreglos deben ser de dos elementos, posteriormente se aumenta a un conjunto de 6 elementos y arreglos de 4 elementos.

b) Notación empleada

La notación empleada son enunciados verbales como son los nombres de talleres (danza, música, teatro y dibujo), cursos (literatura, alfarería, guitarra clásica y grabado) y, nombres de personas. En las secciones A lo que llegamos, se emplean notaciones específicas, que es m para denotar el número de elementos del conjunto y n para los arreglos a formar.

c) Definiciones presentadas; modelos combinatorios

No aparecen definiciones explícitas de la variación o combinación, sin embargo, si mencionan las posibilidades de la importancia del orden. En el apartado A lo que llegamos, dan un posible procedimiento para los casos particulares que se tratan en la lección, además se advierte solo la pertinencia del uso del diagrama de árbol o una lista de enumeración, porque es posible que se cuente, erróneamente, varias veces la misma opción.

d) Recursos didácticos

Los recursos que se sugieren utilizar son la lista (Figura 14) y el diagrama de árbol, aunque señalan el cuidado que se debe tener al ocupar un diagrama de árbol o una lista de enumeración, para evitar repetir varias veces la misma opción. También se observa que no presenta algún tipo de material manipulativo y para el caso de la comunidad rural donde se aplica no existe una impartición de talleres que puedan contextualizar los problemas de los libros con su vida cotidiana.

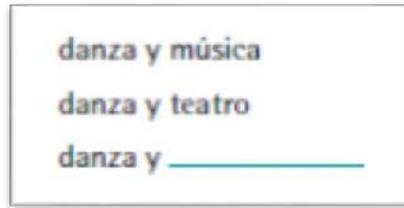


Figura 14. Ejemplo de una lista de opciones (Tomado de *Matemáticas I. Volumen I*).

e) Tipo y número de ejemplos y su distribución en el texto

El contexto de los problemas se desarrolla bajo los nombres de talleres y personas, así como enunciados verbales que responden a preguntas tales como: ¿cuántas opciones hay en el diagrama?, ¿cuántas veces aparece cada una?, ¿de cuántas formas distintas puede realizar su tarea?, ¿de cuántas maneras distintas puede elegir a los alumnos?, y haz una lista con todas las maneras distintas en las que la maestra puede elegir a los alumnos. ¿cuántas son? También se identifica operaciones ligadas del ejercicio de enunciado verbal cuando se añade una o varias condiciones para este ejercicio, ejemplo de ello es: En otra casa de Cultura se imparte seis talleres literatura, dibujo, alfarería, guitarra clásica, grabado y danza. Es posible inscribirse a dos de los talleres. Responde: ¿de cuántas maneras distintas se puede llenar la hoja de inscripción?, y si se hace la inscripción indicando el orden de preferencia (primera y segunda opción), ¿de cuántas maneras distintas se puede llenar la hoja de inscripción?

Al finalizar la sesión se encuentran los siguientes ejercicios para aplicar lo aprendido:

1. Juan tiene que elegir dos de los cuatro ejercicios que le dejaron de tarea. ¿De cuántas formas distintas pueden realizar su tarea?
2. Una maestra tiene que elegir a dos alumnos para un comité, uno va a ser presidente y el otro va a ser secretario. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Francisco, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas maneras distintas puede elegir a los alumnos? Haz una lista con todos los posibles comités que puede elegir la maestra.
3. Ahora la maestra tiene que elegir a tres alumnos para organizar la fiesta de fin de año. Para ello dispone de cinco voluntarios: Juan, Sandra, Alejandra, Hugo y Patricia. Haz una lista con todas las maneras distintas en las que la maestra puede elegir a los alumnos. ¿Cuántas son? (SEP. 2006, 127).

Sesión 3. *Reparto de dulces.*

La sesión cuenta con nueve ejercicios, de los cuales se tomó uno para su revisión y el que nos describe la siguiente situación: Julián tiene cuatro dulces de distintos sabores: fresa, piña, sandía y naranja. Julián sabe que a sus primos Diego y Emilio les gustan mucho esos dulces y se los va a regalar. ¿De cuántas maneras distintas puede repartir los cuatro dulces? (puede decidir regalar todos a uno de sus primos) (SEP. 2006, 127). La indicación para resolver esta actividad es completar una tabla donde hacen falta varias maneras de repartir los dulces, por lo que los alumnos deben encontrar todos los resultados posibles.

REPARTO DE DULCES SESIÓN 3

>>> Consideremos lo siguiente

Julián tiene cuatro dulces de distintos sabores: fresa, piña, sandía y naranja. Julián sabe que a sus primos Diego y Emilio les gustan mucho esos dulces y se los va a regalar. ¿De cuántas maneras distintas puede repartir los cuatro dulces? (puede decidir regalar todos a uno de sus primos).

Comparen sus respuestas. Comenten los procedimientos que utilizaron.

Figura 15. Sesión 3 del libro de matemáticas de segundo grado (Tomado de *Matemáticas II. Volumen I*).

En este caso se percibe que la actividad consiste en dividir un conjunto de dulces que se destinan a dos niños, por lo que se debe acatar a una condición: *se puede regalar todos a uno de sus primos.*

a) **Contenidos incluidos y orden de presentación**

El contenido que se utiliza es la variación con repetición donde los elementos de un conjunto se repiten tantas veces de acuerdo con el número de elementos de otro conjunto al cual se corresponde. El modelo combinatorio implícito es partición o división, ya que trata de dividir

e) Tipo y número de ejemplos y su distribución en el texto

El tipo de ejemplos corresponde a actividades como las que se describen a continuación: en la siguiente lista hacen falta varias de las maneras de repartirlos, encuéntralas todas: cada sabor se identifica por su inicial..., representa las posibles maneras de repartir los dulces utilizando un diagrama de árbol, ilumina, en el diagrama de árbol... En tanto que progresivamente aparecen restricciones que deben responder a las siguientes preguntas: ¿de cuántas maneras distintas puede repartir los dulces?, ¿en cuántas cajas puede colocar cada canica?, ¿cuántos son?, ¿de cuántas maneras podemos hacerlo?, ¿cuántos números distintos podemos formar?, y ¿de cuántas maneras puede regalar los dulces a sus primos?

En la sección *Lo que aprendimos* aparecen restricciones que se resuelven con la técnica de conteo denominada variación con repetición; y que responden a las siguientes preguntas: ¿cuántas son?, ¿de cuántas maneras podemos hacerlo?, ¿cuántos números distintos podemos formar?, y de cuántas maneras puede regalar los dulces a sus primos?

Ante ello podemos concluir que en el caso de los libros de Telesecundaria se observa un proceso que se divide en dos momentos: en una primera fase utiliza los recursos visuales como son diagramas de árbol, tablas, y de manera implícita el uso de los principios aditivo y multiplicativo, análogamente, en un segundo momento aparecen las Técnicas de Conteo, donde los alumnos perciben que ya no es factible contar uno a uno todos los resultados posibles, ello implica utilizar los mismos procedimientos pero ubicando una notación algebraica que satisfagan la obtención de todos los resultados posibles.

También se observa que el Plan y Programa de estudio de 2006 es el que tiene relación con el libro de texto de Telesecundaria, ya que explica de manera precisa el objetivo que se tiene al proponerlo para este nivel. En cambio, el Plan y Programa de Estudio de 2011 no hace mucho énfasis en el desarrollo de dicho contenido.

de los contenidos, cabe señalar que con esta propuesta se observa que los nombres técnicos como son: principio aditivo y multiplicativo, así como las técnicas de conteo (variación, permutación y combinación) no aparecen como tal, pero a través del estudio se da cuenta que se presentan de manera implícita.

En un último momento se visualiza la estructura de los Problemas de Conteo en los libros de texto de Telesecundaria, en ambos casos corresponde al volumen I, de acuerdo a los criterios y a las cuatro sesiones que aparecen en primer grado y de las tres sesiones que se encuentran en segundo grado. Con ello permite entender el avance progresivo del tema Problemas de Conteo, es decir, se puede percibir que en primer grado se estudia elementos bases que introducen a la resolución de eventos donde se utiliza operaciones como la suma y la multiplicación, así como el uso de recursos como el diagrama de árbol y tablas; para el segundo año no se descartan las actividades anteriores, sin embargo el objetivo es desarrollar el razonamiento combinatorio mediante el uso de expresiones algebraicas sencillas.

Por último, en las siguientes tablas 3 y 4 se presenta la estructura del contenido de Problemas de Conteo, donde se puede observar de manera sintetizada la composición de las sesiones y el avance progresivo de los temas medulares correspondientes a la introducción a la resolución de Problemas Combinatorios, de manera concreta el tema de investigación se puede clasificar de acuerdo a los criterios utilizados, de la siguiente manera:

Tabla 4. Libro de Matemáticas I. Primer grado, Volumen I. Bloque I.

Criterios Sesiones	a) Contenidos incluidos y orden de presentación	b) Notación empleada	c) Definiciones presentadas; modelos combinatorios	d) Recursos didácticos	e) Tipo y número de ejemplos y su distribución en el texto
Sesión 1	Principio aditivo	N, N, O, N y $\uparrow\uparrow\rightarrow\uparrow$	Solo se presentan procedimientos de enumeración que permiten encontrar todos los recorridos posibles de caminar de un punto a otro.	Mapas	¿Cuántas formas diferentes hay...? ¿Cuántas formas diferentes tiene..?
Sesión 2	Principio multiplicativo	Sabores: Ch, T, v Decorado: c, f, n Dominante: R Recesivo: a	No aparecen definiciones establecidas ni modelos combinatorios. Sin embargo, el modelo combinatorio implícito es el de selección, ya que se trata de elegir entre las formas, decorados y sabores.	Tablas y diagrama de árbol	¿Cuántos pasteles diferentes..? ¿Cuántos tipos diferentes..? ¿Cuántos pasteles distintos..?
Sesión 3	Principio aditivo, principio multiplicativo	$a \times b$	No presenta una definición del principio o del modelo que se utiliza, sin embargo, las operaciones que se realizan indican el uso de la multiplicación para resolver los problemas planteados.	Tablas, diagrama de árbol y material audiovisual	¿A cuántos destinos diferentes..? ¿Cuántos viajes diferentes..? ¿Cuántas opciones diferentes..?
Sesión 4	Principio aditivo, principio multiplicativo	$a \times b$	En esta sesión 4 no se observan definición de modelos combinatorios.	Diagrama de árbol	¿Cuántos resultados diferentes ..? ¿Cuántas claves distintas..?

Tabla 5. Libro de Matemáticas I. Segundo grado, Volumen I. Bloque I.

Criterios Sesiones	a) Contenidos incluidos y orden de presentación	b) Notación empleada	c) Definiciones presentadas; modelos combinatorios	d) Recursos didácticos	e) Tipo y número de ejemplos y su distribución en el texto
Sesión 1	<p>Modelo combinatorio implícito: Colocación</p> <p>Principio multiplicativo</p> <p>Técnica de conteo: variación y permutación</p>	$5 \times 4 = 20$ $5 \times 4 \times 3 = 60$ $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$	<p>Las definiciones no aparecen de manera explícita, sin embargo, de manera implícita se observa que la variación y la permutación son las operaciones que resuelven el planteamiento.</p>	<p>Tablas y diagramas de árbol</p>	<p>¿De cuántas maneras distintas puede estacionarse..?</p>
Sesión 2	<p>Modelo combinatorio implícito: Partición o división</p> <p>Técnica de conteo: combinación</p>	$m(m-1)$ $m = \frac{(m-1)}{2}$	<p>No aparecen definiciones explícitas, sin embargo, los procedimientos permiten identificar el uso de la variación y la combinación como las técnicas de conteo, distinguiendo cuándo importa o no el orden en el que se pongan las opciones.</p>	<p>Tablas y diagramas de árbol</p>	<p>¿Cuántas maneras son?</p>
Sesión 3	<p>Modelo combinatorio implícito: Partición o división</p> <p>Técnica de conteo: variación con repetición</p>	q^p n^m	<p>No aparece definición alguna de modelos combinatorios. El modelo combinatorio implícito es Partición o división, ya que trata de dividir dulces de tal manera que a cada niño le toque cero dulces o todos los dulces.</p>	<p>Tablas, diagrama de árbol y material audiovisual</p>	<p>¿De cuántas maneras distintas puede repartir..? ¿Cuántos números distintos podemos formar? ¿De cuántas maneras podemos hacerlo?</p>

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

CAPÍTULO 4.

4. Conclusiones y reflexiones.

4.1. Conclusiones

En este documento se aprecia que existen áreas en las cuales se necesita investigar con mayor énfasis el tema de Combinatoria; es el caso de los Problemas de Conteo en la modalidad de Telesecundaria, ya que sin una fuente que permita entender los elementos que conforman a dicho contenido no se puede llevar a cabo un buen proceso de la enseñanza y aprendizaje de los temas que se estudian; aunado a ello el desconocimiento que puedan presentar los profesores en servicio de este nivel no ofrecería un servicio educativo apropiado.

A pesar de que existen estudios tanto de nivel nacional (Rivera, 2013 y Ramos 2016) como internacional (Navarro et al. 1996, Espinoza et al. 2014, García 2016, entre otros) donde se rescatan análisis y propuestas importantes que arrojan argumentos sobre el estudio de la Combinatoria en alumnos de nivel primaria, secundaria y de Licenciatura.

En el caso de las propuestas indican que deben ser actividades que coincidan con la realidad donde se desenvuelven y que los profesores se les proporcione una actualización de este contenido para que mejoren su práctica educativa.

En tanto que los estudios internacionales evalúan este conocimiento a través de ejercicios que miden el razonamiento combinatorio, otros se enfocan en analizar que el contenido de Combinatoria aparece en los libros de textos que utilizan tanto alumnos como profesores.

Por tal motivo a finalidad de estudiar la combinatoria en la escuela se sustenta porque el razonamiento combinatorio es parte fundamental del desarrollo del pensamiento formal. En este sentido, en la escuela telesecundaria se presenta a través del tema de Problemas de Conteo en donde la resolución de estas actividades se basa en la toma decisiones apropiadas

para seleccionar, elegir y dividir, según sea el caso, para ello es necesario sistematizar el proceso en el cual se consideren todos los resultados posibles.

Es así como podemos concluir que la pregunta de investigación ¿cómo se presentan los problemas de conteo en el libro de texto de telesecundaria?, se responde al analizar que en el caso del libro de matemáticas de primer grado de Telesecundaria, las características, que para la combinatoria utilizan, son los recursos visuales, planteando el problema de forma escrita y con imágenes, y para su solución se destaca el uso de recursos como tablas y diagramas de árbol, los cuales permiten encontrar regularidades que logran conectar las distintas soluciones o todos los arreglos posibles. Mientras que, en el libro de segundo grado, se plantean utilizar los mismos recursos, sin embargo, el grado de dificultad

aumenta, por lo que el procedimiento más adecuado es hallar procedimientos sistemáticos de enumeración para valerse de fórmulas que ayuden al recuento de todos los casos posibles.

Y de manera general se encontró que los principios aditivo y multiplicativo están implícitos en el libro de Matemáticas de primer grado, mientras que para el libro de segundo grado se encuentran los modelos de colocación y partición o división, además se percibe el uso de las Técnicas de Conteo como son la variación, variación con repetición, permutación y combinación.

4.2. A manera de reflexión

Encontramos algunas coincidencias con los estudios elaborados por Espinoza y Roa (2014), pues trata de ubicar el tratamiento de la Combinatoria en los textos de tres editoriales publicados en 2008 los cuales presentan al menos un elemento de la siguiente estructura: ejemplos introductorios, ejemplos posteriores a la definición y ejercicios posteriores a la definición; donde se observa que un porcentaje de los ejercicios se enfoca en identificar la fórmula combinatoria así como ubicar a la operación combinatoria que se utiliza; mientras que los modelos combinatorios que aparecen con mayor frecuencia son la selección y colocación.

En lo que respecta a la modalidad de telesecundaria, se realizó una revisión con criterios tales como: contenidos incluidos y orden de presentación, notación empleada, definiciones presentadas; modelos combinatorios, recursos didácticos y tipo y número de ejemplos y su distribución en el texto. Ello permite identificar la estructura básica de los problemas de conteo, ya que permite distinguir cada uno de los ingredientes de los problemas de conteo para que de esta manera se pueda manejar operaciones y/o recursos que sean más viables al resolver un problema de manera correcta.

Este trabajo puede tomarse como guía para los docentes interesados en estos contenidos que desconozcan ciertos términos fundamentales para comprender los Problemas de Conteo y evitar un razonamiento erróneo en los alumnos; también es preciso extrapolar la investigación a libros de textos para nivel secundaria, así como el de la modalidad de Telesecundaria, que utilizan libros con el enfoque del Nuevo Modelo Educativo que actualmente se implementa en México.

Referencias bibliográficas

- Alsina, A. y Martínez, M. (2016). La adquisición de conocimientos matemáticos intuitivos e informales en la Escuela Infantil: el papel de los materiales manipulativos. Recuperado de: <https://www.researchgate.net/publication/318701656>
- Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1994). Revisión de texto del nivel medio superior.
- Batanero, C., Godino, J. y Navarro-Pelayo, V. (1997). Combinatorial Reasoning and its Assessment. Recuperado de <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/assessbkref>.
- García. J. (2016). Razonamiento combinatorio en alumnos de educación secundaria obligatoria. Universidad de Granada.
- Espinoza, J., Roa, R. (2014). La combinatoria en libros de texto de matemática de educación secundaria en España. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 277-286). Salamanca: SEIEM.
- English, L. (2017). Problem solving with combinations. *Arithmetic Teacher*. 72-77.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- Navarro-Pelayo, Batanero C. y Godino J.D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación Matemática*, 8(1), 26-39.
- Ramos M. N. (2016). La combinatoria en la educación primaria: una alternativa de enseñanza. (Tesis de Fin de Máster). Centro de Investigación en Matemática Educativa, Guerrero, México.
- Rivera, M. I. (2013). Elementos de la Combinatoria en la Educación Primaria. (Tesis de Fin de Máster). Centro de Investigación en Matemática Educativa, Guerrero, México.
- Roa, Batanero y Godino (2011)
- SEP. (2006). Plan de Estudios 2006. Secretaría de Educación Pública. SEP.
- SEP. (2011). Plan de Estudios 2011. Educación Básica. SEP.
- SEP. (2011). Programa de Estudio 2011 Guía para el Maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas. SEP.
- SEP. (2006). Programa de Estudio 2006. Secretaría de Educación Pública. SEP.

Sriraman B. y English L. D. (2004). Combinatorial Mathematics: Research into Practice, 98(3), 182-191

Vilenkin, N. (1972). ¿De cuántas formas? Combinatoria. Editorial. MIR-MOSCÚ.

Wilhelmi, R. M. (2004). Combinatoria y Probabilidad. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado de <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/librowilhelmi.pdf>