CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIA Mayo 2017- Abril 2018 Vol.3 No.4 188-201

Conexiones intramatemáticas: el caso del Cálculo en estudiantes de bachillerato

GARCÍA-GARCÍA, Javier, DOLORES, Crisólogo

Recibido Agosto 30, 2016; Aceptado Febrero 6, 2017

Resumen

En este escrito respondemos la pregunta de investigación: ¿Qué conexiones intramatemáticas establecen los estudiantes de bachillerato en el campo del cálculo, en particular entre la derivada y la integral? Utilizamos un marco conceptual, en particular el concepto de conexiones matemáticas, y el análisis temático (Braun & Clarke, 2006, 2012) para analizar los datos que obtuvimos mediante entrevistas basadas en tareas (Goldín, 2000). Los resultados que se presentan corresponden a las producciones en el registro algebraico de ocho estudiantes de bachillerato de la región centro del Estado de Guerrero. A partir de las narrativas de los participantes formamos 7 grupos con 23 temas e identificamos un total de 86 conexiones que se corresponde con al menos una de las siguientes tipologías: representaciones diferentes, procedimental, conexión entre conceptos matemáticos, reversibililidad y de generalización. Entre los temas con mayor frecuencia destacan: la derivada de $f(x) = ax^n$ se obtiene aplicando la fórmula $f'(x) = anx^{n-1}$; la integral de una función es el área bajo esa curva; la integral de $f'(x) = ax^n$ se obtiene aplicando la fórmula $\int ax^n dx = \frac{au^{n+1}}{n+1} + C$; la integral y la derivada son operaciones inversas; la derivada de la integral de una función (polinomial) es igual a la misma función.

Conexiones intramatemáticas, Bachillerato, Cálculo

Abstract

This paper answers the research question: What intramatemáticas connections establish high school students in the field of calculus, particularly between the derivative and integral? We use a conceptual framework, in particular the concept of mathematical connections, and thematic analysis (Braun & Clarke, 2006, 2012) to analyze the data obtained through tasks-based interviews (Goldin, 2000). The results presented corresponding to the productions in algebraic register of eight high school students in the central region of the State of Guerrero. From the narratives of the participants we formed 7 groups with 23 themes and identified a total of 86 connections corresponding to at least one of the following types: different representations, procedural, connection between mathematical concepts, reversibililidad and generalization. Among the topics most frequently include: the derivative of $f(x) = ax^n$ is obtained by the formula $f'(x) = anx^{n-1}$; the integral of a function is the area under that curve; the integral of $f'(x) = ax^n$ is obtained by the formula $\int ax^n dx = \frac{au^{n+1}}{n+1} + C$; the integral and the derivative are inverse operations; the derivative of an integral of a function (polynomial) is equal to the same function.

Intramathematics connections, High School, Calculus

Citación: GARCÍA-GARCÍA, Javier†, DOLORES, Crisólogo. Conexiones intramatemáticas: el caso del Cálculo en estudiantes de bachillerato. Foro de Estudios sobre Guerrero. 2016. Mayo 2017- Abril 2018, 3-4: 188-201

*Correspondencia al Autor (libra_r75@hotmail.com)
† Investigador contribuyendo como primer autor.

CIENCIAS EXACTAS E INGENIERIA Mayo 2017- Abril 2018 Vol.3 No.4 188-201

1. Introducción

Las conexiones matemáticas implican una relación entre distintos objetos matemáticos (y extra-matemáticos), lo cual debiera permitir que las Matemáticas sean vistas como un campo integrado y no como una colección de partes separadas, que es como la ven los estudiantes (Evitts, 2004; Mwakapenda, 2008; Jaijan y Loipha, 2012) y como es presentada cundo es objeto de enseñanza. Su importancia radica en que permiten mejorar la compresión matemática en los estudiantes (Mhlolo, 2012; Eli, Mohr-Schroeder y Lee, 2011; Godino, Batanero y Font, 2003). Por ello, asumimos que el aprendizaje de las matemáticas está fuertemente ligado con las conexiones que los alumnos logren establecer.

El estudio de las conexiones matemáticas tuvo un auge en la investigación desde que la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1991) las incorporó como parte de los estándares curriculares. Desde entonces se han estudiado desde diversas perspectivas, así como en diferentes áreas de la Matemática (Yoon, Dreyfus & Thomas, 2010; Lockwood, 2011; Mhlolo, Venkat & Schäfer, 2012; Jaijan & Loipha, 2012; Eli et al., 2011, 2013; Park, Park, Park, Cho & Lee, 2013; Özgen, 2013).

Hoy día, las conexiones matemáticas siguen siendo un estándar importante en el currículo norteamericano (NCTM, 2014); pero además juegan un papel importante en planes de estudio de otros países, por ejemplo, en Sudáfrica (Mwakapenda, 2008). Asimismo, en los programas de bachillerato mexicano correspondientes a Matemáticas, también se promueve el uso y desarrollo de las conexiones matemáticas en los estudiantes, aunque reciben el nombre de "relaciones" (DGB, 2013a, 2013b).

Por tanto, las conexiones son una demanda actual de los currículums tanto mexicano, como de otros países.

Por otra parte, dos conceptos claves del Cálculo son: la derivada y la integral, que desde el punto de vista histórico se desarrollaron de manera separada.

El primero tuvo su origen en el problema de las tangentes y, la integral en el cálculo de áreas de superficies con lados curvos. La conexión entre estos problemas como procesos inversos la descubrió Isaac Barrow (1630-1677) [Stewart, 2010] y, en el plano matemático la relación entre ambos está cifrada por el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Sin embargo, cuando la derivada y la integral son objeto de enseñanza-aprendizaje asumimos que esta conexión no se hace evidente, entre otras razones porque el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral se estudian de manera separada en bachillerato, incluso en el nivel superior (en algunos programas educativos).

En la literatura, los estudios en educación matemática sobre la derivada e integral se realizan generalmente centrando la atención en sólo uno de ellos, y sus objetivos se enfocan principalmente en la mejora de su comprensión.

Nuestro aporte contribuirá a cubrir este hueco relativo a la ausencia de investigaciones que estudien las conexiones entre la derivada y la integral.

ISSN:2007-882X

Mayo 2017- Abril 2018 Vol.3 No.4 188-201

Enfocarnos en campo del cálculo es porque se observa una desatención al campo en cuanto a conexiones se refiere, los resultados pueden plantear nuevas interrogantes sobre las conexiones en este campo, se puede plantear un marco teórico para caracterizar las conexiones porque no existen categorías predefinidas para estudiarlas y finalmente, porque podríamos obtener datos que nos ayuden a diseñar una intervención docente que permita desarrollar en los estudiantes la habilidad de trabajar las conexiones en situación escolar.

Por lo expuesto anteriormente, identificamos la importancia de estudiar las conexiones matemáticas, por un lado, y los dos conceptos claves del Cálculo, por el otro. En particular, la pregunta de investigación a la cual damos respuesta en este escrito es: ¿Qué conexiones establecen los estudiantes de bachillerato en el campo del Cálculo y, en particular, entre la derivada y la integral en el registro algebraico? Y como objetivo, nos proponemos caracterizar esas conexiones que los estudiantes establecen.

La razón de elegir al registro algebraico obedece a que, en situación escolar, en su mayoría es en donde descansa la enseñanza dirigida por los profesores; sin embargo, en un proyecto más general (actualmente en curso) exploramos lo que hacen los estudiantes en otros registros.

2. Elementos teóricos

Las conexiones matemáticas, según Businskas (2008) se entienden, por un lado, como aquellas relaciones sobre la base de las cuales está estructurada la matemática y son independientes del estudiante y, por otro lado, como las relaciones a través de las cuales los procesos del pensamiento construyen la matemática. Evitts (2004) es coincidente con esta última idea.

Plantea que el conocimiento conectado se puede describir en términos de su construcción personal y significado, la multiplicidad de vínculos entre los conceptos y procedimientos, y el poder derivado de conocer las conexiones. De este modo los conceptos quedan constituidos por una red de definiciones y de propiedades que los relacionan (De Gamboa & Figueiras, 2014), que pueden utilizarse para vincular los temas matemáticos o bien como una relación causal o lógica o de interdependencia entre dos entidades matemáticas.

Se pueden hacer conexiones con el mundo cotidia (2005), las conexiones matemáticas permiten identificar y establecer relaciones entre los problemas, en cuanto a lenguaje matemático y registro de representación semiótica se refiere, y reconocer los contextos (conceptual y global) de los problemas, de manera que permita una influencia mutua dando lugar a respuestas coherentes asociadas a los problemas.

En este trabajo entendemos a las conexiones matemáticas como un proceso cognitivo mediante el cual una persona relaciona o asocia dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas y con la vida real.

Éstas son funcionales en el momento de resolver

De esta manera, reconocemos de manera general c investigación. Aunque en un estudio más general estudiamos los dos tipos.

ISSN:2007-882X

Mayo 2017- Abril 2018 Vol.3 No.4 188-201

Para estudiar las conexiones matemáticas elaboramos un marco preliminar guiados por las ideas propuestas en Businskas (2008), Evitts (2004) y de la NCTM (2014). Entre las conexiones intramatemáticas distinguimos las siguientes:

Conexión entre conceptos matemáticos: contribuyen a la concepción de las matemáticas como un todo integrado (Evitts, 2004). Se identifica cuando un estudiante relaciona un concepto A con uno B, ya sea para argumentar su repuesta ante un problema dado, o bien, para explicar un concepto C. Por ejemplo, al trabajar el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), los conceptos que se pueden conectar son: la noción de área, función, límites, derivadas y antiderivadas.

Representaciones diferentes: puede ser de dos tipos: representaciones alternas o equivalentes. A es una representación alterna de B, si ambas están expresadas en dos formas diferentes (verbal-algebraica, algebraica-geométrica, verbal-geométrica, etc.).

En cambio, A es una representación equivalente de B cuando ambas están expresadas en dos formas diferentes, pero dentro de una misma representación (algebraica-algebraica, verbal-verbal, etc.). Por ejemplo, $f(x) = x^2 + 2x + 1$ es una función y una representación equivalente de ella es $f(x) = (x + 1)^2$, mientras que una representación alterna de esta función es una parábola en el plano cartesiano con vértice en (-1,0).

Conexión de reversibilidad: Haciomeroglu et al. (2009) indica que la reversibilidad se refiere a la capacidad de establecer relaciones bidireccionales en oposición a las relaciones de un solo sentido que funcionan sólo en una dirección. Por tanto, para nuestros propósitos diremos que el estudiante realiza la conexión de reversibilidad si es capaz de reconocer y utilizar el hecho de que la derivada y la integral son procesos inversos.

Conexión procedimental: A es un procedimiento usado cuando trabajamos con un objeto B. Por ejemplo, utilizar la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$ como vía para encontrar la pendiente de una recta. Asimismo, una gráfica puede servir para identificar algunos elementos de una función, es decir, puede ser utilizada como procedimiento para identificar puntos máximos, mínimos, concavidades, punto de inflexión, etc.

Conexión de generalización: A es una generalización de B; B es un caso específico (ejemplo) de A. Esta es otro tipo de relación jerárquica. Por ejemplo, $ax^2 + bx + c = 0$ es una generalización de $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Como se aprecia, las representaciones asociadas a los conceptos (Businskas, 2008; Koestler, Felton, Bieda & Otten 2013; NCTM, 2014) y sus relaciones son un aspecto importante de las conexiones matemáticas.

Aceptamos que las representaciones semióticas son un medio de exteriorización

ISSN:2007-882X

Mayo 2017- Abril 2018 Vol.3 No.4 188-201

de las representaciones mentales para fines de comunicación; es decir, para volverlas visibles o accesibles a otros. Así, se pueden tener representaciones radicalmente diferentes del mismo objeto.

3. Metodología

La presente investigación es de tipo cualitativa y utiliza como método para la colecta de datos a las entrevistas basada en tareas (*Task-based interviews*). De acuerdo Goldin (2000):

> La entrevista basada en tareas para el estudio del comportamiento matemático involucra mínimamente un sujeto (el solucionador del problema) y un entrevistador (el clínico), interactuando en relación con uno o más tareas (preguntas, problemas o actividades) presentado al sujeto por el clínico en una forma pre planeada (p. 519).

Goldin afirma que, analizando el comportamiento verbal y no verbal o interacciones, el investigador espera hacer inferencias acerca del pensamiento matemático, aprendizaje y/o resolución de problemas del sujeto. Por su parte, Assad (2015) señala que las entrevistas basadas en tareas proporcionan oportunidades para evaluar el conocimiento conceptual de los estudiantes, pero también para extender esa comprensión. Según Assad, el protocolo de la entrevista puede estar estructurado con indicaciones y las respuestas previstas de antemano por el entrevistador, o puede ser semiestructurada, lo que permite que el entrevistador juzgue la respuesta adecuada al razonamiento matemático de los estudiantes. A través de las preguntas, el entrevistador puede motivar a los estudiantes a autocorregirse cuando cometen errores o para ampliar o generalizar un problema.

A través de la entrevista, se anima a los estudiantes a examinar sus propias estrategias y su propio pensamiento matemático, extendiendo así su comprensión conceptual de la situación (Assad, 2015).

Las entrevistas basadas en tareas permiten a los investigadores observar, registrar, e interpretar comportamientos complejos y patrones en el comportamiento, incluyendo las palabras dichas por los sujetos, voces (interjections), movimientos, escritura, dibujos, acciones en y con materiales externos, gestos, expresiones faciales, etc. (Goldin, 2000).

Diseño de entrevistas basadas en tareas

Nosotros utilizamos como protocolo un cuestionario semiestructurado (previamente validado) que incorporó actividades planteadas en el registro algebraico, gráfico y verbal; pero aquí sólo damos cuenta de las producciones para el primero. A los participantes se les proporcionaron hojas con las operaciones a realizar, mientras el investigador hacía preguntas auxiliares para identificar en qué estaba pensando el estudiante para hacer lo que hacía, el procedimiento que seguía, así como el significado de sus resultados. La actividad

ISSN:2007-882X

Mayo 2017- Abril 2018 Vol.3 No.4 188-201

fue video y audio grabada para su posterior análisis. Las entrevistas fueron transcritas totalmente para tener las narrativas de los estudiantes, y que sería

Participantes

Los resultados que se presentan corresponden a las producciones de ocho estudiantes (participantes voluntarios) de un bachillerato ubicado en la región Centro del Estado de Guerrero, cuyas edades oscilaban entre 17 y 18 años. Todos ya habían cursado y aprobado Cálculo Diferencial e Integral. Las entrevistas se realizaron en un día hábil del mes de mayo del presente año. Cada entrevista duró entre 60 y 120 minutos.

4. Análisis de los datos

Para analizar los datos utilizamos el análisis temático (Braun & Clarke, 2006, 2012), cuyo objetivo es identificar patrones de significados (temas) a través de un conjunto de datos proporcionados por las respuestas a la pregunta de investigación planteada. Según Braun y Clarke (2006) "un tema capta algo importante acerca de los datos en relación a la pregunta de investigación y representa cierto nivel de patrón respuesta o significado dentro del conjunto de datos (p. 86)". Los patrones se identifican a través de un proceso riguroso de familiarización de datos, codificación de datos, el desarrollo del tema y revisión.

Entre las ventajas del análisis temático destaca que es un método flexible, es decir, que puede ser utilizado para una amplia gama de marcos teóricos e incluso para diversas preguntas de investigación. También puede ser utilizado para analizar diferentes tipos de datos, es decir, permite el trabajo con grandes o pequeños conjuntos de datos; y finalmente, puede ser aplicado para producir análisis basado en datos (data-driven) o dirigido por la teoría (theory-driven) (Clarke & Braun, 2012). Este método se estructura en seis fases (Braun & Clarke, 2006) que son las siguientes:

- Fase 1. Familiarizarse con los datos. Para esto se h
- Fase 2. Generar códigos iniciales. En base a la lec los alumnos hicieron.
- Fase 3. Buscar temas. Creamos, asignamos y mod Una vez establecidos los códigos iniciales, contrastamos los extractos asociados a cada uno de ellos para buscar temas entre los códigos.
- Fase 4. Revisión de los temas. Los temas fueron agrupaciones de temas iniciales y eliminamos temas que no tenían suficiente evidencia para englobar las ideas de los estudiantes, y en su caso, generamos nuevos temas.
- Fase 5. Definición y nombre de los temas. En sesi
- Fase 6. Elaboración del informe. Finalmente, se hizo el reporte final del estudio.

5. Presentación de los resultados

Los resultados que se detallan enseguida corresponden a ocho estudiantes (E1, E2, …, E8). Identificamos 7 grupos que engloban 23 temas y 86 conexiones. Por cuestiones de espacio, presentamos los grupos y sus temas correspondientes, pero sólo haremos una descripción general de los mismos y aportaremos algunos ejemplos para algunos temas.

Grupo 1. La naturaleza de una función.
1. Una función polinomial se asocia con coeficientes, variables y exponentes (50%).
2. Una función cuadrática representa gráficamente una parábola (50%).
3. $f(x)\ significa\ función$ (37.5%).
4. $f(x)$ igualada con una expresión algebraica es una función (37.5%).
5. Una función $f(x)$ es una regla de correspondencia (25%).

Este grupo incluye las ideas que los estudiantes presentan en relación con una función. Esto fue posible principalmente porque se les planteó una actividad concreta, se les dio la expresión $f(x) = 3x^2$ y se les pidió que dijeran qué representaba y qué elementos constituían a esa expresión. Los estudiantes le asignaron significados, características generales y su representación gráfica. Con ello, identificamos cinco temas, de los cuales, el de: $f(x)$ significa función, matemáticamente es incorrecta porque si carece de la regla de correspondencia que permita identificar qué operación se debe realizar con la variable independiente entonces no es función. Esta idea limitada permea en 3 estudiantes y que en cursos sucesivos les puede generar confusiones al momento de abordar temas que se asocien con la idea de función.

Esta es una conexión inesperada que establecen los estudiantes. Por su parte, los temas: una función polinomial se asocia con coeficientes, variables y exponentes (ver extracto de la entrevista a E2) y, una función $f(x)$ es una regla de correspondencia se pueden categorizar como conexión entre conceptos matemáticos. Mientras que: una función cuadrática representa gráficamente una parábola y, una $f(x)$ igualada con una expresión algebraica es una función, son conexiones de tipo representaciones diferentes.

> Entrevistador: Ahí tú puedes ver una expresión f de x igual a algo. ¿Para ti qué representa esa expresión y cuáles son los elementos que la componen?
> E2: es una función. Tiene una variable elevada al cuadrado y un coeficiente (señala los elementos que identifica)

Grupo 2. Significado y operatividad con la derivada
6. La derivada de $f(x) = ax^n$ se obtiene aplicando la fórmula $f'(x) = anx^{n-1}$ (100%).
7. La derivada de una función es la pendiente de la recta tangente a ella (50%).
8. La derivada de una función (polinomial) es disminuir su grado en una unidad (37.5%).

Estos temas agrupan las ideas asocian los estudiantes con la derivada, éstas incluyen su significado, la derivada vista como un operador, el procedimiento para obtener la derivada de una función polinomial y el uso que tiene. Los temas: la derivada de $f(x) = ax^n$ se obtiene aplicando la fórmula $f'(x) = anx^{n-1}$ (ver extracto de la entrevista a E5) y, la derivada de una función (polinomial) $f(x)$ es disminuir su grado en una unidad son *conexiones de tipo procedimental*.

El tema restante corresponde a conexiones de tipo *representaciones diferentes*.

Entrevistador: ¿Qué hiciste para obtener la derivada [de $f(x) = 3x^2$]?
E5: mmm… multipliqué el 3 por 2 y resulta 6 como coeficiente y… al cuadrado de la *x* se le resta la unidad; nos queda *x* a la uno.

Grupo 3. Significado asociado a la derivada puntual

9. $f'(a)$ gráficamente significa un punto con coordenadas específicas (25%).
10. $f'(a)$ gráficamente representa un punto de tangencia (25%).

Estos temas agrupan aquellos significados que los estudiantes asocian a la derivada en un punto $x = a$. Aquí, las evidencias permiten establecer dos temas, ambos corresponden a una conexión del tipo *representaciones diferentes,* puesto que los estudiantes que la declaran relacionan la derivada en un punto con su consecuente representación gráfica. Sin embargo, ambas ideas son erróneas, puesto que matemáticamente $f'(a)$ es la pendiente de la función $f(x)$ en $x = a$ o bien, la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$. En cambio, en otros contextos pueden tener un significado diferente, por ejemplo, velocidad en un tiempo específico, costo marginal, etc.

Entrevistador: Podrías calcular la derivada en $x = 1$ [para $f(x) = 3x^2$]?
E4: Listo.
Entrevistador: ¿Tu resultado qué significa?
E4: Se supone que cuando yo le agregue el valor a *x* [a la derivada de $f(x)$], nos va a dar un punto en el que la función [derivada] va a tocar a la función original. [...] será el lugar en donde toque [la tangente].

Grupo 4. Significado y operatividad con la integral

11. La integral de una función es el área bajo esa curva (75%).
12. La integral de $f'(x) = ax^n$ se obtiene aplicando la fórmula $\int ax^n dx = \frac{au^{n+1}}{n+1} + C$ (62.5%).
13. La integral es una aproximación al área mediante rectángulos inscritos (acumulación de áreas) (25%).

Este grupo circunscribe al significado de la integral (como área bajo la curva o la idea de acumulación) y los procedimientos para calcularla. El tema: la integral de una función es el área bajo esa curva y, la integral es una aproximación al área mediante rectángulos inscritos (acumulación de áreas) [ver extracto de la entrevista a E7], corresponden a la conexión del tipo *representaciones diferentes,* ambos casos asocian el concepto de integral con la idea de área visto en el registro gráfico. Por su parte, el tema: integral de $f'(x) = ax^n$ se obtiene aplicando la fórmula $\int ax^n dx = \frac{au^{n+1}}{n+1} + C$, es de tipo *procedimental*, en particular quienes establecen esta conexión utilizan una fórmula como vía para obtener una integral específica.

Entrevistador: para ti ¿qué es la integral?
E7: el área bajo la curva
Entrevistador: ¿tiene algún otro significado?

E7: pues, entiendo que se calcula sumando las áreas de los rectángulos que se forman debajo de la curva

Entrevistador: ¿podrías explicar un poquito más?

E7: por ejemplo, si tengo una función, [...] debajo de esta función se van formando los rectángulos y la suma de [las áreas de] todos estos rectángulos es la integral.

Grupo 5. Significado de la constante de integración y la diferencial.

14. La constante de integración significa una familia de primitivas (25%).
15. La diferencial en una integral indica en base a qué variable se debe integrar (25%).
16. Al resultado de una derivada se le añade d*x* que indica que el resultado es producto de una derivada (25%).

Este grupo incluye las ideas que los estudiantes manifiestan en cuanto a dos componentes de la integral, a saber, la constante de integración y la diferencial que acompaña al integrando. Las evidencias permiten establecer tres temas, donde el que señala: la constante de integración significa una familia de primitivas, es una conexión de tipo *representaciones diferentes* porque asocian un signo (C) con su representación en el registro gráfico, pero también se asocia con la *conexión de generalización* porque la C indica una infinidad de primitivas. Por su parte: la diferencial en una integral indica en base a qué variable se debe integrar (ver extracto de la entrevista a E6), también puede ser caracterizada como una conexión entre *representaciones diferentes*, porque los estudiantes que la establecen asocian una representación simbólica con una verbal (la idea de integrar). El tema restante corresponde a una conexión inesperada y matemáticamente incorrectas.

Entrevistador: ¿Sabes qué significa la constante (se le señala la constante de integración que él añade al resultado que obtiene para una integral indefinida)?

E6: El valor que puede tomar [la primitiva] porque no es definido.

Entrevistador: ¿Sabes qué significa esa d*x* que la agregaste?

E6: Diferencial de *x*

Entrevistador: Pero ¿tiene algún otro significado o por qué se le agrega?

E6: Porque es en lo que tienes que valorar, por ejemplo, si tuvieras otra variable podría ser diferencial de *t*, diferencial de *k*, siempre va a estar referida al valor de la variable. Si tuviera otra constante sólo se evaluaría [se integraría con respecto a] *x*.

Grupo 6. Usos del Teorema Fundamental del Cálculo.

17. En una integral definida al límite superior evaluado en la antiderivada de $f'(x)$ se le resta el límite inferior evaluado en la misma (37.5%).

Este tema está referido al uso práctico del TFC cuando se resuelve una integral definida. En este caso, se asocia con la conexión de tipo *procedimental*, y tal como emplean los estudiantes al TFC matemáticamente es correcto (por ejemplo, ver extracto de E6) aunque en ningún momento nombran al citado teorema. Es destacable el hecho que, de los ocho estudiantes, solamente en 3 de ellos se identifica su correcto uso. Pese a que, en uno de ellos, no relacionan el concepto de integral con el área bajo una curva. En este caso, el estudiante establece correctamente

Mayo 2017- Abril 2018 Vol.3 No.4 188-201

la conexión procedimental, pero no asocia significado a su resultado.

Entrevistador: ¿Puedes obtener el resultado de la operación indicada (la integral definida de 6*x* desde *x* = 1 hasta para un valor *x* cualquiera)?

E6: sí (realiza la operación indicada. Obtiene como resultado $3x^2 - 3$)

Entrevistador: Me puedes indicar ¿Qué hiciste para obtener el resultado?

E6: Sí, esta es una integral definida, porque tiene dos valores (límites de integración). Igual que como el mismo procedimiento de arriba, el 6 es una constante se tiene que sacar (del signo integral) y se integra la variable (*x*) que se le suma 1, quedaría *x* cuadrada sobre dos. El seis es divisible entre dos y quedaría tres equis cuadrada. Cómo tiene los valores de arriba (límites de integración), se pone primero el valor de arriba en lugar de la *x* y después se le resta el valor de abajo (hace los cálculos que indica).

Grupo 7. Conexión entre la derivada y la integral.

18. La integral y la derivada son operaciones inversas (87.5%).
19. La derivada de la integral de una función (polinomial) es igual a la misma función (87.5%).
20. La derivada de la integral de una función (o viceversa) se obtiene siguiendo la jerarquía de las operaciones (62.5%).
21. La integral de la derivada de una función (polinomial) es la misma función (50%).
22. La integral de la derivada de una función (polinomial) es la misma función más una constante (37.5%).
23. La diferencia en sus resultados entre $\frac{d}{dx}[\int f(x)dx]$ y $\int \left[\frac{d}{dx}f(x)\right] dx$ es una constante C (37.5%).

Nuestros datos permiten establecer seis temas. Todos ellos hacen referencia a la relación que los estudiantes declaran existir entre la derivada y la integral. En su mayoría corresponden a la *conexión de reversibilidad* (ver extracto de E2).

Sin embargo, hay estudiantes que consideran que: la diferencia en sus resultados entre $\frac{d}{dx}[\int f(x)dx]$ y $\int \left[\frac{d}{dx}f(x)\right] dx$ es una constante C, esto se debe a que ellos establecen previamente la conexión: la integral de la derivada de una función (polinomial) es la misma función más una constante. Estas conexiones a su vez, se explican en parte porque ellos consideran que: la derivada de la integral de una función (o viceversa) se obtiene siguiendo la jerarquía de las operaciones. Esta última es una conexión que los alumnos establecen como resultado de la enseñanza que recibieron. Ellos saben que cuando existe simultáneamente dos o más operaciones (distintas y separadas por paréntesis o corchetes) se debe seguir la jerarquía de estas para obtener un resultado matemático correcto. No obstante, pese a que algunos establecen esta conexión también reconocen la reversibilidad entre la derivada e integral y en sus resultados consideran que $\int \left[\frac{d}{dx}f(x)\right] dx = \frac{d}{dx}[\int f(x)dx] = f(x)$, aunque tres consideren que esta relación no es totalmente cierta porque hay una constante que hace que sean diferentes. Es decir, algunos reconocen la reversibilidad entre la derivada y la integral, sin embargo, es un

 Mayo 2017- Abril 2018 Vol.3 No.4 188-201

conocimiento sin uso porque no emplean ese hecho para evitar cálculos como la integral de una derivada o viceversa.

Entrevistador: ¿conoces otra vía para llegar a ese mismo resultado (se le señala a $3x^2$ que obtuvo al calcular $\frac{d}{dx}[\int 3x^2\,dx]$) sin necesidad de hacer esos cálculos?

E2: ¡ah, ya! Pues es que aquí está derivando y esta es una integral (señala los componentes que menciona); por lo tanto, por así decirlo se anularían y entonces quedaría lo mismo.
Entrevistador: entonces ¿cuál sería tu resultado?
E2: lo mismo (indica su respuesta $3x^2$), porque este resultado que está aquí es lo mismo que esta acá (la función original dada)
Entrevistador: y ¿cuál es la explicación?
E2: que una derivada y una integral son operaciones opuestas, por ejemplo, si tienes un número que está de un lado multiplicando pasa al otro lado dividiendo… lo interpreto como algo así. Se anulan. ¡Ah ya! Por ejemplo, es como si tuvieras una equis cuadrada y una raíz se cancelan y queda sólo la equis.

6. Discusión

Los resultados obtenidos de los estudiantes permiten plantear algunas reflexiones. Las conexiones más comunes que emergen son las de representaciones diferentes, la procedimental (utilizando principalmente fórmulas aprendidas en cálculo diferencial o integral), entre conceptos matemáticos y, la conexión de reversibilidad. Estos datos son consistentes con lo reportado por Mhlolo et al. (2012) en el sentido de que se hace uso de diferentes representaciones en diferentes categorías. En cambio, la conexión que se presenta con menor frecuencia es la de generalización. Los resultados también indican que hay persistencia en el uso del símbolo algebraico (Hong & Thomas, 2015), pero en ocasiones los estudiantes no le asocian significado a sus cálculos, por ejemplo, al resultado de calcular la derivada en un punto o el de una integral definida.
La conexión de reversibilidad se identifica en las producciones de siete estudiantes, sin embargo, en uno de ellos parece ser que es un conocimiento sin uso, porque en sus cálculos da cuenta de que la diferencia entre la derivada de la integral de una función (polinomial) y la integral de la derivada de la misma función (polinomial) es una constante C.

Es decir, este estudiante como producto de la enseñanza recibida indica verbalmente que en efecto la derivada y la integral son operaciones inversas, sin embargo, al momento de hacer cálculos no sabe cómo utilizar esta conexión (que en teoría sí establece). Esto también se debe en parte a la práctica de los profesores que provoca en los estudiantes la creencia de que en las clases de Cálculo diferencial e integral se debe aprender a calcular derivadas e integrales, aunque no tengan significado ni relación aparente entre ellos. El fin último es llegar a un resultado algebraico correcto aplicando fórmulas y jerarquía de las operaciones, sin buscar desarrollar en el estudiante el pensamiento y lenguaje variacional.

Por otra parte, nuestros resultados son consistentes con las conexiones previstas en el marco teórico. También, identificamos que los estudiantes de bachillerato hacen conexiones inesperadas (Lockwood, 2011),

ISSN:2007-882X

que pueden provocarles significados incorrectos para ciertos objetos matemáticos, por ejemplo, las conexiones: $f(x)$ significa función, $f'(a)$ gráficamente significa un punto con coordenadas específicas, $f'(a)$ gráficamente representa un punto de tangencia y, al resultado de una derivada se le añade dx que indica que el resultado es producto de una derivada.

El origen de estas son diversas: como producto de la enseñanza recibida, de sus conocimientos previos y algunas parecen ser deducidas por los propios estudiantes.

7. Conclusión

Si bien en este estudio sólo se hizo el análisis de las producciones de los estudiantes en el registro algebraico es posible que en el tránsito entre las conexiones de representaciones diferentes y la conexión procedimental emerge el uso de otras, tales como: la de reversibilidad y la de generalización.

En conjunto, las diversas conexiones permiten al estudiante llegar a la solución de la actividad propuesta. Asimismo, en los estudiantes participantes observamos conexión entre sus ideas de función (definición y características), gráfica de una función, derivada, integral indefinida, integral definida, Teorema Fundamental del Cálculo, área bajo la curva, acumulación de áreas, constante de integración, diferencial, grado de un polinomio, es decir, relacionan álgebra, geometría y cálculo; conexión de tipo intramatemática. Sin embargo, no es claro que sean conscientes del potencial de las conexiones que logran establecer, pues en algunos, lo realizan en el plano verbal, pero parecen conocimientos sin uso.

Las conexiones que los estudiantes establecen no siempre son correctas. Esto es preocupante y motiva a desarrollar estudios que profundicen en las conexiones que establecen en los demás registros (gráfico y verbal), para tener un panorama más amplio e identificar con mayor profundidad la relación entra las conexiones que sí establecen.

Sin embargo, eso será objeto de un estudio más amplio actualmente en curso. Finalmente, el estudio de las conexiones entre los dos conceptos claves del Cálculo (derivada e integral) promete resultados interesantes y que podrían ser usados para realizar una propuesta encaminada a desarrollar en los alumnos la posibilidad de trabajar con ellas en situación escolar. Nuestros datos están aportando información acerca del origen de las conexiones que los estudiantes establecen, pero también generan una nueva pregunta: ¿Qué conexiones establecen los profesores de bachillerato entre la derivada y la integral? Responder esta pregunta permitirá correlacionar las conexiones que establecen ambos actores educativos y que en su conjunto darán pautas para una mayor comprensión acerca de este tema objeto de nuestro proyecto.

8. Referencias bibliográficas

Assad, D. A. (2015). Task-Based Interviews in Mathematics: Understanding Student Strategies and Representations through Problem Solving. International Journal of Education and Social Science, 2(1), 17-26.

Begg, A. (2001). Ethnomathematics: Why, and What Else? ZDM, 33 (3), 71-74.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. Qualitative Research in Psychology, 3, 77–101. http://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Braun, V., & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. In H. Cooper (Ed.), APA Handbook of Research Methods in Psychology (Vol. 2, pp. 57–71). American Psychological Association. http://doi.org/10.1037/13620-004

Businskas, A. (2008). Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections. Unpublished doctoral dissertation. Faculty of Education-Simon Fraser University. Canada.

De Gamboa, G., & Figueiras, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVIII (pp. 337-344). Salamanca: SEIEM.

DGB. (2013a). Cálculo diferencial. Recuperado el 10 de junio de 2015 de http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/cfp_5sem/calculo-diferencial.pdf

DGB. (2013b). Cálculo Integral. Recuperado el 10 de junio de 2015 de http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/cfp_6sem/CALCULO_INTEGRAL.pdf

Eli, J., Mohr-Schroeder, M., & Lee, C. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. Mathematics Education Research Journal, 23(3), 297-319.

Eli, J., Mohr-Schroeder, M., & Lee, C. (2013). Mathematical connections and their relationship to mathematics knowledge for teaching geometry. School Science and Mathematics, 113(3), 120-134.

Evitts, T. (2004). Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula. Unpublished doctoral dissertation. Pennsylvania State University College of education.

Garbín, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8(2), 169-193.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Granada: Universidad de Granada.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), Handbook of research design in mathematics and science education (pp. pp. 517-545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Haciomeroglu, E., Aspinwall, L., & Presmeg, N. (2010). Contrasting cases of calculus students' understanding of derivative graphs. Mathematical thinking and learning, 12(2), 152-176.

Hong, Y., & Thomas, M. (2015). Graphical construction of a local perspective on differentiation and integration. Mathematics Education Research Journal, 27(2), 183-200.

Jaijan, W., & Loipha, S. (2012). Making Mathematical Connections with Transformations Using Open Approach. HRD Journal, 3(1), 91-100.

Mayo 2017- Abril 2018 Vol.3 No.4 188-201

Koestler, C., Felton, M. D., Bieda, K. N. & Otten, S. (2013). Connecting the NCTM Process Standards and the CCSSM Practices. United States of America: National Council of Teachers of Mathematics.

Lockwood, E. (2011). Student connections among counting problems: an exploration using actor-oriented transfer. Educational Studies in Mathematics, 78, 307–322.

Mhlolo, M. (2012). Mathematical connections of a higher cognitive level: A tool we may use to identify these in practice. African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 16(2), 176-191.

Mhlolo, M., Venkat, H., y Schäfer, M. (2012). The nature and quality of the mathematical connections teachers make. Pythagoras, 33(1), 1-9. Recuperado de http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v33i1.22

Mwakapenda, W. (2008). Understanding connections in the school mathematics curriculum. South African Journal of Education, 28, 189–202.

NCTM. (1991). Professional Standards for Teaching Mathematics. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (2014). Principles to action: Ensuring mathematical success for all. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Özgen, K. (2013). Problem çözme bağlaminda matematiksel ilişkilendirme becerisi: öğretmen adaylari örneği. NWSA-Education Sciences, 8(3), 323-345.

Park, J., Park, M. S., Park, M., Cho, J., & Lee, K. (2013). Mathematical modelling as a facilitator to conceptualization of the derivative and the integral in a spreadsheet environment. Teaching mathematics and its applications, 32, 123-139.

Presmeg, N. (2006). Semiotics and the "connections" standard: significance of semiotics for teachers of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61, 163–182.

Stewart, J. (2010). Cálculo de una variable: Conceptos y Contextos. México: CENGAGE Learning.

Yoon, C., Dreyfus, T., & Thomas, M. (2010). How high is the tramping track? Mathematising and applying in a calculus model-eliciting activity. Mathematics Education Research Journal, 22(2), 141-157.

ISSN:2007-882X