Aproximación teórica al concepto de discontinuidad

Crisólogo Dolores[1], Hermes Nolasco-Hesiquio[1], José M. Sigarreta[1] y Otilio B. Mederos[2]
Facultad de Matemáticas[1], Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas [2]
Universidad Autónoma de Guerrero[1], Universidad Autónoma de Coahuila[2]
Chilpancingo, Gro.[1]; Saltillo, Coah.[2]; México
[cdolores2, omederosa]@gmail.com, [nolascohh, josemariasigarretaalmira]@hotmail.com

Abstract— In this paper, the methodological handling of the formation of mathematical concepts through the cultural historical focus of Vigotsky is fundamentally based on the Theory of Mental Actions and the Theory of Activity. On the basis of the same objective, we work particularly with the Concept of Isolated Discontinuity, using a methodology based on a system of structured tasks in terms of Operation, Classification of concepts and their basic rules.

Keyword— Concepts, tasks, discontinuity.

Resumen— En este trabajo se fundamenta el tratamiento metodológico de la formación de conceptos matemáticos a través del enfoque histórico cultural de Vigotsky, en lo fundamental, en la Teoría de las Acciones Mentales y la Teoría de la Actividad. En la misma direción, en lo particular, se trabaja el Concepto de Discontinuidad Puntual, sustentado en una metodología basada en un sistema de tareas estructuradas en función de la Operación Clasificación de conceptos y sus reglas básicas.

Palabras claves— Conceptos, tareas, discontinuidad.

I. INTRODUCCIÓN

Desde la perspectiva de Vygotskiana (Vigotsky, 1968; Guétmanova, 1989), la influencia que el sujeto ejerce sobre los objetos de conocimiento está sustentado, en lo fundamental, por las implicaciones teóricas de la Teoría de la Actividad (Leontiev, 1989), y por la Teoría de la Formación de las Acciones Mentales (Galperin, 1988). En tal dirección, el proceso de asimilación en el sujeto comienza cuando éste actúa sobre los objetos de conocimiento mediante un sistema acciones que, a su vez, determinado por las fases básicas por donde trascurre la actividad. Según la Teoría de la Actividad las mismas son: Etapa de Orientación, Etapa de Ejecución y la Etapa de Control.

En particular, la asimilación de un concepto (vista como actividad), transita a lo largo de una sucesión de fases, que de forma general se pueden reconocer cinco, mediante las cuales la acción se transforma, de su forma material o materializada a su forma verbal interna, es decir, el proceso de asimilación del conocimiento está determinado por el cambio de las características básicas de la acción, la forma de la acción, el grado de generalización, el grado de despliegue, el grado de independencia y el grado de asimilación o domino. Antes de pasar a la concreción de los elementos teóricos asociados al concepto matemático de discontinuidad, resulta atinado plantear que existen trabajos importantes desarrollados en la misma dirección bajo otras perspectivas teóricas, y de alguna manera complementarias a nuestra investigación (D'Amore, 2005; Ausubel, 2000; Cantoral & Farfan, 2003).

En este trabajo, en lo general, el Concepto es analizado como: El reflejo mental generalizado de una clase de objetos, procesos o relaciones de la realidad (objetiva o subjetiva) sobre la base de sus características esenciales (necesarias y suficientes) e invariantes. Mientras que, la definición de un concepto se entenderá como la expresión verbal o escrita del concepto. Así, sintetizamos diciendo que la Matemática se fundamenta en los conceptos, relaciones y operaciones, queriendo decir que su enseñanza-aprendizaje se centra en el estudio de los conceptos de objeto, conceptos de relación y conceptos de operaciones asociados esencialmente al pensamiento abstracto basado en conceptos, juicios y razonamientos.

El contenido y la extensión del concepto, guardan una íntima relación: cuanto más amplio sea el contenido del concepto, más estrecha será su extensión y viceversa. Esta se denomina “Ley de la Lógica Formal de Razón Inversa entre la extensión y el contenido del concepto”. Entre dos conceptos existe una relación de subordinación, cuando entre los contenidos y las extensiones de tales conceptos existe la siguiente dependencia: los caracteres esenciales del primer concepto constituyen sólo una parte de los caracteres esenciales del segundo, el cual posee además de dichos caracteres algunos otros; la extensión del segundo concepto, en cambio cae por completo dentro del campo del primero como parte del mismo. Al concepto de mayor extensión se le llama (concepto superior) y el de extensión menor (Concepto subordinado). Mediante un proceso de abstracción se determina el contenido del Concepto, es decir, las características propiamente dichas que especifican al objeto. No obstante, estas características se pueden extender a una colección de objetos, esto es lo que se entiende por extensión del Concepto.

Este proceso de formación de los conceptos depende directamente de las acciones del sujeto, de su actividad, ya sea física o intelectual, y transita por una serie de formas que determinan su generalización y abstracción y se transforma pasando de una forma externa a una forma interna en el sujeto, es decir, de una forma material a una psicológica o interiorizada.

Durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos es necesario realizar una serie de actividades que conlleven a los objetivos propuestos. En específico, nos planteamos como objetivo, determinar la formación del concepto de discontinuidad puntual en los estudiantes, mediante la abstracción y generalización, que puede lograrse a través de los métodos Inductivo y Deductivo.

II. METODOLOGÍA

De manera formal en este trabajo se indica un concepto por el par (*E*, *C*), o simplemente por *E* cuando no haya dudas; donde *E* denota a la extensión del concepto y por *C* a su contenido. Pueden encontrarse diferentes colecciones *C* de propiedades que sólo cumplen los elementos de *E*. Es usual indicar el contenido por la colección de propiedades $\{P_i\}_{i\in I}$ que se haya escogido, donde *I* es un conjunto de índices. Ello indica que los objetos que pertenecen a la extensión del concepto cumplen simultáneamente todas esas propiedades, o lo que es lo mismo, cumplen la propiedad única $\Lambda_{i\in I} P_i$. En la figura que sigue se muestra una representación de las tres colecciones o clases que intervienen en el concepto de concepto.

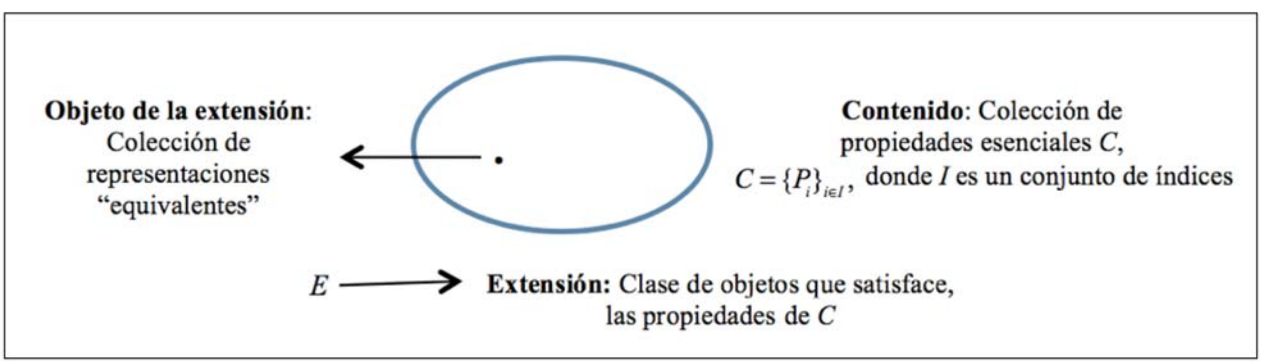

Fig. 1. Colecciones a que se hace referencia en el concepto de concepto.

Por lo tanto, en función de lo antes expuesto en este trabajo, se considera que un concepto ha sido formado, cuando se cumplen las condiciones siguientes:

1. Se ha determinado una clase *C* de propiedades esenciales (contenido del concepto) y que caracterizan a los objetos asociados con el concepto.
2. Se han construido objetos que satisfacen los rasgos esenciales y objetos que no satisfacen estos rasgos.
3. Se han agrupado en otra clase *E* (extensión del concepto), todos los objetos que satisfacen los rasgos esenciales.
4. Se utiliza un símbolo lingüístico para designar al par (*E*, *C*), o sea, para designar al concepto; y se realiza una definición del mismo.

Cuando en el proceso de enseñanza y aprendizaje de un concepto matemático se parte de una definición (vía deductiva para la formación de concepto), es necesario que se diseñen actividades para que los estudiantes comprendan que el concepto consta de contenido y de extensión; y que, además, la operación definición establece una relación de subordinación del concepto definido con el concepto de partida. Cuando se ha formado un determinado concepto solamente conocemos un conjunto finito de los objetos de su extensión mediante una de sus representaciones, y algunas propiedades del contenido. Por lo tanto, al realizar el proceso de formación conocemos cuantitativamente muy poco; sin embargo, cualitativamente el resultado alcanzado es amplio y utilizado de manera eficiente permite desarrollar la dimensión cuantitativa.

Tomando como base la perspectiva Vigostkiana, de dicha teoría se desprende que el proceso hacia el conocimiento de un concepto matemático (objeto), es un proceso continuo de acercamiento al objeto. Por lo tanto, desde el punto de vista metodológico, nos propondremos siempre trabajar en lograr un conocimiento más acabado del objeto. Una aproximación más completa (desarrollo del concepto) a un determinado concepto se alcanza, entre otras, cuando el profesor trabaja en las direcciones siguientes: Ampliación cuantitativa y cualitativa de la colección de objetos conocidos de la extensión. Aumento del número de representaciones de la clase con que se materializan los objetos de la extensión. La deducción de nuevas propiedades de los objetos de la extensión, lo cual se logra en el nivel abstracto utilizando el aparato lógico deductivo de la Matemática. Deducción de otras propiedades para sub-colecciones de objetos de las extensiones de conceptos resultantes de clasificaciones y restricciones del concepto. Determinación de lo que hay de semejante y diferente en los objetos de las extensiones de los conceptos resultantes de las clasificaciones realizadas. Establecimiento de relaciones significativas con otros conceptos; en particular, mediante diferentes tipos de mapas. Realización de cadenas de clasificaciones, generalizaciones y restricciones del concepto.

Para lograr el objetivo de pasar a un segundo nivel de aproximación a un concepto (desarrollo del concepto), dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, en muchas ocasiones, los profesores dan prioridad, en la mayoría de los casos, a la determinación de nuevas propiedades de los objetos de la extensión, mediante el establecimiento de condiciones necesarias y suficientes, necesarias o suficientes o; y no se trabaja en las direcciones anteriormente señaladas. En el caso de los conceptos de extensión con cardinalidad infinita, como es el caso de los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral, el proceso de desarrollo conceptual con respecto a sus extensiones, se realiza mediante ampliaciones sucesivas de la colección de los objetos conocidos que se aproximen cada vez más a la extensión del concepto; así como, mediante la ampliación de las colecciones de representaciones que materializan a estos objetos.

Un procedimiento básico para la aproximación sucesiva a un concepto consiste en realizar una o varias clasificaciones del mismo, con el objetivo de obtener una o varias particiones de su extensión del concepto, realizar un estudio más profundo de cada una de esas partes y, consecuentemente, obtener información más completa de la extensión del concepto que se clasifica. En esa dirección se asume la operación clasificación de conceptos siguiente:

Dado un concepto (*E*, *C*) y un conjunto de colecciones P_i de propiedades de elementos de *E*, $P_i = \{p_{ij} : i \in I, j \in J_i\}$, donde *I* y J_i son conjuntos; la colección de propiedades $P = \{p_i : p_i = \Lambda_{j \in J_i} p_{ij}\}$, se llama criterio de clasificación de (*E*, *C*) si y sólo si, la colección de conceptos $(E_{i,} C_i)$, donde $C_i = P_i$ $i \in I$, es tal que $\{E_i, i \in I\}$ es una partición de *E*. Dado el criterio de clasificación $P = \{p_i : i \in I\}$, la operación que asocia al concepto (*E*, *C*) la colección de conceptos $\{(E_i, C_i)\}$ se denomina clasificación de (*E*, *C*) según el criterio *P*.

En el presente trabajo ampliamos la definición de clasificación de (*E*, *C*) según el criterio *P* aceptando que las propiedades p_i estén definidas por combinaciones de conjunciones y disyunciones de propiedades p_{ij}. En Mederos y Roldán (2013) se establece la relación que existe entre las operaciones clasificación y generalización. Además, los autores desarrollan varias de las tareas relativas a la generalización que se pueden presentar en Matemática. En (Mederos, Dolores y Sigarreta, 2014) se ejemplifican varias reglas que deben considerarse al realizar la clasificación de un concepto y se describen un sistema de actividades para el desarrollo de dicha operación. La idea básica se puede resumir de la siguiente manera: La clasificación debe realizarse partiendo de un sólo criterio *P* (óptimo) y se debe comprobar que $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ y $E_j \cap E_k = \phi$ para todo *j* de $I \setminus \{k\}$ y todo *k* de *I*. Además, la clasificación debe ser proporcionada y sin saltos.

Definición 1. Se dice que *f* es continua en un elemento *a* de su dominio si y sólo si se cumplen las dos condiciones:

c_1) $\lim_{x \to a} f(x)$ es un número real *l*,

c_2) $l = f(a)$

Sean *B* la colección de todos los subconjuntos *A* de *R* de los cuales *a* es un elemento, $B = \{A \in R : a \in A\}$ y *F*(*a*) la colección de todas las funciones reales de variable real definidas en *a*, $F(a) = \bigcup_{A \in B} F(A)$. La extensión del concepto de función continua en un elemento *a* de su dominio, que indicamos por *C*(*a*), es la colección de elementos de F(*a*) que satisfacen las propiedades c_1 y c_2. Es conocido que todo elemento *f* de F(*a*) para el cual *a* es un punto aislado de su dominio es continuo en *a*; por lo tanto, el estudio de la continuidad y de la discontinuidad de los elementos de F(*a*) se reduce a los casos en que *a* es un punto de acumulación de su dominio.

Definición 2. Un elemento de *f* de F(*a*) tal que *a* es un punto de acumulación de su dominio A, $a \in A \cap A'$, se dice que es discontinua en *a* si y sólo si cumple una de las dos propiedades siguientes:

d_1) $\lim_{x \to a} f(x)$ es un número real *l* y $l \neq f(a)$.

d_2) $\lim_{x \to a} f(x)$ no es un número real.

El contenido del concepto de función discontinua en un punto de acumulación *a* de su dominio es el conjunto $\{d_1 \vee d_2\}$. La extensión de este concepto, que denotamos por $\Delta(a)$, es la colección de los elementos de F(*a*) que pertenecen a $\bigcup_{A \in B_1} F(A)$ donde $B_1 = \{A \subset R : a \in A \cap A'\}$ y que satisfacen la propiedad $d_1 \vee d_2$.

En (Mederos, Dolores y Sigarreta, 2015), que nos referimos al mismo como trabajo precedente, se construye una organización del conocimiento escolar para la formación de los conceptos de continuidad y discontinuidad puntual, y de conceptos subordinados al segundo concepto. Se utilizó con este objetivo la operación clasificación, sus reglas y 5 de las 6 tareas que se presentan en este artículo. Por un problema de completitud no se dio cumplimiento a la tarea 2, que acontinuación se describe.

2. Se tienen un concepto (*E*, *C*), un criterio *P* y la colección de conceptos $\{(E_i, C_i)\}_{i\in I}$ que se obtiene de (*E*, *C*) mediante la clasificación según *P*:

2.1. Dado un elelmento *x* de *E*, se quiere determinar el concepto (E_k, C_k) de esta colección tal que $x \in E_k$.

2.2. Se pretende construir colecciones de elementos de E_i para cada *i* de *I*. En caso de conceptos del CD las colecciones deben ser infinitas.

Para mostrar, en el presente trabajo, como dar cumplimiento a la tarea 2 en cada uno de los conceptos en que se ha clasificado el concepto de discontinuidad puntual en el trabajo precedente, se presentan a continuación la extensión y el contenido de estos conceptos. En el trabajo precedente desarrollado por los autores, el concepto de función discontinua en un punto *a* se clasificó en los conceptos de discontinuidad evitable $(\Delta_e(a), \{d_1\})$, de salto finito $(\Delta_{sf}(a), \{d_3\})$ donde $d_3 = d_{31} \wedge d_{32} \wedge d_{33}$ y por d_{31}, d_{32} y d_{33} se indican las propiedades $\lim_{x\to a^-} f(x) = l_i, l_i \in R, \lim_{x\to a^+} f(x) = l_d, l_d \in R$ y $l_i \neq l_d$, respectivamente; de salto infinito en *a* $(\Delta_{si}(a), \{d_5\})$ donde $d_5 = |\lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x)| = +\infty$ de límite infinito en *a* $(\Delta_{li}(a), \{d_6\})$ donde $d_6 = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = (-\infty) \vee (+\infty)$ y de discontinuidad esencial en *a* $(\Delta_{es}(a), \{d_4\})$, donde:

$$d_4 = [d_{31} \wedge (d'_{32})_2] \vee [(d'_{31})_1 \wedge (d'_{32})_2] \vee [(d'_{31})_2 \wedge d_{32}] \vee [(d'_{31})_2 \wedge (d'_{32})_1] \vee [(d'_{31})_2 \wedge (d'_{32})_2],$$

$(d'_{31})_1 : \lim_{x\to a-} f(x) \in S$, $(d'_{31})_2 : \lim_{x\to a-} f(x) \notin S \cup R$, $(d'_{32})_1 : \lim_{x\to a+} f(x) \in S$, $(d'_{32})_2 : \lim_{x\to a+} f(x) \notin S \cup R$, con $S = \{-\infty + \infty\}$.

Para dar cumplimiento a la tarea 2, enunciamos y demostramos la proposición 1.

Proposición 1. Si f y g son elementos de F(*a*) con dominio A_f y A_g, respectivamente; $(A_f \square A_g)'$ se tienen los resultados siguientes:

a) Si $f \in C(a)$ y $g \in \Delta_e(a)$, entonces $(f+g) \in \Delta_e(a)$ y si además $f(a) \neq 0$ $(f(a) = 0)$; entonces $fg \in \Delta_e(a) (fg \in C(a))$.

b) Si $f \in C(a) \cup \Delta_e(a)$ y $g \in \Delta_{sf}(a)$, entonces $(f+g) \in \Delta_{sf}(a)$ y si además $\lim_{x\to a} f(a) \neq 0$, entonces $fg \in \Delta_{sf}(a)$.

c) Si $f \in C(a) \cup \Delta_e(a) \cup \Delta_{sf}(a)$ y $g \in \Delta_{li}(a)$; entonces $(f+g) \in \Delta_{li}(a)$, $fg \in \Delta_{li}(a)$ si $l_i \cdot l_d > 0$ y $fg \in \Delta_{si}(a)$ si $l_i \cdot l_d < 0$.

d) Si $f \in C(a) \cup \Delta_e(a) \cup \Delta_{sf}(a)$ y $g \in \Delta_{si}(a)$, entonces $(f+g) \in \Delta_{si}(a)$; y si se impone a d_{31} y a d_{32} la restricción de ser diferentes de cero, entonces se tiene que $fg \in \Delta_{si}(a)$.

e) Si $f \in C(a) \cup \Delta_e(a) \cup \Delta_{sf}(a)$ y $g \in \Delta_{es}(a),$ entonces $(f+g) \in \Delta_{es}(a)$ y si además se impone a d_{31} y a d_{32} la restricción de ser diferentes de cero, entonces se tiene que $fg \in \Delta_{es}(a)$.

Demostración

a) Si $f \in C(a)$ y $g \in \Delta_e(a)$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, $\lim_{x\to a} g(x) = l$, $l \neq g(a)$. Por lo tanto, $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = f(a)+l \neq f(a)+g(a)$, $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = f(a)\cdot l \neq f(a)\cdot g(a)$ si $f(a) \neq 0$ y $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = 0\cdot 1 = f(a)\cdot g(a)$ si $f(a)=0$. De estos resultados se tiene trivialmente lo afirmado en *a*).

b) Si $f \in C(a) \cup \Delta_e(a)$ y $g \in \Delta_{sf}(a)$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = l$, $\lim_{x\to a-} g(x) = l_1$, $\lim_{x\to a+} g(x) = l_2$, y $l_1 \neq l_2$. Consecuentemente, $\lim_{x\to a-}[f(x)+g(x)] = l+l_1$, $\lim_{x\to a+}[f(x)+g(x)] = l+l_2$, $l+l_1 \neq l+l_2$. Si además l es distinto de 0, se tiene que $\lim_{x\to a-}[f(x)+g(x)] = l\cdot l_1$, $\lim_{x\to a+}[f(x)+g(x)] = l\cdot l_2$, y $l\cdot l_1 \neq l\cdot l_2$. De esta forma queda demostrada la afirmación *b*).

c) Si $f \in C(a) \cup \Delta_e(a) \cup \Delta_{sf}(a)$ y $g \in \Delta_{li}(a)$, se tiene que $\lim_{x\to a-} f(x) = l_{fi}$, $\lim_{x\to a+} f(x) = l_{fd}$, son finitos y cumplen la propiedad $(l_{fi} \neq l_{fd}) \vee (l_{fi} = l_{fd} = f(a)) \vee (l_{fi} = l_{fd} \neq f(a))$. Se cumple que $\lim_{x\to a} g(x) \in S$. Por tanto, $\lim_{x\to a-}[f(x)+g(x)] = (l_{fi}+l_{gi}) = l_{(f+g)i} \in S$, $\lim_{x\to a+}[f(x)+g(x)] = (l_{fd}+l_{gd}) = l_{(f+g)d} \in S$ y $l_{(f+g)} \in S$.

Si además $l_{fi}\cdot l_{fd} \neq 0,$ resulta que

$\lim_{x\to a-} f(x)g(x) = l_{fi}\cdot l_{gi} = l_{(fg)i} \in S$, $\lim_{x\to a+} f(x)g(x) = l_{fd}\cdot l_{gd} = l_{(fg)d} \in S$ y si:

*c*1) $l_{fi}\cdot l_{fd} > 0,$ entonces $l_{(fg)i} = l_{(fg)d} = l_{fg}$ y en consecuencia $fg \in \Delta_{li}(a)$.

*c*2) $l_{fi}\cdot l_{fd} < 0,$ entonces $l_{(fg)i} \neq l_{(fg)d}$ y por lo tanto $fg \in \Delta_{si}(a)$.

Queda así demostrada la afirmación *c*).

d) Si $g \in \Delta_{si}(a)$, lo que significa que cumple la propiedad:

$$[(l_{gi} \in R) \wedge (l_{gd} \in S)] \vee [(l_{gi} \in S) \wedge (l_{gd} \in R)] \vee [(l_{gi} \in S) \wedge (l_{gd} \in S) \wedge (l_{gi}\cdot l_{gd} = -\infty],$$

Se tiene que:

$[(l_{(f+g)i} \in R) \wedge (l_{(f+g)d} \in S)] \vee [(l_{(f+g)i} \in S) \wedge (l_{(f+g)d} \in R)] \vee [(l_{(f+g)i} \in S) \wedge (l_{(f+g)d} \in S) \wedge (l_{(f+g)i}\cdot l_{(f+g)d} = -\infty)]$ y en consecuencia $(f+g) \in \Delta_{si}(a)$. Si los límites laterales de *f* en *a* son diferentes de cero, se prueba que $fg \in \Delta_{si}(a)$ utilizando la misma idea con que se probó que la suma pertenece a esta clase.

e) Sea $f \in C(a) \cup \Delta_e(a) \cup \Delta_{sf}(a)$. Si $g \in \Delta_{es}(a)$ se cumple la propiedad

$$[d_{31} \wedge (d'_{32})_2] \vee [(d'_{31})_1 \wedge (d'_{32})_2] \vee [(d'_{31})_2 \wedge d_{32}] \vee [(d'_{31})_2 \wedge (d'_{32})_1] \vee [(d'_{31})_2 \wedge (d'_{32})_2].$$

Se prueba sin dificultad que $f + g$ también cumple la propiedad anterior y por tanto $(f+g) \in \Delta_{es}(a)$. Si se impone a d_{31} y d_{32} la restricción de ser diferentes de cero, entonces se tiene que $fg \in \Delta_{es}(a)$.

Una herramienta poderosa para la construcción de ejemplos y contraejemplos de conceptos del Cálculo y el Análisis Matemático son las funciones características, por tal razón dedicamos esta sección a su definición y al planteamiento de algunas de sus propiedades fundamentales.

Definición 3. Dado un subconjunto *A* de *R* la función real χ_A definida por la igualdad (1) se denomina función característica o indicadora de *A*.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x \in A \\ 0, & si \quad x \in R / A, \end{cases} \tag{1}$$

La función χ_A, al asociar (1) a los elementos de *A* y *0* a los elementos $R \setminus A$, indica la pertenencia, o no de los elementos de *R* al subconjunto *A*. La letra χ se usa porque es la primera letra de la palabra característica en griego. La extensión del concepto de función característica denotamos por $F_c(R)$. La función χ definida $\chi(A) = \chi_A \chi_A$ es una biyección de P(*R*) sobre $F_c(R)$ y, por tanto, el cardinal $[F_c(R)]$ de $F_c(R)$ es $2^{[R]}$. Para dos elementos de *A* y *B* cualesquiera de P(*R*) se cumplen las propiedades siguientes:

a) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B = min\{\chi_A, \chi_B\}$, *b*) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_{A^c} = max\{\chi_A, \chi_B\}$, *c*) $\chi_{A^c} = \chi_x - \chi_A$,

d) $\chi_{A|B} = \chi_A . \chi_{A^c}$, *e*) $\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \cdot \chi_{A^c} = max\{\chi_A, \chi_B\} - min\{\chi_A, \chi_B\} = |\chi_A - \chi_B| = (\chi_A + \chi_B) mod 2$

Para la construcción de colecciones infinitas de ejemplos patológicos de las extensiones de los conceptos que nos ocupan en este trabajo, es muy útil tener presente que a representación gráfica del grafo de la función χ_A está formada por las representaciones gráficas de $R \setminus A$ y la traslación de la representación en el eje horizontal de *A* en una unidad en la dirección del eje vertical. La representación analítica correspondiente es el subconjunto $[(R \setminus A) \times \{0\}] \cup [A \times \{1\}]$ de $R \times R$.

III. Resultados y discusión

A. *Sistema de tareas para la construcción de C(a) o* $\Delta(a)$

Las extensiones de los conceptos para los cuales se presentan las tareas en este epígrafe tienen cardinalidad infinita, por tanto el estudio de las mismas requiere del conocimiento de colecciones infinitas de sus objetos. Teniendo en cuenta que los objetos de la extensión de un concepto se consideran colecciones de representaciones equivalentes; se concluye que para el conocimiento de un objeto de la extensión de un concepto se necesita de la construcción de, al menos, una representación. Las tareas didácticas que se presentan en esta sección corresponden a funciones reales de variable real que son continuas o tienen un tipo de discontinuidad en un elemento a de su dominio, y en el resto de su dominio cumplen una de las dos condiciones siguientes ser continuas o tener discontinuidades esenciales. Las tareas a desarrollar son:

1. Construir infinitas funciones continuas en $R \setminus \{a\}$ y que en *a* sean: 1.1. Continua, 1.2. Con discontinuidad de evitable, 1.3. Con discontinuidad de salto finito, 1.4. Con discontinuidad de salto infinito, 1.5. Con límite infinito y 1.6. Con discontinuidad esencial.

2. Construir una colección infinita de funciones con discontinuidad esencial en cada punto de $R\setminus\{a\}$ y que en *a* cumplen las condiciones 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 y 2.6 idénticas a las condiciones 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 y 1.6, respectivamente.

Comenzaremos, por un estudio particular al analizar el caso $a=0$, mediante la construcción de colecciones infinitas de representaciones analíticas de funciones, con las características que se especifica en el título correspondiente. En las figuras $2_{i)}$ y $3_{i)}$, $i\in\{a,b,c,d,f,\}$ se presentan representaciones en un sistema de coordenadas cartesianas de dos casos particulares de las colecciones construidas en los epígrafes que se divide esa sección.

B. Construcción de colecciones infinitas de C(0)

Con la colección de todas las funciones reales continuas sobre *R* se da cumplimiento a la tarea 1.1. Si *f* es cualquier elemento de C(*R*) tal qué $f(0)=0$ y $f(x)\neq 0$ para todo *x* de $R\setminus\{0\}$ y $g=\chi_Q$, entonces $\{fg\}$ es una sub-colección infinita de C(0), porque $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ y la imagen de *g* es $\{0,1\}$. Por otra parte, $f\chi_Q(x)=0$ para $x\in Q$ y $f\chi_Q(x)=f(x)\neq 0$, por lo tanto, tiene discontinuidad esencial en cada punto de $R\setminus\{0\}$. De forma se da cumplimiento a la tarea 1.2.

C. Construcción de colecciones infinitas de $\Delta_e(0)$

Las colecciones infinitas $\{f+\alpha\chi_{\{0\}}\}_{\alpha\in R\setminus\{0\}}$ y $\{fg+\alpha\chi_{\{0\}}\}_{\alpha\in R\setminus\{0\}}$, donde $f\in C(R)$ y $\{fg\}$ es la colección definida en el epígrafe anterior, son subconjuntos de $\Delta_e(0)$ por *a*) de la proposición 1. Los elementos de la primera (segunda) colección son obviamente continuos (tienen discontinuidad esencial en cada punto de $R\setminus\{0\}$ por *e*) de la proposición 1). Con estos resultados se da cumplimiento a las tareas 1.2 y 2.2.

D. Construcción de colecciones infinitas de $\Delta_{sf}(0)$

Las colecciones $\{f+\alpha\chi_{[0,+\infty)}\}$ y $\{fg+\alpha\chi_{[0,+\infty)}\}$, donde $f\in C(R)$, $\{fg\}$ es la colección del primer epígrafe de esa sección y $a\in R\setminus\{0\}$, están contenidas $\Delta sf(0)$ por *b*) de la proposición 1. Los elementos de la primera (segunda) colección son continuos (tiene discontinuidad esencial, por e) de la proposición 1) en cada elemento de $R\setminus\{0\}$. Damos cumplimiento a las tareas 1.3 y 2.3.

E. Construcción de colecciones infinitas de $\Delta_{si}(0)$

Las colecciones $\{g_\alpha\}_{\alpha\in R\setminus\{0\}}$ y $\{h_\alpha\}_{\alpha\in R\setminus\{0\}}$ definidas por

$$g_\alpha(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{x}, & x\in R\setminus\{0\}\\ 0, & x=0\end{cases} \qquad \text{y} \qquad h_\alpha(x)=g_\alpha(x)\chi_Q(x)+j_\alpha(x)\chi_I(x),$$

donde,

$$j_\alpha(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x^3}, & x\in R\setminus\{0\}\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Son subconjuntos de $\Delta_{si}(0)$. Los elementos de la primera colección son evidentemente continuos sobre $R\setminus\{0\}$. los elementos de las colecciones $\{g_\alpha\chi_Q\}$ y $\{j_\alpha\chi_I\}$ tiene discontinuidad esencial en cada elemento de $R\backslash\{0\}$ por e) de la proposición1. Los elementos de la colección $\{h_\alpha\}_{\alpha\in R\backslash\{0\}}$ tienen trivialmente salto finito en 0 y discontinuidad esencial en cada elemento x de $R\backslash\{0\}$,porque cuando x es racional (irracional) $h_\alpha(x)=\frac{\alpha}{x}$ $\left(h_\alpha(x)=\frac{\alpha}{x^3}\right)$. De esta manera damos cumplimiento a las tareas 1.4 y 2.4.

F. Construcción de colecciones infinitas de $\Delta_{li}(0)$

Las colecciones $\{g_\alpha\}_{\alpha\in R\backslash\{0\}}$ y $\{h_\alpha\}_{\alpha\in R\backslash\{0\}}$ definidas por

$$g_\alpha(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{x^2}, & x\in R\backslash\{0\}\\ 0, & x=0\end{cases} \qquad \text{y} \qquad h_\alpha(x)=g_\alpha(x)\chi_Q(x)+j_\alpha(x)\chi_I(x),$$

donde,

$$j_\alpha(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x^4}, & x\in R\backslash\{0\}\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Son subconjuntos de $\Delta_{li}(0)$. Los elementos de la primera colección son evidentemente continuos sobre $R\backslash\{0\}$. De la definición h_α se tiene que y $h_\alpha(x)=\alpha/x^2$ si $x\in Q$ $h_\alpha(x)=\alpha/x^4$ si $x\in I$, por lo tanto, se puede afirmar que los elementos de la segunda colección tienen discontinuidad esencial en cada elemento de $R\backslash\{0\}$. Se da cumplimiento de esta forma a las tareas 1.5 y 2.5.

G. Construcción de colecciones infinitas de $\Delta_{es}(a)$

Los elementos de las colecciones $\{f_\alpha\}$ y $\{\chi_I f_\alpha\}$, donde α es un número real mayor que 2 y f_α está definida por $f_\alpha(0)=0$ y $f_\alpha(x)=sen(1/x)+\alpha$ si $x\neq 0$ están contenidas en $\Delta_{es}(0)$. Los elementos de la primera colección son continuos en todo punto de $R\backslash\{0\}$ y los de la segunda, en virtud de e) de la proposición 1, tienen discontinuidad esencial en cada punto de $R\backslash\{0\}$.

H. Representaciones cartesianas de objetos de C(0), $\Delta_e(0)$, $\Delta_{sf}(0)$, $\Delta_{li}(0)$, $\Delta_{si}(0)$ *y* $\Delta_{es}(0)$

La frase “representaciones cartesianas” significa representaciones en un sistema de coordenadas cartesianas. En las figuras 2_a-2_f se presentan las representaciones cartesianas, equivalentes a las representaciones analíticas $f_a(x)=x$, $f_b(x)=x+\chi_{\{0\}}(x)$, $f_c(x)=x+\chi_{\{0,+\infty\}}(x)$, $f_d(x)=1/x$ si $x\neq 0$ y $f_d(0)=0$, $f_e(x)=1/x^2$ si $x\neq 0$ y $f_e(0)=0$, $f_f(x)=sen(1/x)+\alpha$ si $x\neq 0$ y $f_f(0)=0$, que pertenecen a las extensiones C(0), $\Delta_e(0)$, $\Delta_{sf}(0)$, $\Delta_{li}(0)$, $\Delta_{si}(0)$ y $\Delta_{es}(0)$.

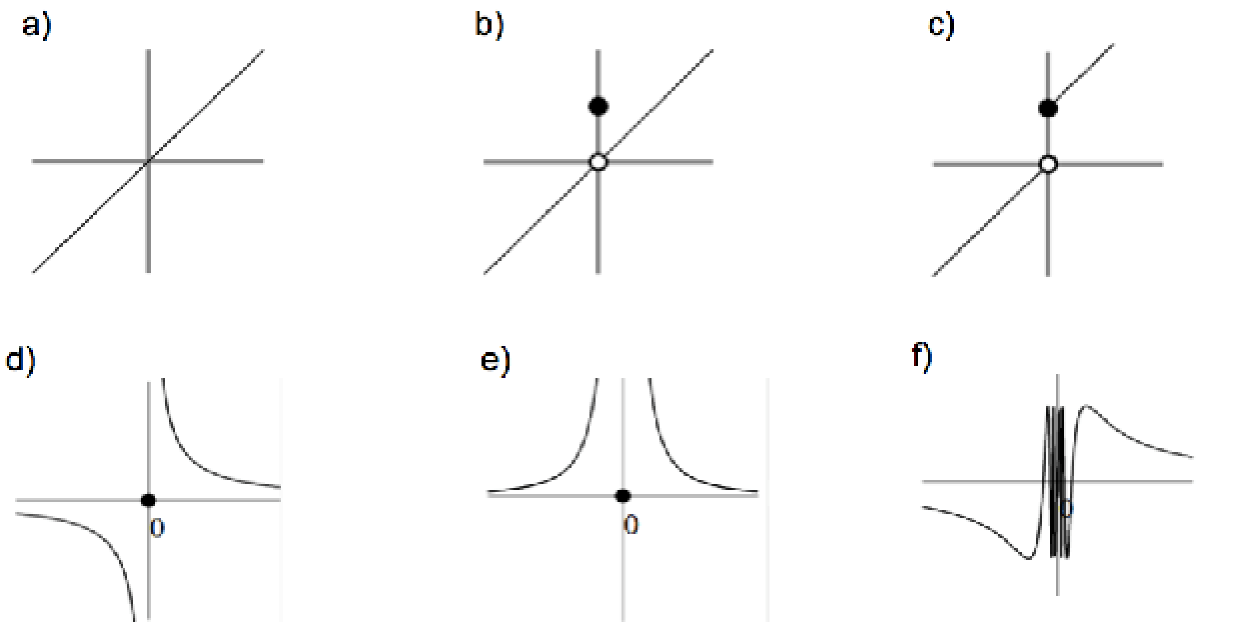

Fig. 2. Objetos de F(0) con diferentes comportamientos en 0 y continuos en $R/\{0\}$.

Las figuras $3_a - 3_f$ corresponden a las representaciones cartesianas, equivalentes a las representaciones analíticas $g_a(x) = x\chi_Q(x)$, $g_b(x) = x\chi_Q(x) + \chi_{\{0\}}(x)$, $g_c(x) = x\chi_Q(x) + \chi_{[0,+\infty)}(x)$, $g_d(x) = (1/x)\chi_Q(x) + (1/x^3)\chi_I(x)$ si $x \neq 0$ y $g_d(x) = 0$, $g_e(x) = (1/x^2)\chi_Q(x) + (1/x^4)\chi_I(x)$ y $g_e(0) = 0$, $g_f(x) = [sen(1/x) + 2]\chi_I(x)$ si $x \neq 0$ y $g_f(0) = 0$, que pertenecen a las extensiones C(0), $\Delta_e(0)$, $\Delta_{sf}(0)$, $\Delta_{li}(0)$, $\Delta_{si}(0)$, $\Delta_{es}(0)$ y tienen discontinuidad esencial en cada punto de $R\backslash\{0\}$.

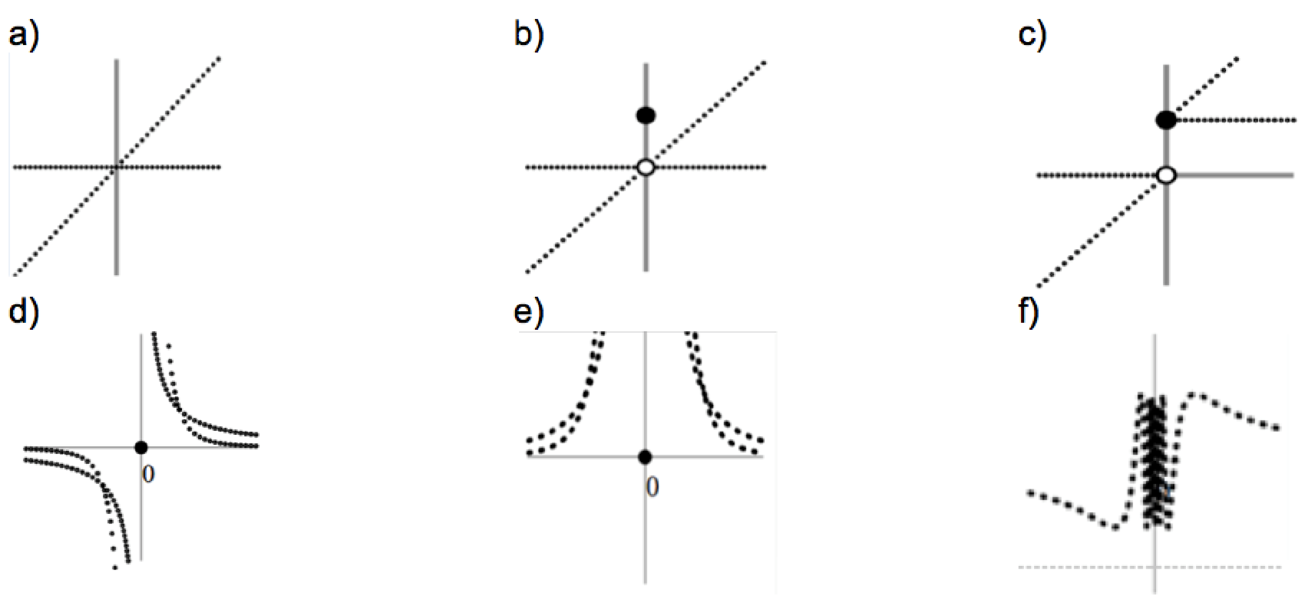

Fig. 3. Objetos de $F(0)$ con diferentes comportamientos en 0 y discontinuos en $R/\{0\}$.

IV. CONCLUSIONES

La conceptualización de la operación clasificación de concepto y del tratamiento metodológico de sus reglas y tareas; permite concretar el proceso de formación de los conceptos asociado a cada clasificación y comenzar el proceso de desarrollo de los conceptos que se obtienen de las mismas. En esa misma dirección se explicitó el proceso para la construcción de dos sub-colecciones infinitas de representaciones analíticas y gráficas de objetos para cada una de las extensiones de los conceptos de función continua, con discontinuidad evitable, ordinaria (de salto finito), con límite infinito y esencial en el punto cero. Los objetos de una de estas colecciones son continuos en $R\setminus\{0\}$ y los de la otra tienen discontinuidad esencia en cada punto de $R\setminus\{0\}$.

Además, con el trabajo se favorece la comprensión de los conceptos estudiados al ampliar cuantitativa y cualitativamente la colección de objetos conocidos de las extensiones estudiadas; y se contribuye a determinar lo que hay de semejante y diferente en los objetos de las extensiones de los conceptos considerados. En particular, se construyeron para los conceptos de función discontinua, con discontinuidad no evitable, no ordinaria o infinita; sub-colecciones infinitas de objetos de sus extensiones. Nótese que los elementos de parejas de estas colecciones satisfacen propiedades adicionales a las que se exigen para estos conceptos. Por ejemplo, se han construido para el concepto de discontinuidad en a, parejas de colecciones que satisfacen, además de las propiedades del contenido de este concepto, las propiedades de contenido de los conceptos de discontinuidad evitable, ordinaria, infinita y esencial.

RECONOCIMIENTOS

Agradecemos el apoyo brindado, para el desarrollo de esta investigación, por el CONACYT de México en particular través del proyecto denominado: “Fortalecimiento y Consolidación de la Maestría en Ciencias Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero” clave: 249818.

REFERENCIAS

Ausubel, D. P., Novak, J. D., y Hanesian, H. (2000). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. México: Reverté.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2003). Mathematics education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics, 53*(3), 255-270.

Galperin, P. (1988). *Desarrollo de las investigaciones sobre las acciones mentales.* La Habana: Universidad de la Habana.

Guétmanova, A. (1989). *Lógica*. Moscú: Editorial Progreso.

Leontiev, A. N. (1988). *Actividad, Conciencia, Personalidad*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Mederos, O. B., y Roldan, R. A. (2012). Caracterizaciones y Generalizaciones del Concepto de Métrica. *Revista Ciencias Matemáticas, 25*, 26-38.

Mederos, O. B., y Roldan, R. A. (2013). Generalizaciones del Concepto de Métrica. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 35*, 43-58.

Mederos, O. B., Dolores, C., y Sigarreta, J. M. (2015). Clasificación de la continuidad. *Enviado*.

Vygotsky, L. (1968). *Pensamiento y lenguaje. Teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas*. La Habana: Instituto del Libro.