Educación Matemática en las Américas 2019

CIAEM
IACME
desde - since 1961

Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO
www.ciaem-iacme.org

Educación Matemática en las Américas 2019
Editado por Yuri Morales-López y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González

ISBN: 978-9945-09-413-8

El *Comité Interamericano de Educación Matemática* (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la *International Commission on Mathematical Instruction*. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Cada autor es responsable del contenido del documento que declara de su autoría o coautoría y libera al CIAEM y editores de este libro de toda responsabilidad por contenido que pueda lesionar el derecho de terceros. Cada autor ha declarado que su trabajo no fue previamente publicado en otro medio; y que todos los datos y referencias a materiales publicados fueron debidamente identificados con su respectivo crédito e incluidos en las referencias bibliográficas.

Se respetaron los metadatos (nombres, apellidos, títulos, entre otros) que los autores proporcionaron cuando postularon su trabajo en la plataforma del evento.

Para citar este libro y este volumen:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2020). *Educación Matemática en las Américas 2019.* Editores: Yuri Morales-López y Ángel Ruíz. República Dominicana: Autor.

ISBN: 978-9945-09-413-8
9 789945 094138

10. Historia y epistemología de las Matemáticas y de la Educación Matemática

Análisis teórico de los operadores lineales diagonalizables con base en la teoría APOE

Esteban **Mendoza** Sandoval
Universidad Autónoma de Guerrero
México
emendoza@uagro.mx
Flor Monserrat Rodríguez Vázquez
Universidad Autónoma de Guerrero
México
flor.rodriguez@uagro.mx
Jesús **Romero** Valencia
Universidad Autónoma de Guerrero
México
jromv@yahoo.com
Ademir **Basso**
CEPACS-PR
Brasil
ademir_basso@yahoo.com.br

Resumen

Debido a la abstracción de algunos conceptos del álgebra lineal y la formalidad con la que se suele tratarse a esta asignatura, el aprendizaje por parte de los estudiantes sigue siendo endeble. Respecto a los operadores lineales que son diagonalizables como foco de investigación se encuentran estudios o acercamientos a conceptos relacionados, así como estrategias con el uso de tecnología para mejorar el aprendizaje sobre la diagonalización de matrices. Por ende, se realiza un estudio sobre la comprensión de los operadores lineales diagonalizables en estudiantes de una licenciatura en matemáticas o una carrera a fin de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), México con base en la teoría APOE. Concretamente se presenta el resultado de la primera componente del ciclo de investigación que propone dicha teoría, una descomposición genética hipotética de los operadores lineales diagonalizables.

Palabras clave: álgebra lineal, teoría APOE, análisis teórico.

Introducción

En la mayoría de las universidades en los cursos de álgebra lineal no se alcanza el nivel de aprendizaje esperado (Trigueros et al, 2015). Profesores y estudiantes consideran los temas de álgebra lineal difíciles (Possani, Trigueros, Preciado, y Lozano, 2010; Salgado y Trigueros, 2015). Según Parraguez, Lezama y Jimenez (2016) es difícil alcanzar los objetivos de enseñanza y aprendizaje propuestos para los cursos de álgebra lineal.

En los cursos de álgebra lineal se aborda el estudio de matrices, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales, productos internos, ortogonalidad y la teoría de la diagonalización. Respecto a la diagonalización Yildiz (2013) realiza un proyecto de enseñanza del álgebra lineal con el uso de tecnología, con dos objetivos 1) investigar cómo incorporar las TIC dentro de los cursos de nivel superior; 2) desarrollar una serie de nuevos materiales de instrucción sobre varios temas dentro de nivel pregrado en matemáticas, en dicho trabajo se pretende evaluar el uso efectivo de calculadoras avanzadas como herramienta de asistencia para promover la comprensión conceptual de la diagonalización. Asimismo presenta su forma de enseñar como una combinación de experimentación teórica y un en foque algorítmico y reporta que las calculadoras avanzadas con tareas cuidadosamente diseñadas pueden proporcionar la adquisición de conocimiento y facilita la percepción del concepto. Para el caso de la diagonalización, considera que las calculadoras avanzadas son una herramienta valiosa para enseñar dicho concepto debido que estas ofrecen asistencia a los estudiantes para los cálculos conservando su atención en los cálculos de la matriz.

Por otra parte, Salgado y Trigueros (2015) realizan un estudio de la enseñanza de valores y vectores propios con base en la teoría APOE. Muestran evidencia de tres estudiantes que logran una construcción objeto a partir de sus tareas diseñadas bajo este enfoque. Además de validar su descomposición genética, sugieren que dicho enfoque teórico es alentador para el tratamiento de estos conceptos que están relacionados con los operadores lineales diagonalizables. Referente al tema operador lineal diagonalizable, desde la perspectiva de APOE y desde otras perspectivas se ha encontrado poca investigación durante la revisión bibliográfica y no se ha encontrado al momento investigaciones que atiendan la compresión de los operadores lineales diagonalizables, se tiene antecedentes de conceptos relacionados al tema, además de estrategias pedagógicas por medio de software para facilitar los cálculos y se logre diagonalizar matrices.

La importancia de diagonalizar a los operadores lineales, cuando es posible, es porque reduce significativamente los cálculos al tener una representación matricial sencilla y esto produce un mejor entendimiento de cómo actúa un operador lineal sobre el espacio vectorial en el cual se ha definido.

Nuestro interés es investigar lo que refiere a los operadores lineales diagonalizables (OLD). Estos objetos son un objetivo de enseñanza particular del álgebra lineal y se requiere de relacionar conceptos específicos para lograrlo, por ejemplo: determinante, matriz asociada a una transformación lineal, matriz diagonal, base ordenada, polinomio característico, valores y vectores propios etc., por mencionar algunos. La pregunta directriz de esta investigación es: ¿Qué estructuras y mecanismos mentales están asociados a los operadores lineales diagonzalizables en estudiantes de nivel superior de una licenciatura en matemáticas? Para responder esta pregunta de investigación se tiene el siguiente objetivo de investigación: Describir y caracterizar los mecanismos y estructuras mentales asociados a los operadores lineales diagonalizables en estudiantes de nivel superior de una licenciatura en matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro) por medio de una descomposición genética que es "un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar construir con el fin de aprender un concepto matemático específico" (Arnon et al., 2014, p. 27). En este escrito concretamente se presenta el resultado de la primera componente del ciclo de investigación que propone la teoría APOE.

Marco teórico y metodológico

La investigación se sustenta sobre la base de la teoría APOE la cual tiene fundamentos en la abstracción reflexiva (Piaget, 1985), y es entendida como un mecanismo mental que consta de dos partes: (1) conocimiento sobre un objeto matemático y las operaciones que actúan sobre dicho objeto, desde un nivel de cognición inferior a uno superior de operaciones (de acciones a procesos y de procesos a objetos) y, (2) reorganización y reconstrucción del objeto y de las operaciones que actúan en él, en una etapa superior que da como resultado el contenido al cual se le pueden aplicar nuevas operaciones (Arnon et al., 2014; Badillo, Trigueros y Font 2015).

Esta postura teórica enfatiza sobre el conocimiento matemático y la habilidad para reorganizar conocimiento y con ello construir o reconstruir estructuras mediante la abstracción reflexiva. Las construcciones que propone la teoría son Acción, Proceso, Objeto y Esquema, para esta parte de la investigación se consideraron las siguientes:

Acción. Según Piaget y adoptado por la teoría APOE, un concepto es concebido primero como una acción, es decir, como una transformación dirigida externamente de un objeto, u objetos previamente concebida. Una acción es externa en el sentido de que cada paso de la transformación debe realizarse de forma explícita y guiada por instrucciones externas; adicionalmente, cada paso debe introducir al siguiente, es decir, los pasos de la acción no pueden todavía ser imaginados y ninguno se puede saltar. (Arnon et al., 2014, p. 19)

Proceso. Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede ser interiorizada en un proceso mental. Un proceso es una estructura mental que lleva a cabo la misma operación acción que se interioriza, pero totalmente en la mente del individuo, permitiendo así al individuo imaginar la realización de la transformación sin tener que ejecutar cada paso de forma explícita. (Arnon et al., 2014, p.339).

Objeto. Si uno se da cuenta del proceso en su totalidad, se da cuenta de que las transformaciones pueden actuar en esa totalidad, y realmente puede construir tales transformaciones (explícita o en la imaginación de uno), entonces se dice que el individuo ha encapsulado el proceso en un objeto cognitivo. Por ejemplo, para el concepto de función, la encapsulación permite aplicar transformaciones de funciones tales como la formación de un conjunto de funciones, definir las operaciones aritméticas sobre dicho conjunto, dotándola de una topología, etc. (Dubinsky, Weller, McDonald, y Brown, 2005, p.339)

Dichas construcciones: acciones, procesos, objetos y esquemas se reestructuran y se adaptan para dar solución a problemas matemáticos. Dubinsky considera cinco tipos de mecanismos mentales (tipos de abstracción reflexiva), tomando cuatro de las ideas de Piaget y anexando uno a la teoría, estos son: interiorización, encapsulación, coordinación, reversión, des-encapsulación, tematización y generalización (Dubinsky, 1991). Estos tipos de abstracción reflexiva tienen la función de relacionar en un momento preciso las estructuras y transitar de una estructura a otra o revertir si el individuo lo considera conveniente.

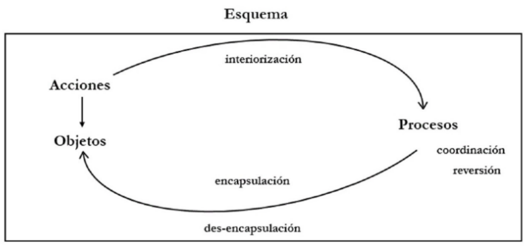

Figura 1. Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de conocimiento matemático

En la figura 1, tomada de Arnon et al., (2014, p. 18) se muestran las conexiones entre las construcciones mentales que están dadas por los mecanismos mentales; según los autores ejemplifica cómo un individuo construye estructuras matemáticas, el diagrama sugiere quizá que la construcción de conocimiento matemático es lineal, advierten que no necesariamente.

Para llevar a cabo la investigación se recurrió al paradigma de investigación que propone la teoría APOE. El paradigma de investigación que propone la teoría APOE considera tres componentes: Análisis Teórico; Diseño e implementación de actividades; Recolección y Análisis (figura 2) tomada de Arnon et al., (2014, p. 94).

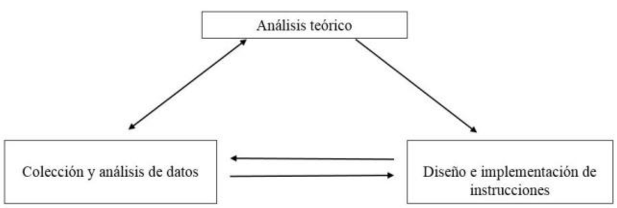

Figura 2. Ciclo de investigación de la teoría APOE

Una investigación bajo el foco de este paradigma, se inicia con un análisis del concepto a estudiar, esto arroja una descomposición genética hipotética, en el sentido que aún no se prueba experimentalmente con el trabajo de los estudiantes. Respecto a la segunda componente, la implementación se lleva a cabo normalmente usando el Ciclo de Enseñanza ACE, se considera la importancia del aprendizaje colaborativo y básicamente consiste en instrucciones las cuales deben apoyar las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética preliminar formando grupos pequeños de discusión. Por otro lado, la tercera componente del paradigma de investigación que propone la teoría APOE la recopilación y análisis de los datos, es una componente muy importante puesto que, sin evidencia empírica, una descomposición genética sigue siendo una mera hipótesis (Arnon et al., 2014).

Diseño metodológico

Se consideró la definición matemática del OLD que se presentan los libros de texto que se sugieren en el plan y programa de estudio de la licenciatura en matemáticas que se oferta en la UAGro, se centra la atención en cómo este se presenta en los libros y la relación con otros conceptos con el fin de analizar e identificar que conceptos involucra la definición directamente para sugerirlos como conceptos previos. Se describió el tipo de concepción de los conceptos previos y los que resultaron estar relacionados con los OLD por medio de las descomposiciones genéticas reportadas en la literatura especializada en el área; se consideró las sugerencias de expertos en álgebra lineal respecto a los OLD. Con base en lo anterior se propone una descomposición genética hipotética de los operadores lineales diagonalizables (DGHOLD), es decir, un modelo cognitivo asociado al OLD que describe la construcción que podría hacer un estudiante a la hora de aprender dicho concepto.

Resultado: análisis teórico de los operadores lineales diagonalizables

Se considera la definición matemática del operador lineal diagonalizable en diferentes libros de texto de álgebra lineal y la relación con algunos conceptos de álgebra lineal. Se centra la atención en el concepto de OLD y cómo este se presenta en los libros ¿Pero qué es un operador lineal? Algunos libros consideran una transformación lineal de V sobre si mismo como: operador lineal o endomorfismo, Tabla 1.

Tabla 1

Operador lineal en los libros de texto

Autor	Definición
Hoffman y Kunze (1973, p. 76)	Si V es un espacio vectorial sobre el campo F, un operador lineal V es una transformación lineal de V sobre V.
Grossman, (2008, p. 460)	Las transformaciones lineales con frecuencia se denominan operadores lineales.
Anton (1994, p. 250)	Si, $T: V \rightarrow V$ es una transformación lineal de un espacio vectorial V en sí mismo, entonces T es un operador lineal sobre V.

Los operadores lineales se pueden considerar como trasformaciones lineales definidas entre un mismo espacio vectorial, mientras que una trasformación lineal puede definirse entre diferentes espacios vectoriales. En esta investigación consideramos al operador lineal en el sentido de Hoffman y Kunze (1973) y se consideran los operadores lineales definidos en un espacio vectorial dimensionalmente finito. Respecto a los operadores lineales diagonalizables, se analizaron las definiciones que presentan diferentes libros de texto que usualmente son usados para los cursos de álgebra lineal de la UAGro, Tabla 2.

Tabla 2

Definición de operador lineal diagonalizable

Autor	Definición
Hoffman y Kunze (1973, p. 183)	Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita V. Se dice que T es diagonalizable si existe una base de V tal que cada vector suyo sea vector propio de T.
Poole (2011, p. 527)	Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $T: V \rightarrow V$ una transformación lineal. Entonces T se llama diagonalizable si existe una base C para V tal que la matriz $[T]_C$ sea una matriz diagonal.
Godement (1974, p. 529)	Sea u un endomorfismo de un espacio vectorial E de dimensión finita *n* sobre un cuerpo conmutativo K. Se dice que u es diagonizable si existe una base de E

	formada por vectores propios de u; dicho de otra forma, respecto a la cual la matriz de u sea diagonal.
Friedberg, Insel, y Spence (1982, p. 233)	Se dice que un operador lineal T sobre un espacio vectorial dimensionalmente finito V es diagonalizable si existe una base β para V tal que $[T]_\beta$ sea una matriz diagonal. Una matriz cuadrada A es diagonalizable si A es similar a una matriz diagonal.

De las anteriores definiciones en libros que se sugieren como bibliografía en los cursos de álgebra lineal, se resalta que el estudio de la diagonalización puede ser tratado desde un punto de vista matricial, esto es, “Una matriz A de $n\ x\ n$ es diagonalizable si existe una matriz diagonal D tal que A es semejante a D.” (Grossman, 2008, p. 557). Pero también, se puede hacer desde el punto de vista funcional (tabla 2). Dado que las definiciones de Hoffman y Friedberg son equivalentes se deduce que la diagonalización de los operadores lineales, se puede analizar desde un punto de vista funcional y matricial. Dicho análisis conlleva a relacionar diferentes conceptos desde ambos puntos de vista; en su forma funcional, determinando la existencia de una base donde cada vector suyo sea un vector propio del operador lineal dado; desde el punto de vista matricial, encontrando una matriz diagonal similar a la matriz dada (Figura 4).

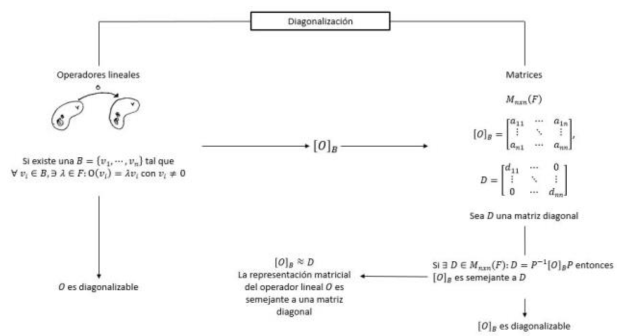

Figura 3. Diagonalización en álgebra lineal

Análisis de descomposiciones genéticas de conceptos relacionados al OLD

Para este análisis consideramos las estructuras que se proponen en las diferentes descomposiciones genéticas de conceptos relacionados con los OLD y de manera hipotética se proponen para los casos que no se cuente con una descripción de la estructura del concepto. Los conceptos que se analizaron son: transformación lineal, base ordenada, matriz asociada a una transformación lineal (MAT), determinante, matriz semejante, valores y vectores propios.

Con una concepción proceso de transformación lineal un estudiante es capaz de considerar a la transformación lineal como una función que conserva combinaciones lineales, es decir, que conserva la adición vectorial y el producto escalar definido en su dominio y codominio (Roa y Octack, 2010). A partir de la descomposición genética de Kú (2007) y lo expuesto en Mendoza-Sandoval, Rodríguez-Vásquez y Roa-Fuentes (2015) de base y base ordenada respectivamente, en una concepción proceso de base ordenada, un individuo puede reflexionar sobre el posible orden de los elementos de la base B, decidir cuál será dicho orden, y establecer si un vector dado o un conjunto de vectores podría escribirse como combinación lineal de los elementos B con el orden establecido o dar una base para el espacio vectorial dado; en una concepción proceso de la MAT, un individuo puede determinar la representación matricial dado el operador lineal para un par de bases específicas (Montelongo, 2016); con una concepción proceso de determinante, suponemos que un individuo es capaz de calcular el determinante de una matriz sin importar su tamaño; una estructura proceso de valores y vectores propios, un individuo reconoce el paralelismo de los vectores Av y v para cualquier espacio de R^n, reconocen que un valor propio es un escalar que cambia la magnitud y posiblemente la dirección del vector v (Salgado y Trigueros, 2014; 2015); con una concepción proceso de matriz semejante, un individuo puede encontrar una matriz P tal que, dada una matriz A se satisfaga $D = P^{-1}AP$ con D la una matriz diagonal.

Conclusiones

Con sustento en el análisis teórico, la revisión de algunas descomposiciones genéticas existentes, aunado a esto, la experiencia de los investigadores y las sugerencias de expertos respecto al álgebra lineal se propone la siguiente descripción de las estructuras asociadas al OLD de manera hipotética. Las estructuras previas para iniciar la construcción de los operadores lineales diagonalizables son: concepción proceso de transformación lineal; concepción proceso de base ordenada; concepción proceso de la MAT; concepción proceso de matriz semejante; concepción proceso de vector y valor propio.

Descomposición genética hipotética del OLD: Construcción cognitiva del OLD como objeto

La construcción del OLD como un objeto cognitivo podría darse de la siguiente manera en un individuo. Dado un espacio vectorial V de dimensión finita n sobre un campo F y un operador lineal O, con una concepción proceso de base ordenada, el individuo, encuentra una base B ordenada para V. Con su concepción proceso de vector propio, determina si cada vector $v_i \in B$ es un vector propio de O, en este caso, con la información obtenida y su concepción proceso del operador lineal decide si es o no diagonalizable. Si los $v_i \in B$ no todos son vectores propios de O entonces el individuo con su concepción proceso de la matriz asociada a una transformación lineal (MAT) encuentra la representación matricial de O respecto a la base B, es decir $[O]_B$. Con su concepción proceso de matriz semejante, encuentra una matriz diagonal D, si existe, tal que $D = P^{-1}[O]_B P$ con lo que concluye que O es un operador diagonizable al cual puede aplicarle acciones específicas, Figura 5.

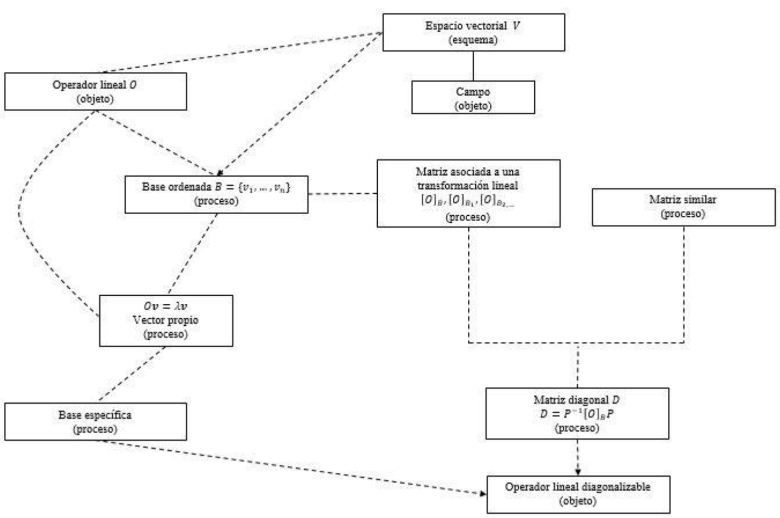

Figura 4. Construcción cognitiva como objeto de los OLD

Se propone dicha construcción cognitiva como Objeto de los operadores lineales diagonalizables hipotética, es decir, que no está validada experimentalmente. Dicho modelo cognitivo hipotético que se prepone, puede ser un punto de partida para la comunidad interesada en indagar y/o profundizar sobre las estructuras y mecanismos asociados a los operadores lineales diagonalizables desde el punto de vista de la teoría APOE.

Referencias y bibliografía

Arnon, L., Cottill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS Theory a framework for research and curriculum education*. New York: Springer Netherlands. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Badillo, E., Trigueros, M., y Font, V. (2015). Capítulo 2 : Dos aproximaciones teóricas en Didáctica del Análisis Matemático : APOE y EOS . En C. Azcárate, M. Camacho-machin, M. González, y M. Moreno (Eds.), *Didáctica del análisis matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp. 31–51).

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in avanced mathematical thinking. En T. David (Ed.), *Advanced mathematical thinking* . Dordrecht: Springer Netherlands. (pp. 95–126)

Friedberg, S., Insel, A., y Spence, L. (1982). *Algebra Líneal* (primera ed). México: Publicaciones cultura, S.A.

Godement, R. (1974). *Álgebra*. Madrid: Tecnos, S. A.

Grossman, S. (2008). *Álgebra lineal* (6a ed.). México: McGRAW-HIL.

Hoffman, K., y Kunze, R. (1973). *Álgebra lineal*. New Jersey: Prentince-Hall.

Kú, D. (2007). *Aprendizaje de la base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE (tesis de maestría inédita)*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Mendoza-Sandoval, E., Rodríguez-Vásquez, F., y Roa-Fuentes, S. (2015). Estudio del concepto matriz de cambio de base en términos de la Teoría APOE. En C. Fernández Verdú, M. Molina Gonzáles, y N. Planas Raig (Eds.). *Alicante: Investigación en educación matemática XIX*. Recuperado de http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/51542/1/2015-Actas-XIX-SEIEM_36.pdf (pp. 371–379)

Montelongo, O. (2016). *Construcción cognitiva de la matriz asociada a una transformación lineal (tesis de doctorado inédita)*. Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero.

Poole, D. (2011). *Álgebra Lineal. Una introducción moderna*. (S. R. Cervantes Gonzales, Ed.) (3ra ed.). México: Cengage Learning Editores.

Salgado, H., & Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eingevectors using models Apos Theory. *The journal of mathematical behavior*, *39*, 100–120. Recuperado de http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.005

Yildiz, A. (2013). Teaching the diagonalization concept in linear algebra with technology: A case study at galatasaray university. *Turkish online journal of educational technology*, *12*(1), 119–130.