UAGro

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

UNIDAD ACADÉMICA FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DOCTORADO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

TRATAMIENTO DEL ANÁLISIS DE FUNCIONES EN EL BACHILLERATO. PROPUESTA DE UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

P R E S E N T A:

NOÉ OSWALDO CABAÑAS RAMÍREZ

DIRECTORES:

DR. EDGARDO LOCIA ESPINOZA

DR. ARMANDO MORALES CARBALLO

México, Noviembre de 2020

Dedicatoria

A mi esposa, hijos y mi pequeño nieto.

Por ser mi fuente de inspiración.

Agradecimientos

Primeramente, agradezco a Dios por permitirme llegar hasta este punto.

Un agradecimiento muy especial al Dr. Edgardo Locia Espinoza y al Dr. Armando Morales Carballo, por su apoyo incondicional y sus innumerables sugerencias para hacer de esta investigación un trabajo de calidad, pero sobre todo, por el tiempo que brindaron para desarrollar y culminar este trabajo de investigación.

Agradezco a los maestros de la Facultad de Matemáticas de la UAGro, que fueron parte de mi formación del Doctorado en Ciencias.

A mis compañeros y amigos del Doctorado con quienes compartimos ideas, sugerencias y conocimientos para la culminación del posgrado: Landy, Melby, Angy, Erika, Safi, Eddie, Esteban y Gustavo.

A los grupos de trabajo que formaron parte del desarrollo de las actividades en esta investigación.

Índice

Introducción

La presente investigación reporta el tema de análisis de funciones, cuyo tratamiento se observa en el Nivel Medio Superior y los primeros años de Universidad (en México), tópico fundamental en el estudio del Cálculo en estos niveles. Su importancia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas reside, en que es un tema que aparece dentro de los planes y programas de estudio y es marcado como obligatorio para su enseñanza (COSDAC-SEMS, 2013; UAGro, 2010)(Ver anexo); además, es un contenido integrador donde convergen y se necesitan todos los conocimientos que el alumno ha construido a través de los diferentes niveles educativos en su proceso de formación, así como una madurez de razonamiento matemático en los alumnos para poder entender y aplicar los teoremas y resultados que fundamentan este análisis.

El análisis de funciones, consiste en el estudio de su sentido de variación (es decir, la determinación de los intervalos donde una función es creciente o decreciente), la determinación de sus extremos (máximos o mínimos, absolutos o relativos), puntos de inflexión, la determinación de los intervalos de concavidad y convexidad, las asíntotas, las simetrías axiales o puntuales, las intersecciones con los ejes de coordenadas, determinar el dominio, el análisis de la paridad y la obtención de los puntos de discontinuidad Cabañas-Ramírez, Locia-Espinoza y Morales-Carballo (2019).

La problemática de la enseñanza y aprendizaje del cálculo, ha sido abordada desde diferentes marcos teóricos y metodológicos, tanto a nivel nacional como internacional. Investigaciones referentes con este tema, ponen de manifiesto que los alumnos presentan problemas sobre la comprensión, construcción e interpretación de los conceptos básicos del cálculo; tales como el concepto de función, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, entre otros (Engler, Vrancken, Gregorini, Müller, Hecklein y Henzenn, 2008; Müller, Engler y Vrancken 2002; Rey Cabrera, 2016; Serna, 2007; Valero, 2003; Zúñiga, 2009).

Respecto a la enseñanza de este contenido en este nivel, desde la experiencia docente, se ha identificado que no necesariamente se desarrollan los contenidos bajo las orientaciones teóricas y metodológicas que se proponen en los planes y programas de estudio. Esta situación obedece a distintas razones. Dentro de ellas están los conocimientos matemáticos y didácticos del profesor, la influencia que ejercen los libros de texto y otros profesores en relación a la organización de su clase, las características de los alumnos en cuanto a niveles de desarrollo de conocimiento (Díaz, 2009; Sierra, González y López, 2000). Estas situaciones dan origen en parte a los problemas de enseñanza y aprendizaje del cálculo y, en particular, del tratamiento del análisis de funciones y en la construcción de sus gráficas en el nivel medio superior.

Derivada de la problemática identificada, se planteó como objetivo principal diseñar e implementar una propuesta de Ingeniería Didáctica (ID) para favorecer la comprensión, por parte de los alumnos de nivel medio superior, de los conceptos de crecimiento y decrecimiento de funciones, teniendo como sustento teórico la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau, (1978) y la Teoría de la Transposición Didáctica (TTD) de Chevallard, (1980).

Esta investigación es de tipo cualitativo-descriptivo y la elaboración e implementación de las actividades estuvo regida por los elementos metodológicos de las fases de la Ingeniería Didáctica (ID) de Artigue, (1995): la fase 1 de los análisis preliminares, la fase 2 de concepción y análisis a priori, la fase 3 de experimentación y la fase 4 de los análisis a posteriori y evaluación.

El presente documento está estructurado en seis capítulos.

Capítulo 1: *Antecedentes y problema de investigación.* Se inicia con la problemática en la que nos situamos. Para ello se presentan los resultados fundamentales identificados sobre el estudio del sentido de variación de una función encontrados en la literatura.

Capítulo 2: *Marco Teórico*. Se presentan algunos de los elementos de los referentes teóricos que sustentan la investigación: Teoría de Situaciones Didácticas y la Teoría de la Transposición Didáctica; así como el uso del contraejemplo y la estrategia didáctica conocida como Debate Científico en Cursos de Matemáticas.

Capítulo 3: *Marco Metodológico.* Se aborda la ID como metodología de investigación, ya que permite asignar una función específica a las investigaciones de acuerdo a las cuatro fases que la conforman. La fase 1 de los análisis preliminares, la fase 2 de concepción y análisis a priori, la fase 3 de experimentación y la fase 4 de los análisis a posteriori y evaluación.

En el Capítulo 4: *Análisis preliminar.* Se presentan los resultados del análisis: epistemológico, didáctico y cognitivo sobre el sentido de variación de las funciones. El estudio epistemológico abarcó el periodo de 1795 a 1912, identificándose que las concepciones dadas por Fourier, Lagrange y Cauchy sobre el crecimiento y decrecimiento difieren de la concepción dada en su definición formal actual. Del análisis didáctico, se identificó que los libros de texto actuales heredan un sinnúmero de estas limitantes e inconsistencias encontradas en las definiciones, en el estudio epistemológico. En el análisis cognitivo, se identificó que los alumnos incluso de universidad solo tienen ideas intuitivas de la definición de función creciente y función decreciente. Los resultados obtenidos de estos análisis, proporcionaron los elementos para el diseño e implementación de una Ingeniería Didáctica.

Capítulo 5: *Ingeniería Didáctica.* Se reportan los resultados de la experimentación de una ingeniería didáctica para el tratamiento del sentido de variación de funciones en alumnos del pre universitario. Identificándose que el recurso metodológico permitió establecer las condiciones que estructuran la definición formal de estos conceptos.

Capítulo 6: Se presentan las conclusiones generales de los principales aportes obtenidos a lo largo de esta investigación.

Capítulo 1

ANTECEDENTES Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este apartado se reportan los antecedentes de esta investigación. De manera específica se da cuenta de investigaciones en el campo de la matemática educativa orientadas hacia el estudio de los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial, se analiza la presentación del contenido en los planes y programas de estudios y los resultados de una exploración en investigaciones sobre los conceptos del cálculo identificados en alumnos del nivel medio superior. Finalmente se resalta la problemática asociada a la enseñanza y aprendizaje de conceptos como: función creciente, función decreciente, máximos y mínimos, concavidad, convexidad, entre otros.

1.1. Investigaciones en el campo de la matemática educativa acerca del sentido de variación de una función.

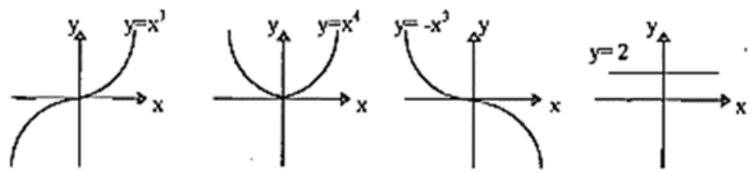
El estudio de sentido de variación de una función, es un contenido integrador en donde convergen y se necesitan los principales conceptos del cálculo diferencial, así como una madurez de razonamiento matemático por parte de los alumnos para poder entender y aplicar los teoremas y resultados que fundamentan este análisis. La importancia de este concepto reside en que es un concepto de gran valor para su enseñanza en el nivel medio superior y superior, por ejemplo, en cursos avanzados de cálculo y las matemáticas aplicadas, incluso los niños pequeños encuentran monotonía (función creciente y función decreciente) al aprender secuencias numéricas crecientes y decrecientes, que son imágenes del conjunto de números naturales bajo asignaciones monótonas (Tossavaine, Haukkanen y Pesonen, 2013).

Además, en cálculo y análisis de una variable real, la función $f\colon A \rightarrow R$ se dice que es monótona si $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (f es creciente) o si $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ (f es decreciente) para todo $x, y \in A$. Si la misma condición se cumple con $\leq$ o $\geq$ reemplazado con $<$ o $>$, respectivamente, entonces f es estrictamente monótona (Tossavaine, Haukkanen y Pesonen, 2013). Es importante notar que el dominio A no necesita ser continuo; es suficiente que sea un conjunto ordenado.

A la luz de estas definiciones, diversas investigaciones que se reportan a continuación, evidencian la importancia y la necesidad del estudio de este contenido en el bachillerato y los primeros años de la universidad, tales como:

Rasslan y Vinner (1998) investigaron las definiciones de conceptos y las imágenes de funciones crecientes y decrecientes de los alumnos de la escuela secundaria superior en Israel. Usando un cuestionario (Ver **Figura 1)**, para explorar los esquemas cognitivos del concepto, encuestaron si los participantes sabían definir el concepto de función creciente/decreciente y cómo aplicar la definición del concepto para cierto tipo específico de funciones.

1. En las siguientes figuras se dan 4 funciones y sus gráficas. ¿Cuál de estas funciones aumenta en todas partes? Explica tu respuesta.



2. ¿Cuál de las funciones en la pregunta 1 disminuye en todas partes? Explica tu respuesta.
3. Se da la siguiente función: $f: R \rightarrow R$

$$f(x) = x^6$$

Yussef dijo: la función dada está aumentando.
Munir no estuvo de acuerdo y dijo: La respuesta de Yussef es incorrecta. La función dada está disminuyendo.
¿Cuál es tu opinión? ¿Quién tiene razón, Yussef o Munir? Explica tu respuesta.

4. En su opinión, ¿qué es una "función creciente en un determinado dominio"?

Figura 1. Cuestionario aplicado a estudiantes.

Otra cuestión de investigación, fue averiguar si los participantes entendían la naturaleza local y no global del concepto (en la **Figura 1**, pregunta 3). Aquí, localidad significa, por ejemplo, que la función cuadrada no es monótona en todos los números reales sino en ciertos intervalos, por ejemplo, en el conjunto de todos los números reales positivos.

Para dar respuesta a sus resultados, los investigadores clasifican de acuerdo a los métodos obtenidos por (Vinner, 1983; Vinner y Dreyfus, 1989; Rasslan y Vinner, 1995; 1997) cuando se trata de otros conceptos como: función, pendiente, función par/impar. Las categorías consideradas por los autores son IX, a saber: una definición algebraica (con el uso de cuantificadores universales), una explicación basada en la condición sobre la derivada de la función, creciente significa una pendiente positiva, si x aumenta y aumenta, una combinación de una definición con un concepto sustituto, una explicación basada en una familia conocida de funciones crecientes: las funciones de potencia impares, una explicación basada en los argumentos visuales, respuestas correctas sin explicaciones y una respuesta incorrecta o una explicación sin sentido.

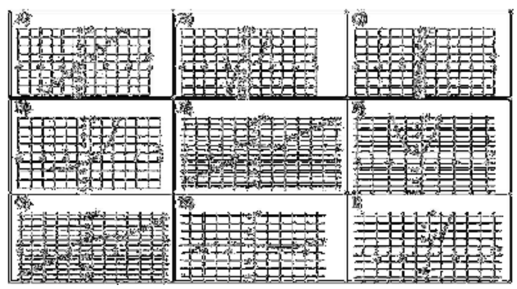
Entre sus resultados se observa que la mayoría de los alumnos fueron capaces de recordar la definición, pero significativamente pocos de ellos fueron capaces de aplicar el concepto. También, identifican que los alumnos utilizan la derivada como un concepto sustituto al cambiarlo por un *criterio de trabajo* (o matemáticamente por una condición suficiente), donde uno de los significados asociados con el concepto de derivada es la pendiente de la tangente al gráfico de la función, por lo que algunos alumnos mencionan la de pendiente de la función en lugar de la pendiente de la tangente, al respecto los autores consideran que no está claro si esto se deba a la tendencia a usar expresiones cortas (si x aumenta, entonces y aumenta; y si x disminuye, entonces y disminuye) en lugar de la definición formal del concepto o si es una indicación de ideas confusas, esto podría conducir a repeticiones sin sentido de expresiones cortas que los estudiantes captan y usan fácilmente.

Respecto a los resultados obtenidos de la pregunta 3, se observó que una gran mayoría de alumnos no sabía que el crecimiento/decrecimiento de una función, está asociado a una propiedad local y no global de una función.

En otra investigación respecto a el papel de los gráficos en la conceptualización de la monotonía de las funciones reales Bardelle (2010), realiza un estudio con el propósito de comprender el papel del lenguaje y las representaciones y de las imágenes de patrones relacionadas con la representación gráfica de funciones. Esto debido, al desconcierto por el comportamiento típico de alumnos con respecto a la interacción entre las definiciones matemáticas y las representaciones gráficas, al aplicar pseudo-reglas como: "Si la función aumenta, entonces su derivada también aumenta" en cursos de cálculo en Italia.

Este estudio se enfocó en el juego entre las representaciones visuales y las definiciones de algunos conceptos matemáticos, como 'función creciente', que requieren el uso de palabras con significados que no coinciden completamente con los que se les atribuyen en los registros de la vida cotidiana. Respecto a las tareas que exhiben a los alumnos (Ver **Figura 2**), el problema 1 presenta representaciones visuales de funciones (gráficas en intervalos dados) mientras que los problemas 2 y 3 presentan representaciones simbólicas (fórmulas).

Problema 1. Diga cuáles de las siguientes gráficas no representan una función creciente en el intervalo dado. Explica tu respuesta.



Problema 2. ¿La función $y = -3x^2 + x + 1$ es decreciente? Explica tu respuesta.
Problema 3. ¿La función y = cos x es creciente? Explica tu respuesta.

Figura 2. Tareas presentadas a los estudiantes.

Las respuestas que obtiene la investigadora sobre las definiciones del concepto de función creciente adoptadas por los alumnos, las agrupa en cuatro patrones principales:

• (Dl) La definición correcta;

• (D2) Como Dl, pero aplicado a porciones conectadas de gráficos de funciones discontinuas;

• (D3) una función f es creciente en $[a, b]$ $si\ f\ (a)\ < f\ (b)$; los estudiantes simplemente comparan los valores de la función al final del intervalo;

• (D4) una función aumenta en un intervalo [a, b] si su gráfica tiende a aumentar en su extremo derecho.

En segundo lugar, identificó tres patrones principales, utilizados por los estudiantes para explicar que una gráfica no representa una función creciente:

- (E1) contraejemplos puntuales a la definición de función creciente;
- (E2) comentarios verbales relacionados explícitamente con el ejemplo;
- (E3) afirma en general que la definición no está verificada y no hace referencia explícita al ejemplo.

Al adoptar El, los estudiantes casi siempre eligen el punto inicial y final de un intervalo en el que la función es decreciente, para dar un contraejemplo. Además, una gran cantidad de respuestas muestran un uso inadecuado del lenguaje matemático. Términos como "creciente" y "decreciente" no se consideran de acuerdo con su definición matemática debido a que las relacionan con el significado de crecimiento y decrecimiento de la vida cotidiana.

Otro resultado que obtiene, es que para comprender que una función no aumenta en un intervalo, la mayoría de los estudiantes necesitan ver una parte de su gráfica que claramente disminuye de manera monótona, ya que el análisis de los datos muestra que algunas dificultades están estrictamente relacionadas con el aspecto visual de las tareas, debido a que cuando se le presentan gráficas monótonas a trozos, los alumnos vinculan la monotonía solo con funciones continuas.

Concluye, reflexionado que la mayoría de las dificultades de los alumnos dependen o están relacionadas con el mal uso del lenguaje matemático. Consideran que los estudiantes no comprenden la necesidad de un lenguaje especial para el desarrollo y la comunicación de las matemáticas o, incluso si lo hacen, no pueden usarlo. Esto puede estar dado por actitudes erróneas hacia las matemáticas o la lectura, o por dificultades lingüísticas específicas, que evolucionan no solo en los textos, sino también en fórmulas e imágenes.

Bardelle y Ferrari (2011), informan sobre un experimento de enseñanza-aprendizaje de la monotonía por aproximadamente 150 estudiantes de ciencias quienes recibieron apoyo en un curso de pregrado de introducción a las matemáticas en Italia. Se discutió el concepto de función creciente, enfatizando en ejemplos y contraejemplos de funciones monótonas, los cuales se transfieren con mayor frecuencia a través de gráficos.

La atención se centró en el significado de las declaraciones (captadas también a través de un proceso de reformulación) más que en el tratamiento de las expresiones simbólicas, prestando especial atención, en cómo los sujetos involucrados en este estudio utilizaron el lenguaje y las representaciones en sus procesos de solución, debido a que en diversas investigaciones reportan que las dificultades relacionadas con el lenguaje, podrían desempeñar un papel importante como fuente de dificultades.

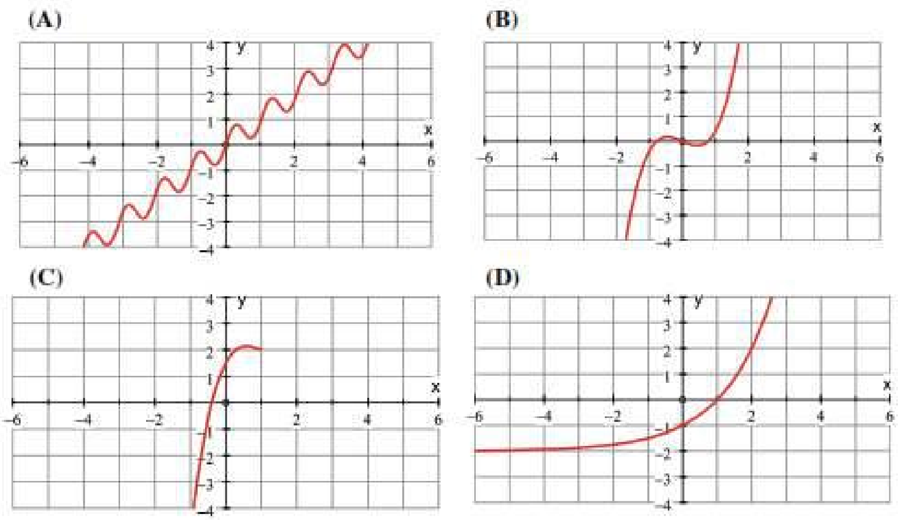
Respecto a las tareas (Ver **Figura 3**), las preguntas fueron elegidas para investigar los efectos de algunos factores que parecían cruciales a partir de observaciones en investigaciones anteriores y en particular:

1. El conflicto potencial entre la definición de función creciente y el comportamiento general del gráfico (como el gráfico A en Q1);

2. El manejo de gráficas discontinuas, o gráficas definidas solo en una porción del dominio;

3. Los efectos de cambiar de funciones presentadas a través de gráficos a funciones definidas por una ecuación;

Q1. Indica cuáles de las gráficas que se muestran a continuación no representan una función creciente en el intervalo dado. Explica tu respuesta.



Q2. ¿La función definida por la ecuación $y = -3x^2 + x + 1$, es decreciente? Justifica tu respuesta.

Si No

Q3. Marque cualquiera de las siguientes oraciones que correspondan o sean equivalentes a la definición de función creciente en el intervalo [a, b]. Justifica tu respuesta.

(a) Para cualquier $x_1, x_2 \in [a, b], se\ cumple\ que\ f\ (x_1) < (x_2)$.

(b) Para cualquier $x_1, x_2 \in [a, b], tal\ que\ x_1 < x_2\ se\ cumple\ que\ f\ (x_1) < f(x_2)$.

(c) Existen $x_1, x_2 \in [a, b], tal\ que\ si\ x_1 < x_2\ entonces\ f\ (x_1) < f(x_2)\ se\ cumple$.

(d) $f\ (a) < f\ (b)$

(e) Existen $x_1, x_2 \in [a, b], tal\ que\ f\ (x_1) < f(x_2) se\ cumple$.

Figura 3. Tareas presentadas a los estudiantes.

Como parte de sus resultados después de haber aplicado las tareas, los investigadores identificaron cuatro ideas principales diferentes de función creciente aparentemente adoptadas por los alumnos para proporcionar una respuesta a las tareas (Q1, Q2 y Q3):

(1) La definición correcta; (definición estándar encontrada en (Tossavaine, Haukkanen y Pesonen, 2013) la cual hace uso de cuantificadores universales e implicaciones).

(2) Una función f es creciente en $[a, b]$ si $f\ (a) < f\ (b)$; los estudiantes simplemente comparan los valores de la función al final del intervalo;

(3) Una función aumenta cuando las partes crecientes de un gráfico son predominantes en comparación con las decrecientes;

(4) Como en (1), pero aplicado a porciones conectadas solo de gráficos de funciones discontinuas. El patrón (3) no es claro y parece basarse principalmente en aspectos visuales.

La información sobre las razones de estos comportamientos de los alumnos, las obtuvieron a partir de sus explicaciones en entrevistas escritas. Identificándose tres razones principales que llevaron a ideas como (2) - (4). En primer lugar, casi todos los estudiantes mostraron una comprensión deficiente de la definición estándar o dificultad en su aplicación. En segundo lugar, algunos términos matemáticos tomados del lenguaje ordinario como "creciente", "decreciente" y "constante" se interpretaron de acuerdo con su significado coloquial y no con el matemático, probablemente esto se deba a lo referenciado en el punto anterior o en particular, ese problema pareciera estar relacionado con la comprensión del papel de los cuantificadores en la definición estándar. En tercer lugar, la influencia de los prototipos (visuales) junto con la mala calidad del espacio de los ejemplos es un obstáculo para la construcción de un patrón de imágenes correcto relacionado con la monotonía.

Además, determinaron que muchos alumnos prefieren trabajar con el sistema visual, ya que probablemente permite a los sujetos obtener una visión rápida de los valores asumidos por una función y usar esto para decir algo sobre su monotonía. Comprobaron que los principales obstáculos para el correcto manejo de ejemplos son el uso descuidado de términos matemáticos (según registros coloquiales), el uso de definiciones distintas a la estándar, algunas dificultades en el manejo de gráficos y el mal uso de prototipos.

En otro estudio llevado a cabo de monotonía con alumnos universitarios de Finlandia, Tossavainen y Haukkanen, (2012) realizan una investigación aplicando encuestas de conceptos matemáticos con dos objetivos. Primero, mediante el análisis de contenidos buscaban mapear y clasificar las imágenes conceptuales de los participantes en función de la perspectiva desde la que buscan resolver problemas relacionados con la monotonía. Un segundo objetivo, dilucidar los conceptos erróneos más típicos de los estudiantes sobre la monotonía, así como los errores de cálculo y razonamiento.

Al respecto, determinan que los alumnos no reconocen a las funciones discontinuas como funciones crecientes o decrecientes. Además, encontraron que los alumnos de matemáticas tienen varias perspectivas diferentes sobre la monotonía (analítico, geométrico y experimental), identificándose la ausencia de la perspectiva algebraica en las respuestas de los alumnos.

A falta de una perspectiva algebraica en las soluciones obtenidas de los alumnos, ellos recurren a la derivada (conceptualmente más compleja) y a un criterio derivado de ella (criterio de la primera derivada) que a la definición formal de monotonía, la cual requiere una teoría matemática sustancialmente más básica, por lo que la comprensión del concepto por parte de muchos alumnos que habían avanzado en sus estudios, resultó ser superficial y unilateral.

Tossavaine, Haukkanen y Pesonen (2013), quienes haciendo uso de un cuestionario llevaron a cabo un estudio con alumnos de matemáticas de dos universidades de Finlandia, e indagaron sobre qué tipo de concepciones tienen de la monotonía en la universidad y cómo se relacionan con su desempeño en la resolución de ejercicios relevantes, es decir, en qué aspectos de monotonía los alumnos basan su argumentación en diferentes tipos de ejercicios relacionados con ese concepto.

Los datos que obtienen los investigadores, son respuestas escritas de un cuestionario de 8 preguntas, con las cuales buscaban revelar algunas características fundamentales de las imágenes conceptuales, ya que los ejercicios aplicados representan los aspectos matemáticos de la monotonía: algebraico, analítico y geométrico. Al realizar la clasificación de estos resultados, se enfocaban no sólo en si los alumnos pueden estudiar o aplicar correctamente los aspectos matemáticos de la monotonía, sino también, a qué aspectos aparecen en sus soluciones.

Los resultados que se identifican de este estudio, es que los aspectos analíticos y geométricos resultaron ser dominantes en las imágenes conceptuales de monotonía en la mayoría de los alumnos. Además, de que la concepción de un alumno de matemáticas (incluso en la universidad) sobre las funciones monótonas está a menudo restringida a funciones continuas o diferenciables, ya que consideran que la monotonía se basa en polinomios y otros arquetipos de funciones monótonas diferenciables y continuas, hasta el punto en que fallan para notar incluso los ejemplos más simples de funciones monótonas discretas.

Los investigadores recomiendan, primeramente, que a veces es útil estudiar si una función induce un orden de un conjunto a otro o no, por lo que consideran que el término función de preservación del orden se use enfatizando el punto de vista discreto. En segundo que, aunque la derivada es a menudo la herramienta disponible más eficiente para examinar la monotonía de una función dada, para obtener una comprensión más profunda de este concepto, recomiendan que los enfoques algebraico y geométrico sean discutidos regularmente en el salón de clases.

Sánchez-Matamoros, García, y Llinares (2008), quienes realizaron una investigación sobre la comprensión de la derivada, en particular sobre la conexión entre lo gráfico y lo analítico. Exponen las dificultades que tienen los estudiantes al intentar esbozar la gráfica de la derivada a partir de la gráfica de la primitiva. Entre sus conclusiones, los autores hacen evidente que la comprensión de la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva representativa de una función, es fundamental para el análisis del sentido de variación y la determinación de máximos y mínimos.

En otra investigación, llevada a cabo con profesores sobre sus conocimientos acerca del significado y las interpretaciones de la derivada Díaz (2009), a través de aplicar diversos cuestionarios, los cuales incluían tres tipos de tareas. (A) *Calificación con valores de verdad de algunas afirmaciones.* (B) *Descripción de conceptos* y (C) *Resolución de problemas*. La investigadora concentra los resultados en la siguiente tabla (Ver **Figura 4)**, en donde las afirmaciones 8 y 9 se encuentran ligadas a nuestra investigación.

	Afirmación	Profesores								
		N1	N2	T1	T2	U1	U2	I1	I2	P
		Respuestas								
1	Si una función f es derivable y además $f'(a)=0$ y $f''(a)\neq 0$; entonces f tiene un máximo o un mínimo en $x=a$.	v	v	f	f	f	v	f	v	v
2	Si una función f es derivable y además $f'(a)=0$ y $f''(a)=0$; entonces f no tiene ni máximo ni mínimo en $x=a$.	f	f	f	f	v	f	v	v	f
3	Si una función f es continua y tiene un máximo en $x=a$, entonces existe $f'(a)$ y es cero.	f	v	v	f	f	v	f	v	v
4	Si una función es derivable en $x=a$, tiene un máximo en $x=a$, entonces $f'(a)=0$ y $f''(a)$ existe, y $f''(a)<0$.	v	v	f	v	f	v	v	f	v
5	Si una función f es continua en $[a,b]$, entonces f' es continua en $[a,b]$.	v	f	v	v	v	v	v	v	v
6	Si una función f es derivable en $[a,b]$, entonces f es continua en $[a,b]$.	f	v	v	v	v	v	f	v	f
7	Si una función f es continua en $[a,b]$, entonces f es derivable en $[a,b]$.	f	v	v	f	v	v	v	v	f
8	Si una función f es creciente en $[a,b]$ entonces $f'(x)>0$ para toda x en $[a,b]$.	v	v	v	v	f	v	v	f	v
9	Si una función f es decreciente en $[a,b]$ entonces $f'(x)<0$ para toda x en $[a,b]$.	f	f	f	v	f	v	f	f	v

Figura 4. Concentrado con los resultados del cuestionario (A).

Con relación al sentido de variación de una función, analicemos la *afirmación 8 y 9* en donde los resultados que se presentan en la Figura 4, muestran, por un lado, la fortaleza que tienen algunas creencias falsas en profesores, por ejemplo, una de las creencias generalizadas en esta parte, es que si una función f es creciente en [a, b], entonces $f'(x) > 0$ para toda x en el mismo intervalo (aquí difieren solamente dos profesores). Respecto a la afirmación número 9 de la tabla anterior, la cual está formulada en los mismos términos, pero ahora para la función decreciente, las respuestas de algunos profesores se oponen a la emitida para la función creciente. Esta observación nos permite afirmar que las creencias sobre los significados son independientes de la formación del profesor y de su experiencia, según el autor, esto muestra las relaciones quasilógicas (básicas y no básicas) de sus creencias, además de las agrupaciones (clusters) separados, el de los conceptos y de las percepciones, ambos incompatibles. Sin embargo, esto no evita que el profesor esté seguro de la coherencia entre los elementos que intervienen.

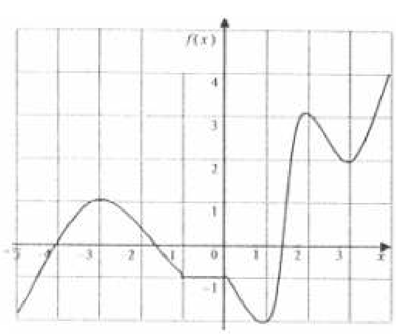
Estos resultados relevantes, nos hacen pensar que los profesores para dar respuesta a este cuestionamiento y su enseñanza en el aula, solo se enfoquen en funciones derivables y continuas, sin recurrir a las funciones monótonas a trozos.

En el caso de Valero (2003), propuso que las concepciones alternativas encontradas en su investigación pueden ser removidas de la mente de los alumnos para acercarlas a concepciones aceptables mediante un proceso sistemático de enseñanza. En razón de lo anterior, la investigación tuvo como objetivo fundamental analizar la estabilidad y cambio de las concepciones alternativas de los alumnos acerca del análisis de funciones en ciertas condiciones instruccionales.

Con base a la siguiente actividad que les demandó a los alumnos respecto a la variación de funciones y máximos y mínimos (Ver **Figura 5**), la investigadora reconoce que los alumnos determinan el sentido de crecimiento como "todo lo que sube" y decreciente es "todo lo que baja"; esto sin tomar en cuenta la no existencia del plano cartesiano, ya que tienen su propio sistema de referencia con reglas propias.

Actividad

1. La gráfica siguiente muestra el comportamiento de la función f(x). Analícela y conteste lo siguiente



a) ¿Cuánto cambia f si x cambia de -5 a -4?__ ¿Cuánto cambia f si x cambia de -1 a 0?___ ¿Cuánto lo hace si x cambia de 1 a 2? ____ ¿Dónde creció con mayor rapidez?______

b) Si x cambia de izquierda a derecha, es decir $\Delta x > 0$. ¿Para qué x, se cumplen las desigualdades siguientes:

$f(x + \Delta x) - f(x) > 0$: ____________________

$f(x + \Delta x) - f(x) < 0$: ____________________

$f(x + \Delta x) - f(x) = 0$: ____________________

Figura 5. Actividad presentada a los alumnos.

Cuando los alumnos analizaron los puntos en donde una función no crece ni decrece, previo a la puesta en práctica del diseño, solo un alumno identificó estos puntos aceptablemente; casi la mitad dijo que la función no crece ni decrece en las intersecciones de la curva con el eje de las abscisas. En contraste, después del proceso instruccional, más de la mitad de los alumnos consideró que esto sucede en los puntos máximos y mínimos de las funciones, inclusive identificaron uno de los puntos de estabilización de la función que no aparecía explícitamente entre las opciones que se ofrecían para hacer la elección, lo que denotó que en los alumnos que lo identificaron, hubiera un proceso importante de generalización en sus concepciones; una proporción pequeña conservó la concepción alternativa inicial consistente en asociar a los ceros de una función con los puntos en donde ésta no crece ni decrece.

Estas observaciones que se identifican, nos permiten afirmar que los alumnos no hacen uso de las definiciones al momento de trabajar el sentido de variación de una función, lo cual puede deberse a los procesos algorítmicos que llevan a cabo y a la influencia de los libros de texto para resolver un determinado problema.

Al llevar a cabo un análisis desde la experiencia docente en el aula, Müller, et al. (2002) encontró que los alumnos presentan dificultades para resolver problemas que involucran conceptos fundamentales del Cálculo como: primera y segunda derivada y sus relaciones con el crecimiento y decrecimiento de una función, concavidad y convexidad, puntos de máximo y mínimo, y de inflexión. Con la finalidad de contribuir en la solución a este problema llevaron a cabo una investigación que consistió en realizar actividades de aprendizaje donde se graficaban funciones polinómicas sobre la variación de funciones a través del uso del software "Funciones para Windows" versión 2.7 de la página web de *http://lagares.org*. El diseño que utilizaron lo retoman de Moreno (2002). Desde el punto de vista holístico, las autoras consideran que esto promueve un mejor entendimiento del estudio de las funciones. Específicamente, las actividades se orientaron hacia la lectura e interpretación de las gráficas, combinadas con estrategias analíticas y en ellas los alumnos debieron identificar los conceptos de crecimiento y decrecimiento, primera y segunda derivada, máximo y mínimo, convexidad y concavidad, y punto de inflexión, y con ello, indicar cómo estos conceptos favorecen el análisis de variación de la función.

Al realizar el estudio de estas funciones, buscaban que los alumnos pudieran determinar el dominio, las intersecciones con los ejes coordenados, el análisis de la paridad y simetrías, la obtención de los puntos de discontinuidad y la determinación de las ecuaciones de las asíntotas, del análisis de los intervalos de crecimiento y decrecimiento, junto a la determinación de los extremos relativos (máximos y/o mínimos), del estudio de la concavidad y de la obtención de los puntos de inflexión.

Respecto al tópico de interés, las autoras no consideran el hecho de usar definiciones, sólo realizar el análisis gráfico de las funciones con cierta intención didáctica en la formación intuitiva y algorítmica de función creciente y decreciente.

Concluyen reflexionando en el sentido de que la simple aplicación de estas actividades no es suficiente para alcanzar los beneficios deseados y que estas propuestas deben ser acompañadas de otras que permitan cumplir con los objetivos planteados. Establecen que todas las estrategias didácticas deben orientarse a plantear actividades que permitan obtener mejores resultados de aprendizaje y cuanto más amplias y complejas sean las relaciones que se establezcan, mayor será la capacidad de los alumnos de usarlas en situaciones cotidianas.

En un estudio sobre un análisis de una secuencia didáctica del comportamiento de la función a partir de la derivada Engler et al. (2008), utilizaron el "enfoque variacional" y en términos metodológicos lo desarrollaron en tres momentos: el diseño de las actividades a incluir (según revisión bibliográfica realizada y, desde la práctica docente, dificultades y errores observados en trabajos recogidos de años anteriores), la resolución de las actividades y la utilización de las respuestas (con sus logros, dificultades y errores) para el desarrollo de los contenidos y la puesta en común de conclusiones. El trabajo se basa en la propuesta de Dolores (1999) y tuvieron como objetivo principal diseñar una secuencia de actividades para favorecer el desarrollo del pensamiento variacional y sus aplicaciones en el estudio del comportamiento de funciones.

La guía se propuso a todos los alumnos inscritos en Matemática II de nivel superior, organizados en grupos de a dos integrantes. Los contenidos que se desarrollaron fueron: valores extremos de una función, función creciente y decreciente, determinación de extremos relativos y concavidad

Respecto al sentido de variación, analicemos una de las actividades que les propusieron a los alumnos (Ver **Figura 6**), la cual según las autoras permitió establecer la relación con el crecimiento y decrecimiento de funciones:

Actividad

Una partícula se mueve en línea recta de acuerdo con la ley $s(t) = 2t^3 - 8t^2 + 6t$, donde s es la distancia en metros y t el tiempo en segundos. Complete la siguiente tabla.

Intervalos	Δs	Comportamiento de la función			Signo de s(t)
		Crece	Decrece	No cambia	
$0 \leq t \leq 0{,}5$					
$0{,}5 \leq t \leq 1$					
$1 \leq t \leq 1{,}5$					
$1{,}5 \leq t \leq 2$					

a) ¿Qué relación existe entre el crecimiento o decrecimiento de $s(t)$ y los cambios de Δs?

b) ¿Es cierto que si $s(t) > 0$ entonces los cambios $s > 0$? Justifique.

c) ¿Es cierto que si $s(t)$ crece entonces $s > 0$ o que si $s < 0$ entonces s(t) decrece?

Figura 6. Actividades llevadas a cabo por las autoras para establecer la relación con el crecimiento y decrecimiento de funciones.

Según las autoras, en general no se observan dificultades en el desarrollo de los diferentes ítems de la actividad. Del análisis de los datos obtenidos al completar la tabla se identifica que un número considerable de alumnos asoció de manera correcta la idea de función creciente y decreciente, así como de la existencia de valores extremos y sólo una pequeña parte lo relacionó con el valor máximo.

Al respecto consideramos que las actividades presentadas funcionan para la formación de ideas intuitivas sin llegar a la formalización, ya que en los planteamientos de las actividades no formula definición alguna de tales conceptos; si bien es cierto, estos conocimientos ya estaban formados en los alumnos, pero de los resultados mostrados, notamos que, a pesar de ya existir estos en el alumno, aún presentan dificultades en su comprensión, construcción e interpretación de los conceptos.

Otro estudio basado en los marcos teóricos de sistemas de representación semiótica y de visualización, es el realizado por Zúñiga (2009); quien encontró que existen dificultades que se presentan en alumnos en la construcción del concepto matemático como es el de función.

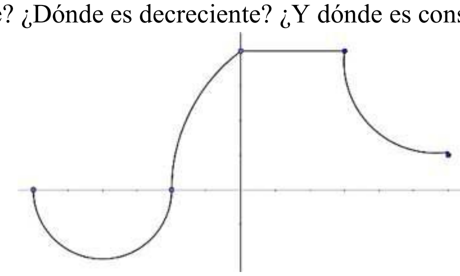
Con el de fin explorar las dificultades, capacidades y debilidades, diseñaron un conjunto de actividades en relación a dicho concepto, las cuales tenían como intención, el de promover la conversión del registro gráfico al registro algebraico y verbal. Las actividades diseñadas involucran: lectura e interpretación de gráficas, estudio de los fenómenos de cambio y el concepto de función. Así como también, introducir de manera discreta el concepto de función, a través de situaciones donde se utilizan los conceptos en que se apoya o fundamenta como son: variables dependiente e independiente, dominio, crecimiento y decrecimiento.

La siguiente actividad obtenida de Zúñiga (2009), favoreció los procesos de construcción del concepto de función y su sentido de variación. Esta actividad requiere el dominio de subconceptos ligados al concepto de función tales como dominio, contradominio, variable, conjunto imagen, entre otros, Hitt (2002), así como sus definiciones y comprensión de las mismas, la capacidad de conversión en las diferentes representaciones de una función, y desarrollo de cálculos algebraicos. (Ver **Figura 7**)

ACTIVIDAD

Sea f la función cuya gráfica está dada en la figura. Algunos puntos en la gráfica están marcados.

- ¿Cuál es el valor de la función cuando $x = -6$, $x = -4$, $x = 0$, $x = 6$? o ¿Cuál es el conjunto de partida?, ¿Cuál es el conjunto de llegada?
- Enumere las intersecciones con los ejes. (recuerde que estos son los puntos, si existen, donde la gráfica cruza o toca los ejes coordenados).
- ¿Dónde es creciente? ¿Dónde es decreciente? ¿Y dónde es constante?



Respondió a	Correctamente	%	Con un Acercamiento	%	Incorrecta	%	No respondió	%	Total
Intersección en X	3	20	2	13	5	33	5	33	15
Intersección en Y	3	20	1	7	6	40	5	33	15
Crece	2	13	0	0	8	54	5	33	15
Decrece	2	13	0	0	8	54	5	33	15
Es constante	2	13	0	0	8	54	5	33	15

Figura 7. Actividad y tabla con los resultados obtenidos de los alumnos.

La investigación reporta que los alumnos presentan dificultad, en particular con la construcción y concepto de función, el cual se considera que es fundamental en el cálculo. Además, presentan problemas para reconocer las características de una función, como su forma, concavidad, intersecciones con los ejes, vértice, dominio, imagen, donde crece, donde decrece y donde es constante, como visualizamos en la producción mostrada. Se hace evidente que los alumnos no recurren a los argumentos visuales, y en esta situación alude a lo que Eisenberg y Dreyfus (1991) dicen respecto a estas dificultades manifestadas por los alumnos, las cuales son causadas por la relación que tiene el concepto de función con otros conceptos matemáticos como dominio, imagen, crecimiento y decrecimiento, para este caso en particular (citado por Hitt, 2003).

Respecto a los trabajos analizados del estudio del concepto de monotonía, los investigadores (Bardelle, 2010; Bardelle y Ferrarri, 2011; Rasslan y Vinner,1998) coinciden en que casi todos los estudiantes tienen una comprensión deficiente de la definición estándar, lo cual dificulta su aplicación. Consideran que esto puede deberse, por un lado, a que los alumnos hacen uso de expresiones cortas (si x aumenta, entonces y aumenta; y si x disminuye, entonces y disminuye) en lugar de la definición formal del concepto de función creciente y función decreciente, y por otro lado, a que los alumnos tienden a relacionar "creciente", "decreciente" con el significado coloquial y no con el matemático, lo cual podría deberse a un problema con los cuantificadores en la definición formal. Por su parte, Rasslan y Vinner (1998) encontraron que los alumnos incluso de universidad, no sabían que el crecimiento/decrecimiento de una función, está asociado a una propiedad local y no global de una función, lo haciéndose evidente la concepción superficial de este tópico de estudio.

Por otra parte (Tossavainen y Haukkanen, 2012; Tossavaine, Haukkanen y Pesonen 2013), consideran que los alumnos relacionan las funciones monótonas a funciones continuas o diferenciables, por lo que las discontinuas no son consideradas para su estudio; además, a falta de una perspectiva algebraica en las soluciones obtenidas de los alumnos, ellos recurren a la derivada y a un criterio derivado de ella (criterio de la primera derivada) que a la definición formal de monotonía, formándose un contenido matemático deficiente.

De los trabajos de investigación sobre el sentido de variación de funciones que se reportan anteriormente: (Díaz, 2009; Engler et al., 2008; Müeller et al. 2002; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008; Sierra et al. 2000; Valero, 2003; Zúñiga, 2009); de manera sintética presentamos las dificultades a las que se enfrentan los alumnos en relación al estudio de las funciones, entre ellas para:

- La comprensión, construcción e interpretación de los conceptos básicos del cálculo; tales como el concepto de función, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.
- Vincular las variaciones de una función y el signo de su derivada.
- Saber determinar un extremo de una función con la ayuda de su derivada.
- Saber trazar la curva representativa de una función haciendo aparecer los objetos encontrados en el estudio de esta función (asíntotas, tangentes, máximos, mínimos, entre otros)
- Leer e interpretar un resultado sobre una gráfica, tales como: crecimiento, decrecimiento, entre otros.

Como podemos observar, la problemática referente al estudio del sentido de variación de una función en el nivel medio superior, ha sido abordada desde diferentes marcos teóricos y metodológicos, algunos con cierta intención didáctica que buscan formar en el alumno la idea del sentido de variación de una función otros a lo más formar la idea intuitiva del concepto sin llegar a la formalización.

Esto puede deberse, por un lado, a la poca importancia que se le da a los conceptos en los libros de texto referidos al bachillerato, ya que un estudio somero llevado a cabo en ellos encontramos que en algunos no aparecen definiciones y en otros a lo más presentan gráficos que hacen referencia al sentido de variación de una función, así como, los conocimientos didácticos y matemáticos del profesor.

Por otro lado, una situación similar se presenta con los teoremas que fundamentan los procedimientos utilizados para analizar a las funciones. En efecto, estos teoremas también contienen cuantificadores, tienen diferentes hipótesis (de las cuales ninguna es superflua), algunos de ellos están enunciados como condiciones suficientes, otros como condiciones necesarias o como condiciones suficientes y necesarias, pero tradicionalmente estas características se dejan de lado, centrándose únicamente en la parte algorítmica de los procedimientos. Esto se ve reflejado en los errores que se han encontrado en la forma en que, en algunas ocasiones, se enuncian las definiciones o los teoremas tanto por alumnos, como por profesores e incluso en algunos artículos de investigación referentes a la didáctica del cálculo.

Por ejemplo, en Dolores (2004) se enuncian las definiciones de función creciente y función decreciente como sigue "si $f(x_2) > f(x_1)$ para $x_2 > x_1$, entonces $f(x)$ es creciente en el intervalo (x_1, x_2), por el contrario, si $f(x_2) < f(x_1)$ para $x_2 > x_1$, entonces $f(x)$ es decreciente en ese mismo intervalo", las cuales no son correctas y no es difícil anteponerles *contraejemplos* que hagan evidentes las incongruencias. En el mismo artículo se enuncia el siguiente "teorema": "si una función continua en una vecindad de x_0 con radio $\varepsilon > 0$ es tal que $f(x_0) = 0$, en x_0 la función tiene un extremo relativo, ya sea un máximo o un mínimo". Su ponemos, en principio, que el autor quiso decir que $f'(x_0) = 0$ en lugar de $f(x_0) = 0$, pero aun así, la afirmación no es válida si se considera como contraejemplo la función $f(x) = x^3$, en $x_0 = 0$.

Al respecto, consideramos a Locia (2000) quien establece que en la enseñanza, muchos alumnos e incluso profesores, no aprecian las diferencias entre argumentos empíricos y argumentos deductivos, tienen muchos problemas para aplicar correctamente definiciones, teoremas y fórmulas, confunden condiciones necesarias y condiciones suficientes, utilizan conclusiones no verificadas que a menudo resultan falsas, consideran que la verificación de los resultados sobre algunos ejemplos es suficiente para probar un teorema, no ven la razón de las pruebas deductivas y no tienen el hábito de buscar un contraejemplo para poner a prueba una afirmación que se necesita aplicar pero cuya veracidad no ha sido establecida en la clase.

1.2. El sentido de variación en los planes y programas de estudio

El tema de interés, se identifica en los planes y programas de estudio del nivel medio superior (Cosdac-SEMS, 2013; UAGro, 2010), y es marcado como un contenido obligatorio para su enseñanza en el bachillerato y los primeros años de licenciatura, en México.

En el plan de estudio Cosdac-SEMS, la unidad de aprendizaje de Cálculo Diferencial está propuesta en el IV semestre y consta de cuatro unidades: pre cálculo, funciones, límites, y derivadas. El tema de variación de funciones se ubica en la Unidad IV Derivada y en dicha unidad se propone abordar los temas de máximos y mínimos, concavidad y simetría, rapidez de cambio, entre otros. A este contenido que se propone le anteceden las nociones sobre derivadas sucesivas, razón de cambio promedio, interpretación geométrica de la derivada; así como, continuidad y límite de una función.

Por otra parte, en el plan y programa de estudio de la UAGro del nivel medio superior el estudio del comportamiento de una función se ubica en la Unidad de Aprendizaje de Matemáticas V Cálculo Diferencial, del quinto semestre del bachillerato general de la UAGro. La variación de funciones se ubica en la Unidad III, temas: crecimiento y decrecimiento de una función; máximos y mínimos, y puntos de inflexión y le anteceden los contenidos de derivada de funciones algebraicas y transcendentes, fórmulas para calcular la derivada de funciones, derivadas de orden superior y ecuación de la tangente a una curva. Para el desarrollo de estos contenidos se propone que el tratamiento sea a través de evaluar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función a partir del análisis de las gráficas, en cuanto a los valores máximos y mínimos estos deberán ser determinados analíticamente a partir de estudiar los problemas abordados en semestres anteriores. Se espera que el alumno pueda identificar esto a través de la relación de la tangente y la relación del signo con la pendiente.

Del análisis realizado a la literatura especializada (tesis, artículos de revistas, planes y programas de estudio y libros de texto); se puede identificar que, en la educación media superior en México, a pesar de que se han realizado diversas investigaciones desde diferentes referentes teóricos y metodológicos sobre el estudio del sentido de variación de una función; aún persisten muchas dificultades para la comprensión y manejo de este contenido, tanto en el profesor como en el alumno. En la enseñanza y aprendizaje del Cálculo en este nivel, se ha documentado la existencia de dificultades sobre comprensión, construcción e interpretación de los conceptos básicos del Cálculo; tales como función, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, entre otros.

Para enfrentar este problema identificado del aprendizaje de las matemáticas y del Cálculo en particular, se ha aplicado el uso de recursos tecnológicos, estrategias didácticas, resolución de problemas, cuestionarios, entre otros, con el fin de detectar las dificultades y las concepciones que tanto alumnos y profesores tienen acerca de los conceptos y resultados que intervienen en este contenido, pero no consideran propuestas de cómo debe abordarse en las aulas; es decir, solamente detectan, clasifican e identifican la problemática, pero no proponen estrategias de solución alguna. Estos trabajos analizados, son aportes valiosos para esta investigación y pueden ser aprovechados en una propuesta que analice y sugiera cómo abordar este contenido en el nivel Medio Superior.

Por consiguiente, consideramos necesario realizar investigaciones sistemáticas sobre tales temas que posibiliten la adquisición de ideas y conceptos más significativos y profundos en los alumnos, contribuyendo con esto a que los alumnos cambien sus pensamientos ingenuos hacia la estructuración de un pensamiento matemático adecuado.

En la propuesta que se diseñó como resultado de esta investigación, se tomaron en cuenta estos aspectos los cuales contribuyeron a mejorar la comprensión de los procedimientos utilizados para el estudio de las funciones. En particular, se incorporó la formulación de conjeturas y utilización de contraejemplos, en la construcción de los conceptos y sus definiciones y en el establecimiento de los teoremas y resultados que fundamentan los procedimientos de análisis del sentido de variación.

1.3. Problema de investigación

En este trabajo de tesis se identificó el siguiente problema de investigación: **Existen dificultades en alumnos de nivel medio superior sobre la comprensión de los conceptos y teoremas que fundamentan el estudio del sentido de variación de una función.**

Pregunta de investigación

¿Qué elementos teóricos y metodológicos permiten elaborar una ID para el tratamiento de los conceptos, teoremas y procedimientos para el estudio del sentido de variación, determinación de extremos y construcción de gráficas de funciones en la enseñanza del cálculo en el nivel medio superior?

¿Qué papel juega el contraejemplo en los procesos de definición de conceptos, identificación de condiciones y uso de las propiedades que permiten estudiar el sentido de la variación de una función en la puesta en escena de esta ID?

Objetivo de investigación

Diseñar e implementar una ingeniería didáctica para favorecer la comprensión de los conceptos que fundamentan el estudio del sentido de variación, la determinación de los extremos y la construcción de las gráficas que se estudian en el nivel medio superior.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

La presente investigación se sustenta en la Teoría de Situaciones Didácticas y la Teoría de la Transposición Didáctica desarrolladas por G. Brousseau e Y. Chevallard; así como el uso del contraejemplo y la estrategia didáctica conocida como Debate Científico en Cursos de Matemáticas. Por lo tanto, en este apartado se describen las ideas esenciales de estas teorías.

2.1. Teoría de la Transposición Didáctica

Brousseau (1988b) afirma que la presentación clásica (axiomática) de los resultados matemáticos hace desaparecer del texto el camino recorrido para su presentación elimina completamente la historia de los saberes: la sucesión de las dificultades y preguntas que han provocado la aparición de los conceptos fundamentales, su empleo para plantear nuevos problemas, la introducción de técnicas y cuestiones nacidas de los progresos de otros sectores, el rechazo de ciertos puntos de vista que han resultado falsos o inadecuados y las innumerables discusiones que han ocasionado.

Se produce así una descontextualización, despersonalización y destemporalización de los conocimientos y corresponde al profesor recrear escenarios en los que los esos conocimientos se recontextualicen, repersonalicen y retemporalicen. Brousseau (1986b) denomina a este proceso *transposición didáctica*.

La actividad del profesor debe tener como objetivo convertir estos saberes transpuestos en conocimientos del alumno. Cada conocimiento debe surgir de la adaptación a una situación específica.

El profesor debe pues simular en su clase una micro sociedad científica si quiere que los conocimientos sean medios económicos adecuados para proponer buenas preguntas y para zanjar debates, si quiere que los lenguajes sean medios para dominar situaciones de formulación y las demostraciones sean pruebas.

Ahora bien, Brousseau establece las siguientes actividades matemáticas a desarrollarse por los actores que intervienen en este proceso (Ver **Figura 8**):

La actividad del matemático

Antes de mostrar sus resultados, el matemático debe hacer una revisión exhaustiva de los conocimientos obtenidos, de tal manera que pueda refutarlos o considerarlos erróneos o falsos, además de contraponerlos con otros y considerarlos verdaderos y llegado el momento destruirlos si así fuera el caso. Debe emprenderse todo un reordenamiento de los conocimientos vecinos, anteriores o nuevos.

El productor del conocimiento debe despersonalizar, descontextualizar y destemporalizar lo más posible sus resultados.

La actividad del alumno

El trabajo del alumno en un momento debe redescontextualizar y redespersonalizar su saber e identificar su propia producción del saber usado en la comunidad científica.

El trabajo intelectual del alumno, debe en un momento ser comparable con el trabajo de la comunidad científica del investigador. El alumno debe reproducir lo que la comunidad científica realiza, debe por lo tanto: formular, usar, probar, elaborar modelos, lenguajes, conceptos, teorías, intercambiarlos con otros, reconocer los que están conforme a la cultura, tomar los que le son útiles, etc.

La actividad del profesor

El trabajo del profesor de una u otra manera se encuentra inmerso dentro de la actividad que presenta el matemático, debe producir una recontextualización y una repersonalización de los conocimientos, los cuales son requeridos por los alumnos en su desarrollo. El profesor debe por lo tanto elaborar los medios necesarios que puedan ser comunicables dentro de la pequeña micro comunidad científica formada en el aula.

Figura 8. Actividades del Matemático, Profesor y Alumno en la Teoría de la Transposición Didáctica (TTD). Tomado de Morales (2008).

El objetivo principal a desarrollar por el profesor es transponer los aprendizajes de tal manera que los alumnos puedan comprenderlos del saber sabio al saber enseñado, y buscar con ello crear pequeñas comunidades micro científicas en el aula desarrollando cada una de las partes, el proceso que corresponda en la obtención y apropiación del conocimiento, el cual surge de la adaptación de cada uno de los elementos y de las actividades matemáticas.

La Teoría de la Transposición Didáctica (TTD) además de Brousseau también fue desarrollada por Y. Chevallard (1980), quien la consideraba como un proceso de transmisión del conocimiento a partir de la interacción y la comunicación entre profesor y alumno.

Chevallard define este concepto como:

> *Un contenido de saber que se ha designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El trabajo que transforma este objeto en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica (Chevallard, 1985, p. 45).*

La transposición didáctica puede ser entendida como el camino que conduce del saber científico al saber enseñado, refiriéndose al proceso de llevar el saber científico al aula de tal forma que se permita a los alumnos conocer un saber sabio. Es decir, la transformación del conocimiento científico se debe proporcionar con fines de divulgación y de aprendizaje a los alumnos.

Tal transformación, del objeto de conocimiento científico en objetos de conocimiento escolar requiere que el maestro seleccione el concepto académico y lo relacione, o adecue, a las posibilidades cognitivas de los alumnos, en aspectos como lenguaje oral y escrito, así como a las condiciones del contexto escolar. Se debe buscar la forma de garantizar la comprensión del conocimiento científico y las implicaciones que tiene en el día a día de los alumnos.

Por tanto, la transposición didáctica es definida como un proceso en conjunto de enseñanza y aprendizaje, que tiene como objeto la creación didáctica.

Chevallard parte de la idea de que el sistema didáctico implica una relación ternaria: enseñante (P), saber (S) y estudiante (E) (Ver **Figura 9**). Y dice al respecto:

> *El didacta de las matemáticas se interesa en el juego que se realiza entre un docente, los alumnos, y un saber matemático. Tres lugares, pues: es el sistema didáctico. Una relación ternaria: es la relación didáctica (Chevallard, 1985, p. 24).*

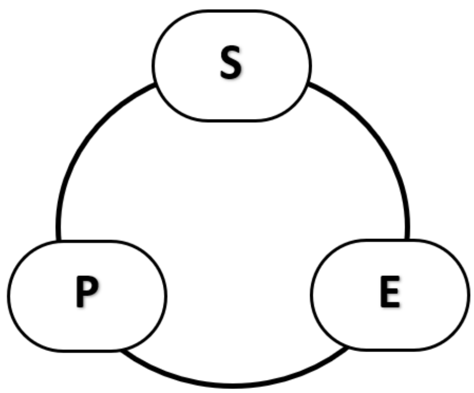


Figura 9. Estructura Didáctica según Chevallard. Tomado de Chevallard (1985).

Es preciso que se consideren las relaciones entre el sistema de enseñanza y el entorno inmediato con los diferentes agentes y contextos. Tal es el caso, de la influencia de la sociedad en el comportamiento del profesor y también de los alumnos indicando los tipos de acciones dentro del aula, la influencia de los padres de familia quienes forman el primer contacto del conocimiento en los mismo, la influencia de los académicos, la influencia política y por último la fuerza del mercado (libros de texto). Todos estos agentes enmarcan la razón de ser de un proceso de transposición didáctica que se propone moldear el saber científico y buscar acercamientos para que el alumno pueda comprenderlo; pero no se debe limitar a esto, el alumno debe ser capaz de analizar y reflexionar desde la base conceptual que ya posee y que el docente puede tomar como herramienta inicial para constituir el saber a ser enseñado.

En relación a la comprensión de los conocimientos Chevallard (1991) propone que para que un profesor pueda saber si un alumno aprendió un saber sabio, es a través de si éste es capaz de expresar lo aprendido y argumentar lo que expresa, ya que se parte de la base de que la comprensión está asociada a la capacidad de argumentar lo aprendido. (Ver **Figura 10**)

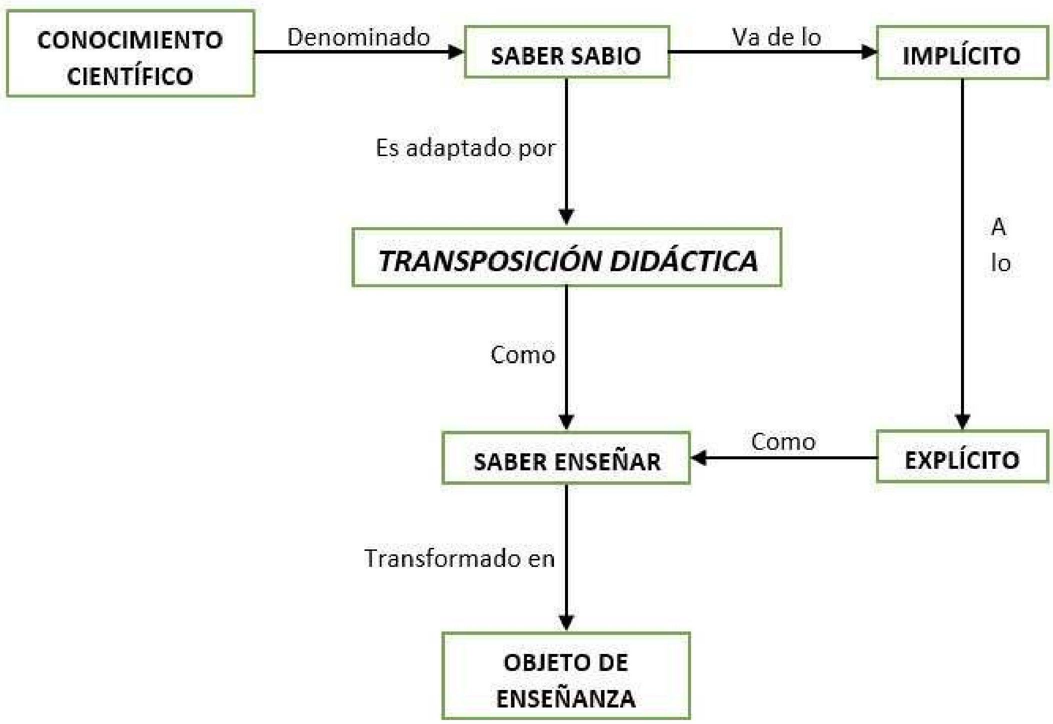


Figura 10. El papel de la Transposición Didáctica. Tomado de Chevallard (1991).

2.2. Teoría de Situaciones Didácticas

Brousseau (1986b) establece que el objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas son las situaciones didácticas, las cuales define como:

> *Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente a los*

instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución (Brousseau, 1986a, pp. 12-16)

Podemos establecer, que la TSD se enfoca principalmente, en una construcción que permite las interacciones sociales que se dan entre *alumnos, docentes* y *saberes matemáticos* (Ver **Figura 11**) en una clase y condicionan lo que los alumnos aprenden y cómo lo aprenden.

Con frecuencia, la enseñanza es concebida como una relación que existe entre el *sistema educativo, el alumno* vinculadas a la transmisión de los *saberes*, por lo que Brousseau establece la siguiente estructura didáctica:

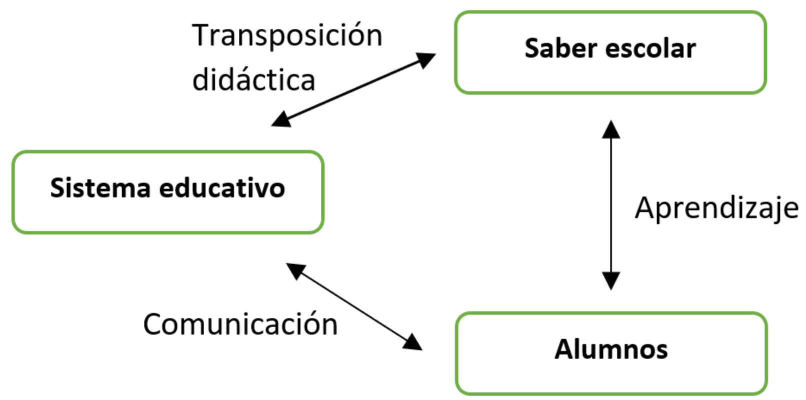


Figura 11. Estructura Didáctica de Brousseau. Tomado de Brousseau (1988a).

Este esquema es asociado a una concepción de la enseñanza, en la que el profesor organiza el saber a enseñar en una serie de mensajes, de los cuales el alumno toma lo que debe adquirir. El propósito de estos mensajes, es la enculturación del alumno por parte de la sociedad y otro de adaptación independiente.

Brousseau (1978) considera la didáctica “como un área de investigación cuyo objeto es la comunicación de los saberes matemáticos y sus transformaciones”. Además, determina que la situación como modelo de interacción adquiere su sentido al tomar como objeto de estudio las condiciones en las que se da la difusión y adquisición de los conocimientos matemáticos. Distingue la *situación* como una herramienta (entorno del alumno diseñado y manipulado por el docente), *situaciones adidácticas* (las que provocan una actividad en el alumno sin la intervención del profesor) y *situaciones didácticas* (modelos que describen la actividad del profesor y también la del alumno), definidas por un medio, los procesos de devolución y de institucionalización, las cuales representan la actividad que el maestro debe de realizar, todo esto enmarcado en un contrato didáctico el cual es necesario para llevar a cabo las actividades generadas por el profesor.

Respecto al significado Brousseau consideraba que no debe ser dado al alumno, sino que éste debe ser construido interiormente a través de las actividades propuestas. Por lo tanto, se considera que el profesor no debe revelar al alumno lo que debe de realizar o lo que espera obtener como conocimiento, sino, proponerle al alumno situaciones de aprendizaje las cuales le permitan la devolución de un problema, en donde este conocimiento debe ser utilizado y aplicado en la resolución de situaciones de contexto.

Mientras las situaciones didácticas permiten establecer el rol de la intervención del profesor, en una situación adidáctica esto no es permitido ya que el docente puede participar, pero sin tomar el rol de oferente del conocimiento. Si esto sucede se considera que se rompe la adidacticidad de la situación y por consiguiente el contrato didáctico.

Brousseau (1978) distingue y clasifica las situaciones en cuatro tipos: *acción, formulación, validación e institucionalización;* cuya secuencia, en los procesos didácticos es la siguiente:

1. Situaciones de Acción. Interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado, y a su vez elaborar un Modelo implícito el cual se establece por un conjunto de relaciones o reglas según las cuales el alumno toma sus decisiones sin tener conciencia de ellas.

2. Situaciones de formulación. Su objetivo es la comunicación de informaciones entre alumnos. No tiene influencia sobre los conocimientos y las convicciones de los alumnos, pero impide la desaparición de los Teoremas en acto.

3. Situaciones de validación. Se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. Elaboración de pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación empírica, se debe explicar por qué necesariamente debe ser así.

4. Situaciones de institucionalización. Se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación.

Un aprendizaje puede generar que un sujeto evolucione y éste a su vez puede ser la génesis para el planteamiento de un nuevo conocimiento los cuales permitan el proceso mediante el cual el sujeto concibe o modifica sus propios conocimientos. El profesor establece que un alumno ha adquirido un nuevo conocimiento cuando éste ha logrado asimilarlo y a su vez cuando el profesor realiza ciertos cuestionamientos éste puede responder a ellos y los aplica para resolver problemas que su entorno le plantea; por el contrario, si esto no sucede se considera que el alumno manifiesta una necesidad de saber que requiere una información, una enseñanza.

Sobre el aprendizaje del alumno Brousseau dice que:

> *El alumno aprende adaptándose al medio que es un factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios; un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber fruto de la adaptación del alumno se manifiesta por medio de nuevas respuestas, que son la marca del aprendizaje (Brousseau, 2007, p. 30).*

Según Brousseau, “la acción y luego la formulación, la validación cultural y la institucionalización parecen constituir un orden razonable para la construcción de saberes”.

Podemos decir, que una situación didáctica debe ser acorde al contexto de los alumnos y por consiguiente deben ser considerados los conocimientos previos que tiene formados; además, deben describir las actividades tanto de los alumnos como del profesor, así como, los conocimientos esperados después de aplicada la situación.

2.3. Contraejemplo

A través de la historia, el desarrollo del pensamiento matemático no ha sido en forma progresiva, más bien los conocimientos matemáticos han sufrido cambios drásticos por el papel importante que han jugado recursos como las conjeturas y los contraejemplos en la construcción y evolución de las Matemáticas. Aunque estos recursos son empleados por los investigadores, como parte de su quehacer en el caso de la estructuración de los "nuevos conocimientos", pocas veces son usados por el profesor en su práctica docente para el desarrollo y adquisición de conocimientos en el aula.

El proceso de conjeturar como elemento de construcción de un pensamiento matemático para los alumnos, la mayor parte de las veces es algo que no es fomentado por el docente en el aula dejando de observar los conocimientos previos que estos tienen. Por consiguiente, dentro del desarrollo del proceso enseñanza - aprendizaje existe un recurso en Matemáticas que puede permitir en parte el cambio del pensamiento ingenuo de los alumnos al que se le ha denominado "contraejemplo". El contraejemplo consiste en plantear al alumno una situación a partir de una contradicción que tiene que resolver, la cual se constituye contraria a la que se analiza en el sentido que difiere del objeto de estudio.

La enseñanza de la matemática se considera como un proceso centrado en la producción de conocimientos matemáticos. Esto incluye explorar, conjeturar, reflexionar sobre el trabajo realizado y validar lo producido, según normas y procedimientos aceptados matemáticamente. El tratamiento de la verdad es una actividad del emprendimiento matemático. Según Balacheff (2000): "las pruebas y refutaciones están necesariamente ligadas a las concepciones de los objetos matemáticos las pruebas sirven a la construcción de objetos matemáticos y por lo tanto son irreducibles a la lógica formal" (p. 196).

De acuerdo con lo que afirma Santos (2007), el uso de contraejemplos cumple una función fundamental en el establecimiento de argumentos matemáticos y es una actividad que los alumnos necesitan practicar constantemente.

Con el contraejemplo y la conjetura se puede avanzar en la estructuración de los razonamientos lógico-matemáticos necesarios en los alumnos, para que puedan ser valorados y mejorados por el docente y por ellos mismos. De esta manera, sus razonamientos pueden ser refinados o hasta fortalecidos, lo que a la vez puede permitir la formación de un pensamiento crítico y analítico vital en la formación de los individuos de una sociedad.

Locia (2000) identifica la presencia de los contraejemplos en las situaciones didácticas y explicita ciertos roles que juega el contraejemplo en la enseñanza como sigue:

- El contraejemplo puede ser un objeto de enseñanza explícita,
- El contraejemplo puede ser enseñando como método de demostración exigible en ciertos casos (objeto de saber)
- Puede ser enseñado como método general de control (por el alumno y por el profesor) de lo que el alumno escribe, es decir como un objeto de conocimiento general
- Un contraejemplo impactante particular puede ser solicitado como medio de conocer o comprender un teorema o una definición de una noción precisa (contraejemplo como conocimiento).
- El contraejemplo puede también ser un medio más o menos explícito de la enseñanza: el profesor lo utiliza para conducir el aprendizaje del alumno.

Las estrategias del profesor varían, pero se diferencian esencialmente por la distribución de las responsabilidades entre el profesor y el alumno en el desarrollo del proceso didáctico.

El hablar de razonamientos y en especial el deductivo permite establecer que en los alumnos existe la formación de los conceptos y por consiguiente la elaboración de estrategias que permitan e induzcan a los alumnos a utilizar las conjeturas en ellos y por consiguiente que aprendan a utilizarlas para poder establecer y desecharlas de acuerdo a lo que el profesor determine y así a través de los contraejemplos crear los conceptos en ellos.

Según García y Morales (2013), “el contraejemplo es un recurso que puede hacer ver a los alumnos de cualquier nivel educativo que su pensamiento ingenuo no siempre funciona” (p.174).

En ese sentido, muchas afirmaciones presentadas en el aula por los alumnos como conjeturas son falsas, y en el caso del quehacer matemático es necesario refutarlas para limitar cuando se ha construido un nuevo conocimiento de otro, que podría considerarse un obstáculo como sostiene Lakatos (1978) al presentarse conjeturas con poca sustentación teórica. Observemos el siguiente ejemplo:

Se cumplirá siempre que “toda función con limite en x_0 es continua en x_0 ”. Esta afirmación se puede refutar presentado el siguiente contraejemplo:

Sea, $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ ¿Qué pasa con la continuidad cuando $x = 2$?

Se tiene que $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(x+2) = 4$

Una función es continua si se cumple que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Sin embargo, en la función $f(x)$ no es posible asignarle a $x = 2$ ya que no es posible dividir entre cero.

$|x-2| > 0$ Porque no puede tomar el valor de 0.

En consecuencia, es necesario observar cómo el uso de estos recursos permite un análisis de los temas matemáticos, haciendo un contraste con la clase tradicional que todavía se da en las escuelas. Con lo cual, se intente obtener provecho de los mismos al posibilitar el fortalecimiento de un pensamiento matemático científico en los alumnos. En la Didáctica de las Matemáticas poco se ha reportado sobre la importancia y transcendencia de la conjetura y el contraejemplo en el aprendizaje de las Matemáticas.

2.4. Debate científico en cursos de matemáticas

En concordancia con la Teoría de Situaciones, Legrand (1993) establece que para que el alumno entre verdaderamente en el juego científico, es indispensable que tome consciencia de las intuiciones científicas o que tome actitudes de un matemático, genere ideas que le vienen a la mente cuando se analiza un problema, produciendo contraejemplos y los argumentos necesarios que lo lleven a la solución del problema. Según Legrand, la forma idónea para lograr este tipo de situación es instaurando en los alumnos situaciones problemáticas provocadas por el profesor, por las situaciones diseñadas para tal fin, y por conjeturas o contraejemplos que los alumnos aportan a la clase. Esta estrategia didáctica la llama “el debate científico en cursos de matemáticas”.

El objetivo del debate científico no es descubrir propiedades originales, sino descubrir la significación de los resultados matemáticos y apropiarse de los métodos de razonamiento, se trata entonces de permitir a los alumnos entrar en problemáticas científicas, tratando de evitar deformar mucho el sentido de los conocimientos aprendidos y finalmente acceder a una cierta forma de autonomía de pensamiento. Los objetos del debate giran en torno a la esencia de los teoremas en curso, y para efectos de lograr que los alumnos se apropien de los métodos de razonamiento de una prueba matemática, se elige una parte de las conjeturas propuestas por ellos para que se transformen, por rectificaciones sucesivas, en los teoremas del curso (rescatando las “buenas ideas” de las conjeturas iniciales, que por el juego de las pruebas o de contraejemplos se transforman en verdaderas).

Legrand (1993) establece que para que haya posibilidad de adquisición de conocimientos sustanciales por un debate en curso de matemáticas parece necesario respetar un primer grupo de restricciones:

- Los enunciados sobre los cuales se trabaja son esencialmente conjeturales,
- Existe un contrato didáctico que legitima el hecho de que todo alumno puede someter sus propias conjeturas a la clase o anfiteatro. Este contrato didáctico debe ser tal que aquel que propone el enunciado pueda comprometerse fuertemente, sin temer a ser humillado (por el profesor, por la clase o por su propio punto de vista) si al final se revela que el enunciado es no verdadero o no pertinente.
- Los alumnos que oyen estas proposiciones deben poder realmente dudar de su pertinencia y/o de su veracidad, es decir, que no deben poder interpretar la actitud del profesor en términos de apoyo o de desapoyo (incluso tácito) de la conjetura o de la argumentación.

Hay por lo tanto obligación de una negociación didáctica para conducir al alumno a considerar que va a adquirir conocimientos de manera diferente:

- Va a aprender escuchando y analizando con sagacidad los propósitos de un par,
- Va a aprender dirigiéndose directamente a sus pares para convencerlos de lo bien fundamentado de sus aserciones, sin solicitar a priori la mediación del profesor.

Esta voluntad colectiva (con fines epistemológicos y didácticos) de no centrar el trabajo de la clase alrededor de la opinión del profesor es la condición misma de sobrevivencia de un debate, sobre todo con ambientes heterogéneos.

Legrand (1993) identifica tres tipos de situaciones de debate científico:

- Las situaciones de introducción a un nuevo concepto, situaciones problemáticas que permiten la introducción de un concepto, este debate es siempre muy fuerte, porque la idea que quiere sistemáticamente imponerse como natural y de sentido común, es un principio que entra en contradicción con él mismo
- Los debates de conjeturas para profundizar una teoría emprendida, estos debates se producen lo más a menudo cuando el curso ha emprendido la fase de desarrollo de una teoría.
- Los debates surgidos de las preguntas espontáneas, este tercer tipo de debate es el debate de regreso de las preguntas en conjeturas o el reenvío al grupo clase de la responsabilidad de responder bajo las tres formas: “verdadero”, “falso”, “otro”; donde “otro” significa “no puedo” o “no quiero responder bajo la forma verdadero/falso”.

Durante el desarrollo del debate científico se distinguen etapas importantes en un debate científico:

1. En la primera, el profesor provoca y organiza de diferentes maneras la producción por los alumnos de enunciados de carácter científico es decir en los cuales la ambigüedad y las simples opiniones han sido eliminadas, y que es posible teóricamente juzgar verdadero o falso.
2. En la segunda parte, estos enunciados son sometidos a la reflexión y después al debate de los alumnos que deben pronunciarse sobre su validez.

3. En la tercera parte, los enunciados validados por una demostración toman el carácter de teorema.

Una de las apuestas del debate es por lo tanto mostrar a cada uno que a partir del momento en el que no se inhiben sus facultades imaginativas y creadoras (por ejemplo declarándose ineptos a la reflexión o diciéndose que no sirve para nada buscar lo que ha sido ya encontrado), se tienen ideas personales, pero que una idea científica espontánea no es por así decirlo jamás inmediatamente satisfactoria y totalmente exacta; ésta debe ser "trabajada" y sometida a la prueba de la búsqueda de pruebas y de contraejemplos.

Por consiguiente, denotamos que si bien es cierto que los alumnos-matemáticos en un debate científico, su papel principal será el de generar la exigencia en la producción de contraejemplos precisos, de proporcionar argumentos reconocidos por todos (la mini-comunidad científica formada en el aula) y validados por el profesor el cual debe establecer que tiene los conocimientos necesarios del tema en cuestión. A medida que los alumnos se identifican con este tipo de didáctica en la generación de contraejemplos, permite establecer la posición de desechar o aceptar los teoremas que sus argumentaciones les genere y este se fije a través de los diversos modos de prueba de los alumnos.

Considerando el principio o también llamada ley del contraejemplo el cual establece que: un contraejemplo es suficiente para mostrar la falsedad de una conjetura, a partir de ahí la establecemos como una notable herramienta de regulación del debate científico en cursos de matemáticas.

Capítulo 3

MARCO METODOLÓGICO

En este apartado se describe el marco metodológico de la investigación, y se da cuenta de su implicación en la elaboración y tratamiento de la ID sobre el sentido de variación de una función.

3.1. Ingeniería Didáctica

La Ingeniería Didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas francesa, a principios de los años ochenta, como una metodología para las realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la Teoría de Situaciones Didácticas y de la Transposición Didáctica. Se utiliza en didáctica de las matemáticas con una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje (Artigue, 1995, pp. 35-36).

Artigue (1995, p. 40) distingue varias dimensiones ligadas a los procesos de construcción de las ingenierías didácticas:

- Dimensión epistemológica: asociada a las características del saber puesto en funcionamiento.
- Dimensión cognitiva: asociada a las características cognitivas de los alumnos a los que se dirige la enseñanza.
- Dimensión didáctica: asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

El sustento teórico de la Ingeniería Didáctica proviene de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997) y de la Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1991), que tienen una visión sistémica al considerar a la didáctica de las matemáticas como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto (Brousseau, 1997). (Ver **Figura 12**)

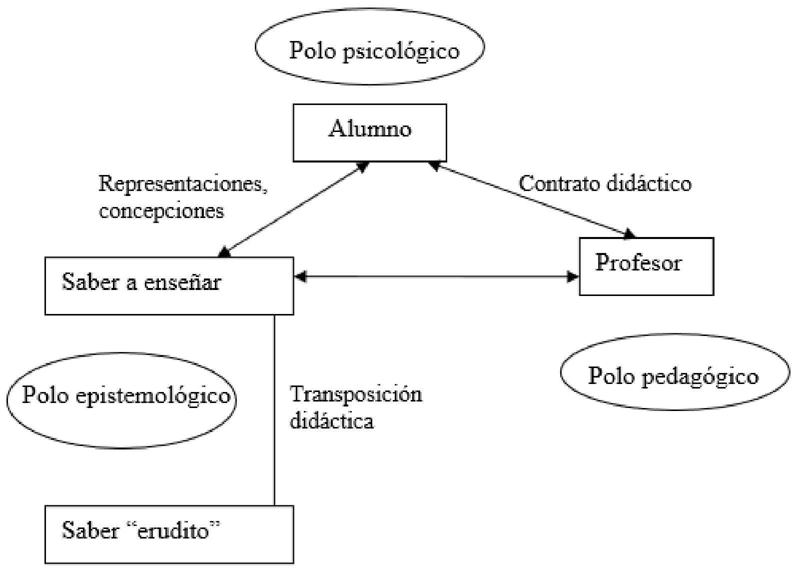


Figura 12. Sistema Didáctico. Tomado de Arsac, Develay y Tiberghien (1989).

La metodología de la Ingeniería Didáctica está formada por las siguientes fases:

- Los análisis preliminares
- La concepción y el análisis a *priori*
- Experimentación
- Análisis a *posteriori* y Validación

Los **análisis preliminares** para la concepción de una Ingeniería Didáctica respecto al cuadro teórico didáctico general y sobre los conocimientos didácticos adquiridos y relacionados con el tema del sentido de variación de funciones. Artigue distingue los siguientes análisis preliminares que se presentan con mayor frecuencia:

- El análisis epistemológico, referente a los contenidos contemplados en la enseñanza

- El análisis didáctico, sobre la enseñanza y sus efectos.
- El análisis cognitivo, de las concepciones de los alumnos, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica.

A continuación, se indican las actividades que se realizaron en cada dimensión que abarca el análisis preliminar:

- Para el desarrollo del análisis epistemológico, ubicamos y analizamos los documentos originales en los cuales situamos la génesis y evolución que se le ha dado al contenido del sentido de variación de funciones; además, del tratamiento que se le da en nuestros días.

- En el análisis didáctico consideramos el análisis y revisión de los libros de texto propuestos en los planes y programa de estudio y otros que traten sobre el tema del análisis de funciones.

- Respecto al análisis cognitivo reflexionamos sobre el análisis de los conceptos y definiciones matemáticos relativos al sentido de variación de funciones, para identificar el nivel de tratamiento que debe hacerse en el Nivel Medio Superior. Para obtener estos resultados se diseñó y aplicó un primer instrumento el cual permitió establecer un punto de partida sobre los conocimientos matemáticos del tópico en cuestión.

La concepción y el análisis a *priori* en esta segunda fase el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema que no estén fijadas por las restricciones. El objetivo del análisis a priori es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los alumnos y su significado.

Las actividades realizadas en la segunda fase, están relacionadas con los análisis de los resultados arrojados por el instrumento aplicado a alumnos para obtener un punto de partida en la concepción de las actividades de la ID, así como la elaboración y abstracción de las actividades a desarrollar de tal manera que se contemplen los elementos ya mencionados pertenecientes al marco teórico de la TTD y de la TSD, considerando el surgimiento de manera “natural” del contraejemplo en los debates científicos llevados a cabo en la micro comunidad científica.

Experimentación es la fase de la realización de la ingeniería con una cierta población de alumnos. Esta etapa se inicia en el momento en que se da el contacto investigador/profesor/observador con la población de los alumnos objeto de la investigación. En particular en esta fase de la investigación se llevó a cabo la puesta en escena de la ID diseñada en la fase anterior, con alumnos del 1er año de licenciatura de educación superior.

Análisis a posteriori y evaluación esta es la última fase de la Ingeniería Didáctica. Esta fase se basa en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación, es decir, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los alumnos en el aula o fuera de ella. Estos datos se completan con otros obtenidos mediante la utilización de metodologías externas: cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, realizadas durante cada sesión de la enseñanza, etc.

La validación o refutación de las hipótesis formuladas en la investigación, se fundamenta en la confrontación de los análisis, el a priori y a posteriori. Según (Artigue, 1995, p. 49):

> *En la mayoría de los textos publicados concernientes a ingenierías, la confrontación de los dos análisis, a priori y a posteriori, permite la aparición de distorsiones. Estas están lejos de ser siempre analizadas en términos de validación; esto es, no se busca en las hipótesis formuladas aquello que las distorsiones constatadas invalidan. Con frecuencia, los autores se limitan a proponer modificaciones de ingeniería que pretenden reducirlas, sin comprometerse en realidad con un proceso de validación.*

El modo de validación es interno, basado en la confrontación entre un análisis a priori en el cual se encuentran comprometidas un cierto número de hipótesis y un análisis a posteriori que se apoya en los datos surgidos de la realización efectiva. Sus lazos con la Teoría de las Situaciones Didácticas se expresan especialmente en la concepción y el análisis a priori de la ingeniería (Ver **Figura 13**).

Se manifiestan también en una estructuración del conjunto de las situaciones, con relación a las situaciones didácticas distinguidas por G. Brousseau para analizar las relaciones del sujeto con el conocimiento matemático: las situaciones de acción, de formulación y de validación. Es importante considerar el papel importante del docente el cual es previsto en el análisis, en referencia a los dos procesos antagonistas que, en la Teoría de las Situaciones Didácticas, gobiernan las relaciones: el proceso de devolución y el proceso de institucionalización.

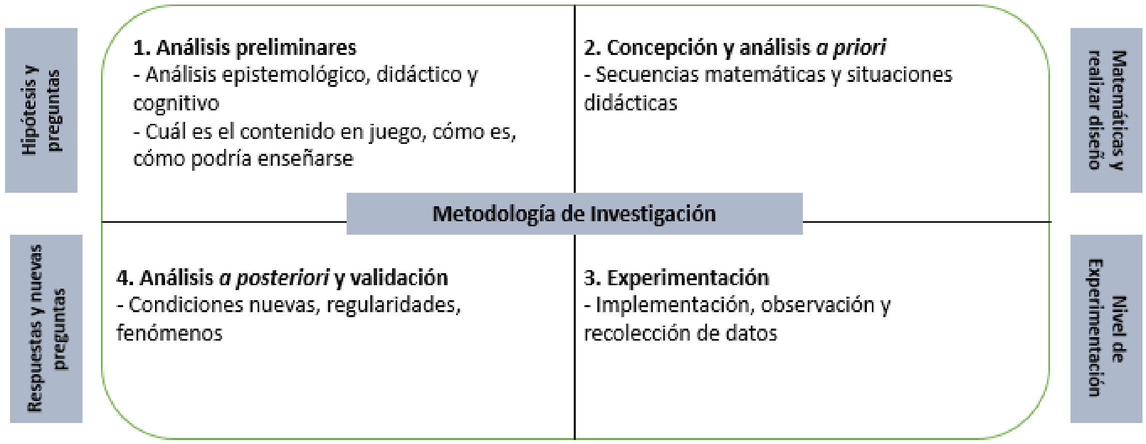


Figura 13. Fases de la ID como metodología de investigación dentro de la TSD. Traducido de Barquero y Bosch (2015).

Como parte del desarrollo de nuestra investigación hemos considerado los referentes teóricos los cuales sustentan el proceso de esta investigación es por ello que dentro de la metodología a usar y dado que de la TTD y la TSD surge la Ingeniería didáctica la cual consideramos se adapta a la propuesta de investigación que nos proponemos a realizar; ya que las etapas que la conforman nos permitirán llevar una secuencia lógica de los procesos a los cuales debemos exponer a nuestros alumnos con las actividades a considerar en el desarrollo del sentido de variación de funciones.

Como mencionamos, nuestra propuesta consideró las cuatro fases del desarrollo de la ingeniería didáctica ya que de la fase de análisis preliminares se indagó a través de la investigación si se presentan los obstáculos descritos por Brousseau (Ontogenéticos, epistemológicos y didácticos), determinándose con ello si existe algún error desde la génesis del sentido de variación de funciones a nuestros días o si a través de los tiempos éste ha sufrido cambios que puedan influir en la concepción del conocimiento; además de la transposición que ha sufrido en los medios didácticos para su enseñanza.

En la segunda fase de la ingeniería didáctica sobre la concepción y análisis a priori el diseño de las actividades se realizó buscando anticipar los procesos y procedimientos posibles a los que se enfrentó el alumno considerando para ello los tipos de situaciones (acción, formulación, validación e institucionalización) determinados por Brousseau en la TSD. En la experimentación se llevó a cabo la puesta a prueba final de las actividades, buscando que a través de situaciones contradictorias emergiera el debate científico en la micro comunidad generada en el aula buscando con ello el surgimiento de manera natural y espontánea el uso de una herramienta mediadora como es el contraejemplo en dichas actividades. Con esta herramienta pretendemos que el alumno haga uso de ella para proponer conjeturas y refutar proposiciones consideradas como verdaderas.

El contraejemplo a su vez se identificó en los cuatro tipos de situaciones de la teoría (acción, formulación, validación e institucionalización), en el proceso de desarrollo de esta propuesta.

Al respecto, consideramos que es necesario el uso de contraejemplos (si existen) que posibiliten cambiar esos errores u obstáculos que frecuentemente se presentan en los alumnos los cuales posibiliten la enseñanza en ellos, por lo que asumiremos las posiciones de García & Morales (2013), Hernández, Locia, Morales & Sigarreta (2019), Klymchuk (2012), Morales, Locia, Ramírez, Sigarreta & Mederos (2018), Zazkis & Chernoff (2008), quienes coinciden en que la formulación de conjeturas y el empleo de contraejemplos, permite estimular el razonamiento en los alumnos del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones, y disminuir los procedimientos memorísticos y algorítmicos de aprendizaje que generalmente es lo que realizan la mayoría de los alumnos.

Capítulo 4

ANÁLISIS PRELIMINAR: EPISTEMOLÓGICO, DIDÁCTICO Y COGNITIVO

En este apartado se describe el análisis preliminar, destacando los elementos epistemológicos, didácticos y cognitivos necesarios como elementos base del proceso de elaboración de la ID sobre el sentido de variación de una función.

4.1. Definiciones relativas al sentido de variación

Según Tall (1991), las nociones y las propiedades que se trabajan en el cálculo y en el Análisis Matemático pueden agruparse en cuatro tipos. Más precisamente, existen propiedades puntuales, propiedades locales, propiedades infinitesimales y propiedades globales. Así, una propiedad será puntual si se puede explicitar utilizando sólo un dominio reducido a un punto; será local si es necesario recurrir a vecindades o entornos de puntos para explicitarla; será global si es necesario que un conjunto de puntos se haya fijado como dominio de la función que posee la propiedad; en cuanto a una propiedad infinitesimal, contrariamente a los otros tres tipos de propiedades, no está naturalmente asociada a un tipo de dominio (punto/vecindad/dominio de estudio). Existen propiedades que pueden tener características de más de uno de los tipos que acabamos de mencionar, por ejemplo, se pueden introducir cuantificadores universales para caracterizar propiedades que pertenezcan a dos tipos al mismo tiempo, en particular, "la función es positiva sobre [0,1]", articula puntos de vista puntuales y globales; finalmente, una propiedad local puede necesitar el filtro de todas las vecindades de un punto -por ejemplo la continuidad en un punto-, mientras que, para otras puede ser suficiente una sola vecindad para ser caracterizada- por ejemplo la noción de máximo local.

En este contexto, analicemos las definiciones de función creciente y función decreciente: la noción de función creciente se enseña en nuestro país en tercer año de bachillerato y su presentación combina los puntos de vista puntual (en la definición se comparan imágenes aisladas) y global (cuantificador universal sobre las parejas de puntos del dominio).

En el caso particular del sentido de variación de las funciones de variable real y la existencia de máximos y mínimos, las definiciones actuales se dan en términos de desigualdades. Se dice que una función f es creciente en un intervalo I, si para cualesquiera dos elementos x_1 y x_2 del intervalo I tales que $x_1 < x_2$, se tiene que $f(x_1) \leq f(x_2)$. Para el caso de los extremos de las funciones, las definiciones se dan en el plano local (máximo relativo) y en el plano global (máximo absoluto). Una función definida en un intervalo I alcanza un máximo absoluto en un punto $x_0 \in I$ si para todo $x \in I$ se tiene $f(x) \leq f(x_0)$. Se dice que en x_0 la función alcanza un máximo relativo, si existe una vecindad $V(x_0)$ totalmente contenida en I tal que para todo $x \in V(x_0)$ se tiene que $f(x) \leq f(x_0)$.

Teoremas sobre el signo de la derivada y sentido de variación

Esencialmente, son dos teoremas los que son útiles porque brindan criterios para realizar un estudio efectivo del sentido de variación de las funciones. Estas herramientas asocian, sobre un intervalo (por lo tanto, bajo una hipótesis topológica de un carácter profundo), el signo de la función derivada f' y el sentido de variación de la función f. Estos teoremas pueden enunciarse en los siguientes términos:

Teorema: S*ea f una función numérica definida y derivable sobre un intervalo, la función derivada f' es positiva si y solo si la función primitiva f es creciente*.

Teorema: S*ea f una función numérica definida y derivable sobre un intervalo, la función derivada f' es negativa si y solo si la función primitiva f es decreciente*

Observemos que, bajo ciertas hipótesis, los teoremas se enuncian como una doble implicación. Sin embargo, a nivel bachillerato, sólo uno de los sentidos de la implicación es demostrable (si una función es derivable y creciente en un intervalo, entonces su derivada es positiva). La demostración se basa, solo en la definición de función creciente (respectivamente, decreciente), la definición de derivada en un punto y las propiedades del límite en desigualdades.

La demostración de la afirmación recíproca se aborda hasta en el nivel licenciatura pues necesita de conocimientos matemáticos más profundos y combina propiedades infinitesimales, locales y globales. Para su demostración se requiere haber demostrado antes el teorema del valor medio para derivadas (Teorema de Lagrange, también llamado Teorema de los Incrementos Finitos), que se demuestra a su vez utilizando el teorema de Rolle. El teorema de Rolle se demuestra utilizando el Teorema de Weierstrass (que garantiza la existencia del máximo y del mínimo de una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado) y este último se demuestra directamente del principio de continuidad de los números reales.

Sin embargo, como veremos en el análisis epistemológico, históricamente no siempre fue así. Por ejemplo, el teorema de Rolle fue demostrado primero en álgebra (en 1691) para contribuir a dar solución al problema de la existencia de raíces de ecuaciones de grado arbitrario, y las primeras demostraciones del teorema que asocia el sentido de variación de una función y el signo de su derivada no utilizaban el teorema de Rolle.

4.2. Análisis epistemológico

Se concibe que los conceptos matemáticos no son objetos universales ni en el tiempo ni en el espacio, y un estudio epistemológico los provee de historicidad posibilitando así la observación de las disparidades entre el saber científico (en este caso las teorías matemáticas construidas bajo un modelo axiomático) y el saber enseñado (categorías importantes en la Teoría de la Transposición Didáctica) contribuyendo de esta manera a desterrar una de las ficciones de la escuela: la concepción de que los objetos de enseñanza son copias simplificadas, pero fieles de los objetos de la ciencia.

Lakatos (1976) realiza una notable descripción del proceso de construcción de conocimientos matemáticos, enfatizando la interacción dialéctica entre pruebas y refutaciones, entre ejemplos y contraejemplos y destacando la importancia que tienen las argumentaciones sobre las primeras ideas de prueba de conjeturas para el progreso en el descubrimiento matemático. En muchos casos, las primeras ideas de prueba de algunos resultados pueden contener elementos implícitos, apoyados en la evidencia, utilizando nociones que no están totalmente definidas, ocultando así errores y contradicciones. Para Lakatos, la existencia de estos errores y de estas contradicciones es productiva. Superar estas dificultades contribuye en el progreso de las teorías matemáticas. Proponer un contraejemplo que ponga en evidencia una contradicción puede conducir a interrogarse sobre la prueba buscando los elementos implícitos que dan lugar al contraejemplo.

En la presentación clásica (axiomática) de los resultados matemáticos, es decir en el saber científico, esta dialéctica de la prueba y la refutación, así como el andamiaje de los contraejemplos desaparece del texto. La presentación axiomática, elimina entonces la historia de los saberes: la sucesión de dificultades y preguntas que han provocado la aparición de los conceptos fundamentales, su empleo para plantear nuevos problemas, la introducción de técnicas y cuestiones nacidas de los progresos de otros sectores, el rechazo de ciertos puntos de vista que han resultado falsos o inadecuados, y las innumerables discusiones que han ocasionado.

En los siguientes párrafos se dan a conocer los análisis sobre los trabajos de Rolle, 1691; Fourier, en 1795; Lagrange, en 1797 y 1806; Cauchy, en 1823; Ampère, en 1824 y Osgood en 1912, relativos al sentido de variación de una función. Se decidió estudiar este periodo (1795 a 1912) debido a que a finales del siglo XVIII se identifican los primeros elementos de la formalización del Cálculo.

4.2.1. Trabajos de Rolle

El teorema de Rolle que actualmente establece que si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el intervalo abierto (a, b) y que cumple que $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Originalmente, este teorema fue publicado en *Traité de'Algebre* de 1690 sin ninguna relación con el estudio del cálculo, con el título de "Método de las Cascadas" que consiste en someter una ecuación a un proceso de "preparación"; de este modo, dada una ecuación polinómica $f(x) = 0$, Rolle define una cierta multiplicación de la función $f(x)$ por una progresión e iguala a 0, así obtiene lo que el denomina una cascada. Aunque su método es válido para cualquier progresión, solía utilizar la progresión 0, 1, 2, 3,... Después de la multiplicación de cada término de $f(x)$ por el correspondiente término de la progresión, la expresión resultante se dividía por x e igualaba el cociente a cero.

Es decir, dada

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0$$

Al multiplicar cada término por 0, 1, 2, 3 …, respectivamente, obtenemos

$$0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1x + 2 \cdot a_2x^2 + \cdots + (n-1) \cdot a_{n-1}x^{n-1} + n \cdot a_nx^n = 0$$

o lo que es lo mismo

$$a_1 + 2a_2x + \cdots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1} = 0$$

Observemos que este proceso es lo que hoy nosotros conocemos como la derivada de $f(x)$ igualada a cero, $f'(x) = 0$, pero obtenida de forma algebraica.

Reiterando este proceso se van obteniendo las cascadas sucesivas, hasta llegar a la primera cascada de la forma $ax + b = 0$, que se resuelve sin dificultad.

Analicemos el siguiente ejemplo del método de cascadas, tomado de *Traité* de'*Algèbre,* (pp.133-134):

$$x^4 - 24x^3 + 198x^2 - 648x + 473 = 0$$

$$4x^3 - 72x^2 + 396x - 648 = 0$$

$$12x^2 - 144x + 396 = 0$$

$$24x - 144 = 0$$

El proceso de localización de raíces se inicia del siguiente modo: de la última cascada, la ecuación de primer grado obtiene la raíz, esto es $x = 6$. Toma la penúltima cascada, considera el mayor coeficiente negativo, en este caso -144, toma su valor absoluto, lo divide por el coeficiente de la potencia mayor, suma 1 y redondea por exceso si es necesario, esto es $\frac{144}{12} + 1 = 13$, por lo que obtiene valores $0, 6\ y\ 13$ como "límites" que acotan cada una de las raíces de la penúltima ecuación.

El siguiente paso es realizar una estimación de las raíces. En este ejemplo Rolle comienza tomando como primera aproximación el valor medio entero obtenido entre $6\ y\ 13$, esto es 9, pero como en $6\ y\ 9$ el polinomio toma valores con signos opuestos en la ecuación, $12(6)^2 - 144(6) + 396 < 0$ y $12(9)^2 - 144(9) + 396 > 0$, sabe que la solución está en medio. Repite el proceso, y ahora toma un valor entero intermedio entre $6\ y\ 9$, esto es 8. Y siguiendo con este proceso llega a considerar que la raíz está comprendida entre $7\ y\ 8$. Finalmente se queda con 7 al estimar que es una buena aproximación de la raíz. Realiza el mismo proceso con los límites iniciales $0\ y\ 6$ llegando finalmente a que 4 es una aproximación de otra raíz.

Ahora toma la siguiente cascada, $4x^3 - 72x^2 + 396x - 648 = 0$. Repitiendo el mismo proceso para determinar los límites, calcula el "límite" superior de las raíces, $\frac{648}{4} + 1 = 163$ y de este modo obtiene que las raíces están comprendidas entre los números $0, 4, 7\ y\ 163$ al considerar 0 como el menor por ser todas positivas, 163 como la mayor y $4\ y\ 7$, las intermedias por ser las raíces de la cascada anterior.

Aplicando el mismo proceso de aproximación, Rolle llega a calcular que $3, 6\ y\ 9$ son las raíces de la tercera cascada. Esto conduce a que las raíces del polinomio están comprendidas entre los valores $0, 3, 6, 9\ y\ 649$ que son los "límites" de las raíces de $x^4 - 24x^3 + 198x^2 - 648x + 473 = 0$. Usando su proceso de aproximación, llega a encontrar que 1 es la raíz exacta, y después indica que $6, 8\ y\ 10$ son raíces aproximadas.

En el caso de que no todas las raíces sean positivas, Rolle realiza una transformación previa basada en el cambio de variable $y = x - h$, donde h es un número suficientemente grande para hacer que todas las raíces sean positivas.

Posteriormente el teorema es demostrado en un libro sobre Álgebra y Geometría, titulado *Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalités de tous les degrés, suivie de deux autres méthodes, dont la première donne les moyens de résoudre ces mêmes égalités par la géométrie, et la seconde pur résoudre plusiers questions de Diophante qui n'ont point été résolues* en 1691, para contribuir a dar solución al problema de la existencia de raíces de ecuaciones de grado arbitrario.

Es importante precisar, que las primeras demostraciones del teorema que asocia el sentido de variación de una función y el signo de su derivada no utilizaban el teorema de Rolle. La transición de este último teorema desde el álgebra hacia el Análisis Matemático tiene su origen en la genialidad de Euler en su obra *Institutiones calculi differentialis* en 1755, donde por primera vez es expresado en términos del lenguaje de cálculo (Suárez, 2011, p.46; Suso y Velazco, 2013, p. 56).

> *Dado que entre dos raíces reales cualesquiera de la ecuación $z = 0$ este es uno de los casos, la función z alcanza un máximo o mínimo, se deduce que si la ecuación $z = 0$ tiene dos raíces reales, entonces la ecuación $\frac{dz}{dx} = 0$ tiene necesariamente una raíz real. Igualmente, si la ecuación $z = 0$ tiene tres raíces reales, entonces la ecuación $\frac{dz}{dx} = 0$ sin duda tiene dos raíces reales. Y, en general, si la ecuación $z = 0$ tiene m raíces reales, la ecuación $\frac{dz}{dx} = 0$ necesariamente tiene por lo menos (m - 1) raíces.[1] (Euler 1755, p. 660-661)*

Esta presentación del teorema de Rolle por Euler es bastante diferente a la de sus predecesores, ya que por primera vez es presentado con la ayuda del cálculo, sin necesitar del método de las cascadas, aunque implícitamente se sigue manteniendo en el contexto de las ecuaciones polinómicas. Posteriormente, Lagrange y Cauchy obtuvieron sus teoremas del valor medio aplicando el teorema de Rolle a diversos tipos de funciones.

4.2.2. Trabajos de Fourier.

Una de las primeras evidencias de la relación entre el signo de la derivada y el sentido de variación de una función, la encontramos en los trabajos de Joseph Fourier quien entre finales de 1795 e inicios de 1798 imparte cursos regulares en la Escuela Politécnica. El contenido de esos cursos es conocido gracias a las notas manuscritas de Charles Donop, alumno de la primera promoción (el manuscrito Vitt. Em 1509 que contiene las notas de curso de Donop perteneció al matemático italiano Vito Volterra y se encuentra actualmente en la Biblioteca de la Academia del Lincei, en Roma. Fue editado en 1989 por Anne-Marie Lorrain y citado posteriormente por Renaud (2017). Este curso de Fourier puede ser considerado como el

[1] Quia inter binas quasuis aequationis $z = 0$ radices reales datur vnus cafus, quo functio z fit maximun vel mínimum; fquitur fi aequatio $z = 0$ duas habeat radices reales, tum aequationem $\frac{dz}{dx} = 0$ neceffario vnam radicem habituram effe realem. Pariter fi aequiatio $z = 0$ tres habeat radices reales, tum aequatio $\frac{dz}{dx} = 0$ certo duas habebit radices reales. Atque generatim fi aequatio $z = 0$ habeat m radices reales, neceffe eft vt aequationis $\frac{dz}{dx} = 0$ ad mínimum fint $m - 1$ radices reales.

verdadero primer curso regular de Análisis impartido en la Escuela Politécnica, a causa de la dificultad del curso de Lagrange reservado a los alumnos más avanzados.

Fourier, como Lagrange, expresa su deseo de un retorno al rigor de la antigüedad y su rechazo de una metafísica del cálculo diferencial:

> *Es de esperar que los geómetras modernos lleven a las matemáticas a ese punto de perfección en el que los métodos de los infinitos, los indivisibles, los inconmensurables, las últimas razones, las fluxiones, darán paso a las definiciones geométricas y rigurosas, como en la antigüedad, de suerte que estos sofismas desaparezcan ante la antorcha luminosa de la sana geometría, irán a refugiarse en las regiones oscuras de la metafísica*.

Fourier define el límite a la manera de D'Alembert: "*El límite de una cantidad variable es el término en el que esta cantidad se aproxima siempre y tan cerca como se quiera, sin que pueda llegar a ella*". Así entonces, Fourier rompe doblemente con la enseñanza de Lagrange: elige el método de los límites por principio y reinscribe este cálculo en una relación inmediata con la geometría.

La búsqueda de los máximos y mínimos es abordada por Fourier en 1795 por consideraciones puramente geométricas que le permiten obtener la condición necesaria para la obtención de un extremo. Reproduce enseguida sobre una misma figura la curva de la función y "la curva de las inclinaciones", es decir, la de la función derivada (sobre la **Figura 14**, al punto M de la curva de la función, pone $MR = 1$; SR es entonces la tangente del ángulo SMR que él dibuja en P para obtener el punto correspondiente de la curva de las inclinaciones).

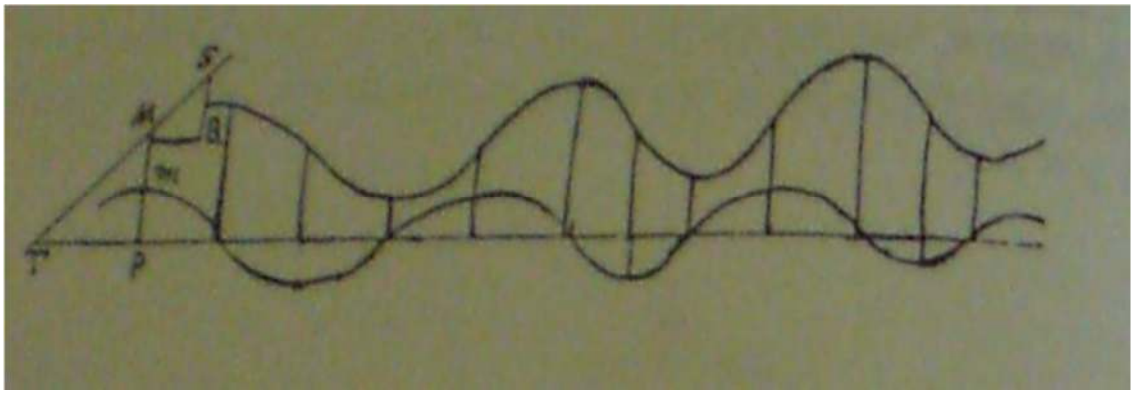


Figura 14. Curva de la función y la curva de las inclinaciones. Tomado de Renaud (2017).

Observa así que a un extremo de la curva de las inclinaciones corresponde un punto de inflexión de la curva de la función. Reporta enseguida la "2ª curva de las inclinaciones (curva que se pudiera denominar la curva segunda **Figura 15**)" para observar "que si la 1ª curva es convexa, la segunda tiene sus ordenadas crecientes y la 3ª las tiene positivas y si la 1ª es cóncava, la segunda tiene sus ordenadas decrecientes y la 3ª las tiene negativas".

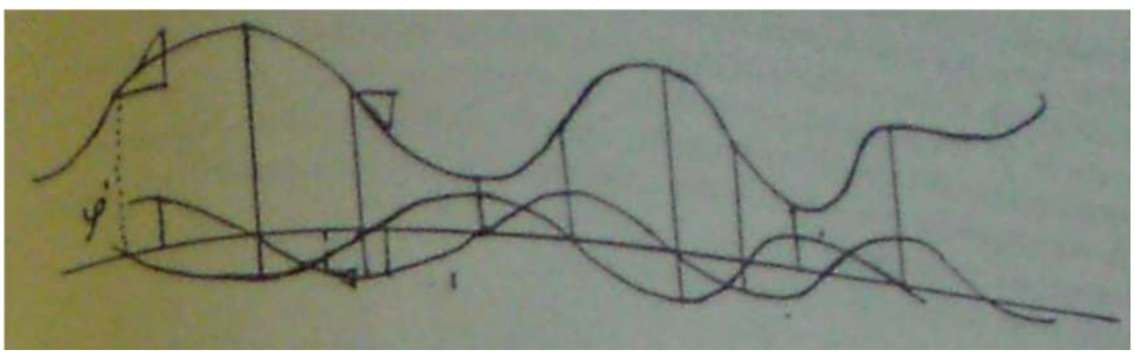


Figura 15. Curva de la función, primera y segunda curva de las inclinaciones de Fourier. Tomado de Renaud (2017).

Después de esta introducción geométrica, la búsqueda de los extremos es tratada "de manera puramente analítica" utilizando el teorema de Taylor.

Los elementos del cálculo diferencial que propone Fourier son entonces lejanos del cálculo de funciones de Lagrange incluso si el desarrollo de una función en serie de potencias sigue siendo la propiedad fundamental.

4.2.3. Trabajos de Lagrange.

En su obra *Teoría de las funciones analíticas que contiene los principios del cálculo diferencial desprovistos de toda consideración de infinitamente pequeños o de evanescentes, de límites o de fluxiones y reducidos al análisis algebraico de las cantidades finitas*[2], Lagrange (1797) plantea la necesidad de fundamentar el análisis matemático sobre una base rigurosa. Como se advierte en el título y en el prefacio de la obra mencionada, Lagrange rechazaba las nociones de cantidades infinitamente pequeñas o evanescentes, la noción de límite y la de fluxiones como punto de partida de una exposición sistemática y rigurosa del análisis matemático, poniendo como noción fundamental al desarrollo de una función en una serie de la forma:

$$"f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \&c"$$

donde p, q, r,… son también funciones de x. Lagrange expone procedimientos algebraicos generales para realizar estos desarrollos e ilustra con diferentes ejemplos cómo realizarlos.

Evadiendo la noción de límite, define entonces a la derivada de una función $f(x)$, como el coeficiente del factor i en este desarrollo, es decir como $f'(x) = p$. Para las derivadas de órdenes superiores da definiciones similares.

En esta obra, Lagrange enuncia y demuestra un "lema general" (p.45) que necesita para determinar cotas para el residuo del desarrollo de orden $n-1$, es decir, cuando se tiene una función que es n veces derivable, lo que corresponde, en términos actuales, a establecer la desigualdad de Taylor-Lagrange. Este lema lo enuncia y lo demuestra como sigue:

> *Si una función prima de* z *tal que* $f'z$ *es siempre positiva para todos los valores de* z*, desde* $z = a$ *hasta* $z = b$*,* b *siendo* $> a$*, la diferencia de las funciones primitivas*

---

[2] Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel dégages de toute considération d'infiniment petits ou de'évanouissans, de limites ou de fluxions et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies (1797) en el 9º cuaderno del Journal de l'École Polytecnique que consta de las lecciones dadas por Lagrange en esta escuela de 1795 a 1796.

que corresponden a estos dos valores de z, a saber, $fb - fa$, será necesariamente una cantidad positiva.[3]

Demostración: *Consideremos la función $f(z+i)$, cuyo desarrollo es $fz + if'z + i22f''z + \&c.$, hemos visto que siempre puede tomarse la cantidad i suficientemente pequeña para que un término cualquiera de esta serie sea más grande que la suma de todos los términos que le siguen (*afirmación que había demostrado previamente*). Así, el término $if'z$ podrá hacerse más grande que el resto de la serie; por consecuencia, si $f'z$ es una cantidad positiva, podrá tomarse i positivo y suficientemente pequeño para que toda la serie $if'z + i22f''z + \&c$ tenga necesariamente un valor positivo; pero esta serie es igual $f(z+i) - fz$; por lo tanto, si $f'z$ es una cantidad positiva, se podrá tomar por i una cantidad positiva y suficientemente pequeña para que la cantidad $f(z+i) - fz$ sea necesariamente positiva.*

Pongamos, sucesivamente, en lugar de z las cantidades $a, a+i, a+2i, a+3i, \&c., a+ni$, resultará de ello que se puede tomar i positivo y suficientemente pequeño para que todas las cantidades $f(a+i) - fa, f(a+2i) - f(a+i), f(a+3i) - f(a+2i)$, hasta $f[a+(n+1)i - f(a+ni)]$, sean necesariamente positivas, si las cantidades $f'a, f'(a+i), f'(a+2i), \&c$, hasta $f'(a+ni)$ lo son. Por lo tanto, también en este caso, la suma de las primeras cantidades, es decir, la cantidad $f[a+(n+1)i] - fa$.

Hagamos ahora $a+(n+1)i = b$, se tendrá $i = b - an + 1$, y se concluirá que la cantidad $fb - fa$ será necesariamente positiva, si todas las cantidades $f'a, f'(a+b-an+1), f'(a+2(b-a)n+1), f'(a+3(b-a)n+1), \&c.$, hasta $f'(a+n(b-a)n+1)$; son positivas, tomando n tan grande como se quiera.

Por lo tanto, con mayor razón, la cantidad $fb - fa$ será positiva, si $f'z$ es siempre una cantidad positiva, dando a z todos los valores posibles desde $z = a$

[3] *Si une fonction prime de z telle que $f'z$ est toujours positive pour toutes les valeurs de z, depuis $z = a$ jusqu'à $z = b$, b étant $> a$, la différence des fonctions primitives qui répondent à ces deux valeurs de z, savoir, $fb - fa$, será nécessairement une quantité positive.*

hasta $z = b$, *puesto que entre estos valores se encontrarán necesariamente los valores* $a, a + b - an + 1, a + 2(b - a)n + 1, \&c., a + n(b - a)n + 1$, *tomando* n *tan grande como se quiera.*

Como podemos observar, este lema demostrado por Lagrange, es la primera versión del teorema que vincula la derivada con el sentido de variación de una función. Aunque no utiliza la terminología de función creciente ni da definición alguna, sí demuestra, a partir de la hipótesis de que la derivada es positiva, la implicación $b > a \Rightarrow fb - fa > 0$ (o sea $f(b) > f(a)$). Para la demostración de este lema, Lagrange evade utilizar la noción de límite y utiliza otro "principio básico" enunciado y demostrado casi al inicio de su obra (p. 12), el cual "se debe ver […] como uno de los principios fundamentales de la teoría" que es el siguiente: en el desarrollo en serie de una función, se puede tomar siempre i suficientemente pequeño para que un término cualquiera sea más grande que la suma de los términos que le siguen.

Años más tarde, en la novena lección de Lecciones sobre el Cálculo de funciones (Lagrange, 1806) titulada *De la manera de tener los límites del desarrollo de una función, cuando se tiene sólo un número finito de términos*, Lagrange, con el mismo propósito de encontrar cotas para el residuo de un desarrollo polinómico de orden $n - 1$, establece primero un principio general el cual anuncia que será útil en varias ocasiones. Este principio se enuncia en los siguientes términos (p. 89):

> *Una función que es nula cuando la variable es nula tendrá necesariamente, mientras que la variable crezca positivamente, valores finitos y de mismo signo que aquellos de su función derivada, o de signo opuesto si la variable crece negativamente, mientras que los valores de la función derivada conservarán el mismo signo y no se volverán infinitos*[4].

Si se analiza detenidamente, se verá que este principio es equivalente al lema anterior (dado en 1797). Por razones de espacio, no transcribiremos íntegramente aquí la

[4] Une fonction qui est nulle lorsque la variable est nulle aura necessairement, pendant que la variable croitra positivement, des valeurs finies et de meme signe que celles de sa fonction derivee, ou de signe oppose si la variable croit negativement, tant que les valeurs de la fonction derivee conserveront le meme signe et ne deviendront pas infinies.

demostración y nos limitaremos con explicar la estrategia que utiliza. Para su demostración, Lagrange considera una función $\varphi(z) = f(x+z) - f(x)$ en la cual se cumple que $\varphi(0) = 0$, valiéndose del desarrollo de la función f,

$$f(x+i) = f(x) + if'(x) + \frac{i^2}{2!}f''(x) + \cdots,$$

expresa $f(x+i)$, como

$$f(x+i) = f(x) + i(f'(x) + V),$$

donde V es una función que se anula cuando $i = 0$. Tomando entonces una cantidad D tan pequeña como se quiera, afirma que se puede dar un i suficientemente pequeño para que el valor de V quede acotado entre D y $-D$ lo que le lleva a acotar $f(x+i) - f(x)$ entre las cantidades $i(f'(x) \pm D)$. Como este procedimiento se puede aplicar a cualquier valor de x, toma entonces los valores $x+i$, $x+2i$, $x+3i,\ldots$, $x+(n-1)i$, deduce, por un procedimiento algebraico, que la expresión $f(x+ni) - f(x)$, estará acotada por las cantidades $if'(x) + if'(x+i) + if'(x+2i) + \cdots + if'(x+(n-1)i) \pm D$.

De aquí, tomando D (abstracción hecha de su signo) más pequeña que

$$\frac{f'(x) + f'(x+i) + f'(x+2i) + \cdots + f'(x+(n-1)i)}{n}$$

acota la cantidad $f(x+ni) - f(x)$ entre cero y la suma $2i(f'(x) + f'(x+i) + f'(x+2i) + \cdots + f'(x+(n-1)i))$. Tomando entonces P como la mayor (positiva o negativa) de las cantidades $f'(x), f'(x+i), f'(x+2i), \ldots, f'(x+(n-1)i)$, acota $f(x+ni) - f(x)$ entre cero y $2niP$.

Tomando $z = ni$ (pues i se puede tomar tan pequeña como se quiera y n tan grande como se quiera), se tendrá que $\varphi(z) = f(x+z) - f(x)$ estará acotada entre 0 y $2zP$. Obsérvese además que $\varphi'(z) = f'(x+z)$.

Se concluye entonces que si $f'(x+z)$ tiene constantemente valores finitos y de mismo signo, desde $z = 0$, y que P es el más grande de esos valores (abstracción hecha del signo), la función $\varphi(z)$ estará acotada entre 0 y $2zP$; por consecuencia tendrá siempre también valores finitos y del mismo signo que la función derivada en caso de que z sea positiva, o de signo diferente en caso de que z sea negativa.

En términos intuitivos esto lleva a concluir que si z va creciendo, tomando valores positivos, $\varphi'(z) = f'(x + z)$ y $\varphi(z) = f(x + z) - f(x)$ serán ambas positivas (lo que significa que $f(x)$ irá creciendo) o ambas negativas (lo que significa que $f(x)$ irá decreciendo).

Aunque, como hemos dicho, Lagrange rechazaba la idea de Límite para fundar en ella demostraciones rigurosas ("no es lo suficientemente clara para servir de principio a una ciencia cuya certidumbre debe estar fundada sobre la evidencia"), vemos, sin embargo, que en las dos demostraciones (la de 1797 y la de 1806) otorga un lugar legítimo a los aspectos numéricos, en los cuales las cuestiones de convergencia y de acotación del error son centrales (Chorlay, 2014). Aún más, vemos en la demostración que, aunque no desee dar una definición de la derivada a partir de la noción de límite, utiliza argumentos en los cuales esta idea subyace al utilizar frases como "siempre se podrá dar a i un valor tal que el valor correspondiente de V, abstracción hecha del signo, sea menor que una cantidad dada, y que para los valores menores de i el valor de V sea también menor".

La demostración de Lagrange (1797) reposa sobre la afirmación siguiente. En la expresión

$$f(x + i) = fx + i(f'x + V)$$

donde V es una función de x y de i nula para $i = 0$, "es claro que haciendo crecer i por grados insensibles desde cero, el valor de V crecerá también insensiblemente desde cero, sea en más o sea en menos, hasta cierto punto" (p. 87). Leemos aquí, sin que aparezca la noción de continuidad de una función, una función continua, suponiéndola, en el lenguaje actual, monótona a trozos.

Por otro lado, en la actualidad, el teorema que liga el signo de f' y el sentido de variación de f, se enuncia y se demuestra con la hipótesis de que el dominio es un intervalo. Este hecho Lagrange lo expresa de otra manera, limitando la validez del teorema a los dominios en los que ni la función ni su derivada se vuelven infinitas. Incluso después de la demostración, siente la necesidad de ilustrar que esta hipótesis no es superflua presentando un contraejemplo al enunciado que se obtiene al suprimirla. En efecto, él presenta la función $y = \frac{1}{a-z} - \frac{1}{a}$, donde a es una constante positiva (p. 93). Se tendrá $y = 0$ cuando $z = 0$ y su derivada será $y' = \frac{1}{(a-z)^2}$. Este valor es siempre positivo, para cualquier valor de z; sería necesario entonces que el valor de y fuera siempre positivo, lo cual no es cierto, porque tomando z más grande que a, y se vuelve negativo.

"Según el principio que acabamos de establecer (dice Lagrange), el valor de y no necesariamente será positivo salvo cuando la función derivada $\frac{dy}{dx}$ no sea infinita en el alcance (étendue) del valor de z. Ahora bien, al ser $\frac{dy}{dx}$ igual a $\frac{1}{(a-z)^2}$, se vuelve infinita cuando $z = a$. Por lo tanto, los valores de y serán necesariamente positivos desde $z = 0$ hasta $z = a$; pero ellos podrán no serlo cuando $z > a$, aunque las funciones derivadas $\frac{1}{(a-z)^2}$ sean siempre positivas".

Una situación interesante en esta secuencia de resultados, es que, a partir de los teoremas mencionados anteriormente, Lagrange demuestra el teorema que ahora se conoce como el Teorema de los incrementos finitos (o teorema de Lagrange) y, en la actualidad, es este teorema el que sirve como base para demostrar el teorema que vincula el signo de la derivada con el sentido de variación de la función.

4.2.4. Trabajos de Cauchy

Al igual que Fourier y a diferencia de Lagrange, Cauchy fundamenta sus trabajos de rigorización del análisis en la noción de límite. En la tercera lección de su libro *Résumé des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal* (1823), Cauchy da la siguiente definición de la derivada de una función:

> *Cuando una función $y = f(x)$ permanece continua entre dos límites dados de la variable x, y se le asigna a esta variable un valor comprendido entre los dos límites de los que se trata, un incremento infinitamente pequeño, atribuido a la variable, produce*

un incremento infinitamente pequeño de la función misma. Por consecuente, si hacemos $\Delta x = i$, los dos términos del cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

Serán cantidades infinitamente pequeñas. Pero, mientras que estos dos términos se aproximen indefinidamente y simultáneamente al límite cero, el cociente mismo podrá converger a otro límite, sea positivo o negativo. Este límite, cuando existe, tiene un valor determinado, para cada valor particular de x; pero varía con x [...] Para indicar esta dependencia, damos a la nueva función el nombre de función derivada, y se le designa, con la ayuda de un acento, por la notación y' o $f'(x)$.

(p. 9)

La sexta lección la dedica a la presentación de problemas que se resuelven a través de las derivadas de las funciones de una sola variable. El primer problema presentado, corresponde al resultado que vincula el signo de la derivada con el sentido de variación de una función y lo enuncia y resuelve en los siguientes términos:

***1er. Problema**. Suponiendo que la función $y = f(x)$ sea continua respecto a x en la vecindad del valor particular $x = x_0$, se pide si, a partir de este valor, la función crece o disminuye, mientras que se hace crecer o disminuir la variable misma.*

***Solución**. Sean Δx, Δy los incrementos infinitamente pequeños y simultáneos de las variables x y y. La razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tendrá por límite $\frac{dy}{dx} = y'$. Se debe concluir que, para valores numéricos muy pequeños de Δx y para un valor particular de x_0 de x, la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ será positiva si el valor correspondiente de y' es una cantidad positiva y finita, negativa si este valor de y' es una cantidad finita pero negativa. En el primer caso, siendo del mismo signo las diferencias infinitamente pequeñas Δx, Δy, la función crecerá o disminuirá a partir de $x = x_0$, al mismo tiempo que la variable x. En el segundo caso, siendo de signo contrario las diferencias infinitamente* *pequeñas, la función crecerá si la variable x disminuye, y decrecerá si la variable aumenta.*

Siendo admitidos estos principios, concebimos que la función $y = f(x)$ permanece continua entre dos límites dados $x = x_0$, $x = X$. Si se hace crecer a la variable x para grados insensibles desde el primer límite hasta el segundo la función y irá creciendo todas las veces que su derivada, siendo finita, tendrá un valor positivo (...).

(Cauchy, 1823, p.37)

Como sabemos, el teorema es válido, por lo que ningún contraejemplo puede serle opuesto. Sin embargo, la demostración dada por Cauchy no es la misma que conocemos actualmente y que abordamos en nuestros cursos de análisis de la universidad. Analicemos detenidamente su contenido. Recordemos que, según Lakatos (1976) las pruebas pueden ser criticadas de varias maneras: por ejemplo, una prueba puede reposar sobre un lema erróneo, susceptible de ser invalidado por lo que Lakatos llama un contraejemplo *local*; se puede detectar en una prueba la presencia de Lemas ocultos, que necesitan ser explicitados y establecidos; se puede también criticar una demostración sin cuestionar su validez, considerando que no es "aclarante", que le falta "generalidad", "simplicidad", etc. (Chorlay, 2014).

En el caso de la demostración dada por Cauchy podemos destacar que en ella intervienen diferentes puntos de vista. Primero, un paso de lo infinitesimal (la positividad de $f'(x_0)$) a lo local (de la positividad de $f'(x_0)$ deduce la positividad de $\Delta y/\Delta x$ para valores muy pequeños de Δx). Después pasa de lo local a lo global sobre un intervalo. En el paso de lo infinitesimal a lo local, hoy en día sabemos que no es posible deducir el crecimiento de f en una vecindad de x_0, del hecho de que $f'(x_0)$ sea positivo. Para ello, exhibamos el siguiente contraejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En efecto, puede demostrarse que esta función definida, continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ satisface que $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$, sin embargo no es creciente, según la definición de función creciente que conocemos en la actualidad, en ninguna vecindad de 0. Esto se aprecia si se calcula la derivada en $x \neq 0$.

Lo que subyace en este "error" de Cauchy es la concepción de crecimiento que él parece tener y que se puede percibir en las últimas líneas de su demostración: "concebimos que la función $y = f(x)$ permanece continua entre dos límites dados $x = x_0$, $x = X$. Si se hace crecer a la variable x para grados insensibles desde el primer límite hasta el segundo la función y irá creciendo todas las veces que su derivada, siendo finita, tendrá un valor positivo". Esta misma situación se presenta en el teorema demostrado por Lagrange (Chorlay, 2007).

A diferencia de Lagrange, Cauchy definió en sus cursos la noción de derivada a través de la noción de límite. Al igual que Lagrange, obtiene consecuencias correctas de este aspecto, a saber: si una función de x (en este caso la tasa de variación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$) tiene en $x = x_0$ un límite estrictamente positivo, entonces es positiva sobre una vecindad de x_0. Obtiene así un resultado local en cada punto. La estrategia de demostración difiere enseguida de la de Lagrange. Este último pasaba de lo local a lo global colocando extremo a extremo entre 0 y un valor dado de z aproximaciones afines locales, después, buscando controlar el error para mostrar que el signo del valor aproximado obtenido en z era el mismo el de la función en z. La aproximación afín local no juega ningún rol en el razonamiento de Cauchy: él interpreta el resultado sobre el signo de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en una vecindad de un punto como un resultado de crecimiento (o decrecimiento) local, y pasa a lo global por un argumento cualitativo pero convincente. Es posible hacer este argumento explícito y riguroso utilizando argumentos de por sí utilizados por Cauchy en otros momentos, por ejemplo, en la demostración del teorema del valor intermedio dado en el anexo de l'Analyse Algebrique (Cauchy, 1821): supongamos la función derivada estrictamente positiva sobre un segmento (a, b), pero tal que $f(b)$, sea inferior a $f(a)$. Localizamos la situación por intervalos encajados: partamos el segmento (a, b) en 10 partes iguales, existen dos valores sucesivos tales que la imagen de la más pequeña es superior a aquella de la más grande; partamos este nuevo segmento en 10 partes iguales etc. En el punto común a todos los segmentos encajados se obtiene una contradicción con la positividad estricta del número derivado. Obviamente, este argumento supone la completitud de $\mathbb{R}$ siempre implícita en Cauchy (Chorlay, 2014).

En las pruebas dadas por Lagrange y Cauchy, se vislumbra que ambos tienen concepciones implícitas de lo que es una función creciente (nunca dan una definición), pero éstas no coinciden exactamente. La concepción de Lagrange es más cercana a la que encontramos actualmente en los libros de texto de nivel superior, pues a partir de la hipótesis de la positividad de la derivada y de la desigualdad $b > a$, deduce que la diferencia $f(b) - f(a)$ es positiva.

Por otro lado, si a la definición implícita de Cauchy de una función creciente le aplicamos los conceptos de la matemática moderna esta quedaría formulada de la siguiente manera: una función f definida en un intervalo I es una función creciente, si para cualquier elemento a de I, existe una vecindad $V(a)$ tal que para cualquier x en $V(a)$, el orden entre $f(a)$ y $f(x)$ es el mismo que entre a y x. La definición de Lagrange es global y puntual y se refiere a dos puntos dados (arbitrariamente, y de manera independiente); en la definición de Cauchy, las propiedades locales se mantienen en una vecindad de cada punto dado arbitrariamente. Se puede demostrar, no sin dificultad, que ambas definiciones son equivalentes desde un punto de vista matemático. Sin embargo, según Chorlay (2007) difieren significativamente, tanto desde un punto de vista epistemológico (en el que, por ejemplo, se pone de relieve la diferencia entre propiedades locales y globales), como desde un punto de vista cognitivo.

4.2.5. Trabajos de Ampère

Al inicio del segundo capítulo de su texto *Précis des leçons sur le calcul différentiel et le calcul intégral* (1824), Ampère da la definición de una función continua de la siguiente manera:

> *Cuando haciendo crecer o decrecer por grados insensibles una variable independiente, desde un valor determinado hasta otro, una función de esta variable crece o decrece también por grados insensibles, de manera que tomando a voluntad, en el intervalo de estos dos valores, dos otros valores de la variable independiente, cuya diferencia sea tan pequeña como se quiera, la diferencia de los valores*

correspondientes de la función se vuelve también tan pequeña como se quiera, se dice que la función es continua en este mismo intervalo (p. 11)[5].

Ampère otorgaba una gran importancia a la noción de continuidad, como una consecuencia directa de las enseñanzas de Cauchy. En el caso de la definición mostrada, se trata, en el vocabulario actual, de la continuidad sobre un intervalo.

Después de haber definido la noción de continuidad, Ampère da la definición de función creciente o decreciente (recordemos que ni Lagrange ni Cauchy, definieron previamente la noción de función creciente o decreciente).

Se dice que una función continua es creciente en el intervalo de dos valores de la variable independiente, cuando ella aumenta a medida que se dan a esta variable valores cada vez más grandes, y que irá por consecuente disminuyendo, si se le dan a la misma variable valores cada vez más pequeños: se dice que la función es decreciente cuando va disminuyendo a medida que la variable independiente aumenta, y aumentando a medida que esta última disminuye. Es evidente que si y *y* Y *representan dos valores de una función de una sola variable independiente, correspondientes a dos valores* x *y* X *de esta variable, la fracción* $\frac{Y-y}{X-x}$*, al que denominamos el cociente de las diferencias de la variable y de su función, será siempre positiva cuando la función es creciente, y negativa cuando ella es decreciente.*[6]

Después de dar esta definición, Ampère agrega una condición para que una función sea continua:

---

[5] LORSQU'EN faisant croître ou décroître par degrés insensibles une variable indépendante, depuis une valeur déterminée jusqu'à une autre, une fonction de cette variable croît ou décroît aussi par degrés insensibles, de manière qu'en prenant à volonté, dans l'intervalle de ces deux valeurs, deux autres valeurs de la variable indépendante, dont la différence soit aussi petite qu'on veut, la différence des valeurs correspondantes de la fonction devient de même aussi petite qu'on veut, on dit que la fonction est continue dans ce même intervalle.

[6] On dit qu'une fonction continue est croissante dans l'intervalle de deux valeurs de la variable indépendante, quand elle aumente à mesure qu'on donne à cette variable des valeurs de plus en plus grandes, et qu'elle irait par conséquent en diminuant, si l'on donnait à la même variable des valeurs de plus en plus petites: on dit que la fonction est décroissante quand elle va en diminuant à mesure que la variable indépendante augmente, et en augmentant à mesure que cette dernière diminue. Il est évident que si y en Y représentent deux valeurs d'une fonction d'une seule variable indépendante, correspondantes à deux valeurs x et X de cette variable, la fraction $\frac{Y-y}{X-x}$, que l'on nomme *le rapport des différences de la variable et de sa fonction,* será toujours positive quand la fonction est croissante, et négative quand elle est décroissante.

Sea una función continua en cierto intervalo, si partimos este intervalo en varios otros, lo será todavía en cada intervalo parcial y admitiremos, como una segunda condición necesaria para que la función sea llamada continua, que se pueda siempre tomar estos últimos intervalos suficientemente pequeños para que sea constantemente creciente o decreciente en cada uno de ellos (p. 12).[7]

Su definición de la continuidad prepara una demostración de lo que para él es la propiedad fundamental del cálculo diferencial, a saber, la derivabilidad de una función continua. Además, este enunciado deja suponer que considera funciones que verifican la primera condición de continuidad, pero no la segunda (por ejemplo, una función del tipo $y = x \sin\frac{1}{x}$). El enunciado tiene cierta ambigüedad, sin embargo, seguidamente, escribe:

Lo que acabamos de decir y lo que va a seguir se percibe inmediatamente, cuando se traza sobre un plano una línea cuya abscisa y cuya ordenada representan las dos variables, una de las cuales es considerada como la variable independiente, y la otra como la función: entonces la continuidad de esta línea implica la de la función y recíprocamente (p. 12).

La curva que está describiendo parece verificar las dos hipótesis y excluye una función del tipo $y = x \sin\frac{1}{x}$.

4.2.6. Trabajos de Osgood

La definición actual de función creciente o decreciente la encontramos por primera vez en el año de 1912, en el libro *Lehrbuch der funktionentheorie* de W. F. Osgood; en donde se lee de manera textual:

Una función se llama monótona si, se comporta como sigue. Sean x_1 y x_2, cualesquiera dos puntos del dominio de definición y tales que $x_1 < x_2$. Entonces, sin

[7] Une fonction étant continue dans un certain intervalle, si l'on partage cer intervalle en plusieurs autres, elle le sera encore dans chaque intervalle partiel, et nous admettrons, comme une seconde condition nécessaire pour que la fonction soit appelée continue, qu'on puisse toujours prendre ces derniers intervalles assez petits pour qu'elle soit constamment croissante ou décroissante dans chacun d'eux.

excepción siempre debe tenerse $f(x_1) \leq f(x_2)$ *o siempre debe tenerse* $f(x_1) \geq f(x_2)$.[8]

Es importante mencionar el siguiente detalle: en una edición anterior a este libro, en 1907, esta definición no aparece. En la edición de 1912, la definición aparece inmediatamente después de haber demostrado, del mismo modo que se hace en la actualidad, el teorema de los incrementos finitos y de expresar la generalización del teorema como el desarrollo en una suma de potencias, expresando el resto como lo que actualmente se conoce como el resto de Lagrange.

Respecto a los hallazgos obtenidos, del sentido de variación de las funciones de variable real y la existencia de máximos y mínimos, las definiciones actuales se dan en términos de desigualdades. Además, observemos que esta definición es la que aparece en los libros de texto actuales de matemáticas y fue la culminación del análisis de funciones tomando como referencia los trabajos realizados por Fourier, Lagrange, Cauchy, Ampère hasta llegar a Osgood.

Así, la noción de crecimiento y de decrecimiento de una función de variable real, durante mucho tiempo evocada de una manera puramente narrativa (Chorlay, 2007) y que se encuentra de manera explícita por primera vez en los trabajos de Ampère, encuentra en Osgood una formulación puramente puntual adquiriendo, hasta ese momento, el estatus de una verdadera definición. La concepción que subyace en ella, es la de transformación de un conjunto ordenado en otro conjunto ordenado, de tal manera que el orden se preserva, si la función es creciente o se invierte si la función es decreciente.

4.3. Análisis didáctico

Una de las nociones que se involucran en el análisis de la variación de las funciones es la de sentido de variación, entendiendo por ello, a determinar si en un intervalo, una función es creciente o decreciente. En esta sección analizamos cómo abordan los libros de texto, principalmente los utilizados en el Nivel Medio Superior las principales nociones que se involucran en el estudio del sentido de variación de las funciones, considerando que, los

[8] Eine Funktion heißt *monoton*, wenn sie, wie folgt, beschaffen ist. Seien x_1, x_2 irgend zwei Punkte des Definitions bereichs und sei $x_1, < x_2$. Dann soll ahne Ausnahme $f(x_1) \leq f(x_2)$ sein oder aber es soll stets $f(x_1) \geq f(x_2)$ sein.

libros de texto asumen una parte fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje. El análisis estará organizado desde tres aspectos: a) Análisis del tratamiento de las definiciones, b) Análisis de los principales teoremas y resultados y c) Análisis de los procedimientos efectivos. En los textos que se han revisado, hemos encontrado diferentes formas de definir el concepto de función creciente (o decreciente), algunas de ellas contienen elementos que no se corresponden con las características esenciales de este concepto.

Para esta investigación revisamos, los siguientes libros de Cálculo Diferencial e Integral, los cuales son los más utilizados en el bachillerato y en los primeros años de la universidad: Aguilar, Bravo, Gallegos, Cerón, y Reyes, 2010; Apóstol, 1984; Arteaga y Espinoza, 2014; Ayres, 1971; Ayres y Mendelson, 2001; Contreras, 2014; Cuéllar, 2007; Cuevas, Sánchez y Aparicio, 2012; Garza, 2015; Granville, 2007; Ibañez y García, 2007; Leithold, 1992; Ortiz, 2009; Ortiz, Ortiz y Ortiz, 2011; Piskunov, 2008; Sántalo y Carbonell, 2007; Silva, 2014; Stewart, 2007; Swokowski, 1982; Valdés, 1983.

4.3.1. Análisis del tratamiento de las definiciones

Distinguimos esencialmente las siguientes definiciones de función creciente y decreciente en los diferentes libros de texto analizados:

> **Definición 1**: Una función f es creciente en un conjunto S, si para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 de S, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) \leq f(x_2)$.
>
> Una función f es decreciente en un conjunto S, si para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 de S, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) \geq f(x_2)$.
>
> **Definición 2**: Una función f se llama *creciente*, cuando a un mayor valor del argumento x corresponde un mayor valor de la función. Dicho de otro modo, f es creciente si al aumentar x, aumenta $f(x)$ y si al disminuir x, disminuye $f(x)$. De modo análogo se define la función *decreciente*.
>
> **Definición 3.** Una función es creciente en el intervalo (a, b), si $f'(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$
>
> Una función es decreciente en el intervalo (a, b), si $f'(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$

Definición 4. Se dice que una función $y = f(x)$ es creciente para $x = a$ si en un entorno de a se verifica que:

- Si $x > a$ es $f(x) > f(a)$
- Si $x < a$ es $f(x) < f(a)$

Se dice que una función $y = f(x)$ es creciente en un intervalo si es creciente en todos sus valores del intervalo.

Análisis de la Definición 1

La primera definición combina los puntos de vista puntual (se comparan imágenes aisladas) y global (cuantificador universal sobre las parejas de puntos del dominio). Sin embargo, aunque aparece explícito un solo cuantificador, en realidad se está haciendo una doble cuantificación (para cualquier x_1 elemento de S y para cualquier x_2, elemento de S), según Chorlay (2010), la cuantificación universal doble oculta en la definición, es sin duda un obstáculo importante para su comprensión.

Esta definición, se basa fundamentalmente en la idea de que una función es una aplicación o transformación entre dos conjuntos, y de esta manera, las propiedades de variación son propiedades de las aplicaciones entre dos conjuntos ordenados. De manera más precisa, una función será creciente si cualesquiera dos elementos del primer conjunto ordenado, que están en un orden determinado, se transforman, mediante la aplicación, en dos elementos del segundo conjunto ordenado y estos últimos mantienen el mismo orden que en el conjunto anterior. Será decreciente, si al transformarse, el orden se invierte. En resumen, una función será creciente si preserva el orden y será decreciente si invierte el orden.

Sin embargo, esta idea de las funciones (como aplicaciones o transformaciones abstractas entre dos conjuntos) no es abordada con profundidad en el nivel medio superior, si acaso se hace referencia a ella al inicio de la introducción del tema, cuando se ilustran los diferentes tipos de relaciones (funcionales o no) mediante diagramas de flechas. La idea de función que prevalece en las matemáticas del Nivel Medio Superior, no es aquella de ”conjunto” o de “aplicación o transformación” sino aquella (más intuitiva) de “cantidad variable” y “dependencia entre dos cantidades” en la que, una sola cantidad puede “variar” y dos cantidades x y y tienen variaciones dependientes. Se hace necesaria entonces, una estrategia de transición desde la comprensión puramente intuitiva de la variación (continua) de una única cantidad (la cual es una idea dinámica), hasta la formulación de la definición que estamos analizando, en la cual subyace una idea puramente discreta y estática, de aplicaciones o transformaciones entre los conjuntos ordenados (y no expresa en absoluto, idea alguna de "variación"). Todo lo anterior dificulta la apropiación de esta definición, incluso a largo plazo, y este hecho se hace patente, si se les pide a los alumnos, incluso de universidad, dar la definición de función creciente.

Análisis de la Definición 2:

En lo que respecta a la definición 2, más que una definición es la expresión o la explicación, en términos informales, de la idea de crecimiento y de decrecimiento acorde con la idea intuitiva de variación dinámica de las funciones que se mencionó anteriormente. Recordemos que, en matemáticas, la definición de un objeto matemático, un proceso o una relación, se hace utilizando términos que se han definido previamente o se han declarado como términos primarios no definidos, y en esta “definición”, se utilizan varios términos que no han sido definidos previamente.

Análisis de la Definición 3:

La definición 3, introduce fuertes restricciones al campo de aplicación de las funciones a las cuales se les puede considerar como crecientes o decrecientes. La primera de ellas se refiere a que condiciona a que las funciones deben estar definidas en un intervalo, mientras que en la definición 1 se consideran funciones definidas en un conjunto numérico S arbitrario. La otra restricción, más fuerte aún que la primera, es la exigencia de diferenciabilidad en los puntos interiores del intervalo dominio. Es decir, esta definición involucra propiedades infinitesimales (la derivada es una noción infinitesimal al involucrar la noción de límite) y globales (al exigir la diferenciabilidad en todos los puntos interiores del intervalo dominio). La principal desventaja, es que esta definición, deja fuera de su campo de aplicación, a muchas funciones no derivables que, tanto desde el punto de vista intuitivo, como de la definición 1 serían crecientes, pero no podrían ser clasificadas utilizando la definición 2 como criterio. En este universo restringido, puede demostrarse que las condiciones que definen el crecimiento y el decrecimiento en la definición 1, expresadas como implicaciones entre desigualdades, son equivalentes (en el sentido lógico) a las condiciones del signo de las derivadas expresadas en la definición 2. Esta demostración se hará más adelante lo cual establecerá que, la definición 2, es un caso particular de la definición 1.

Análisis de la Definición 4:

En la definición 4, se define primero el crecimiento y el decrecimiento de una función de manera local (aunque menciona que la función es creciente en un punto) y, a partir de ella, define la noción de crecimiento global introduciendo un cuantificador universal para los puntos de un intervalo. Se observa en la definición, la condición de que las funciones deben estar definidas en un intervalo, condición que es absolutamente necesaria y no es posible debilitarla más sustituyendo el intervalo por un conjunto arbitrario, pues como veremos más adelante, si el dominio es un conjunto no conexo, por ejemplo, la unión de dos intervalos disjuntos, se pueden tener funciones que satisfagan la definición pero que no sean crecientes desde el punto de vista intuitivo ni desde el punto de vista de la definición 1. Es posible demostrar, que, en un conjunto arbitrario, si una función es creciente (en el sentido de la definición 1) entonces es también localmente creciente (en el sentido de la definición 4), pero la afirmación recíproca no se cumple. Es decir, que existen funciones definidas en un conjunto arbitrario que son localmente crecientes, pero que no son globalmente crecientes. Sin embargo, en un dominio conexo, ambas definiciones son equivalentes.

Con estos antecedentes, al hacer el análisis a los textos más comunes que se utilizan para la enseñanza del cálculo en el Nivel Medio Superior (y algunos en la Universidad), obtenemos que, los libros (Apóstol, 1984; Arteaga y Espinoza, 2014; Leithold, 1992; Ortiz, 2009; Ortiz, Ortiz y Ortiz, 2011; Stewart, 2007; Swokowsky, 1982; Valdés, 1983) utilizan la definición 1 para precisar lo que significa que una función sea creciente o sea decreciente.

Es importante señalar que la mayoría de los libros que utilizan esta definición para las funciones crecientes, presentan ciertas variaciones en la redacción que consideramos pertinente señalar.

1. Solo uno de los autores (T. Apóstol), enuncia la definición en toda su generalidad, es decir, el conjunto de funciones que toma como universo, es el de aquellas cuyo dominio es un subconjunto arbitrario S de números reales. Todos los demás se sitúan en el conjunto de funciones definidas en un intervalo. Esto es justificable, por el hecho de que, posteriormente, se presentará un resultado que permitirá realizar un estudio efectivo del sentido de variación de las funciones, en el que la condición de que el domino sea un intervalo es absolutamente necesaria. Se trata del teorema que vincula, en un intervalo, el signo de la derivada con el sentido de variación de una función.
2. Algunos de los autores, presentan ejemplos de cómo determinar si una función dada es creciente o decreciente utilizando directamente la definición, sin utilizar el teorema del signo de la derivada. Se trata de los textos (Aguilar, et al., 2010; Garza, 2015; Ibáñez y García, 2007).
3. Una de las características de la definición 1 es que las desigualdades mediante las que se expresa, están ligadas por una relación de implicación, más precisamente*, si* $x_1 < x_2$*, entonces* $f(x_1) \leq f(x_2)$. En los libros de Leithold, 1992; Sowkowski, 1982; Stewart, 2007; Ortiz, 2009; Ortiz, Ortiz y Ortiz, 2011; esta implicación presenta variantes en la manera de cómo está expresada, y la enuncian como $f(x_1) \leq f(x_2)$*, siempre que* $x_1 < x_2$ o bien $f(x_1) \leq f(x_2)$*, cuando* $x_1 < x_2$. En estudios que se han hecho acerca de la enseñanza de la implicación en el Nivel Medio Superior y en los primeros años de la Universidad, se ha señalado que estas redacciones pueden dificultar la comprensión de las afirmaciones condicionales, propiciar su confusión con las equivalencias, o propiciar la confusión entre una condición necesaria y una condición suficiente. En efecto, según Fabert y Grenier (2011), en el lenguaje cotidiano, la implicación es percibida de manera diferente que en la lógica matemática. Por ejemplo, el "si … entonces…" es frecuentemente interpretado (entendido) como una equivalencia, o confundido con su recíproco. Además, en la racionalidad de todos los días, la implicación tiene características causal y temporal, que no son compatibles con la implicación matemática. En otras palabras: $A \Rightarrow B$, en la lógica común sólo tiene sentido si A está antes que B y si A es una causa de B. De aquí se desprende una dificultad extendida entre los alumnos de ciencias para reconocer que, en matemáticas, la proposición condicional "$A \Longrightarrow B$" equivale a "B es una condición necesaria para A" o que "A se realiza solo si B se realiza".

Las concepciones acerca de las implicaciones que tienen los alumnos son diferentes sobre las dos formulaciones de proposiciones condicionales: "si A entonces B", o "B si A". En resumen, los cambios de formulación tienen una gran influencia sobre la comprensión de las proposiciones condicionales y pueden provocar confusiones entre proposición directa y recíproca, o incluso equivalencia.

4. En el libro Cuéllar (2007), inmediatamente después de presentar la definición 1, ilustran gráficamente el caso de una función creciente, con la siguiente Figura 16:

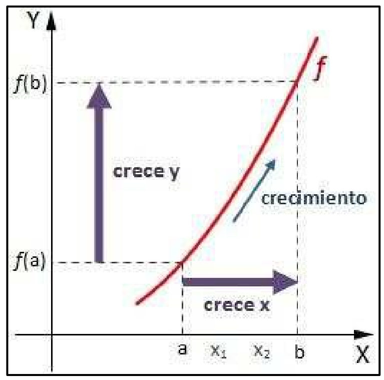


Figura 16. Ilustración gráfica de función creciente.

La definición 2 es presentada por los libros (Cuéllar, 2007; Contreras, 2014; Garza, 2015). Sin embargo, algunos de los que utilizan las otras definiciones más formales, consideran necesario explicarlas de manera intuitiva utilizan formulaciones parecidas a la de la definición 2. Es el caso, por ejemplo, de Sántalo y Carbonell, quienes después de dar la definición de función creciente a partir del crecimiento local (definición 4), explica que "una función es creciente, si al aumentar la x, aumenta también la y".

Los textos de (Aguilar, et al., 2010; Arteaga y Espinoza, 2014; Silva, 2014) utilizan como definición de función creciente, a la definición 3 e inmediatamente presentan ejemplos sobre cómo determinar el sentido de variación de una función, usando para ello el signo que tiene la derivada en un subintervalo del dominio. En casi todos los libros que definen de este modo el sentido de variación de una función, encontramos gráficas como la siguiente (**Figura 17**):

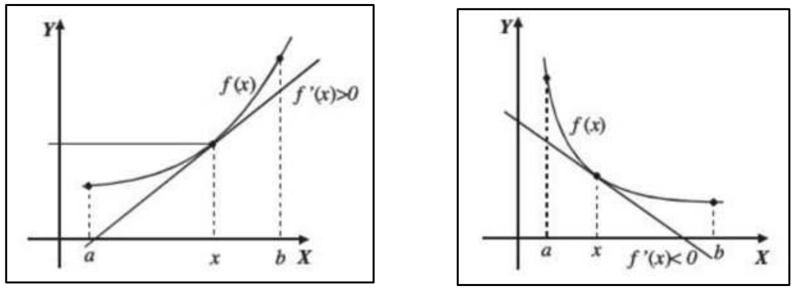


Figura 17. Función Creciente y Función Decreciente.

Haciendo alusión a la gráfica, estos libros explican que, una característica de las funciones crecientes, es que la pendiente de la tangente a la curva que representa a la función en cualquiera de sus puntos, tiene pendiente positiva, lo cual corresponde a que la derivada en ese punto es también positiva.

Finalmente, solo en el libro de Sántalo y Carbonell (2007), encontramos la definición 4, sin que presente ejemplos en los que se haga evidente los elementos que intervienen en la definición. Además, en ningún momento el autor da una definición precisa de lo que es un entorno.

4.3.2. Análisis de los principales teoremas y sus resultados.

En el grupo de textos de: (Ayres, 1971; Ayres y Mendelson, 2001; Leithold, 1992; Piskunov, 2008; Swokowski, 1982 y Valdés, 1983); respecto al análisis de los teoremas del sentido de variación de funciones, encontramos que:

- El teorema se enuncia en un solo sentido (Signo de la derivada)$\Rightarrow$(Sentido de variación). Esto no constituye ningún problema, pues es justamente la implicación que se necesita para poder analizar el sentido de variación de las funciones en los ejemplos y en los ejercicios propuestos.
- Estos textos presentan las demostraciones clásicas; es decir, lo demuestran a partir del teorema de Lagrange.
- Además, presentan explicaciones gráficas, en las que, intuitivamente pretenden hacer evidente que, en los puntos, de los intervalos en los cuales las funciones son crecientes, las rectas tangentes a las curvas que representan las funciones, tienen

pendiente positiva e inmediatamente asocian esta pendiente con la derivada de la función (**Figura 18**).

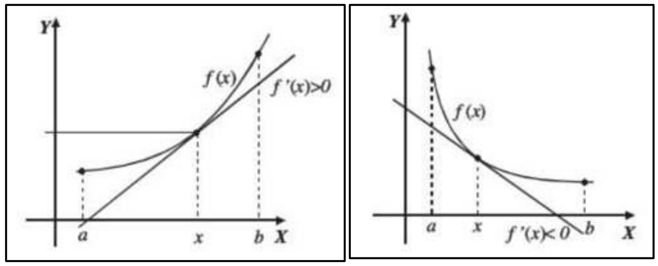


Figura 18. Rectas tangentes a las curvas de funciones.

- Los libros Contreras (2014); Ortiz (2009); Ortiz, Ortiz y Ortiz (2011) y Stewart (2007); presentan el teorema sin hacer la demostración, pero si presenta la explicación gráfica que se mencionó en el punto anterior.

En los libros de Ayres (1971) y Granville (2007), incluidos en esta categoría, el teorema se enuncia en un solo sentido. Sin embargo, las demostraciones que ambos presentan, son idénticas (salvo quizás ciertas diferencias de notación) a la que presenta Cauchy en 1823.

> *Una función $f(x)$ es creciente en el punto $x = x_0$, si, dado un $h > 0$ y suficientemente pequeño, se verifica: $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$.*
>
> *Demostrar que si $f'(x_0) > 0$, la función $f(x)$ es creciente en el punto $x = x_0$.*
>
> *Como $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) > 0$, tendremos $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} > 0$ para un $|\Delta x|$ suficientemente pequeño.*
>
> *Si $\Delta x < 0, f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$, y haciendo $\Delta x = -h$, $f(x_0 - h) < f(x_0)$. Si $\Delta x > 0$, por ejemplo $\Delta x = h, f(x_0 + h) > f(x_0)$. Es decir, $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$, que es lo establecido en la definición.*

- Hemos mencionado en el estudio epistemológico, que esta demostración contiene un paso que no es verdadero. Nos referimos al paso en el que se concluye que a partir de la positividad de f' en un punto x_0 se deduce el crecimiento de la función f en una vecindad de x_0. Como contraejemplo podemos citar la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 \sin\frac{1}{x}, & si\ x \neq 0 \\ 0, & si\ x = 0 \end{cases}$$

cuya derivada en $x = 0$ es $\frac{1}{2} > 0$ y sin embargo no es creciente en ninguna vecindad de $x = 0$.

- En el caso del texto de Ayres, en la edición de 2001 escrita en colaboración con Mendelson, este error es subsanado y se presenta la demostración clásica utilizando el teorema de los incrementos finitos de Lagrange.

En textos como: Aguilar et al. (2010); Garza (2015) e Ibáñez y García (2007) encontramos que:

- Como hemos dicho en el análisis de las definiciones, en estos textos, el teorema se enuncia como una definición.
  Una función es creciente en el intervalo (a, b)*, si* $f'(x) > 0$ *para toda* $x \in (a, b)$.
  Una función es creciente en el intervalo (a, b)*, si* $f'(x) < 0$ *para toda* $x \in (a, b)$.
- Al presentarlos como definiciones no es necesario realizar demostraciones.
- Presenta explicaciones gráficas, en donde se busca que el alumno de manera intuitiva determine la monotonía de las funciones. Este grupo de autores no enlaza de manera verbal la recta tangente de la función con la derivada; sino que lo hace de manera gráfica, presentando ilustraciones como las siguientes (**Figura 19**):

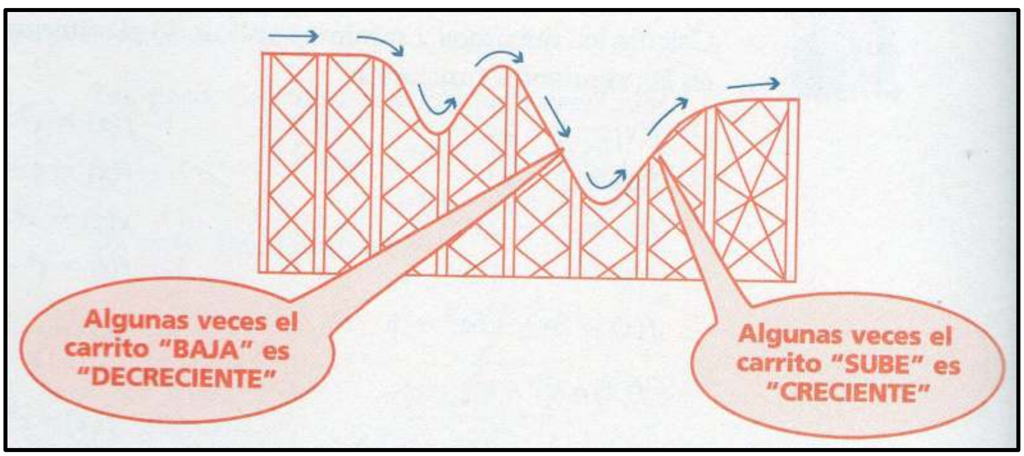


Figura 19. Explicación gráfica en los libros de texto.

Silva (2014)

- Este autor enuncia el teorema como una doble implicación y la expresa (Sentido de variación) ⇔ (Signo de la derivada). Sin embargo, no presenta demostración de ninguna de las dos implicaciones y lo enuncia específicamente en los siguientes términos:

Una función crece en un intervalo dado, si y solo si a lo largo de todo ese intervalo su derivada es positiva y'>0. Decrece si a lo largo de todo ese intervalo su derivada es negativa y'<0.

- No presenta explicaciones gráficas, pero hace la siguiente descripción para caracterizar una función creciente.

  Una función graficada se analiza de izquierda a derecha, y según la trayectoria de ésta, se definirá su forma creciente, decreciente o constante.
- Presenta tres ejemplos de funciones lineales en las que su derivada es positiva, negativa o constante, respectivamente y las identifica con su sentido de variación.

Cuéllar (2007)

- Este autor caracteriza el teorema de manera descriptiva, buscando con esto que el lector lo comprenda de manera intuitiva.

  Si dada una función $f(x)$ se tiene que $f'(x) > 0$ para cada valor de x en cierto intervalo, esto significa que la inclinación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho intervalo asciende de izquierda a derecha, por lo que el valor de $f(x)$ aumenta y decimos que dicha función es creciente en ese intervalo, esto es, que si el valor de x crece, también el valor de $f(x)$ crece.

  Si $f'(x) < 0$, entonces la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función es negativa. Esto significa que el valor de $f(x)$ decrece, o sea, al aumentar el valor de x, disminuye el valor $f(x)$
- No hace demostraciones.
- No presenta explicaciones gráficas referentes al crecimiento o decrecimiento, pero hace una representación gráfica cuando la derivada se anula (**Figura 20**), relacionando la pendiente de la recta tangente con la derivada.

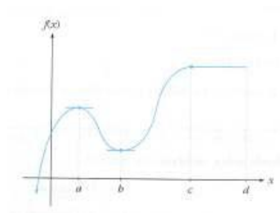


Figura 20. Representación gráfica con derivación nula

Sántalo y Carbonell (2007)

- El teorema lo enuncian en los siguientes términos:
  Si la función es creciente, el cociente de incrementos es positivo (pues los dos incrementos son siempre del mismo signo" y si la función es decreciente el cociente de incrementos es negativo (por ser los incrementos de signo contrario).
- Observamos que lo que está enunciado es solamente una de las implicaciones del teorema que estamos analizando: la que va del sentido de variación al signo de la derivada. Sin embargo, hemos dicho que no es esta la implicación la que es útil para realizar el estudio del sentido de variación de las funciones.
- A pesar de que en este nivel los alumnos poseen los conocimientos necesarios para demostrar esta implicación, los autores no presentan la demostración.
- Presenta interpretación gráfica (Ver **Figura 21 y 22**), buscando que el lector de manera intuitiva identifique el carácter creciente o decreciente a través de relacionar la pendiente de la tangente en el punto de abscisa $x = a$ es positiva y se forma un ángulo agudo. De manera análoga determina la función decreciente.

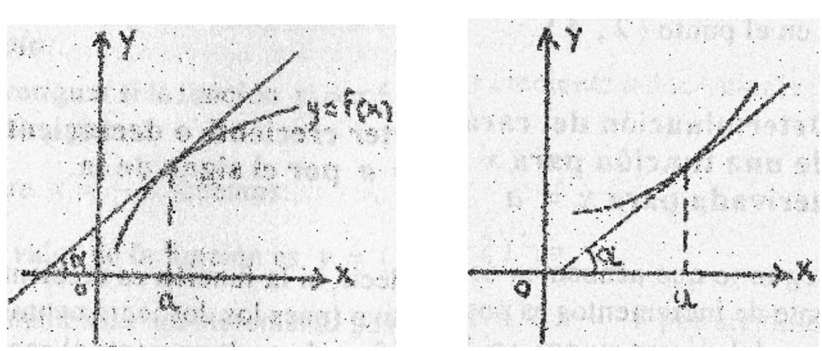


Figura 21. Representación de función creciente.

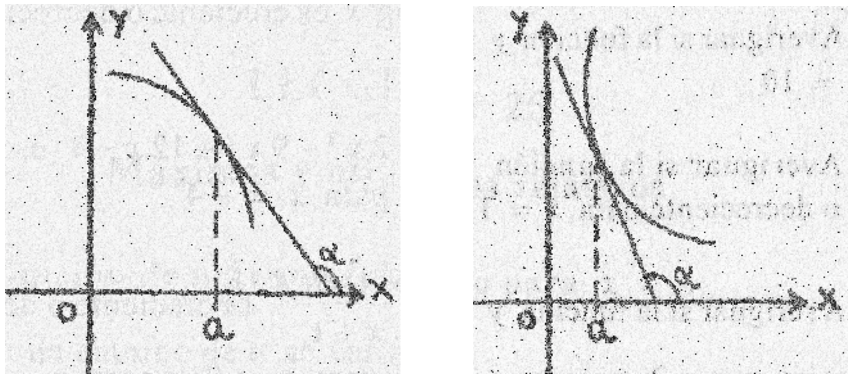


Figura 22. Representación de función decreciente.

A excepción del primer grupo de libros de texto, el resto de ellos no especifica las hipótesis que deben acompañar a este teorema; esto es, “la función debe ser continua en un intervalo [a, b]” y “diferenciable en un intervalo (a, b)”. Enunciado de esta manera (sin estas hipótesis) el teorema, en general, no se cumple; sin embargo, como los autores no presentan la demostración no sienten la necesidad de recurrir a ellas.

4.3.3. Análisis de los procedimientos efectivos

En cuanto a los procedimientos detectados en los libros de texto analizados, encontramos que de manera general la forma para determinar el sentido de variación de las funciones la basan en tres pasos:

Primer paso. Se obtiene la derivada $f'(x)$ de la función.

Segundo paso. Se obtienen los valores críticos.

Tercer paso. Se determina el signo de la derivada f' de la función f. En este tercer y último paso es donde se detectan las variaciones ya que existen por lo menos dos procedimientos observados en los libros de texto, los cuales comentamos a continuación.

Sólo dos libros de texto describen los pasos que se deben realizar para obtener el carácter creciente o decreciente:

En el libro de texto de Cuéllar (2007) encontramos los siguientes pasos:

1. *Deriva la función.*
2. *Determina los números críticos, esto es, los valores de* x *para los que* $f'(x) = 0$ *() no está definida.*
3. *Si* x_1*y* x_2 *son números críticos consecutivos, o sea, entre* x_1*y* x_2 *no hay ningún otro número crítico de* $f(x)$ *y* $x_1 > x_2$*, entonces para cualquier valor de* x *que esté entre* x_1 *y* x_2*,* f' *conserva su signo; por lo tanto, se tienen tres intervalos de prueba que son* $(-\infty, x_1), (x_1, x_2)$ *y* (x_2, ∞)*; por lo que para determinar si* $f(x)$ *es creciente o decreciente en cada uno de estos intervalos evalúa la derivada de la función para un número (número de prueba) que esté en cada intervalo. Si al evaluar resulta que* $f'(x)$ *es positiva, entonces en dicho intervalo la función es creciente; y si es negativa, entonces la función es decreciente.*

En el libro de Aguilar et al., (2010) se identifican los siguientes pasos:

1. *Se obtiene la derivada de la función.*
2. *Por definición* $f'(x) > 0$*. Y se resuelve la desigualdad.*

Se destaca que este colectivo de autores resuelve por desigualdades, pero deja al lector para que realice este proceso; así como, la determinación de los intervalos.

El resto de los textos para la determinación de la monotonía, usan una tabla donde identificamos*: los intervalos, un valor perteneciente al intervalo, la función derivada, el signo de la derivada y la conclusión o comportamiento* (creciente o decreciente) (**Figura 23**), pero no indican el tratamiento que se aplica para determinar el sentido de variación de una función. Algunos de estos autores proponen el uso de esta tabla con un método no fundamentado; dicho procedimiento consiste determinar los puntos críticos y establecer los intervalos del dominio de la función en cada uno de ellos, a partir de ahí tomar un "número de prueba", "elegir un valor", "valor menor" o "valor mayor" dentro del intervalo, el cual se sustituye en la variable independiente y se evalúa en la derivada; del resultado obtenido se toma el signo si $f'(x) > 0$ es creciente y si el signo de $f'(x) < 0$ es decreciente.

Intervalo	Se elige un valor dentro del intervalo	Se sustituye el valor en la derivada	Signo de la derivada	Conclusión
$-\infty<x<-1$	$x=-2$	$y'=4(-2)-4(-2)^3$ $y'=-8+32$ $y'=24$	$y'=+$	Creciente
$-1<x<0$	$x=-0.5$	$y'=4(-0.5)-4(-0.5)^3$ $y'=-2+0.5$ $y'=-1.5$	$y'=-$	Decreciente
$0<x<1$	$x=0.5$	$y'=4(0.5)-4(0.5)^3$ $y'=2-0.5$ $y'=1.5$	$y'=+$	Creciente
$1<x<\infty$	$x=2$	$y'=4(2)-4(2)^3$ $y'=8-32$ $y'=-24$	$y'=-$	Decreciente

Intervalo	$(-\infty, -\frac{5}{3})$	$(-\frac{5}{3}, 1)$	$(1, \infty)$
k	-2	0	2
Valor de prueba $f'(k)$	3	-5	11
Signo de $f(x)$	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de f	creciente en $(-\infty, -\frac{5}{3}]$	decreciente en $[-\frac{5}{3}, 1]$	creciente en $[1, \infty)$

Figura 23. Representación tabular para determinar la monotonía usada en los libros de texto.

Es importante mencionar que en el proceso para obtener el sentido de variación de funciones los autores hacen énfasis en el uso de raíces enteras, valores enteros consecutivos y centran su atención en el uso de la tabla mencionada anteriormente.

4.4. Análisis cognitivo.

En la búsqueda de elementos matemáticos existentes en el bagaje de conocimientos de los alumnos y como parte de los análisis preliminares de la metodología seleccionada, se aplicó un primer instrumento (Ver anexo) del cual se obtuvo información referente a los procesos de solución y estrategias emplean en relación al tema análisis de funciones. Dicho instrumento se aplicó a 14 alumnos, de primer año de Licenciatura en Matemáticas, los cuales ya contaban con un curso de cálculo diferencial. Se consideró aplicarlo a este nivel debido a que los alumnos recientemente egresaron de bachillerato, y por consiguiente ellos aplicarían elementos formales de la definición para dar respuesta a estos planteamientos sin presentarse problema alguno.

En esta etapa de los análisis cognitivos, las actividades fueron aplicadas con dos objetivos principales: 1) explorar qué conceptos y elementos matemáticos prevalecen en los alumnos sobre el estudio del análisis de funciones, aún después de haber tomado un curso de cálculo y 2) qué estrategias de solución utilizan los alumnos para resolver los cuestionamientos.

En relación al primer objetivo, consideramos como punto de partida de análisis las concepciones alternativas sobre el sentido de variación de funciones identificadas por Valero en (2003), dado que es una investigación la cual es más cercana a nuestro trabajo, a considerar:

- la concepción que considera que una función con imagen positiva es necesariamente creciente;
- la concepción de que una función tiene imagen negativa solo si es decreciente;
- la consideración de los ceros de la función como puntos de estabilización;
- la concepción de que una función tiene imagen positiva solo si sus abscisas y sus ordenadas son positivas;
- la concepción de que una función tiene imagen negativa solo si sus abscisas y sus ordenadas son negativas;
- la concepción consistente en considerar a los intervalos como si fueran puntos;
- la concepción de que, en $x = 0$, la función no crece ni decrece y
- una función es creciente si su gráfica sube, una función es decreciente si su gráfica baja, esto sin que haya coordinación entre los cambios en las abscisas y los cambios en las ordenadas.

Pregunta 1: Dominio e imagen

Los conocimientos involucrados en el primer cuestionamiento:

CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS	ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN
1. Inecuaciones. 2. Solución de ecuaciones. 3. Definición de dominio e imagen. 4. Graficación de funciones (Tabulación y propiedades)	a. Por observación y análisis de la gráfica y sus propiedades. b. Solución por inecuaciones.

Dado que se pide calcular el dominio y la imagen de una función, consideremos por dominio, el campo de existencia de una función a lo largo del eje x; es decir, si para un elemento de x, existe su correspondiente en "y". Por imagen, entenderemos que es la existencia de la función a lo largo del eje "y".

Considerando la tabla anterior y en relación a la producción de los alumnos se logró identificar y clasificar dos tipos de estrategias de solución:

- Por observación y análisis de la gráfica y sus propiedades, en esta estrategia se espera que los alumnos después de haber obtenido la gráfica realicen una revisión visual de ella, considerando el trazo de líneas verticales a lo largo de toda la función. Si estas rectas cortan en algún punto a la gráfica de la función, es porque todo ese rango corresponde al dominio.
  En cuanto a la imagen, se procede de manera similar, en donde se trazan rectas horizontales, si estas cortan a la gráfica es porque los puntos donde pasan las rectas de corte en "y" pertenecen a la imagen.
- Solución por inecuaciones, en donde se espera que el alumno a partir de obtener la primera derivada, se planteen las inecuaciones que pudieran emerger de esta función.

Análisis de los resultados: Respecto a las estrategias que los alumnos utilizan, se identifica que un 71% obtiene el resultado aceptable y lo realizan por observación y análisis de la gráfica y sus propiedades; es decir, resuelven de manera cualitativa sin presentarse solución algebraica, esto puede deberse a dos situaciones, primero que los alumnos no presentan problemas en la realización de la gráfica y que en ocasiones recurren a la tabulación como un proceso para obtener la solución (**Figura 24**) y segundo a que ese porcentaje de alumnos conoce la definición de dominio e imagen de una función aplicándolo en el desarrollo del problema (**Figura 25 y 26**).

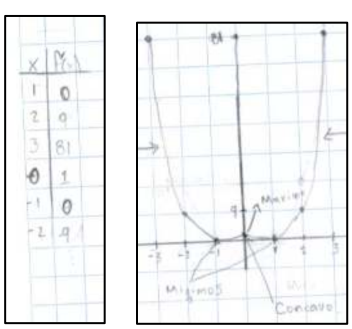


Figura 24. Tabulación y graficación.

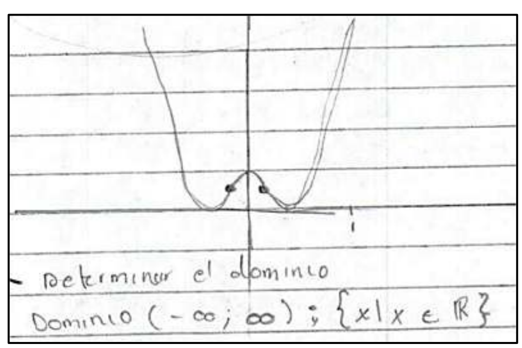


Figura 25. Uso de la definición y la gráfica.

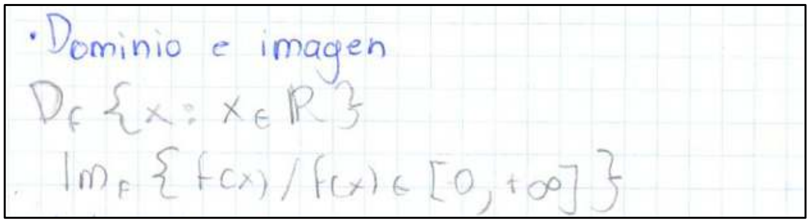


Figura 26. Uso de la definición para el dominio y la imagen.

Pregunta 2: Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Del análisis del segundo cuestionamiento se tienen:

CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS	ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN
1. Teorema del criterio de la primera derivada. 2. Derivación de funciones. 3. Solución de Ecuaciones e inecuaciones. 4. Definición de función creciente y decreciente. 5. Intervalos.	a. Análisis de la gráfica. b. Aplicando la definición. c. Aplicando el criterio de la primera derivada. d. Sustitución de puntos en la primera derivada.

Análisis de resultados de la pregunta 2: En relación a este punto se observa que sólo dos alumnos obtienen la solución aceptable. En la producción que se observa, es el uso del teorema del criterio de la primera derivada; así como, la observación y ubicación de los puntos en la gráfica (**Figura 27**). Por la solución empleada por uno de ellos, demuestra el conocimiento del uso de este teorema y la solución a través de las inecuaciones. (**Figura 28**)

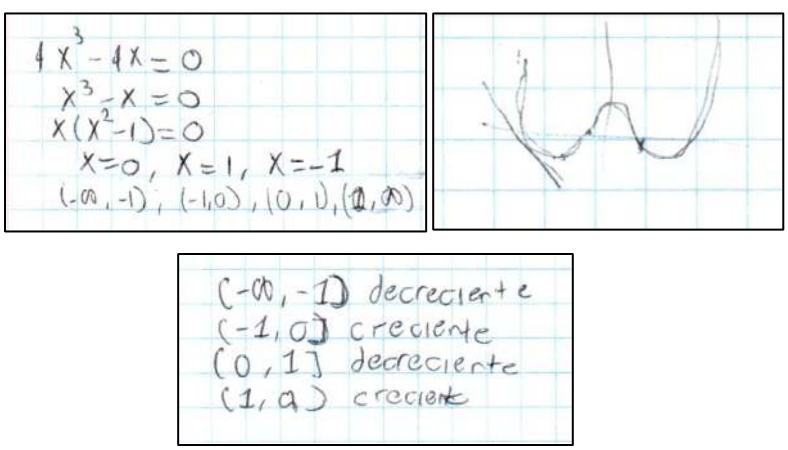


Figura 27. Producción estudiante 1.

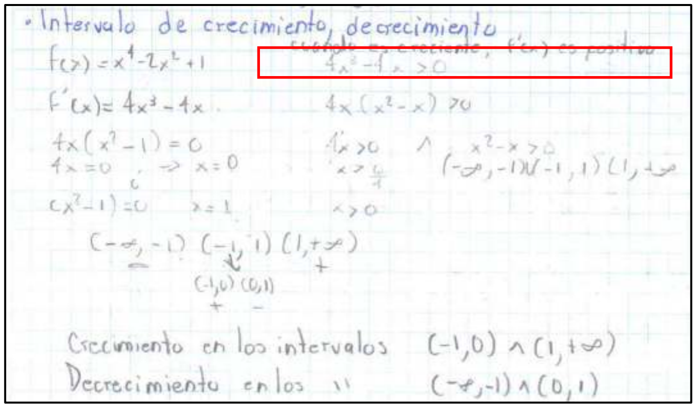


Figura 28. Producción estudiante 2.

En otros procesos de los alumnos, encontramos que solo dos emplearon el procedimiento de usar un "número de prueba" el cual debería pertenecer al dominio, dicha estrategia la podemos encontrar en la caracterización que presentan los libros de texto analizados en el apartado anterior respecto al uso del criterio de la primera derivada (Ver **Figura 29**). Con esto el alumno pretende utilizar el signo que se obtiene para determinar la monotonía de la función estudiada.

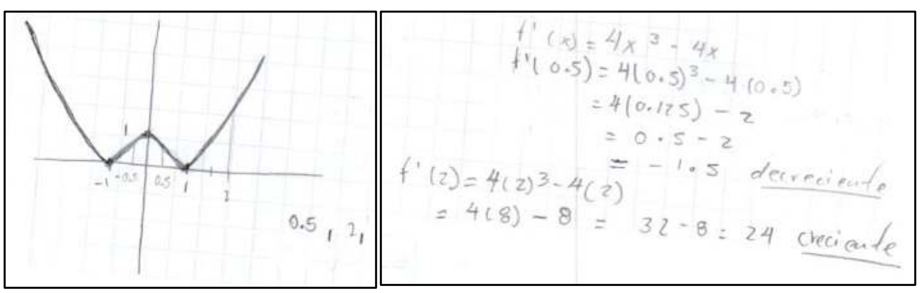


Figura 29. Producción obtenida de alumnos acerca del uso del "número de prueba".

Una producción de los alumnos, es la que se observa a continuación:

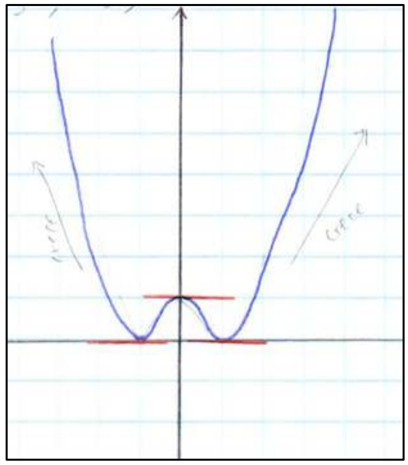


Figura 30. Concepción alternativa de función creciente obtenida de un alumno.

En esta producción coincidimos con las concepciones alternativas encontrada por Valero en alumnos “Una función es creciente si su gráfica sube, sin que haya coordinación entre los cambios en las abscisas y los cambios en las ordenadas; una función es decreciente si su gráfica baja”, al establecer que si la gráfica sube hacia cualquiera de los lados ésta es una función creciente; de manera análoga se presupone para la función decreciente (Ver **Figura 30**). Este resultado forma parte de una problemática en la comprensión del concepto de función creciente, la cual puede ser debido a las diversas caracterizaciones de la definición de función creciente que encontramos en los libros de texto. Consideremos también, que hay ocasiones que los nombres nos pueden inducir a cometer errores y este es uno de esos casos, ya que la idea intuitiva que tenemos todos es que una función creciente es aquella que tiene una gráfica ascendente.

Pregunta 3: Máximos y mínimos relativos

Respecto al tercer cuestionamiento, tenemos:

CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS	ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN
1. 1ª y 2ª derivada. 2. Teorema de Máximos y mínimos. 3. Solución de ecuaciones.	a. Aplicando el criterio de la primera derivada. b. Puntos críticos. c. Identificación de puntos en la gráfica.

Análisis de resultados de la pregunta 3: En esta producción de los alumnos, se observa que la mayoría presentan la solución correcta con algunas diferencias, y estas son que no ubican lo obtenido en la gráfica, sólo dos alumnos identifican máximos y mínimos relativos o locales (**Figura 31**).

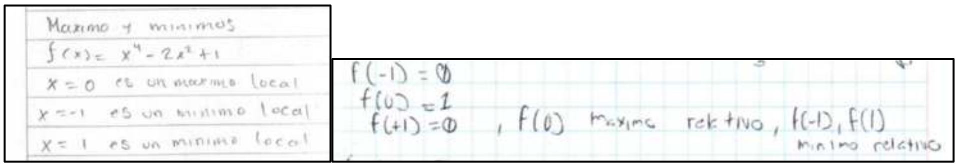


Figura 31. Identificación de extremos de la función.

De otra parte, verificamos que los alumnos resuelven a través de la determinación de los puntos críticos, sustituyéndolos en la función f para determinar las coordenadas de los puntos máximos y mínimos; ubicando esta concepción con las de Valero (2003), sobre "La consideración de los ceros de la función como puntos de estabilización".

Otros por el contrario, sólo hacen la ubicación de estos puntos a través de la identificación en la gráfica.

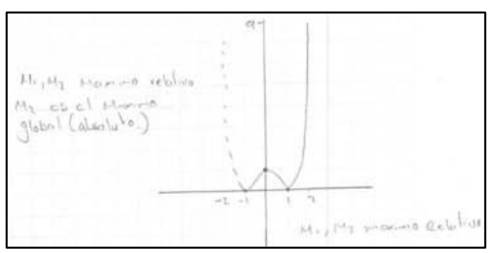


Figura 32. Representación gráfica de extremos de una función.

De manera general no se observa el uso de la definición, ya que solo se limitan a resolver de manera procedimental a través de la sustitución de puntos en la función.

Otro problema detectado son procesos erróneos en la determinación de la derivada de funciones (Ver **Figura 33**), aun considerando que la función presentada es de dificultad moderada y que los alumnos ya cuentan con conocimientos del tema de derivadas.

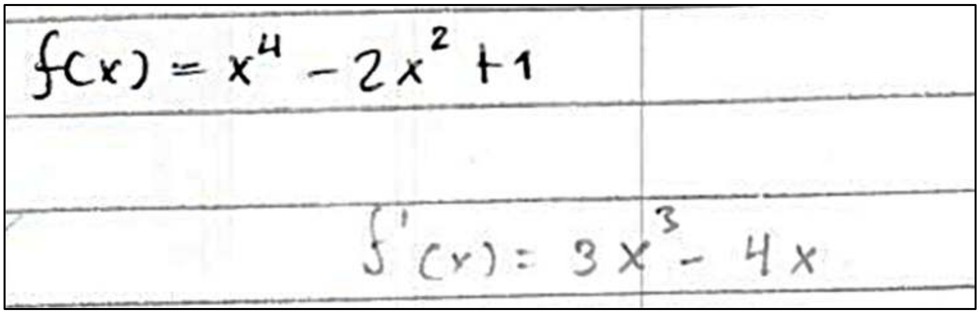


Figura 33. Derivación errónea.

De manera general, enumeramos los siguientes problemas detectados, los cuales coincidimos con lo reportado en el presente trabajo por diversos autores

1. Problemas en la comprensión de la noción de función creciente o decreciente.
2. Error en la determinación de los intervalos.
3. Problemas para determinar el signo que liga la derivada de una función con el sentido de variación de una función y sus extremos.
4. Error en la ubicación en la gráfica de los extremos de una función.

En otro estudio realizado con alumnos de primero de licenciatura (quienes habían abordado ya este contenido), se les pidió expresar lo que entendían por una función creciente o decreciente, ninguno de ellos consiguió definir de manera correcta estas nociones, utilizando expresiones como “si la gráfica sube, la función es creciente y si baja es decreciente”. Cuando se les mostró la gráfica de una función monótona a trozos, que era creciente en algunos intervalos y decreciente en otros, en particular una parábola, respondieron que, “ubicándonos en el vértice de la parábola, si caminamos hacia la izquierda, la función es creciente, y si caminamos hacia la derecha, la función también es creciente”. Al preguntarles cómo se ordenaban los números $f(-1)$ y $f(1)$, sabiendo que f es una función decreciente, afirmaban que $f(-1)$ tenía que ser menor que $f(1)$ porque -1 es un número negativo y en general, les resultó muy complicado comparar imágenes de una función, solo con tener la información de la monotonía. A nivel de procedimientos, también se encontraron dificultades para analizar sobre ejemplos concretos, el sentido de variación de una función tal como se presentó en estos resultados.

Reflexiones del capítulo

En el análisis epistemológico sobre el estudio del sentido de variación, se encontraron las definiciones implícitas de Lagrange y Cauchy, la primera definición explícita evocada por Ampère y la primera definición formal expresada por Osgood, sobre el sentido de variación:

> **Definición (implícita) de Lagrange (1797).** *Si una función prima de z tal que $f'z$ es siempre positiva para todos los valores de z, desde $z = a$ hasta $z = b$, b siendo $> a$, la diferencia de las funciones primitivas que corresponden a estos dos valores de z, a saber, $fb - fa$, será necesariamente una cantidad positiva.*
>
> **Definición (implícita) de Cauchy (1823).** *Una función f definida en un intervalo I es una función creciente, si para cualquier elemento a de I, existe una vecindad $V(a)$ tal que para cualquier x en $V(a)$, el orden entre $f(a)$ y $f(x)$ es el mismo que entre a y x.*
>
> **Definición de Ampère (1924).** *Se dice que una función continua es creciente en el intervalo de dos valores de la variable independiente, cuando ella aumenta a medida que se dan a esta variable valores cada vez más grandes, y que irá por consecuente disminuyendo, si se le dan a la misma variable valores cada vez más pequeños: se dice que la función es decreciente cuando va disminuyendo a medida que la variable independiente aumenta, y aumentando a medida que esta última disminuye.*
>
> **Definición de Osgood (1912).** *Una función se llama monótona si se comporta como sigue. Sean x_1 y x_2, cualesquiera dos puntos del dominio de definición y tales que $x_1 < x_2$. Entonces, sin excepción siempre debe tenerse $f(x_1) \leq f(x_2)$ o siempre debe tenerse $f(x_1) \geq f(x_2)$.*
>
> Cabañas-Ramírez et al. (2019)

Se encontró que las primeras definiciones se presentaron en el "estilo narrativo" y otras por argumentos puramente geométricos. Al comparar estas definiciones con las que plantean actualmente los libros de textos, se deja ver que la presentación actual esconde el proceso de reconstrucción del tópico de estudio, así como los recursos que posibilitaron el planteamiento formal de las definiciones y los teoremas sobre el crecimiento o decrecimiento de una función, se identificó que la definición actual (función creciente/decreciente) aparece en 1912 por Osgood.

En el caso de las pruebas de las propiedades dadas por Lagrange y Cauchy, se vislumbra que ambos matemáticos, en realidad, no tenían la misma comprensión sobre el crecimiento y decrecimiento de una función, ya que en las demostraciones que dan como resultado el teorema que vincula el signo de la derivada con el sentido de variación de una función en ambos se observan concepciones implícitas de lo que es una función creciente, pero estas concepciones no coinciden exactamente, dado que tenían objetivos diferentes a alcanzar

(Lagrange se propuso encontrar cotas para el residuo de un desarrollo polinómico de orden $n-1$, mientras Cauchy buscaba fundamentar sus trabajos de rigorización del análisis en la noción de límite). Se trata pues de una noción que ambos matemáticos consideraban evidente.

En el análisis didáctico: se puso en evidencia la poca importancia que se les da en ellos a las definiciones y a los teoremas, encontrándose también en algunos textos, las concepciones identificadas en la evolución de la noción del sentido de variación, incluso, se evidencia la poca seriedad en la presentación del teorema que sirve para ligar el signo de la f' con el sentido de variación de una función f, ya que en algunos textos son presentados en modo narrativo, en otros por desigualdades y algunos faltos de condiciones necesarias, condiciones suficientes o condiciones necesarias y suficientes, como se encontró en (Ayres, 1971; Granville, 2007), estos autores dan una demostración del teorema muy similar a la que presenta Cauchy y que, como hemos dicho, contiene errores los cuales se reproducen en la actividad del profesor e influyen en los aprendizajes de los alumnos.

Esta problemática reportada, da como consecuencia, que los procesos para analizar el sentido de variación de funciones se presenten como una secuencia algorítmica de pasos sin un análisis profundo, dificultándose la apropiación de estas definiciones y teoremas incluso a largo plazo.

En el análisis cognitivo: en un estudio llevado para la exploración de conceptos relacionados con el análisis de variación de funciones, se identificó que alumnos incluso de universidad solo tienen ideas intuitivas de la definición de función creciente y decreciente (en muchos casos erróneas), no argumentan acerca de las implicaciones matemáticas que garantizan preservar o invertir el orden, identificándose que se apegan a la formulación de definiciones y teoremas encontradas en los libros de texto, algunos responden de modo intuitivo, sin tener madurez y argumentos sólidos en el manejo de lo conceptual que se requiere para este tipo de estudio. Estas ideas encontradas en los alumnos, dificultan la apropiación de la definición a largo plazo; como pudo constatarse en alumnos del nivel universitario cuando se indagó sobre sus nociones acerca de los conceptos objeto de estudio.

Estos hallazgos en el estudio epistemológico, didáctico y cognitivo fueron considerados en el diseño del sistema de actividades dentro de la Ingeniería Didáctica para favorecer la transición del trabajo dinámico al estático en relación con los conceptos de función creciente y decreciente, como parte del tratamiento del sentido de variación de una función.

Capítulo 5

INGENIERÍA DIDÁCTICA

5.1 Análisis preliminar

Producto de la realización del análisis preliminar (ver capítulo 4) sobre el sentido de variación de una función, se identifican tres aspectos importantes a considerar para el diseño de la Ingeniería Didáctica:

a) Las definiciones formales de función creciente y de función decreciente involucran los puntos de vista local (se define a partir de la comparación de puntos y de sus imágenes) y global (la propiedad se tiene que cumplir para todas las parejas de puntos en un intervalo).

b) La estructura lógica de las definiciones involucra una doble cuantificación (aunque de manera explícita solo aparece un cuantificador) y una implicación entre dos desigualdades.

c) La idea subyacente de sentido de variación de una función en la definición formal difiere de la que subyace en la noción intuitiva.

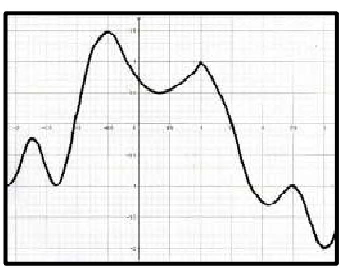
En esta última, se trata de una descripción dinámica de dos cantidades que varían de manera ligada en la que si una aumenta, la otra también aumenta (para una función creciente) o en la que una aumenta, la otra disminuye (si se trata de una función decreciente). Mientras que en la definición formal subyace la idea estática de transformación entre dos conjuntos ordenados mediante la cual, el orden se preserva (función creciente) o se invierte (función decreciente).

La Ingeniería Didáctica que se ha diseñado es tal que, en un primer momento se construyen las nociones intuitivas de función creciente y decreciente poniendo énfasis en que las variaciones de la variable independiente y de la variable dependiente son ligadas. En un segundo momento, se transita de esta visión dinámica de variación a la visión estática de transformaciones o aplicaciones entre conjuntos ordenados. Una vez formadas estas nociones, en un tercer momento, se formulan las definiciones formales de función creciente y función decreciente tomando en cuenta la estructura lógica (uso de cuantificadores e implicación entre desigualdades).

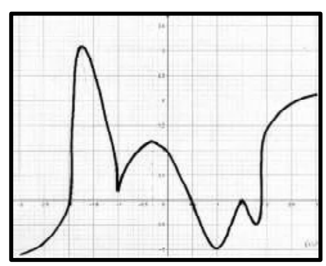
5.2. Concepción y análisis a priori

Considerando los resultados obtenidos en el análisis preliminar, y del reporte de las investigaciones que describen el problema de enseñanza y aprendizaje de los conceptos fundamentales del cálculo asociados al sentido de variación de una función, se diseñaron tres actividades; con cuya implementación se favoreció la construcción de las definiciones de función creciente y función creciente por alumnos del pre universitario.

Actividad I. Emergencia de argumentos del sentido de variación.



a) Curva presentada a los primeros emisores.



b) Curva presentada a los segundos emisores.

Figura 34. Representaciones gráficas entregadas a los equipos. Fuente: Elaboración propia.

Esta actividad se llevó a cabo en equipos de cinco o seis integrantes. La finalidad es hacer emerger de una manera intuitiva y en lenguaje natural los conceptos y argumentos asociados con el sentido de variación de una función, como una primera etapa de la formación de la noción intuitiva. Para ello consideramos lo siguiente:

El equipo de investigación responsable de la experimentación, establece que los equipos se subdividirán y formarán pares de equipos (emisor/receptor), para trabajar esta actividad como se describe a continuación:

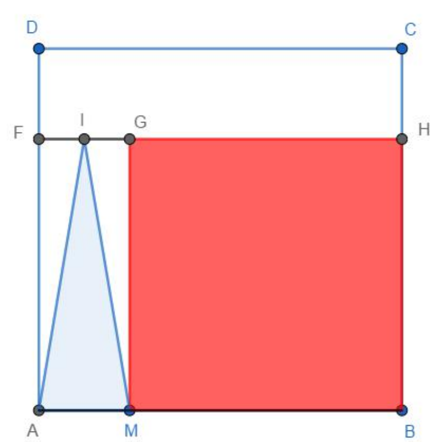
a) Al equipo emisor se le entrega la gráfica de una curva (**Figura 34**, a). Este elabora un listado donde describen el comportamiento de la gráfica asignada: dominio, imagen, ceros de la función, continuidad, intervalos, crecimiento y decrecimiento, máximo y mínimo relativo y global, puntos de inflexión, convexidad, concavidad, entre otros (aunque no se espera que los alumnos utilicen este lenguaje).

b) El equipo emisor hace llegar al equipo receptor el listado que elaboró. El equipo receptor tomando en cuenta la información recibida, construye una gráfica que cumple con las condiciones dadas. Finalmente, se debate acerca de las instrucciones dadas y la representación. Análogamente, se repite la actividad; intercambiando los roles de los equipos emisores por los receptores y viceversa, solo variando el gráfico de estudio. (**Figura 34**, b)

Las variables didácticas que se identifican es el nivel de la lectura que se realice de las gráficas, influyendo en los procesos de argumentación que emiten los alumnos para transmitir ideas como: crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos, el dominio y contradominio, entre otros.

Actividad II. El sentido de variación condicionado por la variable independiente.

La Figura representa un cuadrado ABCD de lado 8 cm, en el cual se dibujó un triángulo isósceles AIM y un cuadrado MGHB. El triángulo isósceles tiene como base el segmento AM, con M movible a lo largo del segmento AB, y la altura es igual al lado del cuadrado.



1. Investigue la posición del punto M en el segmento AB para que el área del triángulo isósceles sea igual a 6 cm^2 y 8 cm^2. Argumente en cada uno de los casos.
2. ¿Es posible que el área del triángulo sea igual a el área del cuadrado? Argumente la respuesta.
3. ¿Cómo cambia el área de cada una de las tres figuras a medida que M se mueve de izquierda a derecha? ¿Y de derecha a izquierda?

Figura 35. Representación geométrica del fenómeno de variación, objeto de estudio. Fuente: Elaboración propia.

El desarrollo de esta actividad (**Figura 35**), permitió evidenciar que el sentido de variación de una función depende de la relación que existe entre la variable independiente y la variable dependiente (variables ligadas), de tal manera que, si se cambia la primera, tiene consecuencias en el sentido de variación.

La variable didáctica de esta segunda actividad, son las implicaciones de la variación del punto M a lo largo del segmento AB o viceversa, lo cual influye en la construcción e interpretación del modelo matemático de la función creciente y decreciente.

Actividad III. Hacia la definición de función creciente y función decreciente.

Conteste lo que se pide a continuación.

Ejercicio 1. Sea $f(x)$ una función cuyas variaciones se describen a continuación

- $f(-20) = 1$
- f es creciente en el intervalo $[-20, -3]$
- $f(-3) = 5$
- f es decreciente en el intervalo [-3,1]
- $f(-1) = 0$ y $f(1) = -3$
- f es creciente en el intervalo [1,4]
- $f(4) = 0$

1. ¿Cuáles son los valores entre los que se encuentra f en cada uno de los casos siguientes?
   a) Cuando x se encuentra entre -3 y -1
   b) Cuando x se encuentra entre 1 y 4
   c) Cuando x se encuentra entre -3 y 4
2. En caso de que sea posible, comparar las imágenes siguientes
   a) $f(-5)$ y $f(2)$
   b) $f(-4)$ y $f(0)$
   c) $f(-2)$ y $f(5)$
   d) $f(7)$ y $f(-3)$

Ejercicio 2: Sea f una función que satisface las siguientes condiciones

- $f(-5) = 3$, $f(-2) = 0$ y $f(0.5) = 3$ $f(3) = -1$
- Es decreciente en los intervalos $[-5, -2]$ y $[0.5, 3]$ y creciente en el intervalo $[-2, 0.5]$

1. Dibujar la gráfica correspondiente

2. Indicar sus extremos
3. Colocar los signos $<$ o $>$, según corresponda entre las siguientes imágenes
a) $f(-4) \quad f(-3)$ c) $f(-2) \quad f(-1.99) \quad f(-1.9)$
b) $f(1) \quad f(2) \quad f(3)$ d) $f(-4) \quad f(-1) \quad f(1)$

Ejercicio 3: Sea f una función cuyo dominio es $[-5, 4]$. Se sabe también que f es creciente en los intervalos $[-3, -1]$, y $[3, 4]$, que es decreciente sobre los intervalos $[-5, -3]$ y constante sobre el intervalo $[-1, 3]$.
Se sabe también que $f(-5) = 4$, $f(-3) = -1$, $f(-1) = 1$ y $f(4) = 3$
1. Comparar $f(0)$ y $f(2)$ justificando la respuesta
2. Comparar las imágenes por f de -2 y -1.5, justificando la respuesta
3. Trazar una curva posible para la función f

Ejercicio 4. Sea f la función cuyas variaciones se describen de la siguiente manera
- Es creciente en los intervalos [-8, -5] y $[-1, -2]$ y decreciente en $[-3, -1]$
- $f(-8) = -1$ $f(-5) = 4$, $f(-3) = 4$ $f(-1) = -3$ y $f(2) = -1$

1. Dar el dominio de la función
2. Proponer cuatro números reales estrictamente positivos que estén ordenados en el mismo orden que sus imágenes por =f
3. Proponer cuatro números reales que estén ordenados en orden inverso respecto su imagen por f.
4. Proponer cuatro números reales cuyas imágenes por f sean iguales.

Ejercicio 5: Trazar una curva susceptible de representar la función f sabiendo que:
- Su dominio es $[0,5]$
- f es creciente y negativa sobre este intervalo

Ejercicio 6: Trazar una curva susceptible de representar la función f sabiendo que:
- Su dominio es $[-5,4]$
- f es creciente y negativa sobre $[-5, 1]$ y decreciente y positiva sobre $(1,4]$

Ejercicio 7: En cada inciso, construir una gráfica posible para la función f y contestar lo que se pide
a) f es una función cuyo dominio es el intervalo $[-5,5]$ y se sabe que
$$f(-5) \leq f(-4.99) \leq f(-4.98) \leq f(-4.97) \leq \cdots \leq f(4.97) \leq f(4.98) \leq f(4.99) \leq f(5)$$
¿Qué se puede decir del sentido de variación de$f$?
b) La misma pregunta para f que satisface
$$f(5) \leq f(4.99) \leq f(4.98) \leq f(4.97) \ldots \leq f(-4.97) \leq f(-4.98) \leq f(-4.99) \leq f(-5)$$

En esta actividad se busca primeramente formar en los alumnos, la noción de una función creciente (o decreciente) como una aplicación entre dos conjuntos ordenados que preserva (o invierte) el orden y, posteriormente, que se construyan las definiciones respectivas, haciendo uso de los conceptos alcanzados en las actividades I y II.

Con el tratamiento de los ejercicios de esta actividad, los alumnos identificarán las implicaciones lógicas entre las desigualdades $a < b$ y $f(a) \leq f(b)$ como elementos importantes en la noción de sentido de variación de una función. Finalmente, analizarán si solo hay casos particulares de las implicaciones: $x_\alpha < x_\beta \Rightarrow f(x_\alpha) < f(x_\beta)$ y $x_\alpha < x_\beta \Rightarrow f(x_\alpha) > f(x_\beta)$, o pueden generalizarse dichas implicaciones para pares de valores de la variable independiente que cumplan la condición (del antecedente) en otros subdominios del conjunto de los número reales. Por supuesto, llegar a estos planteamientos dependerá del éxito que los alumnos alcancen en las primeras actividades. Metodológicamente, es aquí en donde cobra mucha importancia el uso del contraejemplo en el debate científico que se desarrolle, según los momentos en la ID.

La variable didáctica en esta actividad consiste en la elección de cadenas de valores $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n$, para comparar u ordenar las respectivas imágenes $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3), \ldots$, $f(x_n)$ según si la función es creciente o decreciente. Producto de estas comparaciones, se espera obtener los rasgos y elementos esenciales para construir las respectivas definiciones.

5.3. Experimentación

La experimentación se llevó a cabo con 31 alumnos de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Al momento, estaban inscritos en el primer semestre, y cursaban la unidad de aprendizaje: Precálculo, la cual se imparte 5 horas a la semana y es de carácter obligatorio. Al ser considerado el grupo en su totalidad, la población experimental fue heterogénea en cuanto a conocimientos. Se consideraron como evidencias: la producción escrita de los alumnos y videograbaciones durante el tratamiento de las actividades. Dinámica de trabajo: Para la realización de las actividades, se formaron 5 equipos de entre 5 y 6 integrantes, y se desarrollaron una a la vez buscando no incidir en la preparación de las respuestas de los alumnos. Las actividades se aplicaron en 6 sesiones de 90 minutos cada una y estuvieron coordinadas por un responsable de experimentación.

En el proceso de desarrollo de las actividades, se consideraron los siguientes momentos. Primero: conformación de los equipos y las instrucciones dadas por el responsable de la experimentación, segundo: exposición de los alumnos seleccionados de los resultados de sus elaboraciones en equipo y tercero: actividad conjunta responsable de la experimentación y la comunidad de alumnos, en donde a través del debate científico, emergen y se debaten las formulaciones de los equipos. Estos momentos conducen a la actividad de institucionalización.

Las actividades se estructuraron de la siguiente manera: Actividad I. Emergencia de argumentos del sentido de variación. Consta de 1 ejercicio con dos opciones diferentes; una fue dirigida al equipo emisor y la otra al receptor, la cual se llevó a cabo en la sesión 1 y 2. La Actividad II. El sentido de variación condicionado por la variable independiente, consta de 1 ejercicio con 3 cuestionamientos y se llevó a cabo en la sesión 3 y 4. La Actividad III. Hacia la definición de función creciente y función decreciente, consta de 7 ejercicios y se llevó a cabo en las sesiones 5 y 6.

El papel que desempeñó el profesor-investigador responsable de la experimentación fue coordinar, instaurar y conducir el debate hasta institucionalizar el conocimiento sobre las definiciones de función creciente y decreciente.

5.4. Análisis a posteriori y evaluación

Una vez llevada a cabo las actividades, se realizan los análisis de los datos obtenidos sobre: a) elementos del sentido de variación: función creciente y función decreciente que aparecen tanto en las producciones escritas como en los audios y b) estrategias de solución que utilizan los alumnos para transmitir la información. En estas producciones, se identifica el efecto de atención a las fases de acción, formulación, validación e institucionalización que establece la teoría, en el tratamiento de las actividades.

Actividad I

En la **Tabla 1**, se describen las producciones de los alumnos que se obtienen en la fase de acción y formulación. La columna Estrategia, indica el tipo de estrategia que utilizan los alumnos y en la columna Descripción y Análisis, se describen las ideas intuitivas acerca de la definición de función creciente y función decreciente, presentes en el lenguaje coloquial usado por los alumnos en el momento de enviar mensajes a sus compañeros de equipos.

Estrategia	DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS
Tabulación simple	Esta estrategia es aplicada por 3 sub equipos receptores, quienes recurren a la elaboración de una tabla con valores ‘x’ y ‘y’ obtenidos de la gráfica. Estos equipos ubican varios puntos sobre la gráfica proporcionada en particular aquellos puntos de la curva que coinciden con los nodos de la retícula o cuyas abscisas son muy cercanas (para tener una cantidad “grande” de ellos).
Tabulación más disección	Tres sub equipos aplican esta estrategia. Estos equipos recurren a la tabulación y, además, diseccionan considerando a la curva formada por pedazos “parabólicos”. Por tanto, localizan puntos al inicio de cada “parábola”, en medio (refiriéndose al máximo o mínimo de la parábola) y al final. En sus instrucciones se observan indicaciones sobre el aspecto de la gráfica, usando términos como: parábola que abre hacia arriba, hacia abajo, vértice, “pedazos de circunferencia”, “unir puntos de forma no rectas”, para obtener curvas suaves, entre otros, pero también términos del lenguaje natural como “montañas” o “cerros”. Localizan también las intersecciones con los ejes.
Disección más extremos	Tres sub equipos aplican esta estrategia, que consiste en localizar primero los extremos de la curva (máximos y mínimos) y diseccionarla en regiones que van de un extremo al siguiente (de izquierda a derecha) y en cada región localizan puntos de la curva. Como información adicional localizan las intersecciones con los ejes.
Disección más sentido de variación	Esta estrategia la aplica un solo sub equipo. Al igual que la estrategia anterior estos alumnos localizan las coordenadas de los extremos diseccionando de esa manera la curva, pero a diferencia de los otros, en este equipo hacen uso de términos relacionados con el sentido de variación como: “la curva sube” o “la curva baja”, para especificar el comportamiento en cada una de las secciones identificadas, por lo que el equipo receptor obtiene una gráfica muy cercana a la proporcionada.

Tabla 1. Estrategias identificadas en las producciones de los alumnos.

En las cuatro estrategias encontramos coincidencias en lo que se refiere a la lectura de la curva de izquierda a derecha para estudiar el comportamiento gráfico, utilizan ideas intuitivas para explicar el comportamiento y comparan segmentos de las curvas con “parábolas”, “semi parábolas”, “circunferencias” y utilizan términos como “cerros”, “montañas”, “ondas”, entre otros. Solo un equipo hace uso de los términos referentes al sentido de variación de funciones. Esta producción ayuda al responsable de la experimentación a conducir hacia la institucionalización, promoviendo el debate científico y haciendo evolucionar las definiciones.

El debate se inicia con la exposición de las instrucciones que formuló cada equipo emisor y con las exposiciones de las gráficas producidas por los receptores, comparando la eficacia de cada una de las estrategias. Los alumnos se dan cuenta rápidamente de que la estrategia 1 tabulación simple y la estrategia 4 disección más sentido de variación, daban como resultado las gráficas más parecidas a la proporcionada, pero la estrategia 4 resulta más económica (pues requiere menos instrucciones que la primera). El debate se dirige entonces a intentar llegar al consenso de la terminología de función creciente y función decreciente.

> PROF: Analicemos el comportamiento de la curva. En este caso ustedes dicen que esto va subiendo, así de esta manera [Señala siguiendo con su mano la trayectoria de la gráfica proyectada en el pizarrón. Ver **Figura 34**, a), para mayor precisión del gráfico], después va bajando, y después subiendo.
> Estudiante 2(E2): O sea que crece, decrece y otra vez crece.
> PROF: En este caso, ¿cómo sería aquí?
> E2: Ahí está en crecimiento.
> PROF: Crece. [El profesor afirma el término expresado por E2]
> E2: Y ya cuando vienen decrece
> E1: ¿Y (eso) cómo se llama?
> PROF: ¿Como se llama? pues así justamente, creciente y decreciente. Se dice que estas partes [Vuelve a señalar la gráfica] la función es creciente y en estas otras la función es decreciente.

En esta primera fase, se buscó que los dos términos (sube/baja) se utilizaran primero en el lenguaje común de los alumnos y posteriormente empleando el lenguaje estandarizado (creciente/decreciente), este hecho se logra en la fase de institucionalización a través del debate instaurado en el aula.

Actividad II

Se identificó un procedimiento común de todos los equipos que consta de las siguientes etapas: 1) analizan las figuras geométricas presentadas, 2) eligen la variable independiente (segmento AM o segmento MB), 3) construyen expresiones algebraicas para modelar la situación 4) elaboran una tabla, 5) establecen un sentido (izquierda-derecha) y 6) grafican e interpretan los datos obtenidos; para responder a los tres cuestionamientos presentados en el instrumento.

El debate se inicia con la exposición de las producciones de los alumnos (expresión algebraica, tabulación, representación gráfica y la respuesta a cada una de las preguntas). El PROF cuestiona a los alumnos sobre las gráficas elaboradas.

> PROF: ¿Cómo es que llegaron a esas gráficas? […], podrían explicar qué cosa fue lo que tomaron como variables de estas funciones. […] [El profesor señala la **Figura 35** y las gráficas presentadas por los alumnos].

Respecto a este cuestionamiento, E1 expone este procedimiento a sus compañeros:

E1: Bueno para encontrar el área del triángulo, buscamos cual era nuestra base y cual era nuestra altura y nos dimos cuenta de que este segmento de aquí era la base y todo esto era la altura [Señala la figura de la actividad], y también nos dimos cuenta de que este segmento de aquí era todo el segmento grande menos este segmento, entonces lo pusimos como 8 menos este segmento menos l, que l era este segmento de aquí y este era $8 - l$. Después nos dimos cuenta de que la altura también tenía que valer l porque este era un lado del cuadrado, se supone que este tiene que valer l, entonces lo pusimos como l, entonces nuestra área estaba en función de este lado, de cómo variaba este lado, [Refiriéndose a tomar como variable independiente la base del cuadrado], y pues nos dimos cuenta de que era un valor que crecía y que después volvía a decrecer. En el caso del área del cuadrado, pues el área nada más estaba en función de l, era mucho más simple.

y el Estudiante 4(E4) responde a este cuestionamiento:

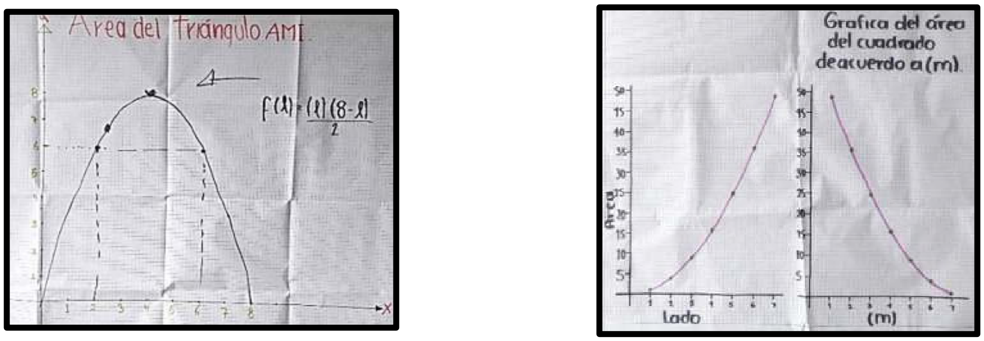
E4: Bueno, nosotros vimos que el cuadrado medía 8×8, entonces, nosotros lo que hicimos es ir moviendo el punto M, empezando desde el punto A y le dimos el valor de x y como este es un cuadrado tengo que mover la misma hacia acá, entonces esto también es x nuestra altura de nuestro triángulo, por lo tanto nos iba a dar $8 - x$, y la base del triángulo pues es x y la del cuadrado que se va moviendo conforme x se va moviendo. [Refiriéndose a tomar como variable independiente la base del triángulo]

En la siguiente transcripción se describe el debate, donde el PROF confronta a los equipos indicando “supongo que encontraron exactamente los mismos valores en las dos primeras preguntas que se les hicieron al equipo 1”, a lo que E4 comienza a relacionar los desplazamientos de M respecto a la base del triángulo y el cuadrado y la gráfica obtenida, por lo que PROF emite una segunda pregunta que detona el análisis del porqué los equipos habían obtenido respuestas diferentes, respecto a una misma pregunta:

PROF: Y ¿cómo lo encontraron? a ver de dónde sale el 5.33, lean la pregunta nuevamente.
Estudiante 5(E5): Es que creo que la diferencia fue que nosotros tomamos x, o sea el valor que nosotros tomamos para ir dando valores y ellos mis compañeros tomaron esta parte entonces 5.33 fue lo que debería dar para que esta saliera para acá y esos 5.33 y los que dos puntos que 2.66, entonces la suma ya da los 8 y por eso la diferencia
PROF: A ver 5.33 más 2.66 igual a
E5: Nada más, lo que yo me imagino es que 2.66 periódico ¿no?
E1: Eh si
E5: Y nosotros es 5.33 periódico, entonces sumando ambos da 8 y es por eso la diferencia, porque ellos tomaron esto [señala la base del cuadrado] para empezar a dar valores esta parte y nosotros esta parte. [señala la base del triángulo]

Se observa que los alumnos buscaron relacionar el valor numérico obtenido por el equipo de E5 y el equipo de E1; a través del análisis que realiza E5, deduce que la suma de estos dos valores (tomados de izquierda a derecha y viceversa) coincide con el lado del cuadrado

ABCD. Al identificarse esta situación del sentido y la dependencia entre estas dos variables, buscó después la relación que guardan estas situaciones con el gráfico obtenido. (**Figura 36**)



a) Variación del área del triángulo isósceles. b) Variación del área del cuadrado.

Figura 36. Representación gráfica de las variaciones de los fenómenos de estudio.

La intervención del PROF se da en el sentido de establecer similitudes entre las conclusiones de los equipos. A partir de esta intervención, el equipo de E5 logra expresar claramente que el sentido de variación que obtienen, depende de la elección que se realice de la variable independiente (el segmento AM o el segmento MB), ver **Figura 37**:

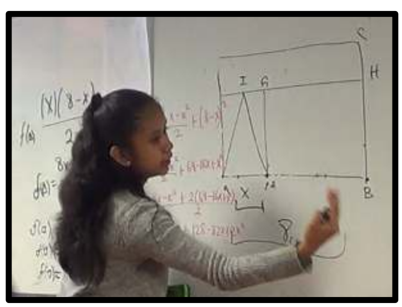


Figura 37. Alumna E5 en el análisis del planteamiento del PROF.

PROF: Muy bien, se fijan que es relativo, la elección se podía hacer de dos maneras. De hecho, al equipo 1 y al equipo 2 les salía exactamente igual la gráfica, y también al equipo de ustedes Estudiante 6(E6) ¿verdad? Les quedó exactamente igual que al equipo de E1, pero había otro que les había salido también decreciente la función.

E5: El movimiento de ellos era de aquí para acá, ocuparon este [derecha a izquierda], entonces cuando vale 0 supongo que está aquí y nosotros comenzamos a partir de que M empieza a moverse de este punto a este [izquierda a derecha], entonces cuando x valiera 0 nuestro cuadrado tendría un área de 64 es por eso la diferencia de las gráficas.

PROF: Las gráficas también salen diferentes, ¿y quién tiene la razón entonces?

E5: Ambos

PROF: Ambos, exactamente
E5: Uno es cuando este M va de aquí para allá [señala la base del triángulo de izquierda a derecha] y la otra es de allá para acá [señala la base del cuadrado de derecha a izquierda]. (Ver **Figura 37**)

Los alumnos lograron identificar y comunicar la relación que existe entre la variable independiente y la variable dependiente según el objetivo planteado, ya que pusieron de manifiesto que cierta variación va a depender del sentido en cómo se elija la variable independiente (variando de izquierda a derecha y viceversa). Finalmente, en la institucionalización el PROF retomó lo que los alumnos habían planteado (descrito en líneas anteriores) lo cual permite avanzar hacia la formalización de la definición de función creciente y función decreciente, como se identifica en la siguiente producción:

PROF: Si el punto M se movía de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, se obtienen cosas distintas según el movimiento que tomemos, entonces esa cuestión de la función creciente o decreciente va a depender también cómo esté moviéndose la variable independiente. […]
PROF: A la cualidad de una función de ser creciente o decreciente se le llama sentido de variación. Cuando hablemos del sentido de variación nos referiremos entonces a eso, es decir, en el primer caso se tiene en la gráfica de arriba [Señala la gráfica del área del cuadrado decreciente elaborada por dos equipos] el sentido de variación es decreciente; mientras que en la gráfica del área del cuadrado para el equipo numero 1 [Gráfica del área del cuadrado creciente] el sentido de variación de esta función es creciente.

Es importante recordar que el término crece o decrece, había emergido en la actividad I, motivo por el cual, era posible el uso de estos argumentos en la producción de los alumnos en esta actividad II. Al respecto identificaron que, "cuando el punto M se mueve de izquierda a derecha la función que representa al área del cuadrado tiene un sentido de variación decreciente, mientras que la función que representa al área del triángulo tiene un sentido de variación creciente alcanzando como valor máximo 4 unidades y después su sentido de variación es decreciente. Análogamente, cuando el punto M se mueve de derecha a izquierda la función que representa el área del cuadrado tiene un sentido de variación creciente y la función que representa al área del triángulo su comportamiento es creciente y alcanza un valor máximo de 4 unidades y después decrece".

Con el desarrollo de esta actividad, evolucionó el nivel de argumentación en la identificación y la interpretación del sentido de variación que presentan las áreas del triángulo isósceles y el cuadrado, destacándose que cuatro equipos lograron construir los modelos matemáticos y por tanto graficar el lugar geométrico asociado a cada situación variacional.

En la interpretación del lugar geométrico se identificaron justificaciones cercanas a la interpretación formal de una función creciente y función decreciente. Observándose esta situación por el PROF, éste solicita a los alumnos emitan una definición (provisional) de función creciente y función decreciente; dichas "definiciones" y evoluciones hacia la definición formal se analizan en párrafos posteriores (fase de institucionalización).

Actividad III

En los primeros ejercicios de esta actividad se da información acerca del sentido de variación de una función. Con esta información se solicita a los alumnos ordenar colecciones de imágenes de puntos dados; en algunos casos, estas imágenes no se podrán comparar a partir de la información dada. Se pretende entonces, que el alumno analice e identifique implicaciones del tipo "$a < b < c < \cdots < d$ implica que $f(a) \leq f(b) \leq f(c) \leq \cdots \leq f(d)$" cuando la función es creciente y del tipo "$a < b < c < \cdots < d$ implica que $f(a) \geq f(b) \geq f(c) \geq \cdots \geq f(d)$" cuando la función es decreciente para construir como rasgos esenciales de la definición del sentido de variación, implicaciones del tipo $x_\alpha < x_\beta \Rightarrow f(x_\alpha) \leq f(x_\beta)$ y $x_\alpha < x_\beta \Rightarrow f(x_\alpha) \geq f(x_\beta)$, con sus respectivos cuantificadores universales.

Durante la exposición de resultados de la tercera actividad, se observa que para contestar las preguntas, los alumnos, con la información acerca del sentido de variación de la función en cuestión, primero dibujan la gráfica y después localizan en ella los puntos cuyas abscisas se proporcionan. La mayoría de ellos son capaces de hacer las comparaciones cuando es posible y de determinar cuándo no lo es.

Una vez que emergen las implicaciones entre las desigualdades que caracterizan a las funciones crecientes y decrecientes, en la producción de los alumnos, se analizan las actividades del instrumento que se refieren a ordenar las imágenes de los valores que se proporcionan, y después, se les pide que ellos propongan una determinada cantidad de números que satisfagan cierto orden respecto a sus imágenes (ver **Figura 38**). De la actividad III, analicemos el ejercicio 2, sub número 3, donde implícitamente el alumno analiza estas desigualdades relacionando un par de valores del dominio y explícitamente los valores de sus imágenes:

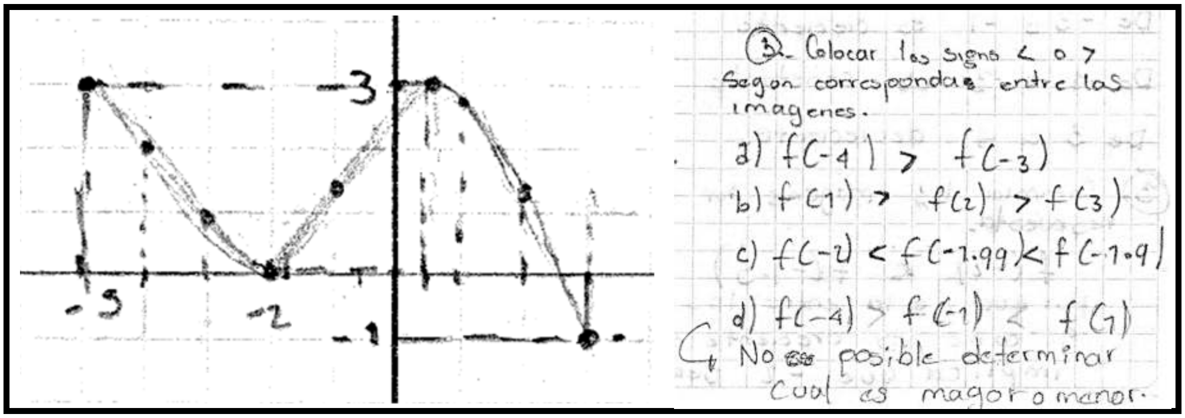


Figura 38. Comparación de imágenes a partir del sentido de variación.

En sentido recíproco, tampoco hubo dificultad para que, a partir de la información del sentido de variación de una función, los alumnos propusieran colecciones de puntos de cuyas abscisas estuvieran en el mismo orden que las ordenadas y colecciones de puntos en que las abscisas y las ordenadas respectivas estuvieran en orden inverso. Para el primer caso eligieron puntos en las “zonas crecientes” y para el segundo caso en las “zonas decrecientes” de la función, incluso, en los intervalos en los que se desconocía el sentido de variación, dibujaron una gráfica con oscilaciones (**Figura 39**).

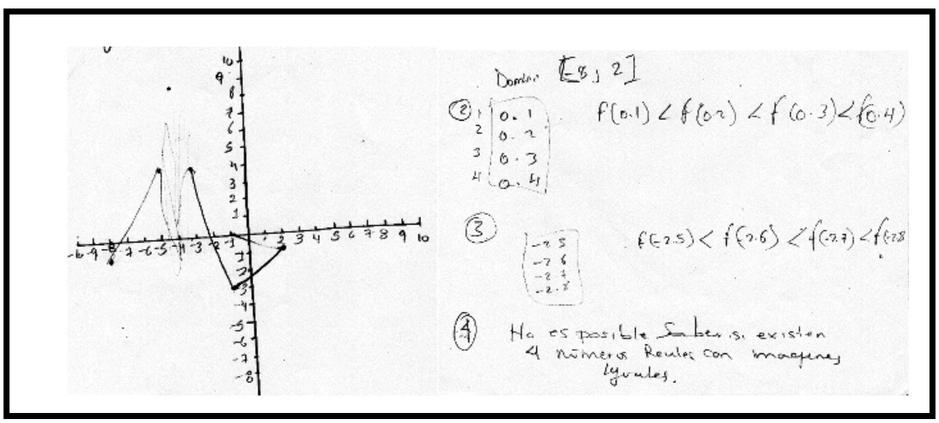
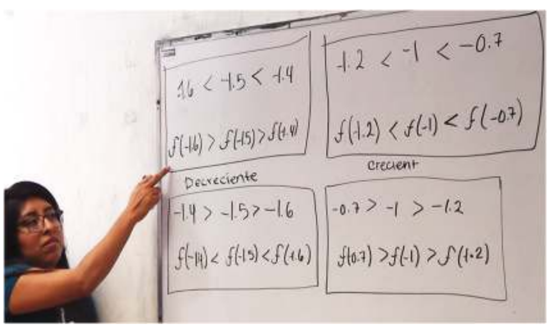


Figura 39. Puntos propuestos por los alumnos, a partir del sentido de variación.

Observemos que este ejercicio guarda cierta continuidad en las comparaciones de parejas de números realizados en los ejercicios 1 y 2 de este mismo instrumento, por lo que evidenciamos que logran realizar comparaciones y ordenar números buscando relacionar estas situaciones con la característica esencial de crecimiento o decrecimiento de una función, así como, proponer números que cumplieran ciertas características de las funciones (ejercicio 4.2 y 4.3). Respecto al sentido de variación, los alumnos identifican el crecimiento o decrecimiento a partir del análisis de la desigualdad considerando que estos pares de valores deben pertenecer a un intervalo del dominio con un mismo sentido de variación creciente o decreciente (**Figura 39**). En este análisis los alumnos, logran determinar en qué situaciones no es posible realizar estas comparaciones ni proponer una pareja de números que cumplan cierto orden; esta situación, nos permite avanzar hacia que los alumnos se formen la idea de que las restricciones y cuantificadores son necesarios en la formación de las definiciones.

5.5. Institucionalización

Al final de las exposiciones de las producciones de cada equipo, el PROF pide a los alumnos que sistematicen en una tabla las comparaciones de imágenes de funciones crecientes y funciones decrecientes y que observen detenidamente las características.



DECRECIENTE	CRECIENTE
$-1.6 < -1.5 < -1.4$ $f(-1.6) > f(-1.5) > f(-1.4)$	$-1.2 < -1 < -0.7$ $f(-1.2) < f(-1) < f(-0.7)$
$-1.4 > -1.5 > -1.6$ $f(-1.4) < f(-1.5) < f(-1.6)$	$-0.7 > -1 > -1.2$ $f(-0.7) > f(-1) > f(-1.2)$

Figura 40. Funciones crecientes conservan el orden y funciones decrecientes se invierte el orden.

El debate se inicia con las propuestas de los participantes de las características que se observan en esta tabla y finaliza con las siguientes participaciones:

> PROF: Entonces, para sistematizar ¿Qué hace una función decreciente? ¿Alguien que lo pudiera decir?
> E4: Cuando la función decrece, la imagen se invierte, no el movimiento de la imagen
> PROF: ¿Qué es lo que se invierte?
> E8: El orden de la desigualdad
> PROF: El orden y, ¿cuándo la función es creciente?
> E8: El orden se conserva
> PROF: El orden se conserva, entonces cuando la función es decreciente se invierte el orden, cuando la función es creciente conserva el orden. Esta es una característica importante (**Figura 40**).

Posteriormente, el debate científico se orienta a que, mediante el uso de contraejemplos se rompa con algunas ideas observadas en los análisis preliminares, asociadas a las concepciones: una función creciente tiene que ser positiva y de que una función decreciente negativa. A través de la formulación de contraejemplos se refuta y se hacen evolucionar aquellas propuestas de definiciones que involucran condiciones que garantizan la presentación formal de la definición de los conceptos de función creciente y decreciente. El debate sobre el ejercicio 6 se da en los siguientes términos:

> E2: No existen funciones que cumplan las condiciones. Ninguna función las puede cumplir
> E1: [Dibuja un plano cartesiano con el intervalo [-5,4] y traza una función creciente que va de -5 a 1 y decreciente de arriba hacia abajo y llega a 4, siendo ésta una función definida a trozos] (Ver **Figura 41**)
> PROF: El dominio es [-5, 4], en ese caso creciente y negativa en [-5, 1], y decreciente y positiva en [1, 4]. [Señala la **Figura 41**, siguiendo con su mano esta representación]

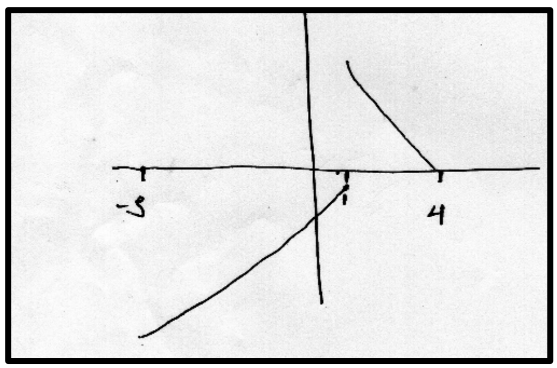


Figura 41. Contraejemplo de E1.

Al obtener la gráfica como se observa en la **Figura 41**, el PROF reflexiona junto con los alumnos acerca del porqué de la representación obtenida y qué es lo que condicionó que se represente de esa manera.

En la reflexión dada, el PROF y los alumnos coinciden en que la concepción de asociar el crecimiento de una función con ser positiva y el decrecimiento de una función con ser negativa, es una concepción errónea y que es necesario disociarla.

Finalmente, respecto al ejercicio 7 el debate se orienta hacia el hecho de que si se conoce cómo se compara un “número grande de imágenes”, es posible o no determinar el sentido de variación de una función. Esto resaltó la necesidad de cuantificar las afirmaciones. La mayoría de los equipos había concluido que en el caso del inciso a) se trataba de una función creciente y en el inciso b) de una función decreciente. El debate se inicia con el dibujo de E1 en el pizarrón:

E1: [Dibuja un plano cartesiano cuyo dominio va del [-5, 5] y traza una curva decreciente que va del cuadrante 2 al cuadrante 1 y anota la respuesta del cuestionamiento]
PROF: ¿Quién obtuvo algo diferente? [Se pone frente al grupo de alumnos]
PROF: ¿Todos están de acuerdo en eso? [Señala las gráficas dibujadas por E1]
Varios responden: Sí
PROF: Observen bien, en la información que nos dan, nos dicen que $\mathrm{f}(-5) \leq \mathrm{f}(-4.99) \leq \mathrm{f}(-4.98)$, etc., [Lee y señala el cuestionamiento de la Actividad III, Ejercicio 7, a)]
E8: Es cierto, la respuesta no es que en el inciso a) sea creciente, y en el inciso b) sea decreciente, no se puede concluir eso [También señala las gráficas].
PROF: ¿Por qué?
E4: Porque tenemos las imágenes y esas podrían ser positivas o negativas
PROF: No, no
E4: O bueno la función, más bien no la tenemos
[Surgen algunas otras ideas, de E4, E5, entre otros]
PROF: No es por eso, ¿por qué E8?
E8: Porque el intervalo es continuo lineal, entonces siempre hay un número entre $f(5)$ y $f(4{,}99)$
PROF: ¿se fijan que es lo que sucede? ¿Cómo podría ser una gráfica de una función de esa naturaleza? De esa que ya te imaginaste ¡Un monstruo! [Entrega el plumón a E8 y lo invita a que pase a dibujar la figura]
PROF: ¿Cómo puede ser? A ver, dibuja ese monstruo [Motiva a E8 para que escriba esta idea]
PROF: Es el inciso a) $\mathrm{f}(-5) \leq \mathrm{f}(-4.99)$ ahí está bien, si ustedes se fijan los puntos están muy cerca, bueno para lo que consideramos que es cerca. [Indica resaltando este enunciado]
E8: Bueno, se supone que este es $f(-5)$ y este es $f - 4.99)$ [Lo anota en el pizarrón y señala su imagen]
PROF: Eso es, $f(-4.99)$ [Afirma este valor de la imagen]
E8: Entonces este puntito puede ser menor o igual [Señala la imagen de $f(-5)$]
PROF: Bueno lo que sí sabemos es que $f(-5)$ es más pequeño o igual que $f(-4.99)$ [Señala la imagen de $f(-5)$]
E8: Entonces este punto puede estar acá [Coloca un punto en la ubicación que indica la imagen]
PROF: O puede estar más arriba o más abajo [Señala la figura que está dibujando E8]
E8: Pero entre estos dos puntitos pues seguimos teniendo puntitos [Señala otros puntos en el dominio entre $f(-5)\ y\ f(-4.99)$], entonces, yo puedo hacer esto [Traza una curva parecida a una "v" entre los dos puntos de la imagen]
PROF: Bien
E8: Y así me puedo seguir con las otras, si va decreciendo entonces yo puedo tener puntos que van bajando [dibuja varias curvas entre cada uno de los puntos que ubicó en el plano cartesiano]. (Ver **Figura 42**)
PROF: Si se fijan, que de esa información no podemos decir nada acerca del sentido de variación de la función, dado que desconocemos que puede suceder entre uno y otro punto.

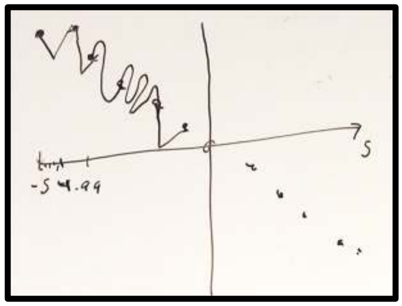


Figura 42. Gráfica de contraejemplo del cuestionamiento 7.

De la realización de esta fase se resalta lo siguiente:

Dos de los equipos que intervienen en el debate logran resolver los ejercicios 1, 2, 3 y 4 de la actividad III, tales ejercicios están ligados directamente con las condiciones que garantizan el crecimiento y el decrecimiento.

5.6. Definiciones que emergieron

El PROF orientó la actividad del debate hacia la búsqueda de acercamientos a la formulación de la definición de función creciente y función decreciente. Este debate se inicia cuando el PROF identifica en los argumentos de los alumnos ideas cercanas a las características esenciales de las definiciones. Veamos el diálogo obtenido:

> PROF: Si quisiéramos dar una definición de función creciente y función decreciente, ¿cuál sería? piensen bien la respuesta. Después vamos a definirla formalmente, pero en este momento según lo que estamos viendo [actividad II], si ustedes le quisieran explicar a una persona que es una función creciente y que es una función decreciente que le dirían. Piénsenlo. ¿E9?
> E9: Pues yo creo que una función es creciente, pues como lo dice su nombre crece, sería cuando va una función aumentando o en este caso pues la ¿parábola? [Señala la gráfica obtenida de las áreas del triángulo]
> P: Si es parábola. [Afirma el comentario de E9 y señala la gráfica del triángulo]
> E9: [Continúa] La parábola que se va formando aquí es, hacia arriba, o sea, de una u otra manera ambos números tanto como los x como los y van en aumento y en la decreciente es como dice pues, va decreciendo como que va bajando esta cantidad, en este caso solamente, me parece que solo son en y. [Ver tabla 3, Evolución 1]
> PROF: E1
> E1: En este caso yo lo definiría como aquella función en donde a cada elemento del dominio más chico que otro, este va a tener una imagen más grande, o sea, si tomamos un valor chico, un valor del dominio x y tomamos un valor del dominio $x + 1$, este va a tener una imagen más grande que el de x.
> PROF: Ese sería para la ¿función?
> E1: Para la función creciente y decreciente sería lo contrario, tomamos un elemento del dominio x entonces va a tener una imagen más grande que $x + 1$

PROF: Vamos a ver lo que dice E1
E5: Disculpe, también podría ser para cada movimiento de x hay un movimiento en y en cada uno de ellos. Y para cada incremento en x hay un incremento en y. [Ver Definición 4 (Cuarto acercamiento)]
PROF: Escriban esas definiciones en una hoja por equipo.

De este proceso de debate, se obtienen las siguientes propuestas de definición en las producciones de los alumnos:

Definición 1 (Primer acercamiento). *Función creciente: tomando valores del dominio, su imagen será mayor al valor del dominio*. Esta definición tiene un lenguaje poco claro, además de estar muy alejada de la definición formal de función creciente.

Definición 2 (Segundo acercamiento). *Una función creciente es cuando de un punto se parte y los intervalos van en aumento. Es decir, "x" y "y" irán creciendo y eso da forma de parábola*. Esta definición se asemeja a la anterior, sólo que es más explícita al hablar de crecimiento y de un aumento en las variables independiente y dependiente. Esta expresión nos sirve de partida para obtener un acercamiento hacia la definición formal.

Definición 3 (Tercer acercamiento). *Una función creciente es cuando x toma un valor pequeño y al ir aumentando el valor en x, ya sea recta o curva lo que nos dé la función eso irá aumentando cada vez más.* Esta definición podría clasificarse dentro de la definición dinámicas (antes descrita), pero además está dada en términos narrativos según Chorlay (2007). (Véase **Tabla 3**, evolución1)

Definición 4 (Cuarto acercamiento). *Una función creciente existe cuando para cada aumento de "x", existe un crecimiento en "y"*. Esta definición es la que aparece en los libros de texto (Contreras, 2014; Cuéllar, 2007; Garza, 2015), está dada en términos intuitivos, más que una definición es la expresión o la explicación, en términos informales, de la idea de crecimiento y de decrecimiento acorde con la idea intuitiva de variación dinámica de las funciones. Esta definición evolucionará si se logran matematizar las expresiones "aumento de x" y "aumento de y" mediante desigualdades e implicaciones. Pero eso implica un cambio de concepción del sentido de variación.

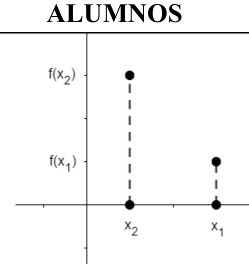
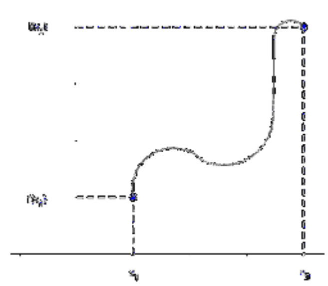
Definición 5 (Quinto acercamiento). *Se le llama función creciente a una función cuando* $x_1 > x_2$ *y* $f(x_1) > f(x_2)$. En esta definición se observa una mayor precisión en el lenguaje utilizado. Es evidente que esta última definición no es, en términos estrictos, exactamente la definición de una función creciente. Sin embargo, consideramos que está muy próxima a ella. Esta definición puede evolucionar hacia la definición formal de función creciente (Osgood, 1912) de manera más precisa en la etapa de institucionalización. (Véase **Tabla 3**, evolución 2)

Definiciones	**Se refuta la respuesta**	**Evoluciona**
Definición 1	Sí	No
Definición 2	Sí	No
Definición 3	Sí	No
Definición 4	Sí	Sí
Definición 5	Sí	Sí

Tabla 2. Identificación de las definiciones y la consideración de su refutación o evolución.

5.7. Evolución hacia la definición formal

De las definiciones de funciones crecientes y funciones decrecientes obtenidas anteriormente, se identificaron dos aproximaciones que evolucionan hacia la definición formal (**Tabla 3**):

#	**DEFINICIÓN**	**EVOLUCIÓN DE LA DEFINICIÓN**	**CONTRAEJEMPLO PRESENTADO POR LOS ALUMNOS**	**ANÁLISIS**
1	Definición 3	En el debate instaurado en el aula esta definición se interpretó por los alumnos como: $f(x_1) < f(x_2)$	 $x_2 < x_1$ Contraejemplo propuesto por E1.	Primera expresión considerando que sólo las imágenes tienen que compararse sin considerar el dominio.
2	Definición 5	Esta definición se obtuvo de la producción de los alumnos: *Se le llama función creciente a una función cuando* $x_1 > x_2$ *y* $f(x_1) > f(x_2)$.	 Contraejemplo propuesto por E8.	Expresión sin cuantificadores, por lo que es susceptible de poner un contraejemplo al no conocer qué sucede en una vecindad de puntos del intervalo.
3	Acercamiento a la Definición	$\forall\, x_1, x_2 \in [a, b]$, con	Este acercamiento a la definición formal que se obtiene	

	Formal que emerge.	$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ se tiene que f es creciente en $[a, b]$	consideramos es consistente y próxima a la definición formal que se conoce actualmente.	

Tabla 3. Evolución de la definición formal de función creciente. Reportado en Cabañas-Ramírez et al. (2020).

El debate instaurado en el aula que permite hacer evolucionar las definiciones provisionales (evolución 2) hacia la definición formal, se inicia cuando el PROF anota en el pizarrón la característica principal de las funciones crecientes y decrecientes *"una función es creciente en el intervalo [a, b] si la función conserva el orden"* y *"una función es decreciente en un intervalo* $[a, b]$*, si la función invierte el orden o cambia el sentido del orden"*, a partir de ahí el PROF orientó el debate con el equipo de E1 (quienes habían propuesto la definición 5) para hacer evolucionar esta definición con cuantificadores e implicaciones, tal como se muestra a continuación:

> PROF: Ahora eso en signos matemáticos, eso es digamos descriptivo nada más, narrativo esa situación [Refiriéndose a lo que anotó en el pizarrón], en símbolos matemáticos ¿cómo lo haríamos?
> E1: $f(x)$ es creciente si y solo si
> PROF: Si y solo sí; voy a poner aquí [Escribe] "si y solo si"
> E1: Si y solo si $x_1 > x$, no $x_i > x_j$
> PROF: x_j
> E1: No, entonces sería, sería eso y ya después el si y solo si
> PROF: A primero así [Escribe] $x_i > x_j$
> E1: Y después el si y solo si
> PROF: Si y solo si
> E1: $f(x_i) > f(x_j)$ para todo x_i, perteneciente a
> PROF: Perteneciente a
> E1: R, a $[a, b]$
> PROF: [Al final queda escrito] " $x_i > x_j$ *si y solo si* $f(x_i) > f(x_j) \forall\, x_i, x_j \in [a, b]$" vamos a ver si sucede esta situación y si son necesarias, entonces, ¿cómo quedaría esta situación? Como quedaría ¿igual? [Refiriéndose a la definición de función decreciente] [Ver Evolución 2 y 3]
> E1: No, aquella nada más va a cambiar a el signo de desigualdad de las imágenes.
> PROF: Bueno fíjense bien no se requiere tanto, no se requiere[señala] *si y solo si*, de hecho, la definición es la siguiente: [Escribe]
> "Definición: decimos que f es creciente en el intervalo $[a, b]$ si $\forall\, x_1, x_2 \in [a, b]\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$"

De la **Tabla 3**, se desprende el siguiente análisis: En la formulación de la definición 3 se identifica la ausencia del cuantificador universal, que declara la variable del dominio y la relación entre ellas; con su implicación de relación de las imágenes. Por tanto, existe un contraejemplo; el propuesto por E1 que no permite a partir de esta propuesta de definición al acercamiento hacia la definición formal.

Al observar esta situación, se considera para análisis una nueva definición de las que emergen de los alumnos, seleccionándose ahora la definición 5, la cual se muestra como la evolución dos de la **Tabla 3**. En esta nueva definición de función creciente, los alumnos identifican errores en la falta de cuantificadores universales, dificultando la determinación de la variación de una función en un intervalo, por lo que no es difícil anteponerle un contraejemplo que haga evidente esta incongruencia. El contraejemplo 2 en la **Tabla 3**, lo propone el E8 quien antes había propuesto el contraejemplo presentado en la **Figura 40** de la actividad III.

Finalmente, del análisis de la definición dos la cual se falsea con el contraejemplo dos mostrado en la **Tabla 3**, evoluciona y se obtiene una nueva definición 3 presentada en la misma tabla la cual está más próxima a la definición formal que se conoce actualmente, a la cual no se le puede anteponer ningún contraejemplo por lo que la definición es válida para cualquier función creciente. Análogamente se puede reflexionar para acercar las definiciones sobre función decreciente que evolucionan, hacia la presentación formal de su definición.

Capítulo 6

REFLEXIONES Y CONCLUSIONES

6.1 Reflexiones y conclusiones

En este trabajo desarrollado nos planteamos el objetivo de elaborar y poner en funcionamiento una Ingeniería Didáctica para el tratamiento de los conceptos de función creciente y función decreciente, en estudiantes del pre universitario. Para lograr tal alcance, el trabajo se fundamentó teóricamente en los aportes de la Teoría de Transposición Didáctica, la Teoría de Situaciones Didácticas, y las herramientas didácticas del Contraejemplo y el Debate Científico en Cursos de Matemáticas, estos elementos y la visión constructivista del conocimiento, permitieron utilizar la Ingeniería Didáctica como Marco Metodológico.

El estudio epistemológico reportado, nos mostró que la noción de sentido de variación (función creciente o función decreciente) que en un principio pensábamos de una comprensión elemental respecto a otras nociones aparentemente más sofisticadas, transcurrió por un proceso de construcción no exento de dificultades. En los programas de estudio de nuestro país son nociones que se introducen en tercer año de bachillerato en el curso de cálculo diferencial. Desde un punto de vista didáctico, estas nociones dependen solamente de los puntos de vista puntual y global. Por lo tanto, resultó sorprendente el descubrimiento de que la noción de sentido de variación, solo llegó a definirse hasta el año de 1912 en el libro de texto no elemental de análisis matemático de Osgood (1912), lo que muestra una naturaleza epistemológica no tan elemental de estas nociones. Poincaré (1881), incluyó estas nociones entre las propiedades “cualitativas” de las funciones como parte de un nuevo y difícil campo de investigación. Es conveniente precisar que la noción de Poincaré de “estudio cualitativo” abarca más que aspectos intuitivos o gráficos.

En los trabajos de Fourier, Lagrange y Cauchy, estas nociones son consideradas evidentes y no explicitan ninguna definición, aunque, en el caso de Lagrange y de Cauchy, las demostraciones que dan del teorema que vincula el signo de la derivada con el sentido de variación de una función permiten vislumbrar las ideas subyacentes. Ampère siente la necesidad de definirlas, pero su "definición" explícita es en términos puramente intuitivos y no satisface las condiciones de una definición matemática rigurosa (definir a partir de términos que a su vez hayan sido rigurosamente definidos).

Resultó que estos hechos históricos nos hicieron analizar con mayor detenimiento las definiciones formales de función creciente y función decreciente encontrando básicamente tres aspectos: a) La definición formal involucra los puntos de vista puntual (se define a partir de la comparación de puntos y de sus imágenes) y global (la propiedad se tiene que cumplir para todas las parejas de puntos en un intervalo). b) La estructura lógica de la definición involucra una doble cuantificación (aunque de manera explícita solo aparece un cuantificador) y una implicación entre dos desigualdades. c) La idea subyacente de sentido de variación de una función en la definición formal difiere de la que subyace en la noción intuitiva. En esta última, se trata de una descripción dinámica de dos cantidades que varían de manera ligada en la que si una aumenta, la otra también aumenta (para una función creciente) o en la que una aumenta, la otra disminuye (si se trata de una función decreciente). Mientras que en la definición formal subyace la idea estática de transformación entre dos conjuntos ordenados mediante la cual, el orden se preserva (función creciente) o se invierte (función decreciente).

A partir de estos hechos, se considera entonces que un alumno es capaz de dominar las nociones de función creciente y función decreciente, si:

- A partir del conocimiento de que, por ejemplo, f es una función decreciente sobre $[2, +\infty)$, es capaz de comparar las imágenes de dos números dados en el intervalo $[2, +\infty)$ (por ejemplo, de ordenar e incluso comparar las imágenes de a y $a + 1$ para a elemento de $[2, +\infty)$.
- Él sabe que disponer de las variaciones de una función no le permite comparar las imágenes de cualesquiera dos números. Por ejemplo, sabe que no puede comparar

$f(\frac{1}{2})$ y $f(3)$ a partir de la sola información de que f es creciente en el intervalo $(-\infty,$ $2)$, decreciente en el intervalo $(2, +\infty)$ y $f(2) = 3$.

Un alumno prueba que domina el sentido de lo que es una función monótona si sabe recurrir al conocimiento que tiene del sentido de variación de funciones para comparar números. Por ejemplo, comparar, sin utilizar la calculadora, $(\sqrt{3}+1)^2$ y $\left(\frac{12}{7}\right)^2$.

Sin embargo, un estudio empírico a un grupo pequeño de alumnos de licenciatura, reveló que la mayoría no recordaba la definición de función creciente o decreciente. Además, estos alumnos tuvieron muchas dificultades para comparar imágenes de números a partir de la sola información del sentido de variación de una función.

Esto nos condujo a realizar un estudio de los libros de texto que se utilizan en los niveles de bachillerato y primeros años de universidad para conocer el tratamiento que dan al tema del sentido de variación de funciones. A grandes rasgos, se encontró que la mayoría de los libros de bachillerato no definen de manera explícita lo que es una función creciente o decreciente ni enuncian de manera clara los teoremas asociados al sentido de variación. Esto se sustituye solamente con ideas intuitivas y explicaciones gráficas, pasando inmediatamente a describir los procedimientos para determinar los extremos de una función y las regiones de crecimiento y de decrecimiento, a manera de recetas e ilustrándolos con ejemplos.

En los libros de universidad, se encontró también una especie de paralelismo entre las definiciones y las demostraciones de teoremas encontrados en el estudio epistemológico. Más precisamente, la definición que subyace en la idea de Cauchy de una función creciente es equiparable a la que da Santaló y Carbonell quienes definen primeramente una función creciente en un punto (a partir de vecindades) pasando después a definirla en un intervalo, cuando esta es creciente en cada punto del intervalo. La descripción intuitiva que se da en Cuéllar (2007) es equiparable a la "definición" dada por Ampère y, finalmente, la definición presentada en Swokowski (1982) es equiparable a la presentada por Osgood. En el caso de las demostraciones del teorema que vincula el signo de la derivada con el sentido de variación de una función, se encontró que en el libro de Granville y en una edición del libro de Ayres, se comete el mismo error que cometió Cauchy en su demostración al deducir del hecho de que si la derivada es positiva en un punto, entonces la función es creciente en una vecindad de ese punto, cuya falsedad es posible hacerla evidente con un contraejemplo.

Con estos elementos sustentados en la Teoría de Situaciones, la Teoría de la Transposición Didáctica y la Ingeniería Didáctica, se diseñó e implementó una ingeniería que formara en los alumnos, primeramente la noción intuitiva de sentido de variación de una función y, en un segundo momento, permitiera la transición de esta idea dinámica de variación a la idea estática de transformación entre dos conjuntos ordenados que preserva o invierte el orden y que finalmente llevara a la formulación de la definición formal.

La ingeniería didáctica propuesta, consta de tres etapas:

Etapa 1: Hacer emerger los primeros elementos y rasgos esenciales de la noción de función creciente y función decreciente. En esta etapa se formaron equipos de emisores y de receptores. A los primeros se les proporcionó la figura de una curva situada en un sistema de coordenadas y se les dio la indicación de redactar un mensaje para que los equipos receptores dibujaran, a partir de este mensaje, una curva lo más parecida a la curva proporcionada. La única limitante fue que en el mensaje no debieran poner un dibujo y solo se expresaran en lenguaje escrito. En sus mensajes los emisores utilizaron términos coloquiales para dar sus instrucciones, tales como, "dibujar montañas", "segmentos de parábolas", "la curva sube", "la curva baja". En sus estrategias, diseccionaban a la curva en relación a las raíces, a los extremos o a las regiones en donde consideraban que existían los segmentos de parábolas. Las producciones fueron aprovechadas para introducir el lenguaje de función creciente, función decreciente, sentido de variación, máximo y mínimo en un contexto gráfico y sin dar definiciones de estos términos.

Etapa 2: Formar la idea intuitiva de sentido de variación desde el punto de vista dinámico dejando en claro que en esta noción se involucran dos cantidades que varían de manera ligada. Para ello, se diseñó una actividad relativa al cálculo de áreas de figuras geométricas cuya modelación generaba funciones crecientes o decrecientes, según la magnitud que se eligiera como variable independiente, lo que provocó una discusión de por qué algunos equipos obtenían una función creciente como modelo de una de las áreas, mientras que otros equipos obtenían una función decreciente para la misma área.

Etapa 3: Construir, en un primer momento, la idea que subyace en la definición formal del sentido de variación como una transformación entre dos conjuntos ordenados que preserva o invierte el orden y, en un segundo momento, formular la definición de función creciente. Para ello se presentaron actividades en donde, a partir de la información del sentido de variación de una función, se compararan colecciones de números para generar, la idea de que, por ejemplo, "una función f es una función creciente sobre el intervalo I" significa que: cada vez que una lista de números de I pueden ordenarse $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n$, entonces las imágenes están ordenadas de manera similar $f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_3) \leq \cdots \leq f(x_n)$. En primera instancia, esta idea pudiera parecer aún más difícil de asimilar en términos de cuantificación que la idea que subyace en la definición estándar de función creciente que solo emplea un cuantificador. Esto puede ser cierto desde un punto de vista técnico, pero existen razones para pensar que no lo es desde un punto de vista cognitivo. Por un lado, se hace eco de las tareas de ordenar que son familiares para los alumnos (desde la escuela primaria), agregando así la nueva noción abstracta a la lista de métodos para ordenar números. Sin embargo, existen razones epistemológicas más profundas para apoyar nuestra afirmación. Hemos dicho que, la definición estándar se basa fundamentalmente en la idea de que una función es una transformación entre conjuntos, las propiedades de variación son propiedades de las transformaciones entre los conjuntos ordenados. Hay formas de enseñar la noción de transformación abstracta (por ejemplo, diagrama de flechas), pero estas no están contempladas en el plan de estudios actual.

El estudio de las matemáticas del siglo XIX nos mostró cómo los matemáticos profesionales usaban eficientemente otros conceptos de funciones distintos del concepto de transformación. Más precisamente, las nociones básicas no son "conjunto" y "transformación" sino "cantidad variable" y "dependencia entre dos cantidades". Para resumir, una sola cantidad puede "variar", y dos cantidades dependientes x y y tienen variaciones dependientes. Este marco conceptual conduce a diferentes definiciones y diferentes estilos de prueba; así, estas actividades descansan hasta cierto punto en la idea de una cantidad variable la cual se percibe a lo largo de $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n$ cadena expresada de forma discreta: esto debería suavizar la transición desde la comprensión puramente intuitiva de la variación (continua) de una única cantidad hasta la formulación de la definición estándar puramente discreta de transformaciones entre los conjuntos ordenados (que no expresa ninguna idea de "variación" en absoluto). El grado en que esta idea de comparar colecciones de números a partir de la información del sentido de variación de una función, realmente refleja lo que se encuentra en el siglo XIX es una cuestión profunda, que, aunque no se realizó en este trabajo, merece ser analizada.

Cada una de estas etapas fue conducida en tres momentos: un primer momento de trabajo al seno de los equipos en los cuales los alumnos accionaban los recursos de que disponían para dar respuesta a los cuestionamientos que se les hacían (situación de acción). Un segundo momento en el los alumnos formulaban sus respuestas y las socializaban con el pleno de la clase mediante la exposición de sus producciones (situación de formulación). Y un tercer momento en el los expositores recibían críticas y observaciones por parte de los miembros de los otros equipos quienes jugaban el papel de oponentes y hacían que los ponentes defendieran o reformularan las respuestas que habían producido (situación de validación). Este último momento estuvo regido por las reglas de la estrategia didáctica conocida como Debate Científico en Cursos de Matemáticas.

Para la formulación de la definición se utilizaron las producciones de los alumnos del último bloque de actividades. En efecto, en este bloque se tienen dos tipos de actividades encaminadas a este propósito: primero, a partir de conocer el sentido de variación de una función, comparar imágenes, lo que ponía el acento en que una función creciente (decreciente) es una transformación que preserva (invierte) el orden y, segundo, a partir de que se sabe cómo se ordena un conjunto “grande” (pero finito) de imágenes de puntos de un intervalo, decir si es posible determinar el sentido de variación de la función, lo que ponía el acento en la necesidad de cuantificar las formulaciones para responder a los contraejemplos que surgían a las definiciones propuestas, permitiendo un proceso de afinaciones sucesivas hasta llegar a la definición formal.

En esta etapa la exhibición de ejemplos y contraejemplos que exhibieron los alumnos jugó un papel fundamental. En efecto, los alumnos exhibían principalmente contraejemplos gráficos cuando consideraban que la afirmación de algunos de los ponentes era falsa. Este trabajo sobre contraejemplos gráficos resultó muy interesante ya que promovió una comprensión más profunda del concepto sin recurrir a la capacidad de los alumnos para idear argumentos formales escritos usando cuantificadores (y negaciones de implicaciones, etc.).

Como era la primera vez que los alumnos se enfrentaban a actividades de esta naturaleza, no se les exigió idear argumentos formales escritos para las afirmaciones que consideraban verdaderas o contraejemplos expresados de manera formal o por medio de una expresión analítica para las que consideraban falsas. Sin embargo, es importante desarrollar estas capacidades para ir gradualmente ascendiendo en las etapas de su madurez cognitiva.

En este contexto, el profesor orientó las actividades de los debates hacia la búsqueda de los acercamientos a la formulación de la definición de función creciente y función decreciente, y en ese proceso didáctico emergieron cinco definiciones, propuestas por los alumnos, de las cuales sólo dos evolucionan hacia la definición formal. Esta evolución obedeció por un lado a la participación de la población de alumnos en un medio de debate científico y el contraejemplo (considerado en las actividades de experimentación e instaurado en la etapa de institucionalización favoreciendo los procesos de construcción del concepto de función creciente y función decreciente), las cuales, usadas como herramienta mediadora en la formulación de conjeturas y refutación y/o afinación de acercamientos a las definiciones, posibilita tal evolución. En este proceso didáctico se logró identificar el nivel de lectura e interpretación de las gráficas que involucran estos conceptos de crecimiento y decrecimiento por los estudiantes que conformaron la población objeto de estudio.

Por otro, a la preparación matemática y metodológica del profesor en los aspectos didácticos, cognitivos y epistemológicos del contenido matemático del sentido de variación de funciones factor fundamental en la construcción de la definición de función creciente que alcanzan los alumnos a través del debate científico y el uso del contraejemplo.

Finalmente, consideramos que el trabajo sobre definiciones, su formulación y su integración en el concepto, no es el único aspecto relevante; comprender, recordar e identificar (ya sea de forma proactiva o retroactiva) una definición no son las únicas habilidades necesarias para un pensador versátil: idear contraejemplos para afirmaciones incorrectas, reconocer y probar la equivalencia de diferentes formulaciones del mismo concepto, comprender pruebas complejas, idear pruebas simples, etc., también son habilidades esenciales, a desarrollar en los alumnos.

Con la puesta en desarrollo de esta ID y bajo los referentes teóricos de la TSD, TTD, y la ingeniería didáctica usada como metodología de investigación, se contribuye con una propuesta de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de función creciente y decreciente a nivel preuniversitario, esta contribución rompe con la presentación clásica del contenido y destaca que la conducción bajo un debate científico y el uso adecuado del contraejemplo como herramienta didáctica mediadora contribuye en dotar de significados los procesos que conllevan a la formulación de definiciones matemáticas, como el caso de los conceptos estudiados. Otros conceptos que forman parte del sentido de variación de una función, como son el máximo y el mínimo se pueden tratar bajo esta propuesta ya que desde la visión de los autores; se han preparado las condiciones metodológicas y matemáticas para tal tratamiento.

6.2. Limitaciones de la investigación

Al reflexionar sobre el desarrollo y resultados de esta investigación, se identificó una limitante en este trabajo y este es que sólo se reportó la obtención de la definición de función creciente y función decreciente, y no se abordaron otros elementos que forman parte del sentido de variación de una función (máximos y mínimos), por consiguiente, es importante realizar un estudio similar al presentado aquí, para analizar la evolución de las concepciones y resultados que se utilizan para determinar la existencia de máximos y mínimos de una función, donde seguramente se encontrarán situaciones parecidas a las presentadas en este documento. Por tal motivo, consideraremos este estudio como preliminar y será necesario realizar estudios más profundos y analizar documentos de otros matemáticos que contribuyeron a dar un carácter riguroso al cálculo diferencial, pues resulta importante reconocer las nociones que a lo largo de la historia se han mostrado resistentes a su evolución y generalización, y que en muchas ocasiones se constituyen en obstáculos para el aprendizaje.

Por otro lado, los datos sobre el sentido de variación de funciones que se obtienen con la implementación de la ID fueron vastos y suficientes para realizar esta investigación en relación a la función creciente y función decreciente, dejando como perspectiva de estudio la formación de otros conceptos matemáticos asociados al análisis del sentido de variación de funciones, tales como: puntos de inflexión, la determinación de los intervalos de concavidad y convexidad, las asíntotas, las simetrías axiales o puntuales, las intersecciones con los ejes de coordenadas, la determinación del dominio, el análisis de la paridad y la obtención de los puntos de discontinuidad.

6.3. Aportes y alcances de los resultados de investigación

En la revisión y reporte de antecedentes sobre el sentido de variación de funciones, se cuentan con pocas investigaciones acerca de este tópico de interés, además, se destacó que sobre los conceptos fundamentales del cálculo existen dificultades para su comprensión; tanto en alumnos como en profesores, y que a pesar de las estrategias que se han elaborado y experimentado, como producto de las investigaciones, este problema aún persiste.

Como se comprobó en el análisis de los resultados, los marcos teóricos propuestos (TSD y TTD) posibilitan "modelar" el proceso enseñanza-aprendizaje a través de acciones implícitas tales como: indagar, implementar instrumentos didácticos y obtener información en el aula considerando como actores principales de esta actividad al profesor, el alumno y el contenido matemático. Asumiendo también, que la posibilidad de la construcción de un conocimiento por parte del alumno se da a partir de adaptaciones al medio donde se construye tal conocimiento.

Respecto al uso de la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación, las fases que la conforman permite crear y obtener el principal aporte de esta investigación que es la obtención de una ID la cual contribuye, por una parte, a proveer de una estrategia de enseñanza a los profesores que permita formar en los alumnos la definición de función creciente y función decreciente y, por otra parte, a contribuir en el aprendizaje de los alumnos dotándolo de un instrumento donde se destaca que la conducción bajo un debate científico y el uso adecuado del contraejemplo como herramienta didáctica mediadora, contribuye en dotar de significados los procesos que conllevan a la formulación de definiciones matemáticas.

Estas herramientas se aplicaron con el fin de promover en el aula una microcomunidad científica de alumnos, en donde a través de los debates, conjeturas, confrontaciones de las propuestas y razonamientos planteados, buscando que las definiciones de función creciente y decreciente fluyeran de manera natural, por lo que los objetos del debate planteados, giraron en torno a descubrir los rasgos esenciales de las funciones crecientes y funciones decrecientes sobre preservar o invertir el orden de sus imágenes.

Para efectos de lograr que los alumnos se apropien de este concepto matemático, se eligieron partes de las conjeturas propuestas por ellos para que se transformaran por rectificaciones sucesivas, y se obtuvieran las definiciones formales de estos contenidos (rescatando las “buenas ideas” de las conjeturas iniciales, que por el juego de las pruebas o de contraejemplos se transformaron en verdaderas).

Desde esta perspectiva, consideramos que el contraejemplo es un recurso de aprendizaje del Cálculo y en específico del sentido de la variación de las funciones el cual forme en el alumno los conceptos y definiciones que consideramos en esta investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Cerón, M. y Reyes, R., (2010). *Cálculo Diferencial.* México: Progreso.

Ampère, A. M. (1824). Précis des leçons sur le calcul différentiel et le calcul intégral, CRH cours: A3a 174, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique. P. 12. https://doi.org/10.1017/cbo9780511702624.003

Arsac, G., Develay M. y Tiberghien A. (1989) *La transposition didactique en mathématiques, en physique et en biologie.* Irem et Lirdis de Lyon. Universidad de Lyon.

Arteaga, S. y Espinoza, J. (2014). *Cálculo.* México: Fondo de cultura económica.

Apóstol, T. (1984). *Calculus*. México: Reverté.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En Gómez, P. (Ed.) *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 33-59). Bogotá, Colombia, Grupo Editorial Iberoamérica.

Ayres, F. (1971). *Cálculo diferencial e integral*. México: Mc Graw Hill.

Ayres, F. y Mendelson, E. (2001). *Cálculo.* México: Mc Graw Hill.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

Bardelle, C. (2010). Interpreting monotonicity of functions: A semiotic perspective. In M. F. Pinto & T. F. Kawasaky (Eds.), *Proceedings of the 34th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 177–184). Belo Horizonte: PME.

Bardelle, C & Ferrari, PL. (2011). Definitions and examples in elementary calculus: the case of monotonicity of functions. *ZDM Math Educ. 43*. 233–246.

Barquero B., Bosch M. (2015). Didactic Engineering as a Research Methodology: From Fundamental Situations to Study and Research Paths. En: Watson A., Ohtani M. (eds) *Task Design In Mathematics Education. New ICMI Study Series.* Switzerland: Springer, Cham.

Brousseau, G. (1978). "La cours a 20", en *Theorie des situations didactiques* (1998) La Pensee Sauvage, pp. 24-43. Una primera version, de 1978, en Etude locale des processus d'acquisition en situation scolaire, Etude sur l'enseignement elementaire (Cuaderno 18,7-21). Bordeaux, IREM y Universidad de Bordeaux 1.

Brousseau, G. (1986a). *Théorisation des phénomènes d`enseinement des mathemátiques* (Tesis Doctoral). Universidad de Burdeos, Francia.

Brousseau, G. (1986b). Fondaments et mèthodoes de la didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique de Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1988a). *Didactique des mathemáticques et formation des maîtres a l`école élémentaire*. Actas de la Universidad de Verano, Ediciones IREM de Burdeos, Francia.

Brousseau, G. (1988b). Los diferentes roles del maestro. En Parra y Saiz (comps.) *Didáctica* *de matemáticas. Aportes y reflexiones* (1994), 65-94. Buenos Aires, Argentina: Paidós Educador.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. París, Francia: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del zorzal.

Cabañas-Ramírez, N., Locia-Espinoza, E. y Morales-Carballo, A. (2019). Didactic Engineering in the Study of the Sense of Variation of Functions: Preliminary Analysis. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(2), em0566. https://doi.org/10.29333/iejme/6261

Cabañas-Ramírez, N., Locia-Espinoza, E., Morales-Carballo, A. y Merino-Cruz, H. (2020). Didactic Engineering for the Treatment of Variation of Functions in Pre-University Level. The Increasing and Decreasing Cases. *Pedagogical Research, 5*(2), em0055. https://doi.org/10.29333/pr/7846

Cauchy, A. (1823). Resumé des lecons d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. 1ere partie Analyse Algebraique. Paris, Francia: Gauthiers-Villars.

Chevallard, Y. (1980). The didactics of mathematics: its problematic and related research. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *1*, 146-157.

Chevallard, Y. (1985) La transposition didactique; du savoir savant au savoir enseigné, París, Francia: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1991). La Transposición Didáctica: Del saber sabio al saber enseñado. Francia: Grupo Editorial Aique.

Chorlay, R. (2007) La multiplicité des points de vue en Analyse elementaire comme construit historique, in *Histoire et enseignement des mathématiques: erreurs, rigueurs, raisonnements,* E. Barbin y D. Bénard (eds). Lyon: INRP, 203-227

Chorlay, R. (2010). From historical analysis to classroom work: function variation and long-term development of functional thinking. *CERME6.* Lyon: INRP. 2396-2405.

Chorlay, R. (2014) Signe de f′ et variations de f: la fabrique d'une chaine déductive longue. *Petit x, 94,* 27-48.

Contreras, S. (2014). *Cálculo Diferencial.* México: Fondo de cultura económica.

Cuéllar, J. (2007). *Matemáticas V. Cálculo Diferencial.* México: Mc Graw Hill.

Cuevas, B., Sánchez, I. y Aparicio, A. (2012). *Cálculo.* México: Gafra.

Díaz, M. (2009). Conocimientos de los profesores preuniversitarios de Cálculo acerca del significado y las interpretaciones de la derivada. *El Cálculo y su Enseñanza, 1,* 75-90.

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: Concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 7*(3), 195-218.

Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Washington D.C.:Mathematical Association of America, 25-37.

Engler, A., Vrancken, S., Gregorini, M. I., Müller, D., Hecklein, M. & Henzenn, N. (2008). Estudio del comportamiento de la función a partir de la derivada. análisis de una secuencia didáctica, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *21*,466–476.

Euler, L. (1755). *Institutiones calculi differentialis*. Saint Petersburg: Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae.

Fabert, C. y Grenier, D. (2011). Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique. *Petit x, 87,* 31-52.

García, O. y Morales, L. (2013). Ideas para enseñar: El Contraejemplo como Recurso Didáctico en la Enseñanza del Cálculo. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 35*, 161-175.

Garza, B. (2015). *Cálculo diferencial.* México: Pearson.

Granville, W. A. (2007). *Cálculo diferencial e integral.* México: Limusa.

Hernández, J., Locia, E., Morales, A. y Sigarreta, J. (2019). El contraejemplo en la elaboración de la definición de función convexa por estudiantes universitarios. *Información Tecnológica, 30*(1). https://doi.org/10.4067/s0718-07642019000100185

Hitt, F. (2003). El Carácter Funcional de las Representaciones. *Annales de Didactique et de Sciencies Cognitives, 8,* 255-271.

Ibañez, P. y García, G. (2007). *Matemáticas V. Cálculo Diferencial.* México: Cosegrat.

Klymchuk, S. (2012). Counterexamples in calculus. *Mathematics teaching-research journal online, 5(4),* 1-30

Lagrange, L. (1797). Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel dégages de toute considération d'infiniment petits ou de'évanouissans, de limites ou de fluxions et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies. En el 9º cuaderno del Journal de l'École Polytecnique. Paris: République. https://doi.org/10.1017/cbo9780511702730.024

Lagrange, L. (1884). Lecons sur le calcul des fonctions (reimpresión de la segunda edición (1806). Oeuvres completes de Lagrange. París: Gauthier-Villars.

Lakatos, I. (1976). Pruebas y refutaciones: ensayo sobre la lógica del descubrimiento matemático. Editorial Alianza Universidad.

Legrand, M. (1993). Débat Scientifique en Cours de Mathématiques et Specifité de L'analyse, Repères *IREM,* 10, 123-159.

Leithold, L. (1992). *El cálculo con Geometría Analítica.* México: Harla.

Locia, E. (2000). *Les contre – exemples dans l`enseignement des mathèmatiques*. (Tesis Doctoral), Universidad Paul Sabatier. Touluse, Francia.

Morales, A., Locia, E., Ramírez, M., Sigarreta, J. y Mederos, O. (2018). The Theoretical didactic approach to the counterexample in mathematics. *International Journal of Research in Education Methodology, 9*, 1510-1517.

https://doi.org/10.24297/ijrem.v9i1.8013

Moreno, L. (2002). Graficación de funciones. Memorias del Seminario Nacional: Formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas, 110-140. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Müller, D., Engler, A. y Vrancken, S. (2002). Una propuesta didáctica para el estudio de funciones con la utilización de un software. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *21*, 1015–1025.

Ortiz, F. (2009). *Cálculo Diferencial.* México, Ed. Patria.

Ortiz, F., Ortiz, F. y Ortiz, F. (2011). *Cálculo diferencial.* México: Patria.

Osgood, W. F. (1912). *Lehrbuch der Funktionentheorie.* Berlín, Alemania: B. G. Teubner.

Piskunov, N. (2008). *Cálculo diferencial e integral.* México: Limusa.

Poincaré, H. (1881). Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. *Journal de Mathématiques pures et appliquées, 7*(3ème série), 375-422.

Rasslan, S. & Vinner, S. (1995). The Graphical, the Algebraic and their Relation – The Notion of Slope. Proceedings of the I9-th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, 264-271. Recife, Brazil.

Rasslan, S., & Vinner, S. (1998). Images and definitions for the concept of increasing/decreasing function. In A. Olivier, & K. Newstead (Eds.), Proceedings of the 22nd conference of the international group for the psychology of mathematics education (Vol. 4, pp. 33–40). Stellenbosch: PME.

Rasslan, S. & Vinner, S. (1997). Images and Definitions for the Concept of Even / Odd Function. *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 4*, 41-48. University of Helsinki. Lahti, Finland.

Renaud, H. (2017). La fabrication d'un enseignement de l'analyse pour l'enseignement secondaire en France au XIXe siècle: acteurs, institutions, programmes et manuels. (Tesis Doctoral). Universidad de Nantes. Francia

Rey Cabrera, M. (2016). Propuesta didáctica para la formación del profesorado: el caso de la derivada como herramienta de modelización matemática. (Tesis de Maestría). Cinvestav, México.

Rolle, M. (1691). Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalités de tous les degrés, suivie de deux autres méthodes, dont la première donne les moyens de résoudre ces mêmes égalités par la géométrie, et la seconde pur résoudre plusiers questions de Diophante qui n'ont point été résoluës. París. https://doi.org/10.5802/afst.170

Sánchez-Matamoros, G.; García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 11*(2), 267-296.

Sántalo, M., y Carbonell, V. (2007). *Cálculo diferencial e integral*. México: Diana.

Santos, L. (2007). La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos. México: Trillas.

Serna, L. (2007). *Estudio socioepistemológico de la Tangente*. (Tesis de maestría no publicada), Cinvestav, México.

Sierra, M., González, M. T., y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *3*(1), 71–86.

Silva, J. (2014). *Cálculo Diferencial.* México: Anglo.

Stewart, J. (2007). *Cálculo Diferencial e Integral.* EEUU: Thomson.

Suárez, C. O. (2011). Orígenes y evolución del Teorema de Rolle. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 28*(77), 39-50.

Suso, C. y Velasco, M. V. (2013). Sobre la génesis y evolución del Teorema de Rolle. *Épsilon. Revista de Educación Matemática, 30*(83), 49-66.

Swokowski, E. (1982). *Cálculo con Geometría Analítica.* EEUU: Wadsworth Internacional Iberoamérica.

Tall, D. (1991). Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer: Academic Publishers.

Tossavainen. T., & Haukkanen, P. (2012). Matematiikan opiskelijoiden käsitekuvia monotonisuudesta. *Arkhimedes 4*(5). 23-30.

Tossavainen. T., Haukkanen, P. & Pesonen, M. (2013). Different aspects of the monotonicity of a function, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44(8)*, 1117-1130, DOI: 10.1080/0020739X.2013.770088

Valdés, C. (1983). *Análisis matemático*, *Tomo II*. Cuba: Pueblo y Educación.

Valero, S. (2003). Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar. (Tesis Doctoral). CICATA-IPN. México.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14,* 293-305.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and Definition for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366.

Zazkis, R., & Chernoff, E.J. (2008). What makes a counterexample exemplary?. *Educational Studies in Mathematics, 68*, 195-208.

Zúñiga, M. (2009). Un estudio acerca de la construcción del concepto de función, visualización. en alumnos de un curso de cálculo I .(Tesis de maestría) UPN. Tegucigalpa, Honduras

Direcciones Electrónicas

Cosdac-Sems (2013). Planes y programas de Estudio del Nivel Medio Superior [en línea].Recuperado el 23 de Agosto de 2016. SEP. México. De http://cosdac.sems.gob.mx/portal/index.php/en-el-aula/normatividad-de-servicios-escolares-2-a-1

UAGro (2010). Planes y programas de Estudio del Nivel Medio Superior [en línea].

Recuperado el 23 de Agosto de 2016. UAGro. Guerrero. México. De http://cgru.uagro.mx/index.php?option=com_content&view=article&id=43&Itemid=54

ANEXOS

Actividad

Dicho instrumento consta de una función la cual debería de analizarse el comportamiento $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, buscando que el alumno determine:

- Dominio e imagen
- Intervalos de crecimiento, decrecimiento
- Máximos y mínimos relativos
- Hacer el bosquejo del gráfico de la función

SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Subsecretaría de Educación Media Superior

BACHILLERATO TECNOLÓGICO

PROGRAMA DE ESTUDIOS

ACUERDO SECRETARIAL 653

COSDAC
Coordinación Sectorial de Desarrollo Académico

DGETI

dgeta

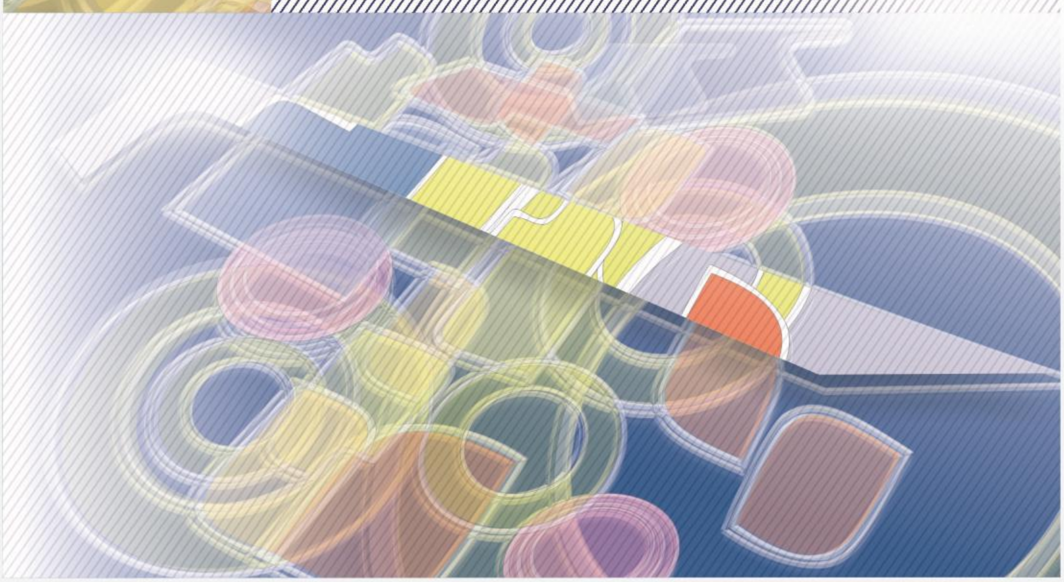
dgecytm

CECyTEs

MATEMÁTICAS

Álgebra
Geometría y Trigonometría
Geometría Analítica
Cálculo Diferencial
Cálculo Integral
Probabilidad y Estadística
Matemáticas Aplicadas

México, 2013.



1. Propósitos formativos por competencias

1.1. Propósito formativo de la materia

Que el estudiante aplique conocimientos matemáticos en la resolución de problemas de distintos contextos (social, natural, científico y tecnológico, entre otros).

1.2. Propósitos formativos de las asignaturas

Álgebra	Que el estudiante desarrolle el razonamiento matemático y haga uso del lenguaje algebraico en la resolución de problemas de la vida cotidiana, dentro y fuera del contexto matemático, representados por modelos donde se apliquen conocimientos y conceptos algebraicos.
Geometría y Trigonometría	Que el estudiante interprete y resuelva problemas contextualizados que requieran la orientación espacial, a través del análisis, representación y solución por medio de figuras y procedimientos geométricos y algebraicos.
Geometría Analítica	Que el estudiante interprete, argumente, comunique y resuelva diversas situaciones problemáticas de su contexto por medios gráficos y analíticos, que incluyan la representación de figuras en el plano cartesiano.
Cálculo Diferencial	Que el estudiante relacione conocimientos de diversas disciplinas (sistemas y reglas o principios medulares) para estructurar ideas, argumentos y crear modelos que den solución a problemas surgidos de la actividad humana, tales como: la distribución inequitativa de los recursos económicos y la propagación rápida de enfermedades, entre otros; así como de fenómenos naturales (cambio climático, contaminación por emisión de gases, etc.), aplicando el razonamiento, el análisis e interpretación de procesos infinitos que involucren razones de cambio.
Cálculo Integral	Que el estudiante analice e interprete las relaciones entre las variables de problemas de la vida cotidiana relacionados con áreas, volúmenes, etc., que impliquen variaciones en procesos infinitos y los resuelva aplicando el teorema fundamental del cálculo.
Probabilidad y Estadística	Que el estudiante analice fenómenos sociales o naturales, utilizando las herramientas básicas de la estadística descriptiva y de la teoría de la probabilidad para muestrear, procesar y comunicar información social y científica, para la toma de decisiones.
Matemáticas Aplicadas	Que el estudiante plantee y resuelva situaciones problemáticas que integren competencias y contenidos de todas las asignaturas del área, interpretando fenómenos naturales y sociales que suceden en su contexto.

1.3. Relación de *Matemáticas* con otras asignaturas de la estructura curricular

Asignaturas	Aspectos que permiten establecer la relación
Lectura, Expresión Oral y Escrita	Comprensión y escritura de textos, comunicación y argumentación de ideas o soluciones de situaciones problemáticas.
Química y Bioquímica	Construcción de modelos matemáticos y en la solución de los modelos que resulten de estas formulaciones, graficación de átomos y moléculas en el plano o en el espacio.
Inglés	Traducción y comprensión de textos en una segunda lengua que se requieran utilizar en la solución de problemas matemáticos de la vida cotidiana.
CTSyV	Construcción de modelos matemáticos que representen el desarrollo sustentable, deterioros y/o hechos sociales.
TIC	Empleo de herramientas computacionales para facilitar el aprendizaje de las *Matemáticas*.
Biología y Ecología	Aplicar modelos matemáticos para interpretar procesos biológicos y ecológicos.
Física	Uso de modelos matemáticos, representación gráfica de los fenómenos naturales, conversiones de unidades, etc.

1.4.3. Tabla de articulación de competencias

Competencias genéricas	Competencias disciplinares básicas y extendidas de *Matemáticas*[8]							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.								
Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.	m	**F**	**F**	**F**	m	*d*	*d*	*d*
Identifica sus emociones, las maneja de manera constructiva y reconoce la necesidad de solicitar apoyo ante una situación que lo rebase.	*d*	**F**	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*
Elige alternativas y cursos de acción con base en criterios sustentados y en el marco de un proyecto de vida.	*d*	**F**	**F**	*d*	m	**F**	m	m
Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.	**F**	m	m	*d*	**F**	*d*	**F**	**F**
Asume las consecuencias de sus comportamientos y decisiones.	**F**	*d*	*d*	**F**	*d*	**F**	*d*	*d*
Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas.	m	*d*	*d*	*d*	**F**	*d*	**F**	**F**
2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.								
Valora el arte como manifestación de la belleza y expresión de ideas, sensaciones y emociones.	**F**	**F**	**F**	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*
Experimenta el arte como un hecho histórico compartido que permite la comunicación entre individuos y culturas en el tiempo y el espacio, a la vez que desarrolla un sentido de identidad.	*d*	*d*	*d*	**F**	*d*	**F**	*d*	**F**
Participa en prácticas relacionadas con el arte.	**F**	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	m	**F**
3. Elige y practica estilos de vida saludables.								
Reconoce la actividad física como un medio para su desarrollo físico, mental y social.	*d*	*d*	*d*	*d*	m	*d*	*d*	m
Toma decisiones a partir de la valoración de las consecuencias de distintos hábitos de consumo y conductas de riesgo.	**F**	*d*	*d*	*d*	**F**	*d*	**F**	*d*
Cultiva relaciones interpersonales que contribuyen a su desarrollo humano y el de quienes lo rodean.	*d*	*d*	**F**	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.								
Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüistas, matemáticas o gráficas.	**F**	**F**	**F**	**F**	m	m	**F**	**F**
Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.	**F**	**F**	**F**	**F**	*d*	**F**	**F**	**F**
Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.	**F**	**F**	*d*	*d*	**F**	*d*	*d*	**F**
Se comunica en una segunda lengua en situaciones cotidianas.	*d*	*d*	*d*	**m**	*d*	*d*	*d*	*m*

[8] **1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.**
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Competencias genéricas	**Competencias disciplinares básicas y extendidas de *Matemáticas*[8]**							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.	**F**	**F**	*d*	**F**	*d*	*d*	*d*	**F**
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.								
Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.	**F**	m	*d*	**F**	*d*	*d*	**F**	*d*
Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.	**F**	**F**	*d*	**F**	**F**	*d*	*d*	**F**
Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.	**F**	**F**	*d*	*d*	**F**	*d*	**F**	*d*
Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.	**F**	*d*	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	*d*
Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.	*d*	*d*	**F**	m	**F**	**F**	*d*	*d*
Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.	**F**	**F**	**F**	*d*	**F**	**F**	*d*	**F**
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.								
Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ella de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.	*d*	*d*	*d*	**F**	**F**	m	**F**	**F**
Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	*m*
Reconoce los propios prejuicios, modifica sus puntos de vista al conocer nuevas evidencias, e integra nuevos conocimientos y perspectivas al acervo con el que cuenta.	*d*	*d*	**F**	**F**	*d*	*d*	m	*d*
Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	*d*	*d*
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.								
Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción del conocimiento.	**F**	**F**	**F**	*d*	*d*	*d*	**F**	*d*
Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	**F**	*d*
Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.								
Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.	**F**	**F**	**F**	**F**	*d*	*d*	**F**	*d*
Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	*d*	*d*	m	**F**	*d*	*d*	**F**	*d*
Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	m	*d*	**F**	**F**	*d*	*d*	*d*	*d*
9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.								
Privilegia el diálogo como mecanismo para la solución de conflictos.	*d*	*d*	**F**	**F**	*d*	*d*	*d*	**F**
Toma decisiones a fin de contribuir a la equidad, bienestar y desarrollo democrático de la sociedad.	*d*	*d*	*d*	**F**	*d*	*d*	**F**	*d*
Conoce sus derechos y obligaciones como mexicano y miembro de distintas comunidades e instituciones, y reconoce el valor de la participación como herramienta para ejercerlos.	*d*	*d*	**F**	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*
Contribuye a alcanzar un equilibrio entre el interés y bienestar individual y el interés general de la sociedad.	*d*	**F**	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*	*d*
Actúa de manera propositiva frente a fenómenos de la sociedad y se mantiene informado.	**F**	*d*	**F**	**F**	m	*d*	*d*	*d*
Advierte que los fenómenos que se desarrollan en el ámbito local, nacional e internacional ocurren dentro de un contexto global e interdependiente.	m	*d*	**F**	m	m	*d*	*d*	m
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.								

Competencias genéricas	**Competencias disciplinares básicas y extendidas de *Matemáticas*[8]**							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Reconoce que la diversidad tiene lugar en un espacio democrático de igualdad de dignidad y derechos de todas las personas, y rechaza toda la forma de discriminación.	**F**	*d*	*d*	**F**	m	*d*	**F**	*d*
Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.	*d*	**F**	**F**	**F**	*d*	*d*	*d*	**F**
Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.	*d*	*d*	**F**	*d*	**F**	*d*	*d*	*d*
11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.								
Asume una actitud que favorece la solución de problemas ambientales en los ámbitos local, nacional e internacional.	*d*	**F**	**F**	*d*	**F**	*d*	**F**	*d*
Reconoce y comprende las implicaciones biológicas, económicas, políticas y sociales del daño ambiental en un contexto global interdependiente.	**F**	*d*	**F**	**F**	*d*	m	*d*	**F**
Contribuye al alcance de un equilibrio entre los intereses de corto y largo plazo con relación al ambiente.	*d*	*d*	*d*	*d*	**F**	*d*	*d*	m

1.4.4. Ejemplos de relación de competencias y contenidos

Competencia genérica	**Competencia disciplinar**	**Explicación de la relación**	**Contenidos relacionados**		
			Fácticos	**Procedimentales**	**Actitudinales**
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüistas, matemáticas o gráficas.	8. Interpreta tablas, Gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos	**Relación fuerte:** La relación es procedimental, ya que se refiere, en ambas competencias, al uso de representaciones matemáticas que pueden ser expresiones algebraicas y gráficas para expresar ideas y procedimientos.	Notación Representación algebraica de expresiones de lenguaje común	Interpretación de expresiones algebraicas Evaluación numérica de expresiones algebraicas	Perseverar en la búsqueda de solución de problemas algebraicos Trabajar de manera colaborativa en la solución de problemas
3. Elige y practica estilos de vida saludables. Reconoce la actividad física como un medio para su desarrollo físico, mental y social.	5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	**Relación media:** Se identifica un problema que afecta el estilo de vida y se analizan las relaciones entre las variables para determinar su comportamiento, reconociendo la actividad física como un medio para mejorar. Por ejemplo, el problema de sobrepeso en las personas, para el cual puede aplicarse la competencia disciplinar 5, a través de métodos algebraicos para el análisis, desarrollo y seguimiento del problema.	Notación Representación algebraica de expresiones de lenguaje común	Interpretación de expresiones algebraicas Evaluación numérica de expresiones algebraicas	Perseverar en la búsqueda de solución de problemas algebraicos. Trabajar de manera colaborativa s en la solución de problemas.
11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables. Asume una actitud que favorece la solución de problemas ambientales en los ámbitos local, nacional e internacional.	4. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.	**Relación débil:** La relación entre las competencias es instrumental; e la competencia genérica se puede abordar aplicando la competencia disciplinar, si el alumno trabaja en un proyecto basado en herramientas matemáticas, como la estadística, que solucione una problemática sobre el deterioro y la conservación del medio ambiente, o sobre el desarrollo sustentable en su comunidad.	Muestreo Frecuencias Distribución de frecuencias	Representación gráfica Interpretación de la gráfica Argumentación de la solución	Participar en la solución de problemas del desarrollo sustentable, deterioro y conservación del medio ambiente.

2. Estructura de la materia

2.1.Conceptos fundamentales

Su función es integrar conocimientos para explicar los fenómenos o procesos que constituyen los aprendizajes principales de la materia. Aparecen en la estructura de cada asignatura en un segundo nivel, por ejemplo en *Álgebra* un concepto fundamental es: lenguaje algebraico.

2.2.Conceptos subsidiarios

Estos agrupan diversas temáticas o elementos y tienen la función de proporcionar información específica, que al integrarse, construye el concepto fundamental. Se presentan en la estructura de la asignatura en un tercer nivel, por ejemplo, un concepto subsidiario en *Álgebra* es: expresión algebraica.

2.3.Contenidos de los conceptos subsidiarios

Se refieren a conocimientos conceptuales o procedimentales a través de los que es posible construir los conceptos subsidiarios. Se presentan en la estructura de la asignatura en el cuarto nivel, por ejemplo en *Álgebra,* los contenidos del concepto subsidiario "expresión algebraica" son: notación, representación algebraica de expresiones en lenguaje común, interpretación de expresiones algebraicas y evaluación numérica de expresiones algebraicas.

2.4.Contenidos transversales

Los contenidos transversales en el programa de *Matemáticas* son:

- La comprensión de la situación problemática.
- La identificación de datos y variables.
- La representación de las relaciones entre las variables a través de un modelo matemático.
- La resolución de modelos mediante métodos matemáticos.
- La interpretación y argumentación de la solución, es decir, el dar significado a los datos matemáticos en un contexto real.

2.5.Contenidos procedimentales

En la estructura de contenidos procedimentales se sitúan las habilidades más representativas a promover, fortalecer y potenciar en el campo disciplinar de las matemáticas. Estos contenidos se han organizado en cuatro procesos principales, cada uno de los cuales se divide en procesos más específicos para señalar los niveles de dominio de los aprendizajes.

CÁLCULO DIFERENCIAL

Pre - cálculo

- Números reales
- Intervalo
- Desigualdades

Funciones

- Dominio y contradominio
- Clasificación
- Comportamiento
- Operaciones

Límites

- Límite de una función
- Propiedades
- Continuidad de una función

Derivada

- Razón de cambio promedio de interpretación geométrica
- Derivación de funciones
- Derivadas sucesivas
- Comportamiento

GRAFICACIÓN

APLICACIONES

El comportamiento de fenómenos que se relacionen con las especialidades de cada plantel y su contexto en general, de tal manera que interprete, represente y estime soluciones a través del cálculo diferencial.

Máximos y mínimos, concavidad y simetría, rapidez de cambios, entre otras.

Universidad Autónoma de Guerrero

Comisión General de Reforma Universitaria

Educación Media Superior

Plan de Estudios por Competencias 2010

Matemáticas V

Quinto Semestre

<table>
<tr><td>Unidad de competencia III</td><td colspan="2">Comportamiento de una función</td><td>Sesiones previstas</td><td>8 (De 100 minutos)</td></tr>
<tr><td>Competencias a desarrollar</td><td colspan="4">Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Competencias disciplinares básicas</td><td colspan="4">COMPONENTES DE COMPETENCIA</td></tr>
<tr><td>CONCEPTUALES (saber)</td><td colspan="2">PROCEDIMENTALES (saber hacer)</td><td>ACTITUDINALES (saber ser, saber convivir)</td></tr>
<tr><td>1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.

3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.

5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.</td><td>Crecimiento y decrecimiento de una función.

Máximos, mínimos y puntos de inflexión
Concavidad de una función.</td><td colspan="2">Evalúa los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función a partir del análisis de las gráficas de los problemas abordados en los cursos de 1º a 4º semestres.

Determina analíticamente los valores máximos, mínimos absolutos y/o puntos de inflexión de los problemas abordados en los cursos de 1º a 4º semestres.</td><td>Trabaja y socializa de manera solidaria y respetuosa sus ideas y constructos.

Asume una actitud positiva cuando busca información relevante en distintas fuentes de comunicación que se le pide.
Reconoce de forma crítica su desempeño personal en la interpretación adecuada de problemas matemáticos, reconociendo sus limitaciones y fortalezas.

Valora las propiedades de la parábola, los elementos y sus propiedades.
Evalúa las ventajas de utilizar las propiedades de la parábola en la solución de problemas de su contexto inmediato.</td></tr>
<tr><td>Situación de aprendizaje</td><td>Trabajo colaborativo.
Aprendizaje basado en problemas</td><td>Nivel de desempeño esperado</td><td colspan="2">Los resultados de las actividades de aprendizaje superan el propósito planteado y la evidencia solicitada, y dan cuenta de un alto compromiso del estudiante, quien profundiza en los conceptos, procedimientos y actitudes que comprenden las competencias y propósitos de la Unidad de Competencia</td></tr>
</table>

Secuencias didácticas 12–14			Número de sesiones: 8 (De 100 minutos)					
Momento	Función	Actividades del estudiante Tomar las expresiones de los problemas del 2º, 3º y 4º semestre para iniciar cada secuencia.	Estrategias didácticas	Recursos didácticos	Evaluación			
					Función	Participación	Producto	Instrumento
Apertura	***1. Recuperar conocimiento previo.*** ***2.***	**12.** Analiza una gráfica propuesta por el profesor y propone las zonas de crecimiento y decrecimiento de la función y su relación con la tangente y el signo de su pendiente.	**Consulta en textos, en línea y otras fuentes de información**	**Libros, Internet**	**D**	**H**	**Resumen de notas**	**Rubrica**

	Problematizar	**13.** Contesta los siguientes cuestionamientos: Utilizando la derivada de la función ¿cómo se representan analíticamente las zonas de crecimiento y decrecimiento de la función? ¿Cómo se representan analíticamente los puntos máximos o mínimos? **14.** Contesta los siguientes cuestionamientos: ¿Cómo se pueden utilizar las expresiones analíticas para indicar los valores de x en los que la función crece o decrece? ¿Cómo se pueden utilizar las expresiones analíticas para calcular los puntos máximos o mínimos de la función?	**Consulta en internet, libros y a personas expertas en el tema.**	**Libros, cuaderno, videograbadoras, lápiz.**	**F**	**H**	**cuestionario**	**Examen escrito**
Desarrollo	***3. Adquirir y organizar nueva información.***	**12.** Realiza una búsqueda de información acerca de zonas de crecimiento y decrecimiento de la función y su relación con la tangente y el signo de su pendiente. **13.** Realiza una búsqueda de información acerca de la forma en que se representan analíticamente las zonas de crecimiento y decrecimiento de la función y los puntos máximos o mínimos. **14.** Realiza una búsqueda de información acerca de la forma en que se pueden utilizar las expresiones analíticas para indicar los valores de x en los que la función crece o decrece y para calcular los puntos máximos o mínimos de la función.	**Consulta en diferentes fuentes de información y los expone en clase por equipo.**	**Libros de texto e Internet**	**D**	**A**	**Notas en su libreta**	**Rubrica**

	4. Procesar nueva información.	**12.** Determina las zonas de crecimiento y decrecimiento de la función y su relación con la tangente y el signo de su pendiente, de las funciones relacionadas con los problemas del 1º al 4º semestres. **13.** Para las funciones relacionadas con los problemas del 1º al 4º semestres, representan analíticamente las zonas de crecimiento y decrecimiento y los puntos máximos o mínimos. **14.** Para las funciones relacionadas con los problemas del 1º al 4º semestres, utiliza las expresiones analíticas para indicar los valores de x en los que la función crece o decrece y para calcular los puntos máximos o mínimos de la función.	**Participación en equipo.**	**Participación verbal**	**F**	**H**	**Describe las característica s, los elementos y las propiedades de la parábola en su cuaderno de trabajo.**	**Examen escrito**
Cierre	***5. Aplicar, transferir información.***	**12.** Expone ante el grupo el procedimiento realizado para determinar las zonas de crecimiento y decrecimiento de la función y su relación con la tangente y el signo de su pendiente, de las funciones relacionadas con los problemas del 1º al 4º semestres. Explica el comportamiento de fenómeno relacionado con la función motivo de la exposición. **13.** Expone ante el grupo el procedimiento realizado para representar analíticamente las zonas de crecimiento y decrecimiento de las funciones relacionadas con los problemas del 1º al 4º semestres, así como los puntos máximos o mínimos. **14.** Expone ante el grupo el procedimiento realizado para indicar los valores de x en los que la función crece o decrece y para calcular los puntos máximos o mínimos de la función.	**Participación individual**	**Participación grupal.**	**S**	**H**	**Resuelve Problemas propuestos por el profesor**	**Rubrica**

	6. Tomar conciencia (metacog-nición).	Responde los siguientes cuestionamientos: ¿Qué complicaciones tuviste para solucionar los problemas anteriores? ¿Qué fue lo que más se te dificultó representar? ¿Hubo alguien de tu equipo que explicó cómo resolver el problema? ¿Te gustó cómo se organizó la actividad en el grupo?	**Trabajo individual**	**Cuestionario de preguntas.**			**Cuestionario resuelto.**	Escala Lickert
***Nota: De acuerdo a su función, la evaluación puede ser Diagnóstica (D), Formativa (F) o Sumativa (S). De acuerdo al nivel de participación puede ser de Autoevaluación(A), Coevaluación (C), Heteroevaluación (H).**								
Atributos de las competencias genéricas desarrolladas:								
Aporta puntos de vista con apertura Considera los puntos de vista de otros de manera reflexiva Asume una actitud constructiva dentro de distintos equipos de trabajo								

Evaluación de la unidad de competencia:

Actividad:		**Punto:**		**Instrumento:**	
(Desarrollar el instrumento)					
Actividad:		**Punto:**		**Instrumento:**	
(Desarrollar el instrumento)					
(Añadir las filas necesarias para completar la evaluación de los productos de la unidad de competencia)					

Registro, evaluación y seguimiento del logro de las competencias genéricas del perfil de egreso:

Fecha	Actividades	Competencias genéricas	Evidencias	Evaluación