UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

ASPECTOS COGNITIVOS QUE EVIDENCIAN NIÑOS DE TERCERO DE PRIMARIA EN LA GENERALIZACIÓN DE PATRONES FIGURALES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS ÁREA: MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA:

REINALDO JESUS MONTOYA DITTA

Directora de tesis:

DRA. MARÍA GUADALUPE CABAÑAS SÁNCHEZ

Chilpancingo, Guerrero Octubre de 2019

Aspectos cognitivos que evidencian niños de tercero de primaria en la generalización de patrones figurales

Tesis de Maestría

Reinaldo Jesus Montoya Ditta

Directora de tesis
Dra. María Guadalupe Cabañas Sánchez

Comité evaluador:
Dra. María del Socorro García González
Dra. Catalina Navarro Sandoval

2019
Centro de Investigación en Matemática Educativa
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero
Chilpancingo, Guerrero, México

Esta investigación fue financiada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Becario Conacyt
627954

A mis padres Lina y Reinaldo, a mis hermanos Kelly y Jesús David. Y a ti por ser el instrumento que Dios empleó para entrar a mi vida.

Agradecimientos

Al finalizar esta etapa quiero agradecer a todos los que me brindaron su apoyo en este proceso de crecimiento como persona y a nivel profesional, que representa el resultado de esfuerzo y dedicación.

En primer lugar a Dios, quien me ha dotado de paciencia y fortaleza en este camino de aprendizaje, por su gracia y bondad, permitió que esta meta fuera real y crecer en el aspecto profesional.

A la iglesia Shekina, fue mi hogar lejos de casa. Gracias a todos, cada uno es un ejemplo a seguir en mi vida. A donde vaya llevaré sus enseñanzas y nuestra misión y visión.

A mi familia, quienes me han apoyado en cada decisión que he tomado a lo largo de mi formación profesional y de mi vida. Sin su apoyo incondicional no fuese sido posible. ¡Este logro es para ustedes!

A Angie, Celenne, Enisdey, Inez, Oscar, Salvador, Safira y Stiven, me hicieron sentir en casa como una familia. Gracias por cada momento compartido, su amistad sincera y compañía brindada durante este tiempo. A Camilo y Jonathan, más que compañeros de convivencia, hermanos y guías, gracias coletos.

A la Universidad Autónoma de Guerrero, por brindarme la oportunidad de formarme en el campo de la investigación. Por el apoyo brindado en la participación externa en diversos eventos y, la realización de estancias académicas a nivel nacional e internacional.

A la Doctora Guadalupe Cabañas por su dedicación, compromiso, paciencia, orientación y sinceridad, lo cual me ayudó a formarme en lo personal y profesional.

A los estudiantes y directivos de la Escuela Dr. Alfonso G. Alarcón, gracias por la colaboración y disposición en el trascurso de la implementación, contribuyeron para avanzar y fortalecer el estudio.

A las revisoras, sus aportes fueron importantes para fortalecer el trabajo. Agradezco por su tiempo dedicado a la lectura del trabajo de investigación.

¡Muchas gracias!

Tabla de contenido

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Presentación

El presente estudio se ubica en la temática generalización de patrones. Analiza qué aspectos cognitivos evidencian estudiantes de tercer grado de primaria, al resolver tareas que demandan generalizar patrones figurales, construidos de manera bien definida, con etapas configuradas en orden creciente, consecutivas y no consecutivas. En este contexto, las acciones principales de los estudiantes, fueron orientadas a involucrarse en una generalización viable que les permitiera construir y justificar una estructura matemática plausible (fórmula directa) con la cual explicar el comportamiento que sigue el patrón figural asociado, en cualesquiera de sus etapas. Proceso en el que coordinaron sus capacidades inferenciales perceptivas y simbólicas, tal como afirma Rivera (2010).

El análisis se centró en los modos de percepción sensorial y cognitiva que coordinaron los estudiantes para interpretar y explicar el comportamiento de un patrón figural creciente, independientemente de si construyeron o no una estructura matemática plausible, que evidenciara ese hecho. En el marco de la generalización de patrones figurales, la percepción es considerada como un proceso del pensamiento que implica a los sentidos en la interpretación de objetos o de eventos, para luego transformarlos en experiencias significativas en el cerebro (Seel, 2012). Como proceso, involucra formas diversas de razonamiento que se materializan en las estrategias que un sujeto desarrolla y el tipo de representaciones que usa. Las conclusiones derivadas de ello, pueden explicar o no, de manera adecuada el comportamiento de los eventos u objetos, dado que depende del nivel de desarrollo cognitivo del sujeto, consecuentemente de la abstracción que realice.

El análisis de los aspectos cognitivos en este trabajo, prestó atención a los tipos de razonamiento inductivo, abductivo y deductivo, así como a las estrategias puestas en juego por los estudiantes, a partir de cómo percibieron inicialmente el comportamiento de los patrones, de las interpretaciones y explicaciones que hicieron, los significados involucrados y las conclusiones que establecieron como resultado de ese proceso. Estas conclusiones pueden referir a una estructura matemática plausible o regla directa.

Desde el punto de vista metodológico, la investigación se fundamenta de un experimento de enseñanza, cuyo objetivo consistió en desarrollar la habilidad de generalizar, en 22 estudiantes de un grupo académico de tercer grado de primaria de la Escuela Dr. Alfonso G. Alarcón, de la ciudad de Zumpango del Río, en el estado de Guerrero, México. El estudio se apoyó de tres tareas que demandaron de manera implícita a los estudiantes, generalizar un patrón figural con las características arriba señaladas.

El análisis cualitativo de los datos tomó como base las producciones escritas y verbales de los estudiantes en el proceso de solución de las tareas, en dos etapas, individual y grupal. En ese contexto, el análisis se centró en las formas en que percibieron e interpretaron el comportamiento de los patrones, de los significados y simbología que usaron para explicarlo.

Los fundamentos teóricos del estudio tomaron como base los conceptos de patrón y generalización, al igual que los sistemas de representación y estructura matemática. Articulándose al concepto de estrategias y tipos, así como al de percepción. Estos aspectos fueron útiles en la descripción de los procesos cognitivos en que enfatiza la investigación.

El análisis evidenció que tanto la percepción visual como la visualización son aspectos claves a la hora de construir una estructura matemática plausible que describa el comportamiento de un patrón figural. Se identificaron diferentes formas de proceder al resolver las tareas en el contexto de la generalización de patrones figurales, en ese proceso recurrieron a más de un sistema de representación, así como a diferentes tipos de generalizaciones y estructuras articuladas a pensamientos aditivo y multiplicativo. Por cuanto a los procesos de razonamiento, se mostró que al tomarse en conjunto la triada de la abducción, de la inducción, y de la deducción es posible proporcionar un panorama más coherente y completo del proceso entero de la investigación (Minnameier, 2004), en lo que respecta a la generalización de patrones.

El documento se estructura en seis capítulos. En el primero, se justifica y delimita el problema de investigación y los objetivos. El segundo capítulo se constituye de los elementos teóricos que sustentaron el estudio. El tercero, reporta el análisis al contenido matemático escolar, correspondiente al tema sucesión, en los tres primeros años de Educación Básica Primaria (segundo periodo escolar). En el capítulo cuatro se presentan los aspectos metodológicos que se tuvieron en cuenta en la investigación. Esto incluye la descripción de los participantes, el contexto en el cual se realizó el estudio, el diseño de las tareas, el proceso de recolección de los datos y las consideraciones para el análisis. El capítulo cinco comprende el análisis de los datos. Se describen los hallazgos en términos de la percepción sensorial y visual, asimismo, el tipo de razonamientos involucrados en la generalización de patrones figurales. El sexto capítulo recopila las conclusiones y la discusión, al igual que reflexiones finales del estudio.

Además, la presente memoria cuenta con dos secciones finales. La primera, correspondiente a la bibliografía donde se referencia las fuentes y los trabajos consultados, y la segunda, que corresponde a los anexos, que comprenden las tareas que conformaron el instrumento de recogida de datos.

Capítulo 1
Antecedentes y problema de investigación

1.1 Antecedentes del estudio

En este capítulo, se presentan los principales antecedentes, provenientes de la investigación, que se relacionan con la problemática a tratar, la cual también se expone aquí, además de los objetivos y la pregunta de investigación. Así mismo, se justifica la pertinencia del presente trabajo.

1.1.1 Investigaciones sobre Generalización

Desde la investigación, se reporta que a la generalización se le considera como una herramienta útil, poderosa y una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela (Castro, 2012; Castro-Rodríguez y Castro, 2016; Mason, 1999; Stacey, 1989; Vergel, 2015; Villa-Ochoa, 2006). Por ello, investigaciones han tomado a la generalización como objeto de estudio en diferentes ámbitos. En ese sentido, se destaca a Merino (2012), quien menciona que uno de los primeros autores en tratar la generalización fue Piaget, destacándola como proceso fundamental en la construcción del conocimiento. Éste mismo autor, continúa diciendo que Piaget y colaboradores, establecieron relaciones entre los conceptos de generalización y abstracción, y que la generalización estaría sometida a la abstracción y tendría como tarea el establecimiento de regularidades en lo real.

Por otra parte, enfocadas al ámbito matemático se pueden destacar las aportaciones de Pólya (1966) y Krutetskii (1976). Pólya (1966), menciona que la generalización: “es el paso de la consideración de una serie determinada de objetos a la de una serie mayor que contenga a la primera” (p. 37). Además, considera a la generalización junto con la especialización, la analogía y la inducción, las bases de lo que él llama razonamiento plausible. Por su parte Krutetskii (1976), considera la generalización como la habilidad para generar conocimiento matemático (objetos, relaciones y operaciones) y diferencia dos niveles: la habilidad personal para ver lo general y conocido en lo que es particular y concreto, y la habilidad para ver algo general y todavía desconocido en lo que es particular y aislado.

Kaput (1999), da una idea aún más amplia de lo que es generalización, puesto que para él, la generalización implica extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificar y exponer explícitamente lo común entre los casos, o elevando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco ya no está en los casos o situaciones mismos, sino en los patrones, procedimientos, estructuras y las relaciones entre ellos (que, a su vez, se convierten en nuevos objetos de razonamiento o comunicación de nivel superior). Un autor que habló sobre la generalización, enfocándose en el proceso de enseñanza y aprendizaje fue Mason (1996):

> *La generalizacion es el latido de las matemáticas, y aparece de muchas formas. Si los maestros no son concientes de su presencia, y no tienen la costumbre de lograr que los estudiantes trabajen en la expresión de su propia generalización, el pensamiento matemático no está teniendo lugar* (p. 65).

La idea de este autor evidencia el papel importante que adquiere la generalizacion en las matematicas, la cual se expresa en una notacion concisa que se manipula con el fin de extraer más conclusiones que pueden ser expresadas en particular o general (Mason y Johnston-Wilder, 2004). Es por ello, que la generalización es considerada una de las formas más importantes para introducir y desarrollar el pensamiento algebraico en las escuelas (NCTM, 2000). La anterior idea se amplía cuando se menciona que generalizar permite que los estudiantes comprendan situaciones de variación consideradas fundamentales en el desarrollo del pensamiento algebraico y constituye una forma eficaz para introducir el estudio del álgebra en las escuelas (Mason, Graham y Johnston-Wilder, 2012). Por su parte, Rivera y Becker (2007) afirman que el propósito de la generalización en el contexto escolar es desarrollar la habilidad de expresar lo generalizable, a partir del estudio analítico de casos particulares, de una forma significativa para el estudiante, como válida desde el punto de vista de la práctica institucional. Dicho lo anterior con otras palabras, la generalización es un aspecto fundamental en el quehacer matemático, ya que es valorada como una forma de llegar al álgebra (Cañadas y Castro, 2004).

Desde un ámbito curricular, algunas organizaciones internacionales, como lo son, en los Estados Unidos, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) y en Australia, el Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (2015), demandan la inclusión del álgebra en el currículo de primaria, más allá de la manipulación simbólica, que se prioriza en secundaria, debido a que los estudiantes necesitan, primero, comprender los conceptos, las estructuras, y los principios que rigen la manipulación de los símbolos, y cómo pueden usarse éstos para registrar ideas y ampliar la comprensión de las situaciones (NCTM, 2000, p. 39). La demanda exigida a nivel internacional, se puede atender por medio de la generalización, debido a que, es una herramienta útil para introducir aspectos algebraicos en la escuela primaria (Aké, 2013). En ese sentido, en México se reconoce la incorporación del álgebra en primaria, a partir de la Reforma Educativa de 2011, a través de los contenidos matemáticos de algunos libros de texto guía para los estudiantes (p. ej., Cabañas-Sánchez, Salazar y Nolasco-Hesiquio, 2017). Pero no se hace explícita la atención a la demanda en los documentos oficiales.

Considerando el anterior panorama, y con base en la literatura especializada en lo que respecta a la generalización, se observa que ésta se viene trabajando hace tiempo (p. ej., Davidov, 1978). En este sentido, la investigación reporta, que en su mayoría se han llevado a cabo estudios realizados con alumnos de los diferentes niveles escolares (p. ej., Carraher, Martinez y Schliemann, 2007; Dörfler, 2007; Rivera, 2013; 2015) y profesores en formación (p. ej., Barbosa y Vale, 2015; Kirwan, 2015; Rivera y Becker, 2007). Además se reconoce que la mayoría de las investigaciones se han centrado en tres tendencias principalmente. La primera, consiste en la identificación de estrategias, estructuras o formas de proceder en el proceso de generalización, aquí se encuentran estudios como los de Rivera y Becker (2008) y Rivera y Becker (2016), los cuales analizan el contenido, las estructuras, tipos y justificaciones de tareas que demandan o involucran la generalización. Estos estudios de corte longitudinal, se enfocan en las estructuras de la generalización en tareas que involucran patrones figurales en estudiantes de secundaria de los Estados Unidos.

Rivera y Becker (2008), especifican tres formas o tipos de generalización que involucran patrones lineales figurativos, a saber, estándar constructivo; constructivo no estándar; y deconstructiva; además se clasifican estos tipos de generalizaciones según la complejidad basada en el trabajo del alumno. Se documenta la tendencia cognitiva de los estudiantes al pasar de una estrategia figurativa a una estrategia numérica para determinar sus patrones basados en cifras, y observaron las consecuencias no siempre “saludables” de tal cambio en su fluidez representativa y justificaciones inductivas.

Por su parte en Rivera y Becker (2016), se realiza un experimento de enseñanza que enfatiza un enfoque de pensamiento multiplicativo a los patrones. Los autores comparan las respuestas en la generalización de patrones de los estudiantes antes y después del experimento y se encuentran que (1) una fuente de variabilidad en su procesamiento estructural abducido se debió en parte a una preferencia conceptual inicial hacia el pensamiento, ya sea en partes o en total, y (2) la comprensión de las estructuras les ayudó significativamente en la conversión en la generalización de patrones (p. ej., de lo visual a lo alfanumérico) y al procesamiento (p. ej., de fórmulas basadas en funciones estándar o no estándar). Los hallazgos en esta investigación, brindan las condiciones necesarias y suficientes para construir, establecer y justificar estructuras válidas en el caso de tareas de patrones de figuras.

Una segunda tendencia bien definida dentro de la investigación sobre generalización, ha sido la de explorar y desarrollar los razonamientos, en específico el inductivo por la misma naturaleza de la generalización (p. ej., Cañadas, 2007; Cañadas y Figueiras, 2011; Dorantes, 2018; Nuñez-Gutierrez, 2018; Rivera, 2013). En cuanto a los estudios de tipo exploratorio, Cañadas (2007) describió y caracterizó el razonamiento inductivo de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en España, al resolver problemas que podían modelarse mediante una progresión aritmética de números naturales cuyo orden era 1 o 2. En relación con los pasos que siguieron los estudiantes del modelo de razonamiento considerado, siguen una tendencia general de actuación en el trabajo con casos particulares y el uso de estrategias inductivas.

Por su parte, Cañadas y Figueiras (2011) exploraron el razonamiento inductivo y las representaciones en la resolución de problemas de combinatoria en educación primaria, en el marco de la inducción y la generalización. Los estudiantes que generalizaron empíricamente, evidenciaron el uso de representaciones aritméticas, algebraicas, textuales y sintéticas (aritmético y textual). Se afirma que la inducción, facilitó la construcción de un diagrama de árbol efectivo, en tanto que representaba el crecimiento n dimensional y el número de elementos que intervienen en cada factor.

La investigación en esta segunda tendencia, también ha documentado que al resolver problemas sobre generalización, se puede favorecer el desarrollo del razonamiento inductivo (p. ej., Barkl, Porter y Ginns, 2012; Christou y Papageorgiou, 2007).

Otra investigación que refiere a generalización y que involucra formas de razonamiento, es la de Rivera (2013), el autor, sintetiza al menos 20 años de estudios de investigación sobre la generalización de patrones que se han realizado con estudiantes jóvenes y adultos en diferentes partes del mundo. El investigador propone lo que llama, un marco de organización, en el que tiene en cuenta varios aspectos de la generalización de patrones que surgieron de una síntesis interpretativa. En su investigación, se tienen en cuenta los procesos inferenciales de abducción e inducción que se han discutido con cierto detalle en la misma investigación y son centrales en la generalización de patrones. Al aclarar estos procesos inferenciales, el autor se centra en explicar otras dimensiones igualmente importantes (y superpuestas) de la generalización de patrones. Estas son: tipos y fuentes de generalización; tipos de estructuras; formas de atención a las estructuras; y modos de representar y comprender generalizaciones.

La tercera tendencia reconocida en la revisión de la literatura especializada, son los estudios de tipo cognitivo donde involucran la generalización (p. ej., Barbosa y Vale, 2015; Lannin, Barker y Townsend, 2006; Rivera, 2010, 2015, 2018; Zapatera, 2018). Como se ha expresado anteriormente, la generalización implica la extensión del razonamiento más allá de los casos particulares. Es un paso clave, el más costoso en términos cognitivos dentro del razonamiento inductivo. (Cañadas y Castro, 2007). Kirwan (2015), considera que si se espera que los estudiantes generalicen y justifiquen, entonces es importante desarrollar un entendimiento del pensamiento de los maestros sobre estos conceptos, por ello, realizó un estudio donde examinó la comprensión de los maestros de enseñanza secundaria sobre la generalización, la justificación y la interacción entre estos constructos. La recopilación de los datos fue mediante la resolución de tres tareas de patrones geométricos (de figuras) numéricos cuadráticos, administrados durante una sola entrevista a los diez participantes del estudio. Los resultados del análisis indicaron que los participantes desarrollaron o intentaron desarrollar una variedad de reglas explícitas, recursivas e híbridas que apelaban a las características figurativas, numéricas y simbólicas. Los participantes se justificaron al verificar y explicar sus generalizaciones a través de argumentos numéricos, figurativos y simbólicos. Así mismo, parecieron encontrar el mayor éxito al generalizar cuando apelan a características figurativas y verificaban sus generalizaciones a través de una mirada numérica.

Un estudio de tipo cognitivo, en el cual los participantes fueron alumnos de Educación Primaria, es el de Zapatera (2018). El objetivo de la investigación fue estudiar la forma en que los participantes resolvieron problemas de generalización de patrones. Para ello, se ha analizado el nivel de éxito, las estrategias utilizadas y la progresión de 106 alumnos de 3º, 4º, 5º y 6º de Educación Primaria resolviendo un problema de generalización de patrones. Los resultados obtenidos muestran que los estudiantes con mayor éxito comienzan con estrategias aditivas y después cambian a estrategias funcionales, la inversión del proceso presenta una mayor demanda cognitiva, debido a que, muy pocos estudiantes son capaces de expresar la regla general algebraicamente. El análisis de la progresión de los estudiantes permitió al autor definir descriptores de una trayectoria de aprendizaje que ayuda a diagnosticar la comprensión de los estudiantes y a describir su progreso en términos de crecimiento a través de diez niveles de desarrollo.

Otra investigación de corte cognitivo es la de Rivera (2018), en la cual el objetivo fundamental es dilucidar los factores cognitivos que influyen en el desarrollo de estructuras matemáticas y generalizaciones incipientes en niños de escuela primaria cuando se trabaja con tareas que involucran patrones, incluida la forma en que utilizan diversas formas representativas, como gestos, palabras y símbolos aritméticos para transmitir sus expresiones de generalidad. Se describen lo que el autor llama generalizaciones de patrones aproximados y exactos, y tres factores cognitivos que influyen mutuamente en el surgimiento de estructuras matemáticas, estos son, competencia con relaciones numéricas, competencia con la similitud de forma y competencia con la construcción, el discernimiento y la justificación de propiedades figurativas. También, se destacan varios modos de representación que utilizan los estudiantes de primaria para capturar sus estructuras emergentes y generalizaciones incipientes, uso apropiado de grado y comprensión de variables a través de las nociones de variables intuidas y tácitas, y formas en que sus generalizaciones incipientes estructurales apoyan su comprensión temprana de las funciones.

Por otra parte, asociado a la generalización, en particular de patrones figurales, se encuentra un aspecto relevante como lo es la visualización (Barbosa y Vale, 2015; Gal y Linchevski, 2010; Healy y Hoyles, 1999; Nilsson y Juter, 2011; Rivera, 2010). En este sentido Rivera (2010), presenta evidencia de la existencia de lo que denomina “plantillas” visuales en la actividad de generalización de patrones. Dichas “plantillas” surgieron inicialmente de un experimento de enseñanza en el aula dirigido por diseño de 3 semanas sobre la generalización de patrones que involucraba patrones de figuras lineales y se evaluó su existencia en una entrevista clínica que se realizó cuatro meses y medio después del experimento de enseñanza utilizando tres tareas. Con base en las entrevistas clínicas realizadas con 11 estudiantes de séptimo y octavo grado, se analizó cómo sus “plantillas” visuales han generado al menos seis tipos de generalizaciones algebraicas. Lo reportado en Rivera (2010), se presenta como un aporte relevante para la presente investigación por dos aspectos fundamentales; 1) los patrones figurales empleados en la investigación; y 2) la evidencia de las “plantillas” visuales y los tipos de generalizaciones que se generan a partir de éstas, debido a que muestra evidencia de la manera en que los estudiantes perciben, visualizan, estructuran y representan el proceso de generalización mediante estos tipos de patrones (figurales lineales). Además, se reporta cómo los razonamientos aditivos y multiplicativos de los estudiantes inciden en la manera de estructurar sus generalizaciones algebraicas.

Con base en la literatura revisada, se evidencia que las investigaciones y estudios en generalización se han enfocado en patrones (figurales o numéricos), centrándose en reconocer estrategias y dificultades de los participantes a la hora de generalizar. Además, existe escasa literatura en la cual se reporte de manera clara y concisa, qué factores cognitivos pueden estar influyendo en estas estrategias o en la aparición de las dificultades, quedando esos estudios en un nivel de solo describir el razonamiento inductivo. Las investigaciones también reportan que hay un cambio de estrategia figural a una numérica en lo que se refiere a la generalización de patrones con figuras, pero no se proporciona evidencia de cómo se da dicho cambio. Otra tendencia dentro de las investigaciones revisadas, fue que la población de estudio eran en su mayoría alumnos de secundaria y profesores en formación, esto se puede deber a que la generalización se ha asociado a patrones (numéricos o figurales) y estos a su vez con sucesiones (lineales o cuadráticas) y a nivel curricular el estudio de esta temática se hace de manera explícita a partir de secundaria, ello se debe al manejo simbólico alfanumérico característico del álgebra que se ha priorizado en este nivel educativo.

1.1.2 Importancia de la generalización

La generalización está vinculada, a gran escala, a todas las pruebas, proposiciones, objetos y conceptos matemáticos (Dörfler, 1991). Ampliando esta idea al campo de la Matemática Educativa, Castro, Cañadas y Molina (2010), resaltan la generalización como una de las componentes del razonamiento inductivo y afirman que la potencialidad de dicho razonamiento se debe, fundamentalmente a ese hecho.

Las investigaciones se han enfocado en diferentes aspectos de la generalización, algunas de éstas señalan que el trabajo sobre la generalización de patrones (Callejo, García-Reche y Fernández, 2016; Cañadas, Castro y Castro, 2008; Radford, 2010; Vergel,

2015) puede ser un poderoso vehículo para la comprensión de relaciones entre cantidades que subyacen a la matemática funcional, contribuyendo de esta forma al establecimiento de relaciones de variación y fluidez en el manejo del lenguaje simbólico; en términos generales, del desarrollo del pensamiento algebraico (Blanton y Kaput, 2011; Mason, Grahan y Johnston-Wilder, 2012; Valenzuela y Gutiérrez, 2018).

Un gran número de investigaciones sobre la generalización han estudiado las estrategias empleadas por los estudiantes, las etapas o niveles de generalización, los obstáculos, el papel de los ámbitos numérico y visual-geométrico en el desarrollo de la generalización y la introducción del lenguaje algebraico (Barbosa y Vale, 2015; Cañadas et al., 2008; García Cruz, 1998; Orton y Orton, 1994; Rivera y Becker, 2008; Stacey, 1989), el conocimiento del profesor sobre la generalización de patrones (Rivera y Becker, 2007; Zazkis y Liljedahl, 2002) o la forma en la que maestros en ejercicio o formación "*miran profesionalmente*" el pensamiento matemático de alumnos que resuelven problemas de generalización de patrones (Mouhayar y Jourdak, 2012; Zapatera, 2015), la forma en la que alumnos de Educación Primaria resuelven un problema de generalización de patrones, incluyendo también el proceso inverso (Rivera, 2010; Warren, 2005; Zapatera, 2018; Zapatera y Callejo, 2013). Investigaciones centradas en la manera en la que los estudiantes de Primaria resuelven tareas de generalización de patrones lineales (Carraher et al., 2007; Radford, 2011; Rivera, 2010; Warren, 2005; Zapatera y Callejo, 2013), han puesto de manifiesto tres elementos matemáticos y su papel relevante en el desarrollo del proceso de generalización: 1) estructuras espacial y numérica, 2) relación funcional y 3) proceso inverso.

Otros estudios recientes sobre generalización de patrones realizados con estudiantes de Primaria (Blanton, Brizuela, Murphy Gardiner, Sawrey y Newman-Owens, 2015; Rivera, 2018; Walkowiak, 2014; Wilkie, 2014; Wilkie y Clarke, 2016; Whitin y Whitin, 2011), resaltan la existencia de lo que denominan dos tipos de generalizaciones incipientes, éstas son, *las generalizaciones aproximadas (AG) son generalidades borrosas de una estructura emergente*, es decir, los aspectos como los de número, forma y propiedades de las figuras no están bien coordinados de manera armoniosa, consistente o estable y *las generalizaciones exactas (EG) son generalidades conceptualmente consistentes de una estructura emergente*, es decir, los tres aspectos de número, forma y propiedades figurales están bien coordinados de una manera armoniosa, consistente o estable (Rivera, 2018).

Estos mismos estudios referenciados anteriormente, muestran las siguientes observaciones.

- La elección entre *AG* o *EG* parece depender de la complejidad de la tarea, lo que significa que la generalización de patrones depende de cómo los estudiantes individualmente perciben, interpretan y construyen la complejidad estructural de un conjunto de etapas en un patrón. La generalización de patrones también podría ser inducida por tareas, lo que significa que podría ser impulsada por la potencia causal de las etapas dadas.

- Factores tales como la novedad de la tarea, el conocimiento previo débil y la disposición en el momento de la generalización pueden influir en el contenido de las generalizaciones de los estudiantes de primaria.

Desde la investigación se reporta que existen distintos tipos de generalización a las ya mencionadas anteriormente, que se identifican de acuerdo con su naturaleza o características. En Dorantes (2018), se atiende a cuatro tipos de generalización, en las que se toman en cuenta: a) la forma de abstracción de lo particular a lo general (Dörfler, 1991); y b) la manera en que se organiza y se estructuran los objetos o partes discretas en un patrón y se traduce a una expresión simbólica (Rivera, 2010).

Según Dörfler (1991), si se considera la forma de abstraer de lo particular a lo general, se atiende a dos tipos de generalizaciones, la empírica y la teórica. Cuando un estudiante establece una generalización *empírica* extrae y aísla mentalmente características estables y comunes o sistemas de características de sus contextos originales a través de procesos de comparación y observación. Así también, cuando un estudiante realiza generalización *teórica* se enfoca ya sea en las acciones relevantes o en los sistemas de acciones que acompañan al proceso general, los resultados de tales acciones o sistemas, o las condiciones (relaciones y propiedades) que hacen factibles las acciones o sistemas.

Por su parte, Rivera (2010) expone otros dos tipos de generalización: constructivas y deconstructivas. En la *constructiva*, se considera que una estructura interpretada en relación con algún patrón, consiste en partes no superpuestas que al sumarse, constituyen una forma percibida que se aplica a través de las etapas del patrón. Mientras que una generalización *deconstructiva*, es cuando se ven las etapas figurales conocidas en un patrón, como consistentes en partes superpuestas que se pueden descomponer de manera conveniente. Ambos tipos de generalizaciones reflejan el uso de un pensamiento que puede ser aditivo o multiplicativo; y pueden expresarse de forma estándar o no estándar, lo que refiere a los términos algebraicos en una expresión directa, es decir, estándar significa que los términos ya están en forma simplificada, mientras que no estándar contiene términos que se pueden simplificar aún más (Dorantes, 2018).

Otras investigaciones dan cuenta de las dificultades de los estudiantes para generalizar en el contexto de tareas sobre sucesiones de tipo figural. Barbosa, Vale y Palhares (2009) y Becker y Rivera (2005) mencionan: a) El predominio en el uso de estrategias aritméticas y recursivas, en detrimento de las de tipo visual o explícitas que permitan inducir el patrón de regularidad, b) La dificultad de expresar las relaciones generales, ya sea en representación verbal o simbólica, c) El manejo desprovisto de significado de una expresión simbólica, al margen del análisis contextual de las figuras de una sucesión. Por ello, algunas investigaciones se han preocupado por identificar el rol que juega la visualización en la generalización de patrones figurales (Barbosa y Vale, 2015; Valenzuela y Gutiérrez, 2018).

La investigación muestra que hay una amplia gama de estudios en lo que respecta a la generalización en los diferentes niveles educativos (Blanton et al., 2015; Carraher et al., 2007; Radford, 2011; Rivera, 2010, 2018; Walkowiak, 2014; Warren, 2005; Wilkie, 2014; Wilkie y Clarke, 2016; Whitin, y Whitin, 2011; Zapatera y Callejo, 2013), en cuanto a esto Mason (1996) defiende la idea de la generalización en los primeros cursos, donde el álgebra aprendida en la escuela es un lenguaje para la expresión y manipulación de la generalización, por ello sostiene que para que la enseñanza en álgebra sea exitosa se requiere la atención, evocación y expresión del pensamiento algebraico desde edades tempranas. Respecto a esto Kieran (1996, 2004) precisa que el pensamiento algebraico es un enfoque que puede ser empleado, entre otras cosas, como un soporte cognitivo. Por su parte, Carraher y Schliemann (2007) puntualizan que el pensamiento algebraico es un proceso cognitivo envuelto en la solución de problemas, los cuales se pueden expresar de manera fácil por medio de notación algebraica. Autores como Soares, Blanton y Kaput (2006), consideran al pensamiento algebraico como un proceso cognitivo sobre el cual los estudiantes pueden establecer y construir relaciones matemáticas generales.

La generalización es uno de los procesos cognitivos más importantes de la actividad matemática (Zapatera, 2018), de tal forma que, para Mason, Burton y Stacey (1992) las generalizaciones constituyen el verdadero nervio de la matemática y consideran la generalización como la esencia del álgebra y una de las rutas fundamentales hacia ella.

En los párrafos anteriores, se ha mostrado por medio de los diferentes aspectos que se han estudiado referente a la generalización, como ésta, cobra importancia en diferentes ámbitos, considerándose una herramienta útil e importante a la hora de introducir el álgebra en la escuela, y un proceso cognitivo relevante en el marco de la matemática, debido a que posibilita la introducción del álgebra y el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros años de escolaridad. Teniendo este panorama claro, lo que se pretende en la presente investigación es enfocarse en describir aspectos cognitivos que influyen en estudiantes de primaria, al trabajar tareas con patrones figurales que demandan la generalización.

1.2 Problema de investigación

La importancia de la generalización en la Matemática Educativa, y más específicamente en lo que concierne al aprendizaje ha sido reconocida, tanto en documentos de orientación curricular, como en la investigación. En lo que respecta a documentos de orientación curricular, se puede mencionar como ejemplo los estándares del NCTM (2000), en los cuales se enuncia que la generalización es uno de los principales objetivos de la instrucción matemática y se argumenta sobre la trascendencia e importancia de los razonamientos para el quehacer matemático de los escolares. En cuanto a la investigación Davidov (1978), tambien resalta la importancia de la generalización, señalando que desarrollar ésta en los niños se ve como uno de los principales propósitos de la instrucción escolar.

A pesar de la importancia dada a la generalización desde lo curricular y la investigación desde hace ya un tiempo, poco se sabe de estudios llevados a cabo con alumnos mexicanos, así como con profesores en formación y menos con profesores en servicio. Las principales aportaciones, en cuanto a lo investigativo han sido mayormente de Norte América (p. ej., Radford, 2010; Rivera, 2018) y Europa (p. ej., Barbosa y Vale, 2015; Zapatera, 2018).

Como se ha documentado en párrafos previos, la investigación que refiere a la generalización, ha atendido a estudios de tipo cognitivo. Estas investigaciones, han estudiado en su mayoría, el razonamiento en alumnos, más específicamente el razonamiento inductivo en estudiantes de nivel medio (p. ej., Cañadas, 2007; Cañadas, Castro y Castro, 2008; Dorantes, 2018). También se encuentran estudios de tipo cognitivos que han promulgado el desarrollo sistemático del pensamiento algebraico de los estudiantes de primaria (p. ej., Blanton et al., 2018). Como se puede observar se han realizado investigaciones de corte cognitivo, pero estos estudios no evidencian los aspectos cognitivos que el niño de primaria involucra en la generalización, cuando se ve ésta como proceso y resultado, al trabajar con patrones figurales.

Otro aspecto evidenciado en lo que respecta a la generalización, es que ésta se ha asociado a los patrones, ya sean numéricos o figurales. En ese sentido Walkowiak (2014) menciona que, las experiencias sistemáticas con patrones, pueden construir una comprensión de la idea de función, la experiencia con números y sus propiedades, que representen una base para el trabajo posterior en secundaria con la introducción de símbolos y expresiones algebraicas. La anterior idea es apoyada y puntualizada para la educación básica primaria por Aké (2013) al afirmar que, la generalización a través de patrones y el uso de funciones son una herramienta útil para introducir aspectos algebraicos en la escuela elemental, y un punto de partida para familiarizar a los niños de este nivel con la notación algebraica. Por ello, la presente investigación hace énfasis en el estudio de la generalización en el marco de los patrones figurales.

Siguiendo con la anterior idea, al revisar los planes y programas de estudios de Nivel Básico del currículo mexicano, se deja ver que a los estudiantes de primaria no se les demanda la generalización y lo que la investigación ha reportado es que, los niños desde los primeros años de escolaridad pueden generalizar, tanto patrones aritméticos como figurales. Así que son necesarias investigaciones en las cuales la generalización sea la máxima demanda cognitiva para niños de primaria y además investigaciones que describan esos aspectos cognitivos que influyen en dicha demanda. Esto se hace con dos propósitos bien definidos, el primero de carácter curricular, el cual es atender la demanda a nivel internacional de la introducción del álgebra en los primeros años de escolaridad, proponiendo tareas para dicho fin, y el segundo, indagar sobre la temática para dar evidencia e información de carácter empírico desde el contexto mexicano, acerca de cómo se encuentra en este aspecto los escolares y en la medida de lo posible facilitar una comparación con los resultados de los estudios reportados en otros países.

Por ello, el interés del presente estudio se centra en describir los aspectos cognitivos que evidencian estudiantes que no han tenido experiencia con tareas que demanden la generalización de un patrón figural en cursos anteriores y cuya experiencia previa y máxima demanda cognitiva, ha sido la de reconocer la regularidad en un patrón ya sea numérico o figural.

1.3 Pregunta y objetivos de investigación

La pregunta de investigación que aquí se plantea es la siguiente:

¿Qué aspectos cognitivos evidencian niños de primaria, en tareas que demandan la generalización de patrones figurales asociados a una sucesión lineal?

Para dar respuesta a la anterior cuestión se plantea el siguiente objetivo general de investigación:

Describir los aspectos cognitivos que evidencian niños de primaria, en tareas que demandan las generalizaciones de patrones figurales.

Este objetivo general se puntualiza en los siguientes objetivos específicos:

O.E.1: *Examinar los tipos de representaciones empleadas por los estudiantes de primaria en el trabajo con tareas que demandan la generalización de patrones.*

O.E.2: *Describir las estrategias que emplean los niños de primaria en el desarrollo de estructuras matemáticas y la generalización de patrones figurales.*

Capítulo 2
Fundamentación teórica

La investigación describe los aspectos cognitivos que evidencian estudiantes de tercer grado de primaria, mientras resuelven tareas que demandan la generalización de patrones figurales, asociados a una sucesión lineal. Las producciones, se analizan con base en las formas en que percibieron el comportamiento de los patrones (en etapas cercanas y lejanas) objeto de estudio, en las tareas que se les plantearon. La percepción como proceso del pensamiento, implica a los sentidos en la interpretación de objetos o de eventos, para luego transformarlos en experiencias significativas en el cerebro (Seel, 2012). Proceso que involucra formas diversas de razonamiento y que se materializan en las estrategias que un sujeto desarrolla y el tipo de representaciones que usa. Las conclusiones o resultados derivados de este proceso, pueden explicar o no, de manera adecuada el comportamiento de los eventos u objetos. En ese sentido, el análisis de los aspectos cognitivos en este trabajo, presta atención a los tipos de razonamiento (inductivo, abductivo y deductivo) y estrategias que pusieron en juego los estudiantes, a partir de cómo percibieron inicialmente el comportamiento de los patrones, de las interpretaciones y explicaciones que hicieron, los significados que usaron y las conclusiones que establecieron como resultado de ese proceso. Estas conclusiones pueden referir a una estructura matemática plausible (o regla general) que explique el comportamiento de los patrones, en cualesquiera de sus etapas.

Los fundamentos teóricos del estudio toman como base los conceptos de patrón y generalización, al igual que los sistemas de representación y al de estructura matemática. Articulándose al concepto de estrategias y tipos, así como al de percepción. Estos aspectos son útiles en la descripción de los procesos cognitivos en que enfatiza la investigación.

2.1 Generalización

La generalización es un aspecto de suma importancia en las matemáticas, ya que reside en el corazón de ésta (Mason, 1999) y se encuentra en el centro del razonamiento algebraico (Schliemann, Carraher, Brizuela y Earnest, 2003). La importancia de la generalización en matemáticas radica en la propia naturaleza de la disciplina, en la formulación de proposiciones sobre números y formas (Mason, Graham, Pimm, y Gowar, 1985). Mason, Graham y Johnston-Wilder (2005), destacan que el álgebra está basada en la capacidad de generalizar a través de casos específicos y que incluso niños en los primeros años de escolaridad muestran esta capacidad. En el contexto de la presente investigación, la generalización, también cobra una relevancia considerable, es por ello por lo que se entiende en un sentido más amplio. Kaput (1999) define generalizar como:

> *… extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos* (p. 58).

Esta definición implica a la extensión del razonamiento más allá de los casos particulares, lo que le da a la generalización un atributo extensional y ampliativo del conocimiento, en este caso del matemático.

Para entender la manera en la que se concibe y se hace operativa la definición de generalización en el presente estudio, se remite a lo que Kirwan (2015), denomina *dos tradiciones* que se han desarrollado en la investigación de la generalización. Una de ellas se enfoca en la generalización como *proceso*, es decir, actividad o acción. La otra, se enfoca en la generalización como un *producto*, esto es, el resultado de un proceso u objeto. La generalización concebida como proceso, es dinámico y de naturaleza cambiante. Dicho de otra manera, la generalización es una acción o actividad, no un objeto. Desde esta perspectiva, la generalización es una actividad que uno realiza. Los investigadores que trabajan en esta tradición (p. ej., Ellis, 2007b; Lobato, Ellis y Muñoz, 2003), asumen que la generalización es una construcción interna, debido a que indican que estas actividades relacionadas al proceso de generalización de patrones describían las acciones y estructuras mentales de los alumnos, lo que implica que son inherentemente internas. Estos dos estudios ayudan a proporcionar evidencia de la asociación entre la generalización como un proceso y el supuesto de la generalización como una construcción interna.

La segunda tradición que puntualiza Kirwan (2015), describe a la generalización como un producto, puesto que lo ve como objetos estáticos, por ejemplo, cuando un estudiante desarrolla una regla para una tarea sobre generalización, la regla es la generalización, ya que se ve como el objeto/producto. En la misma línea que Kirwan (2015), Chua y Hoyles (2012), miden en su estudio, solo un producto externo producido por los participantes (es decir, el trabajo escrito). El estudio ayuda a proporcionar evidencia de la asociación entre la generalización como producto y el supuesto de generalización como una construcción externa, es decir, lo que se logra evidenciar.

Teniendo en cuenta las dos tradiciones desarrolladas en la investigación de generalización, para fines de la presente investigación se concibe a ésta tanto como proceso (procesos internos cognitivos), como un producto (expresiones como cálculos, representaciones, gestos, en fin, todo aquello que permita evidenciar la manera de razonar y proceder de los participantes), ya que el producto (lo que se logra hacer visible o externar) viene a ser el resultado de un proceso llevado a cabo internamente. Es decir, la generalización también se considera no solo un proceso sino un producto o resultado de procesos internos (Chua y Hoyles, 2010; Kirwan, 2013; Stacey, 1989; Stephens, Ellis, Blanton y Brizuela, 2017) y en ese sentido, para la presente investigación se afirma que un estudiante generalizó cuando evidencie y justifique la construcción de una estructura matemáticamente plausible, que describa y explique el comportamiento de un patrón figural en el marco de una sucesión lineal, tanto en sus etapas cercanas como en las lejanas.

2.1.1 La generalización en el marco de los patrones

Entre los diversos temas relacionados con la generalización se encuentran, específicamente, los patrones y las funciones. El reconocimiento de patrones juega un papel importante, debido a que además de ser esencial en la habilidad para generalizar, ha sido el foco de la investigación realizada durante los últimos años (Aké, 2013; Pólya, 1966). La idea básica implicada en esta noción es que toda situación repetida con regularidad da lugar a un patrón, que por lo general suele formarse a partir de un núcleo generador que se repite o bien crece de forma regular (Castro, 1994).

Castro-Rodríguez y Castro (2016) indican que el concepto de patrón es el precursor del pensamiento algebraico, ya que permite establecer generalizaciones, contribuyendo a la capacidad de establecer modelos matemáticos y los cimientos para desarrollar habilidades matemáticas. Por su parte Mason (1999), afirma que la capacidad para detectar patrones y expresar generalidad está presente en el niño desde su nacimiento y, ciertamente, desde su ingreso a la escuela. En ese sentido, y ampliando las dos ideas anteriores, Aké (2013) menciona que, se puede establecer que la generalización a través de patrones y el uso de funciones son una herramienta útil para introducir aspectos algebraicos en la escuela elemental, y un punto de partida para familiarizar a los niños de este nivel con la notación algebraica. En última instancia, el poder del pensamiento algebraico promulgado a través de la generalización proporciona, una oportunidad a los niños para hacer explícita la estructura matemática. Es esta sensibilidad a la profundidad en el pensamiento matemático la que puede ayudar a la transición de los estudiantes hacia las matemáticas más complejas y abstractas que se encuentran en etapas más avanzadas (Blanton y Kaput, 2003).

Kaput (1999) presenta la idea de patrón y estructura cuando se refiere a la definición de generalización, que en la presente investigación se toma como referencia. De acuerdo con lo anterior, el uso de patrones es uno de los caminos para promover el pensamiento algebraico y enseñar a generalizar a los alumnos (NCTM, 2000).

2.1.1.1 Tipos de patrones

Por la manera en que suelen representarse, los patrones pueden clasificarse en numérico y figural. Un patrón numérico es una secuencia de números, en la que existe una regla bien definida para calcular cada número a partir de los números anteriores o desde su posición en la secuencia (Bishop, 2000). Por su parte, un patrón figural es una secuencia estructurada de objetos en etapas dadas, las cuales están configuradas en determinada forma y exhiben características asociadas con representaciones esquemáticas (Rivera, 2010). En ese sentido, los patrones figurales implican a las formas como los objetos principales de una generalización. Al igual que con todas las formas en matemáticas, se analizan en términos de sub-configuraciones, partes o componentes que operan o tienen sentido dentro de algunas estructuras interpretadas (Rivera, 2013).

Los patrones figurales están regidos mediante un patrón numérico, esto quiere decir que, en un patrón figural, los números se relacionan con una secuencia de figuras, en las que cada una de estas figuras se deriva de una anterior mediante algún procedimiento bien definido. Se dice que un patrón figural es lineal si cada número se obtiene al agregar un incremento constante al número anterior o, de forma equivalente, si cada número es una función lineal de su posición en la secuencia. En este sentido, el uso de tareas con patrones figurales permite en los estudiantes la emergencia de diferentes tipos de estructuras algebraicamente útiles (Rivera, 2010), así como tipos de generalizaciones asociadas a estas estructuras. Por ello, la presente investigación, se realiza a través de tareas que involucran patrones figurales asociados a una sucesión numérica de tipo lineal, esto debido a que los patrones figurales permiten indagar acerca de los diferentes tipos de percepciones por su representación esquemática y las diferentes características que se pueden identificar asociadas a sus representaciones, además de los distintos tipos de generalizaciones y estructuras que los estudiantes expresen en su forma de proceder.

2.1.2 Tipos de generalizaciones en patrones figurales

Se ha documentado desde la investigación, que existen distintos tipos de generalizaciones, que se identifican de acuerdo con su naturaleza o características (Dorantes, 2018).

Rivera (2010), destaca dos formas básicas algebraicas de desarrollar una generalización de patrones que involucran patrones figurales de acuerdo con la estructura matemática y la manera en que se organizan los objetos o partes discretas en un patrón figural y se traduce a una expresión simbólica:

1. *Generalizaciones constructivas:* Son aquellas que los estudiantes construyen a partir de las etapas conocidas en un patrón figural como resultado de percibir cognitivamente las figuras de manera independiente, es decir, en partes no superpuestas que, cuando se suman, forman la figura percibida que se aplica a través de las etapas del patrón.
2. *Generalizaciones deconstructivas:* Son aquellas que los estudiantes construyen a partir de las etapas conocidas como resultado de la percepción cognitiva de figuras como constituyentes superpuestos o por partes, es decir, ven las etapas figurales

conocidas en un patrón como consistentes en partes o sub-configuraciones superpuestas que se pueden descomponer de manera bastante conveniente.

Los tipos de generalizaciones implican, ya sea una estructura aditiva o multiplicativa (estructura matemática), según el tipo de pensamiento que predomine en el estudiante y su nivel de abstracción, y puede expresarse de forma estándar o no estándar, lo que refiere a los términos algebraicos en una expresión directa, es decir, estándar significa que los términos ya están en forma simplificada, mientras que, no estándar contiene términos que se pueden simplificar aún más (Rivera, 2010). Para el caso de la presente investigación, se tendrán en cuenta los tipos de generalizaciones ya definidos anteriormente, haciendo la aclaración de que por el tipo de población del estudio (niños de tercero de primaria) no es posible que expresen las generalizaciones articuladas a una estructura matemática, ya sea aditiva o multiplicativa, mediante un lenguaje algebraico formal. Aunque se puede afirmar que sí están pensando en lo general (Radford, 2010). Sin embargo, por el nivel de abstracción que han desarrollado en este nivel educativo, aun no es posible expresar la regla o estructura mediante una simbología alfanumérica propia del álgebra convencional.

2.2 Estructura matemática

Como se ha evidenciado, un aspecto relacionado específicamente a los tipos de generalizaciones es la estructura matemática. Por ello, para la presente investigación, interesa cómo ésta se encuentra relacionada con la generalización de patrones o la construcción de una estructura matemática plausible. Siguiendo esta idea, Mulligan y Mitchelmore (2009), afirman que, la estructura matemática es fundamental en la generalización de patrones, y ambos, son sustanciales en el aprendizaje temprano de las matemáticas. Respecto a la generalización de patrones, Rivera (2010), menciona que ésta implica para el estudiante, coordinar sus capacidades inferenciales perceptivas y simbólicas para la construcción y justificación de lo que él llama, una estructura plausible y algebraicamente útil. En ese sentido, la estructura matemática cobra un papel importante en esta investigación, y se entiende en el sentido de Mason, Stephens y Watson (2009) como, la identificación de propiedades generales que se instancian en situaciones particulares como relaciones entre elementos. La estructura matemática en la generalización de patrones puede inferirse a través de las representaciones (simbólicas, verbales o gestuales) y tipos de generalizaciones a las que el estudiante recurre para establecer una generalización, y más específicamente en el desarrollo de esas mismas estructuras dado que no siempre pueden ser capaces de establecerlas.

Según Rivera (2013), las estructuras que construyen los niños de primaria en el trabajo con tareas de generalización de patrones figurales son incipientes, transitando de lo gestual/verbal a lo aritmético, expresándolas en términos de las estructuras aritméticas (aditivas y multiplicativas). Por ello, en la presente investigación se tendrán en cuenta las estructuras matemáticas articuladas a un pensamiento, ya sea aditivo o multiplicativo evidenciadas por los estudiantes al trabajar con tareas que demandan la generalización de patrones figurales.

2.3 Bondad de los patrones

Un aspecto clave en el estudio de la generalización de patrones figurales es al que se refiere Rivera (2010), cuando acuña el término bondad del patrón o efecto Gestalt, para referirse a la denominada ley Gestalt, la cual se relaciona con el orden en que se percibe, discierne y organiza una figura, un dibujo o una imagen, es decir, se está predispuesto a organizar sobre la base de lo que pertenece o encaja naturalmente, incluido lo que es simple y lo suficientemente reconocible que permita asociar o especificar una forma geométrica o fórmula algebraica. En ese contexto, al tratarse el presente estudio acerca de la generalización de patrones figurales, la ley Gestalt permite seleccionar qué tipos de patrones figurales se pueden emplear en las tareas según el nivel académico y cognitivo de los participantes. Un patrón figural que es alto en bondad Gestalt tiende a tener una estructura interpretada que refleja la forma ordenada, equilibrada y armoniosa del patrón, que permite a los estudiantes especificar fácilmente una fórmula algebraicamente útil (Rivera, 2010). Un ejemplo de patrones altos en bondad Gestalt, son aquellos que se encuentran relacionados a una sucesión lineal.

Por su parte, un patrón figural que es bajo en bondad Gestalt se interpreta como desorganizado con una estructura compleja (desequilibrada) que no tiene partes fácilmente discernibles o consiste en partes que no tienen “divisiones naturales”, lo que hace que la tarea de construir una fórmula algebraicamente útil sea difícil de lograr. Los patrones que son bajos en la bondad Gestalt requieren más conceptualización para ser representacionalmente adecuados, lo que significa decir que una estructura interpretada algebraicamente útil requeriría más trabajo (Rivera, 2010). Un ejemplo de un patrón figural bajo en bondad Gestalt, es aquel que se encuentra asociado a una sucesión cuadrática.

La bondad del patrón no es un hallazgo nuevo, pero la forma de ayudar a los estudiantes a lidiar con ella (por ejemplo, cómo deducir perceptiva y simbólicamente una estructura algebraicamente útil) si es relativamente nueva (Rivera, 2010). Cabe resaltar que, para fines de la presente investigación, la ley Gestalt o bondad del patrón, permite identificar y seleccionar patrones figurales que se empleen en las tareas con el objetivo de poder indagar sobre lo que se quiere investigar. En ese sentido, se seleccionan patrones figurales altos en bondad Gestalt, debido al nivel educativo y capacidades cognitivas de los participantes del estudio y la manera en la cual este tipo de patrones se llegan a percibir por parte de los estudiantes. Es así como, se escogen patrones figurales asociados a sucesiones lineales de la forma $ax + b$ donde $a, b > 0$ y $x \in \mathbb{N}$.

2.4 Percepción

La percepción ha sido un tema de estudio desde diversas disciplinas científicas, desde la filosofía inicial, hasta corrientes de investigación actuales enmarcadas en el campo de la neurociencia, involucrando en estos estudios aspectos fisiológicos (como lo es el ojo como órgano encargado de la visión). En ese sentido, una de las principales disciplinas que se ha encargado del estudio de la percepción ha sido la psicología y, en términos generales, este campo ha definido a la percepción como el proceso cognitivo de la conciencia que consiste en el reconocimiento, interpretación y significación para la elaboración de juicios en torno a las sensaciones obtenidas del ambiente físico y social, en el que intervienen otros procesos psíquicos entre los que se encuentran el aprendizaje, la memoria y la simbolización (Vargas, 1994). Pero la postura que se toma en la presente investigación acerca de la percepción va más allá de su enfoque inicial, el cual se centró en el sistema de visión y sus capacidades y se concentra más en enfoques posteriores, examinando cuestiones cognitivas y de aprendizaje. Siguiendo esa idea, se posiciona a la percepción como el proceso fundamental de la actividad mental, y suponiendo que las demás actividades psicológicas como el aprendizaje, la memoria, el pensamiento, entre otras, dependen del adecuado funcionamiento del proceso de organización perceptual que los individuos tengan (Oviedo, 2004). Por ello, en el presente estudio investigativo se entiende a la percepción, más allá de un sentido sensorial y se comprende como un proceso cognitivo, en el cual se amalgaman las estructuras mentales de los estudiantes, tanto consciente como inconscientemente. En ese contexto Seel (2012), define la percepción como:

> *el proceso mediante el cual la información del entorno es detectada por los sentidos y transformada en una experiencia significativa en el cerebro. Una búsqueda dinámica de patrones útiles en lugar de una grabación pasiva, la percepción es una interpretación de eventos, que involucra la ruptura de datos sensoriales y el ensamblaje de información tanto a nivel consciente como inconsciente* (p. 2576).

El anterior autor entiende a la percepción como un proceso sensorial y cognitivo del individuo donde se prima la parte cognitiva más allá de solo la sensorial, es aquí donde entra el aprendizaje, entendido como aquel proceso cognitivo que ocurre en el interior del individuo cognoscente y que influye en la modificación de actuales, o la creación de nuevas estructuras mentales. Siguiendo este punto de vista, la presente investigación se centra en los tipos de percepciones involucrados en el proceso de enseñanza y aprendizaje, en particular a lo que respecta al aprendizaje de las matemáticas, enfocándose en específico a los tipos de percepciones que ya están reportadas en la investigación y que se relacionan con la generalización de patrones figurales. En ese contexto, Rivera y Becker (2008), mencionan que en el caso de tareas de patrones que involucran señales figurativas, entre los tipos de percepciones, la que importa es la percepción visual, y estos mismos autores retoman la idea de Dretske (1990), quien caracteriza a la percepción visual en dos tipos, sensorial y cognitiva.

> *La percepción sensorial (u objeto) es cuando los individuos ven un objeto como un mero objeto en sí mismo. La percepción cognitiva va más allá de lo sensorial cuando los individuos ven o reconocen un hecho o una propiedad en relación con el objeto* (Rivera y Becker, 2008, p. 67).

Para ejemplificar la diferencia entre los tipos de percepciones (sensorial y cognitiva), Rivera y Becker (2008) mencionan que, los niños pequeños que ven grupos consecutivos de señales figurativas como el patrón de cuadrados adyacentes en la Figura 1, como meros conjuntos de objetos exhiben percepción sensorial. Sin embargo, cuando reconocen que las señales tomadas en conjunto forman en realidad una secuencia de patrones de objetos, manifiestan una percepción cognitiva. La percepción cognitiva requiere el uso de procesos conceptuales y otros procesos cognitivos, lo que permite a los estudiantes articular lo que eligen reconocer como un hecho o una propiedad de un objeto estudiado. Está mediado de alguna manera a través de otros tipos de conocimiento visual que inciden en el objeto, y estos tipos pueden ser de naturaleza cognitiva o sensorial.

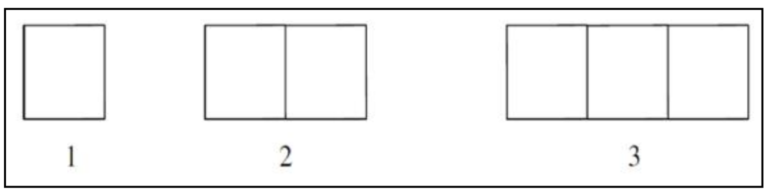


Figura 1. Tarea de patrón de cuadrados adyacentes en forma comprimida (Tomado de Rivera y Becker, 2008, p. 66).

Por otra parte, resultados de trabajos con alumnos de secundaria (Becker y Rivera, 2005) y estudiantes de pregrado (Rivera y Becker, 2007) han confirmado el acto inicial y preparatorio mediante el cual la percepción, como una “forma de llegar a conocer” un objeto o alguna propiedad o hecho sobre el objeto (Dretske, 1990), es necesaria y fundamental en la generalización en particular la generalización de patrones figurales.

En términos generales, cuando se trabaja con tareas que demandan la generalización, para este caso de patrones figurales, la forma de iniciar con este proceso en las tareas es a través de la percepción de las figuras que conforman el patrón en las etapas dadas, así como también la manera en que está organizado y estructurado. Esto quiere decir, que lo que entra en juego en un primer momento, es la percepción sensorial (lo que se capta a través de los sentidos), ya que el estudiante solo reconoce las figuras en las que se estructura el patrón (círculos, cuadros, entre otros), pero luego para seguir este proceso de generalización de patrones figurales es necesario que el estudiante transite de lo sensorial (objeto en sí) a lo cognitivo, reconociendo propiedades, ya sean numéricas o figurativas del patrón, por ejemplo, cuanto crece (regularidad) y de qué manera crece. También la forma de organizarse o estructurarse el patrón, la manera de poder componerlo o descomponerlo en otras figuras, si es posible. De esa manera, se evidencia la percepción, que para fines del presente trabajo será descrita en su mayoría, la cognitiva, aunque cabe aclarar que, no se puede desvincular una de la otra, es más, los tipos de percepciones (sensorial y cognitiva), están vinculadas indistintamente. Pues para que se dé la percepción cognitiva, antes se tuvo que haber dado alguna señal (figura, dibujo, objeto o forma) que se pudiera captar por medio de los sentidos, es decir, sensorialmente.

Por otra parte, al enfocarse en las estrategias que desarrollan los estudiantes a la hora de trabajar con tareas que demandan la generalización de patrones, se hace evidente su forma de proceder y la ruta que siguen para construir la generalización o una estructura matemática. Además, si se enfatiza en el análisis de estas estrategias, así como de los enfoques de razonamiento, la investigación ha reportado en lo que respecta a la generalización de patrones que las estrategias desarrolladas por los participantes se centran en lo numérico y figural (Becker y Rivera, 2005; Jurdak y Mouhayar, 2014; Mouhayar y Jurdak, 2016; Stacey, 1989). En ese sentido, el presente estudio también se interesa en identificar y describir las estrategias o formas de proceder, desarrolladas por los estudiantes, que se encuentran relacionadas con la manera de percibir el patrón figural y que influyen en los procesos de razonamiento involucrados en la generalización de patrones figurales.

2.5 Procesos de razonamiento en la generalización de patrones

Según Rivera (2018), el abductivo, inductivo y deductivo, son tres tipos de razonamiento inferencial que están involucrados en la construcción y justificación de la generalización de patrones en nivel primaria. La aparición de estos tipos de razonamientos depende de cómo los estudiantes de ese nivel procesan los componentes numéricos y/o figurativos de los patrones. En los casos de patrones figurales, las formas aproximadas y exactas de generalización dependen de su capacidad para establecer relaciones entre las formas, las relaciones numéricas y las propiedades de las figuras que se infieren en los patrones.

Siguiendo la idea de Rivera (2018) y para fines de la presente investigación, se describen los tres tipos de razonamientos involucrados en la generalización de patrones (figurales) en lo que Rivera y Becker (2007), denominan la triada de la abducción, inducción y deducción, debido a que si ésta se toma en conjunto, se puede proporcionar una explicación más coherente y completa de todo el proceso de investigación (Minnameier, 2004).

A continuación, se definen como se conciben para la presente investigación, los tipos de razonamientos involucrados en la generalización de patrones.

2.5.1 Razonamiento inductivo

En la presente investigación, se entiende el razonamiento inductivo como generar una inferencia viable a partir de una base de conocimiento incompleto (Rivera y Becker, 2007), en otras palabras, se entiende como el establecimiento de una conjetura que es potencialmente generalizable y además ampliativa, la cual explica la regularidad, con base en un conjunto de observaciones (Aliseda, 2006), tales como casos o etapas particulares de las tareas. En ese sentido, la inducción entra en juego en el proceso de generalización o construcción de la estructura matemática plausible cuando, el estudiante mediante el trabajo con las etapas dadas del patrón y la identificación de propiedades o relaciones numéricas y/o figurativas, logre proponer una conjetura y una explicación válida para ésta que argumente su forma de proceder.

2.5.2 Razonamiento abductivo

Para la presente investigación el razonamiento abductivo, se constituye como una etapa de validación o comprobación de la conjetura establecida en el proceso inductivo. Diferenciándose así, el razonamiento abductivo del inductivo, en que el primero recurre a un producto acabado (conjetura), a partir de una sola observación, y el segundo, infiere una regularidad (conjetura), a través del análisis de un conjunto de observaciones (Aliseda, 2006). En el razonamiento abductivo, se evidencia que la explicación o la justificación de la conjetura es un componente primordial en el proceso de generalización de patrones, así que toda conjetura (o regla local) planteada, debe ir acompañada de una explicación válida (argumentos que justifiquen dicha regla).

2.5.3 Razonamiento deductivo

El razonamiento deductivo, en términos generales, se concibe como aquel proceso de inferencia de conclusiones de premisas, basadas en reglas propias de la lógica formal, donde se obtienen conclusiones a partir de casos generales a casos particulares. Este tipo de razonamiento permite inferir conclusiones de información conocida (premisas) basadas en reglas lógicas formales, donde las conclusiones se derivan necesariamente de la información dada y no hay necesidad de validarlas mediante experimentos (Michal y Ruhama, 2008).

La anterior concepción del razonamiento deductivo va relacionada a la distinción dada en la filosofía clásica, pero al involucrar este tipo de razonamiento, en la construcción y justificación de la generalización de patrones, éste se concibe como transferencia exitosa en el razonamiento de etapas lejanas (Rivera, 2018). Siguiendo esta idea, en la presente investigación, se concibe a la etapa deductiva del proceso de generalización como aquella fase de extensión del patrón a etapas lejanas, es decir, el establecimiento de nuevas conclusiones (etapas lejanas), verdaderas, a partir de la regla establecida (Rivera y Becker, 2007). De esta manera la regla directa establecida en el proceso de validación de la conjetura (abductivo), se constituye en una estructura matemática plausible que explica el comportamiento del patrón tanto en sus etapas cercanas consecutivas, como las cercanas no consecutivas y finalmente las lejanas.

2.6 Representaciones y sistemas de representación

El papel de las representaciones dentro de la disciplina de la educación matemática es relevante. En esta disciplina, las representaciones se distinguen como aquellas notaciones simbólicas o gráficas, o bien expresiones verbales, que se hacen presentes y se nombran los conceptos y procedimientos que hacen parte de este ámbito, incluyendo también sus características, propiedades y relaciones más relevantes (Lupiáñez, 2016).

Una clasificación inicial de representaciones puede ser dividirlas en externas e internas (Lupiáñez, 2000). Las primeras abarcan todas aquellas representaciones que son susceptibles de ser percibidas por los sentidos, es decir, aquellas que son observables tales como las palabras, gráficos, dibujos, etc. que representan cuestiones que son accesibles a la observación, mientras que las internas, son imágenes mentales que el sujeto tiene de los objetos y relaciones que forman parte de su conocimiento y que no son directamente observables, pero que se pueden inferir a través de lo que se dice o se hace (Goldin y Kaput, 1996). Pero ambos dominios, desde un punto de vista genético, no pueden verse como aislados entre sí, pues existen fuertes relaciones entre ellos: las representaciones externas son el medio por el cual los individuos exteriorizan sus imágenes y sus representaciones mentales, las cuales, a su vez, se desarrollan según un proceso de interiorización de las representaciones externas (Duval, 1993). Siguiendo la idea de que tanto las representaciones externas como las internas no se ven como aisladas, el presente estudio se centra en el análisis de las representaciones externas de los participantes al trabajar con tareas que demandan la generalización de patrones figurales, teniendo en cuenta que la generalización se concibe en la presente investigación tanto como un proceso, como un producto de ese proceso.

Lupiáñez (2016) reconoce que las representaciones en el ámbito de las matemáticas pueden organizarse, según sus características y propiedades, en diferentes sistemas de representación. A cada sistema, le reconoce como conformado por un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, dotados de una serie de reglas y convenios, que permiten expresar determinados aspectos y propiedades de un concepto matemático y posibilitan su uso para determinadas funciones. Los diferentes sistemas de representación no sólo permiten identificar diferentes facetas o relaciones de las nociones matemáticas, también, evidencian diferentes significados de estas (Lupiáñez, 2016).

Se presentan a continuación, los sistemas de representación que se utilizan al analizar las producciones de los estudiantes, tomando como referencia el trabajo de Lupiáñez (2016): (a) *Simbólico* (numérico y algebraico), (b) *Pictórico*, (c) *tabular*, (d) *verbal* y (e) *Múltiples*.

En el sistema de representación *simbólico*, se engloban las representaciones numéricas y algebraicas, además a esta clasificación de sistemas de representación se agrega el *gestual,* debido a que, se ha evidenciado en la investigación, en lo que respecta a la generalización de patrones que los gestos son un recurso semiótico, utilizados para objetivar el conocimiento o un medio semiótico de objetivación (Radford, 2002, 2003, 2010), asimismo son vistos como una forma representativa para transmitir expresiones de generalidad (Rivera, 2018).

Simbólica: son aquellas de carácter alfanumérico, cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento (Rico, 2009, p. 8). Se distinguen dentro de las representaciones simbólicas dos tipos: numéricas y algebraicas.

Numérica: se sirven de números y operaciones expresados mediante lenguaje matemático que suelen organizarse para realizar un cálculo.

Algebraica: se caracterizan por el uso del simbolismo algebraico para expresar un enunciado o generalizar las operaciones aritméticas. Son las representaciones que suponen un mayor grado de abstracción en los estudiantes.

Pictórica: se utiliza un sistema de representación visual, por lo general un dibujo, para plantear las relaciones entre datos e incógnitas de la tarea, sin ninguna notación que pueda considerarse de carácter simbólico (Cañadas y Figueiras, 2011).

Tabular: es aquella en la que los estudiantes se valen de una tabla de datos para la organización y representación de cantidades numéricas, expresiones verbales, o relaciones entre elementos de la tarea.

Verbal: se sirven del lenguaje natural para exponer la información de forma cohesionada. En el caso de los protocolos que llevan a cabo los estudiantes al resolver una tarea, permiten expresar el proceso de razonamiento de forma secuencial (Cañadas y Figueiras, 2011). Se considera en este sistema de representación, el lenguaje oral y escrito.

Gestual: forma de expresar una generalidad mediante movimientos corporales repetitivos (en su mayoría de las manos), al trabajar con tareas que demandan la generalización de patrones figurales.

Múltiples: son aquellas que resultan de la combinación de dos o más sistemas de representación.

Las representaciones se incorporan en la presente investigación por medio de las tareas donde algunas de ellas, se encuentran en las demandas de las tareas (p. ej., simbólica-numérica, pictórica, verbal) y otras, así como se encuentran definidas surgen en el proceso de generalización en cada tarea (tabular, gestual, múltiple), aunque cabe la aclaración de que en la forma de proceder y razonar de los estudiantes, no se evidencien la mayoría de los sistemas de representación, solo algunos de éstos.

Capítulo 3
Contenido matemático. Revisión a los libros de texto

El contenido matemático al que refiere esta investigación es la sucesión lineal, progresión aritmética de orden 1 en los números naturales. Su estudio, se ubica en el nivel básico (primaria) del sistema educativo mexicano. En ese contexto y con el fin de comprender la estructura conceptual, los significados y representaciones de este concepto en el curriculum de primaria en México, se analizó el contenido matemático, por medio de la herramienta metodológica, A*nálisis de contenido matemático,* una de las dimensiones del *Análisis didáctico* (Rico y Moreno, 2016). Este análisis permitió establecer los criterios para el diseño de las tareas usadas en esta investigación, orientadas a comprender los procesos cognitivos desarrollados por estudiantes de tercer grado de primaria y que se describen en el *capítulo 5*. Debido a que el estudio se ubicó en tercer grado, la revisión del contenido matemático se llevó a cabo en los libros de texto de matemáticas correspondientes al segundo periodo escolar (primero, segundo y tercer grado) en que estos contenido se organizan curricularmente (véase Tabla 1), con el objetivo de presentar un panorama desde lo que plantea la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2011a) para educación primaria. Específicamente, acerca de los conocimientos (aprendizajes esperados) y competencias que se demanda que debe haber desarrollado el estudiante hasta el grado de tercero.

Tabla 1. Periodos escolares de la Educación Básica en México (Retomado de SEP, 2011a, p.45).

1er Periodo Escolar			2^{o} Periodo Escolar			3er Periodo Escolar			4^{o} Periodo Escolar		
Preescolar			Primaria						Secundaria		
1°	2°	3°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	1°	2°	3°

En el ámbito de la estructura conceptual, el análisis de contenido enfatizó en los términos o elementos de una sucesión, las relaciones existentes entre ellos, las diferentes propiedades que puede tener (estas propiedades determinarán diferentes tipos de sucesiones) y los sistemas de representaciones en los que se pueden expresar.

Desde el punto de vista cognitivo, un aspecto clave a identificar fue la máxima demanda cognitiva (Smith y Stein, 1998), que el curriculum plantea a los estudiantes y con base en ello, delimitar la demanda cognitiva máxima que las tareas de esta investigación plantearían a la población participante.

3.1 Análisis para los contenidos matemáticos escolares

Cada una de las dimensiones del análisis didáctico se organiza mediante categorías propias u organizadores curriculares. Para el caso del análisis de los significados de los contenidos matemáticos escolares, se organiza y establece mediante tres organizadores curriculares: estructura conceptual, sistemas de representación y contextos o modos de uso. Cuyo desarrollo e implicaciones se analizan y examinan por medio de unos componentes propios que ayudan a su estudio (véase Tabla 2).

Tabla 2. Categorías para el Análisis del Contenido Matemático Escolar (Retomado de Rico y Moreno, 2016).

Dimensión	Cultural-Conceptual
Método de análisis	Análisis de los significados
Objeto de estudio	Significado de los contenidos matemáticos escolares.
Organizadores curriculares o categorías para el análisis en cada dimensión	1. Estructura conceptual. 2. Sistemas de representación. 3. Sentidos y modos de uso
Contenidos didácticos o componentes de los organizadores para el análisis de cada contenido matemático	1. Propiedades formales/ Funcionalidad cognitiva- actitudes emocionales, morales y éticas 2. Representaciones simbólicas/gráficas/numéricas 3. Términos/contextos/fenómenos/situaciones
Síntesis	Significados prioritarios para su aprendizaje y enseñanza

3.1.1 Categorías de análisis para los contenidos matemáticos escolares

En lo que respecta a los aspectos estructurales de las matemáticas en el análisis de los contenidos matemáticos escolares, se consideran tres campos y tres niveles de complejidad, que constan de nueve categorías: hechos, destrezas y emociones; conceptos, razonamientos y normas; estructuras, estrategias y valores (Fernández-Plaza, 2016). Esta organización permitió analizar e interpretar los significados de aquellos contenidos matemáticos escolares concretos, que en este caso es la sucesión, que aparecen en el currículo escolar (primaria). Asimismo, los sistemas de representación y sentidos y modos de uso. Para ello se analizaron los Programas de estudio de matemáticas para la Educación Básica Primaria de la reforma educativa de 2011 (SEP, 2011b; 2011c; 2011d), así como los libros de matemáticas del maestro (SEP, 2014a; 2014b; 2014c) y del alumno (SEP, 2014d; 2014e; 2014f) del segundo periodo escolar. Para comprender la estructura conceptual del tópico sucesión en la matemática general, se retomó el estudio epistemológico que sobre este tema, realizó Nuñez-Gutierrez (2018)[1].

[1] Para un estudio más detallado y un análisis epistemológico de la estructura conceptual dentro de la matemática general del tópico de sucesión, ver Nuñez-Gutierrez (2018).

3.1.2 Las sucesiones en el currículo de primaria de México

En los Programas de estudio 2011 para la Educación Básica Primaria de Matemáticas (segundo y tercer periodo escolar), se establecen los propósitos, enfoques, estándares curriculares, competencias, así como los aprendizajes esperados según el grado escolar. Los Estándares Curriculares de matemáticas, presentan la visión de una población estudiantil que debe saber utilizar los conocimientos matemáticos y comprenden el conjunto de aprendizajes que se esperan de los estudiantes en los cuatro períodos escolares, para conducirlos a altos niveles de alfabetización matemática. Su organización se distribuye en cuatro ejes: sentido numérico y pensamiento algebraico; forma, espacio y medida; manejo de la información y actitud hacia el estudio de las matemáticas. En este contexto, el contenido matemático escolar sucesión, se ubica en el eje del sentido numérico y pensamiento algebraico. Su estudio en los grados uno, dos y tres de primaria, se efectúa a través de sucesiones numéricas y figurales o geométricas, con el propósito de que los estudiantes puedan conocer y expresar el conjunto de los números naturales, mediante el conteo, la identificación y descripción de patrones y regularidades, así como el trabajo con términos particulares y consecutivos de sucesiones numéricas y figurales. La Tabla 3, muestra los aprendizajes esperados y los contenidos correspondientes a los primeros tres grados de la educación básica primaria.

Tabla 3. Programas de Estudios 2011. Educación Básica. Primaria. Matemáticas. Primero, Segundo y Tercer Grado.

Grado	Bloque	Aprendizaje esperado	Contenido
Primero	I	Calcula el resultado de problemas aditivos planteados de forma oral con resultados menores que 30.	Expresión oral de la sucesión numérica, ascendente y descendente de 1 en 1, a partir de un número dado. Escritura de la sucesión numérica hasta el 30.
			Identificación y descripción del patrón en sucesiones construidas con objetos o figuras simples.
	III	Utiliza la sucesión oral y escrita de números, por lo menos hasta el 100, al resolver problemas.	Conocimiento de la sucesión oral y escrita de números hasta el 100. Orden de los números de hasta dos cifras. Identificación de regularidades de la sucesión numérica del 0 al 100 al organizarla en intervalos de 10.
Segundo	II	Produce o completa sucesiones de números naturales, orales y escritas, en forma ascendente o descendente.	Producción de sucesiones orales y escritas, ascendentes y descendentes de 5 en 5, de 10 en 10.
			Identificación de la regularidad en sucesiones ascendentes con progresión aritmética, para intercalar o agregar números a la sucesión.
	IV	Describe, reproduce y crea sucesiones formadas con objetos o figuras.	Identificación y descripción del patrón en sucesiones construidas con figuras compuestas
	V	Identifica, compara y produce, oralmente o por	Producción de sucesiones orales y escritas, ascendentes y descendentes,

		escrito, números de tres cifras.	de 100 en 100. Anticipaciones a partir de las regularidades
Tercero	**III**	Resuelve problemas de reparto cuyo resultado sea una fracción de la forma $m/2^n$.	Identificación de la regularidad en sucesiones con números, ascendentes o descendentes, con progresión aritmética para continuar la sucesión o encontrar términos faltantes.
	IV	Resuelve problemas que implican identificar la regularidad de sucesiones con progresión aritmética.	Identificación de la regularidad en sucesiones con figuras, con progresión aritmética, para continuar la sucesión o encontrar términos faltantes.

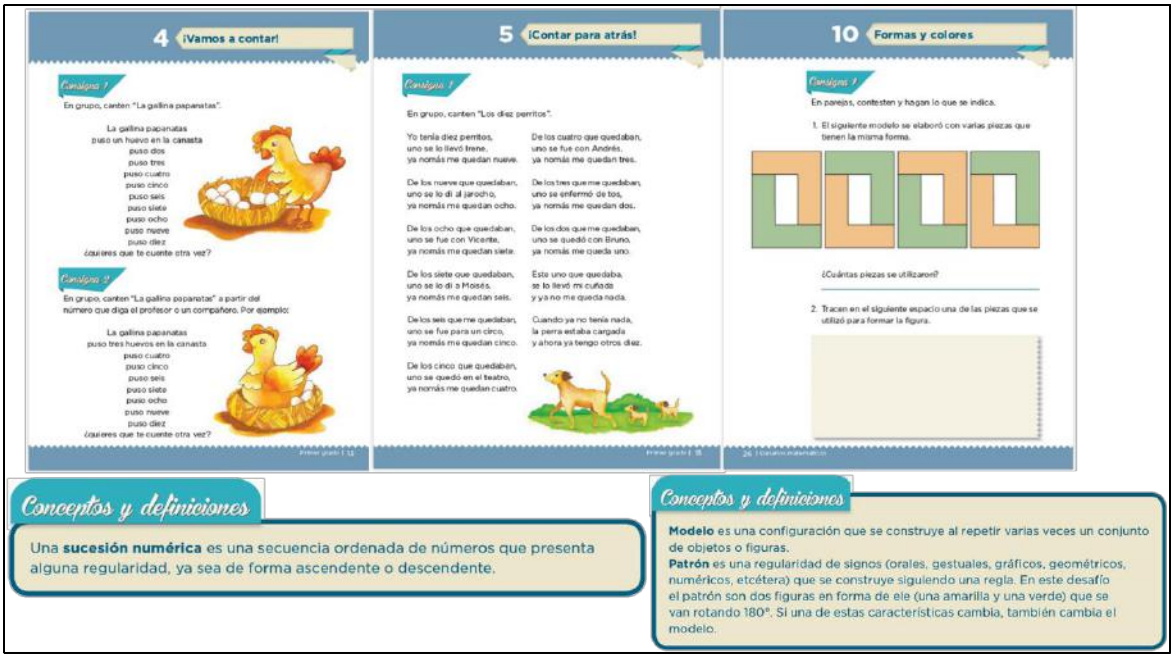
3.1.3 Campo conceptual

Los conceptos, se pueden ver como redes estructuradas de hechos que, a su vez, se relacionan y organizan para dar lugar a estructuras o campos conceptuales. Por tanto, en este ámbito se establecen tres niveles de componentes: hechos, conceptos y estructuras conceptuales.

3.1.3.1 Identificación de hechos

El estudio de los hechos o unidades de información establece un primer nivel básico para analizar el ámbito conceptual de un contenido matemático específico. El estudio de los hechos se hace a través de cuatro categorías de análisis, las cuales consisten en los *términos, notaciones, convenios y resultados,* relacionados con el tema considerado que para este caso será la sucesión en los tres primeros años de educación primaria (Fernández-Plaza, 2016).

Las sucesiones se estudian desde el primer grado de primaria en el conjunto de los números naturales, enfatizando en la expresión oral y escrita. Se promueve que los estudiantes desarrollen habilidades para identificar en sucesiones numéricas ascendentes y descendentes, mediante un conteo, regularidades y propiedades de orden (antecesor y sucesor) de un término particular dado. Con base en ello, se desarrollan habilidades para reconocer la relación de recurrencia entre los términos, es decir, obtener un término a partir de su antecesor. En este grado escolar, el conteo va de uno en uno. Por cuanto a las sucesiones con figuras, se busca que el estudiante centre su atención en características geométricas de las figuras involucradas, como tipos de líneas, número y tamaño de lados y realizar cambios en estos aspectos. Se evidencia que en primer año las sucesiones están más asociadas al conteo, al reconocimiento de la escritura y a la pronunciación de subconjuntos de los números naturales (véase Figura 2).


4 ¡Vamos a contar!

Consigna 1

En grupo, canten "La gallina papanatas".

La gallina papanatas
puso un huevo en la canasta
puso dos
puso tres
puso cuatro
puso cinco
puso seis
puso siete
puso ocho
puso nueve
puso diez
¿quieres que te cuente otra vez?

Consigna 2

En grupo, canten "La gallina papanatas" a partir del número que diga el profesor o un compañero. Por ejemplo:

La gallina papanatas
puso tres huevos en la canasta
puso cuatro
puso cinco
puso seis
puso siete
puso ocho
puso nueve
puso diez
¿quieres que te cuente otra vez?

5 ¡Contar para atrás!

Consigna 1

En grupo, canten "Los diez perritos".

Yo tenía diez perritos,
uno se lo llevó Irene,
ya nomás me quedan nueve.

De los nueve que quedaban,
uno se lo di al jarocho,
ya nomás me quedan ocho.

De los ocho que quedaban,
uno se fue con Vicente,
ya nomás me quedan siete.

De los siete que quedaban,
uno se lo di a Moisés,
ya nomás me quedan seis.

De los seis que me quedaban,
uno se fue para un circo,
ya nomás me quedan cinco.

De los cinco que quedaban,
uno se quedó en el teatro,
ya nomás me quedan cuatro.

De los cuatro que quedaban,
uno se fue con Andrés,
ya nomás me quedan tres.

De los tres que me quedaban,
uno se enfermó de tos,
ya nomás me quedan dos.

De los dos que me quedaban,
uno se quedó con Bruno,
ya nomás me queda uno.

Este uno que quedaba,
se lo llevó mi cuñada
y ya no me queda nada.

Cuando ya no tenía nada,
la perra estaba cargada
y ahora ya tengo otros diez.

10 Formas y colores

Consigna 1

En parejas, contesten y hagan lo que se indica.

1. El siguiente modelo se elaboró con varias piezas que tienen la misma forma.

¿Cuántas piezas se utilizaron?

2. Tracen en el siguiente espacio una de las piezas que se utilizó para formar la figura.

Conceptos y definiciones

Una **sucesión numérica** es una secuencia ordenada de números que presenta alguna regularidad, ya sea de forma ascendente o descendente.

Conceptos y definiciones

Modelo es una configuración que se construye al repetir varias veces un conjunto de objetos o figuras.
Patrón es una regularidad de signos (orales, gestuales, gráficos, geométricos, numéricos, etcétera) que se construye siguiendo una regla. En este desafío el patrón son dos figuras en forma de ele (una amarilla y una verde) que se van rotando 180°. Si una de estas características cambia, también cambia el modelo.

Figura 2. Algunos hechos identificados en el libro de texto de primer grado.

En segundo año, también se desarrollan habilidades para comunicar por escrito y de forma oral, las sucesiones numéricas. Se trabajan términos particulares para el reconocimiento de regularidades y así poder determinar términos consecutivos o cercanos (de manera ascendente o descendente), estas acciones posibilitan que las tareas sigan promoviendo (como en primer año), relaciones de recurrencia entre los términos, pero en este año con números mayores. Por cuanto a las sucesiones con figuras, se enfatiza que los niños identifiquen regularidades en sucesiones de figuras con progresión aritmética al tener que encontrar un término faltante o siguiente, para ello los estudiantes deben descubrir la diferencia constante de la sucesión con progresión aritmética, es decir, la regularidad. Con base en ello, se espera que el estudiante transite de un sistema de representación figural a uno numérico. Otro aspecto que prima en el libro de segundo grado en lo que respecta a lo figural, es que los estudiantes identifiquen y describan características perceptivas como formas y colores de las figuras que componen las sucesiones. Se evidencia que las sucesiones que se trabajan en el segundo año se encuentran asociadas a subconjuntos de números naturales más amplios que en el primer año. Asimismo, en las sucesiones con figuras además de identificar características perceptivas (como forma y color) también se reconocen y asocian características numéricas identificadas mediante regularidades y patrones reconocidos en las figuras. También se prioriza en que los alumnos identifiquen la regularidad de sucesiones numéricas y la usen al resolver problemas (véase Figura 3 para hechos identificados en segundo grado).

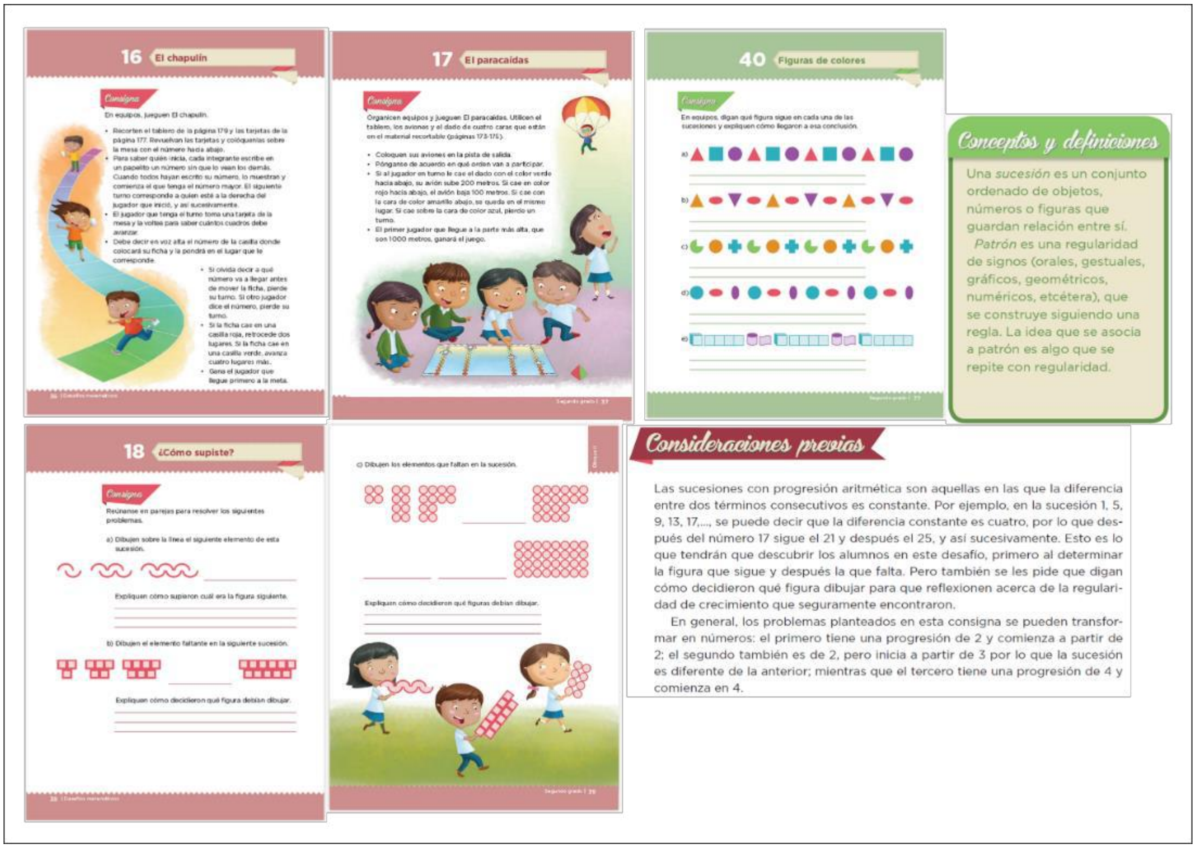


Figura 3. Algunos hechos identificados en el libro de texto de segundo grado.

En tercer año, se hace un cambio con respecto a los dos grados anteriores en referencia a expresar las sucesiones de manera oral, en este año se expresa de manera numérica y mediante figuras. En este sentido, se busca que el estudiante, identifique y explique regularidades en sucesiones con números, ascendentes o descendentes, con progresión aritmética para continuar la sucesión o encontrar términos faltantes. Además, se busca que los estudiantes identifiquen, analicen y expliquen regularidades en sucesiones con figuras, con progresión aritmética, para continuar la sucesión o encontrar términos faltantes y cercanos. De igual manera, se le sitúa al niño a trabajar en etapas "no muy cercanas", con el fin de escuchar sus argumentos por parte del estudiante (véase Desafío[2] 36 en Figura 4)[3]. A pesar de que la tarea le demanda lo expuesto anteriormente, en este año se siguen privilegiando relaciones de recurrencia entre los términos de las sucesiones numéricas y figurales, debido a que los términos demandados se pueden obtener, ya sea por uno anterior o aplicando un conteo recursivo empleando la regularidad identificada. En este año se introducen sucesiones con números de más de tres cifras, lo que implica un grado mayor de complejidad. Además, se involucran problemas en los cuales los

[2] Los Desafíos matemáticos. El desafío habrá de ser para el alumno una actividad que le permita movilizar sus conocimientos de base, previamente adquiridos, así como la construcción de un discurso para el intercambio que favorezca la acción (SEP, 2011d, p. 291).
[3] (SEP, 2014c)

estudiantes deben aplicar sus conocimientos sobre el tema de sucesiones reconociendo regularidades y características numéricas y figurales. También se introducen sucesiones figurales a las cuales se le pueden asociar una sucesión numérica (para hechos identificados en tercer grado, véase Figura 4).

Figura 4. Algunos hechos identificados en el libro de texto de tercer grado.

En Tabla 4, se sintetizan los hechos del tópico concreto sucesión, identificados en los libros de textos de los tres primeros años de la educación básica primaria en México.

Tabla 4. Hechos de la Sucesión en los Primeros Tres Grados de la Educación Básica primaria.

Primer grado	Segundo grado	Tercer grado
	Términos	
Sucesión	Sucesión	Sucesión
Sucesión numérica	Sucesiones orales y escritas	Sucesión numérica
Sucesión numérica ascendente y descendente	Sucesiones ascendentes y descendentes	Sucesión numérica ascendente y descendente
Número dado	Sucesión numérica	Progresión aritmética
Secuencia	Sucesión de figuras	Termino faltante
Regularidad	Regularidades	Términos siguientes
Números naturales	Progresión aritmética	Regularidad
Colecciones	Término o elemento faltante	Lugar
Modelo	Término siguiente	Constante
Patrón	Progresión	Término cercano
Regla	Punto de partida	Sucesión con figuras
	Constante	Relación
	Sucesiones de figuras compuestas.	Términos de una sucesión
	Patrón	Ley de formación
	Patrón de formación	
	Regla	

Notaciones		
Expresión oral de la sucesión numérica. Sucesiones numéricas escritas: $1, 2, 3, 4, 5, \dots, 30$	Sucesiones numéricas orales y escritas de 5, 10, y de 100.	Números y figuras
Convenios		
Que los alumnos expresen oralmente las sucesiones numéricas a partir de diferentes números Escritura de la sucesión numérica desde el 1 hasta el 30. Descubrir regularidades en la escritura de la sucesión numérica hasta el 30. Conteo oral del 1 al 30 y conocimiento de la escritura de estos números. Estrategias de conteo Discusiones grupales Trabajos con tablas	Que los alumnos usen la sucesión numérica de 100 en 100 en forma ascendente y descendente. Trabajo con términos particulares de la sucesión que corresponden a etapas cercanas Términos antecesores y sucesores Descubrir regularidades de crecimiento y decrecimiento, tanto figural como numéricamente. Si un elemento no cumple con la regularidad, entonces ésta no existe o ese elemento no pertenece a esa sucesión. Continuar las sucesiones Describir la regularidad que observan en cada sucesión de figuras, con base en ciertas características percibidas. Empleo de tablas	La relación que existe entre los números dados Establecer el orden según la regularidad identificada Que los alumnos descubran y expliquen la regularidad en una sucesión numérica, para encontrar los números faltantes. Identificar regularidades en sucesiones numéricas y figurales Posición de los elementos o términos Términos no muy cercanos a los que aparecen en la sucesión
Resultados		
Una sucesión numérica es una secuencia ordenada de números que presenta alguna regularidad, ya sea de forma ascendente o descendente. Modelo es una configuración que se construye al repetir varias veces un conjunto de objetos o figuras. Patrón es una regularidad de signos (orales, gestuales, gráficos, geométricos, numéricos, etcétera) que se construye siguiendo una regla.	Las sucesiones con progresión aritmética son aquellas en las que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante. Una sucesión es un conjunto ordenado de objetos, números o figuras que guardan relación entre sí. Patrón es una regularidad de signos (orales, gestuales, gráficos, geométricos, numéricos, etcétera), que se construye siguiendo una regla. La idea que se asocia a patrón es algo que se repite con regularidad.	Una sucesión numérica con progresión aritmética es una serie de números tales que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante, es decir, es la misma. En una sucesión decreciente se aplica una sustracción Una sucesión es una secuencia de elementos que responden a una ley de formación. Una sucesión con progresión aritmética se construye sumando o restando una cantidad fija al término anterior.

3.1.3.2 Identificación de conceptos

Este nivel de complejidad se caracteriza por la *abstracción* y la *generalización* de los conceptos y las relaciones entre ellos. Los conceptos vienen dados por *extensión* o por *comprensión,* que establecen una clase o conjunto de objetos. Las relaciones se establecen entre conceptos, o los objetos mismos, dando lugar a lo que Fernández-Plaza (2016), llama relaciones *n*-arias que, por su sencillez, en secundaria se limita a relaciones binarias (Fernández-Plaza, 2016). Aunque cabe aclarar que lo dicho por el autor anteriormente referenciado, se puede emplear sin problema para el nivel de primaria.

En la revisión y análisis del contenido matemático de los libros tanto del alumno como del profesor correspondientes a los primeros tres años de Educación Básica Primaria, se encontraron e identificaron los conceptos indicados en la Tabla 5, Tabla 6 y Tabla 7 respectivamente, proporcionando la definición exacta que se encuentra en los libros.

Tabla 5. Conceptos Identificados en Primer Grado.

Primer grado	
Concepto:	**Definición:**
Sucesión numérica:	Es una secuencia ordenada de números que presenta alguna regularidad, ya sea de forma ascendente o descendente.
Modelo:	Es una configuración que se construye al repetir varias veces un conjunto de objetos o figuras.
Patrón:	Es una regularidad de signos (orales, gestuales, gráficos, geométricos, numéricos, etcétera) que se construye siguiendo una regla. En este desafío el patrón son dos figuras en forma de ele (una amarilla y una verde) que se van rotando 180°. Si una de estas características cambia, también cambia el modelo.
Secuencia de figuras:	Una secuencia de figuras se construye siguiendo un patrón, que es el que permite continuar la secuencia o averiguar qué pieza falta.

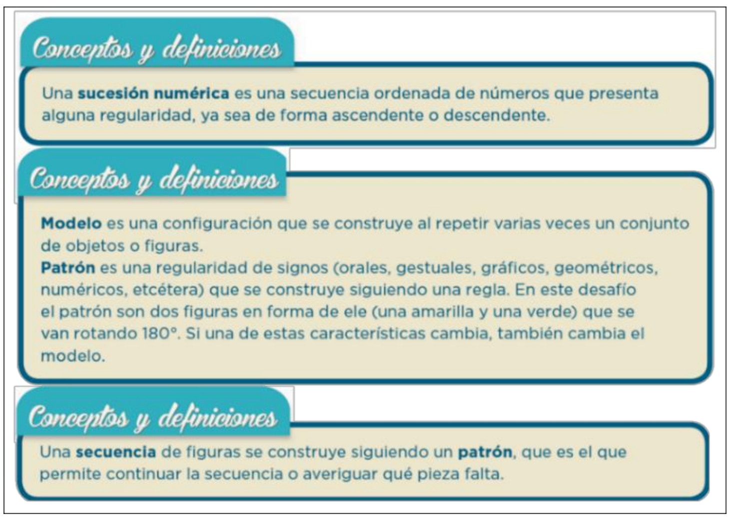
Tabla 6. Conceptos Identificados en Segundo Grado.

Segundo grado	
Concepto:	**Definición:**
Sucesiones con progresión aritmética:	Son aquellas en las que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante.
Sucesión:	Es un conjunto ordenado de objetos, números o figuras que guardan relación entre sí.
Patrón:	Es una regularidad de signos (orales, gestuales, gráficos, geométricos, numéricos, etcétera), que se construye siguiendo una regla. La idea que se asocia a patrón es algo que se repite con regularidad.

Tabla 7. Conceptos Identificados en Primer Grado.

Tercer grado	
Concepto:	**Definición:**
Sucesión:	Es una secuencia de elementos que responden a una ley de formación.
Sucesión numérica con progresión aritmética:	Es una serie de números tales que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante, es decir, es la misma.

Un aspecto a remarcar es que, todos los conceptos y sus definiciones fueron identificados de manera explícita en los libros para el maestro empleados en el análisis, en específico se encontraron en las *consideraciones previas* las cuales, contiene elementos para que el docente esté en mejores condiciones de apoyar a los alumnos en el análisis de las ideas que producirán: explicaciones breves sobre los conceptos que se estudian, posibles procedimientos de los alumnos, dificultades o errores que quizás enfrenten, sugerencias para organizar la puesta en común y preguntas para profundizar el análisis, entre otros. Los libros de los estudiantes, no muestran de manera explícita los conceptos y las definiciones relacionadas al tópico sucesión, dejándolo a criterio del profesor si los da a conocer a los alumnos o no, incluso uno de los libros del profesor, señala que una definición no se le dará a conocer al estudiante aunque, si la define en el libro para el maestro (véase Figura 7). A continuación, se muestra evidencia de los conceptos y definiciones que se encuentran en los libros del maestro seleccionados para el análisis del contenido matemático, sucesión (véase Figura 5, Figura 6 y Figura 7).



Conceptos y definiciones

Una **sucesión numérica** es una secuencia ordenada de números que presenta alguna regularidad, ya sea de forma ascendente o descendente.

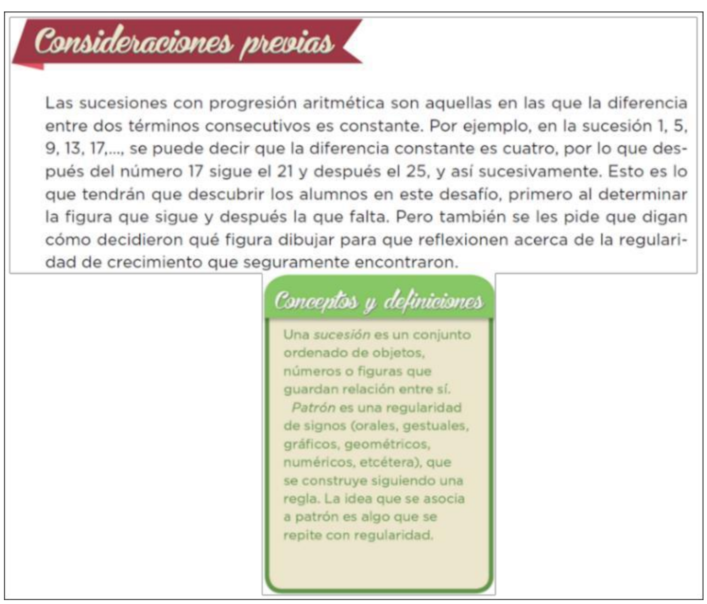
Conceptos y definiciones

Modelo es una configuración que se construye al repetir varias veces un conjunto de objetos o figuras.
Patrón es una regularidad de signos (orales, gestuales, gráficos, geométricos, numéricos, etcétera) que se construye siguiendo una regla. En este desafío el patrón son dos figuras en forma de ele (una amarilla y una verde) que se van rotando 180°. Si una de estas características cambia, también cambia el modelo.

Conceptos y definiciones

Una **secuencia** de figuras se construye siguiendo un **patrón**, que es el que permite continuar la secuencia o averiguar qué pieza falta.

Figura 5. Primer grado. Conceptos y definiciones.



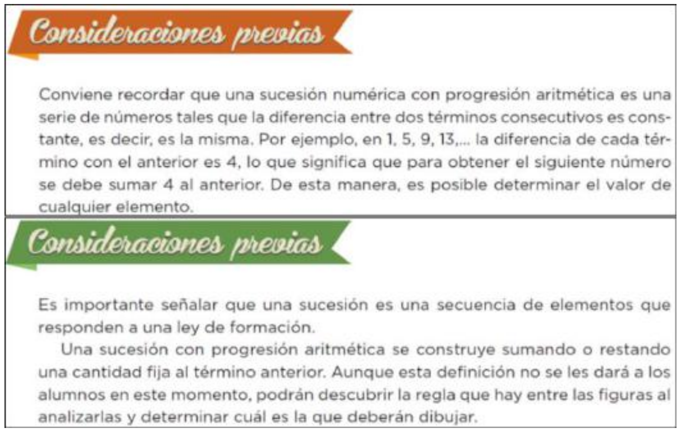
Consideraciones previas

Las sucesiones con progresión aritmética son aquellas en las que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante. Por ejemplo, en la sucesión 1, 5, 9, 13, 17,..., se puede decir que la diferencia constante es cuatro, por lo que después del número 17 sigue el 21 y después el 25, y así sucesivamente. Esto es lo que tendrán que descubrir los alumnos en este desafío, primero al determinar la figura que sigue y después la que falta. Pero también se les pide que digan cómo decidieron qué figura dibujar para que reflexionen acerca de la regularidad de crecimiento que seguramente encontraron.

Conceptos y definiciones

Una *sucesión* es un conjunto ordenado de objetos, números o figuras que guardan relación entre sí.
Patrón es una regularidad de signos (orales, gestuales, gráficos, geométricos, numéricos, etcétera), que se construye siguiendo una regla. La idea que se asocia a patrón es algo que se repite con regularidad.

Figura 6. Segundo grado. Conceptos y definiciones.



Consideraciones previas

Conviene recordar que una sucesión numérica con progresión aritmética es una serie de números tales que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante, es decir, es la misma. Por ejemplo, en 1, 5, 9, 13,... la diferencia de cada término con el anterior es 4, lo que significa que para obtener el siguiente número se debe sumar 4 al anterior. De esta manera, es posible determinar el valor de cualquier elemento.

Consideraciones previas

Es importante señalar que una sucesión es una secuencia de elementos que responden a una ley de formación.

Una sucesión con progresión aritmética se construye sumando o restando una cantidad fija al término anterior. Aunque esta definición no se les dará a los alumnos en este momento, podrán descubrir la regla que hay entre las figuras al analizarlas y determinar cuál es la que deberán dibujar.

Figura 7. Tercer grado. Conceptos y definiciones.

Las relaciones correspondientes a la temática (sucesiones) fueron identificadas por medio de los libros y los programas de estudio seleccionados para el análisis, en particular estas relaciones se logran identificar en las intenciones didácticas y los contenidos de los libros guías para el maestro. La Tabla 8, sintetiza los conceptos y relaciones identificadas en los libros seleccionados.

Tabla 8. Conceptos y Relaciones de las Sucesiones en los Primeros Tres Años de Primaria.

Primer grado	Segundo grado	Tercer grado
	Conceptos	
Sucesión numérica Modelo Patrón Secuencia de figuras	Sucesiones con progresión aritmética Sucesión Patrón	Sucesión Sucesión numérica con progresión aritmética
	Relaciones	
Conteo ascendente y descendente Expresar oralmente un número Expresar por escrito un número Identificación de regularidades numéricas Relaciones entre números naturales consecutivos El orden de los números naturales (Relación de orden) Regularidades figurales	Sucesiones orales y escritas Sucesiones ascendentes y descendentes Regularidades Progresión aritmética Sucesiones de figuras Sucesiones numéricas Sucesiones figurales compuestas Adición y sustracción Relación de orden Centenas	Sucesiones numéricas ascendentes y descendentes Progresión aritmética Regularidad Sustracción y adición Relación de orden Sucesiones con figuras Secuencia Ley de formación

3.1.3.3 Identificación de estructuras

El tercer nivel de complejidad son las estructuras matemáticas, que surgen de la consideración de diversos conceptos, transformaciones y relaciones entre ellos y de las operaciones y propiedades que los vinculan, que, eventualmente, pueden dar lugar a conceptos más complejos, de “orden superior” (Fernández-Plaza, 2016).

En la Tabla 9, se sintetiza la estructura conceptual identificada en los libros seleccionados para el análisis del contenido matemático. Las estructuras trabajadas en los tres primeros años de primaria y que posteriormente, pueden dar lugar a estructuras y conceptos más complejos son, el conjunto de los números naturales como aquel conjunto sobre el cual se trabaja, el conteo como estrategia o una forma de proceder y como operaciones vinculadas se evidencian la adición, sustracción y la multiplicación.

A pesar de que el análisis a los libros seleccionados evidencia que, en este nivel educativo no se definen de manera explícita estas estructuras y sus operaciones vinculadas, si se trabaja por medio de las tareas de manera implícita para que en años posteriores se trabaje de manera más formal las estructuras y operaciones.

Tabla 9. Estructura Conceptual de las Sucesiones en los Tres Primeros Años de Primaria.

Primer grado	Segundo grado	Tercer grado
	Estructuras	
Conjunto de los números naturales Conteo	Conjunto de los números naturales Conteo Adición y sustracción	Conjunto de los números naturales Adición, sustracción y multiplicación

3.1.4 Campo procedimental

En este campo, se consideran las operaciones, propiedades y métodos matemáticos, sus modos de procesamiento y conocimiento que sustentan. En el campo procedimental al igual que el conceptual, se diferencian tres niveles, según la complejidad del contenido considerado. Dichos niveles son las *destrezas*, que procesan hechos, los *razonamientos*, que procesan conceptos, y las *estrategias*, que procesan estructuras (Fernández-Plaza, 2016).

3.1.4.1 Identificación de destrezas

Según Fernández-Plaza (2016), las destrezas consisten en el procesamiento secuenciado de contenidos básicos, por medio del uso de convenios y manipulación de las notaciones correspondientes.

Las destrezas o habilidades a desarrollar en los estudiantes, en el segundo período escolar de educación básica, se declaran por desafío, en el libro del maestro, en dos secciones: *intención didáctica* y en el *contenido*. En la *intensión didáctica*, se describen los tipos de recursos, ideas, procedimientos y saberes que se esperan pongan en juego los alumnos ante la necesidad de resolver el desafío que se les plantea. El contenido, refiere a aspectos muy concretos que se desprenden de los temas y van en concordancia con los temas ejes y aprendizajes esperados de cada año.

Las destrezas puestas en juego para el primer año son, que el estudiante pueda expresar de manera oral y escrita sucesiones numéricas de forma ascendente y descendente en el conjunto de los números naturales aplicando un conteo de uno en uno en subconjuntos de números del 1 al 30 y del 1 al 100. En general, en este año se busca que el estudiante pueda descubrir, analizar y usar regularidades identificadas en las sucesiones para pronunciar y escribir correctamente los números que componen las sucesiones y además poder localizar números pertenecientes a la sucesión de manera correcta sin tener que contar desde el principio. Otra destreza relacionada con sucesiones de figuras identificada en primer año es, que el estudiante desarrolle habilidad perceptiva al identificar las características geométricas que le permite determinar el patrón que se repite para formar un modelo con dos figuras base. En segundo año los estudiantes deben ser capaces de descubrir, identificar, analizar y explicar regularidades de sucesiones numéricas y figurales con progresión aritmética ascendentes y/o descendentes para poder continuar y encontrar términos faltantes y cercanos correspondientes a la sucesión. En tercer año las destrezas exigidas son las mismas que para el año anterior, en lo que difieren es que las cifras de los números en tercer año aumentan con respecto al segundo. Un aspecto que coincide en segundo y tercer grado es la introducción de problemas, en los cuales se debe aplicar competencias adquiridas de la temática, guardando la distancia entre las exigencias cognitivas demandadas entre un grado y otro (véase Figura 8, para algunas destrezas identificadas en los tres libros analizados).

Figura 8. Algunas destrezas identificadas en los libros para el maestro seleccionados. a) Primer grado; b) segundo grado; c) tercer grado.

3.1.4.2 Identificación de razonamientos

Los razonamientos involucran el procesamiento de relaciones e inferencias lógicas entre conceptos. Fernández-Plaza (2016), considera cuatro tipos fundamentales de razonamiento: *lógico-deductivo*, *inductivo*, *analógico* y *figurativo*.

Los razonamientos identificados en las tareas relacionadas con el tópico sucesión en los libros escogidos para el análisis del contenido matemático en primaria, tomando como referencia los que considera Fernández-Plaza (2016) fueron, *analógico* y *analógico/figurativo*. El razonamiento analógico, se evidencia en las tareas a la hora de trabajar con sucesiones numéricas, debido a que se promueve que los estudiantes obtengan términos faltantes o cercanos de una sucesión de tipo numérica, a partir de identificar una regularidad por medio del trabajo y la organización de los términos dados de las sucesiones en las tareas. Los estudiantes deben identificar una característica común (regularidad) y aplicarla a los términos demandados realizando un procedimiento análogo para obtener cada término exigido o necesario para continuar la sucesión. Esta forma de razonar se debe a que los términos demandados son consecutivos (antecesor o sucesor) o cercanos a los términos dados en las tareas.

Por su parte, el razonamiento analógico/figurativo, se pone en juego al trabajar con sucesiones compuestas por figuras, en las cuales, además de involucrar el razonamiento analógico, se involucra el figurativo y se amalgaman estos dos. En este sentido, las tareas que incorporan este razonamiento en los libros analizados buscan, que los estudiantes creen sucesiones con figuras, a partir de percibir regularidades y características geométricas (figurales) en las figuras dadas, donde se involucra la percepción de formas, colores y espacio, así como estrategias figurales y numéricas para construir las etapas faltantes demandadas en forma figural. Cabe resaltar una vez más, que el razonamiento analógico se evidencia, debido a que se trabaja con los términos dados y se exigen términos cercanos a estos, es decir, que mediante una comparación entre dos términos consecutivos el estudiante puede identificar la regularidad y mediante este proceso determinar el término que se le exige (véase Figura 9 para tipos de razonamientos identificados).

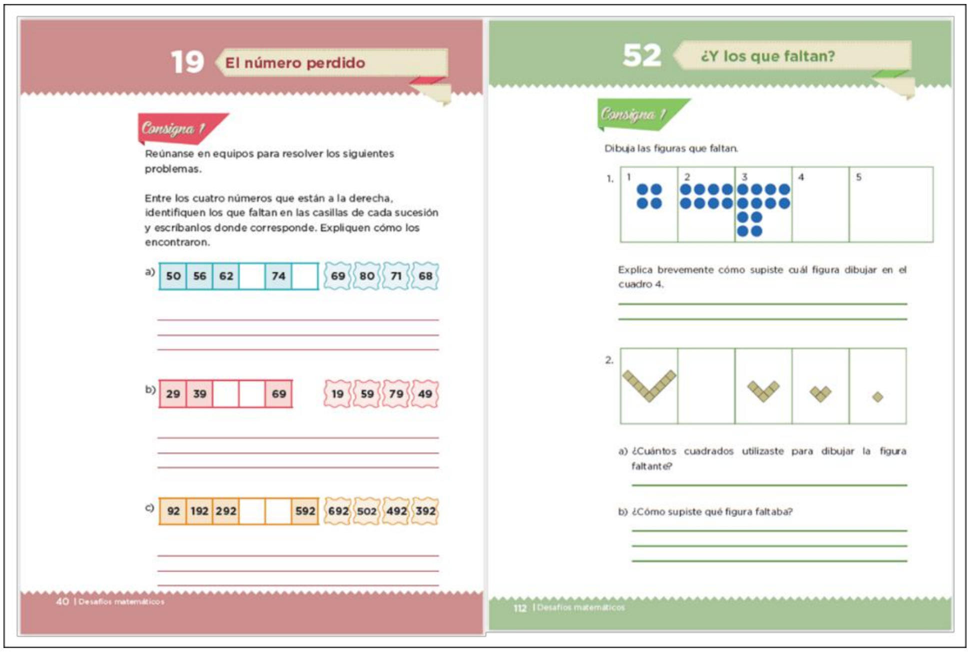


Figura 9. Tareas correspondientes a segundo grado (izquierda) y tercer grado (derecha), en las que se involucran los dos tipos de razonamientos identificados.

3.1.4.3 Identificación de estrategias

Las estrategias involucran el procesamiento de conceptos y la conexión de razonamientos, vinculados con una o varias estructuras, para responder a una cuestión o problema (Fernández-Plaza, 2016).

Las estrategias identificadas que posibilitan las tareas de los libros de texto y que están involucradas y relacionadas con los conceptos, razonamientos y estructuras fueron, el uso de tablas para organizar los términos de las sucesiones numéricas y completarlas hallando los términos faltantes (véase Figura 10). Por otra parte, las regularidades de las sucesiones eran identificadas mediante un conteo recursivo con el propósito de hallar los términos demandados, la percepción de características de las figuras es otra estrategia identificada que se posibilitan en los desafíos de los libros seleccionados. En ese sentido, los arreglos geométricos (de figuras) son útiles para percibir características como formas y colores. Otras estrategias identificadas, fueron el uso de operaciones como la adición, la sustracción y la multiplicación para identificar las regularidades y poder determinar los términos faltantes o cercanos que constituyen las sucesiones tanto numéricas como de figuras.

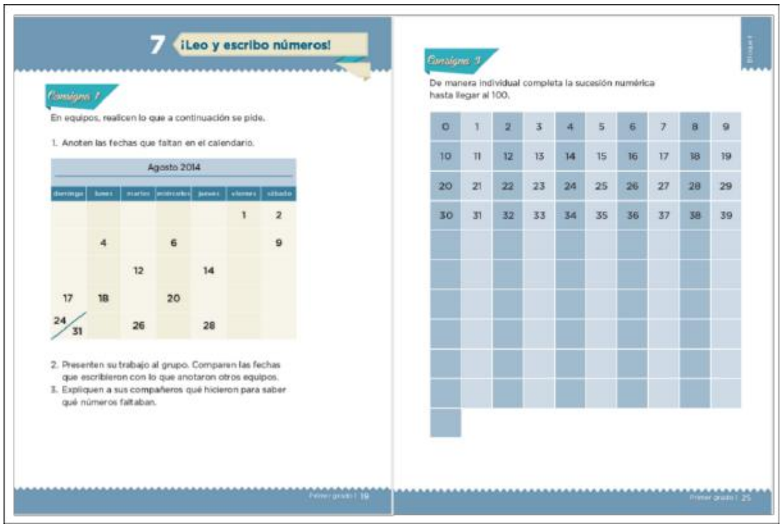


Figura 10. El uso de tablas como estrategia posibilitada en los libros de texto analizados.

La Tabla 10, sintetiza las destrezas, razonamientos y estrategias identificadas en los libros de texto seleccionados para los tres primeros años de educación básica primaria.

Tabla 10. Destreza, Razonamientos y Estrategias Identificados en los Libros de Textos Seleccionados Para el Análisis del Contenido Matemático.

Primer grado	Segundo grado	Tercer grado
	Destrezas	
Contar Expresar oralmente las sucesiones numéricas en forma ascendente Formar sucesiones numéricas escritas del 1 al 30 para continuar con la construcción de la sucesión de números naturales. Descubrir algunas regularidades en la sucesión numérica del 1 al 30. Desarrollar habilidad perceptiva al identificar las características geométricas que les permiten determinar el patrón que se repite para formar un modelo con dos figuras base. Analizar las características de diversos patrones al crear sucesiones geométricas. Encontrar regularidades en una sucesión de números del 1 al 100 Usar regularidades, para escribir correctamente la sucesión y para localizar	Descubrir la regularidad de una sucesión numérica ascendente o descendente con progresión aritmética, para ordenar números y decidir si corresponde o no a la sucesión. Descubrir y explicar la regularidad en una sucesión numérica, para encontrar los números faltantes. Analizar y explicar la relación que existe entre los términos de una sucesión de figuras con progresión aritmética, para continuarla o encontrar términos faltantes. Identificar y usar la regularidad en sucesiones de figuras con progresión aritmética, para encontrar un término cercano.	Descubrir y explicar la regularidad en una sucesión numérica, para encontrar los números faltantes. Analizar y explicar la relación que existe entre los términos de una sucesión de figuras con progresión aritmética, para continuarla o encontrar términos faltantes. Identificar y usar la regularidad en sucesiones de figuras con progresión aritmética, para encontrar un término cercano.

números, sin tener que contar desde el principio.
Razonamientos
Analógico: obtener términos faltantes o cercanos de una sucesión numérica a partir de una misma regularidad identificada en términos dados. Analógico/figurativo: crear sucesiones con figuras, a partir de percibir regularidades y características geométricas (figurales) en las figuras dadas.
Estrategias
Empleo de tablas Conteo recursivo Regularidad Percepción de figuras Adición y sustracción Multiplicación Arreglos geométricos

3.1.5 Mapa conceptual

Un mapa conceptual es una herramienta que reúne e integra los conocimientos acerca de un determinado contenido y sus relaciones. En él, se sintetiza la estructura conceptual de un tema determinado (Fernández-Plaza, 2016).

Para sintetizar el análisis del contenido matemático del tema sucesiones desde su estructura conceptual en las matemáticas y en los programas de estudios y libros analizados, se emplea un mapa conceptual que permite tener una mirada global del contenido matemático escolar.

La Figura 11, muestra una síntesis de la información obtenida de la estructura conceptual de las sucesiones en el currículo de Educación Básica Primaria mexicano, y en específico de los tres primeros años de este nivel educativo. Esta síntesis incluye definiciones, tipos especiales, representaciones, términos y operaciones asociadas a la temática, consideradas en los tres primeros grados de primaria.

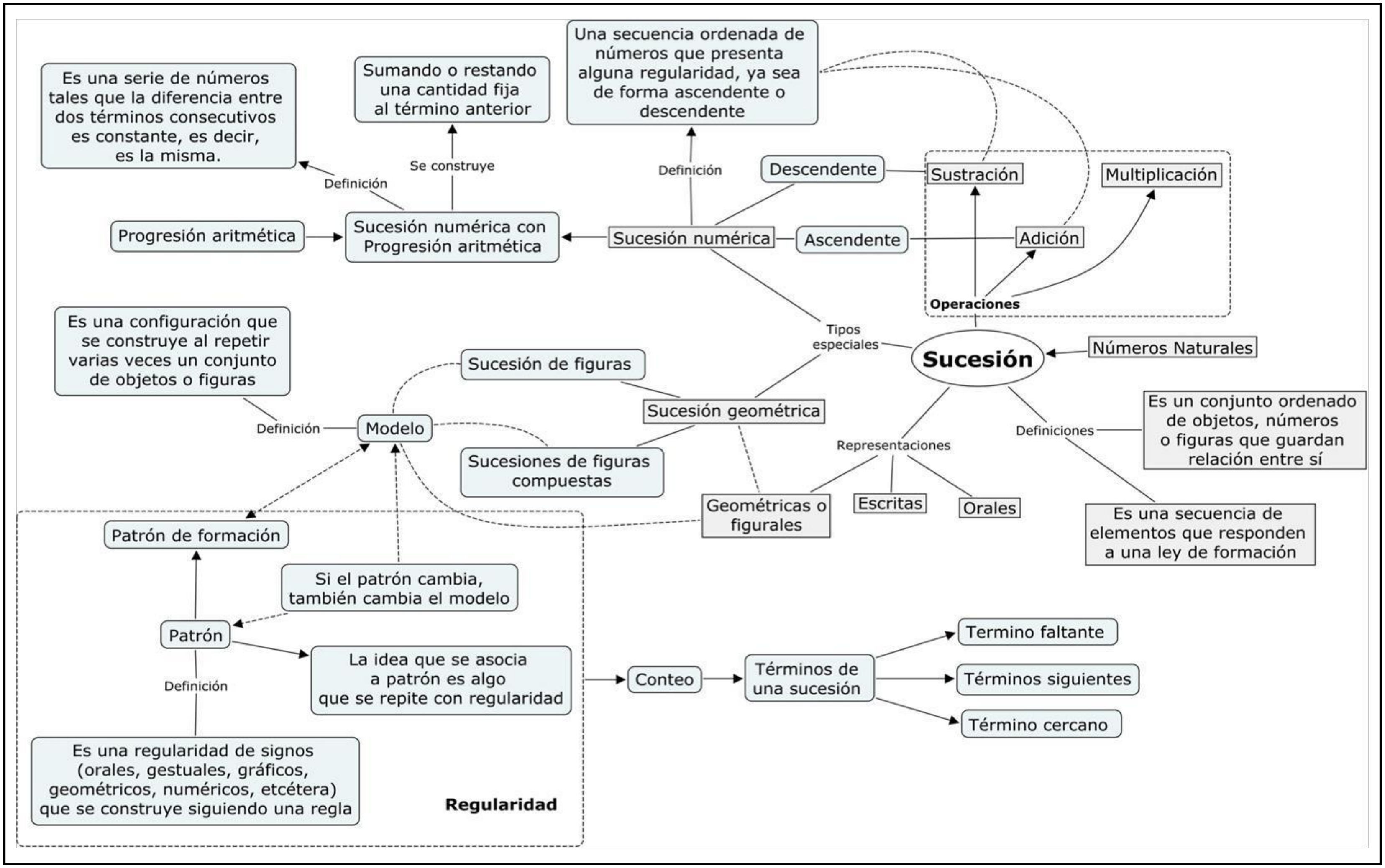


Figura 11. Estructura conceptual de las sucesiones para el primer ciclo de Educación Básica Primaria en México.

3.1.6 Sistemas de representación

Las sucesiones se encuentran definidas en el conjunto de los números naturales. Teniendo en cuenta esto y al profundizar en el tema del sistema de los números naturales, Lupiáñez (2016) destaca cuatro sistemas de representación. El sistema de representación *simbólico*, *verbal*, *gráfico* y *manipulativo*. Al considerar la clasificación destacada por Lupiáñez (2016), se identificaron cinco sistemas de representación de las sucesiones en los libros seleccionados: *simbólico-numérico*, *verbal*, *gráfico-tabular*, *gráfico-pictórico* y *manipulativo* (véase Figura 12). Cabe resaltar que estos sistemas de representación son transversales en los tres primeros grados de la educación primaria.

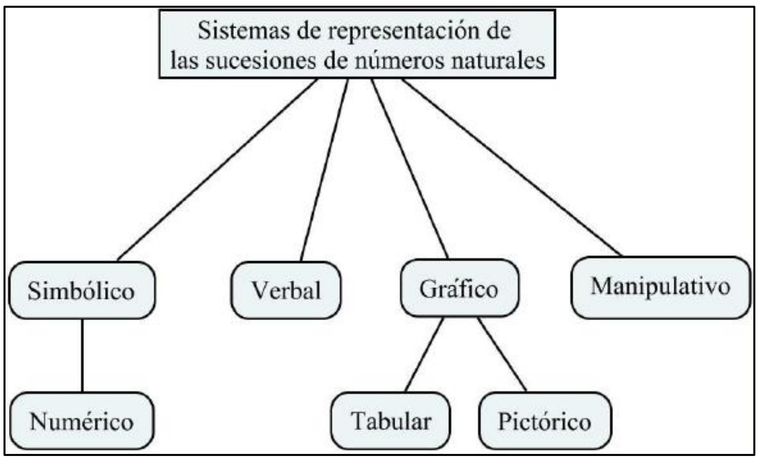


Figura 12. Sistemas de representación en los primeros tres grados de primaria.

El sistema de representación *simbólico* se refiere a los sistemas estructurados de grafismo que se usan para expresar números, junto con sus propias reglas internas (Lupiáñez, 2016). El sistema de representación *simbólico-numérico* de las sucesiones en los libros de texto guía, se representa por medio de números ordenados (ascendente o descendentemente) que forman una secuencia, en donde se identifican regularidades para completar términos faltantes o particulares de las sucesiones (véase Figura 13).

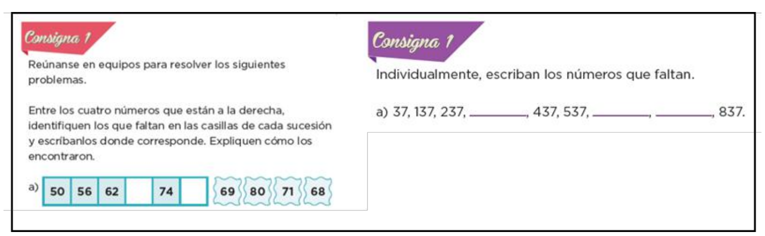
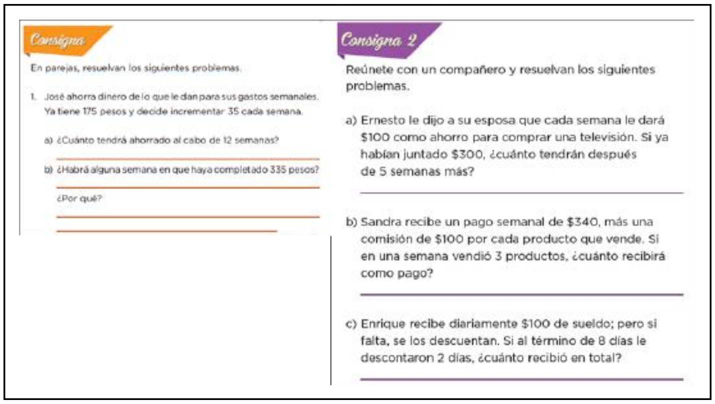


Figura 13. Sistema de representación numérico en los tres primeros años de primaria.

El sistema de representación *verbal,* explicita los términos y la sintaxis con que expresamos verbalmente los números, sus relaciones y prioridades (Lupiáñez, 2016). Este sistema de representación se asocia con el lenguaje matemático académico (Cañadas, 2007). Se considera en este sistema de representación, el lenguaje oral y escrito. En los libros de texto, el sistema de representación *verbal* se evidencia cuando se le demanda al estudiante que exprese de manera oral y escrita sucesiones numéricas de forma ascendente y descendente, a partir de diferentes números. De igual manera, este tipo de representación se evidencia en los libros a la hora de resolver problemas propuestos para los grados de segundo y tercero (véase Figura 14).



Consigna

En parejas, resuelvan los siguientes problemas.

1. José ahorra dinero de lo que le dan para sus gastos semanales. Ya tiene 175 pesos y decide incrementar 35 cada semana.

   a) ¿Cuánto tendrá ahorrado al cabo de 12 semanas?

   b) ¿Habrá alguna semana en que haya completado 335 pesos?

   ¿Por qué?

Consigna 2

Reúnete con un compañero y resuelvan los siguientes problemas.

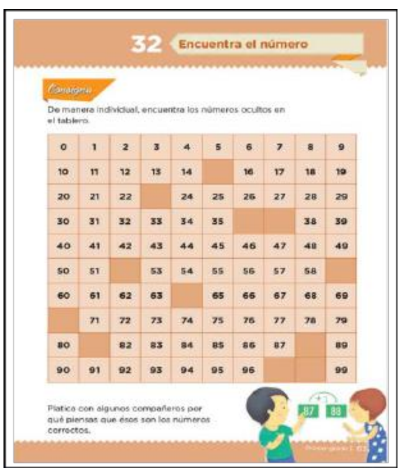
a) Ernesto le dijo a su esposa que cada semana le dará $100 como ahorro para comprar una televisión. Si ya habían juntado $300, ¿cuánto tendrán después de 5 semanas más?

b) Sandra recibe un pago semanal de $340, más una comisión de $100 por cada producto que vende. Si en una semana vendió 3 productos, ¿cuánto recibirá como pago?

c) Enrique recibe diariamente $100 de sueldo; pero si falta, se los descuentan. Si al término de 8 días le descontaron 2 días, ¿cuánto recibió en total?

Figura 14. Sistema de representación verbal en los tres primeros años de primaria.

El sistema de representación *gráfico* aparece al representar números en la recta numérica, al desarrollar patrones y configuraciones puntuales en dos o tres dimensiones, o al explorar relaciones aritméticas en tablas numéricas (Lupiáñez, 2016). De acuerdo con la anterior postura y con el fin de mostrar evidencia de los tipos de representaciones que se posibilitan y emplean en los libros de textos seleccionados, se subdivide el sistema de representación *gráfico* en *tabular* y *pictórico*. El sistema de representación *gráfico-tabular* de las sucesiones con las que se trabajan en la Educación Básica Primaria es en tablas numéricas con valores faltantes o tablas en las cuales el estudiante debe completar la sucesión numérica con el fin de identificar regularidades entre términos consecutivos, por ejemplo, en cuanto crece la sucesión (de 1 en 1; de 5 en 5; de 10 en 10; de 100 en 100. Véase Figura 15).



32 Encuentra el número

Consigna

De manera individual, encuentra los números ocultos en el tablero.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14		16	17	18	19
20	21	22		24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35			38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51		53	54	55	56	57	58	
60	61	62	63		65	66	67	68	69
	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80		82	83	84	85	86	87		89
90	91	92	93	94	95	96			99

Platica con algunos compañeros por qué piensas que ésos son los números correctos.

Figura 15. Sistema de representación gráfico-tabular en los tres primeros años de primaria.

El sistema de representación *gráfico-pictórico* de las sucesiones en primaria se relaciona con lo visual, por medio de figuras, las cuales son organizadas para formar secuencias o patrones figurales con características tanto geométricas (de espacio, medida, trazo, color y forma) como numéricas, a las cuales se le puede asociar una sucesión de tipo numérica, por medio de un conteo recursivo (de las configuraciones que forman las figuras de las sucesiones) al reconocer desde lo figural una regularidad (para un ejemplo de esto véase Figura 16). En primaria para la enseñanza de las sucesiones se usa una gran variedad de configuraciones gráficas, además de las empleadas usualmente como lo son los cuadrados, rectángulos, círculos, entre otras.

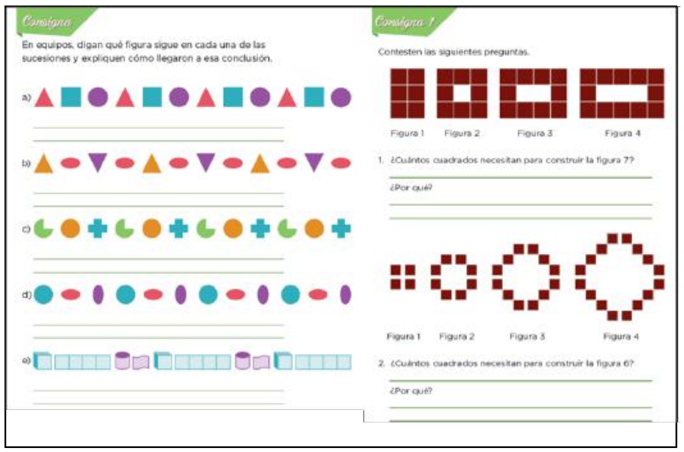


Figura 16. Sistema de representación gráfico-pictórico identificado.

Mediante el sistema de representación *manipulativo* se pueden expresar relaciones y propiedades de los números naturales (Lupiáñez, 2016). Este sistema de representación se identificó en los libros de texto seleccionados, debido a que en los desafíos propuestos los estudiantes deben emplear objetos o una colección de objetos tangibles o físicos para representar un número o conjunto de números, estos objetos pueden ser desde sus mismos útiles escolares (como lápices de colores, taja lápices, borradores), así como taparroscas, piedritas, palillos de madera, incluso frijoles y tarjetas numeradas y con un orden específico o material recortable de los libros. Con estos objetos tangibles se puede construir una sucesión ya sea ascendente o descendente (ver Figura 17).

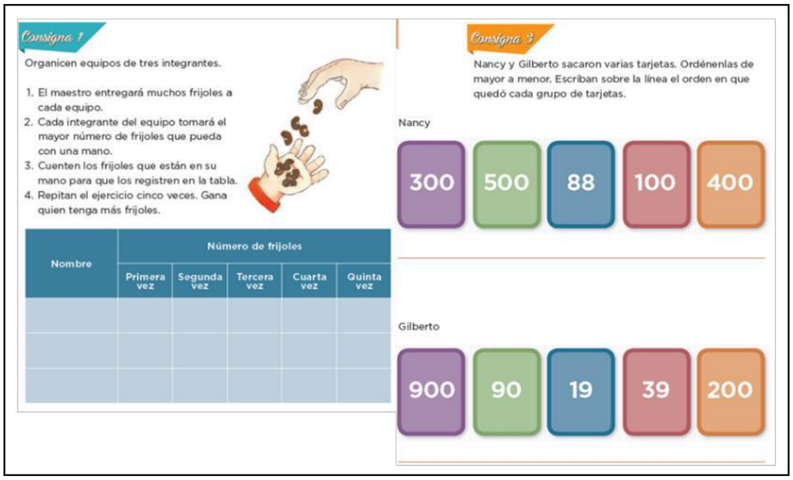


Figura 17. Sistema de representación manipulativo en los tres primeros años de primaria.

3.1.7 Contextos y modos de usos

Para identificar el sentido de un concepto o tópico matemático específico, en este caso el de sucesión en los tres primeros años de educación básica primaria, se siguen dos vías, la primera considerando los contextos de dicho concepto y otra destacando los usos y aplicaciones del tópico en juego. Siguiendo el análisis del contenido matemático sucesión, tanto los contextos como los modos de usos se identifican por medio de los libros seleccionados para el análisis.

Ruiz-Hidalgo (2016), menciona que un contexto es una descripción de cómo los conceptos y estructuras matemáticas atienden y responden, como instrumentos de conocimiento, a necesidades intelectuales o prácticas determinadas. Los contextos matemáticos proporcionan precisión técnica para delimitar el sentido de un concepto. Este mismo autor logra identificar algunos contextos involucrados en el conjunto de los números naturales, estos son, *contar*, *cuantificar*, *medir*, *ordenar*, *operar* o *calcular*, *estructurar* y *etiquetar*. Cada uno de estos contextos, se describen atendiendo a sus funciones y al rol que desempeñan. Cabe aclarar que se hace uso de estos contextos identificados por Ruiz-Hidalgo (2016), debido a que el concepto que se analiza es el de sucesión y dentro de la estructura conceptual de la matemática, este tema, se encuentra definido en los números naturales. En ese sentido, los contextos identificados en los libros *desafíos matemáticos. Libro para el maestro* para los tres primeros años de Educación Básica Primaria fueron, *contar*, *cuantificar*, *ordenar* y *operar o calcular*.

Cada uno de estos contextos fueron identificados mediante los contenidos y las intenciones didácticas explícitas en los libros para el maestro. Un ejemplo del contexto *contar,* lo encontramos en el *libro de primer grado*, específicamente en el *desafío 8. Titulado: contemos frijolitos*. Siendo la intención didáctica que los alumnos utilicen diferentes estrategias para contar y registrar colecciones con más de 30 elementos. Aquí la palabra contar permite identificar rápidamente el contexto del desafío. En general, este contexto se ve reflejado en la mayoría de los desafíos correspondientes al tópico sucesión en el libro de primer año, puesto que se le demanda al estudiante el conteo de números u objetos para darle continuidad a las sucesiones.

El contexto cuantificar se identifica cuando se usan los números para cuantificar colecciones finitas de objetos discretos, es decir, como cardinal de un conjunto (Ruiz-Hidalgo, 2016). Este contexto se identifica en los libros por medio de las actividades que involucran patrones con figuras, debido a que estas actividades exigen del estudiante contar las configuraciones que constituyen las figuras que componen la sucesión y dar un número que represente la cantidad contada (cuantificar). Un ejemplo de este contexto se encuentra en el *libro correspondiente al segundo año*, en el *desafío 18. Titulado: ¿Cómo supiste?* Y la intención didáctica, es que los alumnos identifiquen la regularidad en sucesiones de figuras con progresión aritmética al tener que encontrar un término faltante o el siguiente. Este desafío demanda al estudiante cuantificar las configuraciones que forman cada figura con el objetivo de identificar la regularidad y así poder encontrar el término faltante.

Otro contexto que se identificó fue *ordenar*. Su función es conocer la posición relativa de un determinado elemento en un conjunto discreto y ordenado (Ruiz-Hidalgo, 2016). El *desafío 37. Los juegos*. *Libro del tercer año* es un ejemplo de este contexto. La intención didáctica de este desafío es que el estudiante descubra la regularidad de una sucesión numérica ascendente o descendente con progresión aritmética, para ordenar números y decidir si el que se da corresponde o no a la sucesión. Para este caso, la intención didáctica permite ver claramente el contexto en el cual se enmarca la actividad.

El contexto operar o calcular es un contexto usual en la enseñanza. Está muy relacionado con las operaciones y, por tanto, con la estructura aditiva y multiplicativa de los números naturales (Ruiz-Hidalgo, 2016). Una de las actividades en la cual se puede identificar este contexto es el *desafío 16. El chapulín* del *libro de segundo grado*. La intención didáctica de este desafío es que los alumnos usen el cálculo mental al tener que anticipar el resultado de sumarle o restarle una cantidad a un número dado. Aquí es claro que se ven involucradas las operaciones como la adición y sustracción, pero en general para los tres primeros años se logra identificar que se pone en juego a la hora de resolver los desafíos diferentes operaciones, como la suma, la resta y la multiplicación, teniendo un grado de complejidad mayor a medida que transcurren los años escolares.

Por otra parte, para los usos y aplicaciones del tópico sucesión, se estudian las *situaciones* en las cuales tiene aplicación y se trabaja. Según Ruiz-Hidalgo (2016), las situaciones aportan sentido a los contenidos matemáticos en los textos escolares en que aparecen, identificando ámbitos de actividad y usos del concepto. Las situaciones se pueden considerar dentro de cuatro tipos: *personales*, *laborales* (*y educativas*), *sociales* y *científicas*.

Siguiendo la anterior clasificación y relacionándola con el tema sucesión en los números naturales, se identificaron en los libros analizados las siguientes situaciones, las *personales*, *laborales* o *escolares* y las *sociales*. No se evidencian en los libros las situaciones de tipo científicas, esto se puede deber a que el nivel educativo (básica primaria) aún no lo exige o lo permite.

Las *situaciones personales* son aquellas donde los problemas se enfocan sobre actividades cotidianas de los escolares, ya sea en primera persona o en su vida familiar. Esta situación se presenta cuando al estudiante se le demanda contar elementos de la sucesión para determinar términos consecutivos enmarcados en situaciones personales que requieren del conocimiento de números pequeños y de sus relaciones aditivas.

Situaciones laborales o escolares son aquellas situaciones centradas en el mundo del trabajo. En el ámbito escolar las actividades identificadas en este tipo de situación son aquellas en que se le demanda al estudiante resolver problemas donde se involucra por ejemplo la administración del dinero y la gestión de cantidades determinadas (véase Figura 18, como un ejemplo).

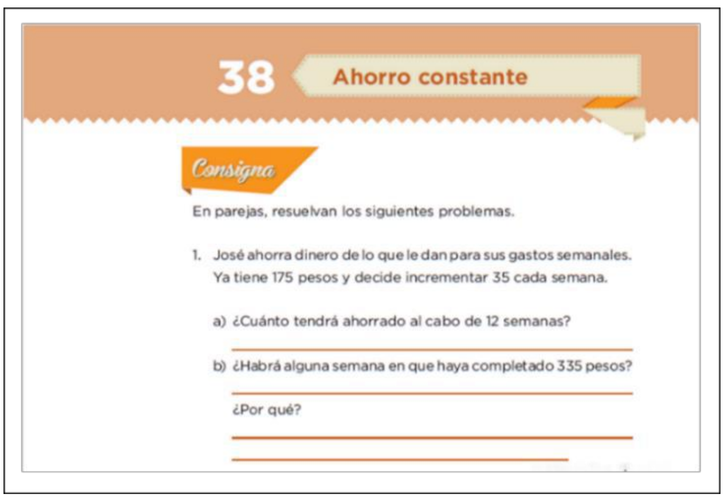
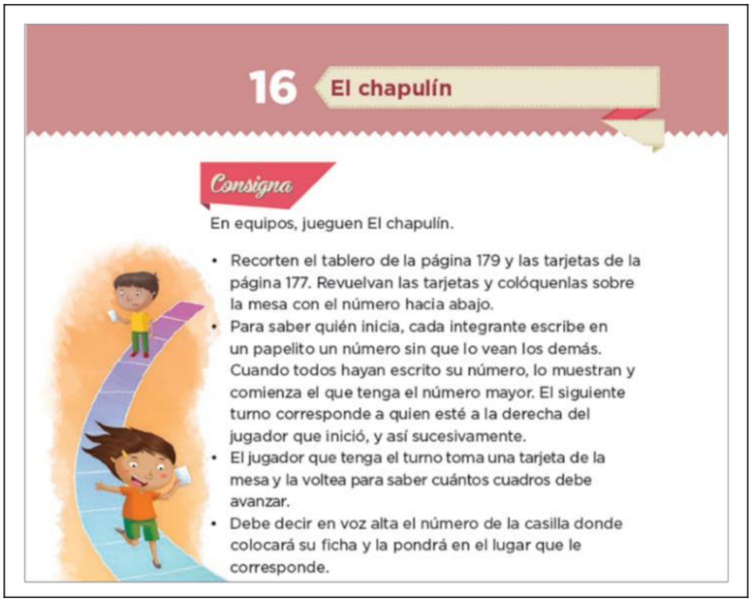


Figura 18. Situación escolar identificada en los tres primeros años de primaria.

Las situaciones sociales son aquellas que se refieren a la comunidad local, nacional o global, en las que se observan determinados aspectos del entorno. Para este caso las situaciones sociales, no solo se verán como aquellas que se refieren a una comunidad específica, sino también a aquellas actividades que posibilitan la interacción entre estudiante-estudiante y estudiante-profesor. Para un ejemplo de esta situación véase Figura 19.


16 El chapulín

Consigna

En equipos, jueguen El chapulín.

- Recorten el tablero de la página 179 y las tarjetas de la página 177. Revuelvan las tarjetas y colóquenlas sobre la mesa con el número hacia abajo.
- Para saber quién inicia, cada integrante escribe en un papelito un número sin que lo vean los demás. Cuando todos hayan escrito su número, lo muestran y comienza el que tenga el número mayor. El siguiente turno corresponde a quien esté a la derecha del jugador que inició, y así sucesivamente.
- El jugador que tenga el turno toma una tarjeta de la mesa y la voltea para saber cuántos cuadros debe avanzar.
- Debe decir en voz alta el número de la casilla donde colocará su ficha y la pondrá en el lugar que le corresponde.

Figura 19*.* Situación social identificada en los tres primeros años de primaria.

3.2 El análisis del contenido matemático sucesión para el diseño de las tareas del instrumento

El análisis del contenido matemático, propuesto por Fernández-Plaza (2016), permitió describir el tópico sucesión en los primeros tres años de educación básica primaria por medio de los libros seleccionados. A través de este método, se obtuvo información general sobre las sucesiones en el nivel educativo ya mencionado, describiendo principalmente, la estructura conceptual, sistemas de representación, al igual que los contextos y modos de uso. En ese sentido, se reconocieron algunos aspectos a considerar en el diseño de las tareas para la presente investigación, descritas en el capítulo 4.

- La sucesión definida en los números naturales.
- Tipos de sucesión: figural creciente.
- Tipos de estrategia: Recurrencia.
- Significados empleados: asociados a las operaciones de adición y multiplicación.
- Tipos de representaciones: pictóricas (figurales), numéricas, orales y verbales.

Por cuanto a la máxima demanda cognitiva que desde el curriculum se plantea a los estudiantes hasta tercer grado de primaria, referente al tópico sucesión, es que a lo sumo reconozcan el patrón de recurrencia de las sucesiones planteadas en los diferentes desafíos. En ese contexto, las tareas que constituyen el instrumento de recogida de datos en este estudio, les plantean a los estudiantes una demanda cognitiva alta, esto es, mayor a la que se demanda desde lo oficial. En ellas se exige, construir una estructura matemática plausible (regla directa) que explique el comportamiento de los patrones figurales involucrados.

Capítulo 4
Aspectos metodológicos

El enfoque de esta investigación es cualitativo con carácter interpretativo. Sus resultados no pretenden generalizarse para poblaciones más amplias, el propósito más bien es la expansión de la información. Al ser el interés, describir los procesos cognitivos que influyen en los niños de tercero de primaria, para que desarrollen estructuras matemáticas y construyan generalizaciones, el enfoque de la investigación es descriptivo, debido a que en este tipo de estudios se pretende especificar las propiedades, características y perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis (Baptista, Fernández y Hernández, 2010).

El estudio se fundamenta en la *investigación de diseño* o *investigación basada en diseño,* cuyo objetivo, según Molina, Castro, Molina, y Castro (2011), es analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación. Y finalizan asegurando que, por lo anterior, la *investigación basada en diseño* se convierte en un paradigma metodológico potente en la investigación del aprendizaje y la enseñanza. En ese sentido, el diseño se sustenta mediante tareas que refieren a sucesiones con progresión aritmética de orden uno, las cuales demandaron a los estudiantes, la generalización de la relación funcional de ese tipo. En el diseño de las tareas se considera el análisis del contenido matemático progresiones aritméticas de orden uno en la educación básica, (en particular de los grados uno, dos y tres de primaria) y una revisión a la literatura especializada para definir aspectos a involucrar en cada tarea y así realizar un análisis a priori de cada una de éstas.

En este paradigma de investigación, se enmarca el experimento de enseñanza (*Teaching Experiment* en inglés), que consiste en una secuencia de episodios de enseñanza, el cual incluye un agente de enseñanza (investigador-profesor), uno o más estudiantes, un testigo de los episodios, y un método de grabación (audio y/o video) de lo que sucede durante el episodio (Steffe y Thompson, 2000). En el ambiente a observar, ya sean habitaciones laboratorios, salones de clases, o pequeñas oficinas, el objeto de estudio puede ser: el desarrollo de los estudiantes frente a una tarea, las interacciones entre el profesor y el estudiante o la combinación de todas (Kelly, 2004).

El objetivo del experimento de enseñanza es la experimentación de primera mano por parte de los investigadores sobre el aprendizaje y razonamiento matemático de los estudiantes durante los episodios de enseñanza (Steffe y Thompson, 2000). La secuencia de episodios de enseñanza gira en torno a la aplicación de tareas (T), denominadas según Watson y Thompson (2013), en el sentido completo de cosas para hacer, incluye ejercicios repetitivos, la construcción de los objetos, que ejemplifican las definiciones y la solución de problemas.

En los experimentos de enseñanza, el investigador decide la manera en que se estructura la enseñanza, tomando en cuenta las dimensiones pedagógicas y la del contenido. Los tipos de actividades determina el tipo y formas de interacción en el salón de clases durante la intervención (Molina et al., 2011).

En esta investigación el experimento de enseñanza tuvo como objetivo desarrollar la habilidad de generalizar, en estudiantes de tercer grado de primaria. Se usaron para ello, tareas que demandaron construir una regla matemática plausible que explicara el comportamiento de patrones figurales, en el ámbito de una sucesión lineal.

4.1 Participantes y consideraciones previas

En el estudio participó un grupo de 22 estudiantes, 13 niñas y 9 niños, cuyas edades van de los 8 a los 9 años. Al momento de su participación, esta población estaba matriculada en tercero de Educación Básica Primaria, turno matutino, de la Escuela Dr. Alfonso G. Alarcón, de la ciudad de Zumpango del Río, en el estado de Guerrero, México. Su participación en el experimento de enseñanza consideró dos aspectos fundamentales:

1. Académicos. Consistieron en: a) Habilidades básicas de lectura y escritura, así como con los significados de la suma y la multiplicación, b) El estudio de propiedades de recurrencia, en sucesiones con progresión aritmética de orden uno, objeto de estudio a partir de segundo grado, bloque I (Véase capítulo del análisis del contenido).
2. Administrativos. Autorización del director de la escuela y de la profesora del grupo para llevar a cabo el estudio, a quiénes se les presentó una solicitud formal, en la que se delimitó el objetivo, el período y horarios de trabajo, así como de los medios a utilizar en la toma de datos.

Todos los participantes asistieron a las sesiones de trabajo que comprendió el desarrollo de las tareas del experimento de enseñanza.

4.1.1 Organización de la actividad en el salón de clases

La actividad en el salón de clases, se planificó con base en la temporalización de las sesiones, las formas de intervención en las tareas por los participantes (profesor-investigador y estudiantes) y por el grupo de investigación en la toma de datos.

4.1.2 Temporalización de las sesiones

El experimento de enseñanza se desarrolló en el ciclo escolar 2017-2018 entre los meses de abril y junio 2018, con un total de tres sesiones. Se realizaron en días diferentes, en el horario escolar con una duración aproximada de 2 horas cada una. La primera sesión se realizó un mes y cuatro días antes de la segunda, las sesiones segunda y tercera se realizaron con una separación de doce días entre ellas. Las primeras sesiones se desarrollaron en las instalaciones de la escuela primaria, la última, en espacios adaptados de una iglesia, debido a que el edificio inició en proceso de demolición para construir uno nuevo, ya que había sufrido daños estructurales de consideración durante el sismo del 19 de septiembre de 2017.

Por cuanto, a la temporalización de las sesiones, fue intencionada (Molina, 2006), con el interés de favorecer que las intervenciones en el salón de clases tuviesen un efecto prolongado, así también, con el fin de disminuir la probabilidad de valorar un aprendizaje memorístico, y además, para disponer de tiempo suficiente para el análisis de los resultados de cada sesión y con base en ello, tomar decisiones para las subsecuentes intervenciones en el aula. Las tareas, fechas de desarrollo en el salón de clases y características generales, se describen en la Tabla 11.

Tabla 11. Tareas, Fechas de Desarrollo en el Salón de Clases y Características Generales.

Sesión	Fecha	No. Alumnos asistentes	Tarea	Descripción	Intervención	Tiempo máximo
1	26/04/2018	37	"Las Mesitas"	Sucesión con progresión aritmética de orden uno en la que se conocen las tres primeras etapas de un patrón figural creciente. Sucesión asociada: $Sn = 2x + 2$	**Trabajo Individual** - Comprensión del enunciado de la tarea. - Proceso de solución - Entrevistas en el proceso de solución de la tarea **Trabajo grupal** - Presentación y discusión en grupo de la solución - Cierre de la actividad en lo colectivo	**<u>60 minutos</u>** 15 minutos 30 minutos 15 minutos **<u>60 minutos</u>** 40 minutos 20 minutos
2	01/06/2018	35	"La Banderita"	Sucesión con progresión aritmética de orden uno en la que se conocen las tres primeras etapas de un patrón figural creciente. Sucesión asociada: $Sn = 4x + 2$	**Trabajo Individual** - Comprensión del enunciado de la tarea. - Proceso de solución - Entrevistas en el proceso de solución **Trabajo grupal** - Presentación y discusión en grupo de la solución - Cierre de la actividad en lo colectivo	**<u>60 minutos</u>** 15 minutos 30 minutos 15 minutos **<u>60 minutos</u>** 40 minutos 20 minutos
3	13/06/2018	36	"La T"	Sucesión con progresión aritmética de orden uno en la que se conocen las tres primeras etapas de un patrón figural creciente. Sucesión asociada: $Sn = 3x + 1$	**Trabajo Individual** - Comprensión del enunciado de la tarea. - Proceso de solución - Entrevistas en el proceso de solución **Trabajo grupal** - Presentación y discusión en grupo de la solución - Cierre de la actividad en lo colectivo	**<u>60 minutos</u>** 15 minutos 30 minutos 15 minutos **<u>60 minutos</u>** 40 minutos 20 minutos

4.1.3 Organización de la actividad matemática en el salón de clases

En las intervenciones en el aula, por tanto, en la recogida de datos, participaron seis investigadores, dos en el rol de docente-investigador (uno de ellos, autor de este trabajo), el resto a cargo de la grabación en video y audio de las sesiones. Estos investigadores cumplieron a la vez, el rol de participantes como observadores y en el registro de notas de campo. El "participante como observador", hace referencia a los casos en los que el investigador se vincula con la situación que observa, adquiriendo cierta responsabilidad en el grupo que observa, pero sin convertirse completamente en un miembro de dicho grupo ni compartiendo la totalidad de los valores ni de las metas de este (Álvarez–Gayou, 2003). En cuanto a la profesora responsable académico del grupo de tercer grado en que se realizó la investigación, su participación en el experimento de enseñanza, fue como observadora.

Al inicio de cada sesión, el docente-investigador a cargo, implementó una actividad física de 5 minutos máximo, previo al trabajo con las tareas, con el propósito de crear un ambiente de confianza entre los niños y el grupo de investigación. Consistió en que dieran saltos en su lugar, levantaran sus manos, se levantaran y sentaran en sus asientos (Parados-sentados-parados). Seguidamente, se les informó de las tareas en que trabajarían. El grupo de investigación las distribuía. En seguida, el docente-investigador pedía a los estudiantes que las leyeran (5 minutos), posteriormente, la leía en voz alta al grupo a la vez que hacía preguntas, tipo control de lectura, que consistía en preguntarle: ¿Qué les pide la tarea? ¿Cuántas figuras hay? ¿Qué es lo que ven en las figuras de la tarea? Ante cada pregunta, se analizaban las respuestas con el grupo. Esta etapa fue fundamental, dado que es aquí donde se reconocía la forma en que los estudiantes percibían los patrones figurales involucrados en las tareas (percepción sensorial). Así, se reconoció que asociaron las figuras de la tarea de "Las Mesitas" con un cuadrado o bien con rectángulos formados por cuadrados. En el caso de la tarea de "La Banderita" la asociaron precisamente con este tipo de figura. En la tarea de la "T", reconocieron a la forma con la letra T. La etapa, en la que se analizaban las respuestas del grupo, se le dedicó 10 minutos aproximadamente. El propósito, de esta actividad, es que comprendieran qué se le demandaba en cada tarea.

Durante el trabajo individual, los investigadores le dieron seguimiento puntual a la actividad de los niños mientras trabajaban con las tareas. Dicho seguimiento se basó de la observación y preguntas sobre la forma de proceder de los estudiantes en diferentes momentos de actuación, con el propósito de comprender lo que hicieron y cómo lo hicieron. En este sentido, los investigadores se apoyaron de preguntas como las siguientes: ¿me puedes explicar cómo le hiciste para saber que era…? ¿Por qué multiplicaste por…? ¿Por qué le sumaste…? ¿Por qué escribiste esto? ¿Y estas figuras que hiciste, para qué? Otra de las finalidades, fue para reconocer dificultades con algunas de las preguntas o el proceso de solución y apoyarlos para que evolucionaran sus argumentos. En ese sentido, la intervención del profesor-investigador consistió en un acompañamiento, para motivar a los estudiantes a construir fórmulas directas (o estructuras) que sintetizaran su proceso de generalización. A la vez, para que organizaran de la mejor manera posible, el reporte escrito de sus respuestas a las demandas planteadas en cada tarea. En esta etapa, los investigadores reconocieron formas diversas de proceder (correctas e incorrectas) por los niños, ante una misma tarea. Este hecho fue fundamental para decidir quiénes debían presentar ante el grupo sus resultados y procedimientos. Fase en la que se utilizó la pizarra. Esta etapa detonó la discusión grupal. En ella los estudiantes identificaron formas correctas e incorrectas de proceder, al momento en que validaron en otras etapas del patrón, la conjetura o regla local establecida en el proceso de generalización. Ambos momentos de intervención fueron grabados con audio y video. En este sentido, la recogida de datos en el salón de clases consideró tres maneras de obtención de la información: participante como observador, entrevista in situ y el cuestionario. Las entrevistas se realizaron a profundidad, siguiendo un modelo de conversación normal, y no de un intercambio formal de preguntas y respuestas (Álvarez–Gayou, 2003).

4.2 Tareas del experimento de enseñanza

En el experimento de enseñanza se utilizaron tres tareas en el marco de la generalización de sucesiones lineales a través de patrones figurales crecientes. Estas tareas demandaron a los estudiantes construir una estructura matemática plausible que explicara el comportamiento del crecimiento del patrón figural asociado a la sucesión en estudio.

4.2.1 Tareas y contexto

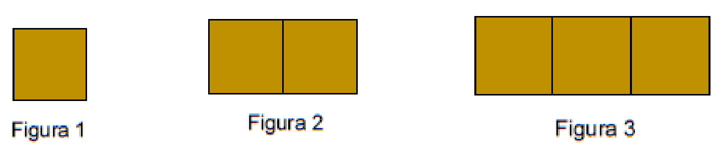
Se diseñaron tres tareas, que refieren a sucesiones de patrones figurales en el marco de una sucesión lineal numérica, cuyos términos particulares y generalización pueden formularse a través de una expresión general de la forma $y = ax + b,$ con $a, b > 0,$ y $x \in \mathbb{N}$. Su diseño consideró dos aspectos: a) El análisis del contenido curricular de nivel primaria, reportado en el capítulo 3 de este informe, y b) Análisis de la literatura sobre generalización de patrones lineales. El análisis del contenido, evidenció que el trabajo con las sucesiones con progresión aritmética de orden uno, en primaria, inicia a partir de primer grado, en el marco de lo numérico y lo figural. Además, se reconocieron estrategias, significados y representaciones en los textos analizados. Este análisis también fue útil para identificar la máxima demanda cognitiva que se le plantea desde lo curricular al estudiante y a partir de ello, decidir si a la población objeto de estudio de la presente investigación se le planteaba la misma demanda o una mayor. En ese sentido, la demanda cognitiva exigida en las tareas del experimento de enseñanza del presente estudio fue mayor a la planteada en los libros analizados. Dicha demanda fue la de generalizar o la construcción de una estructura matemática plausible que explique el comportamiento del patrón figural involucrado en cada tarea. De la literatura especializada, se reconocieron patrones de alta y baja bondad Gestalt (Rivera, 2010), que favorecen una percepción organizada y concreta de lo que el sujeto percibe a través de las sensaciones visuales, involucrando la experiencia, motivación, la interacción (Salama, 2006) con los objetos en el presente estudio y el contexto en el cual se encuentra inmerso, que son sucesiones de patrones figurales. Los patrones de alta bondad favorecen que a partir de lo figural (formas y fondo desde la Gestalt), se perciba de manera rápida y fácil, una estructura matemática plausible y útil que permita explicar su comportamiento, por ello se decidió considerar los de este tipo. En las tres tareas se favorece la percepción a través de lo figural (Tabla 12, Tabla 13 y Tabla 14).

En este punto, cabe aclarar que a pesar de que las tareas propuestas en la presente investigación, son de una mayor demanda cognitiva que las planteadas desde lo curricular para tercer grado de primaria, gracias a la revisión a la literatura especializada, se reconoció que niños de ese nivel educativo pueden dar respuesta a la demanda planteada en las tareas del instrumento de recolección de datos.

4.2.1.1 Tarea 1: Las mesitas

La tarea 1, se constituye de un patrón figural creciente, en el que se les presentan las tres primeras etapas. El patrón se retomó del trabajo de Rivera y Becker (2008). La expresión algebraica estándar asociada (la forma más simple) que explica el comportamiento creciente del patrón figural, es: $2x + 2$, que por el nivel de abstracción del estudiante, se apoyaría de los significados de la suma o la multiplicación para construirla, más que a través del uso de variables. En este sentido, por la forma de proceder de los estudiantes, construyen expresiones de tipo estándar o no estándar. En esta tarea, se situó a los estudiantes a trabajar en etapas cercanas y lejanas del patrón, a través de preguntas, que fueron diseñadas por el grupo de investigación en el que el autor del presente estudio es miembro.

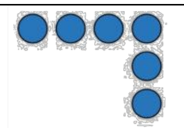
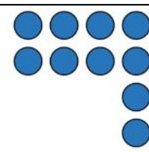
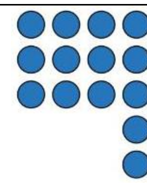
Tabla 12. Tarea 1. Las Mesitas: Patrón, Generalización y Cuestiones que se Demandan.

Patrón figural	
Cuestiones planteadas	**a)** Si se te pide que coloques alrededor de una mesa (figura 1) una silla en cada lado, ¿Cuántas sillas colocarás? **b)** Si pones dos mesas cuadradas juntas (figura 2), ¿Cuántas sillas colocarás alrededor de la nueva mesa rectangular? **c)** Si pones tres mesas juntas (figura 3), ¿Cuántas sillas colocarás alrededor de las mesas? **d)** ¿Qué relación puedes observar entre la cantidad de mesas y sillas? **e)** Si tienes 20 mesas cuadradas acomodadas de forma lineal, ¿Cuántas sillas colocarás alrededor de las mesas?
Regla algebraica asociada a la generalización	$2x + 2$

4.2.1.2 Tarea 2: Las banderitas

La tarea 2, se constituye de un patrón figural creciente, en el que se presentan las tres primeras etapas (etapas dadas). En esta tarea, tanto el patrón figural como las preguntas se diseñaron por el grupo de investigación en el que este autor participa. La expresión algebraica estándar asociada, es: $4x + 2$ y que por el nivel de abstracción de los estudiantes, se apoyarían de los significados de la suma o la multiplicación para construirla, más que a través del uso de variables. En este sentido, por la forma de proceder de la población que participó en el estudio, construyeron expresiones de tipo estándar o no estándar. En esta tarea, también se ubicó a los estudiantes a trabajar en etapas cercanas y lejanas del patrón, a través de preguntas, que fueron diseñadas por el grupo de investigación en el que el autor del presente estudio es miembro.

Tabla 13. Tarea 2. Las Banderitas: Patrón, Generalización y Cuestiones que se Demandan.

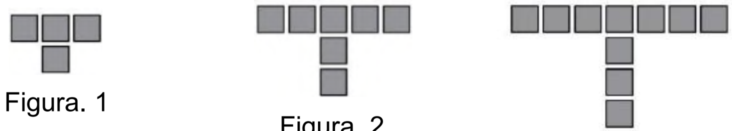
Patrón figural	 Figura. 1  Figura. 2  Figura. 3
Cuestiones planteadas	¿Cuántos círculos se necesitan para formar las figuras 5, 9, 12 y 100? Explica cómo se puede determinar rápidamente la cantidad de círculos necesarios para formar cualquier figura de la sucesión analizada. Determina rápidamente la cantidad de círculos necesarios para formar la figura 2135.
Regla algebraica asociada a la generalización	$4x + 2$

4.2.1.3 Tarea 3: La "T"

La tarea 3, se constituye de un patrón figural creciente, en el que se presentan las tres primeras etapas. El patrón es una adaptación del estudio de Rivera (2013). La adaptación consistió en que se cambió el tipo de configuración de las figuras que constituyen el patrón que, en Rivera (2013), eran estrellitas y en este trabajo, se colocaron cuadrados de igual tamaño. La expresión algebraica estándar asociada es: $3x + 1$ y que por el nivel de abstracción de los estudiantes, se apoyarían de los significados de la suma o la multiplicación para construirla, más que a través del uso de variables. En este sentido, por la forma de proceder de la población que participó en el estudio, construyeron expresiones de tipo estándar o no estándar. Esta tarea, situó a los estudiantes a trabajar en etapas cercanas y lejanas del patrón, a través de preguntas, que fueron diseñadas por el grupo de investigación en el que el autor del presente estudio es miembro.

A través de las preguntas, se desafía a los estudiantes (de manera implícita) a construir una expresión matemática plausible y útil que explique el comportamiento general del patrón involucrado en la tarea. En particular, las que los sitúan a trabajar con etapas lejanas del patrón figural.

Tabla 14. Tarea 4. La Te Mayúscula: Patrón, Generalización y Cuestiones que se Demandan.

Patrón figural	 Figura. 1 Figura. 2 Figura. 3
Cuestiones planteadas	**a)** ¿Cuántos cuadrados se necesitan para formar la figura 4, 7, 17 y 31 de la sucesión? Argumenta tu respuesta. **b)** ¿Cuántos cuadrados se necesitan para formar la figura 125? Argumenta tu respuesta. **c)** Escribe un mensaje a un compañero, donde le expliques cómo puede determinar rápidamente la cantidad de cuadrados necesarios para formar cualquier número de figura de la sucesión. **d)** Si tienes 1501 cuadrados, ¿A qué número de figura corresponde? Argumenta tu respuesta.
Regla algebraica asociada a la generalización	$3x + 1$

Las tareas del experimento se encuentran en el marco de patrones figurales construidos de una manera bien definida y altos en bondad Gestalt. Consisten en etapas cuyas partes podrían interpretarse como configuradas de cierta manera, donde la percepción visual juega un rol importante. Se plantearon en un ambiente de lápiz y papel.

4.3 Análisis de datos

El análisis cualitativo de los datos toma como base las producciones escritas y verbales de los estudiantes en el proceso de solución de las tareas, en la etapa individual y grupal. En ese contexto, especial interés se puso en los modos de percepción sensorial y cognitiva que coordinan los estudiantes mientras interpretan y explican el comportamiento de un patrón figural creciente, independientemente de si construyeron o no una estructura matemática plausible. En particular, se centró en analizar y comprender:

- La manera en que perciben las figuras que componen cada etapa del patrón y tipos de razonamientos que siguen los estudiantes.
- Cómo interpretan y explican el comportamiento de un patrón figural creciente en etapas cercanas y lejanas (consecutivas y no consecutivas).
- Los significados, propiedades y conceptos matemáticos que conectan en sus interpretaciones y explicaciones.
- Cómo organizan y presentan sus ideas, de las representaciones y sistemas de representación que usan en ese proceso.
- Las estructuras matemáticas que construyen y tipos de generalizaciones asociadas.

De quienes no logran construir una generalización, el análisis contribuye en comprender qué aspectos cognitivos los limitaron.

Capítulo 5
Análisis de los datos

En esta investigación, se examinan los aspectos cognitivos que evidencian estudiantes de tercer grado de primaria, al resolver tareas que demandan la generalización de sucesiones lineales, en el marco de patrones figurales. El análisis cualitativo de los datos tomó como base las producciones escritas y verbales de los estudiantes en el proceso de solución de las tareas, en dos etapas, individual y grupal. En ese contexto, el análisis se centró en los modos de percepción sensorial y cognitiva que coordinaron los estudiantes para interpretar y explicar el comportamiento de un patrón figural creciente, independientemente de si construyeron o no una estructura matemática plausible, que evidencie este hecho.

En el estudio, participaron 22 alumnos de un grupo académico de tercer grado de primaria (véase capítulo 4), quienes tuvieron las mismas oportunidades de intervenir en las tres tareas (T), al menos por tres razones:

1. Su habilidad en la comprensión lectora
2. Su habilidad con el significado de la suma y la multiplicación, y
3. Asistieron a las tres sesiones en que se llevaron a cabo.

En ese contexto, se reconoce que 7 de los 22 estudiantes, lograron construir una estructura matemática plausible, que explica el comportamiento del patrón (generalizaron) en las sucesiones de T1 y T2. En T3, lo hicieron 12 (véase Tabla 15).

Para organizar la información, los estudiantes fueron codificados como: *E1, E2, E3, E4,…, E22.*

Tabla 15. Estudiantes que Evidenciaron la Construcción de una Estructura Matemática Plausible (Generalizaron), para Explicar el Comportamiento del Patrón Figural en las Tareas del Estudio.

Estudiante	Tarea 1 Generalización		Tarea 2 Generalización		Tarea 3 Generalización	
	Si	No	Si	No	Si	No
E1		X	X		X	
E4	X			X	X	
E9	X			X	X	
E10		X		X	X	
E11		X		X		X
E12	X		X		X	
E15		X		X		X
E16		X		X		X
E17		X		X		X
E19		X	X		X	
E20		X		X		X
E23		X	X		X	
E25		X		X		X
E26		X		X	X	
E27		X		X	X	
E29	X		X		X	
E30	X			X		X
E31	X		X		X	
E33		X		X		X
E34		X	X			X
E35		X		X		X
E36	X			X	X	

5.1. Aspectos cognitivos desarrollados por estudiantes de tercer grado

Se analizan y discuten los aspectos cognitivos que evidenciaron los estudiantes que participaron en esta investigación, resultado de trabajar con tareas que refieren a la generalización de patrones figurales. El análisis de los datos se presenta por tarea. En esa sección, se presentan dos apartados, en el primero, de quienes generalizaron, y en el segundo de quienes no presentaron una estructura matemática plausible que explique el comportamiento del patrón figural.

Los procesos cognitivos desarrollados por esta población de estudiantes se conectaron a las formas en que percibieron los patrones figurales. *¿Qué percibieron?, ¿cómo procedieron?, ¿quiénes establecieron una regla y de qué tipo?, ¿qué tipo de razonamiento prevalece en sus interpretaciones y explicaciones?, ¿qué representaciones y sistemas de representación conectaron para organizar y coordinar sus ideas?*

La primera acción del profesor-investigador, se orientó hacia la comprensión de la tarea por parte de los estudiantes. Se apoyó de una lectura en voz alta. Para motivar su participación les planteó preguntas, que enfatizaron en las figuras que componen el patrón, ¿qué figuras son? ¿qué pueden decir acerca de ellas? Algunas respuestas fueron: “son mesitas cuadradas”, “están juntas” o “están unidas”, “son tres figuras”. Esta etapa fue fundamental a nivel perceptual sensorial y cognitiva. Favoreció el que los estudiantes coordinaran aspectos cognitivos con el lenguaje verbal, escrito y simbólico.

A fin de comprender el razonamiento que siguieron en su intervención en las tareas, se realizaron entrevistas a algunos participantes, en la etapa individual y/o grupal.

5.1.1. Aspectos cognitivos desarrollados por estudiantes que generalizaron

Radford (2010) reconoce que aun cuando los niños de primaria externan expresiones matemáticas para una etapa particular en patrones figurales, si están pensando en una de tipo general. Sin embargo, por el nivel de abstracción que han desarrollado, es que no logran expresarla con una simbología alfanumérica propia del álgebra convencional.

5.1.1.1. Tarea 1: Las mesitas

De los 22 estudiantes matriculados en el grupo académico en que se realizó la investigación, siete (E4, E9, E12, E29, E30, E31, E36) lograron construir una expresión matemática que explica el comportamiento que sigue el patrón figural de la sucesión en la tarea 1, en cualesquiera de sus etapas, esto es, una fórmula directa.

Luego de que el profesor-investigador desarrolló la etapa de comprensión de la tarea, se les pidió trabajar de manera individual. En un primer momento, fijaron su atención en los cuadrados que representaban a las mesas, ello, a partir de la instrucción de la tarea, que indicó, se trataba de mesas cuadradas. Seguidamente, observaron que, en etapas consecutivas, la figura “crece”, otros, que se “pierden” algunos lados de los cuadrados, por la manera en que están arreglados. Se identificaron formas diversas de proceder, que atendieron a la manera en que cada estudiante percibió las figuras que forman cada etapa y de cómo organizaron y presentaron sus ideas. En ese proceso, conectaron significados, propiedades y conceptos matemáticos, según su nivel de abstracción y los evidenciaron mediante el uso del lenguaje verbal, escrito y simbólico.

A fin de comprender el razonamiento que siguieron en T1, se realizaron entrevistas a algunos participantes, en diferentes momentos de su intervención en la tarea, en la etapa individual. Otro momento, cuando se pidió a algunos, compartir su razonamiento con el grupo, apoyándose de la pizarra.

5.1.1.1.a. Estudiante 4

E4 percibió el patrón figural de la sucesión en T1, como constituido por partes o etapas, tal como le fue presentado en la tarea. En ese contexto, enfocó su atención en el contorno o perímetro de las formas rectangulares que resultan de unir las mesas, sin referir explícitamente a tales formas. Su percepción inicial fue de tipo sensorial. Reconoce que se trata de ubicar sillas en el contorno, una en cada lado de las mesas. En seguida, contó por etapa cuántas sillas colocaría en cada lado de los cuadrados que forman el contorno de las figuras rectangulares. A la vez que contaba, indicaba por medio de puntos, dónde se ubicaría cada mesa (véase Figura 20). Se apoyó en ese proceso del lenguaje simbólico, y con ello, externó su estrategia. Basado en ello, dio respuesta a las preguntas que le demandó la tarea (véase Figura 21). En este sentido, para la mesa uno, respondió: “4 sillas por que son 4 lados de la mesa”, en dos mesas juntas: 6 sillas y en tres, que son 8.

La capacidad expresiva de E4 en las primeras tres etapas, es mayormente de naturaleza simbólica-numérica y verbal-escrita. Hasta ese momento, su estrategia se basó en el conteo, respaldándose en un lenguaje simbólico-numérico y verbal-escrito.

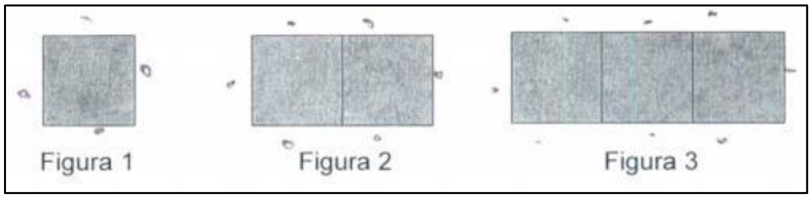
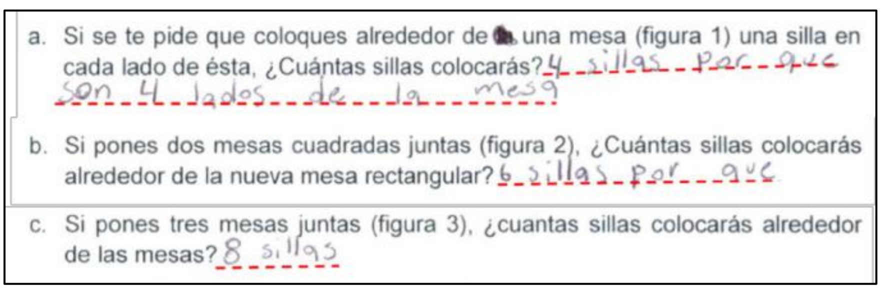


Figura 20. Representación simbólica (puntos) usada por E4 para representar las sillas por etapa, mientras contaba.

En las etapas dadas, el estudiante percibió que “hay más sillas y menos mesas”. Ello, cuando se le cuestionó sobre la relación que observa entre cantidad de mesas y sillas (Figura 22). Hasta aquí, E4 sigue sin evidenciar cuánto crece el número de sillas de una etapa a otra (patrón de recurrencia).



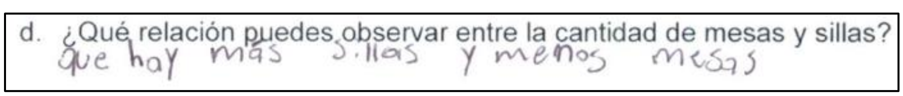
a. Si se te pide que coloques alrededor de una mesa (figura 1) una silla en cada lado de ésta, ¿Cuántas sillas colocarás? 4 sillas por que son 4 lados de la mesa

b. Si pones dos mesas cuadradas juntas (figura 2), ¿Cuántas sillas colocarás alrededor de la nueva mesa rectangular? 6 sillas por que

c. Si pones tres mesas juntas (figura 3), ¿cuantas sillas colocarás alrededor de las mesas? 8 sillas

Figura 21. Número de sillas que E4 reconoce en las primeras tres etapas de la sucesión.

El razonamiento que mostró en las tres primeras etapas es **inductivo**, ya que se enfocó en analizar cada caso y así, dar respuesta a los cuestionamientos.



d. ¿Qué relación puedes observar entre la cantidad de mesas y sillas? que hay más sillas y menos mesas

Figura 22. E4 percibe que el patrón crece, de reconocer que hay más sillas que mesas.

En otro momento, se le interrogó sobre su respuesta al ítem e, de la tarea, en la que se demandó determinar el número de sillas que se acomodan en 20 mesas cuadradas, arregladas de manera lineal y juntas. Su respuesta, la orientó a explicar los procedimientos que escribió en su hoja de trabajo (Figura 23).

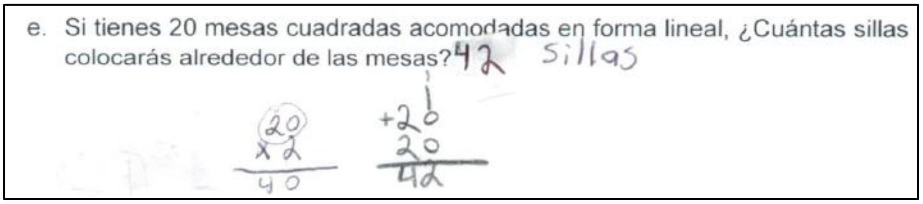


Figura 23. Forma de proceder por E4 en la etapa 20.

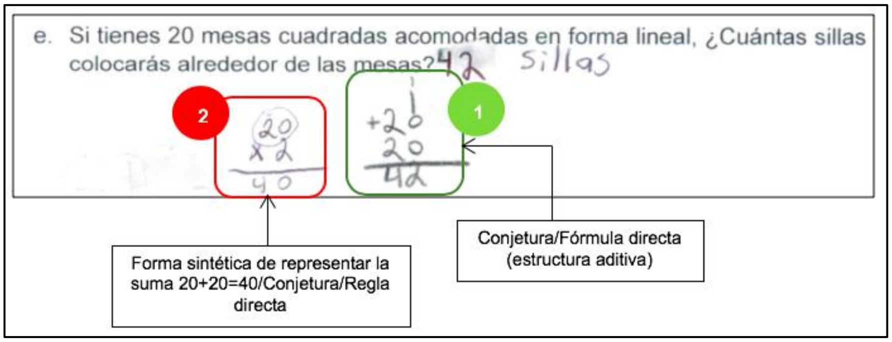


Figura 24. Estructuras matemáticas construidas por E4 en la etapa 20 de T1.

A partir de esta evidencia, se identificó a la expresión 1 (Figura 24), como una conjetura, la cual refiere a una estructura aditiva. La estableció, de reconocer que puede sumar el número de sillas que se colocan en el extremo superior de la forma rectangular que conforma de unir las mesas, con las del extremo inferior. Seguidamente, sumó la silla que se coloca en el extremo izquierdo con la del extremo derecho, es así como le resultó un total de 42 sillas. La suma $20 + 20$=40 de su estructura aditiva, la expresó de manera simplificada, como en 2, de la Figura 24. Esta estructura aditiva, como veremos más adelante, la usa E4 para determinar el número de sillas en otros casos, por lo que la establece como una regla directa.

En la Figura 25, se reconstruye el procedimiento desarrollado por E4 para establecer la estructura aditiva, al trabajar con la etapa 20.

La conjetura que E4 expresa por medio de una estructura aditiva, la valida mediante un proceso de acompañamiento por el profesor-investigador, como sigue:

P: ¿Cómo le hiciste aquí? [Etapa 20 de la sucesión]
E4: … aquí me dicen que son veinte mesas y lo multipliqué por dos…
P: ¿Por qué por dos?
E4: Porque se le van sumando dos sillas

En la frase “multipliqué por dos”, se refiere a la forma en que expresó de modo sintético la suma $20 + 20$ (véase 1 en Figura 24). Y la frase “Porque se le van sumando dos sillas”, refiere al número de sillas que se colocan en los lados de las mesas que se ubican en cada extremo. Con base en ello, determinó que son 42 sillas las que se colocan en las 20 mesas.

El procedimiento usado por E4 en la etapa 20, manifiesta una estructura matemática aditiva, que, tiene claro, puede expresar $20 + 20$ por medio de la multiplicación. Sin embargo, al trabajar con otras etapas del patrón figural, utiliza la estructura multiplicativa (2 en Figura 24). Se manifiesta que, la establece como conjetura la cual, valida como una fórmula directa, que no explica el comportamiento del patrón. Se requería un mayor nivel de acompañamiento a fin de que evolucionara su razonamiento, o bien, para comprender mejor por qué recurrió a esa estructura al cuestionarle por el número de sillas en otras etapas.

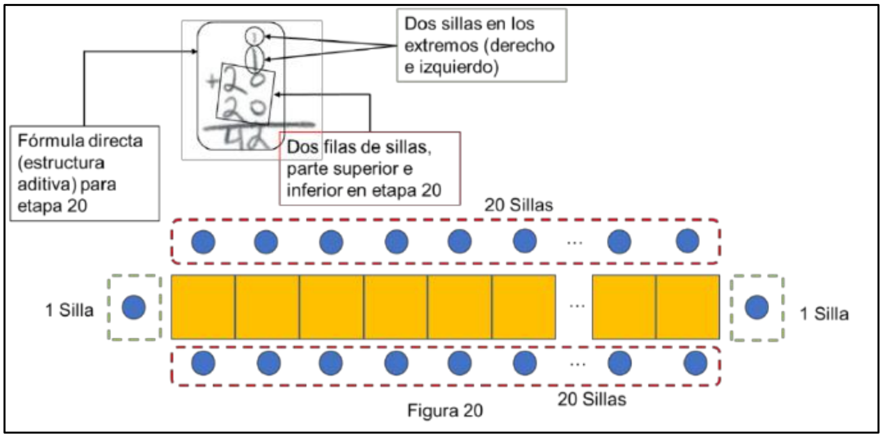


Figura 25. Reconstrucción gráfica de la manera en que E4 percibió el patrón figural por medio de la estructura aditiva en la etapa 20.

El razonamiento que siguió E4 en la etapa 20, por medio del proceso de acompañamiento, fue de tipo **abductivo**, generado por el profesor-investigador.

Mediante el proceso de acompañamiento validó su conjetura, la basada en una estructura aditiva, constituyéndose así en una fórmula directa (véase 1 en Figura 24). Al cuestionársele por el número de sillas en la etapa dos y en otras etapas lejanas, E4 utilizó únicamente la estructura multiplicativa, sin adicionar el número de mesas de los extremos. Evidencia una nueva conjetura (véase 2 en Figura 24), que validó en otras etapas. Este hecho, puso de manifiesto que la regla directa que mantuvo es la indicada en 2 de la Figura 24.

P: Si te dijéramos en la figura dos [etapa 2]… si usas eso de multiplicar por dos ¿cuántas serían?... ¿Cuántas te darían?
E4: Cuatro
P: ¿Son cuatro sillas las que se ubican?
E4: Si
P: ¿Son cuatro sillas aquí?
E4: No
P: Tienes que comprobar eso,… ¿te das cuenta? … si multiplicaras por dos entonces tendrías que multiplicar tres por dos [para el caso de la figura tres, etapa tres] y serían seis ¿te dio seis ahí?
E4: ¡No!

P: Entonces, revisa esta parte

Con ello, se reconoce que E4 abandonó la regla directa que construyó a través de una estructura aditiva. Es evidente que el proceso de acompañamiento realizado por el profesor hasta aquí, a través de una reflexión sobre las acciones de la estudiante, no logró el objetivo esperado, que reconociera a la estructura aditiva como la regla directa que explica el comportamiento del patrón figural de la sucesión en estudio.

La estructura aditiva es de la forma: $S_n = n + n + 1 + 1$. La multiplicativa, tiene la forma: $S_n = 2n$. La primera, es la que explica de manera adecuada el comportamiento del patrón figural y corresponde a una estructura deconstructiva. Sin embargo, el estudiante abandona esta estructura y usa la multiplicativa.

E4 recurrió al uso del lenguaje simbólico y al verbal-escrito, para representar y contar mesas y sillas respectivamente.

Procesos cognitivos desarrollados por E4

Al trabajar con T1, E4 puso en juego diferentes procesos cognitivos. En un primer momento, pasó por un proceso de percepción sensorial, lo que le ayudó a percibir las formas (rectangulares) que se estructuran de la unión de las mesas cuadradas. A partir de ello, se enfocó a trabajar sobre el contorno. Esta etapa fue fundamental para delimitar qué parte de las figuras deben analizar, ante todo, es parte de lo que favorecerá que reconozcan la relación entre la variable figura y sillas. El proceso cognitivo en que basa su trabajo en las tres primeras etapas se apoya del conteo en el que manifiesta un inicio del pensamiento aditivo. En la etapa 20, evidencia de manera explícita su pensamiento aditivo, a través de una estructura matemática que explica de manera adecuada el comportamiento del patrón figural. Refiere a una estructura aditiva de la forma: $S_n = n + n + 1 + 1$, de tipo deconstructiva aditiva. El estudiante se apoyó del profesor-investigador para explicar y validar esta estructura, que, por alguna razón, no mantuvo al trabajar en otras etapas, aun con el acompañamiento del profesor-investigador. La estructura que mantuvo hasta el final E4, es de la forma: $S_n = 2n$, la que se construyó en una regla directa, aunque no así en la regla general que explica cómo se comporta el patrón figural de la sucesión.

El proceso que siguió para validar y confirmar ambas conjeturas fue de tipo abductivo, puesto que sus explicaciones estuvieron centradas en un producto acabado (Aliseda, 2006), y en una etapa en particular (para este caso la etapa 20) (véase 1 y 2 en Figura 24 y Figura 25). Este proceso abductivo también fue posible por el acompañamiento del profesor-investigador (ver extractos de entrevistas).

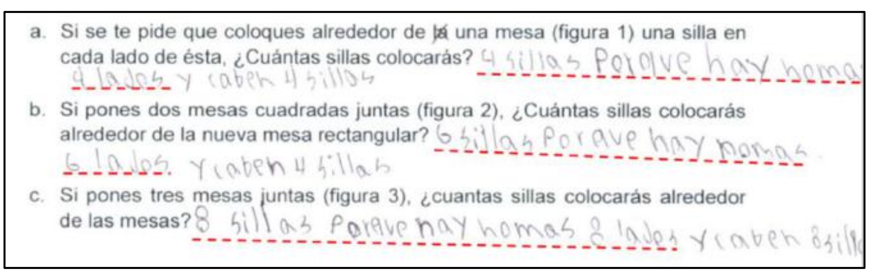
Los procesos inferenciales de abducción, inducción y deducción fueron fundamentales para la generalización del patrón de E4, quien manifestó dos estructuras, una multiplicativa y otra aditiva (véase Figura 24).

Se evidencia que en este estudiante los aspectos visuales no tomaron un papel preponderante en sus inferencias. También se puede decir que la capacidad de comunicación verbal y escrita, de E4, fue limitada, ya que se centró a responder lo que se le demandaba en T1, sin profundizar en sus explicaciones, esto, debido a que, a esa edad, los niños están iniciando a desarrollar sus habilidades en el uso del lenguaje tanto verbal como escrito. Manifiesta un mayor desarrollo en la habilidad para trabajar con el significado de la suma y la multiplicación.

Las representaciones que empleó para organizar y coordinar sus ideas fueron en su mayoría de tipo numéricas, y fue por medio de estas representaciones de tipo simbólicas-numéricas que E4, pudo representar una fórmula directa para las etapas de la sucesión, expresándola como una operación aritmética y por medio de una estructura aditiva.

5.1.1.1.b. Estudiante 9

Una primera forma de aproximarse a la solución de T1 por parte de E9, fue perceptual sensorial. Consistió en coordinar su razonamiento con sus explicaciones a partir de las formas que percibió, con base en las mesas juntas. Esto es, de las formas rectangulares. En ese contexto, reconoció que debía enfocarse en el contorno de las figuras. En lo que sigue, coordinó su percepción sensorial, con la cognitiva. En ese contexto, contó cuántas sillas podían colocarse en una mesa (etapa 1), en dos (etapa 2) y en tres mesas (etapa 3), reconociendo que serían cuatro, seis y ocho sillas respectivamente. Hasta aquí, manifiesta un pensamiento aditivo, basado en el conteo, que conecta con el significado de perímetro (Figura 26). Evidencia de esto último, es cuando indica “hay nomas 4 lados” “hay nomas 6 lados” “hay nomas 8 lados” (escribió “nomás” sin acento).


a. Si se te pide que coloques alrededor de ~~la~~ una mesa (figura 1) una silla en cada lado de ésta, ¿Cuántas sillas colocarás? 4 sillas Porqve hay noma 4 lados y caben 4 sillas

b. Si pones dos mesas cuadradas juntas (figura 2), ¿Cuántas sillas colocarás alrededor de la nueva mesa rectangular? 6 sillas Porqve hay nomas 6 lados. y caben 4 sillas

c. Si pones tres mesas juntas (figura 3), ¿cuantas sillas colocarás alrededor de las mesas? 8 sillas Porqve hay nomas 8 lados y caben 8 sill

Figura 26. Estrategia de conteo evidenciada por E9 para las etapas dadas de la sucesión.

E9 manifiesta estrategias de conteo diferenciadas en las figuras de las etapas dadas. En la primera, contó uno a uno los lados del cuadrado de la mesa. En la dos, se apoyó de aspectos visuales, en el interés de reconocer, cuántas sillas se acomodan por mesa, por lo que consideró los lados visibles del contorno. Es así como reconoció que se acomodan 3 sillas en cada una, y al sumar, le resultó seis. En la etapa 3, las visualizó de la manera siguiente: tres sillas en la parte superior de la forma rectangular que resulta de unir las tres mesas, y tres de la parte inferior, mismas que sumó. Luego, sumó las sillas que se ubicarían en los extremos izquierdo y derecho. Es así, que obtuvo 8 sillas. Las estructuras que se reconocen son las siguientes:

En la etapa 1, la estructura es de la forma: $Sn = n + n + 2$, es aditiva constructiva no estándar. La relativa a la etapa tres, tiene la forma: $Sn = 3n + 3n$, multiplicativa constructiva no estándar. En la etapa tres, tiene la forma: $Sn = 2n + 2$, multiplicativa constructiva estándar. En todos los casos, n corresponde al número de etapa. La uno y dos, explican de manera adecuada el comportamiento del patrón figural de T1. La segunda, sólo la etapa en la que se ubica. Consecuentemente, construyó dos estructuras matemáticas verdaderas. Como veremos más adelante, son las que usa, en etapas consecutivas.

Se destaca que, en ninguna de las figuras que conforman las etapas dadas, evidenció en su hoja de trabajo, el uso de representaciones simbólicas y/o escritas. Lo llevó a cabo durante la explicación grupal, en la pizarra. En la Figura 27, se presenta una reconstrucción del modo de proceder de E9 en el conteo de las sillas, que se sustenta, tanto de los argumentos escritos en su hoja de trabajo (véase Figura 26), como los que usó en la pizarra, para explicar al grupo su modo de proceder.

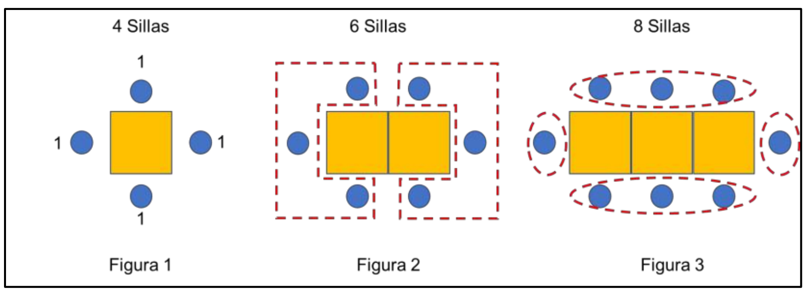


Figura 27. Diferentes formas de explicar las etapas dadas del patrón figural de la sucesión en T1.

En seguida, se muestra parte de las explicaciones verbales, que E9 presentó a sus compañeros de grupo, ante los cuestionamientos del profesor-investigador.

E9: …A la figura le fui viendo los extremos y le conté los dos lados… y luego, dije cuanto iba a ser… [Se refiere a la figura 1]
P: ¿Y en la otra? [Se le preguntó por la figura dos]
E9: … también… tres más tres suman seis y le escribo seis.
P: ¿Cuáles tres?... ¿Dónde están los tres? [La estudiante indica en la pizarra donde vio esos tres tomando como referencia la figura dos de la sucesión]… tres más tres, ella vio tres más tres, seis [lo menciona el profesor en voz alta para la clase]… ¿y en la otra? [Refiriéndose a la figura tres de la sucesión]
E9: En la otra… los tres acá [señalando la parte superior de la figura tres] y los tres de acá… [Señalando la parte inferior de la figura tres] son seis… más dos de los costados… son ocho
P: ¿Cuáles tres serían allí? [Figura tres]
E9: ¡Estos! [La estudiante señala los tres lados de las mesas tanto en la parte superior como la inferior de la figura tres]
P: ¿Y los dos de los extremos?

E9: [la estudiante se apoyó de lo gestual para indicar que son dos sillas. Refiere en particular a las de los extremos izquierdo y derecho. Las señaló con sus dedos].

Las inferencias establecidas por E9 hasta la etapa tres, se basaron en un **razonamiento inductivo**, producto de su trabajo con los casos involucrados. En ese proceso, se valió del lenguaje simbólico-numérico y el verbal-escrito. Y aun cuando evidenció que es un patrón creciente, a partir de los datos que obtuvo por etapa, se destaca que, en ninguna de sus explicaciones, esgrime cuánto crece el patrón figural de una etapa a otra. Esto es, no refiere de modo explícito al patrón de recurrencia.

Es en la etapa 20, que usó, a la vez que validó, la conjetura expresada en la etapa 3. Su forma de proceder se manifiesta en el siguiente fragmento, en la explicación grupal, bajo la dirección del profesor-investigador.

P: ¿Y para veinte? ¿Cómo le hiciste?
E9: Para el veinte… le copié veinte más veinte, cuarenta, pero nomás le había puesto el puro cuarenta y después cuarenta y dos [Procedió a escribir en la pizarra, cuarenta… más dos… es igual a cuarenta y dos]
P: ¿Esos veinte de que son? [Refiriéndose a la operación en la pizarra]
E9: Los veinte… son de los lados… de arriba y abajo
P: ¿Y el dos?
E9: … de los dos lados…

Las inferencias que estableció en esta etapa, fue mediante un **razonamiento abductivo**, refiriendo así a una regla directa con base en una estructura aditiva, que usó como sigue: "... para el veinte le copié veinte más veinte cuarenta, pero nomás le había puesto el puro cuarenta y después cuarenta y dos". Al expresarla en términos de una representación simbólica, $20 + 20$ lo hizo mediante la suma total (Figura 28).

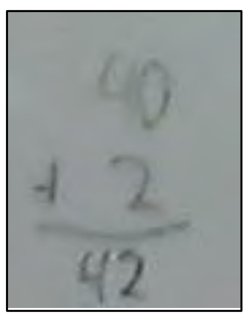


Figura 28. Fórmula directa que E9 validó en la etapa 20 de la sucesión.

A fin de profundizar en los procesos inferenciales desarrollados por el estudiante en esta tarea y de que extendiera la regla directa por medio de nuevas inferencias, se le cuestionó:

P: ¿Y si fueran cincuenta?
E9: Si fueran cincuenta pues no más serían cincuenta mesas…
P: ¿Cómo sería si usas esa misma idea que dices aquí?… ¿cómo sería?

E9: Aaah entonces cincuenta y cincuenta sumarían cien con los dos lados serían ciento dos
P: ¿Y si fuesen mil?
E9: Mil más mil… dos mil, y entonces sería dos mil dos

Mediante un proceso de acompañamiento del profesor-investigador, en estas etapas, E9 estableció nuevas conclusiones, verdaderas (reglas directas), a partir de otra verdadera. Consistió en la estructura aditiva constructiva no estándar que usó en la etapa 1. El proceso inferencial que manifestó, refiere a un **razonamiento de tipo deductivo**. Hasta este momento el estudiante recurrió al uso del lenguaje simbólico-numérico y verbal-escrito, para representar su forma de proceder. El lenguaje pictórico en su proceder en la discusión grupal (en la pizarra) no se evidenció para la etapa 20 de la sucesión.

Procesos cognitivos desarrollados por E9

Los procesos cognitivos en E9 en T1, se articularon a la percepción sensorial y cognitiva. En primer término, analizó las figuras de las etapas dadas. De ahí, infiere que debe ubicarse a analizar las formas rectangulares que resultan de unir mesas cuadradas. En seguida, coordinó su percepción sensorial con los significados y propiedades que conoce (percepción cognitiva), e infiere conclusiones acerca del número de sillas en las tres primeras etapas. El razonamiento que prevalece al trabajar con las etapas dadas es **inductivo**. Construyó tres conjeturas, una basada en la adición y dos en la multiplicación. La correspondiente a la etapa dos, es falsa, debido a que sólo explica el comportamiento del patrón en ella. En la etapa 20 validó la conjetura de la forma: $Sn = 2n + 2$, donde n es el número de etapa. En etapas posteriores a la 20, cercanas y lejanas, recurrió a la estructura $Sn = n + n + 2$, que construyó en la etapa 1. Ambas, conjeturas 1 y 3, las valida y usa, por medio de un proceso de acompañamiento del profesor-investigador. El razonamiento que usó es **abductivo**. Trabajó con etapas no consecutivas, cercanas y lejanas (etapas 50 y 1000), las que validó por medio de un proceso **deductivo**, constituyéndose ambas en reglas directas, también, mediante un proceso de acompañamiento del profesor-investigador.

En general, se apoyó del conteo, basándose en tres procedimientos que se manifiestan en las estructuras que construyó. En la primera, prevalece un pensamiento aditivo, en el resto, un pensamiento multiplicativo.

En general, se observó que el estudiante siguió un proceso cognitivo basado en la coordinación de significados, propiedades, representaciones, para inferir explicaciones. Los procesos inferenciales de abducción, inducción y deducción fueron fundamentales en la generalización del patrón en este estudiante, quien construyó dos reglas directas verdaderas, una basada en la adición y otra en la multiplicación.

Los aspectos visuales jugaron un papel importante en sus inferencias, en el trabajo con las etapas dadas, a la hora de expresar la forma de percibir las tres primeras etapas de la sucesión y de esa manera interpretar y explicar el comportamiento del patrón figural. Su nivel de abstracción evolucionó. Inicialmente, fue una percepción de tipo sensorial (formas rectangulares), que coordinó con la cognitiva, lo que le permitió establecer conjeturas, usar y validar al menos dos. Su proceso cognitivo demandó el uso del lenguaje verbal, el escrito, figural y simbólico. Las representaciones que conectó para organizar y coordinar sus ideas fueron fundamentalmente de tipo numérico y verbal-escrita. En cuanto a las representaciones que E9 empleó, la de tipo simbólico-numérico la usó en el desarrollo de T1 y para representar una fórmula directa para las etapas de la sucesión, expresándola como una operación aritmética. La verbal-escrita fue empleada tanto en la etapa individual como en la discusión grupal, con el fin de argumentar y justificar la cantidad de sillas en las diferentes etapas.

5.1.1.1.c. Estudiante 12

La forma en que E12 se involucró con el patrón figural de la sucesión, consistió en observar y analizar las figuras de las etapas dadas. Y más que "observar" mesas como le indicó la instrucción de la tarea, enfocó su atención hacia las formas rectangulares que componen los cuadrados al unirlos. En seguida, relacionó sillas con lados de los cuadrados que forman el perímetro de tales formas rectangulares. Aquí, su percepción es sensorial fundamentalmente. Luego, empezó a contar de uno en uno, los lados y a describir la cantidad de sillas que se colocan, tal como lo deja ver en su explicación. Así, reconoció que, en la primera, se colocan cuatro sillas, seis en la segunda y ocho en la tercera. Extractos de su entrevista en correspondencia con la Figura 29, muestra cómo se involucró con las etapas dadas del patrón figural, apoyándose del lenguaje simbólico.

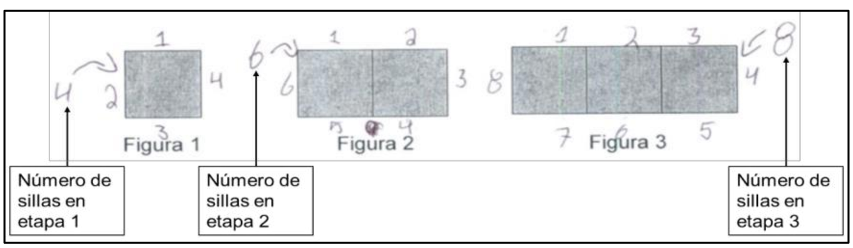


Figura 29. Representación de las sillas por E12 en las etapas dadas del patrón figural.

P: ¿Cómo le hiciste aquí? ¡Aquí! Porque veo que pusiste numeritos
E12: ¡Si! Es que tiene cuatro lados… uno, dos, tres y cuatro…
P: Ajá
E12: Entonces… sería… una silla, dos sillas,…
P: ¿Dos sillas?
E12: ¡No! Es que le puse números… así… uno, dos, tres,…
P: ¿Pero este qué es? ¿Este dos? [El profesor, pregunta por el número dos que colocó en el cuadrado de la primera etapa]
E12: ¡Es la segunda silla!
P: ¡una silla! ¡Sería una silla!
E12: ¡Una silla! Sería una, una, una y una. Pero son cuatro lados
P: ¡Ah! … ¿Y luego? ¿Entonces cuánto te dio cuando tienes una mesa?

E12: ¡Cuatro sillas!

Hasta aquí, la capacidad expresiva de E12 es mayoritariamente de naturaleza simbólica y verbal-escrita, que usa para explorar cuál es el comportamiento que sigue el patrón y para explicar el razonamiento que siguió.

Hasta la etapa tres, E12 utilizó la estrategia de conteo, apoyándose del lenguaje simbólico y verbal. A partir de ello, percibió un patrón figural creciente, de reconocer que la cantidad de sillas aumenta de una etapa a otra y que esa cantidad es invariante, por lo que infiere (conjetura) que va de dos en dos, la valida en la etapa tres, evidencia implícita de que identifica una regla local (patrón de recurrencia), como se muestra en parte de la entrevista.

P: ¿Y cuando tienes dos juntas?
E12: Se suman dos… porque aquí hay cuatro… uno, dos, uno, dos, tres, y cuatro… pero… se sumaron otros dos… cinco y seis.
P: ¿Y luego?
E12: Aquí se sumaron otros dos… uno, dos, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete y ocho.
P: ¿que se suman dos? ¿Eso es lo que observaste?
E12: Ajá

Además, expresa por escrito el incremento, a partir de su respuesta a la cuestión que le plantea el inciso d, sobre la relación que observa entre la cantidad de mesas y sillas (Figura 30).

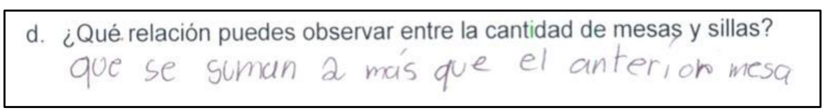

d. ¿Qué relación puedes observar entre la cantidad de mesas y sillas?
que se suman 2 más que el anterior mesa

Figura 30. E12 establece una regla local.

Es de su análisis a los casos particulares o etapas dadas, que E12 infiere que el patrón figural crece de dos en dos. Explica esta regularidad, con base en un conjunto de observaciones, tal como lo señala Aliseda (2006). Este proceso inferencial, manifiesta un **razonamiento inductivo**. Por cuanto al razonamiento que siguió para validar la conjetura local, fue de tipo **abductivo**, al recurrir a un producto acabado.

Ante la cuestión del número de sillas que se colocan en 20 mesas cuadradas (en etapas cercanas, no consecutivas), E12 recurrió al lenguaje pictórico y verbal-escrito. En ese contexto, primero representó las 20 mesas cuadradas, unidas. Luego representó las sillas, por medio de líneas verticales, que colocó en el orden siguiente: una en la parte superior del lado de uno de los cuadrados y otra en el inferior y al final, las dos de los extremos (véase 1 en Figura 31). A la vez que las representaba, verbalizaba: aquí hay una silla, aquí otra, aquí otra. Una vez hecho esto, contó de dos en dos, le resultó 40 (véase 2 en Figura

31), al que le sumó las dos sillas de los extremos y le dio un total de 42 sillas (véase 3 en Figura 31).

Recurrió al lenguaje verbal-escrito para explicar en su hoja de trabajo, su forma de proceder en el conteo de las sillas (véase 1, 2 y 3 en Figura 31).

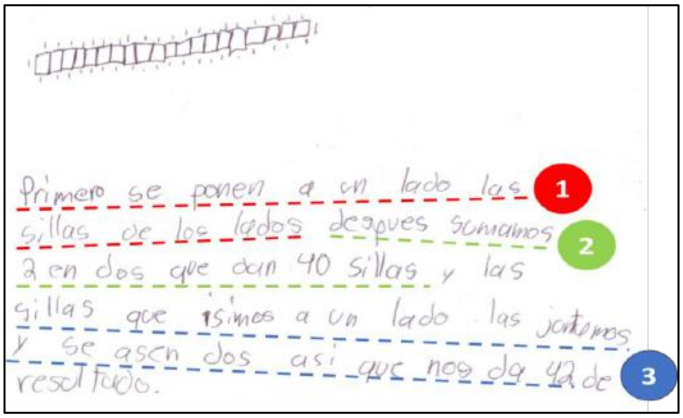


Figura 31. Lenguaje pictórico y verbal usado por E12 para interpretar y explicar su razonamiento en la etapa 20 de la sucesión.

La estrategia que siguió aquí E12, exhibe que vio pares de sillas alrededor de las mesas, que crecieron de acuerdo con el número de etapas. Este es el comienzo de un pensamiento de tipo multiplicativo, tal como lo establece Rivera (2013), y que se manifiesta en este estudiante. Una manera gráfica de explicar este razonamiento, se reconstruye por medio de la Figura 32, que refiere a la etapa 3.

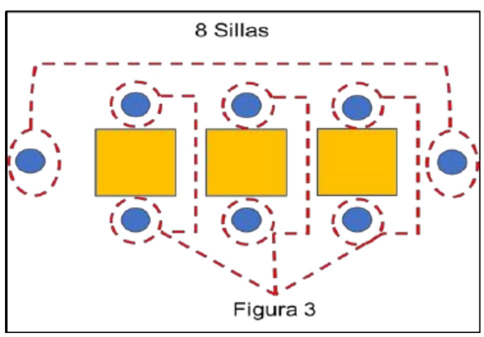


Figura 32. Comienzo del pensamiento multiplicativo de E12. Reconstrucción desde lo figural de la manera de proceder.

A partir de este razonamiento, se le preguntó a E12, por otra manera de explicar cómo “contar” las sillas. Después de un proceso de reflexión, construyó una estructura deconstructiva, aditiva. La cual se infiere de su forma de proceder: Sumó el número de sillas que se colocan en el extremo superior del rectángulo que forman las mesas unidas, con las del extremo inferior. Al resultado, le sumó dos, que corresponden a las mesas de los extremos. Esto es: $2 + 2 + 2 = 6$. Véase extractos de la entrevista y Figura 33.

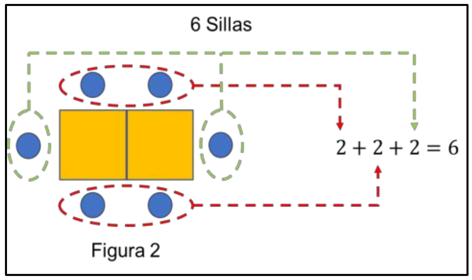


Figura 33. Reconstrucción de la forma de proceder desde lo figural de E12 para su segunda estrategia de conteo.

Más adelante reconoció que en lugar de “sumar”, puede apoyarse de la multiplicación, pues tiene claro que es una forma sintética de expresar la estructura aditiva en la que se apoyó. Es así como el número de sillas de la parte superior e inferior, la expresa como en la Figura 34, y luego afirma, “y le sumamos dos”. Esta expresión matemática, se constituye en una fórmula directa para una etapa en particular del patrón figural, para este caso la etapa 20.

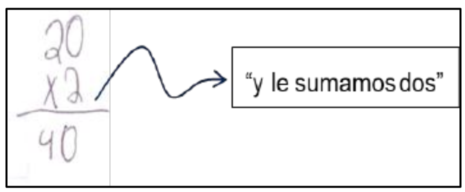


Figura 34. Fórmula directa establecida por E12 para la etapa 20 de la sucesión.

El razonamiento que siguió E12 para validar su conjetura (o regla local), es de tipo **abductivo**. Este tipo de razonamiento se articula a un proceso en el que se explica un producto acabado, en este caso, la regla expresada en lenguaje común, por medio de la suma, y que sintetizó por medio de una estructura multiplicativa (Figura 34).

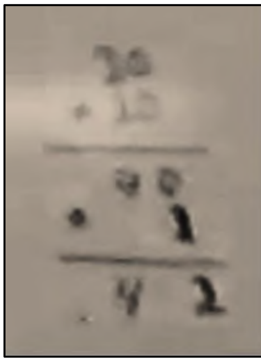
A fin de profundizar en los procesos inferenciales desarrollados por el estudiante en esta tarea y de que extendiera la regla directa por medio de nuevas inferencias, se le cuestionó:

P: ¿Cuántas sillas se colocarían alrededor de 100 mesas cuadradas, juntas?
E12: Serían… Cien por dos más dos… me da doscientos dos
P: ¿Y en doscientas?
E12: ¡Cuatrocientos dos!

Es así como E12 estableció nuevas conclusiones (de reglas directas), verdaderas, a partir de otra verdadera, la de tipo constructiva. El proceso inferencial que manifiesta refiere a un razonamiento de tipo **deductivo**.

En otro momento, se le pidió que explicara a sus compañeros en la pizarra, el razonamiento que siguió en su hoja de trabajo, en la etapa 20. Recurrió al uso del lenguaje simbólico, pictórico y al verbal-escrito, para representar y contar mesas y sillas respectivamente. Aquí, manifestó dos formas de percibir el comportamiento del patrón figural.

Caso 1:
La primera, es equivalente a la expresada en la hoja de trabajo (Figura 31) y evidenció una fórmula directa como en la Figura 34 (véase Figura 35), su explicación fue de forma verbal.



$$\begin{array}{r} 20 \\ +\,20 \\ \hline 40 \\ +2 \\ \hline 42 \end{array}$$

Figura 35. Reconstrucción de la regla directa expresada por E12 para explicar el comportamiento del patrón figural en la etapa 20.

Caso 2:
La segunda forma de percibir el comportamiento del patrón figural en la etapa 20, emergió por un proceso de acompañamiento llevado a cabo por el profesor-investigador, quien reconoció que E12 había reflexionado de dos maneras el comportamiento del patrón figural. Sin embargo, abandonó esta segunda, que consistió en lo siguiente:

Primero “aisló” las tres sillas que se ubican en las mesas de los extremos. Luego, contó de dos en dos, las sillas restantes que se ubican en el extremo superior y en el inferior, de ello le resultó 36. En la pizarra, lo representó por medio de una estructura multiplicativa, a este producto (36), le sumó seis, que corresponden a las sillas de las mesas de los extremos. Esta cantidad, la obtuvo de multiplicar el número de sillas de cada una de esas mesas, por dos (véase Figura 36). Se reconstruye esta forma de proceder, en la Figura 37.

Figura 36. Regla directa para caso 2 de E12. Etapa 20. Producción en la pizarra.

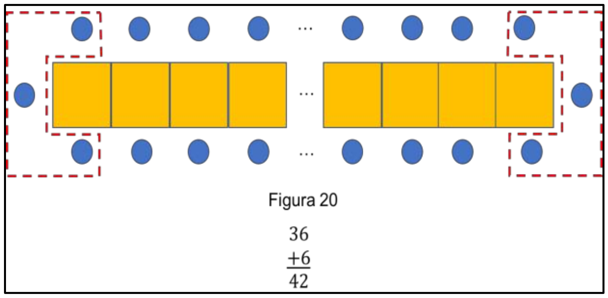


Figura 37. Reconstrucción de la forma de proceder desde lo figural de la regla directa para caso 2 de E12. Etapa 20.

Procesos cognitivos desarrollados por E12

Se reconocieron procesos cognitivos diferentes en E12 mientras trabajó con T1. Inicialmente, manifestó una percepción de tipo sensorial, al percibir formas rectangulares, de ahí que focalizó su atención en el contorno (perímetro) de la figura rectangular que forman las mesas cuadradas, al unirlas. Siguió un proceso cognitivo basado en la coordinación de significados, propiedades, representaciones, para inferir explicaciones. Es así como contó una a una las sillas en cada etapa. Al trabajar con los casos particulares o etapas dadas, con base en el conteo, infirió una regla local, de reconocer que el número de sillas aumenta de dos en dos de una etapa a otra (patrón recursivo). Aquí, su razonamiento fue de tipo inductivo.

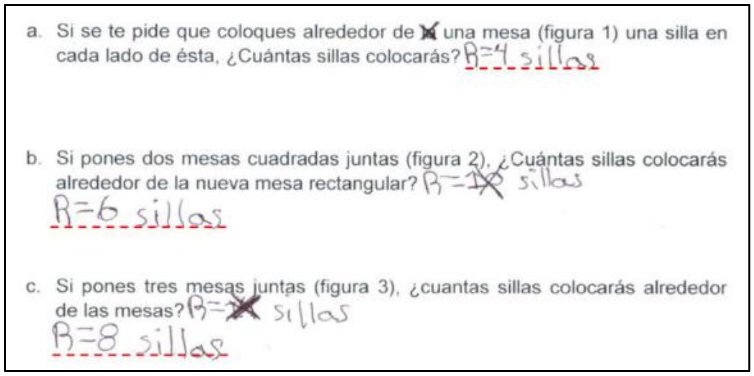
Es en etapas lejanas, que centró su atención en los pares de sillas que vio, los que sumó inicialmente, luego se apoyó de la multiplicación. Infirió una regla directa (conjetura) verdadera, que expresó a través de dos estructuras multiplicativas distintas (o generalizaciones), una fue de tipo constructiva, la otra deconstructiva. El proceso que siguió para validar ambas conjeturas fue de tipo abductivo. Debido a que sus explicaciones estuvieron centradas en un producto acabado (Aliseda, 2006), esto es, la conjetura que estableció a través de una estructura constructiva (Figura 35). La generalización tipo deconstructiva, la construyó por un proceso guiado por el profesor, y quedó a nivel de regla directa. También manifestó un razonamiento deductivo, al momento en que se le cuestionó por el número de sillas en etapas lejanas no consecutivas, superior a la etapa 20. Aquí, se apoyó de la generalización tipo constructiva (Figura 35), para determinar el número de sillas que se le demandó. Estableció nuevas conclusiones (de reglas directas), verdaderas, a partir de otra también verdadera. Las inferencias verdaderas que estableció se constituyen en etapas de validación de la regla directa.

Los procesos inferenciales de abducción, inducción y deducción fueron fundamentales para la generalización del patrón en este estudiante, quien manifestó dos estructuras multiplicativas diferentes (véase Figura 35 y Figura 36), ambas equivalentes y válidas, que se corresponden con la cantidad de mesas en relación con el número de etapa. En el primer caso, la estructura es de la forma: $S_n = 2n + 2$. En el segundo caso, de la forma $S_n = 2(n - 2) + 6$. La primera es de tipo constructiva, la segunda, deconstructiva.

Los aspectos visuales también jugaron un rol importante en sus inferencias, en diferentes momentos de su interpretación y explicación del comportamiento del patrón figural. Su nivel de abstracción evolucionó. Inicialmente, fue conteo, para dar lugar a inferencias que se sustentaron de la suma (patrón recursivo) y en la multiplicación (conjetura y su validación). Su proceso cognitivo demandó el uso del lenguaje verbal, el escrito, figural y simbólico. Las representaciones que conectó para organizar y coordinar sus ideas fueron de tipo pictórico, numérico y verbal-escrita principalmente. En cuanto a las representaciones empleadas por E12, fueron usadas en diferentes momentos, la pictórica, útil en la justificación del conteo inicial de las etapas dadas y la etapa 20 de la sucesión. La verbal-escrita fue empleada tanto en la etapa individual como en la discusión grupal, con el fin de argumentar y justificar la cantidad de sillas en las diferentes etapas (véase Figura 31 para un ejemplo, etapa 20). El sistema de representación numérico, E12 lo empleó en el desarrollo de T1 y al final para poder representar una fórmula directa para las etapas de la sucesión, expresándola como una operación aritmética (véase Figura 35, fórmula directa para etapa 20).

5.1.1.1.d. Estudiante 29

La forma en que E29 se involucró con el patrón figural de la sucesión en T1, consistió en observar y analizar las figuras de las etapas dadas. A partir de ello, se enfocó en las formas rectangulares que de algún modo reconoce de las mesas de cada figura en las etapas dadas. Lo que evidencia una percepción de tipo sensorial. Seguidamente, coordinó su percepción sensorial con lo conceptual, y ubicó su análisis en el contorno (o perímetro) de las formas rectangulares que reconoció en las tres primeras etapas. En ese contexto, contó cuántas sillas pueden colocarse en las mesas de las etapas uno, dos y tres. Reconoció, cuatro para la uno, seis y ocho sillas para la dos y tres respectivamente (véase Figura 38). Su estrategia de conteo fue diferente en la etapa 1 respecto de la 2 y 3. En la primera, contó de uno en uno. En la dos y tres, siguió una misma estrategia. Primero contó las del extremo superior con las del inferior de cada forma rectangular (o mesas unidas), luego, sumó las de los extremos izquierdo y derecho.


a. Si se te pide que coloques alrededor de una mesa (figura 1) una silla en cada lado de ésta, ¿Cuántas sillas colocarás? R=4 sillas

b. Si pones dos mesas cuadradas juntas (figura 2), ¿Cuántas sillas colocarás alrededor de la nueva mesa rectangular? R= sillas
R=6 sillas

c. Si pones tres mesas juntas (figura 3), ¿cuantas sillas colocarás alrededor de las mesas? R= sillas
R=8 sillas

Figura 38. Número de sillas para las tres primeras etapas de la sucesión según E29.

Se observó esta estrategia en la etapa 2, que infiere de reconocer una misma cantidad de sillas en la parte superior e inferior, luego, en los extremos derecho e izquierdo, constituyéndose en una conjetura. Valida su conjetura en la etapa 3, mediante un proceso **abductivo**. La estructura matemática que construye aquí es de la forma: $S_n = n + n + 2$, de tipo constructiva aditiva.

A fin de profundizar en los procesos inferenciales que siguió en las tres primeras etapas de T1, se le cuestionó durante una entrevista. Con ello fue posible, además, reconstruir su estrategia (Figura 39).

P: ¿Cómo fue en la figura dos? [Etapa dos de la sucesión]
E29: Agarré estos dos y estos dos [E29 señala las filas superior e inferior de dos sillas, que se pueden acomodar en los lados de arriba y abajo de la forma rectangular]… y le puse cuatro, y ya después no más estos dos [los dos lados de la derecha e izquierda donde se pueden acomodar una silla y una silla respectivamente]… me dieron seis
P: En la figura tres [etapa tres de la sucesión] ¿Cuánto serían?
E29: Serían… ¡ocho!
P: ¿Por qué?
E29: Porque, tres más tres son seis [una vez más señalando las dos filas de la parte inferior y superior] y con estas dos... [Señalando los dos espacios de la derecha e izquierda]

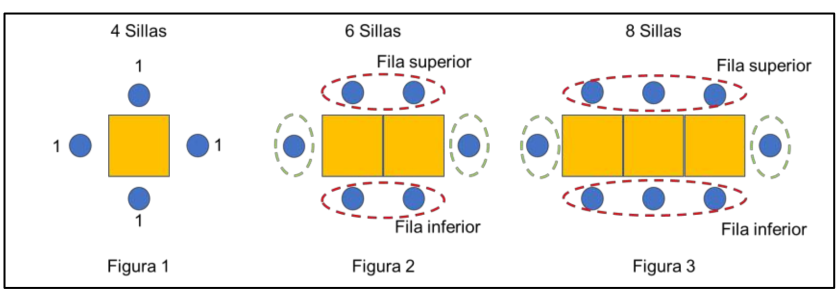


Figura 39. Reconstrucción figural de la forma de percibir las tres primeras etapas de E29.

Hasta las etapas dadas, el estudiante manifiesta un pensamiento aditivo, basado en el conteo, que conectó con el significado de perímetro, al sumar número de sillas mediante un conteo estratégico, según el número de lados visibles de las mesas cuadradas. Reconoció, además, que el patrón figural en T1 es creciente, incluso que, de una etapa a otra, la cantidad de sillas aumenta en 2 (patrón recursivo). Con ello, evidencia que infiere una regla local, la cual valida en la etapa tres. Su razonamiento en este proceso fue de tipo **inductivo**. Muestra de ello, es su respuesta a la pregunta sobre la relación que observa entre la cantidad de mesas y sillas. Su respuesta, consistió en que: "cada vez va aumentando…" (Véase 1 en Figura 40).

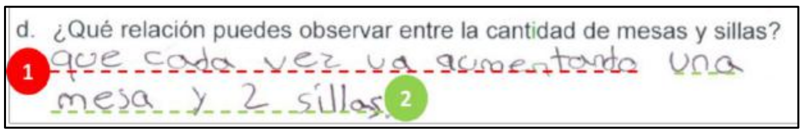

d. ¿Qué relación puedes observar entre la cantidad de mesas y sillas?
1 que cada vez va aumentando una mesa y 2 sillas 2

Figura 40. Relación que establece E29 entre el número de mesas y sillas.

Para responder a la cuestión de cuántas sillas se colocan en 20 mesas juntas, a E29, en un primer momento le resultaron 24 sillas. Ello, de representar en su hoja de trabajo, dos grupos de diez mesas juntas cada uno. A partir de ello, recurrió al conteo estratégico, tal como lo hizo en las etapas dos y tres. Sólo que, su conteo, lo realizó únicamente sobre las sillas que se colocarían en el primer grupo de mesas juntas, al resultado, le sumó las dos de los extremos derecho e izquierdo, del segundo grupo de diez mesas juntas. De ello, le resultaron 22 del primer grupo y 2 del segundo, y obtuvo un total de 24 sillas.

Fue posible comprender el razonamiento que siguió el estudiante en este momento de su actuación sobre la etapa 20 (descrito en renglones previos), a partir de los cuestionamientos del profesor-investigador. Se describe en seguida, los extractos de la entrevista. Con ello fue posible, además, reconstruir su estrategia (Figura 41).

P: Si tienes veinte mesas cuadradas acomodadas de forma lineal ¿cuántas sillas colocarías alrededor?
E29: Veinticuatro
P: ¿Cómo le hiciste para saber?... ¿hiciste las figuras? ¿Y a ver cómo le contaste?
E29: Conté… como aquí me dio diez… diez más diez serían veinte… y ya estos dos los sumo [refiriéndose a los espacios de la derecha y de la izquierda]
E29: Primero los de arriba [refiriéndose a la fila de sillas de la parte superior]…
P: ¿Y cuántas son arriba?
E29: Son diez [sillas]
P: ¿y luego?… ¿después qué hiciste?
E29: Como aquí eran diez [fila superior] me salió igual aquí la cantidad [refiriéndose a las sillas de la fila inferior de la figura] y ya después le sumé este [las dos sillas de los extremos derecho e izquierdo]… y ya no más le sumé los dos de los lados
P: Si lo pusieras con números ¿cómo lo harías? en lugar de letras… eso que estás diciendo aquí [el profesor-investigador señala lo que acaba de decir E29]
E29: Diez más veinte…
P: Diez… ¿más qué?
E29: Diez más diez… más cuatro
P: ¿Por qué?
E29: ¡Más dos! [Corrigiendo lo que dijo anteriormente]
P: Pero aquí ¿cuántos serían?

E29: Diez más diez, más dos más dos

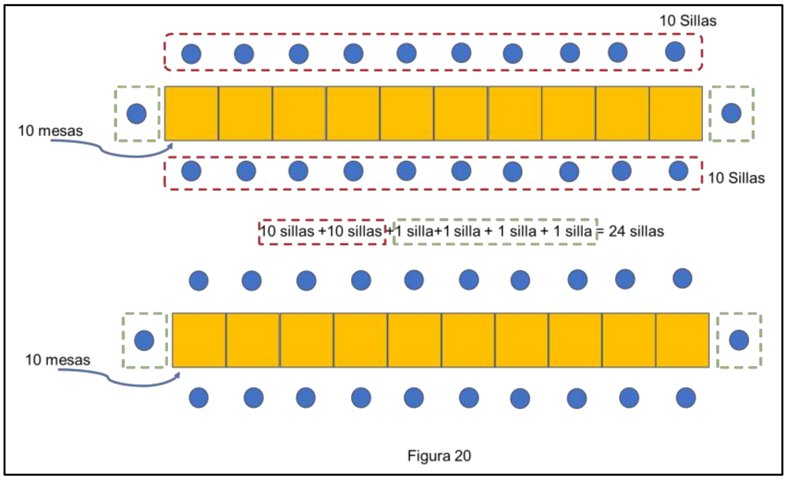


Figura 41. Reconstrucción desde lo figural de lo realizado por E29 en la hoja de trabajo en el primer momento de la etapa 20 de la sucesión.

En un proceso de acompañamiento, durante la entrevista, el profesor-investigador desafió al estudiante a representar las veinte mesas juntas, a fin de que validara si resultan 24 como indicó inicialmente.

P: Aquí… tu pusiste las mesas así… y no están alineadas… si fueran las veinte deberías tener las veinte en una sola línea… hazlas en una sola línea para que compruebes eso.

E29: Sí, no más que no me entró

El estudiante aceptó el desafío y procedió a representar las 20 mesas juntas (véase 1 en Figura 42), luego recurrió a la estrategia de conteo que usó en las etapas dos y tres. Esto es, contó el número de mesas del extremo superior, con las del inferior y las sumó, seguidamente, sumó las del extremo derecho con las del izquierdo. Se apoyó del lenguaje escrito para describir el razonamiento que siguió (véase 2 en Figura 42) y del numérico para expresar la suma (véase 3 en Figura 42).

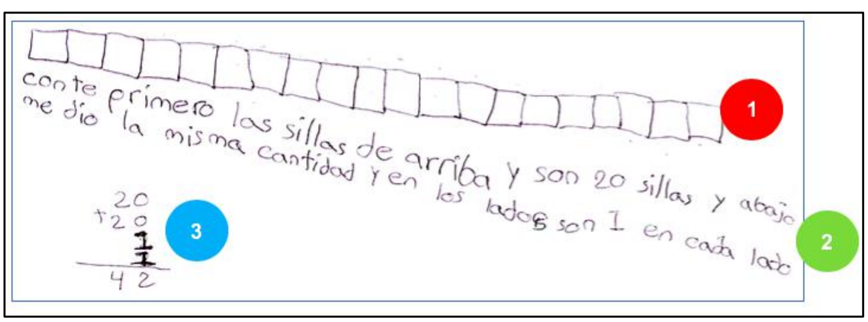


Figura 42. Forma de proceder de E29 en la etapa 20, ante el desafío del profesor-investigador.

El proceso inferencial que siguió en este segundo momento el estudiante, al trabajar con la etapa 20, fue de tipo deductivo, propio de una validez más formal. Que, en esta etapa de formación en estudiantes de primaria, se basa en el uso de una regla verdadera en etapas lejanas. La estructura matemática que infiere aquí es de la forma: $S_n = n + n + 1 + 1$, de tipo deconstructiva aditiva, y que construyó y validó en las etapas 2 y 3 respectivamente.

A fin de contribuir en una mejor comprensión de la inferencia que estableció E29 en esta tarea, y de favorecer el cambio de contexto por el estudiante, el profesor-investigador continuó con el proceso de acompañamiento, apoyándose de preguntas:

P: ¿Si tuvieras cincuenta?... Cincuenta mesas juntas ¿cómo sería? [Etapa 50]
E27: Cincuenta arriba y cincuenta abajo… y una a los lados
P: ¿Cuánto sería?
E29: ¡Cincuenta y dos!... ¡no!... ¡ciento dos!
P: ¿Ya te fijaste cómo es posible hacerlo?… ¿y si tuvieras mil?
E29: Mil… dos mil… dos mil dos
P: ¿Por qué dos mil dos?
E29: Arriba igual y abajo también…
P: Entonces… ¿tendrías que dibujar las mil mesas?
E29: ¡No!... ¡ya no más! … ¡este! [Señala la expresión que construyó para la etapa 20]

Mediante un proceso de acompañamiento del profesor-investigador, en estas etapas, E29 cambió su análisis del contexto figural a uno estructural, basado en el significado de la suma. Es así como estableció nuevas conclusiones, verdaderas (reglas directas), a partir de otra verdadera. Consistió en la estructura aditiva deconstructiva no estándar que percibió desde las etapas dos y tres de la sucesión. El proceso inferencial que manifestó refiere a un **razonamiento de tipo deductivo**. Hasta este momento (etapas lejanas) el estudiante recurrió al uso del lenguaje simbólico-numérico y verbal-escrito, para expresar su forma de proceder.

Procesos cognitivos desarrollados por E29

Los procesos cognitivos de E29 en T1, se articularon a la percepción sensorial y cognitiva. En primer término, analizó las figuras de las etapas dadas. De ahí, infiere que debe ubicarse a analizar las formas rectangulares que resultan de unir mesas cuadradas. En seguida, coordinó su percepción sensorial con los significados y propiedades que conoce (percepción cognitiva), e infiere conclusiones, las siguientes:

1. La *relación de recurrencia*. La infiere, de contar cuántas sillas se colocan de la mesa uno a la dos, de la dos a la tres. De la etapa uno a la dos, reconoce que aumenta en dos y establece así, una regla local (conjetura), que valida en la etapa tres, al comprobar que se mantiene esa cantidad. El razonamiento que siguió aquí fue de tipo **inductivo**, al trabajar con los casos particulares y de tipo **abductivo**, por el proceso que sigue para validar la conjetura local.

2. La *estructura matemática plausible*. Estableció una estructura matemática válida (o regla directa) la cual explica el comportamiento del patrón figural en etapas cercanas y lejanas, esto es, infiere una regla general. La infiere en la etapa dos (conjetura) y la valida en la tres, mediante un proceso **abductivo**. Infiere aquí dos estructuras matemáticas, una de la forma: $S_n = n + n + 2$, de tipo constructiva aditiva, y que construyó y validó en las etapas 2 y 3 respectivamente. La otra, de la forma: $S_n = n + n + 1 + 1$, de tipo deconstructiva aditiva. Las estructuras, las deriva de un conteo estratégico, que usó de manera coherente y consistente en el trabajo con etapas cercanas no consecutivas y lejanas. En etapas lejanas sus inferencias son de tipo **deductiva**, que se sustentan de conclusiones válidas para obtener otras verdaderas. Es en estas etapas en que expresa la estructura matemática a través de una operación aritmética, la suma.

En general, el estudiante E29 se apoyó del conteo, prevaleciendo en su proceder un pensamiento aditivo. Además, se observó que siguió un proceso cognitivo basado en la coordinación de significados, propiedades, representaciones, para inferir explicaciones.

Los procesos inferenciales de abducción, inducción y deducción fueron fundamentales en la generalización del patrón en este estudiante, tanto en la etapa de formulación, validación y extensión de la conjetura, llevándola de una regla local a una fórmula directa.

Los aspectos visuales jugaron un papel importante en sus inferencias, en el trabajo con las etapas dadas, a la hora de expresar la forma de percibir las tres primeras y cómo estructurar y organizar las sillas en los lados de las figuras y de esa manera interpretar y explicar el comportamiento del patrón figural. Su nivel de abstracción evolucionó. Inicialmente, fue una percepción de tipo sensorial (formas rectangulares), que coordinó con la cognitiva, lo que le permitió establecer una conjetura, que empleó de forma consistente durante el trabajo con T1. Su proceso cognitivo demandó, fundamentalmente el uso del lenguaje figural, apoyándose del verbal, el escrito, y simbólico. Las representaciones que conectó para organizar y coordinar sus ideas fueron fundamentalmente de tipo pictórico, por lo que mantuvo su análisis en el contexto del problema. Se requirió de un proceso de acompañamiento, para que transitara del pictórico al estructural, que acompañó del lenguaje verbal, lo que favoreció, su evolución en el nivel de abstracción.

El contexto figural, si bien favorece el que los estudiantes construyan de manera más rápida una estructura matemática plausible que explique su comportamiento, en etapas lejanas se constituye en un obstáculo, por las dificultades asociadas al conteo y a representar las figuras de los patrones en estudio.

5.1.1.1.e. Estudiante 30

Luego de la lectura del profesor a la tarea, E30 analizó las etapas dadas, a fin de dar respuesta a los cuestionamientos. Trabajó en el contexto del problema (en lo figural), en el sentido de que representó de nueva cuenta las figuras de las etapas dadas. Seguidamente, representó las sillas en el contorno de las mesas juntas. Se reconoce aquí que percibe las formas y las relaciona de manera implícita con el perímetro. Es evidente que el estudiante tenía claridad que debía situarse en el contorno de la forma rectangular que resulta de unir las mesas. Aquí, su percepción es de tipo sensorial.

A la vez que representaba las sillas, las contó. En este proceso, coordinó el lenguaje verbal-escrito y el simbólico-numérico, así como representaciones pictóricas (incisos a y b en Figura 43). Utilizó dos estrategias de conteo. En la primera, contó de uno en uno, evidenciando así el inicio de un pensamiento aditivo.

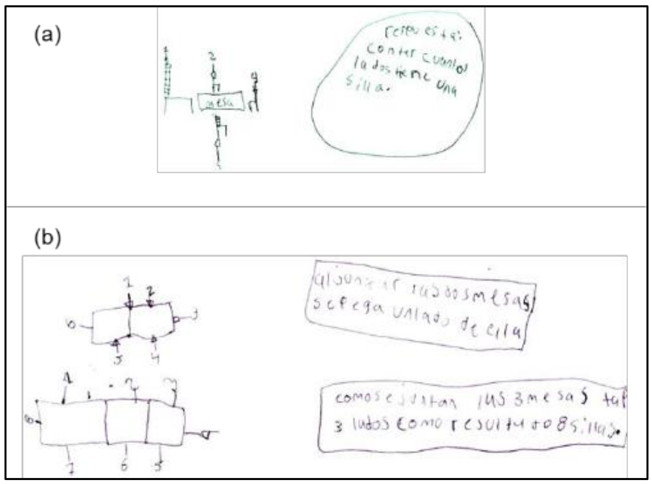


Figura 43. Representación de E30, de las sillas en las etapas dadas en T1.

La segunda forma de conteo la utilizó en la etapa dos. Consistió en sumar el número de sillas que se colocan en el extremo superior del rectángulo que forman las mesas unidas, con las del extremo inferior. Al resultado, le sumó dos, que corresponden a las mesas de los extremos. Esto es: $2 + 2 + 2 = 6$. Véase extractos de la entrevista, a través de la cual se reconstruye su forma de proceder (Figura 44).

E30: En la b [refiere al inciso de la tarea que le pregunta por el número de sillas cuando hay dos mesas juntas]… vi que, si juntamos la mesa, quedan pegados estos dos lados. Así que quedan como resultado seis lados.

P: ¿Cómo supiste que son seis?

E30: Porque conté estos [señala los dos lados de los cuadrados que quedan en la parte superior del rectángulo que se forma al unir las dos mesas] así que me da dos, más estos [señala los dos lados de los cuadrados de la parte inferior de la forma rectangular] dos, me da cuatro y estos, serían seis.

La forma de proceder de E30 en la etapa 2, da cuenta de una estructura aditiva constructiva, de la forma: $S_n = n + n + 2$. Esta estructura, se constituye en una conjetura (regla local).

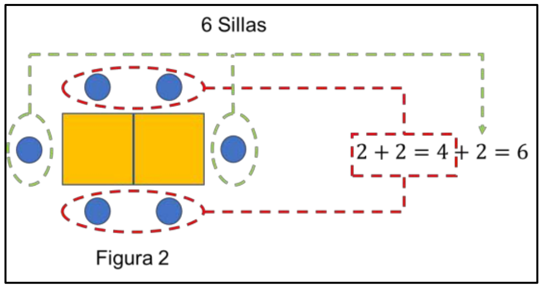


Figura 44. Reconstrucción desde lo figural de E30 de su forma de proceder.

Es en la etapa siguiente que valida su conjetura, al usarla para determinar el número de sillas que le demandan. Se reconoce en este proceso, un **razonamiento abductivo** (véase extractos de entrevista). Es así como construye una regla directa o generalización.

P: ¿Y acá?
E30: ¡Hice lo mismo! Aquí son tres, tres son seis… y aquí…los dos… son ocho
P: Y entonces aquí, cuando dijiste son tres y tres, ¿qué hiciste?
E30: ¡Una suma!
P: Sumaste lo de arriba con lo de…
E30: ¡Abajo!
P: ¿Y luego?
E30: Lo de los lados
P: ¿Y eso cuánto te dio?
E30: Me dio como resultado 8

A fin de profundizar en los procesos inferenciales desarrollados por el estudiante en esta tarea y de que extendiera la regla directa por medio de nuevas inferencias, se le cuestionó:

P: ¿Y en la de…veinte cuánto sería? [Etapa 20]
E30: cuarenta y dos sillas
P: ¿Por qué?
E30: Porque… si contamos, que son veinte de aquí y veinte de acá, son cuarenta… ¡y dos! … ¡son cuarenta y dos!
P: ¿Y si fueran cien?
E30: ¡Serían doscientos dos!

El estudiante evidencia en este proceso, un **razonamiento deductivo**, al extender el uso de la regla que construyó, para determinar el número de sillas en etapas lejanas.

Se reconoce que el estudiante mantiene una estructura aditiva para explicar el comportamiento del patrón figural. Asimismo, que en ningún momento enfatizó acerca de cuánto "crece", sin que signifique el que haya dejado de percibir que es un patrón creciente, simplemente omitió expresarlo en sus representaciones tanto verbales como escritas. La pregunta del inciso d, demandó implícitamente, que manifestara este hecho, al cuestionarle sobre la relación entre la cantidad de mesas con el número de sillas. Su respuesta aludió a que se trata de una sucesión.

Procesos cognitivos desarrollados por E30

La percepción inicial en E30 es sensorial, producto de percibir formas rectangulares, que resultan de las sillas que se unen. De ahí infiere que debe ubicarse a colocar sillas sobre el contorno de estas formas. Es así, que establece sus propias representaciones, de mesas y sillas de esas tres etapas. Para dar respuesta a los cuestionamientos se apoyó de dos estrategias. Una basada en el conteo (etapas dadas), otra, que se sustenta de una estructura aditiva, que usa en la etapa 2, la que infiere de analizar al menos dos de los casos particulares que se le dan. Hasta aquí, su **razonamiento es de tipo inductivo**. La estructura aditiva se constituye en su conjetura (regla local), que usa en la etapa tres para determinar el número de sillas que se le demanda. Este proceso inferencial se sustenta de un **razonamiento abductivo**, que es producto del uso de la conjetura que construyó en la etapa 2.

También manifestó un **razonamiento deductivo**, al momento en que se le cuestionó por el número de sillas en etapas lejanas no consecutivas, particularmente, de la etapa 20 en adelante. Utilizó una conclusión válida para derivar conclusiones válidas. En este caso, regla directa que validó en la etapa 3, la cual se corresponde con una generalización aditiva tipo deconstructiva, de la forma: $S_n = n + n + 2$.

El proceso inferencial que siguió E30 en las dos estrategias, son evidencia de su percepción cognitiva, en la que coordinó el significado de la suma, lo representacional y el lenguaje verbal-escrito. Los aspectos visuales jugaron un rol importante en sus inferencias inductivas, abductivas y deductivas, en diferentes momentos de su interpretación y explicación del comportamiento del patrón figural. En todo momento manifestó que su razonamiento involucró a las dos variables, número de figura y sillas, y que en ningún momento estableció el patrón de recurrencia. Con base en la estructura que construyó, se reconoce un pensamiento de tipo aditivo.

5.1.1.1.f. Estudiante 31

Luego de la lectura de la tarea por parte del profesor-investigador al grupo, E31 se enfocó en responder los cuestionamientos. En ese contexto, representó nuevamente las mesas, luego las sillas (ver Figura 45). Se evidencia en su producción escrita que el estudiante se sitúa en el perímetro de la mesa (para la etapa 1), y en el de las formas rectangulares que se construyen al unir dos y tres mesas (etapa 2 y 3). Para E31, es claro que se debe centrar en el contorno de las figuras de las tres primeras etapas, debido a que hay espacios o lados de las mesas, que según el contexto de la tarea se "pierden" al unir dos o más mesas (etapa dos en adelante) en forma lineal (véase Figura 46). Al observar esta situación, el estudiante hace uso de una forma de percepción sensorial y al conectar esta percepción con el significado de perímetro, evidencia una percepción de tipo cognitiva que luego coordina con un pensamiento aditivo basado en un conteo para indicar el número de sillas que puede acomodar en las tres primeras etapas (etapas dadas). De esta manera logra identificar, que para la etapa uno (una mesa), se ubican cuatro sillas, para la etapa dos (dos mesas), se pueden acomodar seis sillas y para la etapa tres (tres mesas), se acomodan ocho sillas en el contorno (ver Figura 47).

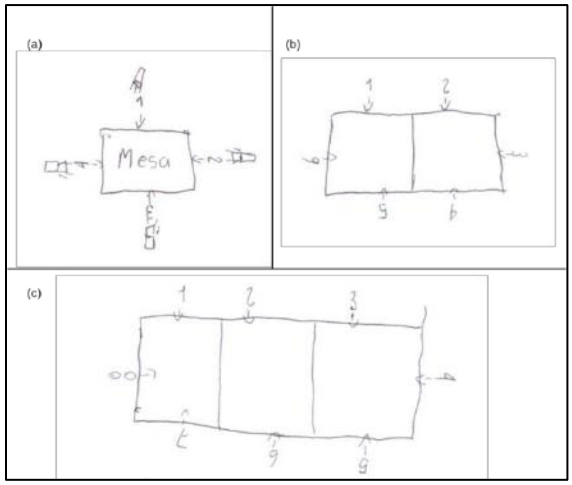


Figura 45. Representación de las sillas y mesas en las etapas 1, 2 y 3 por E31 en T1.

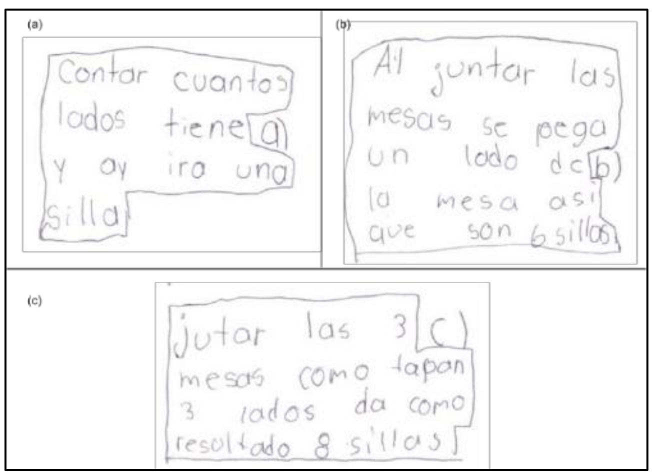
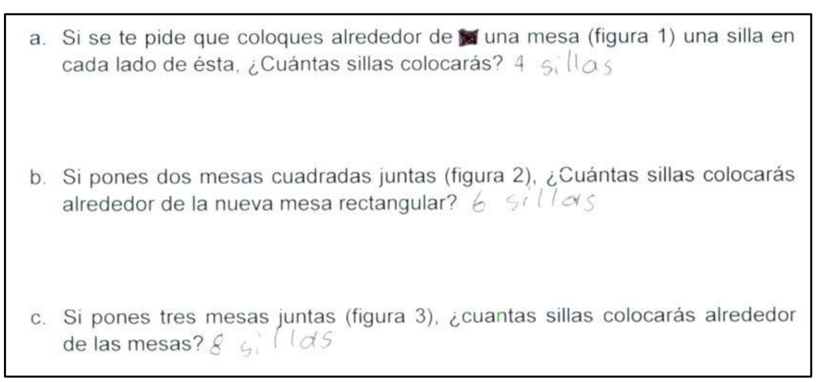


Figura 46. Justificación escrita de E31 para el número de sillas en las tres primeras etapas.



a. Si se te pide que coloques alrededor de [redacted] una mesa (figura 1) una silla en cada lado de ésta, ¿Cuántas sillas colocarás? 4 sillas

b. Si pones dos mesas cuadradas juntas (figura 2), ¿Cuántas sillas colocarás alrededor de la nueva mesa rectangular? 6 sillas

c. Si pones tres mesas juntas (figura 3), ¿cuantas sillas colocarás alrededor de las mesas? 8 sillas

Figura 47. Respuestas de E31 a las tres primeras cuestiones de T1.

En el trabajo con las etapas dadas, evidenciado en la hoja de trabajo de E31, coordinó el lenguaje verbal-escrito (incisos a, b y c en Figura 46) y el simbólico-numérico (ítems a, b y c de la Figura 47), así como representaciones pictóricas (incisos a, b y c en Figura 45), donde E31 evidencia una coordinación entre su proceso de percepción sensorial y cognitiva.

En las etapas uno, dos y tres se apoya del conteo para determinar la cantidad de sillas que se acomodan, pero su razonamiento evoluciona al ir de un pensamiento aditivo a uno multiplicativo en las etapas uno y dos de la sucesión. El siguiente fragmento de la discusión grupal, respalda lo dicho:

E31: yo solamente le multipliqué… aquí me dio que es el resultado uno [refiriéndose a la cantidad de mesa para la etapa 1], así que multipliqué uno por cuatro y me dio el resultado de cuatro
P: haber anótale [el profesor-investigador, le demanda que escriba en la pizarra la operación que expresó verbalmente]
E31: aquí en la siguiente figura [figura dos (etapa dos de la sucesión)], noté que estos eran dos [haciendo referencia a los dos lados de arriba de la figura], así que simplemente multipliqué dos por dos y me dio el resultado de cuatro, más el de los extremos serían seis
P: haber hazlo [una vez más el profesor-investigador demanda que escriba la operación que expresó de manera verbal]…

Por su parte, en la etapa tres se mantiene en un pensamiento aditivo, el cual representa mediante una adición, la expresión de la cantidad de sillas para esta etapa en particular. Esta acción se evidencia en la etapa de discusión grupal en la pizarra. Véase fragmento de la discusión grupal.

P: … ¿y en la otra? [Figura tres (etapa 3 de la sucesión)]
E31: en la otra, arriba eran tres y sumé, tres más tres igual a seis, más los dos de los extremos [derecho e izquierdo], me dio como resultado ocho
P: haber hazla [de nuevo se le demanda la operación]…

En ese contexto, es en la etapa tres del patrón donde E31, logra establecer su conjetura (o regla local), haciendo uso de un pensamiento y estructura aditiva. Evidencia de esto último es lo expresado en la discusión grupal en la pizarra (fragmento anterior). La Figura 48, presenta una reconstrucción desde lo figural de la forma de proceder de E31 en el establecimiento de su conjetura.

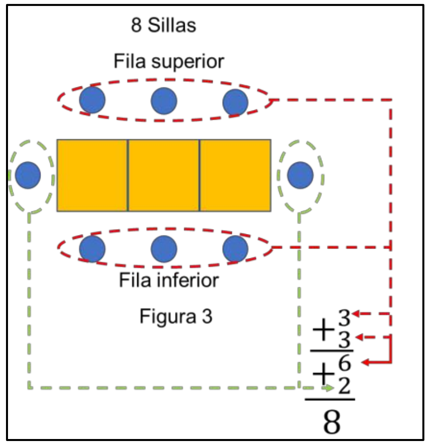


Figura 48. Reconstrucción desde lo figural de la forma de proceder en la etapa 3 de T1 y establecimiento de la conjetura.

Hasta aquí, la capacidad expresiva de E31, involucra el lenguaje pictórico, verbal-escrito y simbólico, que usa para comprender el comportamiento que sigue el patrón y para explicar el razonamiento que siguió.

Hasta la etapa tres, E31 utilizó la estrategia de conteo, que posteriormente para algunas etapas la asoció a un pensamiento multiplicativo, apoyándose del lenguaje simbólico y verbal. A partir de ello, percibió un patrón figural creciente, de reconocer que la cantidad de sillas aumenta de una etapa a otra y que esa cantidad es invariante, por lo que infiere una regularidad entre las etapas del patrón, la cual es, que el patrón crece entre etapas consecutivas, de dos en dos. Además, lo enuncia por escrito, a partir de su respuesta a la cuestión que demanda la relación que observa entre la cantidad de mesas y sillas (Figura 49).

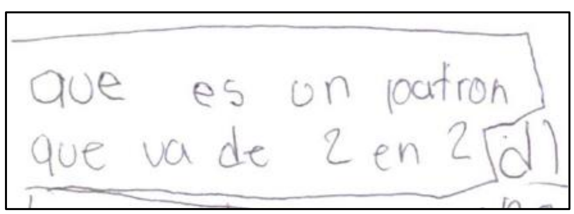


Figura 49. Relación entre el número de mesas y sillas observada por E31.

Las inferencias establecidas por E31 hasta la etapa tres, se basaron en un **razonamiento inductivo**, producto de su trabajo con los casos involucrados. En ese proceso, se valió del lenguaje simbólico-numérico y el verbal-escrito, además del pictórico. Y en ese contexto, evidenció que es un patrón creciente, a partir de los datos que obtuvo por etapa (Figura 47), además de cuánto crece el patrón figural de una etapa a otra (Figura 49).

Ante la cuestión del número de sillas que se colocan en 20 mesas cuadradas (en etapas cercanas, no consecutivas), E31 según lo que evidenció en su hoja de trabajo, recurrió al lenguaje pictórico y verbal-escrito. En ese contexto, primero representó las 20 mesas cuadradas, unidas. Luego, mediante un conteo indicó la cantidad de sillas que se pueden acomodar para la etapa 20 de la sucesión (Figura 50).

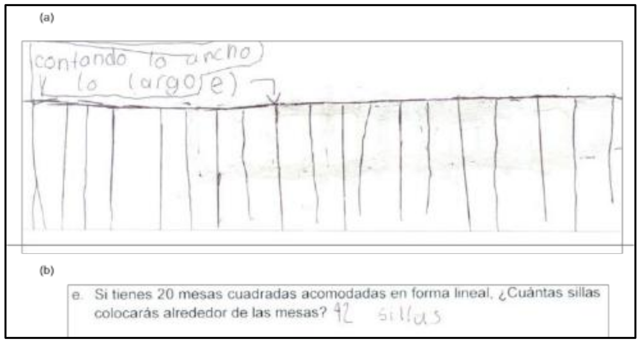


Figura 50. Trabajo en la producción escrita de E31 en etapa 20 de la sucesión en T1.

En la etapa de discusión grupal en la pizarra, E31 evidenció una evolución en su trabajo con T1, en ese momento, recurrió al lenguaje verbal-escrito y simbólico-numérico, para representar su proceder. El siguiente fragmento de discusión grupal, evidencia esto último.

P: … ¿y para veinte cómo le hiciste? [Etapa 20 de la sucesión]
E31: serían veinte más veinte, más los dos de los extremos
P: haber ponlo allí [se le demanda que escriba en la pizarra]

Fue así como representó una expresión que indica el número de sillas para la etapa 20, mediante una operación aritmética, expresada por medio de una estructura aditiva (véase Figura 51). Se evidencia, que en esta etapa se valida la conjetura o regla local, establecida en la etapa tres del patrón. En este sentido, se toma como la conjetura la expresada en la etapa tres, debido a que para la etapa 20 sigue la misma estructura aditiva que en la etapa tres y aunque esta misma forma de razonar, la evidencia en la etapa dos lo hace mediante un pensamiento multiplicativo. Por tal razón, se considera como conjetura lo establecido en la etapa tres. En ese sentido, se reconoce un razonamiento abductivo, debido a que es en la etapa 20 donde se valida la conjetura y se usa para determinar el número de sillas que se demandan, es así como construye una regla directa para esta etapa.

$$\begin{array}{r} 20 \\ +\,20 \\ 2 \\ \hline 42 \end{array}$$

Figura 51. Regla directa establecida por E31 para la etapa 20 de la sucesión.

Procesos cognitivos desarrollados por E31

La percepción inicial en E31 es sensorial, producto de percibir formas rectangulares, que resultan de las sillas que se unen y de visualizar aquellos lados que se pierden. De ahí infiere que las sillas deben ubicarse sobre el contorno de estas formas. Es así, que establece sus propias representaciones, de las mesas y sillas de las primeras tres etapas. En las respuestas a los cuestionamientos hubo una evolución de su pensamiento, debido a que transitó de una estrategia de conteo basada en un pensamiento aditivo a expresarlo por medio de un pensamiento multiplicativo. Estas acciones, las infiere de analizar los tres casos particulares que se le proporciona (etapas dadas). Hasta aquí, su razonamiento es de tipo **inductivo**. La estructura aditiva se constituye en su conjetura (regla local), que usa y valida en la etapa 20 para determinar el número de sillas que se le demanda. Este proceso inferencial, se sustenta de un **razonamiento abductivo**, que es producto del uso de la conjetura que construyó en la etapa 3.

En cuanto a su **razonamiento deductivo**, éste no se puso de manifiesto de manera explícita, pero según su forma coherente y consistente de proceder en su producción escrita, muestra evidencia de que piensa en lo general y puede encontrar la cantidad de sillas para cualquier número de mesas (o etapas). Además, cuando se le cuestionó por el número de sillas en etapas cercanas no consecutivas, particularmente, de la etapa 20. Utilizó la regla local establecida en la etapa 3, la cual se corresponde con la forma: $S_n = n + n + 2$.

El proceso inferencial que siguió E31 en su estrategia y forma de pensar, son evidencia de su percepción cognitiva, en la que coordinó el significado de la suma y posteriormente el de la multiplicación, lo representacional (pictórico) y el lenguaje verbal-escrito. Los aspectos visuales jugaron un rol importante en sus inferencias inductivas y abductivas, en diferentes momentos de su interpretación y explicación del comportamiento del patrón figural. Al final por su manera de proceder y con base en la estructura que construyó, se reconoce un pensamiento de tipo aditivo. En cuanto a las representaciones empleadas por E31, fueron usadas en diferentes momentos, la pictórica, usada en el conteo inicial de las etapas dadas y la etapa 20 de la sucesión. La verbal-escrita fue empleada tanto en la etapa individual como en la discusión grupal, con el fin de argumentar y justificar la cantidad de sillas en las diferentes etapas (véase Figura 45 y Figura 50). El sistema de representación numérico, E31 lo empleó en el desarrollo de T1 y al final para poder representar una fórmula directa para las etapas de la sucesión, expresándola como una operación aritmética.

5.1.1.1.g. Estudiante 36

E36 al igual que otros estudiantes que lograron construir una estructura matemática plausible como producto de su proceso de generalización, evidencia desde su producción escrita, enfocar su atención en el contorno o perímetro de las figuras en las tres primeras etapas, las cuales se forman al unirse las mesas cuadradas (etapa dos en adelante). En ese contexto, su percepción inicial fue de tipo sensorial, al reconocer que los lados que conforman el perímetro de las figuras son donde se ubican las sillas en el contexto de la tarea. Esta forma de percibir le permitió coordinar su razonamiento y explicaciones en T1. En este sentido, lo que siguió E36, fue coordinar su percepción sensorial con la cognitiva, fue así como contó cuantas sillas podía colocarse en una mesa (etapa 1), en dos mesas (etapa 2) y en tres mesas (etapa 3), representando nuevamente las mesas, luego contando los espacios colocando el número uno en cada lado del perímetro de las figuras donde se pueden ubicar sillas, fue así que reconoció que serían cuatro, seis y ochos sillas respectivamente (Figura 52).

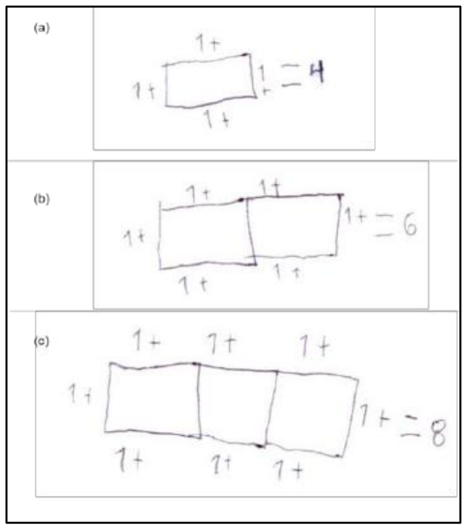
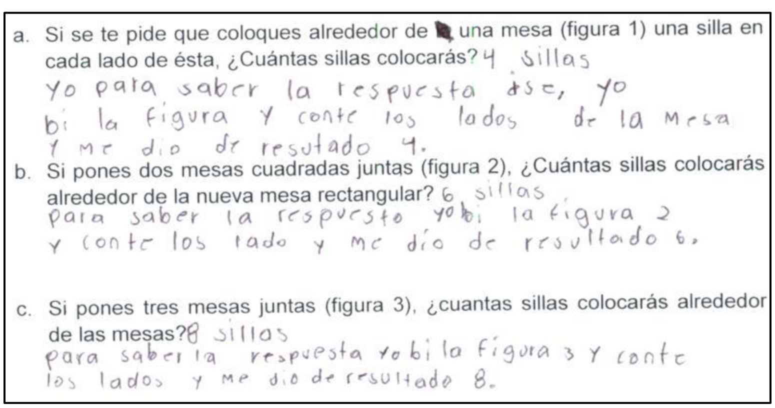


Figura 52. Representación de las mesas y las sillas en las etapas 1, 2 y 3 por E36 en T1.

Hasta aquí el estudiante, manifiesta un pensamiento aditivo, basado en el conteo, que conecta con el significado de perímetro (Figura 52). Evidencia de esto último, es cuando E36 indica que, ve la figura y cuenta los lados (véase Figura 53).



a. Si se te pide que coloques alrededor de una mesa (figura 1) una silla en cada lado de ésta, ¿Cuántas sillas colocarás? 4 sillas
yo para saber la respuesta ase, yo bi la figura y conte los lados de la mesa y me dio de resutado 4.

b. Si pones dos mesas cuadradas juntas (figura 2), ¿Cuántas sillas colocarás alrededor de la nueva mesa rectangular? 6 sillas
para saber la respuesto yo bi la figura 2 y conte los lado y me dio de resultado 6.

c. Si pones tres mesas juntas (figura 3), ¿cuantas sillas colocarás alrededor de las mesas? 8 sillas
para saber la respuesta yo bi la figura 3 y conte los lados y me dio de resultado 8.

Figura 53. Respuestas de E36 para las tres primeras cuestiones que se demandan en T1.

De lo evidenciado por el estudiante en su producción escrita en la Figura 52 y Figura 53, se puede abstraer que si bien para la primera figura del patrón (etapa 1), el estudiante está pensando en los cuatro lados de la mesa, para las otras dos figuras del patrón (etapas 2 y 3 de la sucesión), piensa en las formas rectangulares que se construyen al unir dos y tres mesas. E36 ya piensa en los lados del contorno o del perímetro de las figuras rectangulares y no en las mesas de manera individual. Esto último, se evidencia cuando E36, expresa de manera escrita en el ítem a que: "… conte los lados de la mesa y me dio de resultado 4." y para las dos etapas siguientes menciona que ve la figura y cuenta los lados, sin hacer referencia a las mesas en forma individual (véase Figura 53. Ítems b y c).

E36 en las primeras tres etapas evidencia que su capacidad expresiva es mayormente de naturaleza simbólica-numérica y verbal-escrita, basada en las figuras de las etapas dadas. A partir de ello, el estudiante logra identificar que se trata de un patrón figural creciente, además pone de manifiesto cuanto crece el patrón de manera numérica (patrón de recurrencia) entre etapas consecutivas. Esto, se evidencia en su producción escrita, cuando menciona que: "de la 1 a la 2 solo se suman 2…" (Véase Figura 54). De esta forma, hace referencia que entre la etapa uno y la dos de la sucesión (una y dos mesas), se aumentan dos sillas.

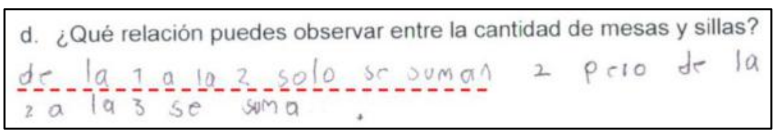

d. ¿Qué relación puedes observar entre la cantidad de mesas y sillas?
de la 1 a la 2 solo se suman 2 pero de la
2 a la 3 se suma .

Figura 54. Patrón de recurrencia identificado por E36 entre dos etapas consecutivas del patrón de T1.

Hasta aquí, E36 manifiesta un **razonamiento inductivo** al trabajar con las tres primeras etapas figurales de la sucesión, evidenciando desde su producción escrita, identificar el patrón de recurrencia entre dos etapas consecutivas de la sucesión, el cual, describe el crecimiento o el comportamiento del patrón (Figura 54).

Ante la cuestión del número de sillas que se colocan en 20 mesas cuadradas (en etapas cercanas, no consecutivas), E36 manifestó en su producción escrita que recurrió al lenguaje numérico y verbal-escrito. En ese sentido, el estudiante, proporciona una respuesta correcta para la cuestión demandada, sin dar una muestra clara de que su estrategia fue un conteo. Por la manera de proceder del estudiante en su producción escrita y lo externado en ella, se evidencia que, en la respuesta para esta cuestión, se involucró la manera en que pudo percibir el comportamiento o lo general en el patrón figural de T1, percibiendo lo estructural y lo general de la sucesión asociada a éste.

En este sentido, se puede decir que el estudiante establece una regla local o conjetura por medio de la coordinación de sus formas de percibir (sensorial y cognitiva). Al referirnos al razonamiento abductivo, éste no es claro en su manera de proceder escrita, pero si se puede afirmar que, su conjetura es establecida en la etapa 20 del patrón (20 mesas) y para E36 es suficiente su forma de proceder para validar la conjetura construida en la etapa 20, debido a que no muestra evidencia de su proceso de confirmación en las etapas dadas, ni extenderlas a etapas lejanas (razonamiento deductivo).

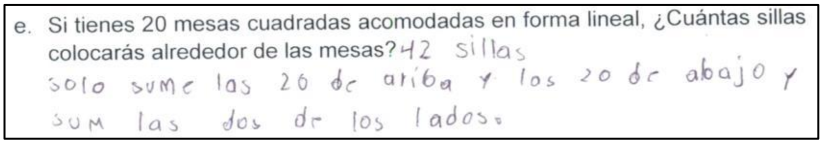

e. Si tienes 20 mesas cuadradas acomodadas en forma lineal, ¿Cuántas sillas colocarás alrededor de las mesas? 42 sillas
solo sume las 20 de ariba y los 20 de abajo y sum las dos de los lados.

Figura 55. Regla local establecida por E36 en el trabajo con la etapa 20 de la sucesión.

De acuerdo con lo anterior (Figura 55), la regla expresada por E36 para la etapa 20 queda en términos de una conjetura y no como fórmula directa, pues no muestra evidencia de ser validada, así que no se puede afirmar que se constituye en una fórmula directa la cual pueda asociarse y describa el comportamiento desde lo general del patrón de la sucesión.

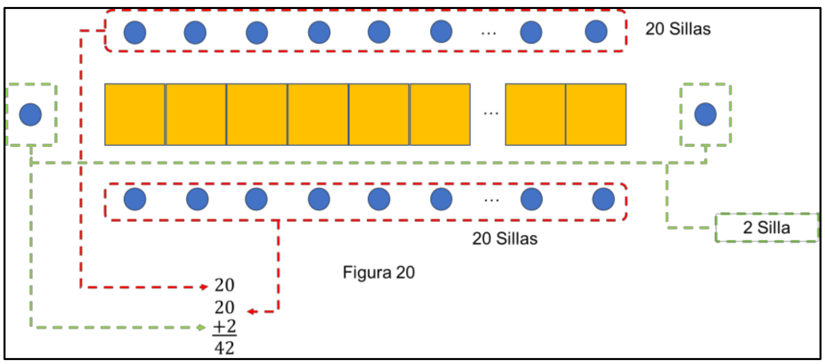


Figura 56. Reconstrucción desde lo figural de la forma de proceder de E36 para la etapa 20 de la sucesión, donde se evidencia la manera de percibir el patrón figural.

La Figura 56, presenta la reconstrucción de la forma de proceder de E36 desde lo figural para la etapa 20 de la sucesión. Muestra una ilustración de cómo el estudiante percibió desde lo figural el patrón y aunque no se indagó más allá en etapas lejanas (razonamiento deductivo), lo evidenciado por el estudiante en su producción escrita, es un indicio de cómo E36 estaba percibiendo lo general, en particular para el patrón de la T1.

En lo evidenciado por E36 en su hoja de trabajo se puede concluir que, logra dar muestra de la construcción de una estructura matemática que describa el comportamiento de la sucesión en T1, a pesar de que no haya dado muestra de extenderla para etapas lejanas. La estructura que logra evidenciar el estudiante en la etapa 20 de la sucesión, se asocia a un pensamiento de tipo aditivo y toma la forma: $S_n = n + n + 2$ (véase Figura 56).

Los aspectos visuales, predominaron en el trabajo con las etapas dadas de la tarea (las tres primeras etapas), puesto que, aunque ya se proporcionaban las representaciones figurales, el estudiante las representó nuevamente, con el propósito de justificar su proceder. Ya en el trabajo con etapas cercanas no consecutivas (etapa 20), a pesar de que la cuestión posibilitaba el uso de lo pictórico o figural para una mejor visualización (aunque no se le exigía al estudiante que representara esta etapa desde lo figural, no se le impedía que lo hiciera), E36, desde lo evidenciado en su producción escrita, no empleó esta forma de representación para justificar su proceder. En ese sentido, las representaciones que usó para organizar y coordinar sus ideas fueron mayormente de tipo simbólica-numérica y verbal-escrita.

5.1.1.2. Tarea 2: Los puntos o la banderita

De los 22 participantes en el estudio, siete construyeron una fórmula directa o expresión matemática plausible (E1, E12, E19, E23, E29, E31, E34), que explica el comportamiento que sigue el patrón figural de la sucesión en esta tarea, en cualesquiera de sus etapas.

Como parte del proceso de comprensión de la tarea, al inicio, el profesor-investigador la leyó en voz alta. Seguidamente, les planteó preguntas como las siguientes: ¿qué formas reconocen en las figuras de la sucesión? ¿Qué se les pide? Algunas respuestas fueron: "¡parece una banderita!", "¡son círculos!", ¡nos piden cuántos círculos tiene la figura 5, 9, 12…! ¡La tres! Esta etapa fue fundamental en el proceso de abstracción, así como en la coordinación de los aspectos cognitivos con el lenguaje verbal y simbólico. Etapa en que los estudiantes lograron percibir una forma general del patrón figural de la sucesión, asociando las figuras del patrón con objetos familiares como una "banderita" formada por círculos. Hasta aquí, los aspectos cognitivos se asociaron a la percepción sensorial. En ese proceso, conectaron su conocimiento sobre una forma geométrica básica, el círculo.

Seguidamente, reconocieron que en etapas consecutivas, la figura "crece", que aumenta el número de círculos. Se apoyaron del conteo. Algunos lo abandonaron en etapas no consecutivas cercanas, otros, en las lejanas. Se identificaron formas diversas de proceder, que atendieron a la manera en que cada uno percibió las figuras que forman cada etapa y de cómo organizaron y presentaron sus ideas. En ese proceso, conectaron significados, propiedades y conceptos matemáticos, según su nivel de abstracción y los evidenciaron mediante el uso del lenguaje verbal, escrito y simbólico.

A fin de comprender el razonamiento que siguieron en la tarea, algunos participantes fueron entrevistados en diferentes momentos durante la etapa individual. Otro momento, cuando se pidió a algunos, compartir su razonamiento con el grupo, en la pizarra.

5.1.1.2.a. Estudiante 1

La manera en que E1 procedió en el trabajo con T2, se extrae de su producción escrita en la hoja de trabajo de la etapa individual. En este contexto, evidencia que construyó una estructura matemáticamente plausible que describe y explica el comportamiento que sigue el patrón figural de la sucesión.

E1, se centró en responder los planteamientos en T2. En la primera pregunta, se le demandó decir cuántos círculos se necesitan para formar las figuras (etapas) 5, 9, 12 y 100. Involucró etapas no consecutivas cercanas y una lejana. Para las etapas 5, 9 y 12, identifica que se necesitan 10, 34 y 47 círculos o "bolitas" respectivamente. Mientras que para la 100, afirma que: "fueron 402 bolitas" (véase Figura 57).

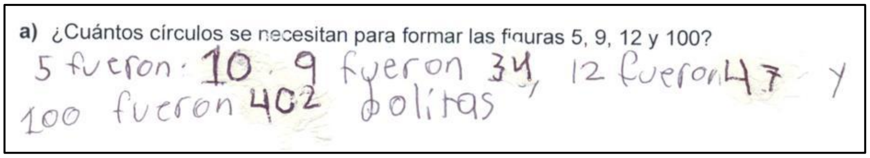


Figura 57. Respuesta de E1 a la primera demanda en T2.

Sólo la respuesta que da a la etapa 100 es correcta. Al analizar la correspondiente a la pregunta del inciso b, que cuestiona cómo se puede determinar de manera rápida la cantidad de círculos para formar cualquier figura, se reconoce una estructura matemática plausible que explica el comportamiento del patrón figural y fue: "multiplicando la tabla del cuatro y sumando 2 (Figura 58). Por cuanto a una conjetura de la que proviene esta estructura, hipotetizamos que la estableció en la etapa 100 mediante un razonamiento **inductivo** y la validó en la etapa 2135 (Figura 59) mediante un razonamiento **abductivo-deductivo**, constituyéndose así en una regla directa.

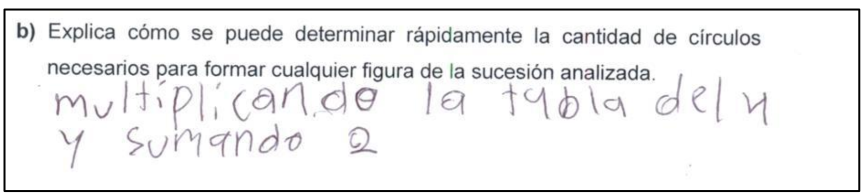


Figura 58. Regla directa establecida por E1 para determinar rápidamente el número de círculos para cualquier etapa de la sucesión.

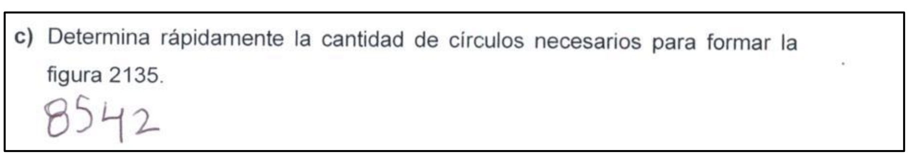


Figura 59. Respuesta de E1 a la etapa 2135 de la sucesión.

5.1.1.2.b. Estudiante 12

E12 analizó las figuras de las etapas dadas del patrón figural en T2. Percibió cada figura como un todo, que luego descompuso estratégicamente en partes (sub-configuraciones). Para la primera (etapa 1), percibió una fila de cuatro círculos y dos más que permanecían constantes en el resto de las figuras. Para la etapa dos, percibió dos filas de cuatro círculos más las dos constantes y para la tres, percibió tres filas de cuatro círculos y los dos círculos constantes. La Figura 60 muestra la forma de percibir por E12 las etapas dadas.

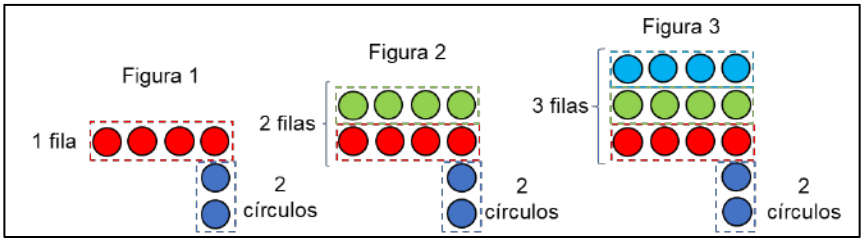


Figura 60. Reconstrucción de la forma de percibir el patrón figural de E12 en T2.

Extractos de una entrevista durante la explicación de E1 en la pizarra, al grupo, en correspondencia con la reconstrucción, evidencian cómo se involucró con las etapas dadas del patrón figural y la forma de percibirlas.

P: Lo que hiciste, platícanos
E12: Primero yo vi las figuras, aquí nada más hay una fila de cuatro [señalando a la figura 1 de la tarea] y acá hay dos filas de cuatro… [Señalando esta vez a la figura 2 de la tarea]

Hasta aquí, la capacidad expresiva de E12 es mayoritariamente de naturaleza simbólica y verbal-escrita, que usa para explicar el comportamiento desde lo figural que sigue el patrón y para explicar el razonamiento que siguió. En ese contexto, E12 logra en el trabajo con las dos primeras etapas dadas establecer desde lo figural una conjetura o una regularidad que sigue el patrón figural, la cual es que el patrón crece entre etapas consecutivas. Además, logra identificar que este crecimiento se evidencia desde lo figural en una fila de cuatro círculos que se coloca encima de la figura anterior (ver Figura 61).

La forma en la que percibió el patrón creciente de la sucesión le permitió al estudiante desarrollar una estrategia figural, la cual posibilitó identificar que las figuras crecían en una fila de cuatro círculos a medida que iban avanzando las etapas de la sucesión.

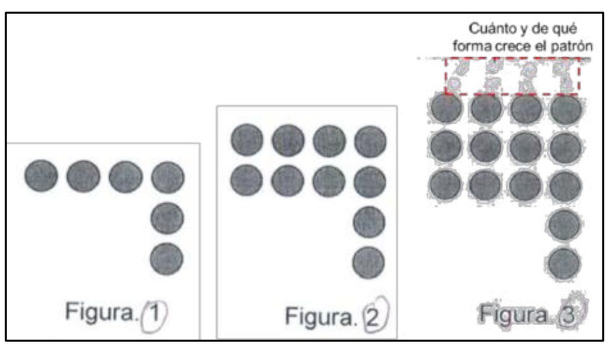


Figura 61. Evidencia de la forma en que E12 percibió el crecimiento del patrón desde lo figural.

Lo interesante en la forma de proceder de este estudiante es que logra emplear una estrategia figural, por encima de una numérica, que le permitió identificar la regularidad en términos de una fila compuesta por cuatro círculos y no a los cuatro círculos separados. La Figura 62, evidencia la extensión del patrón desde lo figural hasta la etapa 8 (figura 8), que realizó E12 en su hoja de trabajo en la etapa individual, siguiendo la estrategia figural establecida por medio de la forma en que percibió las figuras en etapas consecutivas de la sucesión.

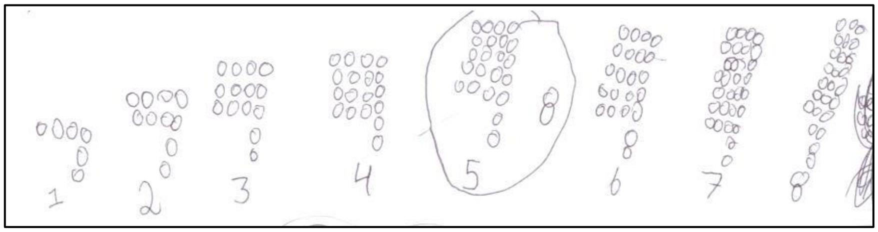


Figura 62. Patrón de la sucesión extendido de manera figural.

E12 dio muestra de un cambio en su estrategia, el cual se evidenció por el lenguaje empleado para representar su proceder. El cambio de estrategia consistió, en ir de un lenguaje figural a uno simbólico-numérico, al reconocer que se puede relacionar el número de la figura o la etapa con la cantidad de filas de cuatro círculos identificada por medio de la estrategia figural. Esto lo logra expresar de manera verbal en el momento que se le demanda pasar a la pizarra a explicar su forma de proceder en la tarea. El siguiente extracto respalda esto último.

> E12: … entonces vi que esto era cuatro por una [señalando a la figura 1], pero me sobraban dos. Cuatro por una, cuatro más dos son seis que me da todo este resultado y así [señalando el resultado en la pizarra]. Cuatro por dos, ocho y le sumé dos [explicación para la figura dos] y así me fui hasta llegar al cinco [figura 5]

Esto evidencia que deja de lado lo figural y por medio de un lenguaje verbal que posteriormente tradujo a uno simbólico-numérico logra establecer expresiones por medio de operaciones aritméticas que indican la cantidad de círculos necesarios para formar las etapas dadas y las demandadas hasta la etapa cinco de la sucesión (véase Figura 62, extracto de discusión grupal y Figura 63).

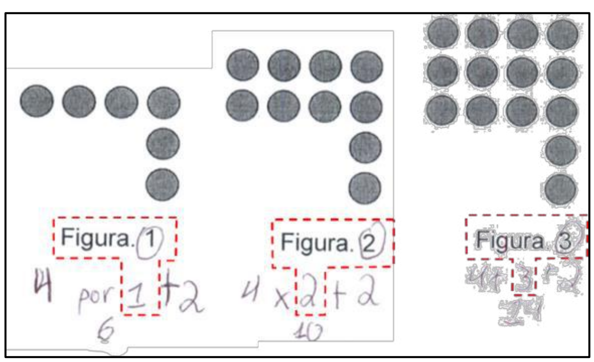


Figura 63. Expresiones establecidas por E12 para la cantidad de círculos en las tres primeras etapas.

Como evidencia, en el extracto de la discusión grupal E12 emplea una estrategia de conteo articulada y coordinada a un pensamiento multiplicativo y aditivo para dar respuesta a la cantidad de círculos necesarios tanto para las figuras dadas (tres primeras) como para las demandadas en la primera cuestión de T2. Es así como E12 encuentra que para la etapa uno (figura 1), son necesarios seis círculos, para la etapa dos (figura 2), diez círculos y para la etapa tres (figura 3), son necesarios catorce círculos. Además, el estudiante logra reconocer desde lo figural lo que varía y lo que no, e infiere (conjetura) que la sucesión crece en términos de una fila de cuatro círculos entre etapas consecutivas, evidencia implícita de que identifica una regla local (patrón de recurrencia), la cual le permite dar respuestas acertadas y válidas a las etapas demandadas en la primera cuestión de T2 (ver Figura 64).

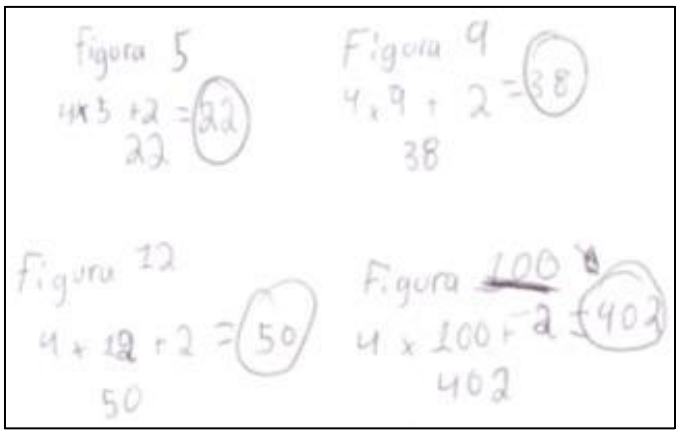


Figura 64. Respuestas de E12 a la primera demanda de T2.

E12 desde el trabajo y el análisis de lo figural de las tres primeras etapas (etapas dadas) deja ver que en su forma de proceder involucra acciones de tipo inductivas-abductivas, es decir, involucra indistintamente estos dos tipos de razonamiento debido a que desde el trabajo con las tres primeras etapas logra establecer una conjetura o regla local que inmediatamente de manera coherente y consistente aplica en etapas sucesivas del patrón, es decir, que la regla establecida la da por cierta desde la primera etapa y esto se da debido a la manera en que el estudiante percibió el patrón y la forma en la cual lo descompuso, es decir, en sub-configuraciones de la figura base (representación figural de la etapa). Es así como se da de manera conjunta acciones tanto inductivas (trabajo con varias etapas y establecimiento de una regla local o conjetura), como abductivas (etapa de uso y validación de la regla establecida en la etapa inductiva del proceso).

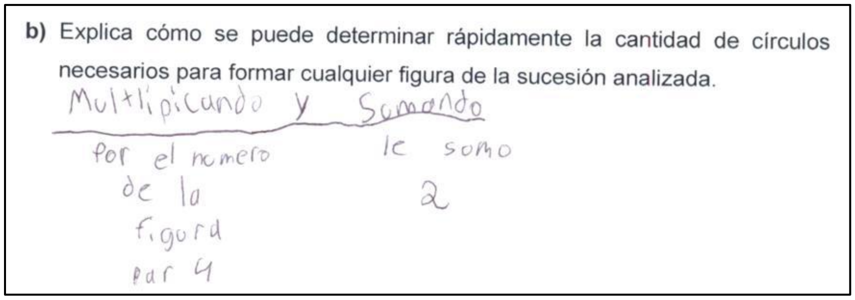


Figura 65. Regla local establecida por E12 expresada en lenguaje verbal-escrito.

La conjetura o regla local establecida por E12, la expresa de manera explícita en su hoja de trabajo en un lenguaje verbal-escrito, cuando se indaga acerca de cómo se puede determinar rápidamente la cantidad de círculos necesarios para formar cualquier figura (o etapa) de la sucesión (véase Figura 65). Esta conjetura, se engloba en una acción de tipo abductiva, la cual es explicada por la manera en que el estudiante percibe el patrón en partes no superpuestas identificando lo que varía (las filas de cuatro círculos) y lo que no (los dos círculos inferiores) (Figura 60). La anterior acción inductiva del estudiante le permitió abducir una secuencia de operaciones aritméticas, correspondientes al número de círculos que constituyen las etapas dadas en la tarea, figuras 1, 2 y 3 de la sucesión (véase Figura 63). Este estudiante por medio de su secuencia de acción abductiva-inductiva logra asociar el número de la figura con la fila de cuatro círculos que aumenta en cada etapa y los dos círculos que permanecen constantes. Esta conclusión la valida con las primeras tres etapas de la tarea, las cuales se puede comprobar la cantidad de círculos mediante un conteo, es así como logra generalizar esta conjetura para figuras correspondientes a etapas cercanas y lejanas de la sucesión (Figura 64).

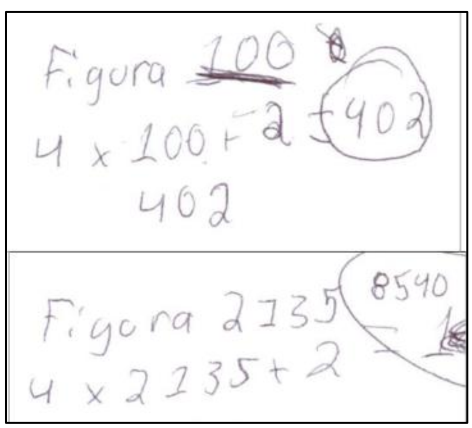


Figura 66. Fórmulas directas establecidas por E12 para las figuras (etapas) 100 y 2135 de la sucesión.

Por otra parte, al extender la regla directa a etapas lejanas, por ejemplo, etapa 100 y etapa 2135 por medio de nuevas inferencias, E12 pone de manifiesto un razonamiento de tipo deductivo (véase Figura 66).

El siguiente extracto de discusión grupal muestra evidencia del proceso de razonamiento abductivo-inductivo-deductivo, que siguió E12 en la T2:

P: Sin que hagas el dibujo… Si tienes la figura 5… ¿qué harías?
E12: Haría cuatro por cinco más dos
P: Haber… escríbelo [en la pizarra]
E12: Cuatro por cinco son veinte, más dos, veintidós [verbalizó E12 a medida que escribía la operación en la pizarra]
P: ¿Y ese cuatro qué representa?... Ese cuatro de aquí. [Señalando el cuatro que E12 acaba de escribir]
E12: Es el de la multiplicación
P: Pero ¿qué?... ¿Cuáles son esos cuatros?
E12: Los de la fila [toma como referencia la fila superior de cuatro círculos de la figura 3 y señala uno a uno los cuatro círculos que conforman la fila]
P: ¿Y el cinco? [Refiriéndose al cinco que se multiplica por el cuatro en la operación que E12 escribió en la pizarra]
E12: Debe venir de las figuras
P: ¡Aaaah! de la figura… ¿y para la doce? [Figura 12]
E12: Para la doce solo hago… cuatro por doce más dos [y procede a escribir la operación en la pizarra]
P: ¿Y el dos? [Refiriéndose al dos que le suma al producto]
E12: Estos [señalando y encerrando los dos círculos en la figura 2]
P: Ok ¿sí? esos dos y ¿dónde están más esos dos?
E12: También está aquí [encerrando los de la figura 3], aquí [encerrando los de la figura 1] y se sigue en todas las figuras

Procesos cognitivos desarrollados por E12

Los procesos cognitivos de E12 en T2, se articularon principalmente a la manera en la cual percibió visualmente el patrón figural de la sucesión. En ese contexto, el estudiante analizó las figuras de las etapas dadas, acción que le permitió reconocer un aumento en términos de una fila de cuatro círculos entre etapas consecutivas y que posibilitó el establecimiento de una regla local (conjetura), la cual da por válida desde la primera etapa según sus explicaciones. En la forma de proceder de E12, se evidencia que siguió un razonamiento de tipo inductivo, pero también de tipo abductivo, debido a que E12, evidencia que, desde la primera etapa, usa y valida la conjetura establecida, la cual logró percibir desde lo visual.

De esta manera E12, logra establecer una estructura matemática válida (o regla directa) la cual explica el comportamiento del patrón figural en etapas cercanas y lejanas, es decir una regla general. Dicha regla, es inferida por medio del trabajo con las etapas dadas donde en un primer momento (regla local), es percibida por el estudiante de manera figural o pictórica y que posteriormente traduce por medio de un lenguaje simbólico-numérico a una estructura matemática que se puede asociar a la forma: $S_n = 4 \times n + 2$, de tipo constructiva por la manera en la cual descompuso las figuras y articulada a un pensamiento multiplicativo. La estructura matemática, E12 la emplea de manera coherente y consistente tanto en etapas cercanas como en etapas lejanas de la sucesión. En etapas lejanas sus inferencias son de tipo **deductiva**, que se sustentan de conclusiones válidas para obtener otras verdaderas. Es en estas etapas en que expresa la estructura matemática a través de una operación aritmética, en la cual asocia pensamientos de tipo aditivo y multiplicativo.

Los procesos inferenciales de abducción, inducción y deducción fueron fundamentales en la generalización del patrón en este estudiante, tanto en la etapa de formulación, validación y extensión de la conjetura, llevándolo de una regla local a una fórmula directa.

Los aspectos visuales jugaron un papel importante en sus inferencias, durante el trabajo con las etapas dadas, debido a que visualmente (percepción), logró identificar una regularidad entre estas tres primeras etapas de la sucesión. Lo cual le permitió descomponer estratégicamente, estructurar y organizar sub-configuraciones de las figuras de cada etapa dada, que posteriormente le permitieron asociar el número de la figura o etapa con algunas de estas sub-configuraciones o partes descompuestas de las figuras bases de las etapas y de esta manera pudo interpretar y explicar el comportamiento del patrón figural. Su nivel de abstracción evolucionó. Inicialmente, fue un trabajo de percepción visual y empleando un lenguaje mayormente verbal-escrito y pictórico, que le permitió establecer una conjetura, que empleó de forma consistente durante el trabajo con T2. Y que posteriormente traduce a un lenguaje simbólico-numérico, lo cual evidencia un cambio de estrategia de lo pictórico (figural) a lo numérico (simbólico).

Su proceso cognitivo demandó, fundamentalmente el uso del lenguaje figural, apoyándose del verbal, el escrito, y simbólico. Las representaciones que conectó para organizar y coordinar sus ideas fueron fundamentalmente de tipo pictórico, por lo que mantuvo su análisis en el contexto del problema. Se requirió de un proceso de acompañamiento, para que transitara del pictórico al estructural, que acompañó del lenguaje verbal, lo que favoreció, su evolución en el nivel de abstracción.

El contexto figural, fue de suma importancia para E12 en T2, debido a que favoreció desde lo visual que el estudiante construyera de manera eficiente una estructura matemática plausible que explique su comportamiento, en etapas lejanas por medio del trabajo con las etapas cercanas. Pero al momento de demandar la cantidad de círculos para figuras mucho mayores (etapas lejanas), resulta ser poco eficiente y se constituye en un obstáculo, por las dificultades asociadas al conteo y a representar las figuras para etapas lejanas del patrón de la sucesión. Es por ello, que para E12 resultó más eficaz cambiar de estrategia, de lo figural a lo numérico y por medio de una operación aritmética, proporcionar el número exacto de círculos necesarios para formar cualquier figura o etapa de la sucesión.

5.1.1.2.c. Estudiante 19

A través de la producción escrita de E19, se evidencia el uso de dos estrategias durante su forma de proceder en T2. La primera de carácter figural, basada en el análisis de lo percibido en el trabajo con las tres primeras etapas (etapas dadas) y empleada en etapas cercanas o consecutivas. La segunda de carácter numérica, hecha explícita al demandar etapas lejanas de la sucesión. En el trabajo de E19 estas dos estrategias no se contraponen, sino que se complementan la una con la otra, para así llegar a construir una estructura matemáticamente plausible que explique el comportamiento del patrón figural de la sucesión. En ese sentido, la percepción visual de las figuras jugó un papel preponderante en la primera estrategia, esto se evidencia en la producción escrita del estudiante en el momento en el que trabaja en el contexto del problema (en lo figural), en el sentido de volver a representar las etapas dadas y además logra extender la sucesión de forma figural (o pictórica) a etapas cercanas consecutivas, dando muestra que logra conservar la estructura o forma de las figuras y el patrón de crecimiento entre etapas consecutivas de la sucesión, todo esto en un contexto figural. La Figura 67, muestra que E19, logra extender figuralmente de manera correcta la sucesión, dando evidencia de haber identificado una regularidad desde lo figural, manteniendo así la forma y la cantidad que crece el patrón entre etapas consecutivas de la sucesión.

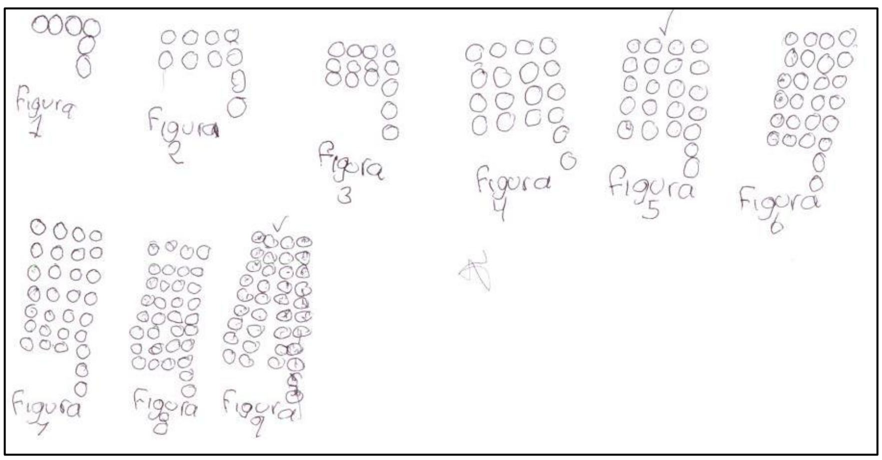


Figura 67. Etapas cercanas consecutivas extendidas de manera figural por E19.

A la estrategia figural, E19 coordinó principalmente un lenguaje pictórico, que posteriormente la traduce por medio de un lenguaje numérico en el cual involucra lo percibido visualmente en las etapas dadas, esto es el crecimiento entre etapas consecutivas de la sucesión. De esta manera, logra dar respuesta a la primera cuestión de T2, es decir, la cantidad de círculos necesarios para formar las figuras 5, 9, 12 y 100 (véase Figura 68). Anterior a esto y por medio de un conteo puede proporcionar la cantidad de círculos para las etapas dadas, es por medio de este análisis y el trabajo con estas etapas que logra desarrollar su forma de proceder desde lo figural.

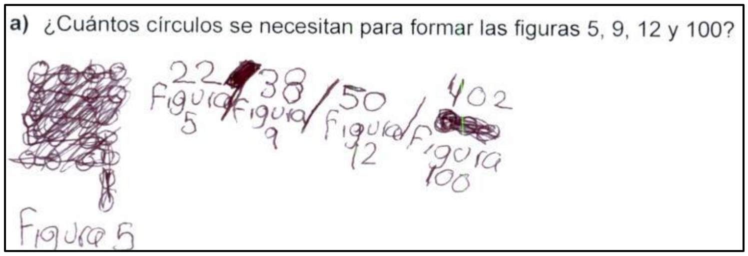


Figura 68. Respuesta de E19 a la primera cuestión de T2.

La estrategia figural desarrollada al extender el patrón de forma pictórica hasta la etapa o figura 9 de la sucesión (ver Figura 67), es establecida como una regla local construida a partir de un razonamiento inductivo y la percepción visual en el trabajo con las tres primeras etapas y posteriormente fue validado por medio de un proceso abductivo para etapas cercanas consecutivas, cabe aclarar que todo este proceso fue desarrollado en un contexto figural.

El cambio de contexto (de lo figural a lo numérico) o a lo que se le ha denominado cambio de estrategia, se evidenció de manera más clara en la segunda cuestión de la tarea, la cual indagaba sobre la manera de determinar rápidamente la cantidad de círculos necesarios para formar cualquier figura de la sucesión, a lo cual el estudiante recurre a un lenguaje verbal-escrito y simbólico para traducir y expresar lo que de manera figural (o pictórica), había percibido en el trabajo con las etapas dadas (tres primeras) y la extensión de la sucesión de forma figural hasta la etapa nueve, que realizó sin que se le demandara de forma explícita (ver Figura 67).

La Figura 69 evidencia las dos estrategias (o contextos) que desarrolló y en los que trabajó E19, el figural (véase 1 en Figura 69) y el numérico, el cual asoció y coordinó con un pensamiento multiplicativo, relacionándolo con el crecimiento de la sucesión (cuatro círculos) entre etapas consecutivas y aunque no expresa de manera explícita que el crecimiento numérico de la sucesión, son cuatro círculos, si es evidente en su trabajo escrito en particular en el contexto figural, ya que logra extender la sucesión en este contexto de forma correcta, esto quiere decir, que si logra identificar que el patrón de crecimiento es cuatro, y que posteriormente lo expresa de manera explícita en la segunda demanda (ver 2 en Figura 69).

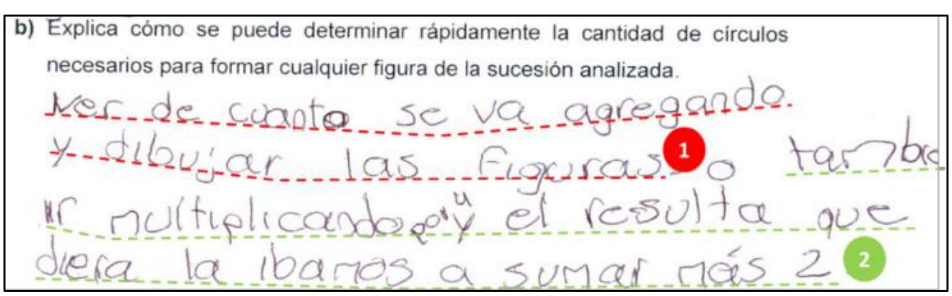


Figura 69. Evidencia escrita de los dos contextos desarrollados por E19 en T2.

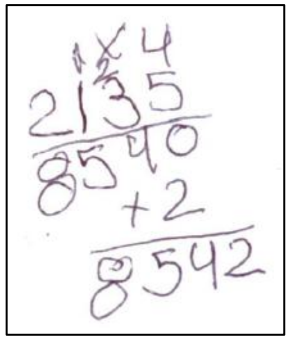


Figura 70. Regla directa establecida por E19 para la etapa 2135 de la sucesión.

Lo que siguió en la manera de proceder de E19, es poner de manifiesto un pensamiento deductivo al proporcionar una regla directa para la etapa 2135 de la sucesión, llevando lo que era una regla local expresada de manera escrita-verbal o en forma pictórica, a una regla directa para esta etapa en particular y expresándola por medio de una operación aritmética en lenguaje simbólico-numérico que se asocia a una estructura matemática de la forma: $S_n = 4 \times n + 2$ (véase Figura 70). Esta forma de razonar y proceder le permite proporcionar una respuesta correcta para la tercera cuestión de T2 (ver Figura 71).

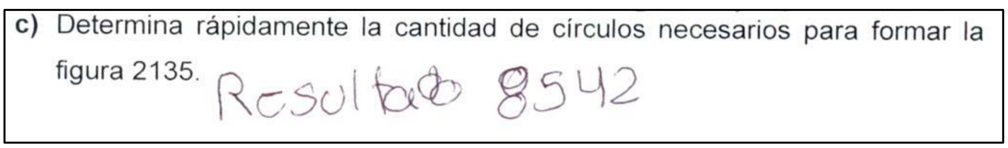

c) Determina rápidamente la cantidad de círculos necesarios para formar la figura 2135. Resultado 8542

Figura 71. Respuesta proporcionada por E19 para la tercera demanda de T2.

Se reconoce que el estudiante mantiene una estructura multiplicativa para explicar el comportamiento del patrón figural desde la estrategia numérica expresada mediante un lenguaje simbólico-numérico. Asimismo, que en ningún momento enfatizó acerca de cuánto “crece” la sucesión, sin que signifique el que haya dejado de percibir que es un patrón creciente, simplemente no lo hizo explícito en sus representaciones tanto verbales como escritas, aunque en las reglas directas establecidas para etapas particulares, si lo logra expresar. La pregunta del inciso b, demandó implícitamente, que manifestara una regla para determinar la cantidad de círculos de cualquier figura que se demande, lo cual se relaciona con el hecho de cuanto “crece” la sucesión y el cómo relaciona el número de la figura o etapa, con la regla o expresión establecida, esto con la finalidad de comprobar si el estudiante logra establecer una estructura matemática plausible que explique el comportamiento de la sucesión, es decir, si logró generalizar su proceso.

Procesos cognitivos desarrollados por E19

La percepción visual de E19, inicialmente jugo un papel importante, al posibilitar establecer una conjetura desde lo figural que le permitió representar nuevamente las etapas dadas y extender el patrón a etapas cercanas consecutivas de manera pictórica. Para dar respuesta a los cuestionamientos se apoyó de una estrategia numérica basada en lo que percibió y logró conjeturar figuralmente. Dicha estrategia numérica la coordinó con una estructura multiplicativa, que la hace explícita por medio de una operación aritmética expresada en una etapa lejana demandada en la tarea (etapa 2135). Hasta aquí, E19 coordina acciones de un razonamiento de tipo **inductivo** al trabajar con las etapas cercanas y conjeturar una regla local y de tipo **abductivo**, al validar la regla por medio de su uso con otras etapas de la sucesión.

También manifestó un razonamiento **deductivo**, al momento en que se le cuestionó por el número de sillas en etapas lejanas, particularmente, de la etapa 2135. Utilizó una conclusión válida para derivar conclusiones válidas. En este caso, regla directa que estableció, la cual se corresponde con una generalización multiplicativa de tipo constructiva, de la forma: $S_n = 4 \times n + 2$.

El proceso inferencial que siguió E19 en las dos estrategias y en el cambio de contexto (del figural al numérico), son evidencia de su percepción cognitiva, en la que coordinó el significado de la multiplicación, lo representacional (pictórico) y el lenguaje verbal-escrito. Los aspectos visuales jugaron un rol importante en sus inferencias inductivas, abductivas y deductivas, en diferentes momentos de su interpretación y explicación del comportamiento del patrón figural. En su trabajo y forma de proceder se manifestó que en su razonamiento involucró a las dos variables, número de figura y la cantidad de círculos, pero en ningún momento hizo explícito el patrón de recurrencia. Con base en la estructura que construyó, se reconoce un pensamiento de tipo multiplicativo.

5.1.1.2.d. Estudiante 23

Desde la producción escrita de E23 en T2, se evidencia en su forma de proceder el desarrollo de diferentes estrategias en dos contextos en particular. El primero de esos contextos, es el planteado por la tarea (figural). En éste, evidencia una percepción visual de las tres primeras etapas (etapas dadas) de la sucesión, lo cual permite mediante un conteo determinar la cantidad de círculos que conforman la figura 1, 2 y 3 (etapas 1 a 3). La percepción visual, en específico la sensorial, posibilitó que E23 reconociera desde lo figural una forma que según su proceder se mantenía en las figuras siguientes, es decir, logra identificar lo invariante en lo que respecta a la forma de las figuras, a pesar de que tenía claro que estas crecen. Lo anteriormente dicho, E23 lo hace evidente en su hoja de trabajo, al extender el patrón de forma figural para las figuras 12 y 13 (etapas 12 y 13. Véase Figura 72).

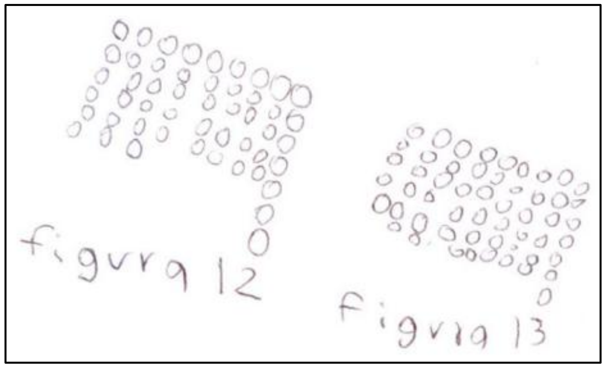


Figura 72. Representación figural de E23 para las etapas 12 y 13 de la sucesión.

Hasta aquí, la capacidad expresiva de E23 es mayoritariamente de naturaleza pictórica, que emplea para explorar cuál es el comportamiento que sigue el patrón en las etapas dadas y para explicar su forma de proceder. En ese contexto, a pesar de que E23, logra identificar desde lo figural una forma invariante entre las etapas de la sucesión (percepción sensorial), no muestra en este proceso articular esta percepción sensorial (de formas) con una de tipo cognitiva, es decir, con significados, propiedades y conceptos matemáticos que estén conectados con el análisis que pudo inferir desde lo figural con el trabajo en las etapas dadas. Esto es evidente en la representación figural que proporciona para las etapas 12 y 13 (ver Figura 72), debido a que si bien el estudiante proporciona representaciones, que en cuestión de forma se mantiene similar a las etapas dadas (véase Figura 73), dichas representaciones no guardan una coherencia en lo estructural con las tres primeras etapas, es decir, no muestran una estructura clara y coherente que pueda relacionar, por ejemplo, el número de la etapa de la sucesión que se esté demandando con la cantidad de círculos que componen la figura.

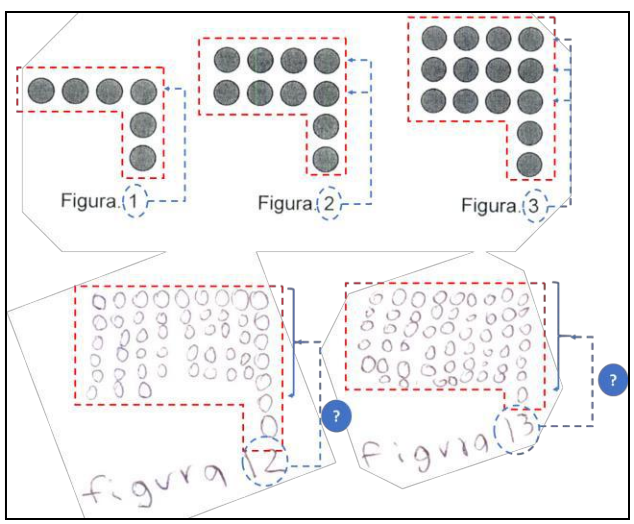


Figura 73. Percepción sensorial (de formas) y cognitiva, evidenciada por E23 en su producción escrita.

Con base en su forma de proceder hasta la etapa 13, para dibujar las figuras de las etapas que se le demandan, E23 da evidencia de seguir un patrón, de modo que siempre aparecen en cada una, filas con cuatro círculos más los dos. Se reconoce que se requería un proceso de acompañamiento a fin de que expresara este comportamiento mediante una estructura matemática plausible.

E23 desarrolla un segundo contexto en su forma de proceder, es decir, hace un cambio de estrategia, de lo figural a lo numérico, debido a que la estrategia figural desarrollada no le permite dar respuesta a las demandas planteadas en T2. A partir de ello, y por medio del trabajo con las tres primeras etapas, E23 identifica un patrón de crecimiento (patrón de recurrencia), desde lo numérico. Es así, como reconoce que la cantidad de círculos crece de forma invariante entre una etapa a otra, por lo que infiere (conjetura) que el crecimiento es de cuatro en cuatro y aunque el estudiante no lo externa de esta manera en su hoja de trabajo, si se evidencia que el patrón de recurrencia, lo articula a un conteo recursivo (de cuatro en cuatro) que aplica a partir de la etapa 13 hasta la 26 (véase Figura 74). Es de su análisis a los casos particulares o etapas dadas y la aplicación de su estrategia numérica, que E23 infiere que el patrón figural crece de cuatro en cuatro. Esta misma estrategia es aplicada a las etapas inferiores a la etapa 13.

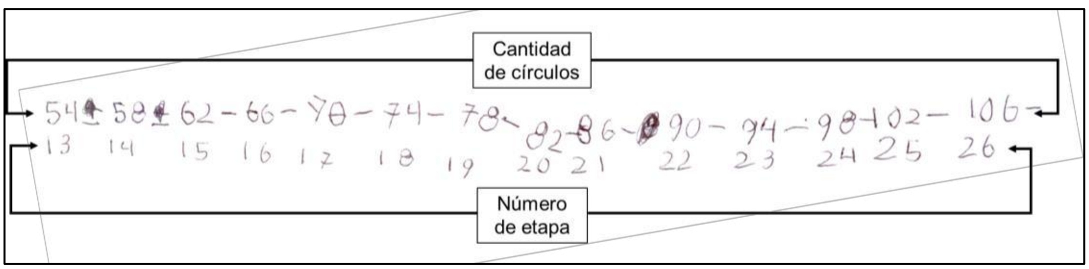


Figura 74. Conteo recursivo aplicado por E23 a partir de la etapa 13 hasta la etapa 26.

Hasta este momento E23, manifiesta un razonamiento inductivo al trabajar con varios casos particulares o con las etapas dadas de la sucesión y es por medio de su análisis que logra inferir una conjetura o regla local (patrón de recurrencia), que posteriormente emplea para obtener etapas cercanas consecutivas y no consecutivas, con las cuales valida su conjetura en un proceso inferencial donde se manifiesta un razonamiento abductivo. De esta forma, el estudiante puede dar respuesta a la primera cuestión demandada en la tarea, en particular, responder acertadamente cuál es la cantidad de círculos necesarios para las etapas 5, 9 y 12 del patrón analizado (véase Figura 75).

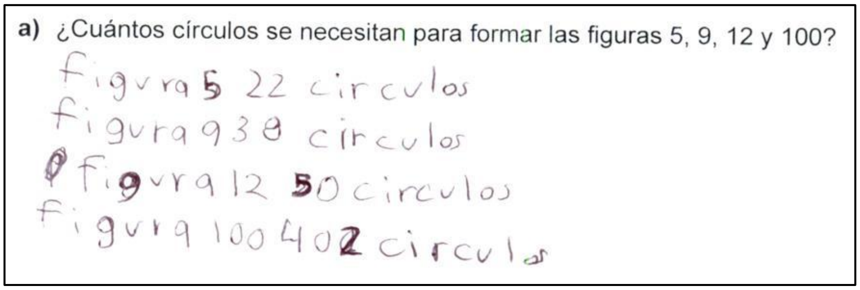


Figura 75. Respuesta de E23 a la primera cuestión de T2.

Al indagar por la segunda cuestión de la tarea, la cual demandaba explicar cómo se puede determinar rápidamente la cantidad de círculos para formar cualquier etapa de la sucesión. Para dar respuesta a esta demanda, el estudiante hace uso de una estrategia numérica que le permite establecer una conjetura o regla local, pero ya no en términos de un patrón de recurrencia, sino de una estructura matemática asociada a un pensamiento multiplicativo donde el patrón de crecimiento entre etapas consecutivas de la sucesión se encuentra involucrado en esta estructura. Esta nueva conjetura planteada por E23, desde un contexto numérico, la establece para etapas lejanas demandadas, por ejemplo, la etapa 100 y la 2135 y esta nueva regla local la establece, debido a que la primera que infiere de forma numérica es ineficiente para etapas lejanas, ya que contar de cuatro en cuatro resulta ineficaz para este tipo de etapas. En ese sentido, el estudiante evidencia un razonamiento inductivo, al establecer en la etapa 100 la regla local, en términos de una operación aritmética y en la etapa 2135 por medio de un razonamiento abductivo, usa y valida su conjetura, expresándola por medio de una operación aritmética (ver Figura 76).

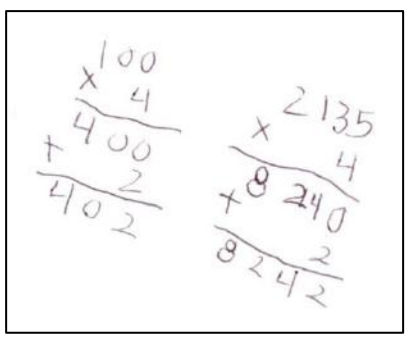
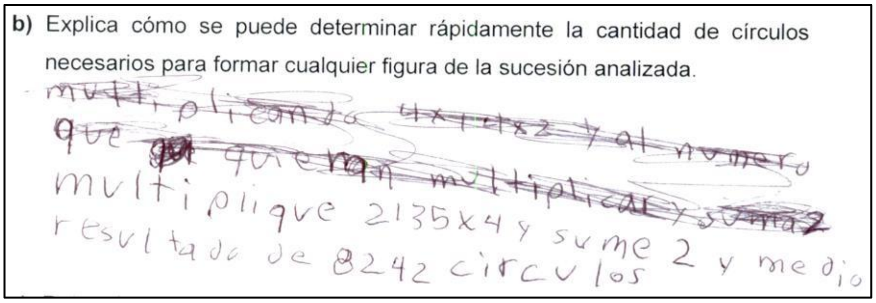


Figura 76. Reglas establecidas por E23 para las etapas 100 y 2135 de la sucesión en T2.

De esta manera E23, recurrió a un lenguaje simbólico-numérico y verbal-escrito, para dar respuesta a la segunda demanda de T2. Pero para ello, toma como referencia la etapa 2135 para proporcionar la respuesta (véase Figura 77).

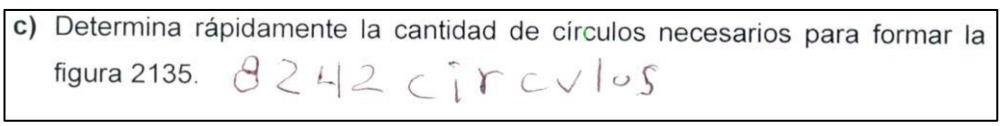


b) Explica cómo se puede determinar rápidamente la cantidad de círculos necesarios para formar cualquier figura de la sucesión analizada.

~~multiplicando 4x1+4x2 y al numero que quieran multiplicar y suma2~~ multiplique 2135x4 y sume 2 y medio resultado de 8242 circulos

Figura 77. Respuesta proporcionada por E23 para la segunda demanda de T2.

A pesar de que el estudiante tomó como referencia una etapa particular para responder la segunda demanda de la tarea, la cual de forma implícita indagaba sobre una regla que permitiera determinar la cantidad de círculos para cualquier etapa demandada, E23 deja ver una operación aritmética asociada a una estructura matemática de la forma: $S_n = 4 \times n + 2$. Esta forma de razonar deductivamente le permite determinar rápidamente la cantidad de círculos necesarios para la figura (o etapa) 2135 (ver Figura 78). Cabe aclarar que, aunque la respuesta que E23 externa en su hoja de trabajo es incorrecta, debido a que posiblemente se equivocó en el cálculo, el estudiante establece una estructura válida y coherente en su proceder.



c) Determina rápidamente la cantidad de círculos necesarios para formar la figura 2135. 8242 circulos

Figura 78. Respuesta de E23 a la tercera demanda de T2.

Procesos cognitivos desarrollados por E23

La percepción inicial de E23 fue de tipo sensorial, al enfocarse solo en formas y mantenerse en estas, sin lograr coordinarlas con significados, propiedades o representaciones involucradas en su forma de proceder. Por tal motivo E23 recurrió a un cambio de contexto, yendo de lo figural a lo numérico. En ese sentido, reconoce por medio del trabajo con las etapas dadas un patrón recursivo (los círculos aumentan de cuatro en cuatro de una etapa a otra), el cual articula con un conteo estratégico (de cuatro en cuatro), para así poder dar respuesta a la cantidad de círculos que componen etapas cercanas consecutivas y no consecutivas.

Fue en etapas lejanas donde centró su atención en el patrón de crecimiento de la sucesión, el cual lo multiplicaba por el número de la etapa demandada y luego a este producto le sumaba dos, de esa manera obtenía la cantidad total de círculos tanto para etapas lejanas como para cualquier etapa de la sucesión. En este sentido, E23 estableció una regla directa de tipo constructiva, la cual se asocia a una estructura matemática de la forma: $S_n = 4 \times n + 2$. La regla directa fue desarrollada por E23, debido a que la estrategia de conteo recursivo si bien resulta útil en etapas consecutivas cercanas, es ineficiente para etapas lejanas. De esta forma el estudiante logra construir una estructura matemáticamente plausible que explica el comportamiento de la sucesión.

Por otra parte, se puede afirmar que los aspectos visuales en este estudiante en particular no jugaron un papel preponderante en su forma de proceder y razonar como ya se ha descrito, debido a que solo se limitó a la percepción de formas sin conectarlas con conceptos, significados y/o representaciones.

Los procesos inferenciales de inducción, abducción y deducción fueron fundamentales para la construcción de la estructura matemática plausible que describiera el comportamiento de la sucesión, debido a que tuvo la necesidad de moverse en diferentes contextos, de inferir más de una conjetura o regla local y de validarlas. Además de desarrollar acciones inductivas y deductivas para establecer y validar las diferentes conjeturas planteadas en los distintos momentos de su forma de proceder. Este proceso le permite construir una estructura matemática que describe de mejor manera el comportamiento de la sucesión tanto en etapas cercanas como lejanas.

5.1.1.2.e. Estudiante 29

La forma en que E29 se involucró con el patrón figural de la sucesión, fue por medio del trabajo en el contexto de la situación (en lo figural). Dicho trabajo, consistió en observar y analizar las figuras de las etapas dadas. En ese sentido, representó de nueva cuenta las figuras de las etapas dadas y mediante un conteo pudo determinar la cantidad de círculos que las componían. De esta manera, E29 identificó que las figuras (etapas) 1, 2 y 3, están compuestas por 6, 10, y 14 círculos respectivamente (ver Figura 79).

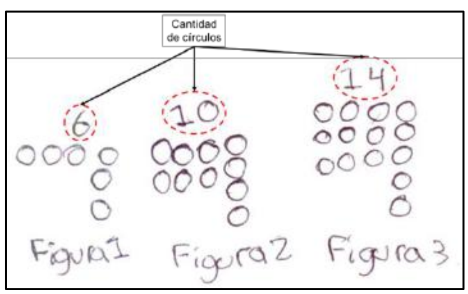


Figura 79. Representaciones de las etapas dadas y la cantidad de círculos que las conforman.

Hasta aquí, la capacidad expresiva de E29 es mayoritariamente de naturaleza pictórica, que emplea para explorar cuál es el comportamiento que sigue la sucesión en las tres primeras etapas y para explicar el razonamiento que siguió en el trabajo con éstas. En ese contexto, el estudiante proporcionó la representación figural de la etapa 4 y 5 de la sucesión, que son, etapas consecutivas a las dadas (ver Figura 80). En este proceso, se evidencia la forma en la cual el estudiante percibió el patrón figural.

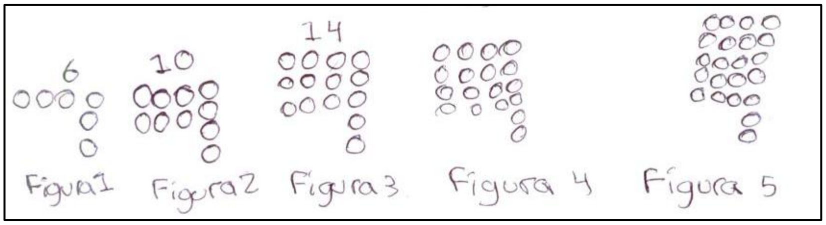


Figura 80. Representación figural de las etapas 1 a 5.

Otro aspecto que se evidencia por medio de las representaciones externadas en la hoja de trabajo por E29 (ver Figura 80). Es que el estudiante logra identificar que se trata de un patrón creciente y además se puede reconocer que las etapas proporcionadas por el niño mantienen una coherencia desde la estructura figural, con las representaciones de las etapas dadas, esto permite inferir que desde lo figural el estudiante logra identificar con el trabajo en las etapas dadas características que se pueden extender a las representaciones figurales en las otras etapas.

Cuando se le cuestiona acerca de lo que observó en las figuras en el trabajo con las etapas dadas el estudiante evidencia la percepción visual involucrada en su forma de proceder. En este sentido, y a fin de profundizar en los procesos inferenciales que siguió en las tres primeras etapas de T2, se le cuestionó durante una entrevista. Con ello fue posible, además, indagar más a fondo su manera de percibir el patrón (véase el siguiente extracto de entrevista).

P: … ves revisando cómo se comporta esto… observa las figuras…yo veo que vas haciendo como marquitas, haber revisa
E29: que aquí en cada una de las figuras va aumentando, aquí de estas, tres y de esta, una [toma como referencia la figura dos de la sucesión]
P: pero, si dices que tres y una ¿cuánto es?
E29: ¡Cuatro!…

El extracto de entrevista respalda lo dicho anteriormente, en el sentido de que el estudiante logra identificar que se trata de un patrón creciente. Además, E29 evidencia su forma de percibir el patrón. En un primer momento, percibe la figura de la etapa en dos sub-configuraciones o partes que la componen, una columna y una fila, ambas constituidas por tres círculos para el caso de la figura 1 (etapa 1). Para el caso de la figura 2 (etapa 2), observa con respecto a la figura de la etapa 1 que la columna aumenta en un círculo y que se agrega otra fila de tres círculos. Lo anterior lo hace explícito cuando menciona: "que aquí en cada una de las figuras va aumentando, aquí de estas, tres [refiriéndose a la fila de tres círculos que se agrega] y de esta, una [haciendo referencia a el círculo que se le aumenta a la columna]". La Figura 81, es una reconstrucción desde lo figural de la forma de percibir el patrón y de razonar de E29.

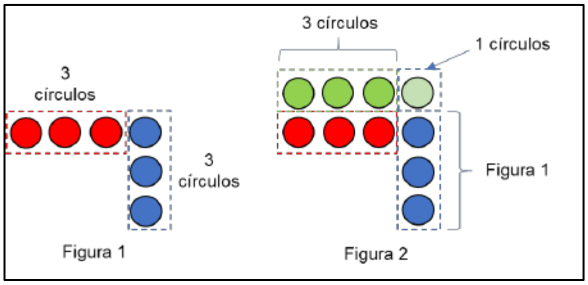


Figura 81. Reconstrucción desde lo figural de la forma de percibir el patrón de E29.

En el extracto, también se evidencia parte del proceso de acompañamiento del profesor-investigador, el cual posibilitó que el estudiante percibiera que el patrón crece en términos de cuatro círculos y figuralmente en términos de una fila de cuatro círculos juntos y ya no en el sentido de una fila de tres más otro círculo. Hasta el momento, la forma de proceder de E29, la desarrolla y la externa empleando un lenguaje exclusivamente pictórico, según lo que deja ver en su hoja de trabajo.

Más adelante, por medio del proceso de acompañamiento por parte del profesor-investigador, el cual consistió en cuestionar al estudiante acerca de su forma de proceder, mediante preguntas estratégicas que indagaran más a fondo, con el propósito de que el estudiante pudiera externar explicaciones de su forma de razonar. Fue mediante este proceso, que el estudiante pudo observar que el número de la etapa coincidía con la cantidad de filas de cuatro círculos que conformaban cada figura. Extractos de la entrevista, muestra como E29, apoyado en un lenguaje verbal logra relacionar la cantidad de filas con el número de la figura.

P: … ¡revisa bien! porque veo que tienes una idea que no has acabado de completar… tú estás encerrando de tres… mira y revisa, sigue esa idea en todo… revisa esa idea…
E29: cuando dice figura uno, vamos dejando éste [señalando la figura 1]
P: ¿cuál vas dejando?
E29: una fila [señalando la fila que corresponde a la figura 1]
P: ¿y cuántos tiene esa fila? [Haciendo referencia a la cantidad de círculos]
E29: seis [menciona el total de círculos que componen la figura 1]
P: ¿pero esto es fila? ¡Esta ya no es fila! [El profesor-investigador le hace ver que en su respuesta está teniendo en cuenta la totalidad de círculos para la figura 1]
E29: ¡esta tiene cuatro! [E29 corrige su respuesta, enfocándose en la fila de cuatro círculos de la figura 1 de la sucesión]
P: ves revisando la otra [haciendo referencia a la figura 2]
E29: la figura dos tiene… dos filas
P: ¿de cuánto?
E29: de seis
P: ¿aquí hay seis? [Señalando la figura 2]
E29: es de… ¡ocho!

Hasta aquí, se reconoce un razonamiento de tipo inductivo por parte de E29, al trabajar desde lo figural con las etapas dadas y las representaciones de las figuras 4 y 5, construidas por él. De este proceso infiere (conjetura) tanto el crecimiento del patrón (cuatro círculos), como también, que el número de filas de cuatro círculos que componen la figura es el mismo que el número de la etapa a la que pertenece dicha figura.

La manera en la que procedió E29, le permitió conjeturar una estructura, en la cual relaciona las dos conjeturas anteriores, establecidas por medio del razonamiento inductivo. Las conjeturas pasan a ser parte de la nueva regla o estructura, establecida también en un proceso donde se involucran acciones inductivas. La regla, permite determinar la cantidad de círculos necesarios para formar cualquier figura de cualquier etapa que se demande. La estructura, E29 la hace explícita en la segunda demanda de T2, haciendo uso de un lenguaje verbal-escrito (véase Figura 82). Además, la nueva regla establecida por el estudiante da cuenta de una percepción más coherente y acorde a su forma de proceder y razonar (véase Figura 83).

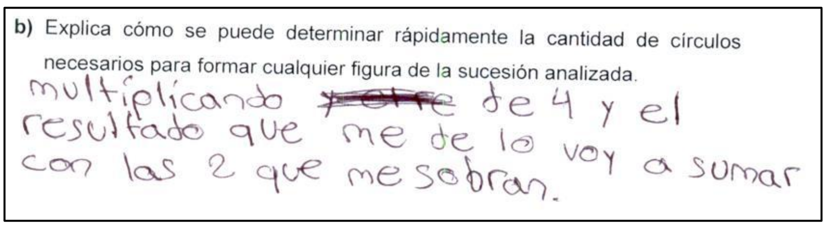


Figura 82. Regla establecida por E29 en su proceso de razonamiento.

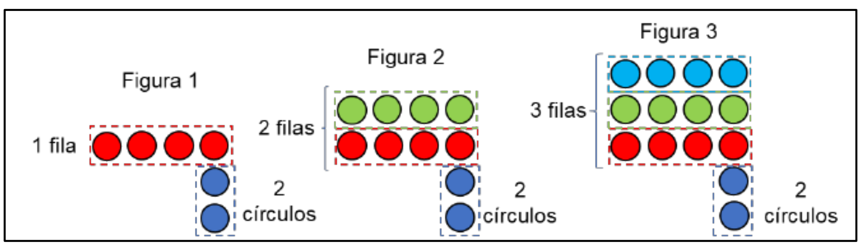


Figura 83. Reconstrucción figural de la percepción visual de E29 al establecer la regla.

En lo que sigue, el estudiante valida la nueva conjetura o regla local, empleándola para determinar la cantidad de círculos necesarios para formar la figura o etapa 5, la cual anteriormente ya había representado y lo que hace con la regla es comprobar si lo que había determinado por medio de un conteo y la representación figural o pictórica era verás, a lo que llega que tanto figuralmente como por medio de la regla establecida, obtiene la misma cantidad de círculos (véase Figura 84). En el proceso de comprobación, se evidencia un razonamiento de tipo abductivo, al usar y validar la nueva regla local convirtiéndola en una regla directa para cualquier etapa de la sucesión.

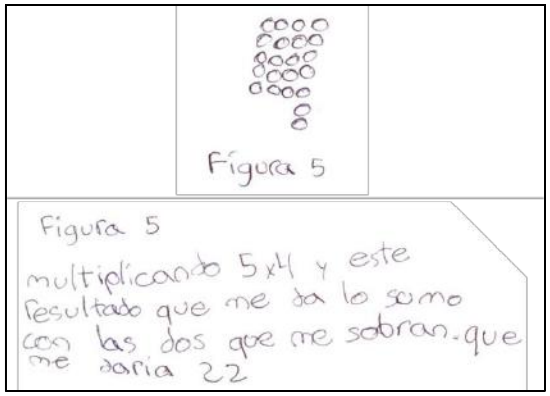


Figura 84. Representación pictórica y regla directa para la etapa 5 (proceso de validación de la regla local establecida).

De esta manera E29, puede dar respuesta a las etapas demandadas en la primera cuestión de T2, incluso haciendo explícita en su hoja de trabajo la regla directa por medio de un lenguaje verbal-escrito para cada una de las etapas demandadas en el ítem (véase Figura 85).

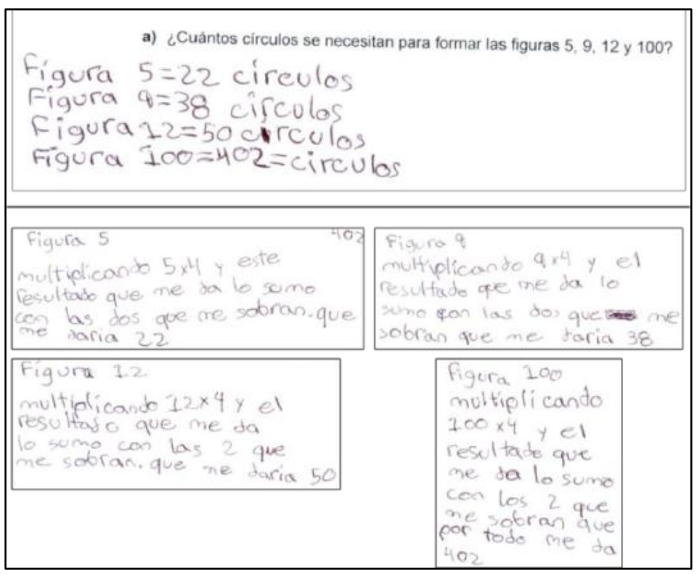


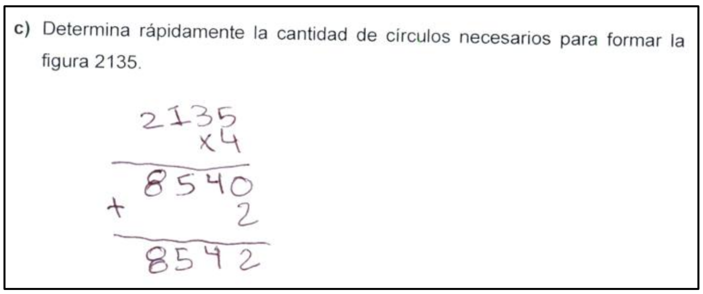
Figura 85. Respuestas y reglas directas de E29 a las etapas demandadas en la primera cuestión de T2.

A fin de profundizar en los procesos inferenciales desarrollados por el estudiante en esta tarea y de que extendiera la regla directa por medio de nuevas inferencias, se le demandó la regla directa para la etapa 100 de la sucesión, lo cual E29 externó de manera verbal y escrita:

P: ¿cuánto te daría si multiplicas por cuatro y le sumas dos? [El profesor-investigador promueve el uso de la regla establecida]

E29: ¡cien por cuatro cuatrocientos dos! [El estudiante verbaliza la expresión usando la regla establecida y posteriormente la escribe en su hoja de trabajo]

Es así como E29 estableció nuevas conclusiones (de reglas directas), verdaderas, a partir de otra verdadera, la de tipo constructiva. El proceso inferencial que manifiesta refiere a un razonamiento de tipo **deductivo**. En ese contexto, el estudiante da respuesta a la tercera demanda de T2, la cual indagaba acerca de la cantidad de círculos para una etapa lejana de la sucesión (etapa 2135). Esto con el propósito de que el estudiante extendiera aún más su forma de razonar y la regla directa establecida, para así confirmar si logró generalizar. En ese sentido, E29 proporciona una respuesta correcta para el número de etapa que pide, pero esta vez haciendo uso de un lenguaje simbólico-numérico, expresado mediante una operación aritmética que se puede asociar a una estructura matemática de la forma: $S_n = 4 \times n + 2$ (ver Figura 86).


c) Determina rápidamente la cantidad de círculos necesarios para formar la figura 2135.

2135
×4
8540
+ 2
8542

Figura 86. Regla directa para la etapa 2135, expresada mediante un lenguaje simbólico-numérico.

Procesos cognitivos desarrollados por E29

Los procesos cognitivos de E29 en T2, se articularon a la percepción visual, que involucró en varios momentos en su proceder. En primer término, analizó las figuras de las etapas dadas, aplicando un conteo de los círculos que conformaban cada figura para determinar cuántos había en cada una. De esta manera, pudo identificar por medio de la percepción visual de lo figural una regularidad que le permitió proporcionar las representaciones pictóricas de las etapas 4 y 5. De ahí, su forma de percibir lo hace ubicarse a analizar las formas, partes o sub-configuraciones que constituyen a las figuras de las etapas 1 a 5. Esto lo llevó a relacionar algunas de las partes (o sub-configuraciones), que componen las figuras (filas de círculos) con el número de la etapa. En ese sentido, reconocer el patrón de recurrencia y la relación entre las variables lo llevó a establecer una estructura matemática plausible que explica el comportamiento del patrón figural en etapas cercanas y lejanas, esto es, inferir una regla general. Pero para lograr establecer la estructura, E29 siguió diferentes tipos de razonamientos, el **inductivo**, al trabajar con los casos particulares, como las etapas dadas, lo cual posibilitó el establecimiento de conjeturas o reglas locales. Además, por el proceso que siguió para validar las reglas locales establecidas en la etapa inductiva de su proceder, involucró un razonamiento de tipo **abductivo,** el cual también es empleado para extender la sucesión, pero a etapas cercanas.

La estructura matemática que infiere E29 en el proceso de razonamiento Inductivo-Abductivo, se relaciona con la forma constructiva multiplicativa: $S_n = 4 \times n + 2$, donde n es el número de la etapa y S_n es la cantidad de círculos que componen la figura en la etapa n. Por su parte, el cuatro de la estructura matemática establecida, se relaciona con la regularidad o el patrón de crecimiento de la sucesión entre etapas consecutivas, mientras que el dos, viene de los dos círculos que "sobra" en las figuras, según el análisis figural de E29 derivado de la percepción visual de la sucesión.

Al establecer y validar la estructura matemática, pasa de ser una regla local a una directa, la cual permitió extender la sucesión a etapas lejanas. En estas etapas, las inferencias de E29, son de tipo **deductivas**. E29 al hacer explícita la estructura matemática evidencia un pensamiento multiplicativo. Además, se observó que siguió un proceso cognitivo basado en la percepción visual de lo figural, así como la coordinación de significados, propiedades, representaciones, para inferir explicaciones.

Los procesos inferenciales de abducción, inducción y deducción fueron fundamentales en la generalización del patrón en este estudiante, tanto en la etapa de formulación, validación y extensión de la conjetura, llevándola de una regla local a una fórmula directa.

Los aspectos visuales jugaron un papel importante en sus inferencias, en el trabajo con las etapas dadas, a la hora de expresar la forma de percibir las tres primeras, en parte o sub-configuraciones que las conformaban y de esa manera interpretar y explicar el comportamiento del patrón figural, a partir de esas tres primeras etapas. Su nivel de abstracción evolucionó. Inicialmente, percibió que el patrón figural crecía en términos de una fila de tres círculos y un círculo más. Pero después por medio de un proceso de acompañamiento por parte del profesor-investigador, E29 pudo observar que lo que percibió en un primer momento como una fila de tres círculos y uno más, se podía agrupar en una sola fila de cuatro círculos, lo cual posteriormente posibilitó que el estudiante relacionara el número de filas de cuatro círculos con el número de la etapa en la que se encontraba y por medio de este proceso E29 pudo llegar a generalizar. Su proceso cognitivo demandó, fundamentalmente el uso del lenguaje figural, apoyándose del verbal, el escrito, y simbólico. Las representaciones que conectó para organizar y coordinar sus ideas fueron fundamentalmente de tipo pictórico, por lo que mantuvo su análisis en el contexto del problema. Se requirió de un proceso de acompañamiento, para que transitara del pictórico al estructural, que acompañó del lenguaje verbal-escrito, lo que favoreció, su evolución en el nivel de abstracción.

El contexto figural a E29, le favoreció en un primer momento debido a que mediante el análisis de lo figural pudo establecer inferencias (conjeturas), que a la postre posibilitó la construcción de una estructura matemática plausible que explica el comportamiento de la sucesión, aunque es claro que el contexto figural en etapas lejanas se constituye en un obstáculo para los estudiantes, debido a que es ineficiente y en ocasiones imposible realizar representaciones pictóricas de etapas muy grandes.

5.1.1.2.f. Estudiante 31

La primera forma de aproximarse a T2 por parte de E31, consistió en observar y analizar las figuras de las etapas dadas. En ese contexto y según lo que su percepción visual de las figuras le permitió, E31 aplicó un conteo con el fin de determinar la cantidad de círculos que conformaban cada figura para estas tres primeras etapas. De ahí, rápidamente identifica que se trata de un patrón creciente, es decir, reconoce que la cantidad de círculos aumenta de una etapa a otra y además que esa cantidad es invariante, por lo que infiere (conjetura) que va de cuatro en cuatro.

Extractos de su entrevista, muestra cómo se involucró con las etapas dadas del patrón figural y da evidencia de lo expresado anteriormente.

P: ¿las figuras son crecientes?
E31: ¡sí!
P: va aumentando, entonces ¿cuánto aumenta?
E31: va aumentando de cuatro en cuatro cada vez
P: ¡sí! Por ejemplo, aquí ¿cuántas son? [Señalando la figura 1]
E31: ¡seis!
P: ¿y aquí? [Señalando la figura 2]
E31: ¡diez!
P: ¿diez más cuatro? [Para la figura 3]
E31: diez más cuatro serian catorce.

Hasta aquí, la capacidad expresiva de E31 es mayoritariamente de naturaleza simbólica y verbal-escrita, que usa para explorar cuál es el comportamiento que sigue el patrón y para explicar el razonamiento que siguió y lo que pudo identificar en el trabajo con las tres primeras etapas de la sucesión.

Es de su análisis a los casos particulares o etapas dadas, que E31 infiere que el patrón figural crece de cuatro en cuatro. En ese sentido, el proceso inferencial que se manifiesta es de tipo **inductivo**, al identificar una regularidad con base en el trabajo con un conjunto de observaciones, en este caso las etapas dadas. Y aunque el estudiante no hace explícito en su hoja de trabajo validar la conjetura, (proceso **abductivo**), E31, da muestra de que esta regularidad identificada, se aplica en las demás etapas de la sucesión. Esto quiere decir, que para el estudiante la regularidad es válida para todas las etapas de la sucesión.

Hasta el momento, la conjetura que establece mediante su forma de proceder resulta ser útil para extender la sucesión a etapas cercanas, es decir, para determinar la cantidad de círculos en etapas cercanas consecutivas, pero resulta ser poco eficiente para etapas lejanas de la sucesión. Lo que provoca, que el estudiante se centre en la búsqueda de una estrategia que le permita determinar la cantidad de círculos para figuras lejanas o con números de etapas grandes, y así, poder dar respuesta a las demandas de T2. Para ello, en un primer momento el estudiante requirió de un proceso de acompañamiento por parte del profesor-investigador, que provocara un cambio de estrategia que lo llevara del conteo recursivo reconocido y aplicado en etapas cercanas, a una estructura que explicara el comportamiento de la sucesión, tanto en etapas cercanas como lejanas. El siguiente extracto de entrevista evidencia parte de ese proceso de acompañamiento:

P: ahora, si yo me pongo a sumar todo el tiempo no voy a acabar, porque tengo que hacer 1000, 5000, 100000… ¿cómo le hago?
Mira, ve cómo se van comportando. Esto tiene una forma de cómo están ordenadas… ¿Qué orden ves?
E31: es que cada vez va aumentando más y más
P: pero sin contar ¿qué orden observas? ¿Cómo va cambiando? ¿Cómo están organizadas las bolitas?
E31: por figuras
P: ¡sí! Pero ya en la figura ¿cómo están las bolitas organizadas?
E31: en forma de ele
P: ¿pero esta ele [refiriéndose a la figura 1], tiene lo mismo [cantidad de círculos] que esta ele [figura 2] y que esta ele [figura 3]?
E31: ¡no!

La acción del profesor -investigador, consistió en posibilitar que el estudiante cambiara la estrategia de conteo, para que percibiera lo general en el patrón. En ese sentido, E31, percibió una forma común (una ele) entre las etapas figurales de la sucesión, evidencia una percepción sensorial (de formas) que coordina con una percepción cognitiva y logra identificar partes o sub-configuraciones comunes entre las figuras de las etapas, como lo es, que las figuras están conformadas por filas de cuatro círculos (véase parte superior de la Figura 87).

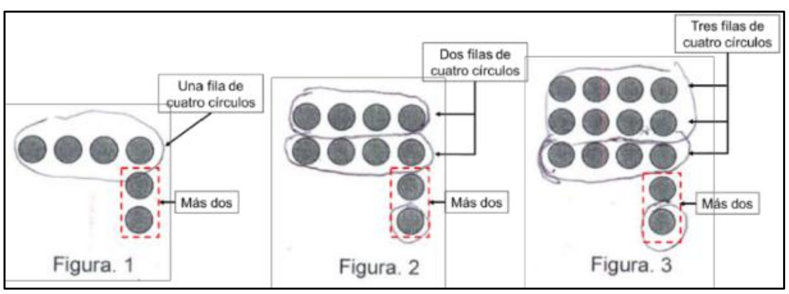
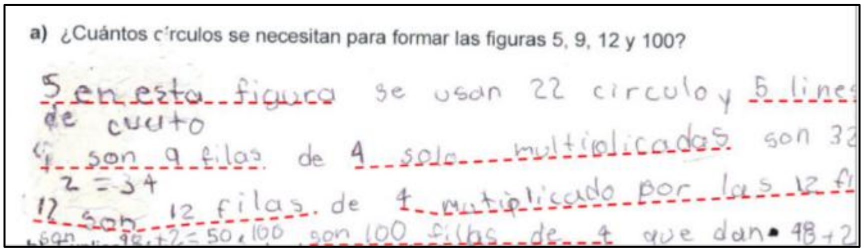


Figura 87. Descomposición figural de E31, mediante la percepción visual del patrón.

De esta manera el estudiante manifiesta una vez más un proceso de razonamiento inductivo al trabajar con las primeras tres etapas (etapas dadas) y al lograr inferir desde lo figural y por medio del proceso de acompañamiento otra conjetura, la cual es que el patrón crece en términos de una fila de cuatro círculos y no cuatro círculos por separados. Esta nueva conjetura, la pone en evidencia mediante un lenguaje verbal-escrito al dar respuesta a la primera demanda de T2 (véase Figura 88).



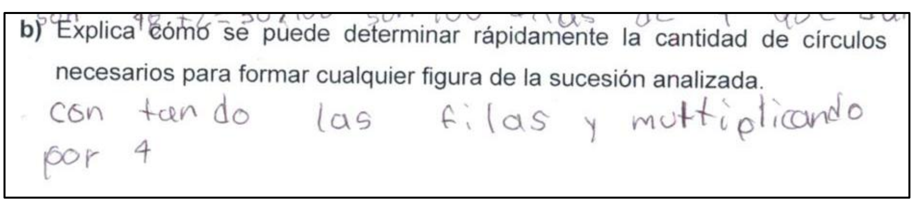
a) ¿Cuántos círculos se necesitan para formar las figuras 5, 9, 12 y 100?

5 en esta figura se usan 22 circulo y 5 lines de cuato
9 son 9 filas de 4 solo multiplicados son 3
2 = 34
12 son 12 filas de 4 multiplicado por las 12 f
son 48+2= 50, 100 son 100 filas de 4 que dan 48+2

Figura 88. Respuesta a la primera demanda de T2.

En la Figura 88, se muestra que el estudiante se enfoca en las filas o “líneas” (como las llamó) de cuatro círculos que identificó en las etapas dadas, y así, mediante un proceso abductivo, usó y validó su conjetura al extenderla a otras etapas. En la producción escrita de E31 que se muestra en la Figura 88, se logra evidenciar algo más acerca de lo que percibió el estudiante. Se logra identificar que el número de etapa coincide con el número de filas que conforman la figura en la etapa que se le demanda. Lo que sigue, es multiplicar el número de etapa o de filas (que según lo evidenciado por E31, es lo mismo) por cuatro, lo cual viene dado por lo que cada fila está constituida por cuatro círculos y luego al resultado de esta operación le suma dos. El dos que le adiciona al final, viene dado de igual manera por la percepción visual del patrón en las etapas dadas, visualizando que en cada figura de las tres primeras etapas, se pueden percibir dos círculos en la parte inferior que se mantienen invariantes (véase Figura 87, parte inferior de la figura). Y a pesar de que E31 no hace explícito que suma el número dos al final, en sus cálculos si se refleja. De esta manera puede dar respuestas correctas a las etapas demandadas en la primera cuestión de T2.

Al indagar por la segunda cuestión de T2, la cual buscaba que el estudiante hiciera explícita, una regla o estructura matemática que explicara el comportamiento de la sucesión en etapas cercanas y lejanas, E31 da evidencia de lo que percibió visualmente en el trabajo con las etapas dadas, número de filas y la multiplicación por cuatro. En ese contexto, refleja un pensamiento multiplicativo al establecer una estructura matemática expresada mediante un lenguaje verbal-escrito, que se asocia a la forma: $S_n = 4 \times n$, donde n es el número de filas o de etapa (véase Figura 89).

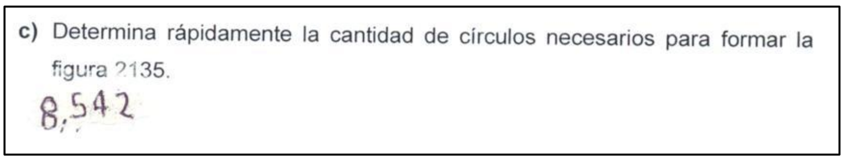


b) Explica cómo se puede determinar rápidamente la cantidad de círculos necesarios para formar cualquier figura de la sucesión analizada.

con tando las filas y multiplicando por 4

Figura 89. Estructura matemática establecida por E31.

Hasta aquí, cabe resaltar que, aunque en la segunda cuestión el estudiante no deja ver en su estructura que además de multiplicar por cuatro se debe sumar dos, según la forma en la que percibió lo figural. En los cálculos externados en su producción escrita, si da evidencia que tiene en cuenta este aspecto a la hora de proporcionar el resultado de la cantidad de círculos que conforman las etapas demandadas en T2. Un ejemplo de esta acción es cuando se le demanda determinar la cantidad de círculos que formarían la figura 2135, en el contexto de la tercera cuestión de T2, y a pesar de que E31 solo proporciona el resultado, da una respuesta correcta y coherente a la forma de proceder y razonar en el transcurso de la tarea (véase Figura 90). De esta manera, el estudiante logra establecer inferencias verdaderas, a partir de otras verdaderas ya establecidas, esto se evidencia, al lograr extender la sucesión a una etapa lejana, dando muestra de un razonamiento de tipo **deductivo**.


c) Determina rápidamente la cantidad de círculos necesarios para formar la figura 2135.

8,542

Figura 90. Respuesta de E31 a la tercera demanda de T2.

Procesos cognitivos desarrollados por E31

En el desarrollo de los procesos cognitivos de E31 en T2, la percepción visual de las formas y las sub-configuraciones o partes que conforman las figuras de las etapas dadas, jugaron un papel crucial en el estudiante, debido a que el identificar características o rasgos comunes en la sucesión figural por medio de la percepción visual, posibilitó que lograra establecer conjeturas por medio de acciones inductiva y posteriormente validarlas en un proceso abductivo, y de esa manera llegar a construir una estructura matemática plausible para explicar el comportamiento de la sucesión tanto en etapas cercanas como lejanas. Para llegar a esto requirió de un proceso de acompañamiento por parte del profesor-investigador, lo cual posibilitó que E31, pudiera generalizar y sintetizar el proceso en una estructura matemática articulada a un pensamiento multiplicativo de la forma: $S_n = 4 \times n + 2$, la cual es constructiva por la forma en que se estructuró. Establecer la estructura matemática permitió que E31, extendiera sus inferencias a etapas lejanas de la sucesión, evidenciando en este proceso un razonamiento de tipo deductivo.

En ese contexto, los procesos inferenciales de abducción, inducción y deducción fueron fundamentales en la generalización del patrón en este estudiante, tanto en la etapa de formulación, validación y extensión de la conjetura, llevándolo de una regla local a una fórmula directa.

Los aspectos visuales jugaron un papel importante en las inferencias de E31, en el trabajo con las etapas dadas, a la hora de expresar la forma de percibir las tres primeras y cómo estructurar y organizar las partes o sub-configuraciones que constituían a las figuras, y que fue lo que a la postre posibilitó la construcción de una estructura matemática plausible que explicara el comportamiento de la sucesión de manera general.

El contexto figural, para el caso de E31, favoreció la construcción de la estructura matemática plausible que explique el comportamiento de la sucesión en etapas lejanas, aun por encima del contexto numérico, debido a que por medio del análisis y lo percibido en lo figural, por ejemplo filas de cuatro círculos, posibilitó que el estudiante estableciera conjeturas que ayudaran a la construcción de la estructura, lo que fuese sido más complejo por medio de la estrategia de conteo recursivo que en un primer momento planteó en el trabajo con las etapas dadas, aunque para lograr percibir lo figural necesitó el acompañamiento del profesor-investigador. En el trabajo con T2, E31 externó sus explicaciones mayormente por medio de un lenguaje verbal-escrito.

5.1.1.2.g. Estudiante 34

La forma en que E34 se involucró con el patrón figural de la sucesión en T2, consistió en observar y analizar las figuras de las etapas dadas. A partir de ello, se indaga acerca de su forma de proceder en la tarea, en particular, en lo que percibió en el análisis de las figuras en las etapas dadas. En ese contexto, E34 percibió el patrón figural de manera diferente a los demás estudiantes descritos, debido a que dejó ver desde un primer momento en sus explicaciones que se enfocó visualmente en las columnas de círculos que formaban las figuras y no en las filas, como fue la percepción de otros estudiantes en el trabajo con el patrón figural de T2.

Extractos de su entrevista en correspondencia con la Figura 91, muestra cómo percibió el patrón figural, apoyándose de un lenguaje pictórico y verbal-escrito.

P: haber dime, ¿qué hiciste?
E34: como vi que en la figura nueve, había nueve, a mí se me hizo fácil que ya no iría a poner circulitos…
P: ¿pero había nueve qué?
E34: ¡nueve círculos!
P: ¿nueve círculos?
E34: aquí [señala las columnas de nueve círculos que componen la figura 9]… en cada línea
P: ¡aaaah!... nueve en cada línea… ¿y luego?... ¿Cuántas líneas tienes?
E34: ¡tengo cuatro!

Tanto la Figura 91, como el anterior fragmento de entrevista, dan evidencia de la manera en que E34 percibió el patrón figural de la sucesión, tomando como referencia la etapa 9 y la representación pictórica de ésta, construida por él mismo para explicar su forma de proceder. En este sentido y a pesar de que, en un primer momento el estudiante centra sus explicaciones tomando como referencia la figura 9, en la discusión grupal cuando pasa a la pizarra a exponer a la clase su proceder en la tarea, deja ver de manera más clara cómo fue ese trabajo con las tres primeras etapas (etapas dadas), lo cual posibilitó la construcción de la representación para la etapa 9 y la explicación por medio de lo percibido.

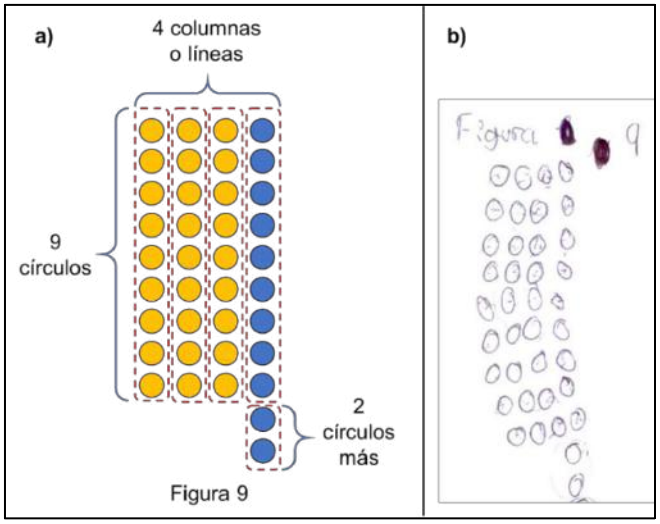


Figura 91. a) Reconstrucción de la forma de percibir el patrón figural de E34. **b**) Representación figural de la etapa 9 de E34.

E34: yo vi que como aquí me cabían tres y aquí, era la del uno, así que nada más había una fila de tres, era la del uno [E34 señala la fila de tres círculos en la figura uno (etapa 1)] y acá eran dos [toma como referencia la figura dos (etapa 2) y señala las dos filas de tres círculos] y acá tres [figura tres (etapa 3) y señala esta vez las tres filas de tres círculos]…

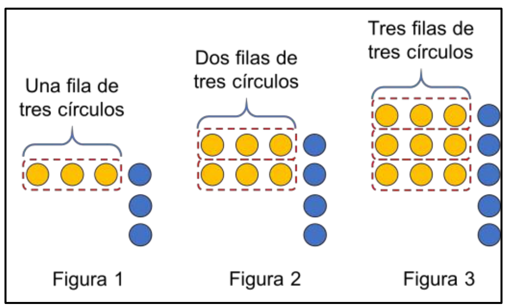


Figura 92. Reconstrucción desde lo figural de la forma de proceder de E34 en la discusión grupal.

La Figura 92, es una reconstrucción de la manera de percibir el patrón figural en el trabajo con las etapas dadas de E34. De esa manera, el estudiante logra construir las representaciones pictóricas de las etapas 5, 9 y 12 (véase Figura 93) y de forma verbal y pictórica, externa a la clase en la pizarra cómo construyó la etapa 9, siguiendo la idea de lo percibido en el trabajo con las tres primeras etapas.

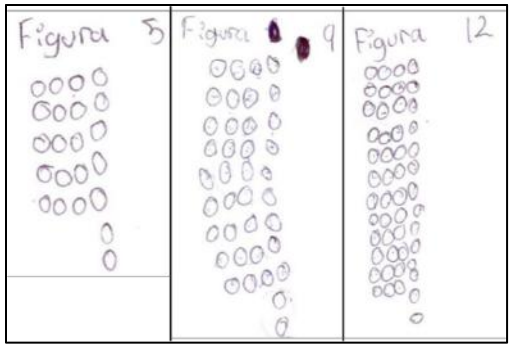
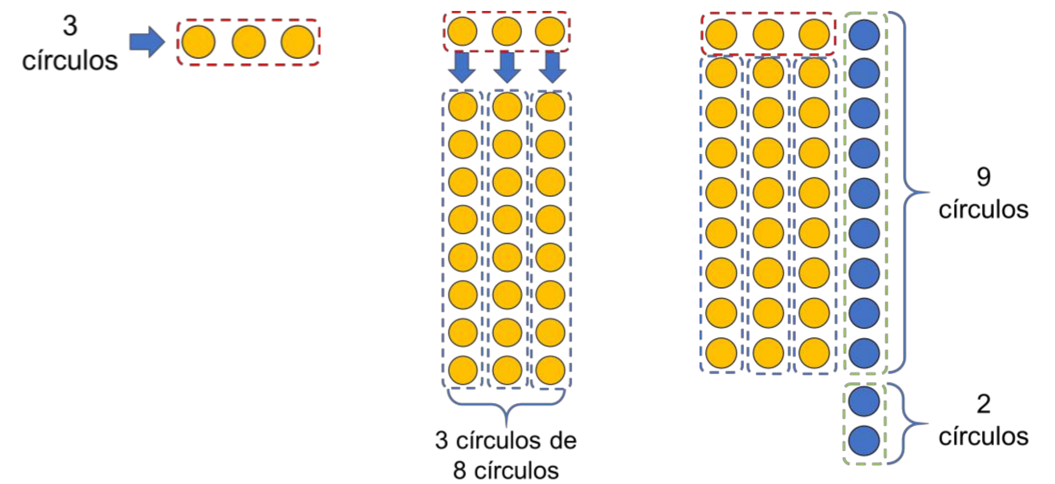


Figura 93. Extensión del patrón figural por parte de E34, para las etapas 5, 9 y 12 de la sucesión.

E34: … en la nueve [etapa 9] yo puse… aquí… puse tres [dibuja en la pizarra una fila conformada por tres círculos]… así en filas, fui poniendo nueve en cada fila de los tres [dibuja ocho círculos justo debajo de cada círculo que conforman la fila de tres círculos que dibujó al inicio de la etapa 9].
Yo lo hice así con cada fila y en cada fila vi que habían, nueve [cuando menciona la palabra “filas”, a lo que está haciendo referencia es a las columnas de nueve círculos]… como aquí también hay nueve, y aquí le están agregando otros dos [toma como referencia la figura en la etapa 3, dibujada en la pizarra y señala la columna más larga de esta figura, con el fin de dar a entender donde se agregan esos dos círculos que menciona]… aquí también le puse nueve y le agregué otros dos [aquí se refiere a cómo construyó la columna más larga de la figura nueve (etapa 9)]… ya de ahí lo conté y en total eran… 37… 38 [corrige rápidamente su respuesta anterior]… pues a mí se me hizo fácil y mi resultado fue 38…

Tabla 16. Reconstrucción de la Manera que E34 Procedió para Construir la Etapa 9 de la Sucesión Según la Manera que Percibió el Patrón Figural en el Trabajo con las Etapas Dadas.

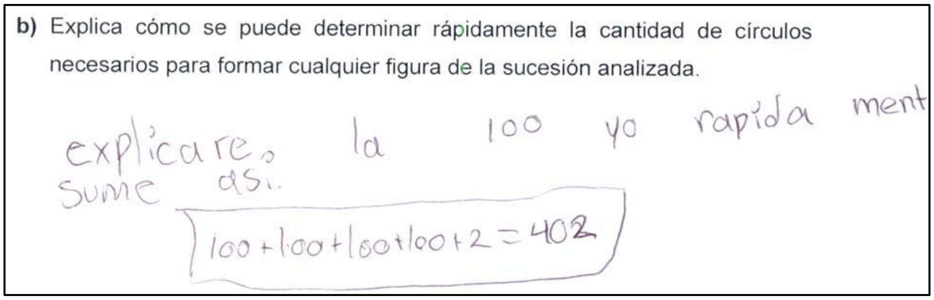
Paso 1	**Paso 2**	**Paso 3**
Dibuja los tres círculos iniciales.	Agrega ocho círculos para completar las tres columnas de nueve.	Agregar otra columna de nueve círculos y adicionar dos más debajo de ésta, para la columna más larga.



En el anterior extracto de la discusión grupal y en la Tabla 16, se muestra el proceso de construcción de la figura (etapa) 9 de la sucesión, evidenciando la forma de percibir el patrón figural del estudiante, el cual se enfocó en las cuatro columnas que constituyen cada figura, tres que son de igual tamaño que coinciden con el número de etapa y otra más "larga", que se forma al adicionar dos círculos más a una columna con la misma cantidad de círculos que las otras tres, es decir, E34 percibió que la figura en cada etapa se puede formar con cuatro columnas de círculos de igual número que el de la etapa y a una de esas columnas se le adiciona dos círculos más para formar la columna más larga. Esto último, fue la conjetura (o regla local) establecida por medio de la percepción visual de E34, manifestando un razonamiento **inductivo** al trabajar con las etapas dadas e inferir la conjetura por medio de éste. Por su parte, el razonamiento **abductivo** lo pone de manifiesto, al usar la conjetura establecida en la etapa inductiva para extender la sucesión en forma figural, dando evidencia de este proceso, al proporcionar las representaciones pictóricas de las etapas 5, 9 y 12 de la sucesión (véase Figura 93) y de esta manera, también valida la regla local, dando las explicaciones y argumentos del caso, tomando como referencia la representación figural de la etapa 9 (véase extractos de entrevista y discusión grupal).

Hasta aquí, la capacidad expresiva de E34 es de naturaleza pictórica y verbal-escrita, que usa para explorar cuál es el comportamiento que sigue el patrón figural en las etapas dadas y para explicar el razonamiento que siguió al extender el patrón de manera pictórica a etapas cercanas, y de esta forma dio respuesta a la primera demanda de T2.

Al indagar por la segunda cuestión de T2, la cual buscaba que el estudiante externara la regla o estructura matemática que explicara el comportamiento de la sucesión en etapas cercanas y lejanas, E34 emplea un lenguaje simbólico-numérico por medio de una operación aritmética, donde toma como referencia la etapa 100 demandada en la primera cuestión de T2, para explicar y dar respuesta a la segunda demanda (véase Figura 94).


b) Explica cómo se puede determinar rápidamente la cantidad de círculos necesarios para formar cualquier figura de la sucesión analizada.

explicare la 100 yo rapida ment sume asi.

100+100+100+100+2=402

Figura 94. Explicación de la estructura establecida por E34 por medio de la etapa 100.

En ese contexto y a fin de profundizar en los procesos inferenciales desarrollados por el estudiante en esta tarea y de que extendiera la regla directa por medio de nuevas inferencias, se le cuestionó, acerca de su forma de proceder en la etapa 100 y su respuesta en la segunda demanda de la tarea:

P: ¿entonces qué dijiste?
E34: como aquí son cien, a mí se me hizo fácil que en cada rayita [columna] hubiera cien, entonces yo sumé cien más cien [sumó cien cuatro veces]
P: ¿y ese dos cuál es? [Haciendo referencia al dos que suma al final de sumar los cuatro 100]
E34: ese dos fue porque como vi que se iban agregando dos, y se iban agregando, [se refiere a lo que percibió en el trabajo con las etapas dadas]… vi que había otros dos [haciendo referencia a los dos círculos de la columna más larga], así que se me hizo fácil sumarlos

De esta manera E34 expresa la estructura matemática que logró establecer, articulándola a un pensamiento aditivo, la cual es coherente y consistente con lo que percibió visualmente, debido a que los cuatro 100 que suma en la Figura 94, vienen de las cuatro columnas de igual número que el de la etapa y el número dos que suma a continuación, viene dado por los dos círculos que se agregan para formar la columna más larga.

Es así como E34 estableció nuevas conclusiones (de reglas directas), verdaderas, a partir de otra verdadera, de lo percibido. El proceso inferencial que manifiesta refiere a un razonamiento de tipo **deductivo**, el cual deja en manifiesto al responder etapas lejanas de la sucesión como, por ejemplo, la etapa 100 y la etapa 2135, concerniente a la tercera cuestión demandada en T2 (véase Figura 95).

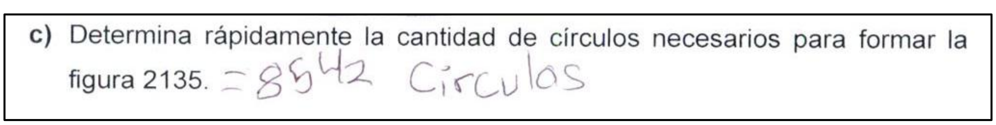

c) Determina rápidamente la cantidad de círculos necesarios para formar la figura 2135. = 8542 Circulos

Figura 95. Respuesta de E34 a la tercera demanda de T2.

En la tercera cuestión demandada en T2, una vez más deja en evidencia la coherencia y la consistencia de lo percibido de manera visual con la estructura matemática que estableció, traducido en un pensamiento aditivo expresado en una operación aritmética, donde proporciona una respuesta correcta a la demanda de determinar la cantidad de círculos necesarios para formar la figura o etapa 2135 de la sucesión (véase Figura 96).

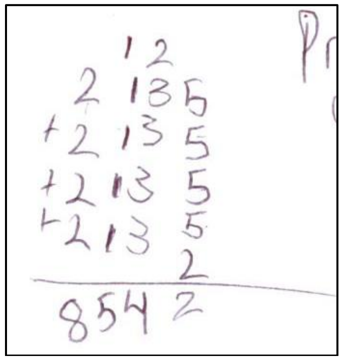


Figura 96. Regla directa establecida por E34 para la etapa 2135 de la sucesión.

Procesos cognitivos desarrollados por E34

La percepción visual en este estudiante jugó un papel importante en los procesos cognitivos que logró desarrollar, debido a que, la manera en la cual percibió el patrón figural en partes o sub-configuraciones que lo componían, posibilitó establecer una conjetura o regla local que posteriormente se convertiría en la regla directa o estructura matemática plausible que explicaría el comportamiento de la sucesión, tanto para etapas cercanas como para lejanas.

En ese contexto, E34 identificó a partir del trabajo con las etapas dadas que las figuras de cada etapa estaban conformadas por cuatro columnas de igual cantidad de círculos que el número de etapa, luego percibió que una de esas cuatro columnas tenía dos círculos más, que se mantenían invariantes de una etapa a la otra. Siguiendo ese razonamiento pudo externar una expresión matemática articulada a un pensamiento aditivo que se puede relacionar con la forma: $S_n = n + n + n + n + 2$, la cual es constructiva, debido al proceso que se llevó a cabo para construirla y donde n es según la percepción visual de E34, la cantidad de círculos que forman las cuatro columnas que constituyen a su vez la representación figural de la etapa n, o lo que es lo mismo, el número de la etapa que se demande, y el dos viene dado por los dos círculos extras que se adicionan para formar la columna más larga.

Los procesos inferenciales de abducción, inducción y deducción fueron fundamentales en la generalización del patrón en este estudiante. El proceso inductivo, se puso de manifiesto en la etapa de formulación o establecimiento de la conjetura en el trabajo con las tres primeras etapas, donde pudo inferir una regla local que explicara el comportamiento de la sucesión a partir de dicho trabajo con las etapas dadas. El proceso abductivo, tuvo lugar en la etapa de validación de la conjetura o regla local, al hacer uso de ésta para extender la sucesión a etapas cercanas, por ejemplo, las etapas 5. 9 y 12 (véase Figura 93). Por su parte el proceso deductivo, tuvo lugar al extender la conjetura ya validada con etapas cercanas, a etapas lejanas demandadas de la sucesión, por ejemplo, etapa 100 y etapa 2135, llevándola de una regla local a una fórmula directa, como se evidencia en la producción escrita del estudiante.

Para el caso de E34, los aspectos visuales articulados al contexto figural de la tarea jugaron un rol importante, debido a que, en el trabajo con las etapas dadas, la forma en la que el estudiante las percibió, además de cómo las estructuró y organizó en partes o sub-configuraciones que constituían a las figuras en cada etapa, posibilitó la construcción de una estructura matemática plausible que explicara el comportamiento de la sucesión. Es así, como E34 a partir de lo percibido visualmente en el patrón figural de las tres primeras etapas (etapas dadas), logra establecer una conjetura y argumentos que expliquen la estructura matemática que sintetiza su proceso de generalización.

Su proceso cognitivo demandó el uso del lenguaje verbal, escrito, figural y simbólico. Las representaciones que conectó para organizar y coordinar sus ideas fueron de tipo pictórica, numérica y verbal-escrita principalmente, y éstas fueron usadas en diferentes momentos, la pictórica, útil en primera instancia para explorar mediante la percepción visual, cuál es el comportamiento que sigue el patrón figural en las etapas dadas y establecer la conjetura. La verbal-escrita, fue empleada tanto en la etapa individual como en la discusión grupal, con el fin de argumentar, justificar y explicar el razonamiento que siguió al extender el patrón a etapas cercanas y lejanas. El sistema de representación numérico, E34 lo empleó principalmente para representar las fórmulas directas para las etapas lejanas de la sucesión, como es el caso de la etapa 100 y la 2135, expresándolas como una operación aritmética (véase Figura 94 y Figura 96).

5.1.1.3. Tarea 3: La Te

De los 22 estudiantes matriculados en el grupo académico en que se realizó la investigación, doce (E1, E4, E9, E10, E12, E19, E23, E26, E27, E29, E31, E36) lograron construir una expresión matemática que explica el comportamiento que sigue el patrón figural de la sucesión en la tarea 3, en cualesquiera de sus etapas, esto es, una fórmula directa.

Después de que el profesor-investigador desarrolló la etapa de comprensión de la tarea, se les pidió a los estudiantes trabajar de manera individual. En un primer momento, fijaron su atención en percibir una forma general del patrón figural de la sucesión, asociando las figuras del patrón con “algo” conocido para ellos, una letra, “la te”, mostrando en un primer momento una percepción de tipo sensorial (de formas). Luego, centraron su atención en el crecimiento entre figuras, cuánto crece una figura con respecto a la otra, otros se enfocaron en la manera que estaban organizadas las figuras en cada etapa de la sucesión, logrando identificar en estas, partes que varían y partes que permanecen invariantes. En este sentido, se identificaron maneras diversas de proceder, que atendieron a la manera en que cada estudiante percibió las figuras que forman cada etapa y de cómo organizaron y presentaron sus ideas. En ese proceso, conectaron significados, propiedades y conceptos matemáticos, según su nivel de abstracción y los evidenciaron mediante el uso del lenguaje verbal, escrito, pictórico y simbólico.

A fin de comprender el razonamiento que siguieron en T3, se realizaron entrevistas a algunos participantes, en diferentes momentos de su intervención en la tarea, en la etapa individual. Otro momento, cuando se pidió a algunos, compartir su razonamiento con el grupo, apoyándose de la pizarra.

5.1.1.3.a. Estudiante 1

La forma en que E1 se involucró con el patrón figural de la sucesión, consistió en observar y analizar las figuras de las etapas dadas. En ese contexto, dicho trabajo consistió en un primer momento en un conteo de las partes (cuadrados) que formaban el patrón figural en cada etapa dada. Así, reconoció que en la primera etapa (figura 1), se constituía por cuatro cuadrados, que la segunda y tercera (figuras 2 y 3), se formaba por siete y diez cuadrados respectivamente. Luego de ese trabajo, E1, se involucra de manera diferente con el patrón figural de la sucesión. Enfoca su atención en percibir características desde lo figural, lo cual lo lleva a descomponer las figuras de cada etapa en dos partes o sub-configuraciones, una parte que varía y una parte que permanece invariante.

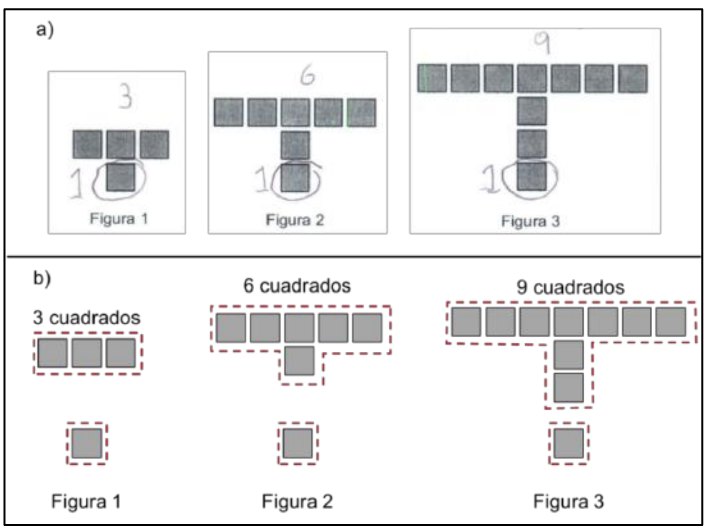


Figura 97. a) Forma de percibir de E1 (producción escrita). **b)** Reconstrucción desde la forma de percibir el patrón de E1.

La parte b) de la Figura 97, presenta una reconstrucción desde lo figural de la percepción visual de E1 y de lo externado en su hoja de trabajo (parte a). En la forma de proceder del estudiante se puede evidenciar la descomposición en dos partes de las figuras de las etapas dadas, una de esas partes se mantiene constante o invariante, el cuadrado que encierra en la parte inferior de cada figura (véase parte a de Figura 97) y la otra ubicada en la parte superior que crecía en términos de tres cuadrados entre etapas consecutivas (véase parte a y b de Figura 97). Hasta aquí, la capacidad expresiva de E1 es mayoritariamente de naturaleza simbólica y pictórica, que usa para explorar cuál es el comportamiento que sigue el patrón y para explicar el razonamiento que siguió para las primeras tres etapas de la sucesión.

Más adelante, el estudiante traduce por medio de un lenguaje simbólico-numérico, la forma de percibir visualmente el patrón figural, lo cual posibilitó el establecimiento de una primera conjetura articulada a un pensamiento aditivo (véase Figura 98).

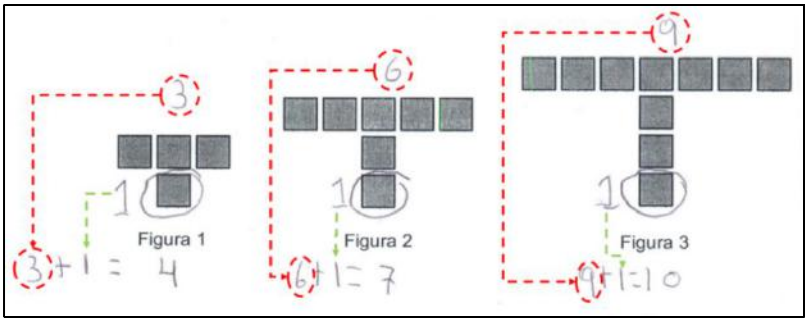


Figura 98. Regla local articulada a un pensamiento aditivo, establecida por E1 por medio de su percepción visual.

Las expresiones aritméticas que proporcionan la cantidad de cuadrados que conforman las figuras de las tres primeras etapas, evidenciadas en la Figura 98, son establecidas en un proceso **inductivo**, donde se deja ver la manera en la que E1 percibió visualmente el patrón figural en el trabajo con las etapas dadas. La Figura 99, es una reconstrucción de la manera de percibir del estudiante y de cómo se explica y se articula la conjetura establecida (operaciones aritméticas), a lo percibido visualmente.

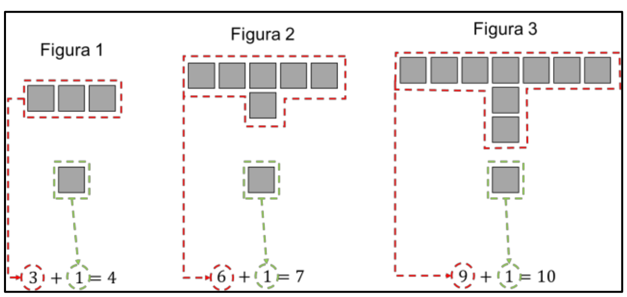


Figura 99. Reconstrucción desde lo figural de la forma de percibir el patrón y cómo se articula a la conjetura establecida.

Es de su análisis a los casos particulares o etapas dadas, que E1 infiere una segunda conjetura, a partir de la primera, la cual consiste en descomponer en múltiplos de tres el primer miembro de las operaciones aritméticas expresadas para las tres primeras etapas de la sucesión (véase Figura 100). La descomposición en múltiplos de tres, E1 la realiza de manera estratégica, identificando que la parte que varía crece de tres en tres entre etapas consecutivas. Extracto de su entrevista, muestra cómo E1, logró construir esta segunda conjetura a partir de la primera y por medio de un proceso de acompañamiento del profesor-investigador.

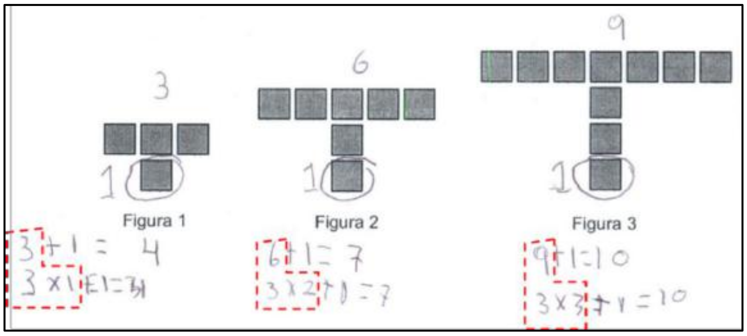


Figura 100. Segunda conjetura establecida por E1 derivada de la primera.

P: ¡Haber dime!
E1: … Tres por tres…
P: … ¿dónde tres por tres?
E1: Acá
P: ¿Pero para cuál? ¿Para el nueve no? … ¡Para el nueve! [Se refiere al nueve de la figura 3]… ¿y aquí? [figura 2]
E1: Tres por dos…
P: ¿Y aquí para este tres? [Refiriéndose a la figura 1]
E1: ¡Tres por una!

En el anterior fragmento de entrevista, E1 expresa la descomposición en múltiplos de tres que externa en su hoja de trabajo (ver Figura 100). Lo que sigue es un proceso de acompañamiento por parte del profesor-investigador, para que el estudiante logre expresar en su producción escrita la manera de proceder y el establecimiento de la segunda conjetura. El siguiente extracto de entrevista da muestra de ese proceso:

P: ¿Y aquí? [figura 2]
E1: ¡Tres por dos!
P: ¡Tres por dos! … Haber escríbelo… así…abajo [hay una pausa donde E1 trabajó en su producción escrita]
P: Pero más uno… ¿no? … tres por uno más uno para que te de cuatro… ¿sí? … ¿y aquí cómo sería? … ¿cómo sería en la segunda figura? …
E1: Seis por una… más una [seis porque piensa en 3x2 para el caso de la figura 2]
P: … Haber… ¿cómo sería este? [Una vez más pregunta por la figura 2]… ¿cómo habías dicho hace rato?
E1: seis por dos
P: … ¿Seis?
E1: No… tres por dos… tres por dos... [Corrige su respuesta]
P: ¿Tres por dos para que te de cuánto?
E1: seis
P: Ajá…. Tres por dos… ¿Y luego?
E1: ¡Más uno!
P: ¡Más uno!… ajá... haber acá… ¿en la otra? ¿En la otra Cuánto? [Refiriéndose a la figura 3]
E1: Tres por… tres…
P: ajá… tres por tres… ¿y luego?

E1: ¡Más uno!

En el proceso llevado a cabo por el estudiante y el profesor-investigador, se pone una vez más de manifiesto un razonamiento **inductivo**, al trabajar y establecer una conjetura con base en un conjunto de observaciones, que en este caso son las expresiones aritméticas conjeturadas en un primer momento en el trabajo con las etapas dadas. Aquí también, se pone de manifiesto un razonamiento **abductivo**, al validar la nueva conjetura a partir de la anterior y de los resultados obtenidos en las primeras tres etapas con la estrategia de conteo y posteriormente, usarla para proporcionar la respuesta de la etapa 4.

P: … ¿Y entonces? ¿En la figura cuatro cuánto sería?
E1: Tres por… por cuatro
P: ¿tres por cuatro y qué más?
E1: … ¡Más uno!

En la producción escrita de E1, se reconoce una evolución en su pensamiento, yendo de establecer una conjetura por medio de la percepción visual de las etapas figurales articulada a un pensamiento aditivo, a construir una estructura matemática plausible (o regla directa) articulada a un pensamiento multiplicativo que explica de manera más acertada el comportamiento de la sucesión tanto para etapas lejanas como cercanas. Evidencia de lo anterior es que E1, logra extender la sucesión a etapas demandadas en T3, manteniendo coherencia con la manera de proceder en las tres primeras etapas y lo establecido en la segunda conjetura en el proceso inductivo en el trabajo con éstas (véase Figura 101).

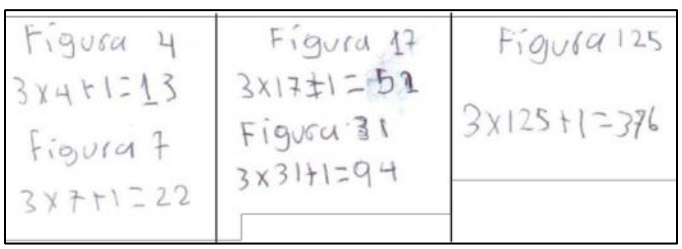


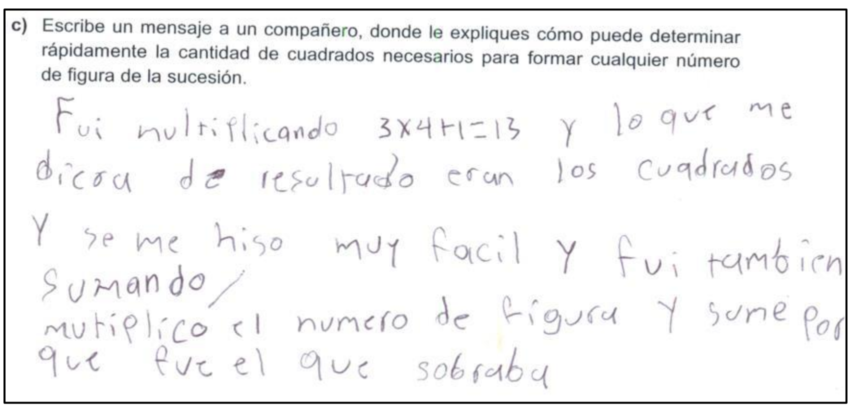
Figura 101. Extensión de la sucesión por parte de E1 a etapas cercanas y lejanas demandadas, por medio de la estructura matemática establecida.

A fin de profundizar en los procesos inferenciales desarrollados por el estudiante en esta tarea y de que extendiera la regla directa por medio de nuevas inferencias, se indagó aún más en la forma de proceder para reconocer si aplicaba la regla directa establecida en las etapas demandadas:

P: … Figura cuatro…. ¿Cómo sería entonces?
E1: sería doce
P: pero ¿cómo lo escribirías?
E1: tres por cuatro…
P: Tres por cuatro y ¿qué más?
E1: ¡más uno!
P: ¿cuánto es?
E1: ¡Trece!

P: … Ahora para la figura siete… ¿cuánto sería?
E1: tres por siete más uno
P: ¿cuánto te da?
E1: veinticinco
P: ¿Tres por siete cuánto es?
E1: ¡veintiuna!
P: ¿y más una?
E1: ¡Veintidós!
P: ¿cuál te falta?
E1: ¡La diecisiete!

Al indagar sobre la tercera cuestión de T3, la cual buscaba que el estudiante hiciera explícita la regla o estructura que ayudara a determinar rápidamente la cantidad de cuadrados necesarios para formar cualquier figura que se demande. Ante esta cuestión, E1 da muestra de asociar un pensamiento multiplicativo a la conjetura establecida y mediante el uso de un lenguaje verbal-escrito y simbólico-numérico, proporciona la estructura matemática plausible que logró establecer, la cual se puede asociar a la forma constructiva: $S_n = 3 \times n + 1$, por la manera en la que se organizó, y donde n es el número de etapa o figura y S_n es la cantidad de cuadrados en la etapa o figura n.


c) Escribe un mensaje a un compañero, donde le expliques cómo puede determinar rápidamente la cantidad de cuadrados necesarios para formar cualquier número de figura de la sucesión.

Fui multiplicando 3x4+1=13 y lo que me diera de resultado eran los cuadrados y se me hiso muy facil y fui tambien sumando/ mutiplico el numero de figura y sume por que fue el que sobraba

Figura 102. Regla directa establecida por E1 y externada mediante un lenguaje verbal-escrito.

En la Figura 102, se puede ver de manera explícita que E1 asocia el número de figura a la regla directa que proporciona y a pesar de que ese razonamiento se puede inferir desde su trabajo y el establecimiento de la segunda conjetura en las etapas dadas, el estudiante lo deja implícito, pero en la tercera demanda de T3 es más evidente. Es así como E1, estableció nuevas conclusiones (de reglas directas), verdaderas, a partir de otra verdadera. El proceso inferencial que manifiesta refiere a un razonamiento de tipo **deductivo**, al proporcionar una regla directa y extender su razonamiento a etapas lejanas.

Procesos cognitivos desarrollados por E1

Se reconocieron diferentes procesos cognitivos en E1 en el desarrollo de T3. Inicialmente con el trabajo en las etapas dadas, aplica una estrategia de conteo la cual le permite determinar la cantidad de cuadrados que forman las primeras tres figuras, y de esta manera reconocer que se trata de una sucesión creciente y que su crecimiento es en término de tres cuadrados entre etapas consecutivas. Posteriormente, al tratar de dar respuestas a las demandas de T3, el estudiante nota que su estrategia de conteo le es ineficiente para etapas lejanas, es así como se centra en la percepción visual del patrón figural de cada etapa dada. Al trabajar con los casos particulares o etapas dadas, logra inferir una regla local de la forma: $S_x = x + 1$, donde x es múltiplo de tres. La regla establecida por E1, se asocia a un pensamiento aditivo y se expresa mediante un lenguaje simbólico-numérico. Al producirse un proceso de acompañamiento por parte del profesor-investigador, el estudiante logra refinar su conjetura y por medio de ésta, establece otra, la cual explica de forma más acertada, desde lo estructural, el comportamiento de la sucesión para etapas cercanas y lejanas. La nueva conjetura, también la expresa por medio de un lenguaje simbólico-numérico, pero la articula a un pensamiento multiplicativo que se asocia a la forma: $S_n = 3 \times n + 1$. En todo el proceso de establecimiento de la conjetura por medio de la percepción visual en el trabajo con las etapas dadas el tipo de razonamiento manifestado fue inductivo.

Para responder a las demandas de T3, el estudiante recurrió de manera consistente y coherente a la segunda conjetura establecida, de esta manera E1 pone de manifiesto un razonamiento de tipo abductivo al usar y validar su conjetura al extender la sucesión, esto quiere decir que, estableció nuevas conclusiones (de reglas directas), verdaderas, a partir de otra también verdadera. Las inferencias verdaderas que estableció se constituyen en etapas de validación de la regla directa.

Los procesos inferenciales de inducción, abducción y deducción fueron fundamentales para la generalización del patrón en este estudiante, quien manifestó en el proceso inductivo dos conjeturas, la cual la segunda se deriva de la primera siendo ambas equivalentes y válidas, aunque la primera asociada a un pensamiento aditivo y la segunda a uno multiplicativo. El proceso de abducción fue útil en la etapa de uso y validación de la segunda conjetura, llevándola de una regla local a una regla directa, la cual, por medio de un proceso deductivo, fue empleada para extender la sucesión a etapas lejanas (por ejemplo, etapa 125. Véase Figura 102).

Los aspectos visuales, como la percepción y las etapas figurales de la sucesión (etapas dadas), también jugaron un rol importante en sus inferencias, en diferentes momentos de su interpretación y explicación del comportamiento del patrón figural. Su nivel de abstracción evolucionó. Inicialmente, fue conteo, para determinar el número de cuadrados en las primeras tres etapas y reconocer el patrón de recurrencia entre etapas consecutivas. Posteriormente, la percepción visual posibilitó el establecimiento de una conjetura que a la postre se convertiría en la regla directa que describe el comportamiento de la sucesión. Su proceso cognitivo demandó el uso del lenguaje verbal, el escrito y simbólico. Las representaciones que conectó para organizar y coordinar sus ideas fueron de tipo pictórica, numérica y verbal-escrita principalmente. En cuanto a las representaciones empleadas por

E1, fueron usadas en diferentes momentos, la pictórica, útil en la justificación del conteo inicial de las etapas dadas. La verbal-escrita fue empleada en la etapa individual, con el fin de argumentar y justificar la forma de proceder en el desarrollo de T3. El sistema de representación numérico, E1 lo empleó en el desarrollo de T3 y al final para poder representar una fórmula directa para las etapas de la sucesión, expresándola como una operación aritmética.

5.1.1.3.b. Estudiante 4

El estudiante se involucró en el desarrollo de T3, al trabajar con las etapas dadas. En ese contexto, y por la situación planteada en la tarea acerca de las figuras formadas por cuadrados y la experiencia con las dos anteriores tareas, E4 en un primer momento, se enfocó en el uso de un conteo de cuadrados para determinar la cantidad de éstos que componían cada figura de las etapas dadas (cuatro, siete y diez cuadrados respectivamente), de esa manera se pone en evidencia que se trata de un patrón creciente, al igual que se puede reconocer el crecimiento entre etapas consecutivas (tres cuadrados).

Por otra parte, la manera en la que E4 percibió el patrón figural en las etapas dadas, no es completamente evidente en su producción escrita, debido a que el estudiante no la hace explícita en sus explicaciones y además, no se indaga a fondo este aspecto en la entrevista individual, pero E4, deja ver una idea que plasma en su hoja de trabajo y se evidencia en la Figura 103, acerca de la manera figural en la que pudo percibir el patrón y que posteriormente tradujo por una estrategia de tipo numérica. La Figura 103, da muestra que E4 percibe la figura 2 (etapa 2) de la sucesión, a partir de la figura 1 (etapa 1), es decir, logra reconocer la etapa 1 en la dos, la cual encierra. También reconoce el crecimiento en término de tres cuadrados en cada extremo de la figura 2 (uno vertical y dos horizontales). Ello da evidencia de que el estudiante identifica de manera visual y figural el crecimiento de la sucesión, dejando ver de qué forma crece la sucesión en término de los tres cuadrados y donde se pueden ubicar. En cuanto a la percepción visual de la etapa 3 (figura 3) de la sucesión, deja ver que se enfoca en la línea horizontal de cuadrados en la parte superior de la etapa figural, esto da muestra de un cambio en la forma de percibir lo figural entre la etapa 2 y 3. Esto es lo que se puede decir acerca de la percepción visual del patrón de E4.

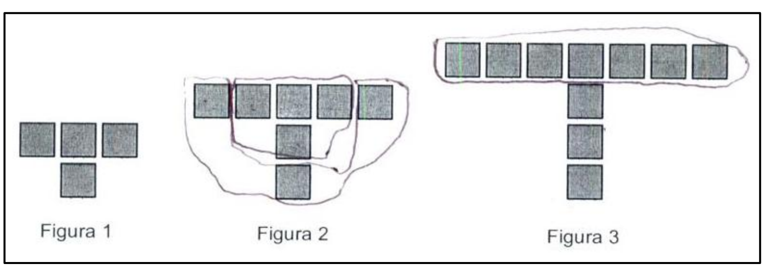


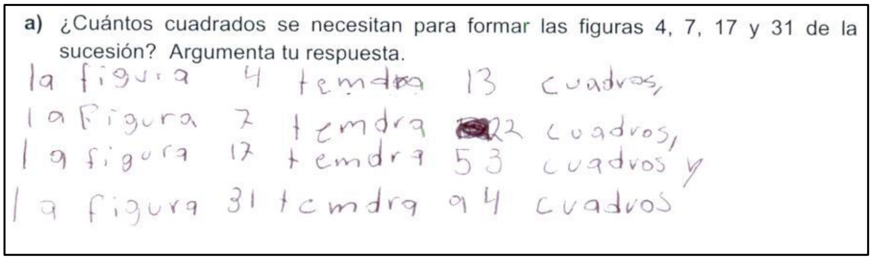
Figura 103. Evidencia de la percepción visual de E4 del patrón figural de la sucesión.

Como se deja ver la percepción del estudiante no es completamente evidente ni clara en su hoja de trabajo. Ello permite inferir que su proceder en la tarea es mediante la identificación del patrón de recurrencia y al haber ganado experiencia trabajando con las tareas anteriores a la T3, E4 pudo hacer un cambio de estrategia de lo visual-figural a lo numérico, estableciendo rápidamente una regla local (o conjetura) que explique el comportamiento de la sucesión. Ello se puede evidenciar en el siguiente extracto de entrevista:

P: ¡haber dime!
E4: había diez cuadros [para la figura 3]… entonces aquí vi que… que tres por una es igual a tres y le sobra uno [para la figura 1], entonces aquí tres por dos es igual a seis y le sobraría uno [para la figura 2], o sea le voy a ir sumando de uno y multiplicando. Así fui encontrando los resultados
P: ¡muy bien!

Hasta aquí, la capacidad expresiva de E4 es mayoritariamente de naturaleza simbólica y verbal-escrita, que usa para explicar tanto el comportamiento que sigue el patrón, como el razonamiento que siguió en las etapas dadas. En el anterior fragmento de entrevista, se evidencia con claridad la regla local establecida por medio del trabajo con las tres primeras etapas. En ese sentido, el estudiante manifiesta un pensamiento multiplicativo que se conecta a la regla local que establece y ello, se pone de manifiesto cuando expresa que: “voy a ir sumando de uno y multiplicando”. Su regla local también es clara en la manera que expresa la cantidad de cuadrados que conforman las figuras de las etapas dadas, como una expresión donde el primer término es un múltiplo de tres y se adiciona uno (véase extracto de entrevista). En el proceso de establecer la regla local (o conjetura), se manifiesta un razonamiento de tipo inductivo, ya que E4 se vale de las etapas dadas (un conjunto de observaciones) para lograr inferir la regla. En ese contexto, el estudiante también se vale de las primeras tres etapas para validar su conjetura involucrando un razonamiento abductivo. Esto es posible debido a que, en un primer momento el estudiante determina la cantidad de cuadrados que forman las figuras en las tres primeras etapas mediante un conteo de las representaciones figurales proporcionadas en el contexto de la tarea, y de esa manera, E4 puede validar o confirmar su regla local.

La forma de razonar y proceder de E4, tanto en el proceso inductivo (establecimiento de la regla), como en el proceso abductivo (validación de la conjetura), posibilitó que el estudiante proporcionara respuestas válidas en la primera cuestión de T3, la cual indagaba acerca de la cantidad de cuadrados que se necesitan para formar figuras (o etapas) cercanas consecutivas y cercanas no consecutivas (véase Figura 104). A pesar de que el estudiante solo plasma los resultados en su hoja de trabajo, éstos son correctos y coherentes a su forma de razonar en la etapa inductiva y abductiva de su razonamiento.

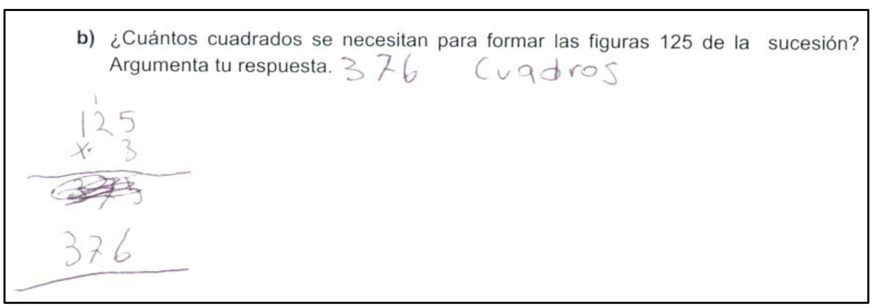


a) ¿Cuántos cuadrados se necesitan para formar las figuras 4, 7, 17 y 31 de la sucesión? Argumenta tu respuesta.

la figura 4 temdra 13 cuadros,
la Figura 7 temdra 22 cuadros,
la figura 17 temdra 53 cuadros y
la figura 31 temdra 94 cuadros

Figura 104. Respuesta de E4 a la primera cuestión demandada en T3.

Al establecer y validar la regla local (proceso inductivo-abductivo), la regla local se constituye como una regla directa y le permite a E4, extender su forma de razonar y establecer nuevas conclusiones (reglas directas) verdaderas, a partir de otra verdadera, es decir, E4 logra extender la sucesión a etapas lejanas (véase Figura 105), estableciendo se así una estructura matemática plausible que explica el comportamiento de la sucesión tanto para etapas cercanas como para etapas lejanas. En el proceso de extensión a etapas lejanas de la sucesión y el establecimiento de una estructura matemática plausible, E4 pone de manifiesto un razonamiento de tipo deductivo. Cabe aclarar que, para establecer la estructura matemática plausible, es necesario, pero no suficiente que el estudiante logre relacionar el número de la etapa o figura con el patrón de recurrencia.



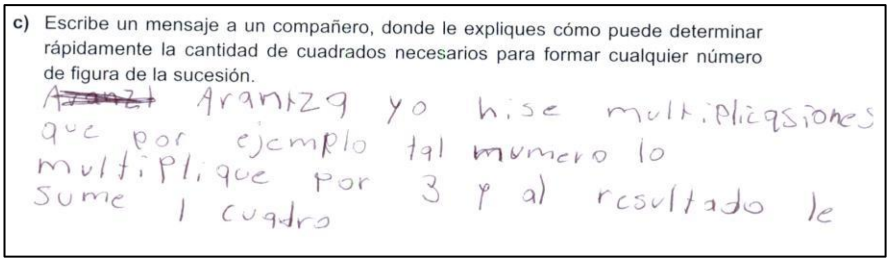
b) ¿Cuántos cuadrados se necesitan para formar las figuras 125 de la sucesión? Argumenta tu respuesta. 376 Cuadros

125
× 3

376

Figura 105. Respuesta de E4 a la segunda demanda de T3, concerniente a una etapa lejana de la sucesión.

La cuestión tres de T3, tenía como objetivo que el estudiante expresara la estructura matemática plausible que explicara y describiera el comportamiento de la sucesión para cualesquiera de sus etapas. En cuanto a ello, E4 hizo explícita la estructura mediante un lenguaje verbal-escrito (véase Figura 106) haciendo aún más evidente lo expresado en el extracto de entrevista, en la cual se articula la estructura a un pensamiento multiplicativo, al afirmar el estudiante que: "… yo hice multiplicaciones…" y posteriormente al sintetizar su estructura en la frase: "… tal numero lo multiplique por 3 y al resultado le sume un cuadro", la estructura se puede asociar a la forma: $S_n = 3n + 1$, donde n es el número de la etapa o figura y S_n es el total de cuadrados que forman la etapa n. De esa manera, se puede afirmar que al mencionar el estudiante: "… tal numero", lo que está detrás de ello, es el número de figura o etapa que se le demande, es así como se puede reconocer que E4 identifica que el número de figura o etapa es un componente clave para determinar la cantidad de cuadrados que formarían cualquier figura que se le demande, y aunque el estudiante no logre expresarlo con esas palabras, debido a su nivel académico, se puede inferir de su forma de proceder en la tarea.


c) Escribe un mensaje a un compañero, donde le expliques cómo puede determinar rápidamente la cantidad de cuadrados necesarios para formar cualquier número de figura de la sucesión.

~~Aranza~~ Aranza yo hise multiplicasiones que por ejemplo tal mumero lo multiplique por 3 y al resultado le sume 1 cuadro

Figura 106. Estructura matemática plausible establecida por E4.

Procesos cognitivos desarrollados por E4

El trabajo inicial de E4, fue por medio de una estrategia de conteo, en la cual tomaba como unidad de conteo los cuadrados que formaban las representaciones figurales de las etapas dadas proporcionadas en el contexto de la tarea, logrando de esa manera determinar el número de cuadrados que constituyen las tres primeras etapas (etapas dadas). Por su forma de proceder y lo externado en su hoja de trabajo, se puede afirmar que para E4 la percepción de lo figural jugó un papel secundario, ya que solo empleó las etapas o representaciones figurales de la sucesión para aplicar un conteo y mediante él, poder reconocer que se trataba de un patrón creciente y que su crecimiento era en términos de tres cuadrados.

Posteriormente, el estudiante pone en evidencia un pensamiento multiplicativo al establecer una conjetura a partir de los resultados obtenidos de la cantidad de cuadrados que forman las figuras de cada etapa dada. Su conjetura consiste en multiplicar el número de figura por tres (patrón de recurrencia) y posteriormente adicionarle uno (que viene de un cuadrado que "sobra" y hay que adicionarlo). Hasta aquí, y el establecimiento de la conjetura por el trabajo con casos particulares (etapas dadas), el razonamiento que manifiesta E4 es de tipo **inductivo**. Por su parte, en la etapa de validación de la conjetura, donde E4 manifiesta un razonamiento de tipo **abductivo**, su estrategia de conteo inicial fue importante, porque le permitió comprobar o validar por medio de una comparación de resultados que el número de cuadrados determinados mediante la conjetura era igual al que inicialmente había obtenido con el conteo en las tres primeras etapas. Dicho proceso le permitió a E4 tener la certeza de que su regla local era válida y de esa manera poder responder a los cuestionamientos en T3, extendiendo la sucesión a otras etapas, yendo así de una regla local a una regla directa.

El estudiante también manifestó un **razonamiento deductivo**, al momento en que empleó la regla directa, para extender la sucesión a etapas lejanas, esto fue posible gracias a que utilizó una conclusión válida (conjetura) para derivar conclusiones válidas y es mediante este proceso que E4 logra construir la estructura matemática plausible que explica el comportamiento en etapas cercanas y lejanas del patrón. En ese contexto, la conjetura se constituye en regla directa al validarse y se tipifica como una estructura matemática plausible al extender la regla directa a etapas lejanas de la sucesión, y por la manera en que estableció y expresó su conjetura (véase extracto de entrevista), así como la manera coherente y consistente que la empleo en la etapa abductiva y deductiva, la estructura matemática que E4 construye se asocia a una generalización multiplicativa (por el pensamiento involucrado) de tipo constructiva, de la forma: $S_n = 3n + 1$.

Su proceso cognitivo demandó el uso del lenguaje verbal, el escrito y simbólico. Las representaciones que conectó para organizar y coordinar sus ideas fueron de tipo simbólica-numérica y verbal-escrita principalmente. En cuanto a las representaciones empleadas por E4, fueron usadas en diferentes momentos, la pictórica, útil para fundamentar y justificar el conteo inicial de las etapas dadas. La verbal-escrita fue empleada en la etapa individual, con el fin de argumentar y justificar la forma de proceder en el desarrollo de T3 y lograr expresar la conjetura establecida. El sistema de representación numérico, E4 lo empleó en el desarrollo de T3 y al final para poder representar una fórmula directa para la etapa lejana de la sucesión (figura 125), expresándola como una operación aritmética, además también empleó esta representación, para proporcionar los resultados de las etapas demandadas en cada cuestión.

5.1.1.3.c. Estudiante 9

E9 en primera instancia procedió de manera similar a otros estudiantes al involucrarse con el patrón figural de la sucesión en T3, su trabajo consistió en observar y analizar las figuras de las etapas dadas. A partir de ello y por el contexto de la tarea, E9 se centró en un conteo, el cual le permitió determinar la cantidad de los cuadrados que formaban las figuras en las tres primeras etapas (cuatro, siete y diez cuadrados respectivamente). Es así como se reconoce que se trata de un patrón creciente y éste crece, en forma figural, en término de tres cuadrados (patrón de recurrencia). En ese contexto, el estudiante más allá de enfocarse en el patrón de recurrencia de la sucesión y la estrategia de conteo desarrollada, centró su atención en cómo estaban conformadas o constituidas las figuras en las tres primeras etapas, de esta manera percibió rasgos o características variantes e invariantes entre las representaciones figurales de las etapas dadas. Extractos de su entrevista en correspondencia con la Figura 107, muestra cómo se involucró con el patrón figural de las etapas dadas, apoyándose del lenguaje verbal-escrito y de las representaciones figurales dadas en el contexto de la tarea para las tres primeras etapas.

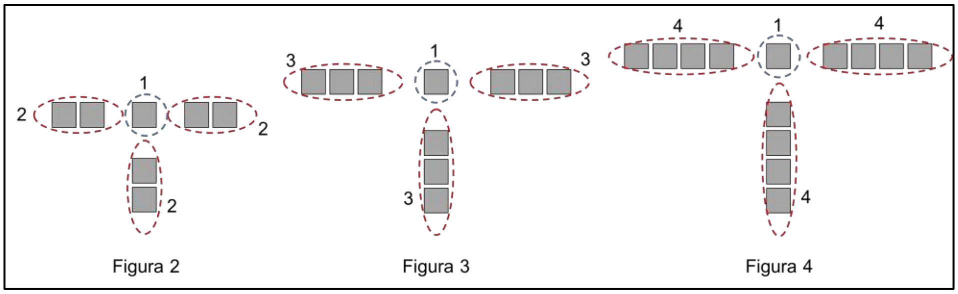


Figura 107. Reconstrucción de la manera de percibir el patrón de E9.

P: ¿cómo es haber?
E9: en la figura tres le caché que cada una tiene lo mismo y queda uno en medio, entonces a la figura cuatro le conté cuatro y acá cuatro y acá cuatro… y más uno me dio el resultado trece
P: ¡haber! ¡haber! otra vez. Por ejemplo, aquí, en la dos [figura dos], haber dime
E9: acá como hay dos y dos y dos le fui viendo, contando y le sumé el uno, entonces me dio la respuesta
P: y en la tres [figura 3] ¿cómo sería?
E9: pues tres, más tres, más tres y más uno

Hasta aquí, la capacidad expresiva de E9 es mayoritariamente de naturaleza verbal-escrita, que usa para explorar cuál es el comportamiento que sigue el patrón en las etapas dadas y para explicar el razonamiento que siguió en el trabajo con ellas. En ese contexto y como se logra apreciar en la Figura 107 y el extracto de entrevista, el estudiante percibió las figuras de cada etapa constituidas en cuatro partes, tres partes (dos filas y una columna) que varían según el número de etapa y un cuadrado que permanece constante y conecta las otras tres partes entre sí (véase Figura 107). E9, pudo percibir de esa manera el patrón por medio del trabajo y la observación de las tres etapas dadas, esto se comprueba cuando menciona que: "en la figura tres le caché…", es decir, que hubo un trabajo progresivo a partir de la etapa uno hasta la tres, el cual posibilitó que E9 percibiera las etapas figurales de la manera en que lo hizo. Es así como el estudiante establece una conjetura a partir de lo percibido visualmente en el trabajo con las tres primeras etapas, la cual sintetiza de manera verbal cuando afirma que: "… le caché que cada una tiene lo mismo y queda uno en medio…"

Es de su análisis a los casos particulares o etapas dadas, que E9 infiere la conjetura (regla local) que logra establecer y explicar, con base en un conjunto de observaciones, las cuales son las mismas etapas dadas. Este proceso inferencial, manifiesta un **razonamiento inductivo**. Por cuanto al razonamiento que siguió para validar la conjetura, fue de tipo **abductivo**, en lo que respecta a este proceso de validación el conteo inicial fue primordial, ya que de esa forma logra comprobar que los resultados empleando la regla local para las primeras tres etapas coinciden con los resultados de su conteo inicial.

En un extracto de entrevista, el estudiante logra evidenciar el proceso inductivo (establecimiento de la conjetura) y el abductivo (validación de la conjetura) de manera más clara:

P: haber hazlo [el profesor-investigador demanda que plasme en su hoja de trabajo lo que acaba de verbalizar]… esa idea que tienes ponla, como lo acabas de decir, con números, sin dibujar los cuadrados… ¿cómo sería en la uno [figura 1]?
E9: viendo uno, dos, tres, sumando estos tres, más uno
P: haber ponlo con números sin poner la figura ya [E9 procede a escribir la operación en su hoja de trabajo]… ¿y en la dos, en la figura 2? [El estudiante procede a hacer la operación para la etapa 2 de la sucesión según su forma de razonar]… y en la figura 4 ¿Cuánto serían, que es la que te están preguntando?
E9: serían trece [E9 traduce a un lenguaje numérico lo que verbalizó en el primer extracto de entrevista para la etapa 4]

En el anterior extracto de entrevista el estudiante traduce a un lenguaje simbólico-numérico por medio del acompañamiento del profesor-investigador, las cuatro primeras etapas (tres dadas y una demandada), empleando la regla local establecida. La Figura 108, muestra la reconstrucción desde lo figural de la forma de proceder de E9 para el caso de las primeras cuatro etapas de la sucesión. El proceso inductivo-abductivo, se manifiesta en el extracto de entrevista pues se evidencia cómo al indagar por la forma de proceder de E9, él usa su conjetura para expresar las etapas dadas y posteriormente la extiende a la etapa cuatro, demandada en la tarea.

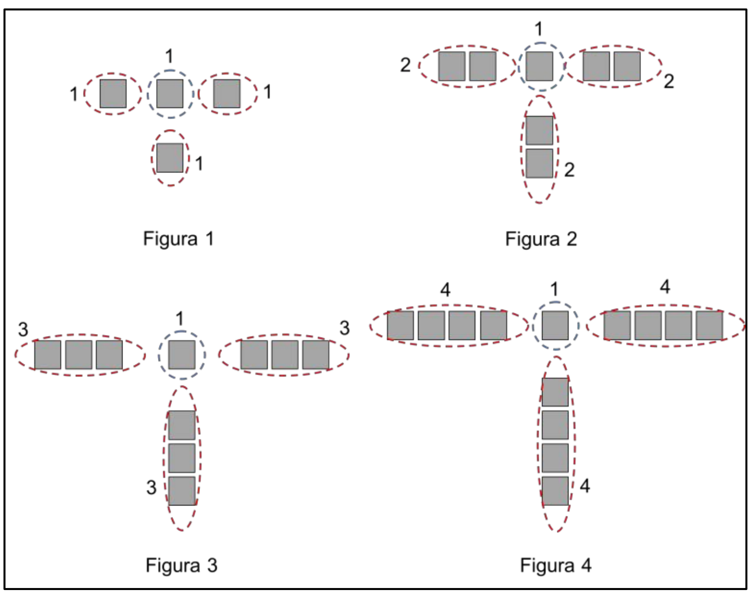


Figura 108. Reconstrucción figural del uso de la conjetura establecida por E9 para expresar las cuatro primeras etapas de la sucesión.

Ante lo que se demanda en la primera cuestión de T3, el estudiante deja de lado lo figural y por medio de un lenguaje numérico proporciona la respuesta a esta primera cuestión (véase Figura 109). Cabe resaltar que el acompañamiento por parte del profesor-investigador, buscaba que el estudiante realizara el cambio de contexto (de lo figural a lo numérico) y más allá de que E9 abandonara el figural, se complementara con el numérico, al traducir lo percibido visualmente por medio de un lenguaje simbólico-numérico.

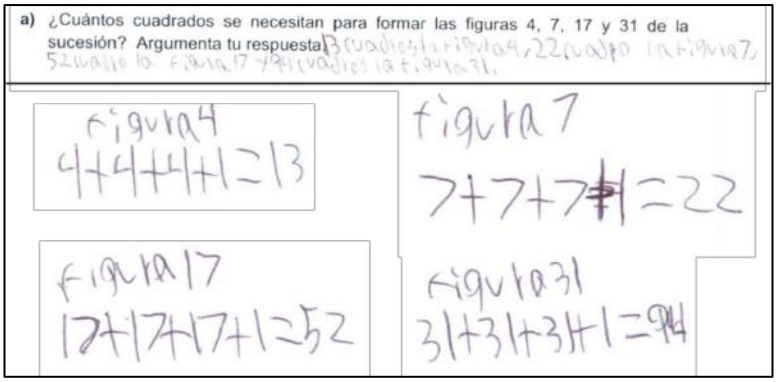


Figura 109. Respuesta de E9 a la primera demanda de T3, empleando la regla directa establecida.

De aquí en adelante, E9 emplea de manera coherente y consistente un lenguaje verbal-escrito y simbólico-numérico para responder a las demandas de T3 (incluyendo la primera. Figura 109) y por medio de la conjetura establecida y validada logró extender la sucesión a etapas lejanas (véase Figura 110). Es así como el estudiante, estableció nuevas conclusiones (de reglas directas), verdaderas, a partir de otra verdadera (regla directa). El proceso inferencial que manifiesta refiere a un razonamiento de tipo **deductivo**, al extender la sucesión a etapas lejanas.

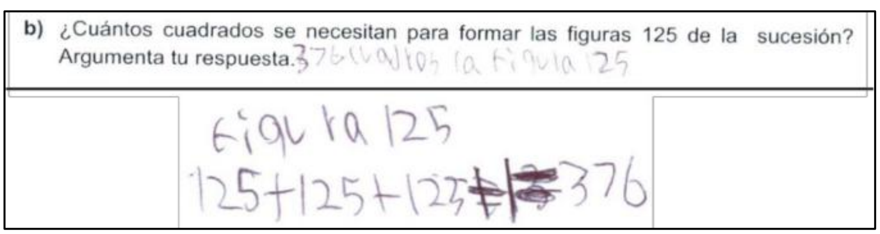


Figura 110. Respuesta de E9 a la segunda demanda de T3, referente a una etapa lejana de la sucesión.

A fin de profundizar en el proceso inferencial deductivo de E9, se indaga acerca de la tercera cuestión de T3, la cual buscaba que el estudiante hiciera explícita la estructura matemática plausible que describiera el comportamiento de la sucesión para cualesquiera de sus etapas, que para el caso de E9 desde las primeras etapas por medio de la percepción visual, pudo establecer una estructura coherente y viable. En ese sentido, el estudiante expresa la siguiente respuesta: "cuando tengas un numero de la sucesión como 100 le vas a sumar como 3 veces y le sumas 1 pro ejemplo para figura 1205 $1205 + 1205 + 1205 + 1 = 3616$"

c) Escribe un mensaje a un compañero, donde le expliques cómo puede determinar rápidamente la cantidad de cuadrados necesarios para formar cualquier número de figura de la sucesión. cuando tengas ~~AD~~ numero de la sucesion como lo le bas asumar las 3 beses y le sumas 1 por ejenplo para figura 1205

1205+1205+1205+1=3616

Figura 111. Estructura matemática plausible establecida por E9.

En la respuesta proporcionada por el estudiante (véase Figura 111), se evidencia una estructura articulada a un pensamiento aditivo de la forma: $S_n = n + n + n + 1$, donde n es el número de etapa o figura y S_n es la cantidad de cuadrados que conforman la figura n. La estructura externada por E9 mediante un lenguaje verbal-escrito es tan coherente con su forma de percibir y de proceder y es lo suficientemente clara para el estudiante, que es capaz de plantear un ejemplo mediante una operación aritmética donde proporciona el número de cuadrados para una etapa o figura que no se le demanda en la tarea, esto quiere decir que E9 logra extender su estructura a cualquier etapa o número de figura.

Procesos cognitivos desarrollados por E9

A través de la experiencia ganada en el trabajo con las dos tareas anteriores, en un primer momento, E9 aplicó una estrategia de conteo para así determinar la cantidad de cuadrados que componen a la figura de cada etapa dada, al realizar ese proceso se puede reconocer el patrón de recurrencia entre etapas consecutivas. De esta manera, logra identificar que la sucesión crece en términos de tres cuadrados entre una etapa a otra. Luego de ello y por la misma demanda de la tarea (etapas lejanas y cercanas) el estudiante involucra la percepción visual, enfocándose en reconocer desde lo figural características que le ayuden a dar respuestas a las cuestiones de T3. Es así como identifica visualmente al descomponer las figuras de las etapas, partes que varían y partes invariantes, lo cual lo lleva a inferir una regla local (o conjetura), a partir de trabajar con los casos particulares o etapas dadas, con base en lo percibido visualmente y reconocer desde lo figural que, hay tres partes de la figura que tienen la misma cantidad de cuadrados y esta cantidad coincide con el número de figura y que hay un cuadrado que es constante en cada figura sin importar el número de etapa. Posteriormente, transita del contexto figural al numérico logrando establecer una regla directa que se articula a un pensamiento aditivo y por la manera en que la estructuró se relaciona con la forma: $S_n = n + n + n + 1$. En el trabajo con las etapas dadas incluyendo lo figural y numérico, hasta el establecimiento de la conjetura se manifiesta un razonamiento inductivo.

En el caso de E9, rápidamente estableció una estructura para describir el comportamiento de la sucesión desde lo percibido visualmente en las primeras tres etapas de la sucesión, por ello, el trabajo restante se enfocó en responder a las cuestiones de T3 por medio de la estructura que estableció, en lo cual sigue un proceso coherente y consistente en toda la tarea. En ese contexto, E9 valida la conjetura, a través de las etapas dadas, debido a que desde un inicio pudo determinar mediante su estrategia de conteo, la cantidad de cuadrados que formaban las figuras, la cual coincidió con los resultados obtenidos aplicando la regla local. De esa manera el estudiante validó la conjetura manifestando un razonamiento de tipo abductivo.

Al poder E9, traducir lo que percibió visualmente a un lenguaje numérico, posibilitó que pudiera establecer nuevas conclusiones (de reglas directas), verdaderas, a partir de otra también verdadera. Las inferencias verdaderas que estableció se constituyen en etapas de validación y extensión de la regla directa, involucrándose así un pensamiento de tipo deductivo.

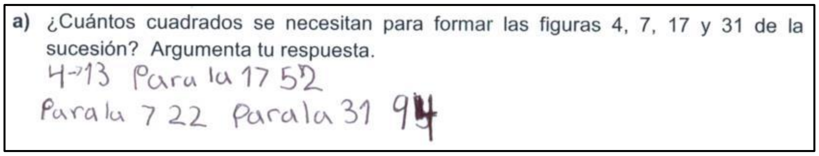
Los aspectos visuales también jugaron un rol importante en sus inferencias, en diferentes momentos de su interpretación y explicación del comportamiento del patrón figural. En ese sentido, su nivel de abstracción evolucionó, ya que inicialmente fue un conteo, para luego dar lugar a la percepción visual, lo cual posteriormente tradujo a un lenguaje numérico que a la postre permitió expresar la estructura matemática plausible que describiera el comportamiento de la sucesión.

Por otra parte, es claro que el contexto figural, si bien favorece el que E9 construya de manera más rápida y que justifique la estructura matemática plausible, en etapas lejanas se constituye en un obstáculo, por las dificultades asociadas al conteo y a representar las figuras de dichas etapas, por ello E9 traduce lo percibido visualmente a un lenguaje numérico y mediante operaciones aritméticas representa y expresa su estructura matemática plausible, y de esta forma el aspecto numérico entra a complementar el figural para que el estudiante pueda generalizar su proceso.

5.1.1.3.d. Estudiante 10

En lo que respecta a E10 se tiene poca evidencia en su hoja de trabajo acerca de su manera de proceder y razonar en el desarrollo de T3, debido a que si bien fue un estudiante que en su producción escrita, logró externar y representar una estructura matemática, no profundizó explícitamente en la hoja de trabajo su proceder en la tarea, ni los argumentos que lo llevaron a construir la estructura. En ese sentido, se muestra evidencia de lo realizado por E10 en la producción escrita y la manera en la cual plasmó en ella, su razonamiento.

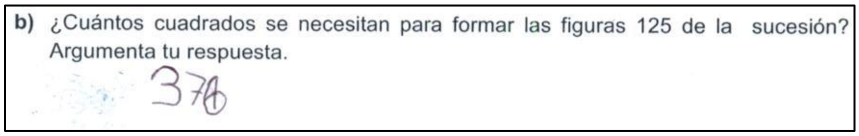
En lo concerniente a lo demandado en la primera y segunda cuestión de T3, correspondientes a etapas cercanas y lejanas de la sucesión, E10 da evidencia que proporciona respuestas correctas ante estas demandas (véase Figura 112 y Figura 113).



a) ¿Cuántos cuadrados se necesitan para formar las figuras 4, 7, 17 y 31 de la sucesión? Argumenta tu respuesta.

4→13 Para la 17 52
Para la 7 22 Para la 31 94

Figura 112. Respuesta de E10 ante la primera cuestión de T3.



b) ¿Cuántos cuadrados se necesitan para formar las figuras 125 de la sucesión? Argumenta tu respuesta.

376

Figura 113. Respuesta por parte de E10 ante la segunda demanda de T3.

Acompañadas de las respuestas anteriores (Figura 112 y Figura 113), el estudiante proporciona operaciones aritméticas, donde involucra operaciones básicas como la adición y la multiplicación, las cuales determinan la cantidad de cuadrados que forman las figuras o etapas que se demandan en las dos primeras cuestiones de T3.

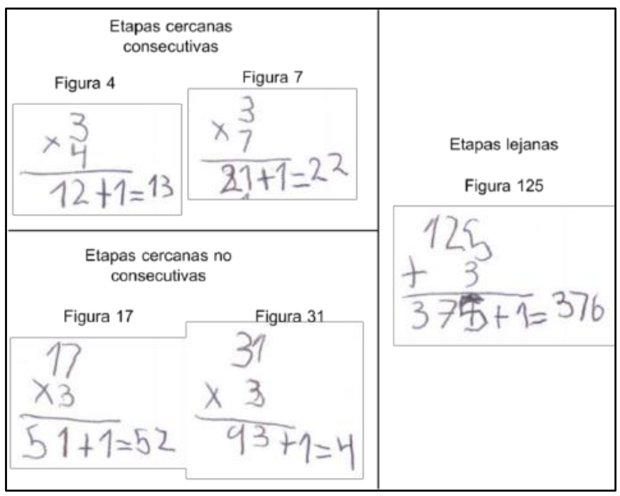


Figura 114. Operaciones aritméticas (estructuras) proporcionadas por E10 en las dos primeras cuestiones de T3.

De esta manera, el estudiante logra manifestar una estructura matemática plausible, con la cual se puede determinar la cantidad de cuadrados necesarios para formar cualquier figura que se demande, sin la tediosa e ineficaz labor de representar la figura o contar los cuadrados que la puedan componer. La estructura manifestada por E10, se articula a un pensamiento multiplicativo por la manera en la cual expresó las operaciones aritméticas, por ésta misma razón la estructura se asocia a la forma: $S_n = 3n + 1$, donde n es el número de figura y S_n es la totalidad de cuadrados que forman la figura n.

Por otro lado, en lo evidenciado por E10 en su producción escrita, empleó mayoritariamente un lenguaje simbólico numérico para externar y plasmar su proceder en la hoja de trabajo. Ello se muestra al expresar la cantidad de cuadrados que conforman las figuras que se le demandan en la tarea por medio de operaciones aritméticas donde involucra operaciones básicas como la adición y la multiplicación.

En lo que respecta a los procesos inferenciales de inducción, abducción y deducción desarrollados por E10, no se puede decir mucho pues como ya se mencionó, el estudiante no amplió su razonamiento y su proceder en la hoja de trabajo, así que no los hizo explícitos en su producción escrita, pero se puede afirmar que los procesos, sí estuvieron presentes, debido a que para que el estudiante lograra construir una estructura matemática plausible, tuvo que primero establecerla como una conjetura en el trabajo con las etapas dadas (proceso inductivo), luego validarla, ya sea con las mismas etapas dadas o extendiendo la sucesión a etapas cercanas consecutivas o no consecutivas (proceso abductivo), para así constituirla en una regla directa y finalmente extenderla a etapas lejanas (proceso deductivo) y llegar así a construir la estructura matemáticamente plausible.

5.1.1.3.e. Estudiante 12

La primera forma de aproximarse a la solución de T3 por parte de E12, fue mediante el trabajo con las representaciones figurales de las primeras tres etapas de la sucesión, proporcionadas en el contexto de la tarea. El trabajo consistió en observar y analizar las figuras de las etapas dadas. Y más que “observar”, E12 se enfocó en el desarrollo de un conteo de las sub-configuraciones o partes que constituían cada figura de las etapas dadas. De esa forma logra determinar que la figura uno se constituye por cuatro cuadrados, la figura dos se forma con siete cuadrados y la tercera figura se construye con diez cuadrados. Luego de esto, según lo que el estudiante logra evidenciar en la entrevista individual y la discusión grupal, se centró en percibir de manera visual características comunes entre las etapas dadas y que éstas, posibilitaran extender la sucesión a otras etapas. En el siguiente extracto de la discusión grupal se evidencia parte de la percepción visual en las primeras etapas, la cual le ayudó a extender la sucesión a una etapa cercana.

P: ¿Cuáles serían?

E12: en la figura 1, tenía un cuadrito aquí y estos tres [dibuja la figura 1 en la pizarra según su forma de percibirla]… entonces yo vi que tres por una eran tres [señala los tres cuadrados que conforman la fila superior en la figura 1] y me sobraba una [señala el cuadrado de la parte inferior para el caso de la figura 1]… entonces yo hice… tres por una, tres, más uno, cuatro, me da este resultado, entonces sumé lo que me decía la figura por ejemplo… si me daban la figura cuatro… puse figura cuatro, tres por cuatro más una, eso sería lo que me decía en la hoja que hiciera, entonces ese me dio el resultado tres por cuatro, doce, más una trece y así sucesivamente lo hice

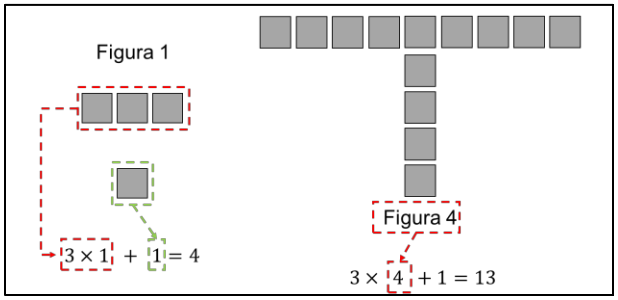


Figura 115. Reconstrucción figural de la manera de percibir la etapa 1 y la construcción de la etapa 4.

En el anterior extracto de entrevista, así como en la Figura 115, se pone en manifiesto una característica común que se logra identificar en la forma de proceder del estudiante en el trabajo con las etapas dadas desde lo figural. E12 en el fragmento de su entrevista, tanto para la figura 1 (etapa 1) como para la figura 4 (etapa 4), proporciona una expresión aritmética de forma verbal, cuyas características comunes son principalmente que se multiplica por tres el número de la figura y a este resultado se le adiciona uno. En ese contexto, el profesor-investigador, cuestiona a E12 para así indagar más, acerca de esta forma de razonar del estudiante. El siguiente extracto de entrevista, evidencia lo anteriormente mencionado:

P: Según tú, hay que multiplicar por tres… ¿tres por cuánto?
E12: Tres por una [refiriéndose a la etapa 1]
P: ¡Tres por una! ¿Y luego?
E12: sobran una…y se lo voy a sumar.
P: ¿Dónde ves esos tres en la figura? ¡Muéstralos! … ¡enciérralos! … ¿Y dónde ves ese uno? [Se refiere al uno que E12 dice que sobra]... ¿Y acá? [Refiriéndose a la figura de la etapa 2] ¿Cómo arreglarías esos tres?...
E12: tres por dos…
P: ¿y luego qué más?
E12: Se suma uno
P: haber hazle aquí desde la figura 1 [etapa 1]… Uno más uno [el profesor-investigador verbaliza el conteo que aplica el estudiante para comprobar sus resultados]… ¿Cuánto te da?
E12: ¡si es cierto! [Mediante un conteo el estudiante comprueba que la cantidad de cuadrados que conforman la figura 1 es realmente cuatro]
P: ¿y aquí? [figura dos]
E12: tres por dos, son seis… 1, 2, 3, 4, 5, 6 [el estudiante cuenta los cuadrados de la figura 2]… ¡siii! Más uno… si aquí son seis en todo esto y aquí sobra una… ¡estoy bien!
P: ¿y la siguiente? [figura 3]
E12: nueve por tres… tres por tres, son nueve, aquí ya es todo el nueve… me sobraría este, más uno seria diez

Hasta aquí, la capacidad expresiva de E12 es mayoritariamente de naturaleza simbólica y verbal-escrita, que usa para explorar cuál es el comportamiento que sigue el patrón en sus tres primeras etapas y para explicar el razonamiento que siguió al trabajar con ellas.

En el anterior extracto de entrevista, se muestra al profesor-investigador indagar más afondo la manera de proceder de E12, manifestándose así más claramente la forma de percibir el patrón en las tres primeras etapas por parte del estudiante. En ese sentido, coordinó coherentemente lo percibido visualmente (estrategia figural) en el trabajo con las representaciones figurales de las etapas dadas y lo que logra traducir por medio de un lenguaje numérico de lo que percibió (estrategia numérica), esto se evidencia al fundamentar sus explicaciones y el cómo se justifica las operaciones aritméticas (numérico), a partir de lo percibido visualmente (figural), ello lo logra externar gracias a la intervención del profesor-investigador, al cuestionar al estudiante acerca de donde emerge cada término de las expresiones aritméticas. De esta forma logra establecer, validar y justificar una conjetura, mediante un proceso inductivo-abductivo, el cual también se evidencia en el extracto de entrevista en el trabajo con las etapas dadas.

La conjetura es establecida como ya se mencionó, en el trabajo con las etapas dadas. El estudiante, la expresa en un primer momento por medio de un lenguaje verbal y posteriormente la traduce a operaciones aritméticas para las primeras etapas, a través de un lenguaje simbólico-numérico. Es así como E12, logra evidenciar que su conjetura es multiplicar el número de la figura por tres y a ese resultado agregarle uno, de esa manera, encuentra la cantidad de cuadrados que forman las tres primeras etapas de la sucesión. Subsiguientemente, valida su conjetura en un proceso simultáneo inductivo-abductivo, aplicado a las etapas dadas, y mediante un conteo logra comprobar que los resultados obtenidos al aplicar la conjetura coinciden (véase extracto de entrevista). Aquí se ve que la estrategia de conteo desarrollada por el estudiante para las primeras etapas fue fundamental, a la hora de comprobar o validar la conjetura. Es así como E12 logra establecer y validar la regla local para después extenderlas a etapas cercanas de la sucesión.

Por la experiencia adquirida en el trabajo con las tareas anteriores, el estudiante tenía claro que la estrategia de conteo resultaba ser ineficiente para determinar la cantidad de cuadrados para figuras lejanas o más grandes, por ello para E12 era evidente que el objetivo era llegar a determinar una expresión, estructura o razonamiento, mediante el cual fuera posible determinar la cantidad de cuadrados que conformarían cualquier figura demandada. Es así como su forma de proceder y razonar desde el trabajo con las primeras etapas se encaminó a alcanzar dicho fin.

A fin de profundizar en los procesos inferenciales desarrollados por el estudiante en esta tarea y de que extendiera la regla directa por medio de nuevas inferencias, se le cuestionó acerca de la cantidad de cuadrados que formarían una figura o etapa lejana de la sucesión, haciendo que el mismo estudiante propusiera el número de la figura, como se muestra en el siguiente extracto de la discusión grupal:

P: piensa en una figura más grande… ¿qué figura?
E12: …ciento cincuenta
P: ¿cómo sería?
E12: ciento cincuenta por tres… [Se toma un tiempo para realizar la operación]… pero si le sumo, uno más, serian cuatrocientos cincuenta y uno

Es así como E12 estableció nuevas conclusiones (de reglas directas), verdaderas, a partir de otra verdadera, la conjetura establecida y validada. El proceso inferencial que manifiesta al extender la sucesión a etapas lejanas refiere a un razonamiento de tipo **deductivo**.

En otro momento, se le pidió que explicara a sus compañeros en forma sintética el razonamiento que siguió en la pizarra, al exponer su forma de proceder. Recurrió al uso del lenguaje simbólico y al verbal-escrito, para expresar la estructura matemática plausible que explicara el comportamiento de la sucesión tanto para etapas cercanas como lejanas. Dando además así respuesta a la tercera demanda de T3, la cual buscaba específicamente que el estudiante hiciera explícita la regla o estructura matemática.

P: ¿a ver sí entendieron el procedimiento…? [El profesor-investigador hace la pregunta a la clase]… explícaselo de nuevo
E12: empezaría viendo qué número pediría la figura y lo multiplicaría por lo que se va aumentando
P: ¿haber, empezarías a ver el número de la figura? ¿Y si es la figura veinte?
E12: … veinte por tres, por lo que se va aumentando
P: ¿y luego?
E12: veinte por tres serian dos veces treinta, serian sesenta y me sobran una, pues le sumo eso, serian sesenta y uno

En el anterior extracto de discusión grupal, E12 mantiene su forma de proceder y razonar empleando de manera coherente y consistente la regla o estructura establecida desde las primeras etapas de la sucesión, además menciona varios aspectos a resaltar. Primero, al decir que: “empezaría viendo qué número pediría la figura y lo multiplicaría por lo que se va aumentando”, aquí se destaca que el estudiante asocia el número de la figura que se demanda con lo que él llama “lo que se va aumentando”, es decir, el patrón de crecimiento o recurrencia de la sucesión. Posteriormente, completa su estructura por medio de un ejemplo en particular demandado por el profesor-investigador (etapa o figura 20), en dicho ejemplo mantiene su forma de razonar, veinte (etapa demandada) por tres (lo que va aumentando), más uno (“lo que sobra”). De esa manera da una respuesta correcta a la demanda y expresa la estructura matemática plausible que sintetiza su proceso de generalización.

Procesos cognitivos desarrollados por E12

En los procesos cognitivos desarrollados por E12 en esta tercera tarea, incidió en gran manera la experiencia adquirida en el trabajo con las tareas anteriores, debido a que, el estudiante ya tenía claro que la estrategia de conteo se vuelve ineficaz para etapas lejanas, así que rápidamente se centró en percibir desde lo figural características que posteriormente tradujo a un lenguaje numérico que posibilitó obtener la cantidad de cuadrados para el caso de la T3, y que formarían cualquier figura que se le demandara, ya sea cercana o lejana. En ese sentido E12, se enfocó en las representaciones figurales dadas en la tarea, en las cuales reconoció que su crecimiento era en término de tres cuadrados entre etapas consecutivas (patrón de recurrencia o crecimiento), además de ello también reconoció desde lo figural que se debía agregar un cuadrado extra, sumándolo al final. Para el caso de este estudiante, el conteo fue empleado en la etapa de validación de la conjetura (abductivo) para comprobar que los resultados obtenidos mediante la conjetura eran efectivamente los mismos que al aplicar el conteo, esto fue posible en las etapas dadas gracias a las representaciones proporcionadas, lo cual bastó para que la conjetura se estableciera como una regla directa y poder extenderlas a etapas lejanas de la sucesión.

Los procesos inferenciales de abducción, inducción y deducción fueron fundamentales para la generalización del patrón en este estudiante, quien manifestó una estructura asociada a un pensamiento multiplicativo, que se corresponde con la cantidad de cuadrados en relación con el número de etapa. Siendo la estructura de la forma: $S_n = 3n + 1.$ La estructura es de tipo constructiva, por la manera en la que percibió, estableció y estructuró su razonamiento.

Los aspectos visuales y el contexto figural de la tarea también jugaron un rol importante en sus inferencias, en diferentes momentos de su interpretación y explicación del comportamiento del patrón figural. Su nivel de abstracción evolucionó, debido a que, a la par de la manera de percibir lo figural (estrategia figural), coordinó una estrategia numérica (patrón de recurrencia), lo cual posibilitó de manera eficiente y rápida el establecimiento de una conjetura. Su proceso cognitivo demandó el uso del lenguaje verbal, el escrito y simbólico-numérico. En cuanto a las representaciones empleadas por E12, fueron usadas en diferentes momentos, la pictórica, útil para fundamentar y justificar el conteo en la etapa de validación de la conjetura. La verbal-escrita, fue empleada en la etapa individual y en la discusión grupal, con el fin de argumentar y justificar la forma de proceder en el desarrollo de T3 y lograr expresar la conjetura establecida. El sistema de representación numérico, E4 lo empleó en el desarrollo de T3 y al final para poder representar una fórmula directa para la etapa lejana de la sucesión, expresándola como una operación aritmética, también empleó esta representación, para proporcionar los resultados de las etapas demandadas en cada cuestión.

5.1.1.3.f. Estudiante 19

El trabajo de E19 con T3, inició con la manera de percibir las etapas figurales proporcionadas en la tarea. En ese contexto, se evidencia en la hoja de trabajo la forma de percibir las dos primeras etapas dadas, en las cuales visualizó la etapa uno (figura 1), en la etapa dos (figura 2) (véase Figura 116).

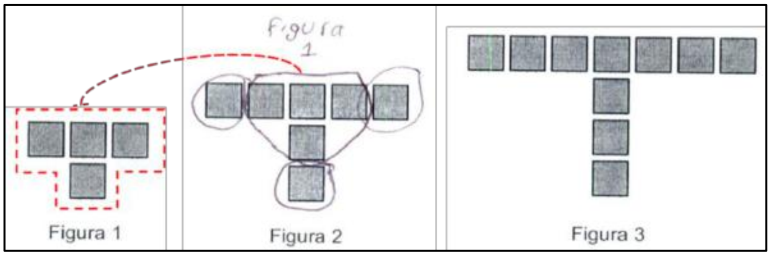


Figura 116. Forma de percibir las dos primeras etapas de E19.

En la Figura 116, se muestra cómo el estudiante visualiza que la figura 2, se forma a partir de la figura 1, además del crecimiento en término de tres cuadrados ubicados en cada extremo de la figura, pero esta misma forma de percibir las etapas uno y dos no la evidencia en la etapa tres (figura 3) en su producción escrita. Luego de esto, E19 mostró evidencia de que empezó a contar uno a uno los cuadrados que formaban cada figura de las etapas dadas, así el estudiante reconoció que, la primera figura se formaba con cuatro cuadrados, para la figura dos se requerían siete cuadrados y para la figura tres eran necesario diez cuadrados (véase Figura 117).

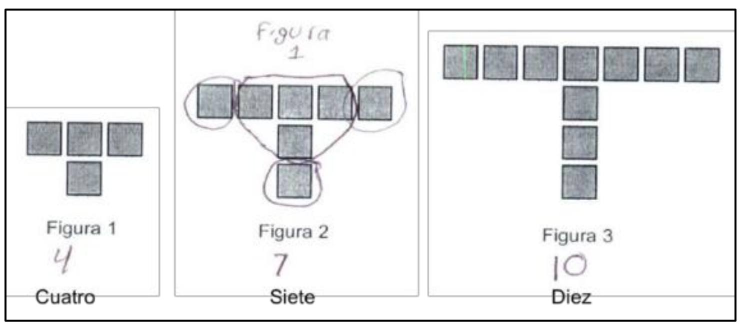
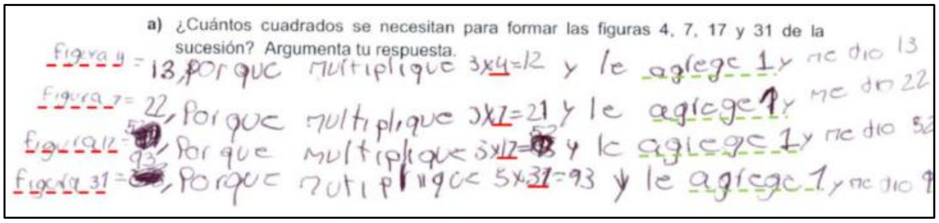


Figura 117. Cantidad de cuadrados que conforman las figuras 1, 2 y 3 de la sucesión.

Hasta aquí, el trabajo desarrollado por el estudiante es perceptivo y de naturaleza pictórica, enfocándose en las representaciones figurales de las etapas, y de esa manera involucrándose en T3 y así explorar el comportamiento que sigue el patrón a partir de las tres primeras etapas. Por otra parte, al indagar la producción escrita de E19, se logra evidenciar una regla, que se emplea de manera consistente para dar respuesta a las cuestiones demandadas en la tarea. En dicha regla, se evidencia un pensamiento multiplicativo y en ella se reconoce que el estudiante logra relacionar el número de la figura con el patrón de recurrencia (tres) y le agrega uno, de esa manera obtiene los resultados para las etapas (figuras) demandadas en la primera cuestión de T3 (figura o etapa 4, 7, 17 y 31. Véase Figura 118). Se afirma que la regla se asocia a un pensamiento multiplicativo, debido a que se puede relacionar por la manera en la que estructuró la regla con la forma: $S_n = 3n + 1$, donde n es el número de la etapa o figura y S_n es la cantidad de cuadrados que forman la figura n.



a) ¿Cuántos cuadrados se necesitan para formar las figuras 4, 7, 17 y 31 de la sucesión? Argumenta tu respuesta.

Figura 4 = 13, porque multiplique 3x4=12 y le agrege 1 y me dio 13

Figura 7 = 22, porque multiplique 3x7=21 y le agrege 1 y me dio 22

Figura 17 = 52, porque multiplique 3x17=51 y le agrege 1 y me dio 52

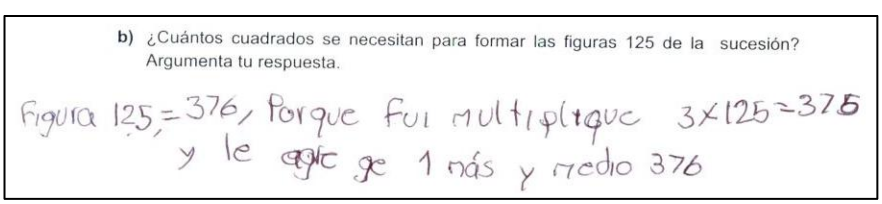
Figura 31 = 94, porque mutiplique 3x31=93 y le agrege 1 y me dio 94

Figura 118. Respuestas de E19 a las etapas demandadas en la primera cuestión de T3.

El estudiante no hace explícito en su hoja de trabajo la manera en la cual estableció (proceso inductivo), ni la forma como validó (proceso abductivo) la regla empleada para responder a las demandas planteadas en la primera cuestión de T3, pero se logra inferir que gracias a la experiencia ganada en las tareas anteriores, al estudiante se le es posible plantear rápidamente una expresión o regla que describa el comportamiento de la sucesión en etapas cercanas y lejanas, simplemente identificando el patrón de recurrencia, que para este caso sería tres, luego relacionándolo por medio de la multiplicación con el número de la figura que se demande y posteriormente haciendo un ajuste al producto, agregando el número que sea necesario, este ajuste se evidencia cuando el estudiante menciona que: "… y le agrege 1…", de esa manera logra construir una estructura matemáticamente plausible. Cabe resaltar que en el ajuste que hace luego de la multiplicación es de suma importancia las representaciones figurales de las etapas dadas, ya que el estudiante puede validar su ajuste por medio del conteo que hace de cada cuadrado que forma las etapas figurales dadas y de esta manera comprobar que su estructura es válida.

Al indagar sobre una etapa lejana de la sucesión, en la segunda cuestión planteada en T3, una vez más E19, emplea de manera coherente y consistente su forma de razonar por medio de la estructura que logró construir. El estudiante usa la estructura para determinar la cantidad de cuadrados que se necesitan para formar la figura (o etapa) 125, respecto a ello, involucra en un producto el número de figura por tres y posteriormente le adiciona uno, de esta forma proporciona una respuesta correcta y coherente a su manera de proceder anteriormente (véase Figura 119).

Es así como E19 estableció nuevas conclusiones (reglas directas), verdaderas, a partir de otra verdadera, logrando de esa manera poder extender la sucesión al igual que su razonamiento a etapas lejanas, evidenciando la construcción de una estructura que fuera matemáticamente plausible. El proceso inferencial que se manifiesta al extender la sucesión a etapas lejanas se refiere a un razonamiento de tipo **deductivo**.



b) ¿Cuántos cuadrados se necesitan para formar las figuras 125 de la sucesión? Argumenta tu respuesta.

Figura 125 = 376, Porque fui multiplique 3x125=375 y le agre ge 1 más y me dio 376

Figura 119. Respuesta de E19 ante la demanda de una etapa lejana del patrón.

Siguiendo con el análisis a lo evidenciado en la producción escrita de E19, en específico a lo que se indagaba con la tercera cuestión de T3, la cual buscaba que el estudiante hiciera explícita la regla o estructura que ayudara a determinar rápidamente la cantidad de cuadrados necesarios para formar cualquier figura que se demande. Ante esta cuestión, E19, da muestra de asociar un pensamiento multiplicativo al expresar de manera escrita: "… que valla multiplicando…", pero en su respuesta no proporciona más información acerca de su estructura o el razonamiento que siguió para la construcción de ésta (véase Figura 120). A pesar de la situación anteriormente descrita, por la manera consistente en la cual E19 procedió en su trabajo con T3, se puede afirmar que logró establecer una estructura matemática plausible.

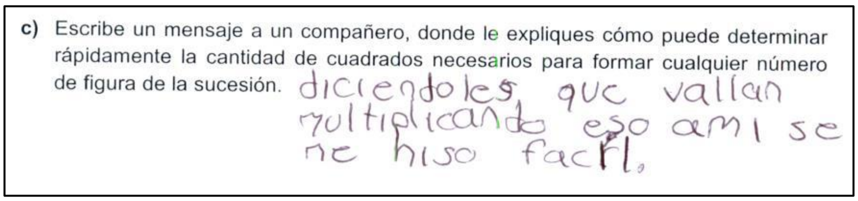

c) Escribe un mensaje a un compañero, donde le expliques cómo puede determinar rápidamente la cantidad de cuadrados necesarios para formar cualquier número de figura de la sucesión. diciendoles que vallan multiplicando eso ami se me hiso facil.

Figura 120. Respuesta de E19 ante la tercera demanda de T3.

Procesos cognitivos desarrollados por E19

Los procesos cognitivos desarrollados por E19, tuvieron una evolución hacia un sentido más numérico. En ese contexto y con la experiencia adquirida a partir del trabajo con las tareas anteriores, E19 desarrolló una estrategia simple pero eficiente para establecer una estructura matemática que describiera el comportamiento de la sucesión. Dicha estrategia básicamente consistía en multiplicar el número de figura por el patrón de recurrencia y luego aplicar un "ajuste" mediante la adición. Para la realización del "ajuste", como para la identificación del patrón de recurrencia eran fundamentales las representaciones figurales de las etapas dadas, debido a que por medio de ellas se podía identificar el número que se debía adicionar para hacer el "ajuste" y además se identificaba el patrón de crecimiento (recurrencia) de la sucesión entre etapas consecutivas al aplicar un conteo de uno en uno de los cuadrados que conformaban cada figura de las etapas dadas.

En cuanto a los aspectos visuales (figurales), tuvieron un rol secundario en las inferencias de este estudiante, puesto que fueron empleados en el sentido que ya se describió, privilegiando así una forma de razonar numérica. Su proceso cognitivo demandó el uso del lenguaje verbal, el escrito y simbólico-numérico. Las representaciones que conectó para organizar y coordinar sus ideas fueron de tipo numérica y verbal-escrita principalmente. Siendo empleada la representación de tipo numérica para expresar las operaciones aritméticas que proporcionaban la cantidad de cuadrados necesarios para formar las diferentes figuras demandadas y la verbal-escrita fue útil a la hora de argumentar y justificar su manera de proceder en el transcurso de T3.

5.1.1.3.g. Estudiante 23

E23 fue un estudiante que evidenció una evolución de su pensamiento en el transcurso de las tres tareas implementadas, mostrando para la T3 desde un inicio el establecimiento de una estructura o regla que describiera el comportamiento de la sucesión, ello en primer momento para etapas cercanas a las dadas. En ese contexto, al cuestionarle sobre su manera de proceder en la tarea e indagar sobre el desarrollo de la primera cuestión de T3, el estudiante logra externar lo que se evidencia en el siguiente extracto de entrevista:

P: haber explícame ¿cómo tú sabes que la figura cuatro tiene trece cuadrados?
E23: porque aquí… multipliqué tres por cuatro y le sume uno
P: ¡tres por cuatro y le sumaste uno!, vamos a ver si se aplica… ¿y aquí sería cuánto? [Refiriéndose a la figura 17]
E23: [en su hoja de trabajo escribe siguiendo el mismo procedimiento de multiplicar el número de la figura por tres y luego sumar uno]

En el anterior extracto de entrevista, se reconoce el trabajo con las etapas demandadas en la primera cuestión de T3, además es evidente la regla o estructura que establece para determinar la cantidad de cuadrados que formarían cada figura demandada en la cuestión. En sus respuestas a las etapas 4, 7, 17 y 31, el estudiante emplea de manera coherente y consistente la estructura que evidencia de forma verbal en el extracto de entrevista, proporcionando así respuestas correctas ante lo que se le exige (véase Figura 121).

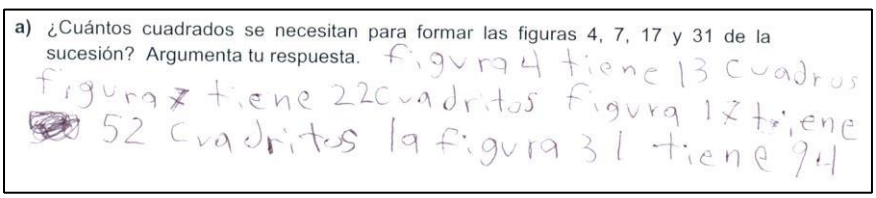

a) ¿Cuántos cuadrados se necesitan para formar las figuras 4, 7, 17 y 31 de la sucesión? Argumenta tu respuesta. figura 4 tiene 13 Cuadros figura 7 tiene 22 Cuadritos figura 17 tiene 52 Cuadritos la figura 31 tiene 94

Figura 121. Respuesta de E23 ante la primera demanda de T3.

La estructura que se evidencia en el extracto de entrevista y en la Figura 121, E23 logra expresarla por medio de un lenguaje numérico en operaciones aritméticas, donde involucra a la suma y la multiplicación (véase Figura 122). En las operaciones aritméticas, también se evidencia lo que externa E23 en la entrevista individual, y a pesar de que trabaja con los casos particulares, es decir, proporciona la cantidad de cuadrados para una etapa determinada, se logra reconocer que, el procedimiento que aplica es consistente, primero, multiplicando el número de la figura por tres y luego a ese producto le adiciona uno para completar su resultado.

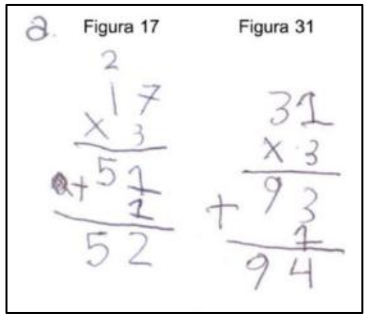


Figura 122. Cantidad de cuadrados que forman las figuras 17 y 31 del patrón, expresadas mediante operaciones aritméticas (estructura).

En la cuestion que indagaba acerca de la cantidad de cuadrados para una etapa o figura lejana de la sucesión, E23 demostró una vez más emplear en forma coherente la estructura establecida al inicio del trabajo con T3 (vease Figura 123). De esta manera, logra proporcionar una respuesta correcta ante lo que se le demanda en la segunda cuestion de la tarea.

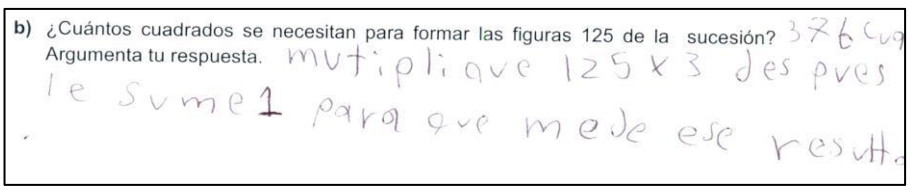


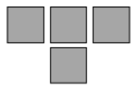
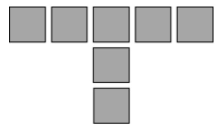
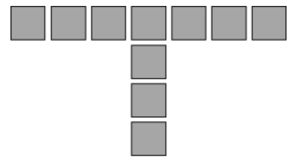
Figura 123. Respuesta de E23 ante la segunda demanda de T3.

En lo que respecta a los procesos inferenciales de razonamiento, el que E23 hace más explícito en su proceder es el de tipo deductivo, al extender la regla establecida a etapas lejanas de la sucesión. A fin de profundizar en este proceso inferencial evidenciado por el estudiante, se le cuestionó:

P: ahora ¿cuántos cuadrados se necesitan si yo te pregunto por la figura 125? ¿Cómo sería entonces?
E23: también multiplicar y sumarle 1
P: pero ¿qué multiplicas?
E23: tres por 125, más uno
P: ok

Contrario al deductivo el proceso inductivo y abductivo (establecimiento y validación respectivamente de la regla), no son evidentes en la forma de proceder de este estudiante. Esta situación se debe a la estrategia desarrollada por E23 y a la experiencia ganada en el trabajo con las anteriores tareas, llevándolo a privilegiar una estrategia numérica donde reconoce el patrón de crecimiento entre etapas consecutivas por medio del conteo de las etapas dadas, el cual multiplica por el número de figura y "ajusta" el resultado adicionando el número que sea necesario. El número concreto con el cual se va a "ajustar", se determina a partir del conteo de los cuadrados que forman las figuras de las etapas dadas, luego se realiza una comparación entre el resultado de la multiplicación del número de etapa dada, con el patrón de crecimiento y el total de cuadrados que forman la etapa figural (determinado por conteo). De esa manera, el estudiante encuentra que debe agregarle uno para que coincidan los resultados (véase Tabla 17, a modo de ejemplo de la manera en la cual se estableció la estructura por medio de la estrategia numérica para las etapas dadas).

Tabla 17. Estrategia Numérica Desarrollada por E23 para el Establecimiento de la Estructura, a Partir del Trabajo con las Etapas Dadas.

Etapa:	**1**	**2**	**3**
Representación figural:	 Figura 1	 Figura 2	 Figura 3
Total de cuadrados:	4	7	10
Producto (*PC*×*NF*):	$3 \times 1 = 3$	$3 \times 2 = 6$	$3 \times 3 = 9$
Diferencia:	1	1	1
Con ajuste:	$3 \times 1 + 1 = 3$	$3 \times 2 + 1 = 7$	$3 \times 3 + 1 = 10$

Nota: ***PC*** = Patrón de Crecimiento; ***NF*** = Número de Figura

Al indagar sobre la tercera cuestión de T3, la cual buscaba que el estudiante hiciera explícita la regla o estructura que ayudara a determinar rápidamente la cantidad de cuadrados necesarios para formar cualquier figura que se demande. Ante esta cuestión, E23 da muestra de articular la estructura o regla establecida, con un pensamiento multiplicativo y en el transcurso de la tarea, logra evidenciarlo mediante el uso de un lenguaje verbal-escrito (extractos de entrevista) y simbólico-numérico (operaciones aritméticas). En ese contexto, la estructura multiplicativa se asocia a la forma: $S_n = n \times 3 + 1$, por la manera en la que se organizó, donde n es el número de etapa o figura y S_n es la cantidad de cuadrados en la etapa o figura n. La Figura 124, muestra la respuesta de E23 ante la tercera demanda de la T3, allí se evidencia de manera explícita la estructura matemática plausible construida por el estudiante y expresada mediante un lenguaje verbal-escrito.

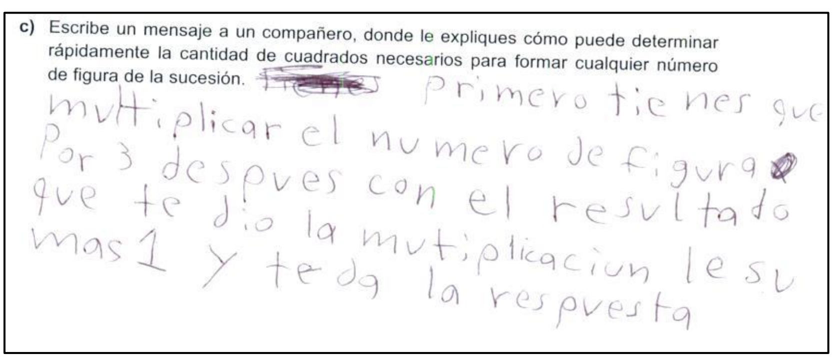


Figura 124. Estructura matemática plausible establecida por E32 enT3.

Procesos cognitivos desarrollados por E23

Los procesos cognitivos desarrollados por E23 en T3, fueron influenciados por el trabajo con las anteriores tareas, puesto que, por la experiencia ganada, E23 desarrolló una estrategia válida y eficiente para construir una estructura matemáticamente plausible, con la cual se pudiera determinar la cantidad de cuadrados que formarían cualquier etapa demandada de la sucesión en T3. Dicha estrategia de carácter numérico consistió en determinar el valor del patrón de recurrencia de la sucesión, para luego multiplicarlo por el número de figura, y posteriormente adicionarle un número constante. En ese sentido, tanto el patrón de crecimiento y el número constante que se adiciona para completar la estructura, se identifican con ayuda de las etapas dadas en el contexto de la tarea. Debido a la estrategia que logró desarrollar gracias al trabajo continuado con este tipo de tareas que en la presente investigación se proponen, fue posible para el estudiante construir una estructura que describiera el comportamiento de la sucesión tanto para etapas lejanas como para las cercanas.

Los procesos inferenciales, los aspectos visuales (figurales), al igual que el proceso cognitivo y las representaciones que conectó el estudiante en el trabajo con T3, fueron descritos ampliamente en párrafos anteriores.

5.1.1.3.h. Estudiante 26

La forma en que E26 se involucró con el patrón figural de la sucesión, consistió en observar y analizar las representaciones figurales de las etapas dadas. En ese contexto, el trabajo radicó en un primer momento en un conteo de las partes (cuadrados) que formaban el patrón figural en cada etapa dada. Así fue como reconoció, que la primera etapa (figura 1), se constituía por cuatro cuadrados, que la segunda (figura 2), se formaba por siete cuadrados y la tercera (figura 3), se componía de diez cuadrados. Es en el trabajo con las etapas dadas que el estudiante también reconoce el patrón de crecimiento de la sucesión entre etapas consecutivas, identificando que la sucesión aumentaba de tres en tres de una etapa a otra. Es por ello por lo que el estudiante en su producción escrita, da evidencia de percibir de manera figural la forma en la que crecen las etapas dadas y en dónde se ubica ese aumento de tres cuadrados de una etapa figural a otra.

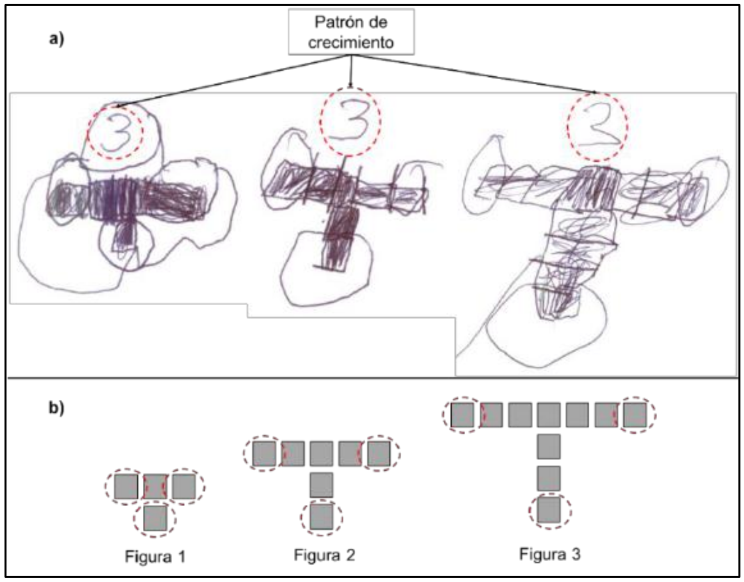
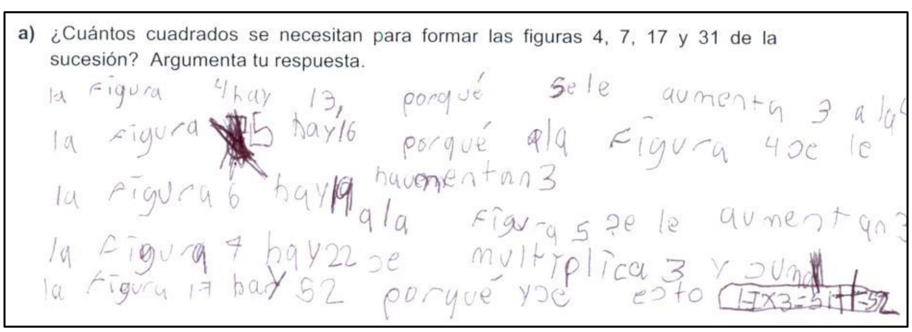


Figura 125. a) Percepción enfocada en la forma (producción escrita de E26). **b)** Crecimiento y ubicación del crecimiento para las etapas figurales dadas (reconstrucción).

En la parte **a)** de la Figura 125, se muestra que E26 evidenció enfocarse en mantener la forma de la figura (Te), a pesar del crecimiento de una a otra etapa, manifestando una percepción de tipo sensorial que coordinó con la cognitiva, al reconocer propiedades y características, como el patrón de recurrencia a partir de lo percibido sensorialmente. Luego de esto, el estudiante dejó de lado lo visual-figural y se centró en el crecimiento de la sucesión desde lo numérico, desarrollando una estrategia de conteo recursivo donde involucra la adición progresiva del patrón de recurrencia (tres). Extractos de su entrevista en correspondencia con la Figura 126, muestra cómo E26 empleó la adición recursiva del patrón de crecimiento para proporcionar respuestas a las etapas demandadas en la primera cuestión de T3.


a) ¿Cuántos cuadrados se necesitan para formar las figuras 4, 7, 17 y 31 de la sucesión? Argumenta tu respuesta.

la figura 4 hay 13, porqué se le aumenta 3 a la
la figura 5 hay 16 porqué a la figura 4 se le haumentan 3
la figura 6 hay 19 a la figura 5 se le aumenta 3
la figura 7 hay 22 se multiplica 3 y suma
la figura 17 hay 52 porqué yse esto 17x3=51+1=52

Figura 126. Respuesta de E26 ante la primera demanda de T3.

P: cuéntame ¿cómo vas?
E26: yo le fui aumentando… vi que estos [señalando las etapas dadas] iban aumentando de tres, tres, entonces en la figura cuatro iba a ser trece, porque iba aumentando tres
P: ¿iban aumentando tres? Entonces en la figura cuatro ¿serían?
E26: ¡trece!

P: ¿y cómo sabes que en la figura siete son veintiuno?
E26: porque le fui aumentando otros tres, tres, para que me diera esto

En la Figura 126, se evidencia de manera más clara la aplicación del conteo recursivo, puesto que el estudiante transita por la etapa cinco y seis (etapas no demandadas), para determinar la etapa siete (etapa demandada).

Hasta aquí, la capacidad expresiva de E26 es mayoritariamente de naturaleza verbal-escrita, que usa para explorar cuál es el comportamiento que sigue el patrón y para explicar el razonamiento que siguió a partir de las etapas dadas. Por su parte, en la etapa tres y cercanas a ésta, E26 utilizó la estrategia de conteo, apoyándose del lenguaje simbólico y verbal. A partir de ello, percibió un patrón figural creciente, de reconocer que la cantidad de cuadrados que conforman a las figuras aumentan de una etapa a otra y que esa cantidad es invariante, por lo que infiere (conjetura) que va de tres en tres, identificando así, una regla local (patrón de recurrencia), como se muestra en el anterior extracto de entrevista.

Hasta la figura (etapa) 7, el estudiante hace uso de su estrategia de adición recursiva, pero por medio del proceso de acompañamiento del profesor-investigador, observa que la estrategia es ineficiente, incluso para etapas cercanas no consecutivas (etapas 17 y 31), lo que lo lleva a desarrollar una estrategia más eficaz para determinar la cantidad de cuadrados que forman etapas cercanas no consecutivas y lejanas. En ese contexto, E26 da evidencia de una regla o estructura articulada a un pensamiento multiplicativo que se asocia a la forma: $S_n = n \times 3 + 1$, a partir de la estructura pudo determinar sin necesidad de contar o adicionar repetidamente, las etapas 7 y 17 de la sucesión (véase Figura 127). Se infiere que cada término que conforman la estructura los logró determinar por medio de un proceso de establecimiento y validación (proceso inductivo-abductivo) de una conjetura, además que la experiencia ganada en el trabajo con las anteriores tareas lo ayuda a ello. En ese sentido, n viene dado por el número de figura de la cual se quiera determinar la cantidad de cuadrados que la conforma. Por su parte, el tres de la estructura es el patrón de crecimiento identificado por medio de las etapas dadas, y el número uno que se adiciona al final, viene dado de validar mediante una comparación de resultados la cantidad de cuadrados obtenidos por conteo de las etapas dadas y el resultado del producto del número de la etapa por el patrón de recurrencia, a lo cual se llega que es un número constante que resulta ser el uno.

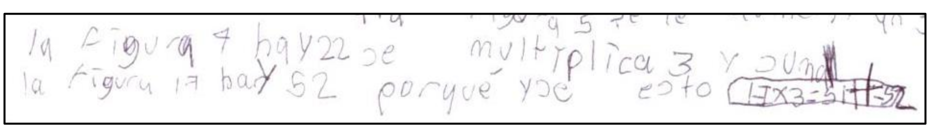


Figura 127. Uso de la estructura establecida por E26 para determinar la cantidad de cuadrados que forman a las figuras (etapas) 7 y 17.

En la estrategia que siguió, E26 hace uso de un lenguaje simbólico-numérico para traducir lo que de manera verbal-escrita había realizado. Es así como externa y representa por medio de operaciones aritméticas la estructura matemáticamente plausible que describe el comportamiento de la sucesión. Dicha estructura, también es empleada de manera coherente para etapas lejanas, en particular para una etapa lejana que se demanda en T3 (etapa 125). Es así, como mediante una operación aritmética en la cual involucra la estructura antes mencionada, determina la cantidad de cuadrados que formarían la figura 125 (véase Figura 128). De esta manera, E26 estableció nuevas conclusiones (etapa 125), verdaderas, a partir de otra verdadera, (estructura establecida). El proceso inferencial que manifiesta aquí refiere a un razonamiento de tipo **deductivo**.

b) ¿Cuántos cuadrados se necesitan para formar las figuras 125 de la sucesión? Argumenta tu respuesta.

125X3= . 375 + 1 =376

Figura 128. Uso de la estructura establecida para el caso de una etapa lejana (figura 125).

Al indagar sobre la tercera cuestión de T3, el estudiante por medio de un lenguaje verbal-escrito logra expresar y hacer explícita la regla o estructura que ayudara a determinar rápidamente la cantidad de cuadrados necesarios para formar cualquier figura que se demande, evidenciando así una vez más que articuló su estructura a un pensamiento multiplicativo de la forma: $S_n = n \times 3 + 1$ (véase Figura 129).

c) Escribe un mensaje a un compañero, donde le expliques cómo puede determinar rápidamente la cantidad de cuadrados necesarios para formar cualquier número de figura de la sucesión.

hise la multiplicasion de cada número por 3 y luego le sume 1

Figura 129. Estructura matemática plausible establecida por E26 y expresada mediante un lenguaje verbal-escrito.

Procesos cognitivos desarrollados por E26

Los procesos cognitivos de E26 en T3, se articularon a la estrategia de conteo, al crecimiento del patrón (patrón de recurrencia), a la manera de percibir figuralmente ese crecimiento y a la estructura que finalmente estableció. Inicialmente, el estudiante en el trabajo con las etapas dadas manifiesta un conteo de las sub-configuraciones que forman cada figura, lo que es útil para determinar la cantidad de cuadrados que forman cada figura de las etapas. El conteo también ayuda a reconocer el patrón de recurrencia de la sucesión. Luego de esto E26, manifiesta una percepción de tipo sensorial al mantener la forma de la figura, articulándola posteriormente a una percepción cognitiva al usar el patrón de recurrencia para identificar de qué manera se puede evidenciar el crecimiento de la sucesión desde las figuras en las etapas dadas. Su forma de proceder evoluciona al reconocer que la estrategia de conteo o adición recursiva resulta poco útil para determinar la cantidad de cuadrados que forman figuras que corresponden a etapas lejanas. Es aquí donde su experiencia con las tareas anteriores entra en juego y logra mostrar evidencia del establecimiento de una estructura con la cual se puede determinar la cantidad de cuadrados para cualquier figura demandada.

Los procesos inferenciales de inducción y abducción no fueron evidentes en la producción escrita del estudiante, como lo fue el de deducción, se infiere que E26 al igual que otros estudiantes por el trabajo con las dos tareas anteriores desarrollaron una estrategia de carácter numérico, la cual le posibilitaba establecer una estructura de forma eficiente. En ese contexto, los aspectos visuales (figurales), para este estudiante tuvieron un rol poco preponderante en su forma de proceder y razonar, debido a que ese aspecto, solo se evidenció de manera explícita en el momento que las representaciones figurales de las etapas dadas fueron empleadas como parte del proceso de validación para el conteo que ayuda a comprobar los resultados obtenidos por la estructura (operaciones aritméticas), en específico para las etapas dadas.

Por otra parte, el proceso cognitivo de E26 demandó el uso del lenguaje verbal, el escrito, figural y simbólico. En ese sentido, las representaciones que conectó para organizar y coordinar sus ideas fueron de tipo numérica y verbal-escrita principalmente. En cuanto a las representaciones empleadas por el estudiante, fueron usadas en diferentes momentos, la pictórica, útil en la justificación del conteo inicial de las etapas dadas. La verbal-escrita fue empleada con el fin de argumentar y justificar la forma de proceder y externar la manera de razonar en la tarea, así como para expresar la estructura matemática establecida que sintetiza el proceso de generalización. El sistema de representación numérico, E26 lo empleó en el desarrollo de T3 para representar por medio de operaciones aritméticas una fórmula directa para determinar la cantidad de cuadrados necesarios para formar una figura demandada.

5.1.1.3.i. Estudiante 27

La manera en la que se involucró E27 en el trabajo con T3 según lo evidenciado en su producción escrita y lo externado en la discusión grupal, dan muestra que tanto la percepción visual como un conteo estratégico desarrollado por el estudiante a la postre posibilitaron el establecimiento de la estructura que describiría el comportamiento de la sucesión en cualesquiera de sus etapas. En ese contexto, E27 desarrolla una estrategia figural basada en la manera de percibir las representaciones figurales de las etapas dadas en la tarea. La percepción de las figuras y por ende la estrategia figural, consistió en descomponer las figuras de las etapas dadas en tres partes no superpuestas (una parte central y dos laterales. Véase Figura 130). Por su parte el conteo estratégico de las partes no superpuestas permitió determinar la cantidad de cuadrados que conformaban las tres primeras figuras de la sucesión.

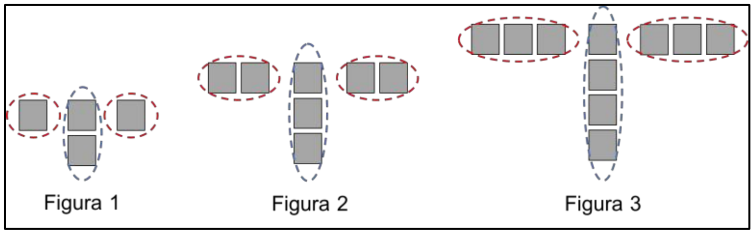


Figura 130. Reconstrucción figural de la forma de percibir visualmente las etapas dadas por parte de E27.

Se observó que la estrategia de descomposición figural, E27 no la realizó de manera arbitraria sino que se infiere de reconocer características variantes e invariantes de las representaciones figurales, construyendo así una conjetura o regla local en la cual asocia el número de la figura con la cantidad de cuadrados que formaban cada parte en las cuales percibió y descompuso las figuras de cada etapa dada. En ese sentido, el estudiante expresó la conjetura para la cantidad de cuadrados que forman las figuras en las tres primeras etapas (etapas dadas), a través de un lenguaje simbólico-numérico mediante operaciones aritméticas que evidenciaban la manera en la cual percibió el patrón, además empleo un conteo y posteriormente una adición para proporcionar respuesta a la cantidad de cuadrados que forman las etapas dadas (véase Figura 131).

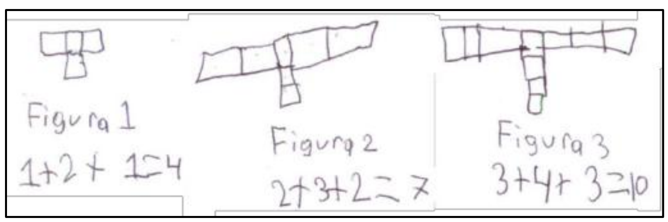


Figura 131. Operaciones aritméticas (estructura) para las tres primeras etapas de T3.

A fin de profundizar en los procesos inferenciales que siguió en las tres primeras etapas de T3, se indagó en la discusión grupal por la manera de proceder en la tarea. En ese contexto, E27 representa de manera figural la etapa 4 (figura 4) de la sucesión, la cual es una etapa demandada en la primera cuestión de T3, y la toma como referencia para explicar a sus compañeros su forma de proceder en la tarea en el siguiente fragmento de la discusión. Con ello fue posible, además, reconstruir su estrategia (véase Figura 130, Figura 131 y Figura 132).

E27: Primero le aumento aquí [señalando un cuadro correspondiente a la parte vertical de la figura] después le pongo los números en el lado [a la derecha e izquierda de la parte horizontal de la figura]

P: Ajá

E27: Después si los cuentas [señalando con el dedo cada uno de los cuadrados verticales de la figura] pones la cantidad que está [señalando el número de la figura] y después los sumas

P: Quiero que hagas esa suma que mencionas

E27: [el estudiante procede a realizar la suma y obtiene trece como resultado]

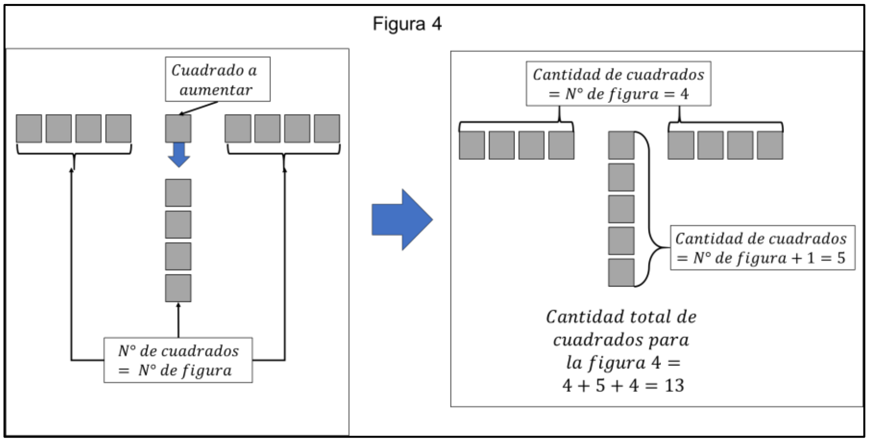


Figura 132. Reconstrucción figural de la forma de proceder de E27 en la construcción de la etapa 4.

Hasta aquí el estudiante emplea y conecta un lenguaje pictórico, simbólico y verbal-escrito para así explorar el comportamiento que sigue el patrón y explicar el razonamiento que siguió. De esa forma, el estudiante manifiesta un pensamiento aditivo, basado en el conteo, que coordinó con lo percibido (estrategia figural), al sumar cuadrados mediante un conteo estratégico, según las partes en las cuales se descompuso cada figura. Cabe resaltar que E27 no hace evidente ni en su producción escrita ni en la discusión grupal el patrón de recurrencia de la sucesión, puesto que para él prima la estrategia figural que desarrolló. A partir del trabajo con las etapas dadas, se evidencia un proceso inductivo-abductivo, debido a que logra establecer una regla local o conjetura (acción inductiva) pero regresa a las etapas dadas para comprobar su regla dando lugar a un proceso de validación (acción abductiva), es por ello que se puede ver que el estudiante expresa las operaciones aritméticas para las tres primeras etapas (véase Figura 131). Al validar la conjetura E27 puede extenderla como regla directa a la etapa 4 de la sucesión (véase fragmento de discusión grupal).

Al observar el trabajo de E27 en T3, el profesor-investigador busca que profundice en explicar y argumentar su manera de proceder, con el propósito de indagar más afondo la forma en que estableció la regla que aplica en la etapa cuatro. En ese contexto, se cuestiona al estudiante durante la discusión grupal, con el fin de tener mayor claridad en su forma de razonar.

P: ¿Qué sumaste? [Refiriéndose a la suma realizada anteriormente]
E27: cuatro más cinco más cuatro
P: ¿De dónde salió ese cinco? [Señalando al cinco que E27 escribió en medio de los cuatros]
E27: De aquí, de que cuenta los cuadros [señalando los cuadrados que conforman la parte vertical de la figura]
P: ¿los cuadros de dónde? ¿Del centro? [Haciendo referencia a la parte vertical de la figura que se encuentra en el centro de esta]

E27: ¡Si! [Afirmando también con un gesto de su cabeza], después veo los de los lados y los pongo [señalando a las dos filas que se forman a la derecha e izquierda, luego de descomponer la figura]

P: ¿Y por qué hay? ¿Por qué este cuatro? ¿De dónde sale ese cuatro?

E27: de estos [Señalando la fila de cuadrados a su derecha]. Si representa la figura cuatro y le pone los cuatro, entonces los pones acá abajo [señalando el cuatro de su derecha de la operación aritmética que hizo anteriormente] y así es la respuesta y después lo suma.

Del anterior extracto se identifica que a pesar de que el estudiante ya asocia el número de figura con la operación aritmética que le permite determinar la cantidad de cuadrados que forman la etapa, también se reconoce que basa sus argumentos en lo que percibe figuralmente a través de las representaciones de las etapas dadas, las cuales por medio de un conteo reconoce la cantidad de cuadrados que las componen y posteriormente suma los cuadrados que forman cada parte para así obtener la totalidad de cuadrados que constituyen la figura que en este caso fue la cuatro. Al identificar que el estudiante basa sus explicaciones y argumentos en las representaciones figurales, el profesor-investigador lo cuestiona acerca de una etapa cercana no consecutiva (figura 17) en la cual no emplee la representación figural. El siguiente fragmento de discusión en correspondencia con la Figura 133 da evidencia de lo mencionado:

P: ahora, si quieres representar la figura 17 ¿Cómo lo harías?... ¿Vas a hacer la figura? ¿Es necesario hacer la figura?... Según como hiciste aquí [Señalando la operación aritmética realizada para la figura 4]… ¿cómo lo harías? por favor hazla.

E27: [el estudiante procede a realizar la operación aritmética correspondiente a la figura 17]

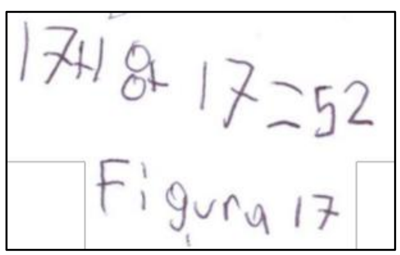


Figura 133. Estructura (operación aritmética) externada para la etapa 17 de la sucesión.

El fragmento de discusión grupal al igual que la Figura 133, dan evidencia de la manera coherente y consistente en la cual E27 empleó la regla que estableció, sin necesidad de apoyarse de la representación figural, dando muestra de dejar de lado lo particular y enfocándose en lo general o estructural de la sucesión asociada al patrón. De esa manera, logra establecer su regla directa como una estructura matemática plausible que explica y describe el comportamiento de la sucesión en etapas cercanas y lejanas. En ese contexto, E27 emplea una vez más la estructura establecida para proporcionar el total de cuadrados que conformarían la figura 31 (véase Figura 134), la cual es una etapa demandada en T3 y una etapa lejana no demandada en la tarea, figura 1000, por la cual se indagó con el objetivo de profundizar en los procesos inferenciales del estudiante (véase Figura 135).

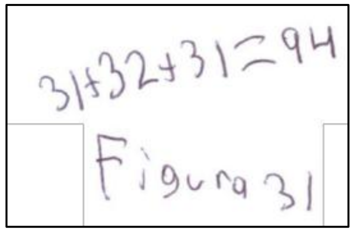


Figura 134. Estructura (operación aritmética) para la etapa 31 de la sucesión.

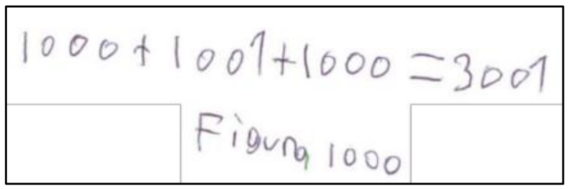


Figura 135. Cantidad de cuadrados necesarios para formar la figura 1000 de la sucesión.

El proceso inferencial que siguió el estudiante, al trabajar con las etapas 17, 31 y 1000 fue de tipo deductivo, propio de una validez más formal. Que en esta etapa de formación en estudiantes de primaria, se basa en el uso de una regla verdadera en etapas lejanas. La estructura matemática que infiere aquí es de la forma: $S_n = n + (n+1) + n$, por la forma en la cual la organizó y percibió, además de tipo constructiva aditiva, y que construyó y validó en un proceso conjunto de inducción-abducción, a partir de las etapas dadas.

A fin de contribuir en una mejor comprensión de la inferencia que estableció E27 en esta tarea, se indaga para que el estudiante haga explícita la estructura que logró construir y que describe el comportamiento de la sucesión en cualesquiera de sus etapas. De esa manera, el estudiante logra expresar mediante un lenguaje verbal-escrito la estructura que sintetiza el proceso de generalización llevado a cabo en T3 (véase Figura 136).

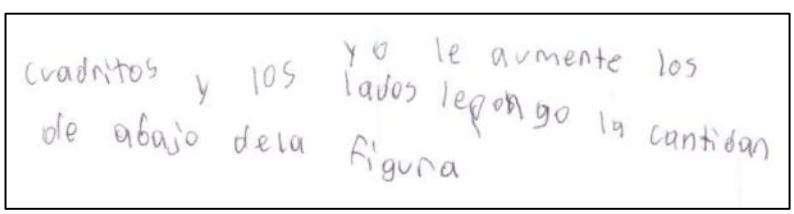


Figura 136. Estructura matemática plausible externada por E27 mediante un lenguaje verbal-escrito.

Procesos cognitivos desarrollados por E27

Los procesos cognitivos de E27 en T3, se articularon principalmente a la percepción visual de las etapas figurales de la sucesión. En primer término, analizó las figuras de las etapas dadas. De ahí, reconoció una forma de percibir y descomponer cada figura de las tres primeras etapas, lo que posibilitó que estableciera una conjetura, manifestando un razonamiento de tipo inductivo al trabajar con los casos particulares (etapas dadas). En seguida, el estudiante valida la conjetura involucrando un razonamiento abductivo y apoyándose de un conteo de los cuadrados que forman las figuras dadas para comprobar la regla establecida. Es así como infiere una estructura matemática de la forma: $S_n = n + (n+1) + n$, de tipo constructiva aditiva, donde n es el número de figurales y S_n es el total de cuadrados que la forma. Aunque la estructura E27 la deriva de la manera de percibir el patrón figural y un conteo estratégico, logra usarla posteriormente en el trabajo con etapas cercanas no consecutivas y lejanas. En etapas lejanas sus inferencias son de tipo **deductiva**, que se sustentan de conclusiones válidas para obtener otras verdaderas. Es en estas etapas en que expresa la estructura matemática a través de una operación aritmética, articulada a un pensamiento aditivo, donde aún se puede evidenciar la manera de percibir el patrón figural que posibilitó el establecimiento de la estructura.

En general, E27 se apoyó del conteo para las primeras etapas, prevaleciendo en su proceder un pensamiento aditivo, incluso en las lejanas. Además, se observó que siguió un proceso cognitivo basado en la coordinación de significados, propiedades, representaciones, para inferir explicaciones.

Los aspectos visuales (figurales) en el caso de este estudiante jugaron un papel importante en sus inferencias, en el trabajo con las etapas dadas, a la hora de expresar la forma de percibir estas tres primeras y cómo estructurar y organizar las partes no superpuestas que constituían a las figuras de cada etapa y de esa manera interpretar y explicar el comportamiento del patrón figural. En ese contexto, los aspectos figurales de las etapas dadas fueron de suma relevancia, ya que las operaciones aritméticas (estructura) que presenta el estudiante guardan una estrecha relación con la forma y el orden visual en el cual percibió las figuras, debido a que éstas fueron descompuestas en tres partes y las operaciones aritméticas evidenciadas por E27, estaban constituidas por tres miembros, en los cuales el término del centro era el número de la figura aumentado en uno y los dos términos restantes el estudiante los escribía al lado derecho e izquierdo y éstos correspondían al número de figura que se demandara. Es así, como la forma en la cual E27 escribió las operaciones aritméticas era coherente a la manera inicial en la cual percibió las etapas figurales.

Es evidente, que en este estudiante el contexto figural favoreció sobre manera que se construyera de forma más rápida una estructura matemática plausible que explique el comportamiento de la sucesión para T3, pero en etapas lejanas se hace necesario dejar de lado el contexto figural, puesto que resulta mucho más eficiente un contexto numérico, debido a los obstáculos que suscita el representar figuras asociadas a etapas lejanas.

5.1.1.3.j. Estudiante 29

Con respecto a este estudiante y la manera en la cual se involucró en el trabajo con T3, se evidencia que al igual que los demás estudiantes su trabajo consistió en un primer momento en observar y analizar las representaciones figurales de las etapas dadas en el contexto de la tarea. A partir de ello, se enfocó en contar los objetos o cuadrados que forman las figuras de las etapas dadas identificando que la figura 1 estaba conformada por cuatro cuadrados, que la figura 2 se constituía por siete cuadrados y que la figura 3 estaba formada por diez cuadrados. Es así como E29 identifica el patrón de crecimiento o recurrencia, reconociendo que la sucesión crecía de una etapa a otra de tres en tres. En ese sentido, la percepción visual para el caso de este estudiante la empleó para determinar por medio de un conteo de uno en uno la cantidad de cuadrados que conforman las etapas dadas.

Hasta las etapas dadas, el estudiante manifiesta un pensamiento aditivo, basado en un conteo estratégico. Reconoció, además, que el patrón figural en T3 es creciente, incluso que, de una etapa a otra, la cantidad de cuadrados aumenta en tres (patrón recursivo). Con ello, evidencia que infiere una regla local o conjetura. Su razonamiento en este proceso fue de tipo **inductivo**. Muestra de ello, es lo expresado en el siguiente extracto de entrevista individual:

> E29: para la figura cuatro conté estos y me dieron diez [haciendo referencia a la cantidad de cuadrados que forman la figura 3]… y ya como va aumentando otros tres… a esos diez le aumenté tres…

En el anterior fragmento de entrevista E29, evidencia de manera explícita su estrategia de conteo articulada a un pensamiento aditivo y el patrón recursivo identificado en el trabajo con las etapas dadas, el cual posibilita que extienda la sucesión a una etapa cercana demandada en la tarea (etapa 4). De esa manera, el estudiante puede determinar la cantidad de cuadrados que formarían figuras o etapas cercanas consecutivas mediante su estrategia de conteo, pero ésta sería poco eficaz para etapas cercanas no consecutivas y totalmente ineficiente en el caso de etapas lejanas.

Hasta aquí, el estudiante empleó las representaciones pictóricas de las etapas dadas y mayormente un lenguaje verbal-escrito para explorar cuál es el comportamiento que sigue el patrón y para explicar el razonamiento que siguió en el trabajo con las primeras tres etapas.

E29, al analizar que su estrategia de conteo recursiva articulada a un pensamiento aditivo era poco útil para etapas lejanas de la sucesión, procede a un cambio de estrategia logrando desarrollar una estrategia numérica eficiente y válida, a partir de la experiencia ganada con las tareas anteriores y de los significados, propiedades y representaciones que pudo coordinar con la forma de percibir en el desarrollo tanto de esta tarea como el de las dos previas. En ese contexto, en la estrategia numérica desarrollada, E29 involucró el patrón de recurrencia en forma numérico (tres), identificado a partir del conteo aplicado en el trabajo con las etapas dadas. En esta nueva estrategia dejó de lado el pensamiento aditivo y asoció mediante la articulación de un pensamiento multiplicativo el número de la figura con el patrón de recurrencia, como lo logra evidenciar en su producción escrita (véase Figura 137). De esta manera, E29 logra inferir una nueva conjetura articulada a un pensamiento multiplicativo de la forma: $S_n = n \times 3$, donde n es el número de figura y el 3, es el patrón de recurrencia de la sucesión. El razonamiento que puso de manifiesto al establecer la nueva conjetura fue de tipo inductivo, al trabajar con casos particulares.

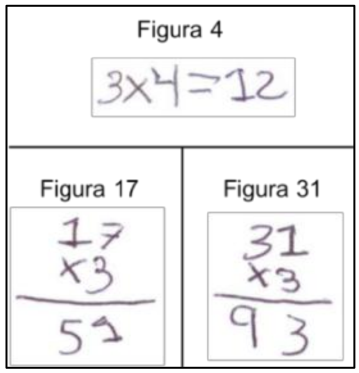
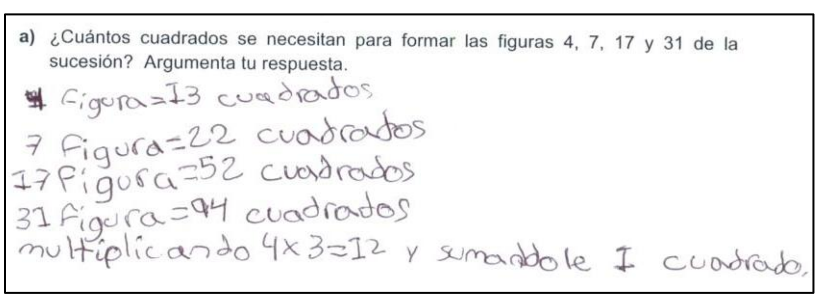


Figura 137. Conjetura establecida por E29 articulada a un pensamiento multiplicativo para algunas etapas demandadas en la primera cuestión de T3.

Al trabajar con casos particulares el estudiante pudo establecer la nueva conjetura, manifestando así un razonamiento de tipo inductivo. Posteriormente y mediante un proceso de validación (razonamiento abductivo), se comprueba que a los resultados hallados por medio de la multiplicación del número de la figura y el patrón de crecimiento, es necesario que se le adicione uno para que coincidan con los obtenidos mediante el conteo en las primeras tres etapas de la sucesión. De esta manera, el estudiante modifica la nueva conjetura a la cual la sigue articulando a un pensamiento multiplicativo pero ahora se asocia a la forma: $S_n = n \times 3 + 1$, donde n sigue siendo el número de figura, el tres es el patrón de recurrencia, el uno es el ajuste realizado y S_n es la totalidad de cuadrados que formarían la figura n. En ese sentido, la nueva conjetura con el ajuste realizado se constituye en una regla directa al extenderse y dar respuesta a la primera cuestión de T3, siendo además evidente en la producción escrita y el extracto de entrevista de E29, la forma asociada a la regla directa (véase Figura 138 y extracto de entrevista).


a) ¿Cuántos cuadrados se necesitan para formar las figuras 4, 7, 17 y 31 de la sucesión? Argumenta tu respuesta.

4 Figura=13 cuadrados
7 Figura=22 cuadrados
17 Figura=52 cuadrados
31 Figura=94 cuadrados
multiplicando 4x3=12 y sumandole 1 cuadrado,

Figura 138. Respuesta a la primera cuestión de T3 por parte de E29.

P: ¿cómo sería?
E29: hay que ir multiplicado… por decir la del cuatro, tres por cuatro, lo que me dé pues, trece… más uno
P: tres por cuatro ¿cuánto es?
E29: doce… más uno, trece
P: ok, ¿eso sería entonces?...
E29: ¡sí!

En la cuestion que indagaba acerca de la cantidad de cuadrados para una etapa o figura lejana de la sucesión, E29 demostró emplear en forma coherente la regla directa establecida mediante la estrategia numérica y que usó para dar respuesta a las etapas demandadas en la primera cuestion de T3. De esta manera y haciendo uso de la regla establecida, logra proporcionar una respuesta correcta ante la cantidad de cuadrados que formarían la etapa o figura 125 de la sucesión (véase Figura 139).

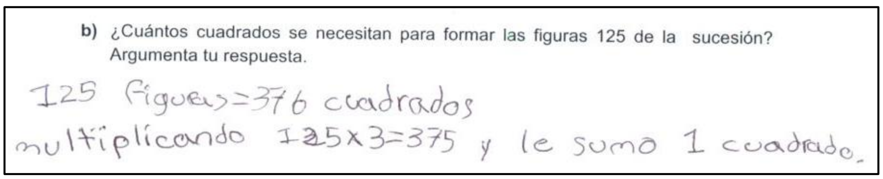

b) ¿Cuántos cuadrados se necesitan para formar las figuras 125 de la sucesión? Argumenta tu respuesta.
125 figuras=376 cuadrados
multiplicando 125x3=375 y le sumo 1 cuadrado.

Figura 139. Respuesta de E29 ante una etapa lejana de la sucesión en T3.

Al indagar sobre la tercera cuestión de T3, la cual buscaba que el estudiante hiciera explícita por medio de un lenguaje verbal-escrito, la regla o estructura que ayudara a determinar rápidamente la cantidad de cuadrados necesarios para formar cualquier figura que se demande. Ante esta cuestión, E29 demuestra una vez más articular la estructura o regla establecida, con un pensamiento multiplicativo y en el transcurso de la tarea, logra evidenciarlo mediante el uso de un lenguaje verbal-escrito (extractos de entrevista) y simbólico-numérico (operaciones aritméticas). La Figura 140, muestra la respuesta de E29 ante la tercera demanda de la T3, allí se evidencia de manera explícita la estructura matemática plausible construida por el estudiante y que sintetiza el proceso de generalización en esta tarea.

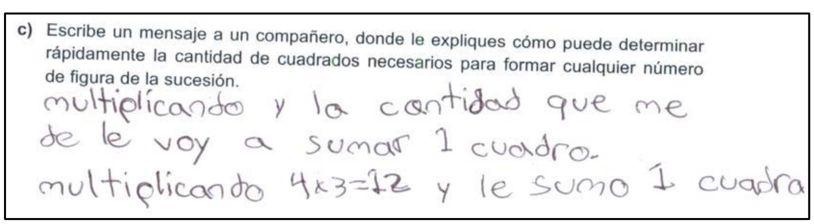

c) Escribe un mensaje a un compañero, donde le expliques cómo puede determinar rápidamente la cantidad de cuadrados necesarios para formar cualquier número de figura de la sucesión.
multiplicando y la cantidad que me de le voy a sumar 1 cuadro.
multiplicando 4x3=12 y le sumo 1 cuadra

Figura 140. Estructura matemática plausible construida por E29.

Procesos cognitivos desarrollados por E29

Los procesos cognitivos de E29 en T3, se articularon en un primer momento a una estrategia de conteo asociada a un pensamiento aditivo para dar lugar a inferencias que se sustentaron en la adición del patrón recursivo. Posteriormente, su nivel de abstracción evolucionó, al dejar de lado el conteo y gracias a la experiencia adquirida en el trabajo con las tareas previas a ésta, le fue posible desarrollar una estrategia numérica articulada a un pensamiento multiplicativo, lo que le permitió inferir una estructura al coordinar significados y propiedades que conoce, con características identificadas en T3. En ese sentido, la forma de proceder del estudiante evidenció dos aspectos fundamentales:

1. La *relación de recurrencia*. La infiere, de contar cuántos cuadrados forman la figura uno, la dos y la tres (etapas dadas). Reconociendo así que de una a otra etapa se aumenta tres y establece así, una regla local (conjetura), que para E29 es válida por el conteo de los objetos (cuadrados) que forman las representaciones figurales. De esta manera, fue posible para el estudiante proporcionar la cantidad de cuadrados que formarían las figuras de etapas cercanas, basándose en una adición sucesiva del patrón de recurrencia. El razonamiento que siguió aquí fue de tipo **inductivo**, al trabajar con los casos particulares.
2. La *estructura matemática plausible*. Estableció una estructura matemática válida (o regla directa) la cual explica el comportamiento del patrón figural en etapas cercanas y lejanas, esto es, infiere una regla general. El establecimiento de la estructura fue posible gracias a una estrategia numérica que E27 desarrolló por medio de la experiencia ganada con las tareas anteriores, y debido a que pudo observar que el conteo basado en la adición sucesiva del patrón de recurrencia resultaba ineficiente en etapas lejanas. En primera instancia, el estudiante establece una estructura de la forma: $S_n = n \times 3$, por medio de un proceso inductivo e involucrando el patrón de recurrencia (tres) y el número de figura. Al someter la anterior estructura a un proceso de validación, por medio de un razonamiento abductivo, E29, realiza un ajuste a la estructura inicial, estableciendo una nueva estructura de la forma: $S_n = n \times 3 + 1$. En el proceso de construcción de la regla directa (estructura) el estudiante en todo momento la articuló a un pensamiento multiplicativo. De esa manera, la estructura final establecida por E29, le permitió realizar inferencias para etapas lejanas de la sucesión, manifestando un razonamiento deductivo. En estas etapas (lejanas), se expresa la estructura matemática a través de una operación aritmética, fundamentada en la multiplicación.

Los aspectos visuales o figurales en lo que evidencia E29, solo parecen tener importancia en la estrategia de conteo inicial para determinar la cantidad de cuadrados que forman las etapas dadas y así identificar el patrón de recurrencia para luego extender la sucesión a etapas cercanas. De ello, se puede afirmar que el estudiante no relaciona en su forma de proceder la percepción visual, la cual le fuese permitido involucrarse con la tarea de otra forma y desarrollar argumentos que justificaran la estructura matemática que estableció por medio de la estrategia numérica, ya que si bien la estructura es válida, no permite encontrarle sentido o justificarla desde lo figural.

Por su parte, su proceso cognitivo demandó el uso del lenguaje verbal, el escrito y simbólico. Las representaciones que conectó para organizar y coordinar sus ideas fueron de tipo numérica y verbal-escrita. Cabe resaltar que para el caso de esta tarea E29 no requirió un proceso de acompañamiento por parte del profesor-investigador para transitar de la relación de recurrencia a construir la estructura matemática plausible.

5.1.1.3.k. Estudiante 31

E31 se involucró en el trabajo con T3, al observar y analizar las representaciones figurales de las tres etapas dadas. En dicho trabajo, el estudiante mediante un conteo determina la cantidad de cuadrados que forman las figuras de las tres primeras etapas, cuatro para la primera, siete para la segunda y diez para la tercera. A partir de ello, logra identificar el patrón de crecimiento entre etapas consecutivas de la sucesión, tanto en forma numérica como figural, lo que propicia en E31 que perciba las representaciones figurales de las etapas dos y tres como la composición de la figura anterior y le agrega un cuadrado en cada extremo de la figura para obtener la representación pictórica de la etapa deseada. Extractos de su entrevista en correspondencia con la Figura 141, muestra cómo se involucró con las etapas dadas del patrón figural, y la manera en las que las percibió.

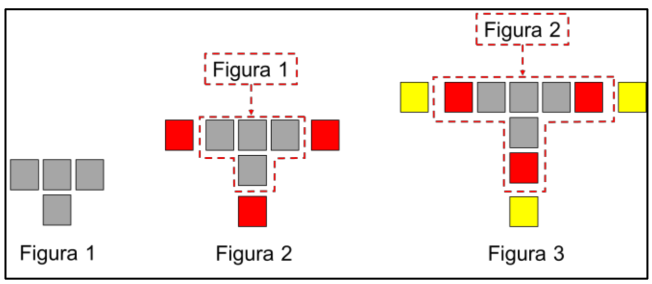


Figura 141. Reconstrucción figural de la manera de percibir las etapas dadas de E31.

P: esa idea que me vas diciendo ahí… que le sumas tres cuadritos… ¿a quién le sumas tres cuadritos?
E31: a la figura
P: ¿a cuál figura?
E31: en este caso sería a la tres
P: ¡a la tres! … ¿pero a quién le aumentas tres? ¿Qué es lo que observas ahí?
E31: yo digo que le aumento a la misma figura… a esta [señala la figura de la etapa 1]
P: ¿a la figura uno? ¿A la figura uno le aumentas tres?
E31: si… y a la dos… tres…
P: ¡a la dos tres! … ¿Pero cuántos tiene la uno?
E31: la uno tiene cuatro…

En el anterior extracto de entrevista, se evidencia que el estudiante identificó el patrón de recurrencia (“tres cuadritos”). Además, que el profesor-investigador cuestione al estudiante acerca de su manera de proceder lo lleva a que externe la forma de percibir las representaciones figurales de las etapas dadas.

Hasta aquí, la capacidad expresiva de E31 es mayoritariamente de naturaleza pictórica y verbal-escrita, que usa tanto para explorar cuál es el comportamiento que sigue el patrón, como para explicar el razonamiento que siguió en el trabajo con las tres primeras etapas.

Hasta la etapa tres, E31 utilizó la estrategia de conteo. A partir de ello, percibió un patrón figural creciente, al reconocer que el número de cuadrados aumentaba de una etapa a otra y que esa cantidad era invariante, por lo que infiere (conjetura) que crece en términos de tres cuadrados (patrón de recurrencia). Este proceso inferencial, manifiesta un **razonamiento inductivo**. En ese contexto, el estudiante puede extender la sucesión a etapas cercanas por medio de un pensamiento aditivo asociado al patrón de recurrencia, es decir, adicionando sucesivamente de forma numérica o figural tres cuadrados (véase Figura 142).

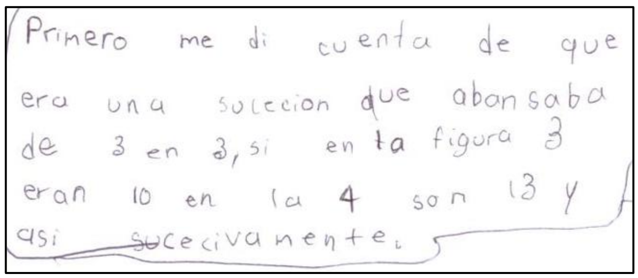

Primero me di cuenta de que era una succion que abansaba de 3 en 3, si en la figura 3 eran 10 en la 4 son 13 y asi sucecivamente.

Figura 142. Reconocimiento del patrón de recurrencia y la extensión de la sucesión.

E31 reconoce por el trabajo con las anteriores tareas, que si bien la estrategia recursiva ayuda a determinar el número de cuadrados para etapas cercanas, en etapas lejanas resulta ser ineficiente. Es así como transita en su forma de proceder a una estrategia numérica que posibilite determinar etapas lejanas. En ese sentido, asocia por medio de un pensamiento multiplicativo el número de figura con el patrón de recurrencia en forma numérica, obteniendo así una secuencia de resultados en las etapas dadas, de múltiplos de tres. En ese momento, se produce un proceso de acompañamiento por parte del profesor-investigador que consiste en comprobar la validez de la estrategia numérica desarrollada por E31. En dicho proceso de acompañamiento, el profesor-investigador propició que el estudiante comparara los resultados obtenidos en las etapas dadas por medio de la estrategia numérica y los resultados obtenidos con la estrategia de conteo aplicada al inicio. La forma de proceder numérica y parte del proceso de acompañamiento del profesor investigador se evidencia en el siguiente extracto de entrevista:

E31: multiplicando
P: haber ¿cuánto sería?
E31: sería la tabla del tres
P: tres por ¿cuánto?
E31: tres por una, tres [para la figura 1]
P: pero ¿estás pensando ese uno como esta?... pero ¿esta cuánto?... Tres por una pero ese uno… pero ese no es uno, son cuatro
E31: ¡aaaah! son cuatro

P: haber piénsale bien… haber piensa ¿cómo puedes escribir esto? ¿Cuántos cuadros tiene la figura 1?
E31: ¡cuatro!

En el proceso de acompañamiento, el profesor-investigador posibilita que el estudiante observe que el resultado para la primera etapa de la sucesión obtenido mediante la estrategia numérica no coincide con la cantidad real de cuadrados que la forman (como se evidencia en el extracto de entrevista). Lo que lleva al estudiante a enfocarse en identificar alguna característica desde lo figural, la cual pueda posibilitar el establecimiento de una estructura o regla directa que describa el comportamiento de la sucesión asociada al patrón, tanto en etapas cercanas como lejanas.

E31: es como la vez anterior… una línea y me sobra uno
P: hazlo haber
E31: una línea de tres y sobra uno, y ya hasta el último se lo sumamos [para la figura 1]… aquí es una línea de cinco, ahora después ya nada más le sumariamos los dos sobrantes [para la figura 2]
P: haber piénsale

La nueva manera de percibir figuralmente las etapas dadas (véase Figura 143), no facilitó la construcción de una estructura matemática plausible, lo cual provocó que E31 abandonara esa manera de percibir el patrón figural y volviera a la primera forma en la cual lo percibió (véase Figura 141).

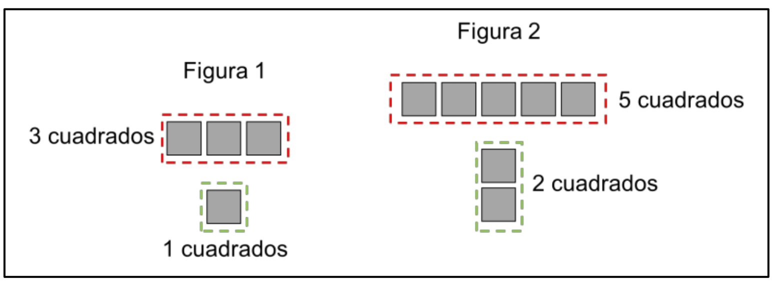


Figura 143. Reconstrucción figural de la segunda manera de percibir las dos primeras etapas.

E31: como me dijo usted que me fijara pues vi estos [señala los cuadrados de los tres extremos], avanzo de tres en tres como un triángulo, así que cada vez va aumentando un triángulo más grande, cada vez más grande por los tres que voy sumando, así que, si esto sumo con esto y esto me da el total de la figura tres… que son diez
P: ok

A partir de la forma de percibir el patrón y de razonar, E31 desarrolla una estrategia figural que a la postre fue la que posibilitó la construcción definitiva de la estructura matemática. Su forma de proceder y la estrategia desarrollada la hace explícita en el siguiente fragmento de entrevista. Para una reconstrucción figural de la forma de proceder véase Figura 144.

E31: si me fijo que la figura tres a los lados hay tres cuadros pero al voltearlo hay cuatro cuadros acostados, así que se le va sumando un cuadro más a la parte de debajo de la figura y aquí se le va sumando el número de figuras [haciendo referencia a los cuadrados de los lados]

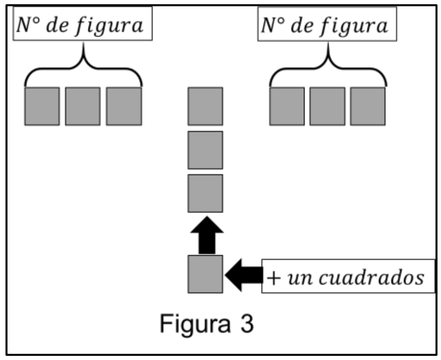


Figura 144. Reconstrucción de la manera de percibir la etapa 3 de la sucesión por parte de E31 en T3.

Lo que siguió en el proceso de acompañamiento por parte del profesor-investigador fue indagar aún más acerca de la estructura evidenciada por el estudiante en la etapa tres de la sucesión.

P: ¿cómo sería entonces, si le vas sumando ese cuadro a la figura? ¿Cómo sería?
E31: sería, por ejemplo, en la figura cinco, serían, seis cuadros, cinco cuadros y cinco cuadros
P: haber pero ponlo acá… si fuese la figura cinco, porque tú dices que aquí… aquí en la figura tres ¿cómo es? explícame
E31: la figura tres, tiene tres cuadros a los lados de cada lado y cuatro cuadros hacia abajo
P: ¿cómo sería entonces?... ¿cómo harías para saber ese total, siguiendo ese pensamiento?…
E31: sumar primero, tres más tres, son los seis, más los cuatros que están aquí son diez
P: pero sería ¿cuánto?
E31: tres más tres, más cuatro
P: entonces siguiendo esa idea, como en la figura tres son, tres más tres, más lo que sigue, ¿sí?
E31: ajá
P: si fuese en la cuatro [figura 4], ¿cómo sería, siguiendo esa idea? Sin hacer la figura ¿cómo sería?
E31: cuatro, más cuatro más cinco
P: ¿cuánto te da?
E31: ¡trece!
P: ahora en la figura cinco ¿Cómo sería?
E31: cinco más cinco, más seis
P: ¿Cuánto te da?
E31: ¡un total de quince!
P: ¿cinco más cinco?
E31: ¡son diez!
P: ¿y seis?
E31: ¡dieciséis!…

En el anterior extracto de entrevista el profesor-investigador posibilitó en el estudiante un proceso secuenciado por etapas cercanas consecutivas con el fin de que empleara la estructura establecida y observar si la puede extender a otras etapas de la sucesión. En ese contexto, E31 da muestra de emplear de manera coherente y consistente la regla directa, tanto en etapas cercanas como en etapas lejanas, y haciendo uso de un lenguaje simbólico-numérico, por medio de operaciones aritméticas proporciona respuestas correctas para etapas demandadas (véase Figura 145).

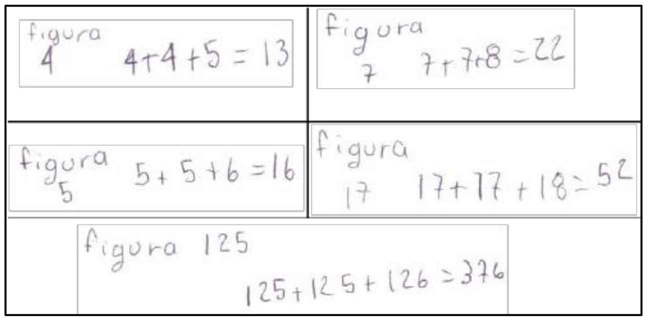


Figura 145. Etapas cercanas y lejanas determinadas por E31 en T3.

La tercera cuestión de T3, la cual buscaba que el estudiante hiciera explícita por medio de un lenguaje verbal-escrito, la regla o estructura que sintetizara el proceso de generalización para esta tarea. Ante esta cuestión, E31 evidencia la estructura que le permitió determinar la cantidad de cuadrados necesarios para formar las figuras correspondientes a etapas cercanas y lejanas de la sucesión. La estructura definitiva la articula a un pensamiento aditivo y se asocia a la forma: $S_n = n + n + (n + 1)$, por la manera en la cual la estableció y la organizó. La Figura 146, muestra evidencia de la estructura matemática plausible construida por el estudiante, además de un ejemplo de una etapa particular (figura 7), que presenta para una mayor claridad de su forma de proceder en esta tarea.

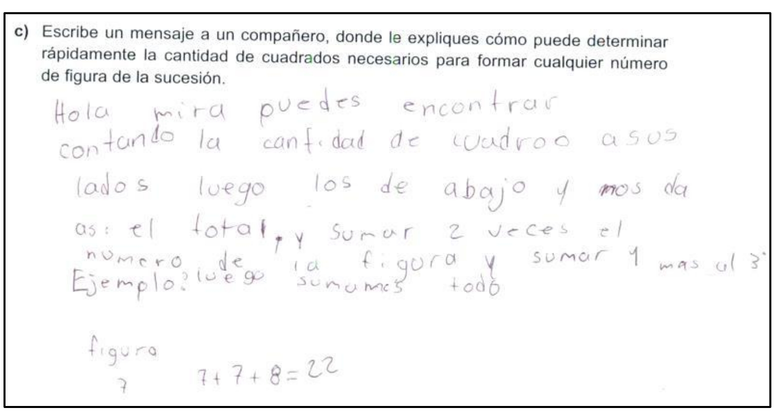

c) Escribe un mensaje a un compañero, donde le expliques cómo puede determinar rápidamente la cantidad de cuadrados necesarios para formar cualquier número de figura de la sucesión.

Figura 146. Estructura matemática plausible establecida por E31 para T3.

Procesos cognitivos desarrollados por E31

Los procesos cognitivos de E31 en T3, se articularon principalmente a la percepción de las figuras correspondientes a las etapas dadas. En ese contexto, desarrolló más de una manera de percibir las etapas figurales dadas (véase Figura 141, Figura 143 y Figura 144). El estudiante transitó por varias estrategias en su forma de proceder, estrategias de tipo figurales asociadas a las diferentes maneras de percibir el patrón, y de tipo numérica. Inicialmente, percibió de manera figural que se trataba de una sucesión creciente, reconociendo así un patrón de crecimiento, el cual articuló con un pensamiento aditivo, de esa manera por medio de un conteo pudo identificar el valor del patrón de recurrencia entre etapas consecutivas. La anterior estrategia, le fue útil al tratar de extender la sucesión a etapas cercanas, pero no así en etapas lejanas. Al observar que su primera estrategia basada en la forma de percibir lo figural (Figura 141) y en el patrón de crecimiento, era ineficiente para etapas lejanas, realiza un cambio de contexto al transitar de lo figural a lo numérico. En ese sentido, desarrolló una estrategia de carácter numérico articulada a un pensamiento multiplicativo en la cual involucró el patrón de recurrencia en forma numérica (tres) y el número de la figura, resultando de esto una estructura de la forma: $S_n = n \times 3$. Esta estrategia fue descartada, debido a que por el proceso de acompañamiento llevado a cabo por el profesor investigador, el estudiante comprobó mediante casos particulares (etapas dadas) que los resultados obtenidos con la estructura no eran válidos ni correctos. Posteriormente, y al haber establecido hasta ese momento dos estrategias sin éxito, E31 vuelve a enfocarse en la percepción visual del patrón figural, logrando visualizar las etapas figurales dadas en partes conformadas por grupos de cuadrados los cuales asoció con el número de figura (véase Figura 144), de esa manera pudo establecer una estructura matemática articulada a un pensamiento aditivo y asociada a una forma: $S_n = n + n + (n + 1)$, donde n es el número de figura y S_n es el total de cuadrados que la compone.

En general, E31 se apoyó del conteo en el trabajo con las primeras etapas, prevaleciendo en su proceder un pensamiento aditivo. Además, se observó que siguió un proceso cognitivo basado en la coordinación de significados, propiedades, representaciones y principalmente de la percepción visual de las etapas figurales, lo cual posibilitó el desarrollo de varias estrategias en su forma de proceder en T3.

Los procesos inferenciales de abducción, inducción y deducción fueron fundamentales en la generalización del patrón en este estudiante, debido a que por el desarrollo de sus diversas estrategias, E31 estableció y validó más de una conjetura hasta llegar a construir una estructura plausible matemáticamente que describiera el comportamiento de la sucesión en esta tarea. Es así como en el proceder del estudiante se puede observar varias etapas de formulación, validación y finalmente de extensión de la sucesión, mediante la estructura establecida, llevándola de una regla local a una fórmula directa.

Los aspectos visuales o figurales jugaron un papel importante en las inferencias de E31, en diferentes momentos en el desarrollo del trabajo en T3, particularmente con las etapas dadas, a la hora de expresar la forma de percibirlas y al final, los aspectos visuales y la percepción figural de las etapas dadas fueron evidentes en la manera de cómo estructurar y organizar la regla directa que explica el comportamiento del patrón figural. Su proceso cognitivo demandó el uso del lenguaje verbal, el escrito, figural y simbólico. Las representaciones que conectó para organizar y coordinar sus ideas fueron de tipo pictórico, numérico y verbal-escrita.

Por otra parte, los cuestionamientos realizados en el proceso de acompañamiento llevado por el profesor-investigador, posibilitó que E31 transitara en diferentes momentos de la tarea por el contexto figural y numérico, desarrollando así diversas estrategias para llegar a construir la estructura matemática.

5.1.1.3.I. Estudiante 36

Al igual que el resto de los estudiantes E36 se involucró con el patrón figural de T3, por medio de las etapas dadas en el contexto de la tarea. Cabe resaltar, que este estudiante deja ver tanto en su producción escrita como en la entrevista individual, haber desarrollado una estrategia numérica en el trabajo con T3, relegando a segundo plano lo visual o figural. En ese sentido, en su trabajo con las tres primeras etapas logró identificar el patrón de recurrencia en forma numérica, de allí parte y desarrolla su forma de proceder en la tarea. Se infiere que E36 logra identificar el patrón de recurrencia mediante el conteo de los cuadrados que forman cada figura de las etapas dadas. A partir de ello, reconoce que de una a otra etapa consecutiva se agregan tres cuadrados y al observar que esto se cumple en las tres primeras etapas, es suficiente para afirmar que se cumple para las demás etapas o figuras y así poder extender la sucesión. En el siguiente extracto de entrevista, se evidencia la manera de involucrarse con la tarea, el reconocimiento del patrón de crecimiento a partir del trabajo con las etapas dadas y la forma en que lo articuló con un pensamiento multiplicativo, para así establecer rápidamente una estructura matemática válida.

P: ¿cómo le hiciste?
E36: yo fui viendo y se le va sumando tres a cada figura, entonces yo multipliqué cuatro por tres y más el uno, porque cuatro por tres me da doce pero se le va sumando uno

En el anterior extracto de entrevista, se puede evidenciar el establecimiento de una conjetura por parte de E36, la cual partió de reconocer por medio del trabajo con las etapas dadas que se “le va sumando tres a cada figura” (patrón de recurrencia). En ese contexto, el estudiante relaciona el patrón de recurrencia con el número de figura mediante un pensamiento multiplicativo, que para el caso de la figura 4 (la cual toma como ejemplo en su explicación), se obtiene como resultado doce y seguido le adiciona uno, determinando que la figura 4 se forma con trece cuadrados.

En lo que respecta a la estructura establecida, es claro el por qué el estudiante multiplica tres (patrón de crecimiento) por el número de figura, pero la razón de adicionarle el uno, no es lo suficientemente clara. En ese contexto, y a fin de profundizar en la forma de razonar que llevó a E36 a establecer la estructura que presenta en el anterior fragmento de la entrevista, se indaga acerca de su manera de proceder en particular, el profesor-investigador, cuestiona acerca de la adición que realiza después de hacer el producto entre el número de figura y el patrón de recurrencia. El siguiente extracto de entrevista, evidencia esto último:

P: ¿por qué se le suma uno?
E36: porque aquí son los mismos, son los mismos… acá son los mismos que estos y acá están los dos pero se le va sumando uno, a este se le sumó uno, a este se le sumó uno entonces son los mismos, entonces yo multipliqué, tres por cuatro y me dio doce entonces más uno, uno que se le va sumando, me dio trece

Dadas las explicaciones que proporciona E36 en el anterior extracto de entrevista, se infiere que reconoció a partir del trabajo con las etapas dadas que se debe adicionar uno para obtener la cantidad correcta de cuadrados que forman estas etapas. Ese proceso es más evidente en sus explicaciones para la figura (etapa) 4, debido a que el estudiante ya conocía el número total de cuadrados que formaban esta etapa (trece), puesto que ya lo había determinado por medio de adicionar el patrón de recurrencia (tres) al número de cuadrados que formaban la figura 3 (diez). Luego al aplicar su conjetura a la etapa 4, obtuvo mediante la multiplicación un resultado de doce ("… entonces yo multipliqué, tres por cuatro y me dio doce…") y para completar trece, faltaba adicionar uno. Fue así como reconoció que para la etapa 4, debía multiplicar cuatro por tres, más el uno que ajustaba al valor correcto.

Hasta la etapa 4 de la sucesión el estudiante manifiesta un proceso de razonamiento inductivo-abductivo, al establecer y validar la regla. El proceso de establecimiento de la regla (inductivo), fue posible en el trabajo con etapas particulares (las etapas dadas). Por su parte, el proceso de validación (abducción), tuvo lugar en la etapa 4, al reconocer la cantidad de cuadrados correcta para esta figura, mediante el ajuste de la regla. Transitando así de una regla local a una regla directa que explica el comportamiento de la sucesión.

E36 extendió la sucesión haciendo un uso coherente y consistente de la regla establecida. Evidencia de ello, fue las respuestas que proporcionó ante las etapas demandadas en la primera cuestión de T3, haciendo uso de un lenguaje verbal-escrito (véase extracto de entrevista) y simbólico-numérico (véase Figura 147).

P: ¿y en la siete? [figura 7]
E36: multipliqué, tres por siete y más uno

P: ¿cuánto te dio?
E36: me dio… veintidós
P: ¿y en la diecisiete? [figura 17]
E36: igual, multipliqué, tres por diecisiete… y me dio… cincuenta y uno, entonces más uno que le tengo que ir sumando, me dio cincuenta y dos. Y en la treinta y uno, igual, hice el mismo procedimiento pero le sumé otro.

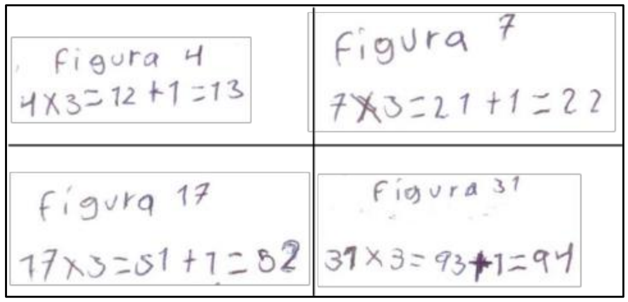


Figura 147. Empleo de la regla directa para las etapas 4, 7, 17 y 31. Respuesta de E36 a la primera cuestión de T3.

Hasta aquí, el estudiante evidencia un trabajo consistente en las etapas cercanas consecutivas y cercanas no consecutivas, manifestando una capacidad expresiva mayoritariamente de naturaleza simbólica y verbal-escrita, que emplea para explorar el comportamiento que sigue el patrón, explicar el razonamiento que siguió y extender la sucesión a etapas demandadas en T3.

A fin de profundizar en los procesos inferenciales desarrollados por el estudiante en esta tarea y de que extendiera la regla directa por medio de nuevas inferencias en T3, se indagó sobre etapas lejanas donde se pudiera evidenciar lo general en el razonamiento del estudiante:

P: ok y ¿en esta figura? [Refiriéndose a la figura 125] haber revisa. Revisa eso. ¿Cuánto es?
E36: son trecientos setenta y cinco, entonces la figura 125, tendrá 375 y más uno, entonces 376

Es así como E36 estableció nuevas conclusiones (etapas lejanas), verdaderas, a partir de otra verdadera, regla directa (véase Figura 148). El proceso inferencial que manifiesta al extender la regla a etapas lejanas de la sucesión refiere a un razonamiento de tipo deductivo.

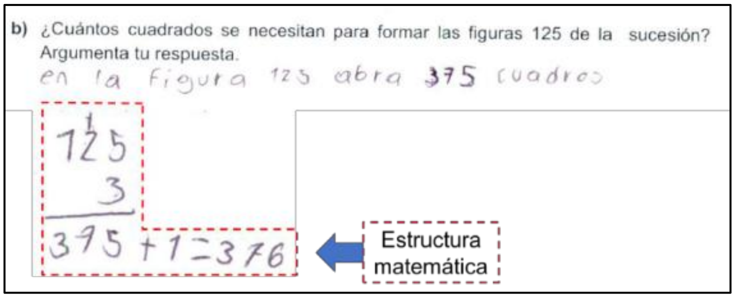

b) ¿Cuántos cuadrados se necesitan para formar las figuras 125 de la sucesión? Argumenta tu respuesta.
en la figura 125 abra 375 cuadros
125
3
375 + 1 = 376

Figura 148. Estructura matemática aplicada a una etapa lejana de T3.

Al analizar la respuesta de E36 a la tercera cuestión de T3, la cual buscaba que el estudiante hiciera explícita por medio de un lenguaje verbal-escrito, la regla o estructura que describiera el comportamiento de la sucesión en cualesquiera de sus etapas. Ante esta cuestión, E36 evidencia la estructura que le permitió determinar la cantidad de cuadrados necesarios para formar las figuras correspondientes a etapas cercanas y lejanas de la sucesión. La estructura matemática que sintetiza su proceso de generalización, el cual fue desarrollado a través de una estrategia numérica principalmente, la articuló a un pensamiento multiplicativo. En ese contexto, la estructura se asocia a la forma: $S_n = n \times 3 + 1$, por la manera en la cual la estableció y la forma que la organizó. La Figura 149, muestra evidencia de la estructura matemática plausible construida por el estudiante, dejando ver la coordinación con un pensamiento multiplicativo y el ajuste con el número uno que realiza para obtener la cantidad correcta de cuadrados que conforman las figuras.

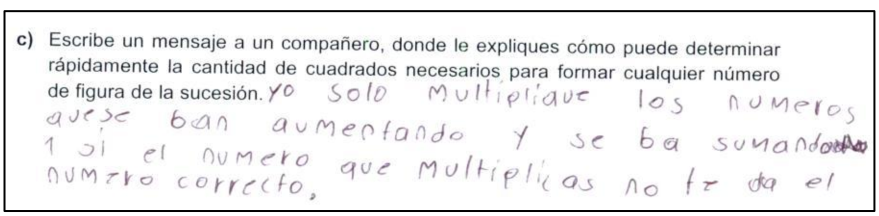

c) Escribe un mensaje a un compañero, donde le expliques cómo puede determinar rápidamente la cantidad de cuadrados necesarios para formar cualquier número de figura de la sucesión. yo solo Multiplique los numeros
queSe ban aumentando y se ba sumando
1 si el numero
numero correcto, que Multiplicas no te da el

Figura 149. Estructura matemática plausible construida por E36, expresada a través de un lenguaje verbal-escrito.

Procesos cognitivos desarrollados por E36

Los procesos cognitivos de E36 en T3, se articularon principalmente a la estrategia numérica, la cual se fundamentó en el patrón de recurrencia identificado a través del trabajo con las etapas dadas de la sucesión. A partir de ello, estableció rápidamente una regla local articulada a un pensamiento multiplicativo de la forma: $S_n = n \times 3 + 1$, donde n es el número de figura, el tres es el patrón de recurrencia y el uno viene dado por un proceso de comparación y ajuste. Se infiere que el establecimiento prematuro de la regla, que a la postre se constituiría en la estructura matemática plausible que explicaría el comportamiento de la sucesión asociada al patrón, se debió a la experiencia ganada en el trabajo con las anteriores tareas que hacen parte de la presente investigación.

Según lo evidenciado por E36 tanto en su producción escrita como en su entrevista individual, la conjetura o regla local fue establecida en el trabajo con las etapas dadas y el proceso de validación y ajuste se llevó a cabo en la etapa 4, y una vez establecida y validada la regla local, la empleó de manera consistente para dar respuesta a las etapas demandadas en el contexto de T3 (etapas cercanas y lejanas), manifestando así un razonamiento de tipo deductivo.

Por lo que evidencia el estudiante los aspectos visuales o figurales no tuvieron tanta relevancia en su forma de proceder y razonar, debido a que por haber desarrollado una estrategia numérica coherente, le fue posible construir eficazmente una estructura válida sin necesidad de centrarse en características figurales de las representaciones pictóricas de las etapas, aunque son la manera de involucrarse con el patrón en un inicio.

Su proceder en la tarea demandó el uso del lenguaje verbal, el escrito y simbólico. Las representaciones que conectó para organizar y coordinar sus ideas fueron de tipo numérica y verbal-escrita principalmente. En cuanto a las representaciones empleadas por E36, fueron usadas en diferentes momentos, la pictórica, propuesta en el contexto de la tarea fue útil en el conteo inicial de las representaciones de las etapas dadas para determinar la cantidad de cuadrados que las formaban y a partir de allí reconocer el patrón de recurrencia. El sistema de representación numérico, lo empleó para expresar operaciones aritméticas con las cuales se pudieran determinar la totalidad de cuadrados que forman las figuras de las etapas demandadas. Dichas operaciones aritméticas se engloban en una expresión algebraica general de la forma: $S_n = n \times 3 + 1$, donde n es el número de figura, es por ello por lo que cada operación aritmética expresada por el estudiante se relaciona con la expresión algebraica descrita, es la manera de ver lo general de E36. Por su parte, la verbal-escrita fue empleada con el fin de argumentar y justificar su proceder en el transcurso de la tarea y de igual manera para expresar la estructura matemática plausible en otro tipo de representación.

5.1.2. Estudiantes que no generalizaron

En el trabajo con las tres tareas, se reconocieron estudiantes que no lograron evidenciar la construcción o el establecimiento de una estructura matemática plausible, que describiera el comportamiento de la sucesión asociada al patrón figural en cada una de las tareas, es decir, estudiantes que no lograron generalizar.

5.1.2.1. Estudiantes que no generalizaron en T1

En el trabajo con T1, se reconocieron estudiantes que no lograron evidenciar la construcción o el establecimiento de una estructura matemática plausible, que ponga en manifiesto el comportamiento del patrón figural para la tarea “las mesitas” (T1), y que logre sintetizar el proceso de generalización. En ese contexto, se presentan los estudiantes que no generalizaron, es decir aquellos estudiantes que no lograron evidenciar en su producción escrita, la construcción de dicha estructura: E1, E10, E11, E15, E16, E17, E19, E20, E23, E25, E26, E27, E33, E34, E35.

Del análisis a las producciones escritas de los estudiantes que no generalizaron, se reconoce una forma de proceder común, dando muestra de razonar a un nivel recursivo. En ese sentido, en el trabajo con T1, se resalta que la mayoría de los estudiantes evidenciaron en su producción escrita, formas de proceder similares entre sí, en particular con el trabajo en las etapas dadas (razonamiento inductivo), la estrategia de conteo aplicada y el mantenerse en el contexto desde lo figural dibujando cuadros para representar las mesas y aplicando el conteo de los lados de los cuadrados que conforman el contorno (o perímetro) de las figuras.

Para el caso de esta primera tarea, los estudiantes que no generalizaron evidenciaron dos maneras de proceder enfocadas ambas en lo recursivo. La primera forma de proceder se enmarcó en lo figural. Allí los estudiantes representaban las etapas figurales (mesas) y por medio de un conteo determinaban la cantidad de sillas que se podían ubicar en el contorno de las mesas acomodadas en forma lineal, según el contexto de la tarea.

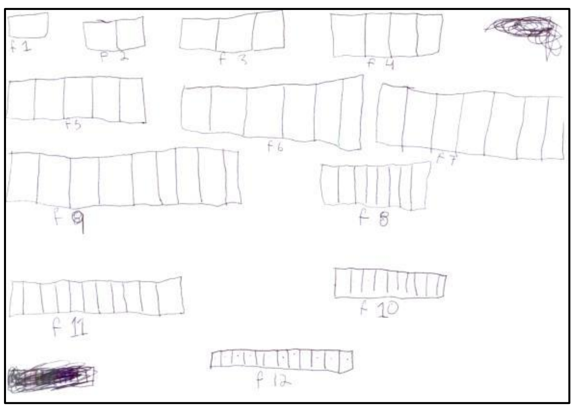


Figura 150. Extensión desde lo figural por parte de E1 para etapas cercanas consecutivas a las dadas.

La anterior estrategia (Figura 150), proporcionaba respuestas correctas y era útil para etapas cercanas o para aquellas que se podían representar de manera figural, pero se constituía en una estrategia ineficiente en cuanto a etapas lejanas se trataba, por ello y a pesar de que los estudiantes que desarrollaron esta estrategia lograron evidenciar respuestas correctas a las demandas, no lograron construir una estructura matemática plausible que evidencie el comportamiento de la sucesión en sus etapas lejanas. Una segunda forma de proceder desde el contexto figural, fue la de aquellos estudiantes que recurrieron a una representación figural que no era acorde al contexto que se planteaba en T1, puesto que, representaron de manera separadas las mesas y no unidas en forma lineal como la tarea lo propone (véase Figura 151, para un ejemplo).

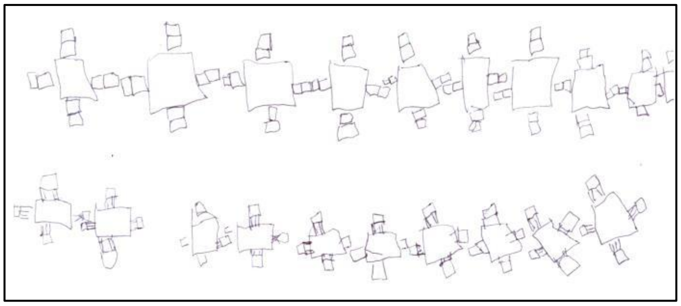
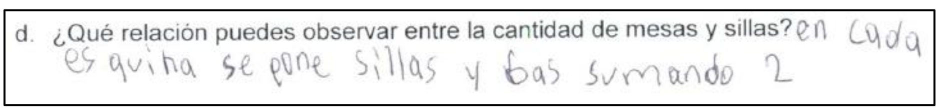


Figura 151. Representación figural de E33 de la etapa 20 de la sucesión.

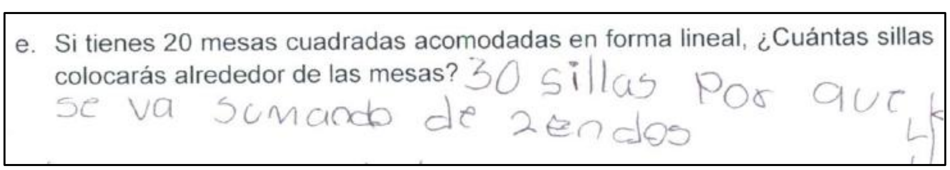
Los estudiantes que desarrollaron la forma de proceder descrita anteriormente (Figura 151) no llegaron a proporcionar respuestas correctas a las demandas de la tarea, debido a la manera de representar las etapas figurales, sin tener en cuenta el contexto de la tarea, por ende, no lograron establecer una estructura matemática que explicara el comportamiento del patrón.

Por otra parte, la segunda forma de proceder de los estudiantes que no generalizaron en T1, fue la desarrollada en un contexto numérico donde se involucra el crecimiento o el patrón recursivo de la sucesión y se articuló a un pensamiento aditivo. Dicha estrategia consistió en agregar de manera consecutiva el patrón de recurrencia (dos sillas), a una etapa en la cual ya se conocía el total de sillas que se podían ubicar en los lados de las mesas acomodadas en forma lineal.



d. ¿Qué relación puedes observar entre la cantidad de mesas y sillas? en cada esquina se pone sillas y bas sumando 2

Figura 152. Relación observada por E27 entre la cantidad de mesas y sillas, articulada a un pensamiento aditivo.



e. Si tienes 20 mesas cuadradas acomodadas en forma lineal, ¿Cuántas sillas colocarás alrededor de las mesas? 30 sillas Por que se va sumando de 2en dos

Figura 153. Reconocimiento del patrón de recurrencia por parte E20 en la cuestión relacionada con la etapa 20.

La estrategia numérica implicaba reconocer el patrón de recurrencia y además los estudiantes que evidenciaron dicha estrategia asociaron el conteo inicial de las etapas dadas a un pensamiento aditivo (véanse Figura 152 y Figura 153). La estrategia numérica al igual que la figural resultaba poco útil en lo que respecta a determinar etapas lejanas de la sucesión asociada al patrón.

La forma de proceder que emplearon la mayoría de los estudiantes que no generalizaron fue la figural, y ésta se hizo más evidente al indagar sobre la cuestión de las veinte mesas (etapa cercana no consecutiva), en ella la totalidad de los estudiantes representaron de manera figural las veinte mesas y mediante un conteo de los espacios donde se podían ubicar las sillas determinaban la cantidad total que se podían acomodar en ese caso.

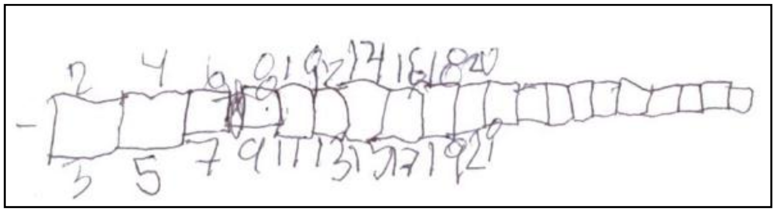


Figura 154. Representación pictórica (figural) de E19 para la etapa 20 de la sucesión en T1.

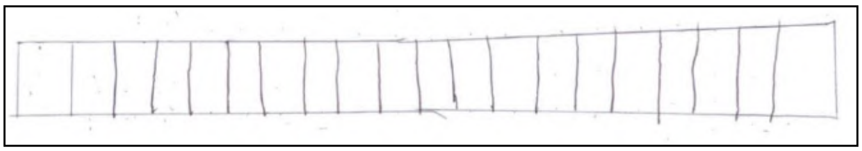


Figura 155. Representación pictórica (figural) de E10 para la etapa 20 de la sucesión en T1.

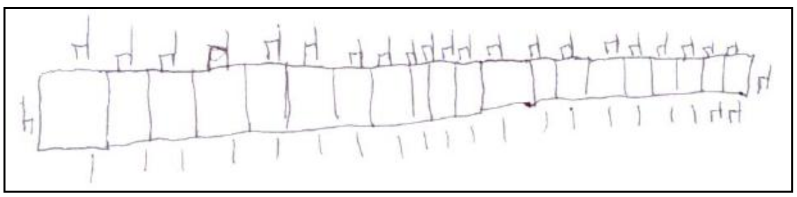


Figura 156. Representación pictórica (figural) de E35 para la etapa 20 de la sucesión en T1.

De la Figura 154 a la Figura 156, se muestran las representaciones figurales de la etapa veinte (figura 20) de algunos estudiantes que no lograron generalizar, llevando su razonamiento a un nivel recursivo apoyados desde lo figural en un conteo articulado a lo sumo a un pensamiento aditivo.

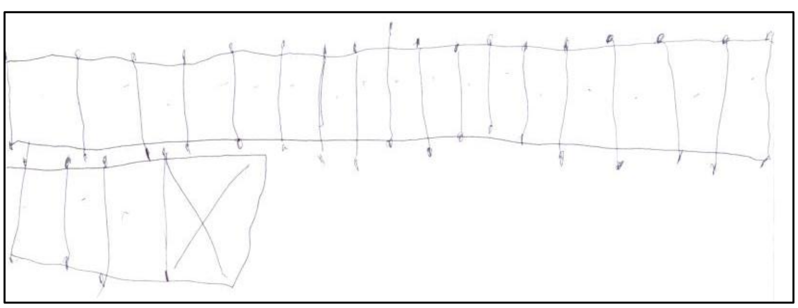


Figura 157. Representación figural realizada por E27 para la etapa 20 de la sucesión.

Algunos estudiantes no representaron en forma correcta las veinte mesas (véase Figura 157), incluso otros no contaron de forma correcta los espacios donde se podían ubicar las sillas, por tal motivo algunos proporcionaban respuestas erradas ante esa cuestión, a pesar de que era posible realizar la representación de la etapa. Los estudiantes que no lograron generalizar se mantuvieron en lo recursivo, ya sea desde lo figural o numérico, dando evidencia de no evolucionar en su forma de proceder, ni en su proceso cognitivo, por ello no lograron establecer una estructura matemática plausible que explicara el comportamiento de la sucesión asociada al patrón figural tanto en etapas lejanas como en las cercanas.

En cuanto a los procesos de razonamiento de los estudiantes que no establecieron la estructura matemática plausible en T1, es evidente por su trabajo con las etapas dadas y su enfoque recursivo desarrollado en el transcurso de la tarea que el tipo de razonamiento puesto de manifiesto fue el inductivo, debido a que si bien demostraron extender el patrón, solo les fue posible hacerlo en etapas cercanas y apoyados en las representaciones figurales, sin mostrar evidencia de la construcción de una estructura que ponga de manifiesto el comportamiento del patrón en etapas lejanas.

5.1.2.2. Estudiantes que no generalizaron en T2

En el trabajo con T2, se reconocieron estudiantes que no lograron generalizar, esto quiere decir, que no lograron evidenciar la construcción de una estructura matemática plausible, que explique el comportamiento del patrón figural para la tarea de “la banderita” (T2) para etapas cercanas y lejanas, y que logre sintetizar el proceso de generalización. En ese contexto, se presentan los estudiantes que no generalizaron: E4, E9, E10, E11, E15, E16, E17, E20, E25, E26, E27, E30, E33, E35, E36. De un análisis a las producciones escritas de los estudiantes que no generalizaron, se reconoce una forma de proceder común, quedando su razonamiento a un nivel recursivo. En ese sentido, la totalidad de los estudiantes que no generalizaron lograron poner de manifiesto que se trataba de un patrón creciente y además lograron identificar el patrón de recurrencia de la sucesión, todo esto en el trabajo con las etapas dadas. Es en el patrón de recurrencia donde se identifican dos contextos en los cuales trabajaron los estudiantes por lo externado en sus producciones escritas.

El primero de esos dos contextos, fue el numérico y se encuentran: E4, E9, E10, E11, E15, E16, E17, E20, E25, E26, E33, E35, E36. Los estudiantes que identificaron el patrón de recurrencia de forma numérica, se enfocaron en el crecimiento de la sucesión en términos de cuatro círculos, es decir, que el patrón crecía de cuatro en cuatro. Esto los llevó a desarrollar dos estrategias de conteo. Una articulada a un pensamiento aditivo y otra asociada a un pensamiento de tipo multiplicativo. Los estudiantes que articularon su estrategia de conteo a un pensamiento aditivo (E4, E9, E11, E16, E20, E25, E26, E35), su manera de proceder fue sumando sucesivamente el patrón de recurrencia (cuatro), al resultado de una etapa ya conocida (para un ejemplo véase Figura 158) y de esa manera pudieron dar respuesta a la cantidad de círculos que forman las figuras de etapas cercanas consecutivas y cercanas no consecutivas, pero es poco útil e ineficaz para determinar la cantidad de círculos en etapas lejanas, debido al número de veces que se tendría que sumar el patrón de recurrencia. Por la forma de proceder de los estudiantes que articularon un pensamiento aditivo a su estrategia de conteo, se pone de manifiesto exclusivamente un razonamiento inductivo, ya que se logra establecer una conjetura (patrón de recurrencia), con base en un conjunto de observaciones (etapas dadas), pero no logran estructurar una expresión matemática que usen y validen para extender la expresión a etapas lejanas de la sucesión, es decir, no dan muestra de un razonamiento abductivo ni deductivo en su forma de proceder.

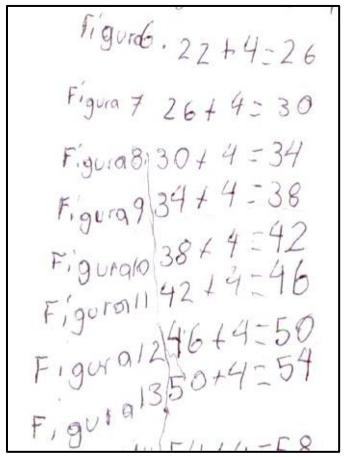


Figura 158. Estrategia de conteo recursiva-numérica articulada a un pensamiento aditivo desarrollada por E16.

En lo que respecta a los estudiantes que articularon su estrategia de conteo a un pensamiento multiplicativo (E10, E15, E17, E33, E36), procedieron de forma similar a los estudiantes que la articularon a un pensamiento aditivo, incluso hasta la adición sucesiva del patrón de recurrencia, pero la diferencia radicó en que estos estudiantes reconocieron que podían multiplicar por cuatro (patrón de recurrencia), en lugar de sumar de cuatro en cuatro. Estos estudiantes evolucionaron un poco más en su razonamiento, debido a que dieron muestra de una estructura matemática de la forma: $S_n = 4 \times n$, donde n es el número de la etapa, es decir, que los estudiantes que procedieron de esta manera relacionaron el número de la figura o etapa con el patrón de recurrencia, incluso pudiendo dar respuesta a etapas lejanas de la sucesión, pero sus resultados eran incorrectos (véase Figura 159). En cuanto a los procesos inferenciales de razonamiento, los estudiantes que procedieron articulando su estrategia a un pensamiento multiplicativo, pusieron de manifiesto los tres razonamientos a la hora de establecer la conjetura identificando el patrón de recurrencia y luego involucrándolo para reconocer que el número de la etapa se multiplica por cuatro (regla local), posteriormente usaron y validaron la regla conjeturada con etapas particulares y finalmente la extendieron a etapas lejanas de las sucesión pero con respuestas erradas.

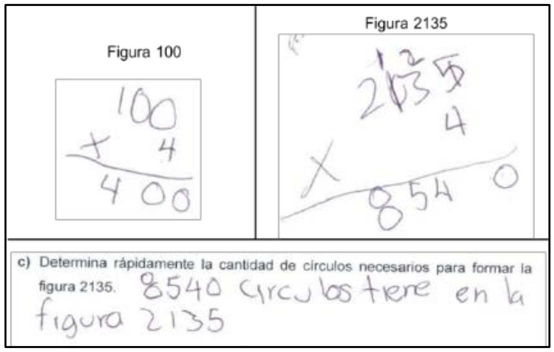


Figura 159. Expresiones matemáticas para etapas lejanas articuladas a un pensamiento multiplicativo externadas por E15.

Tanto los estudiantes que articularon su estrategia de conteo a un pensamiento aditivo y multiplicativo no evidenciaron tener en cuenta lo figural (visual, pictórico), solo lo tuvieron en cuenta para contar los círculos que componen las etapas dadas y desde ahí identificar que se trata de un patrón creciente y que crece de cuatro en cuatro. Por ello, se infiere que para ambos casos los estudiantes no llegaron a generalizar, debido a un insuficiente análisis desde la percepción visual del patrón figural de la sucesión, y a causa de ello los estudiantes de un pensamiento aditivo no pudieron evolucionar en su razonar y los del multiplicativo, la estructura establecida se puede decir que estuvo incompleta.

El segundo contexto en el que trabajaron los estudiantes fue el figural, y solo dos estudiantes lo evidenciaron explícitamente: E27 y E30. Estos estudiantes lograron reconocer el patrón de recurrencia en términos figurales, es decir, que de una etapa a otra pudieron reconocer que el patrón crecía en términos de una fila conformada por cuatro círculos, fue así como se enfocaron en extender el patrón de forma pictórica, incluso conservando la forma (“banderita”) percibida desde un principio de la tarea. Cabe resaltar que en las representaciones pictóricas o figurales que proporcionan los estudiantes, al extender el patrón, logran identificar que el número de filas de cuatro círculos es el mismo que el número de etapa de la figura que se demanda construir, y aunque no lo hacen explícito, en sus producciones escritas, si se deja ver dicha relación (véase Figura 160). Es evidente que estos estudiantes se quedan en el contexto figural y ello no permite que logren construir una estructura matemática que describa y explique el comportamiento del patrón en cualesquiera de sus etapas y además no logran relacionar las características identificadas de manera figural (percepción visual), con una estructura o expresión matemática que haga que su pensamiento evolucione.

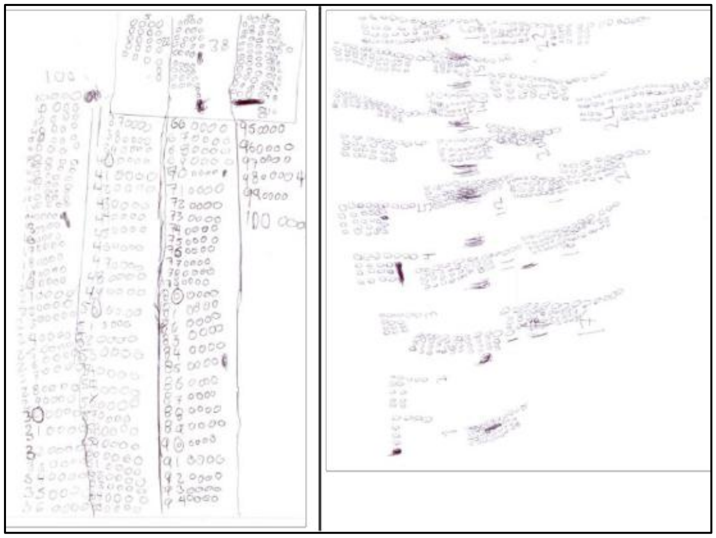


Figura 160. Contexto figural por E27 (derecha) y E30 (izquierda).

Se puede ver que tanto los estudiantes que recurrieron a un contexto numérico como figural en su trabajo con T2, se centraron en el contexto desarrollado y no lograron relacionar los dos, lo cual puede ser una causa de que no hayan conseguido establecer la estructura matemática plausible, es decir, no hayan generalizado y por su parte los estudiantes que si lograron generalizar trabajaron de manera coherente y consistentes con ambos contextos.

5.1.2.3. Estudiantes que no generalizaron en T3

En el trabajo con T3, se reconocieron estudiantes que no generalizaron, esto quiere decir, que no evidenciaron la construcción de una estructura matemática plausible, que explique el comportamiento del patrón figural para la tarea de "la T" (T3) en sus etapas cercanas y lejanas, y que logre sintetizar el proceso de generalización. En ese contexto, se presentan los estudiantes que no generalizaron: E11, E15, E16, E17, E20, E25, E30, E33, E34, E35.

Del análisis a las producciones escritas de los estudiantes que no generalizaron, se reconoce una forma de proceder común, llevando su razonamiento a un nivel recursivo. En ese contexto, la totalidad de los estudiantes que no generalizaron lograron identificar que se trata de un patrón creciente y además lograron también reconocer el patrón de recurrencia de la sucesión, esto en el trabajo con las etapas dadas, aquí ponen de manifiesto un razonamiento de tipo inductivo al trabajar con etapas particulares. A partir del trabajo con las representaciones figurales de las etapas dadas, los estudiantes establecieron una conjetura común fundamentada principalmente en el patrón de recurrencia. En ese contexto algunos estudiantes articularon a la estructura matemática asociada a la conjetura un pensamiento aditivo, evidenciando así una suma sucesiva del patrón de recurrencia (tres), partiendo de la cantidad de cuadrados que formaban etapas ya determinadas o conocidas. De esa manera adicionaban el patrón de recurrencia cuantas veces fuera necesario (véase Figura 161).

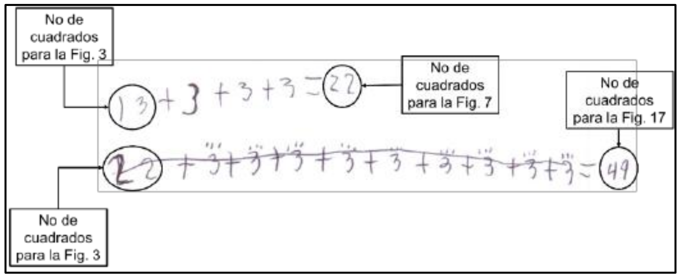


Figura 161. Conjetura articulada a un pensamiento aditivo establecida por E35.

Se evidencia en la Figura 161, que el estudiante proporciona una respuesta incorrecta para la cantidad de cuadrados que forman la etapa 17 del patrón figural, debido a que no adicionó la cantidad correcta de tres (patrón de recurrencia). Esta es una de las dificultades asociadas a adicionar sucesivamente el patrón de recurrencia o a desarrollar una estrategia de conteo enfocada en el mismo, puesto que al estudiante se le puede pasar por alto sumar la cantidad correcta o se puede equivocar en el conteo (véase Figura 162 para una estrategia enfocada en el conteo).

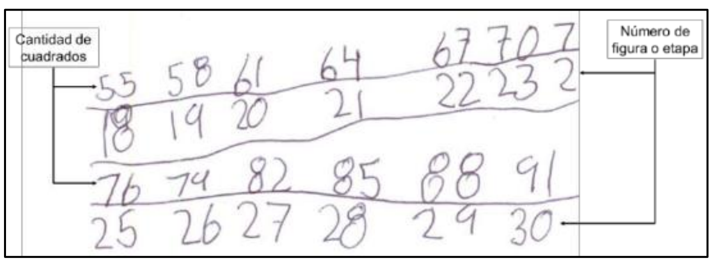


Figura 162. Estrategia de conteo empleada por E11 para extender la sucesión.

Por su parte, un grupo de estudiantes (su gran mayoría), sintetizaron su proceder articulando la conjetura a un pensamiento de tipo multiplicativo. La conjetura articulada a un pensamiento multiplicativo, los estudiantes la evidenciaron al momento de ser cuestionados por el número de cuadrados que formarían las figuras correspondientes a etapas lejanas. El siguiente extracto de entrevista de E35 evidencia esto último:

P: …y para la figura 17 ¿cómo hiciste?
E35: ahí le sumé… le hice una suma pues
P: ¿muestra cómo hiciste la suma?
E35: hice la suma y del veintidós lo sumé con otros tres y ya después me dio la cantidad de cuarenta y nueve cuadros
P: … ¿y cómo harías tu para un número más grande? ¿Cómo la figura 31? ¿Colocarías todos estos tres? ¿Cómo lo harías?
E35: una multiplicación

En el anterior fragmento de entrevista, se evidencia que el estudiante articuló en un primer momento un pensamiento aditivo a su forma de proceder, posteriormente al indagar sobre una etapa lejana del patrón, sintetiza la conjetura establecida por medio de un pensamiento multiplicativo. La Figura 163 y la Figura 164, evidencian la conjetura asociada a un pensamiento multiplicativo para el caso de otra etapa lejana (figura 125).

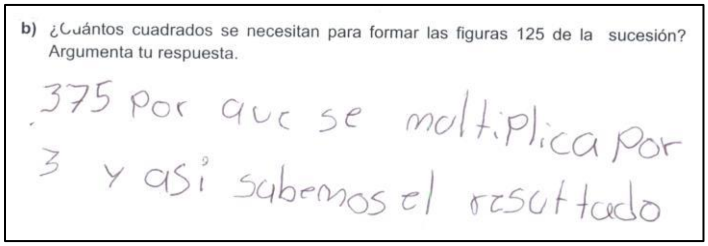


Figura 163. Conjetura articulada a un pensamiento multiplicativo establecida por E20 para una etapa lejana del patrón.

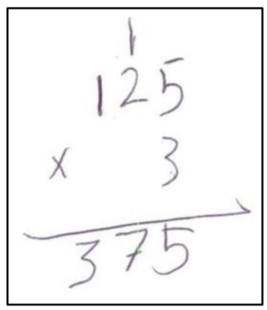


Figura 164. Conjetura establecida por E20 expresada por medio de un lenguaje simbólico-numérico.

Al indagar sobre la tercera cuestión de T3, la cual buscaba que el estudiante hiciera explícita por medio de un lenguaje verbal escrito, la regla o estructura matemática con la cual se determinara rápidamente la cantidad de cuadrados necesarios para formar cualquier figura que se demande. Ante esta cuestión, los estudiantes dan muestra de asociar una vez más un pensamiento multiplicativo a la conjetura establecida (véase Figura 165).

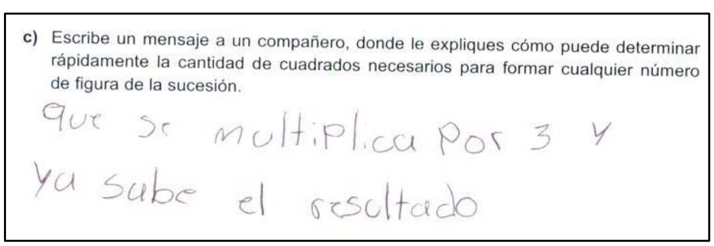
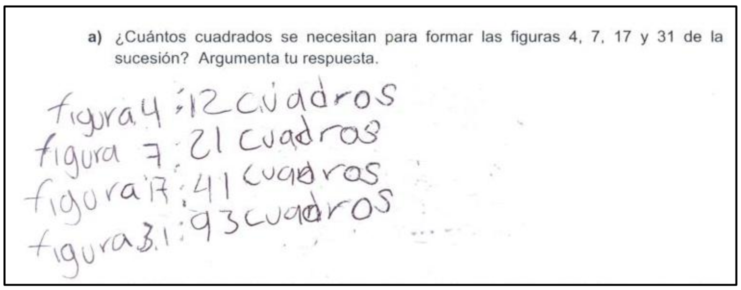


Figura 165. Estructura matemática establecida por un estudiante que no generalizó (E20).

Se infiere del análisis de las producciones escritas de los estudiantes que no generalizaron, que a pesar de que lograron establecer una estructura matemática, ésta no fue la que mejor se ajustaba o en otras palabras, la que mejor explicaba el comportamiento del patrón figural tanto para etapas cercanas como lejanas. Hay evidencia de que la situación descrita anteriormente, se debió a la ausencia de un proceso de validación o comprobación de la conjetura (proceso abductivo), puesto que los estudiantes emplearon la conjetura establecida (multiplicar el número de figura por tres), incluso en etapas cercanas y dadas, en las cuales se podían determinar el total de cuadrados que formaban las figuras por medio de un conteo de las representaciones figurales, y es claro que dicho proceso abductivo (de validación), no se dio en éstos estudiantes, debido a que se fuera puesto en evidencia que sus respuestas proporcionadas mediante la conjetura, no coincidían con la cantidad de cuadrados reales de las etapas dadas (véase Figura 166, como evidencia).



a) ¿Cuántos cuadrados se necesitan para formar las figuras 4, 7, 17 y 31 de la sucesión? Argumenta tu respuesta.

figura4: 12 cuadros
figura 7: 21 cuadros
figura 17: 41 cuadros
figura 31: 93 cuadros

Figura 166. Respuesta de E15 a la primera demanda de T3 mediante la conjetura articulada a un pensamiento multiplicativo.

Capítulo 6
Conclusiones

El objetivo del estudio reportado aquí, es describir los aspectos cognitivos que evidencian niños de tercer grado de primaria, al resolver tareas que demandan la generalización de patrones figurales, asociados a una sucesión lineal. Se fundamentó teóricamente de un marco conceptual, que involucró al concepto de percepción, a los de razonamientos inductivo, abductivo y deductivo, a los sistemas de representación (Lupiáñez, 2016) y de generalización, patrón, estructura matemática y los tipos de generalización (Dörfler, 1991; Rivera, 2010).

6.1. Aspectos cognitivos desarrollados por estudiantes de tercer grado

Los procesos cognitivos desarrollados por los estudiantes se conectaron a las formas en que percibieron los patrones figurales y de los procesos inferenciales que siguieron. En ese contexto, se evidenció una evolución en las formas de percibir los patrones, que pasó de la sensorial a la cognitiva que desde la postura conceptual de Dretske (1990) adoptada en esta investigación, ambas caracterizan a la percepción visual.

Esta evolución se reconoció tanto en los estudiantes que construyeron una regla local como una directa, debido a que conectaron significados, propiedades y conceptos matemáticos, según su nivel de abstracción, haciendo uso del lenguaje. La Tabla 18, resume el número de estudiantes que construyeron una regla directa por tarea.

Tabla 18. Número de Estudiantes que Construyeron una Estructura Matemática Plausible por Tarea.

Generalización	Tareas		
	T1	T2	T3
Si	7	7	12
No	15	15	10

6.1.1 Percepción sensorial de los patrones figurales

Este tipo de percepción, se reconoce, al momento en que los niños al involucrarse en el análisis de patrones figurales, ven grupos consecutivos de señales figurativas como meros conjuntos de objetos. Así, al trabajar en las sucesiones de patrones figurales asociadas a las tareas, en un primer momento, enfocaron su atención en las formas que reconocieron de las figuras de las etapas dadas. De esta manera, percibieron meros objetos o formas geométricas (como rectángulos o cuadrados), letras como la “T”, o figuras, como una bandera, y que en algunos casos no refirieron de manera explícita a estas formas. Esta primera manera de percibir los objetos figurales, se asoció a lo sensorial, la cual evolucionó a la cognitiva. El lenguaje al que recurrieron fue mayoritariamente verbal.

6.1.2 Percepción cognitiva de los patrones figurales

La percepción cognitiva, requirió el uso de procesos conceptuales y otros procesos cognitivos, lo que permitió a los estudiantes articular lo que eligieron reconocer como un hecho o una propiedad de un objeto estudiado, en este caso, de los patrones figurales involucrados en las tareas. En ese proceso, conectaron significados, propiedades y conceptos matemáticos, según su nivel de abstracción y los evidenciaron mediante el uso del lenguaje verbal, escrito y simbólico.

En este tipo de percepción, los estudiantes involucraron a los significados de la suma y la multiplicación, asimismo, nociones como perímetro y área, implícitas en sus diversas formas de proceder. Con base en ello, identificaron y justificaron un patrón creciente, y de cuánto crece, lo que derivó en una conjetura, que infirieron de razonar inductivamente al trabajar y organizar los casos particulares o etapas dadas. Probaron mediante un razonamiento abductivo, estableciendo así una regla local, articulada a la relación de recurrencia. Los estudiantes cuyo razonamiento evolucionó de la relación de recurrencia al de correspondencia, fueron quienes construyeron y justificaron una estructura matemática plausible (fórmula directa) con la cual explicaron el comportamiento que siguió el patrón figural asociado en las tareas, en cualesquiera de sus etapas. Proceso en el que coordinaron sus capacidades inferenciales perceptivas y simbólicas, tal como afirma Rivera (2010). En este proceso, conectaron significados, propiedades y conceptos matemáticos, según su nivel de abstracción y los evidenciaron mediante el uso del lenguaje verbal, escrito y simbólico.

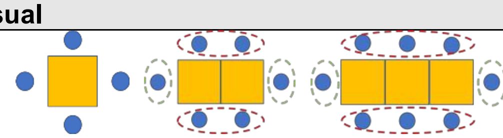
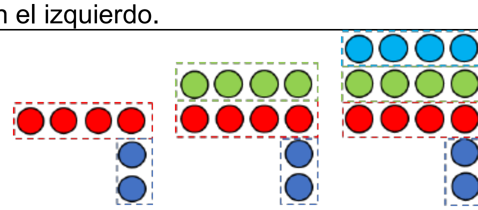
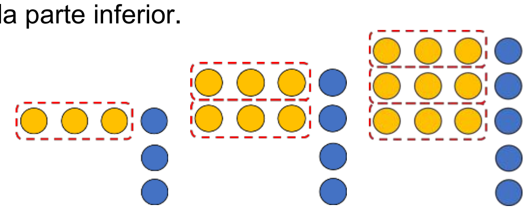
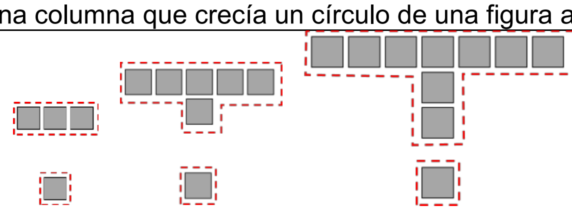
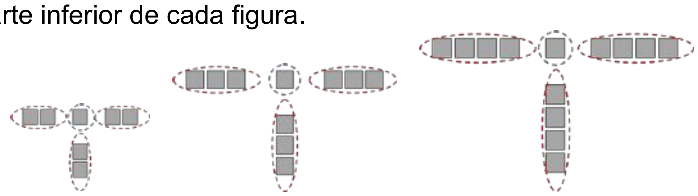
El análisis de los procesos cognitivos evidenció, que los estudiantes en el trabajo con cada tarea desarrollaron estrategias basadas o derivadas de la manera de percibir las etapas figurales del patrón, involucrando así sus capacidades inferenciales perceptivas y simbólicas (Rivera, 2010). En ese sentido, se reconocieron dos estrategias (véase Tabla 19):

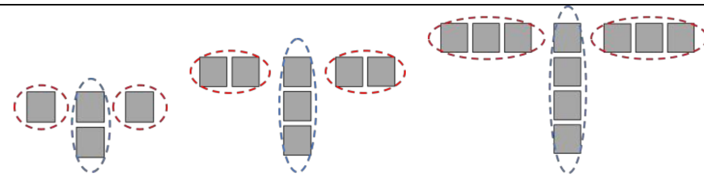
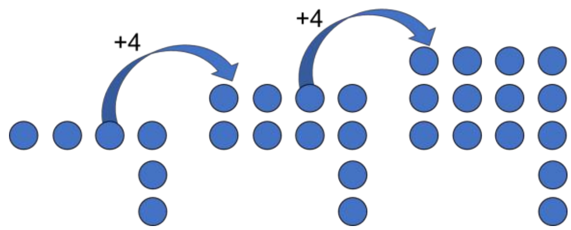
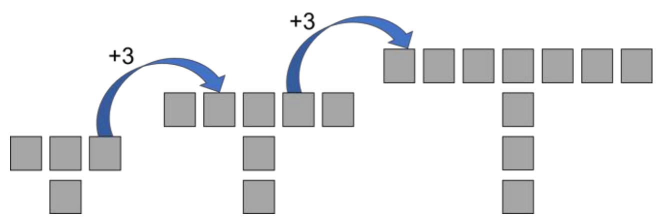
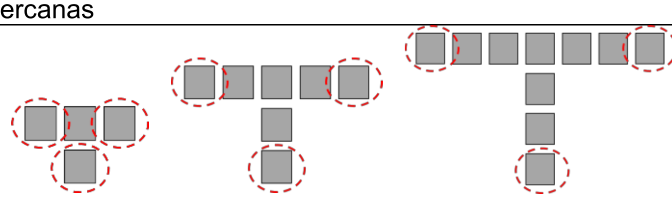
Estrategia figural. Percibieron las figuras de cada etapa dada en partes o sub-configuraciones que se podían descomponer o componer de manera estratégica y que a su vez estaban formadas por sillas (T1), círculos (T2) y cuadrados (T3). A partir de ello, establecieron conjeturas que a la postre se constituirían en estructuras matemáticas plausibles que explicarían el comportamiento del patrón en cualesquiera de sus etapas y que se podían justificar desde lo percibido visualmente.

Estrategia numérica. Identificaron el patrón de recurrencia entre etapas consecutivas del patrón, a partir del trabajo con las primeras tres etapas. Luego, multiplicaron el número de la figura, a la cual se le iba a determinar la cantidad de objetos que la formaban.

Posteriormente, aplicaban un ajuste por medio de la adición, al producto del patrón de recurrencia por el número de figura. Dicho ajuste era realizado en un proceso abductivo de comprobación, al comparar el resultado obtenido mediante el conteo de los objetos que forman las figuras de las representaciones en las etapas dadas con el producto del patrón de recurrencia por el número de figura. A partir de ese procedimiento, construían la estructura matemática plausible que explicaba el comportamiento del patrón.

Tabla 19. Estrategias Desarrolladas por los Estudiantes en las Tres Tareas a Partir de la Forma de Percibir los Patrones Figurales.

Estrategia	Tarea	Percepción visual
Figural	T1	 Consistió en percibir que era posible acomodar la misma cantidad de sillas en la parte superior e inferior (contorno rojo) y una silla tanto al extremo derecho como en el izquierdo.
	T2	 Consistió en percibir a la figura constituida por filas de cuatro círculos que se agregaban en la parte superior y dos círculos que permanecían constantes en la parte inferior.  Consistió en percibir las figuras de las etapas dadas en dos partes (una horizontal y otra vertical) que variaban. La primera variaba en término de una fila de tres círculos (círculos amarillos) y la segunda (círculos azules) en término de una columna que crecía un círculo de una figura a otra.
	T3	 Consistió en percibir las etapas figurales dadas como descompuesta en dos partes. Una parte superior, la cual variaba en término de tres cuadrados de una etapa a otra y una parte invariante que consistía en aislar el cuadrado de la parte inferior de cada figura.  Consistió en percibir las figuras como descompuestas en cuatro partes, tres que variaban según el número de figura (contorno rojo) y una invariante que consistía en un cuadrado en el centro de la figura.

		 Se percibió la figura de cada etapa constituida en dos partes que variaban, una central y uno a cada extremo (derecho e izquierdo).
Numérica	**T1**	En esta tarea no se evidenció
	T2	 Consistió en identificar el crecimiento entre etapas (patrón de recurrencia) de manera numérica, reconociendo así que se debía adicionar cuatro al número total de círculos de la figura anterior para determinar la cantidad de círculos que formaban la etapa demandada.
	T3	 Consistió en identificar el patrón de recurrencia para adicionar ese número (en este caso, tres) y así determinar el número de cuadrados que formaban etapas cercanas
		 Consistio en identificar el patrón de recurrencia percibiendo a su vez de manera figural donde se ubica el crecimiento desde lo figural.

Los estudiantes que emplearon una estrategia figural y lograron generalizar su proceso, les fue posible construir y justificar a partir de lo visual la estructura matemática plausible que describiera el comportamiento del patrón. Además, las estructuras que establecieron reflejan coherente y consistentemente la forma en la que percibieron el patrón figural en cada una de las tareas. De quienes evidenciaron el uso de la estrategia numérica, si bien les fue posible construir la estructura matemática plausible que explicara el comportamiento del patrón, su justificación acerca del proceso de construcción de la estructura era estrictamente a partir de lo numérico y de cómo se obtenía cada término de la estructura por medio de operaciones aritméticas (multiplicación y adición). No lograban asociar la estructura establecida con lo percibido figuralmente, debido a que empleaban las figuras de las etapas dadas para determinar la cantidad de objetos que las formaban por medio de un conteo y así identificar el patrón de recurrencia. La estrategia numérica se reconoció de forma más explícita en la tarea 3. Por ello, se infiere que dicha estrategia se derivó de la experiencia ganada en el trabajo progresivo con las tres tareas.

6.2 Tipos de razonamiento

Se reconoce que aquellos estudiantes que lograron generalizar, es decir construir una estructura matemática plausible que explicara y describiera el comportamiento del patrón figural, involucraron en su forma de proceder los tres tipos de razonamiento: el inductivo como el razonamiento que permitía establecer una conjetura, el abductivo, el cual validaba esa conjetura establecida en la etapa inductiva y de esa manera se tipificaba como regla directa, y finalmente, el deductivo mediante el cual se podía extender las inferencias (regla directa) a etapas lejanas del patrón y de esa manera constituir a la regla directa como una estructura matemáticamente plausible.

6.2.1 Razonamiento inductivo

En la presente investigación, se entiende el razonamiento inductivo como generar una inferencia viable a partir de una base de conocimiento incompleto (Rivera y Becker, 2007), en otras palabras, se entiende como el establecimiento de una conjetura, la cual explica la regularidad, con base en un conjunto de observaciones (Aliseda, 2006), tales como casos o etapas particulares de las tareas. En ese contexto, los estudiantes que generalizaron lograron establecer distintas conjeturas o reglas directas muy relacionadas con la manera de percibir el patrón figural en las etapas dadas y la estrategia desarrollada en su forma de proceder. Cabe resaltar, que los estudiantes que llegaron a generalizar el proceso ya sea empleando una estrategia figural o numérica, lograron establecer estructuras matemáticas similares y coherentes (véase Tabla 20). Por su parte, aquellos estudiantes que no lograron generalizar su proceso mostraron evidencia de enfocarse en lo recursivo, identificando el patrón de recurrencia en cada tarea, posibilitando así determinar etapas cercanas, pero sin lograr reconocer características o propiedades, ya sea desde lo figural o numérico, que les permitiera extender su razonamiento logrando así construir una estructura plausible que explicara el comportamiento del patrón figural tanto en etapas cercanas como lejanas.

Tabla 20. Expresiones Algebraicas Asociadas a las Conjeturas Establecidas por los Estudiantes que Generalizaron, a Partir de las Formas de Percibir el Patrón Figural.

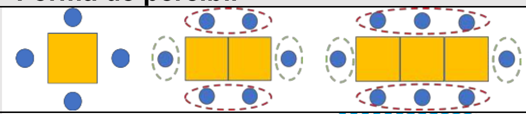
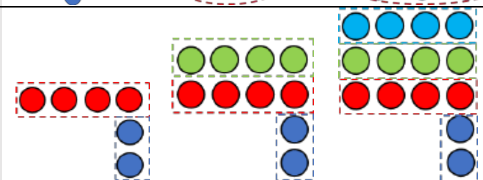
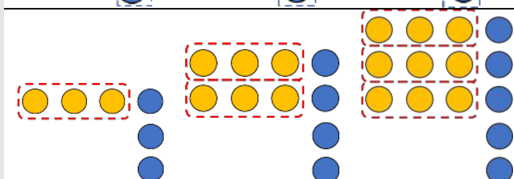
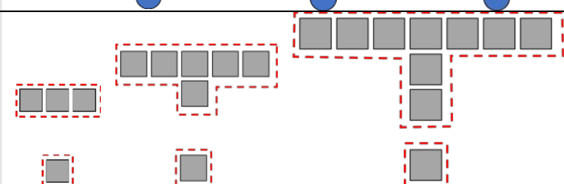
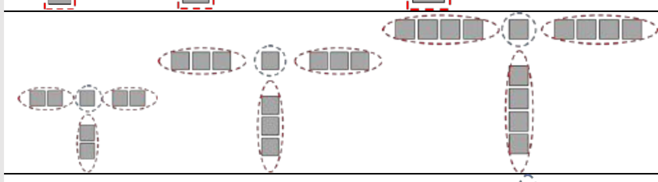
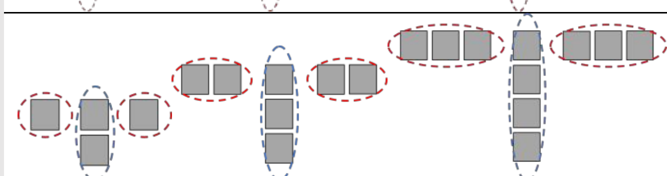
Tarea	Forma de percibir	Estrategia	Estructura	Expresiones algebraicas
T1		Figural	Aditiva Multiplicativa	$S_n = n + n + 1 + 1$ $Sn = n + n + 2$ $Sn = 2n + 2$
T2	 	Figural Numérica	Aditiva Multiplicativa	$S_n = 4 \times n + 2$ $S_n = n + n + n + n + 2$
T3	  	Figural Numérica	Aditiva Multiplicativa	$S_n = 3 \times n + 1$ $S_n = n + n + n + 1$ $S_n = n + (n + 1) + n$

Tabla 21. Expresiones Algebraicas Asociadas a las Conjeturas Establecidas por los Estudiantes que no Lograron Generalizar.

Tarea	Tipo de Conjetura	Descripción	Expresión algebraica
T1	**Recursiva basada en la adición**	Consistió en adicionar sucesivamente el valor del patrón de recurrencia (2) al número de sillas de una etapa ya conocida. Permitiendo así determinar etapas cercanas, pero siendo ineficiente para las lejanas.	$Sn + 2$ $n = N° \; de \; figura.$ $Sn = N° \; total \; de \; sillas \; de$ $la \; figura \; n.$ $2 = Patrón \; de \; recurrencia$
	Recursiva basada en la multiplicación	Consistió en multiplicar el número de figura por el valor del patrón de recurrencia. Permitiendo establecer una estructura matemática pero que no describe exactamente el comportamiento de la sucesión para ninguna de sus etapas.	$Sn = n \times 2$ $n = N° \; de \; figura.$ $Sn = N° \; total \; de \; sillas \; de$ $la \; figura \; n.$ $2 = Patrón \; de \; recurrencia$
	Contexto figural	Consistió en extender las etapas del patrón por medio de sus representaciones figurales, agregando un cuadrado como representación de la mesa y contando los espacios donde era posible acomodar las sillas percibiendo así, formas pero sin asociarlos con propiedades o características que le permitieran establecer una estructura matemática.	
T2	**Recursiva basada en la adición**	Consistió en adicionar sucesivamente el valor del patrón de recurrencia (4) al número de círculos que formaban una figura ya conocida. Permitiendo así determinar etapas cercanas, pero no así para etapas lejanas.	$Sn + 4$ $n = N° \; de \; figura.$ $Sn = N° \; total \; de$ $cículos \; que \; forman \; la \; figura \; n.$ $4 = Patrón \; de \; recurrencia$
	Recursiva basada en la multiplicación		$Sn = n \times 4$ $n = N° \; de \; figura.$ $Sn = N° \; total \; de$ $círculos \; que \; forman \; la \; figura \; n.$ $4 = Patrón \; de \; recurrencia$
	Contexto figural	Consistió en extender las etapas del patrón por medio de sus representaciones figurales, agregando cuatro círculos en la parte superior de la figura anterior y	

		contando los círculos, manteniendo así, formas pero sin percibir propiedades o características que le permitieran establecer una estructura matemática.	
T3	**Recursiva basada en la adición**	Consistió en adicionar sucesivamente el valor del patrón de recurrencia (3) al número de cuadrados que formaban una figura conocida o determinada anteriormente. Permitiendo así, determinar etapas cercanas, pero siendo ineficiente para las lejanas.	$Sn + 4$ $n = N° \ de \ figura.$ $Sn = N° \ total \ de \ cuadrados \ que \ forman \ la \ figura \ n.$ $3 = Patrón \ de \ recurrencia$
	Recursiva basada en la multiplicación	Consistió en multiplicar el número de figura por el valor del patrón de recurrencia. Permitiendo establecer una estructura matemática pero que no describe exactamente el comportamiento de la sucesión para ninguna de sus etapas.	$Sn = n \times 4$ $n = N° \ de \ figura.$ $Sn = N° \ total \ de \ cuadrados \ que \ forman \ la \ figura \ n.$ $3 = Patrón \ de \ recurrencia$

Como se muestra en la Tabla 21, los estudiantes que no generalizaron evidenciaron conjeturas (o reglas locales), enfocadas en lo recursivo, ya sea desde el contexto figural o numérico, por ejemplo, adicionando sucesivamente el valor numérico del patrón de recurrencia. Otros estudiantes, sintetizaron la adición sucesiva del patrón de recurrencia por medio de un pensamiento multiplicativo, donde relacionaban el número de figura con el patrón de crecimiento (recurrencia), pero estas conjeturas se constituían como reglas “incompletas”, las cuales no explicaban de la mejor manera ni de forma correcta el comportamiento del patrón en cualesquiera de sus etapas. Por su parte, los estudiantes que generalizaron evidenciaron en su comienzo en el trabajo con las tareas una forma de proceder similar a los que no generalizaron, pero estos primeros fueron capaces de percibir propiedades y características y relacionarlo con lo que visualmente percibían y de esa manera hacer el tránsito a una regla directa que explicara de mejor forma el comportamiento del patrón figural tanto en etapas cercanas como lejanas. En ese sentido, los estudiantes que generalizaron a diferencia de los que no, evidenciaron un proceso eficaz de validación de la conjetura el cual posibilitó comprobar si su forma de proceder y razonar era válida y viable.

6.2.2 Razonamiento abductivo

En el presente estudio el razonamiento abductivo, se constituyó como una etapa de validación o comprobación de la conjetura establecida en el proceso inductivo. Diferenciándose así, el razonamiento abductivo del inductivo, en que el primero recurre a un producto acabado (conjetura), a partir de una sola observación, y el segundo, infiere una regularidad (conjetura), a través del análisis de un conjunto de observaciones (Aliseda, 2006). En ese sentido, los estudiantes evidenciaron dos formas de validar sus conjeturas en el trabajo con las tres tareas. Ambas maneras de validar las reglas locales se fundamentaron en un conteo de los objetos que formaban las representaciones figurales, principalmente de las etapas dadas. En ese contexto, las maneras de validar la conjetura se diferenciaron principalmente por la etapa donde se aplicaba el conteo. La primera consistió en validar la conjetura comprobando los valores obtenidos con ésta, con los obtenidos mediante el conteo de las etapas dadas tomando como base sus representaciones figurales. Por su parte, la segunda consistió en determinar una etapa cercana a las dadas por medio de la conjetura establecida y la cual a su vez se podía determinar adicionando el patrón de recurrencia, aquí se puede evidenciar que al conteo inicial se articula un pensamiento aditivo. Posteriormente, se comparaba el valor obtenido mediante la conjetura y el valor determinado por el conteo y si los resultados coincidían, esto era suficiente para que de manera implícita el estudiante diera como cierta su conjetura, es decir, su forma de proceder y razonar. A partir de ello, la conjetura o regla local, se tipificaba como una regla directa y el estudiante la empleaba para extender el patrón a etapas cercanas y cercanas no consecutivas. Cabe resaltar, que los estudiantes que no generalizaron, no evidenciaron la aplicación de un proceso eficiente y viable de validación de la conjetura, ni comparando los resultados obtenidos con las etapas dadas ni determinando una nueva a través de la conjetura. De ello se infiere que al no darse un proceso de validación o comprobación, si bien los estudiantes lograron establecer reglas o estructuras (véase Tabla 21), éstas no eran las que mejor se ajustaban o explicaban el comportamiento del patrón tanto en etapas cercanas como lejanas, por tal motivo los niños que no generalizaron establecían reglas “incompletas” y proporcionaban respuestas erradas a las cuestiones demandadas en las tareas.

6.2.3 Razonamiento deductivo

El razonamiento deductivo es entendido en la presente investigación como aquella fase de extensión del patrón a etapas lejanas, es decir, el establecimiento de nuevas conclusiones (etapas lejanas), verdaderas, a partir de otra verdadera (regla directa establecida y validada mediante el proceso inductivo-abductivo, Rivera y Becker, 2007). De esta manera la regla directa establecida en el proceso de validación de la conjetura (abductivo), se constituye en una estructura matemática plausible que explica el comportamiento del patrón tanto en sus etapas cercanas consecutivas, como las cercanas no consecutivas y finalmente las lejanas.

Tabla 22. Estructuras Matemáticas Plausibles Construidas por los Estudiantes.

Tarea	Estructuras matemáticas plausibles	
	Fórmula algebraica	
	Aditiva	Multiplicativa
T1	$S_n = n + n + 1 + 1$	$S_n = 2n + 2$
	$Sn = n + n + 2$	
T2	$S_n = n + n + n + n + 2$	$S_n = 4 \times n + 2$
T3	$S_n = n + n + n + 1$	$S_n = 3 \times n + 1$
	$S_n = n + (n + 1) + n$	

La Tabla 22, evidencia las estructuras matemáticas plausibles establecidas por los estudiantes por cada tarea, asociándolas al respectivo pensamiento (aditivo y multiplicativo) y a la fórmula algebraica que expresa el término general de cada estructura, haciendo así más evidente que tanto los tipos de generalizaciones, como el pensamiento articulado a la estructura, están relacionados íntimamente a las reglas construidas por los estudiantes que lograron generalizar el proceso mostrando un producto (estructura). De lo evidenciado en el trabajo con las tres tareas, el razonamiento deductivo fue manifestado solamente por los estudiantes que lograron construir la estructura matemática plausible, es decir, aquellos que generalizaron, mientras que los que no lograron generalizar manifestaron solo el razonamiento inductivo en su proceso de generalización. En ese sentido, la investigación ha documentado que al tomar en conjunto la triada de la abducción, de la inducción, y de la deducción es posible proporcionar una cuenta más coherente y completa del proceso entero de la investigación (Minnameier, 2004), en particular a lo que se refiere a la generalización de patrones lineales, como se evidencia en el presente estudio.

6.3 Tipos de generalizaciones, estructuras y sistemas de representación

En el presente estudio tanto los tipos de generalización, como las estructuras y los sistemas de representación manifestados por los estudiantes, estuvieron relacionados entre sí. Ello evidenció una evolución en la forma de percibir los objetos, así como de un mayor nivel de abstracción en los estudiantes, al construir y justificar una estructura matemática, haciendo uso del lenguaje verbal-escrito y del simbólico.

Los tipos de generalización se articularon con la manera de percibir y estructurar principalmente las representaciones figurales de las etapas dadas, considerando ello, emergieron dos tipos de generalizaciones en el trabajo con las etapas dadas: a) constructiva y b) deconstructiva, que estaban íntimamente relacionadas a si el estudiante empleó una estrategia de composición o descomposición de las figuras.

Por su parte, las estructuras evidenciadas estuvieron relacionadas con el tipo de pensamiento y las estrategias o formas de proceder puestas en juego a la hora de involucrarse y de razonar con el patrón. En ese sentido, se evidenciaron en las producciones de los estudiantes dos estructuras, las cuales también le daban sentido a los tipos de generalizaciones que emergieron. Las estructuras fueron: aditiva y multiplicativa. El surgimiento de una u otra en la manera de proceder del estudiante, dependía de su nivel de abstracción, es decir, si consideraba a la multiplicación como una adición sintetizada o como una suma iterada. Al estar íntimamente ligados los tipos de generalizaciones con las estructuras articuladas a un tipo de pensamiento, ya sea aditivo o multiplicativo, se puede establecer generalizaciones de tipos constructivas aditivas y multiplicativas, y deconstructivas aditivas y multiplicativas.

En términos generales, el tipo de generalización que predominó en el desarrollo de las tres tareas fue la de tipo constructiva articulada a una estructura aditiva, aunque en el transcurso de las tareas se evidenció una evolución del nivel de abstracción en los estudiantes dando muestra de generalizaciones de tipo constructivas pero articuladas a una estructura multiplicativa.

En lo referente a sistemas de representación empleados en los procesos de razonamiento en la resolución de las tareas, se destacan el verbal-escrito, el simbólico-numérico y el pictórico (o figural). En general, los estudiantes expresaron en cada sistema de representación, la forma como percibieron visualmente el patrón figural, en específico en el trabajo con las representaciones figurales de las etapas dadas, traduciendo así lo percibido a los distintos sistemas de representación ya descritos. Por su parte, aquellos estudiantes que no generalizaron, se limitaron a reconocer y describir el comportamiento del patrón a partir de lo recursivo, basándose en el contexto figural limitándose a dibujar figuras o enfocándose en el contexto numérico, sumando sucesivamente el valor numérico del patrón de recurrencia. En su gran mayoría, los estudiantes que lograron construir la estructura matemática plausible que explicaba el comportamiento del patrón, evidenciaron transitar de manera coherente entre los contextos figurales y numéricos, además de emplear de manera consistente los diferentes sistemas de representación y transitar de uno a otro, logrando expresar y traducir así las estructuras matemáticas plausibles por medio del sistema verbal-escrito, simbólico-numérico (operaciones aritméticas) y pictórico.

Un aspecto fundamental en esta investigación que favoreció el que las formas de razonamiento de algunos estudiantes evolucionaron, fueron debidos a un proceso de acompañamiento por parte del profesor-investigador, se dio en dos momentos:

a) *Etapa de comprensión de la tarea*, mediante una lectura en voz alta. Se motivó con ello su participación mediante preguntas, que enfatizaron en las figuras que componen el patrón, ¿qué figuras son? ¿qué pueden decir acerca de ellas? Esta etapa fue fundamental a nivel perceptual sensorial y cognitiva. Favoreció el que los estudiantes coordinaran aspectos cognitivos con el lenguaje verbal, escrito y simbólico.
b) *Etapa en el proceso de solución de la tarea,* para favorecer la evolución en las formas de razonamiento de los estudiantes, de modo que transitaran de construir reglas locales a reglas directas.

Este proceso es justifica, en razón de que a esta edad, los estudiantes están aprendiendo a comunicar ideas, a usar un lenguaje más formal, a que sus formas de razonamiento evoluciones, así como sus estrategias, y con ello, establezcan conjeturas y las justifiquen. Con ello, se posibilitó en su gran mayoría que los estudiantes lograran construir y justificar una estructura matemática plausible que explicara el comportamiento del patrón en cualesquiera de sus etapas.

En esta investigación, se desafía a incorporar procesos de acompañamiento, para involucrar a los niños en el uso estrategias y formas de pensar que posibiliten el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros años de escolaridad, y de esa manera subsanar en cierta medida las dificultades que los estudiantes enfrentan con los conceptos algebraicos por su introducción tardía hasta la enseñanza secundaria. Ello es posible gracias a que la generalización es una herramienta útil, poderosa y una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela (Castro-Rodríguez y Castro, 2016; Mason, 1999).

6.4 El rol de la visualización

La investigación reporta que la visualización juega un papel importante en la generalización de patrones, principalmente en los patrones figurales (Barbosa y Vale, 2015; Kirwan, 2017;

Rivera, 2010; Stacey, 1989). En el proceso de generalización de patrones, se reconoce que la visualización se relaciona con la manera de percibir (sensorial y cognitiva) el patrón figural, así como las estrategias numéricas y figurales y las estructuras aditivas que se establecen en el proceso de generalización y que describen el comportamiento de la sucesión lineal asociada al patrón figural (estructura matemática plausible).

6.5 Reflexiones finales

La generalización de patrones figurales son una buena estrategia para introducir a estudiantes de nivel primaria al álgebra y así desarrollar en ellos capacidades algebraicas desde los primeros años de escolaridad, demostrando de esa manera, que se puede involucrar relaciones funcionales y abordar la temática de funciones desde primaria (Blanton y Kaput, 2011).

Por otra parte, se evidenció en la presente investigación que los estudiantes de nivel primaria requieren de un proceso de acompañamiento o un proceso de mediación, como lo llaman Ureña, Ramírez y Molina (2019), por parte del docente o para el caso del presente estudio, profesor-investigador. El proceso de acompañamiento o mediación en lo que respecta al desarrollo de tareas que demandan la generalización de patrones figurales, fue encaminado a posibilitar la comprensión de la tarea, y el desarrollo de estrategias y formas de proceder diversas en el estudiante y se recurrió a esa ruta, puesto que tanto las tareas propuestas como la comunicación mediada por las acciones educativas son, por tanto, esenciales para el desarrollo de distintos razonamientos (Ureña, Ramírez y Molina, 2019). En ese sentido, un proceso de acompañamiento es necesario, debido al nivel educativo que se encuentran los estudiantes (tercer año de primaria) y que a esas edades los niños, se encuentran desarrollando capacidades de comprensión lectora, escritura y comunicación, que posteriormente le ayudarán a argumentar, explicar y justificar las estructuras que establecen en las tareas, pero aún tienen dificultades en estos aspectos. Además, investigaciones realizadas coinciden con los resultados obtenidos en el presente estudio en que se observó que un proceso de acompañamiento o mediación entre estudiante-docente reforzaba o redirigía acciones diseñadas para fomentar el aprendizaje y la expresión del conocimiento adquirido y las capacidades desarrolladas (Mata-Pereira y da Ponte, 2017; Soller, 2001). En ese contexto un desafío mayor, es documentar más profundamente, cómo incide el proceso de acompañamiento o mediación de docente en las estructuras o aspectos cognitivos involucrados en tareas que demandan la generalización de patrones figurales y de esa manera influir tanto en el maestro de educación primaria, creando una conciencia acerca de su quehacer como docente en ese nivel educativo, como en el estudiante, posibilitando un proceso de acompañamiento el cual facilite el desarrollo de formas de razonamiento enfocados al pensamiento algebraico desde edades tempranas, y así prevenir en cierta forma dificultades que se puedan presentar en secundaria al momento de la introducción de un álgebra más formal.

Referencias bibliográficas

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación.* (Tesis doctoral), Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, Granada, España.

Aliseda, A. (2006). What is abduction? Overview and proposal for investigation. En A. Aliseda, *Abductive reasoning. Logical investigations into discovery and explanation* (págs. 27-50). Dordrecht: Springer.

Álvarez-Gayou, J. (2003). *Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología.* México: Paidós Educador.

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority. (2015). *Mathematics: Sequence of content F-6 strand: Number and algebra.* Sydney, Australia.

Baptista, P., Fernández, C., & Hernández, R. (2010). *Metodología de la investigación.* México, DF: The McGraw-Hill.

Barbosa, A., & Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and Challenges. *Journal of the European Teacher Education Network, 10*, 57-70.

Barbosa, A., Vale, I., & Palhares, P. (2009). Exploring Generalization with Visual Patterns: Tasks Developed with Pre-algebra Students. *Padrões: Múltiplas Perspectivas e Contextos em Educação Matemática*, 137-149.

Barkl, S., Porter, A., & Ginns, P. (2012). Cognitive training for children: Effects on inductive reasoning, deductive reasoning, and mathematics achievement in an Australian school setting. *Psychology in the Schools, 49*(9), 828-842.

Becker, J., & Rivera, F. (2005). Generalization Strategies of Beginning High School Algebra Students. En H. Chick, & J. Vincent (Edits.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 4, págs. 121-128). Melbourne: University of Melbourne.

Bishop, J. (2000). Linear Geometric Number Patterns: Middle School Students' Strategies. *Mathematics Education Research Journal* , 107-126.

Blanton, M. B., Gardiner, A., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 511-558.

Blanton, M. et al. (2018). Implementing a Framework for Early Algebra. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds.* ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Blanton, M., & Kaput, J. (2003). Developing elementary teachers' "algebra eyes and ears: Understanding Characteristics of Professional Development that Promote Generative and Self-Sustaining Change in Teacher Practice". *Teaching Children Mathematics*, 70-77.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route into Algebra in the Elementary Grades. En J. Cai, & E. Knuth (Edits.), *Early Algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (págs. 5-23). Berlin Heidelberg: Springer. doi:10.1007/978-3-642-17735-4

Cabañas-Sánchez, G., Salazar, V., & Nolasco-Hesiquio, H. (2017). Tareas que potencian el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en libros de texto de matemáticas de primaria. En J. Cuevas, & L. Aké (Ed.), *Pensamiento algebraico en México desde diferentes enfoques.*

Callejo, M., García-Reche, Á., & Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avance de Investigación en Educación Matemática*, 5-25.

Cañadas, M. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas.* (Tesis Doctoral), Universidad de Granada, Granada, España.

Cañadas, M., & Castro, E. (2004). El razonamiento inductivo de 12 alumnos de secundaria en la resolución de un problema matemático. En E. Castro, & E. De la Torre (Edits.), *Actas del octavo simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática* (págs. 173-182). La Coruña: SEIEM.

Cañadas, M., & Castro, E. (2007). Proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, 67-78.

Cañadas, M., & Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y aprendizaje, 34*(4).

Cañadas, M., Castro, E., & Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3° y 4° de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA, Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 137-151.

Carraher, D., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, págs. 669–705). Charlotte, NC: Information Age.

Carraher, D., Martinez, M., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 3–22.

Castro, E. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con Escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años).* (Tesis Doctoral no publicada), Universidad de Granada, Granada, España.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. Penalva, F. García, & L. Ordóñez (Edits.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (págs. 75-94). Jaén, España: SEIEM.

Castro, E., Cañadas, M., & Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, 55-67.

Castro-Rodríguez, E., & Castro, E. (2016). Pensamiento lógico-matemático. En *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil* (págs. 87-107). Madrid, España : Pirámide.

Christou, C., & Papageorgiou, E. (2007). A framework of mathematics inductive reasoning. *Learning and Instruction, 17*(1), 55-66.

Chua, B., & Hoyles, C. (2010). Generalisation and perceptual agility: How did teachers fare in a quadratic generalsating problem? En M. Joubert (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* (Vol. 29, págs. 13–18).

Chua, B., & Hoyles, C. (2012). The effect different pattern formats on secondary two students' ability to generalise. En Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, págs. 155–162). Taipei, Taiwan: PME.

Davidov, V. (1978). *Tipos de generalización en la enseñanza.* La Habana: Pueblo y Educación.

Davydov, V. (1990). *Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological. Problems in the Structuring of School Curricula* (Vol. 2). Reston Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Dorantes, C. (2018). *Razonamiento inductivo que manifiestan estudiantes de secundaria en la generalización de patrones.* (Tesis de Maestría), Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization. En A. Bishop, & S. Mellin-Olsen (Edits.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (págs. 63-85). Netherlands: Kluwer.

Dörfler, W. (2007). En route from patterns to algebra: comments and reflections. *ZDM Mathematics Education*, 143–160.

Dretske, F. (1990). Seeing, believing, and knowing. En D. Osherson, S. Kosslyn, & J. Hollerback (Edits.), *Visual cognition and action: An invitation to cognitive science* (págs. 129–148). Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Duval, R. (1993). Sémiosis et Noésis. *Conférence A.P.M.E.P.I.R.E.M*.

Ellis, A. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflective generalizations. *The Journal of the Learning Sciences, 16*(2), 221–262.

Fernández-Plaza, J. (2016). Análisis del Contenido. En L. Rico, & A. Moreno, *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (págs. 103-117). Granada, España: Ediciones Pirámide.

Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, 163–183.

García Cruz, J. (1998). *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal.* (Tesis doctoral), Universidad de la Laguna, Santa Cruz de Tenerife, España.

Goldin, G., & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, & B. Greer (Edits.), *Theories of mathematical learning* (págs. 397-430). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Healy, L., & Hoyles, C. (1999). Visual and Symbolic Reasoning in Mathematics: Making Connections With Computers? *Mathematical Thinking and Learning*, 59-84.

Jurdak, M., & Mouhayar, R. (2014). Trends in the development of student level of reasoning in pattern generalization tasks across grade level. *Education Studies Mathematical, 85*, 75–92.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema, & T. Romberg (Edits.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (págs. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kelly, A. (2004). Design research in education: yes, but is it methodological? *The Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 115-128.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Pérez (Edits.), *8tn International Congress on Mathematical Education: Selected Lectures* (págs. 271-290). Sevilla, España: S.A.E.M. Thales.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 139-151.

Kirwan, J. (2013). Pre-service elementary teachers' anchors for generalization. En *Poster session presented at the 35th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Chicago, IL.

Kirwan, J. (2015). *Preservice secondary mathematics teachers' knowledge of generalization and justification on geometric-numerical patterning tasks.* (Tesis doctoral), Illinois State University, Normal.

Kirwan, J. (2017). Using visualization to generalize on quadratic patterning task. *Mathematics Teacher, 110*(8), 588-593.

Krutetskii, V. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* (J. Kilpatrick, I. Wirszup, Edits., & J. Teller, Trad.) Chicago: Chicago University Press.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic Generalisation Strategies: Factors Influencing Student Strategy Selection. *Mathematics Education Research Journal*, 3-28.

Lobato, J., Ellis, A., & Munoz, R. (2003). How "focusing phenomena" in the instructional environment support individual students' generalizations. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 1–36.

Lupiáñez, J. (2000). Sistemas de representación en el ambiente de computacional suministrado por la TI-92. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 13*, 228-232.

Lupiáñez, J. (2016). Sistemas de representación. En L. Rico, & A. Moreno, *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (págs. 119-137). Granada, España: Ediciones Pirámide.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Edits.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (págs. 65-86). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. (1999). Incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: Las secuencias de Tunja. *Revista EMA*, 232-246.

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2004). *Fundamental constructs in mathematics education.* Nueva York, NY: Routledge Falmer.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente.* Barcelona: Editorial Labor.

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra.* London: The Open University and Paul Chapman Publishing.

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2012). *Developing Thinking in Algebra.* Londres, Inglaterra: The Open University.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1985). *Routes to roots of algebra.* Milton Keynes: The Open University Press.

Mason, J., Sthepens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10-32.

Mata-Pereira, J., & Da Ponte, J. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics, 96*, 169–186.

Merino, E. (2012). *Patrones y representaciones de alumnos de 5° de educación primaria en una tarea de generalización.* (Tesis de Maestría), Universidad de Granada, Granada, España.

Michal, A., & Ruhama, E. (2008). Deductive reasoning: in the eye of the beholder. *Educational Studies in Mathematics*, 235–247.

Minnameier, G. (2004). Peirce-suit of truth: Why inference to the best explanation and abduction ought not to be confused. *Erkenntnis*, 75–105.

Molina, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* (Tesis doctoral), Universidad de Granada, Granada, España.

Molina, M., Castro, E., Molina, J., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias*, 75-88.

Mouhayar, R., & Jurdak, M. (2012). Teachers' ability to identify and explain students' actions in near and far figural pattern generalization tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 379-396.

Mouhayar, R., & Jurdak, M. (2016). Variation of student numerical and figural reasoning approaches by pattern generalization type, strategy use and grade level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(2), 197-215.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, 33-49.

National Council of Teachers of Mathematics . (2000). *Principles and standards for school mathematics.* USA: NCTM.

Nilsson, P., & Juter, K. (2011). Flexibility and coordination among acts of visualization and analysis in a pattern generalization activity. *The Journal of Mathematical Behavior*, 194-205.

Nuñez-Gutierrez, K. (2018). *Razonamiento inductivo en profesores de matemáticas al resolver tareas de generalización con sucesiones cuadráticas.* (Tesis de maestría), Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo, México.

Orton, A., & Orton, J. (1994). Students' perception and use pattern and generalization. En J. Ponte, & J. Matos (Edits.), *Proceedings of the 8th International Conference for the Psychology, of Education Mathematics* (Vol. 3, págs. 407-414). Lisbon: University of Lisbon.

Oviedo, G. (2004). "La definición del concepto de percepción en psicología con base en la teoría Gestalt". *Revista de Estudios Sociales*, 89-96.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* (J. Abellan, Trad.) Madrid: Editorial Tecnos.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14-23.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to studentes' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 37-62.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, págs. 17-24). Ankara, Turkey: PME.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Rico, L. (2016). Análisis Didáctico. En L. Rico, & A. Moreno, *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (págs. 85-100). Granada, España: Ediciones Pirámide.

Rico, L., & Moreno, A. (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria.* Granada, España: Ediciones Pirámide.

Rivera, F. (2008). On the pitfalls of abduction: Complicities and complexities in patterning activity. *For the Learning of Mathematics*, 17–25.

Rivera, F. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, 297-328.

Rivera, F. (2013). *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics.* Dordrecht: Springer.

Rivera, F. (2015). The distributed nature of pattern generalization. *PNA*, 165-191.

Rivera, F. (2018). Pattern Generalization Processing of Elementary Students: Cognitive Factors Affecting the Development of Exact Mathematical Structures. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 1-31.

Rivera, F., & Becker, J. (2007). Abduction-Induction (Generalization) Processes of Elementary Majors on Figural Patterns in Algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, 140-155.

Rivera, F., & Becker, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM*, 65–82.

Rivera, F., & Becker, J. (2016). Middle school students' patterning performance on semi-free generalization tasks. *Journal of Mathematical Behavior*, 53–69.

Ruiz-Hidalgo, J. (2016). Sentidos y modos de uso de un concepto. En L. Rico, & A. Moreno, *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (págs. 139-151). Granada, España: Ediciones Pirámide.

Salama, H. (2006). *TPG. Manual del test de Psicodiagnóstico Gestalt de Salama.* México: Instituto Mexicano de Psicoterapia Gestalt.

Schliemann, A., Carraher, D., Brizuela, B., & Earnest, D. (2003). Algebra in elementary school. En N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Edits.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PME-NA* (Vol. 4, págs. 127-134). Honolulu, HI: CRDG, College of Education, University of Hawai'i.

Seel, N. M. (2012). *Encyclopedia of the Sciences of Learning.* New York: Springer US.

SEP. (2011a). *Plan de estudios 2011. Educación básica.* México: SEP.

SEP. (2011b). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Matemáticas. Primer grado.* México: SEP.

SEP. (2011c). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Matemáticas. Segundo grado.* México: SEP.

SEP. (2011d). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Matemáticas. Tercer grado.* México: SEP.

SEP. (2014a). *Desafíos Matemáticos. Libro para el maestro. Primer grado.* México: SEP.

SEP. (2014b). *Desafíos Matemáticos. Libro para el maestro. Segundo grado.* México: SEP.

SEP. (2014c). *Desafíos Matemáticos. Libro para el maestro. Tercer grado.* México: SEP.

SEP. (2014d). *Desafíos Matemáticos. Libro para el alumno. Primer grado.* México: SEP.

SEP. (2014e). *Desafíos Matemáticos. Libro para el alumno. Segundo grado.* México: SEP.

SEP. (2014f). *Desafíos Matemáticos. Libro para el alumno. Tercer grado.* México: SEP.

Soares, J., Blanton, M., & Kaput, J. (2006). Thinking algebraically across the elementary school curriculum . *Teaching children mathematics*, 228-235.

Soller, A. (2001). Supporting social interaction in an intelligent collaborative learning system. *International Journal of Artificial Intelligence in Education, 12*, 40–62.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics* , 147-164.

Steffe, L., & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential. En R. Lesh, & A. Kelly (Edits.), *Research design in mathematics and science education* (págs. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stephens, A., Ellis, A., Blanton, M., & Brizuela, B. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (págs. 386–420). Reston, VA: NCTM.

Ureña, J., Ramírez, R., & Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation/Representaciones de la generalización de una relación funcional y el vínculo con la mediación del entrevistador. *Infancia y Aprendizaje, 42*(3), 570-614.

Valenzuela, J., & Gutiérrez, V. (2018). Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones de figuras. *Educación Matemática*, 49-72.

Vargas, L. (1994). Sobre el concepto de percepción. *Alteridades*, 47-53.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, 193-215.

Villa-Ochoa, J. (2006). El proceso de generalización matemática: algunas reflexiones en torno a su validación. *TecnoLógicas*, 139-151.

Walkowiak, T. (2014). Elementary and middle school students' analyses of pictorial growth patterns. *Journal of Mathematical Behavior*, 56-71.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. En H. Chick, & J. Vincent (Edits.), *Proceedings of the 29th Conference of* *the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, págs. 305-312). Melbourne, Australia: PME.

Watson, A., & Thompson, D. (2013). Design issues related to Text-Based Tasks. En A. Watson, & M. Ohtani (Edits.), *Task Desing in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22* (págs. 143-190). Oxford, UK: International Commission on Mathematical Instruction. Springer.

Whitin, P., & Whitin, D. (2011). Mathematical pattern hunters. *Young Children*, 84-90.

Wilkie, K. (2014). Learning to like algebra through looking. *Australian Primary Classroom*, 24-33.

Wilkie, K., & Clarke, D. (2016). Developing students' functional thinking in algebra through different visualizations of a growing pattern's structure. *Mathematics Education Research Journal*, 223-243.

Zapatera, A. (2015). *La competencia mirar con sentido de estudiantes para maestro (EPM) analizando el proceso de generalización en alumnos de Educación Primaria.* (tesis doctoral), Universidad de Alicante, Alicante, España.

Zapatera, A. (2018). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de Generalización de Patrones. Una trayectoria de Aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 87-114.

Zapatera, A., & Callejo, M. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Edits.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (págs. 535-544). Bilbao, España: SEIEM.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 379-402.

Anexos

Anexo I

Tarea 1. “Las mesitas”

Nombre ____

Edad: ________ Grado: _______ Fecha: _______

1. Analiza la siguiente sucesión que se encuentra formada por mesas cuadradas, acomodadas de forma lineal.

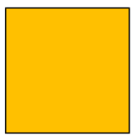


Figura. 1

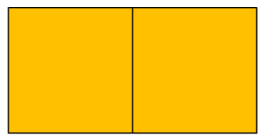


Figura. 2

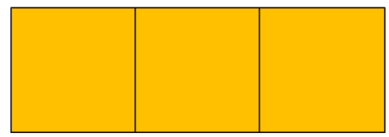


Figura. 3

a) Si se te pide que coloques alrededor de una mesa (figura 1) una silla en cada lado de ésta, ¿Cuántas sillas colocarás?

b) Si pones dos mesas cuadradas juntas (figura 2), ¿Cuántas sillas colocarás alrededor de la nueva mesa rectangular?

c) Si pones tres mesas juntas (figura 3), ¿Cuántas sillas colocarás alrededor de las mesas?

d) ¿Qué relación puedes observar entre la cantidad de mesas y sillas?

e) Si tienes 20 mesas cuadradas acomodadas en forma lineal, ¿Cuántas sillas colocarás alrededor de las mesas?

Anexo II

Tareas 2. “La banderita”

Nombre ____

Edad: ________ Grado: _______ Fecha: _______

2. Las figuras de la sucesión siguiente están formadas por círculos de igual tamaño.

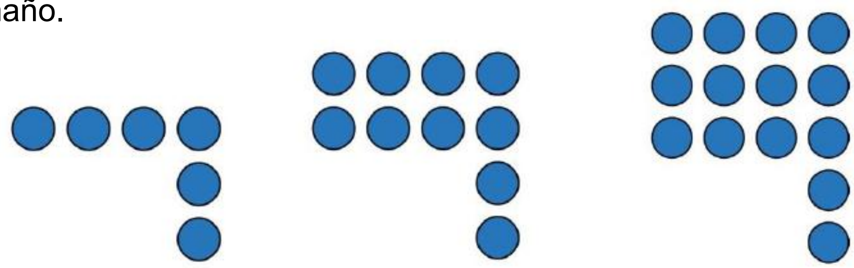


Figura. 1 Figura. 2 Figura. 3

f) ¿Cuántos círculos se necesitan para formar las figuras 5, 9, 12 y 100?

g) Explica cómo se puede determinar rápidamente la cantidad de círculos necesarios para formar cualquier figura de la sucesión analizada.

h) Determina rápidamente la cantidad de círculos necesarios para formar la figura 2135.

Anexo III

Tarea 3. La “T”

Nombre ____

Edad: ___________ Grado: _________ Fecha: _______________

3. Analiza la siguiente sucesión de figuras formada por cuadrados de igual tamaño.

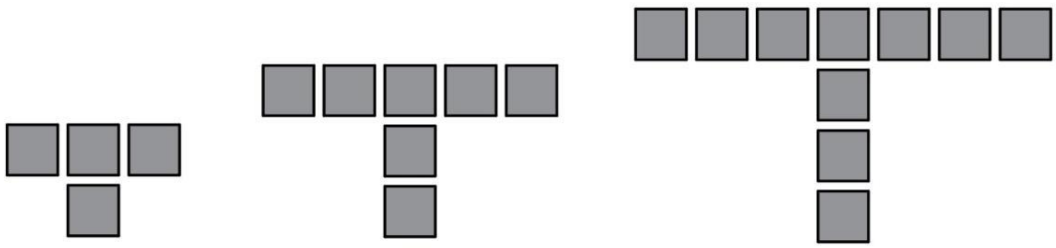


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) ¿Cuántos cuadrados se necesitan para formar las figuras 4, 7, 17 y 31 de la sucesión? Argumenta tu respuesta.

b) ¿Cuántos cuadrados se necesitan para formar la figura 125 de la sucesión? Argumenta tu respuesta.

Nombre ____

Edad: ___________ Grado: _________ Fecha: _______________

c) Escribe un mensaje a un compañero, donde le expliques cómo puede determinar rápidamente la cantidad de cuadrados necesarios para formar cualquier número de figura de la sucesión.