UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Análisis de las conexiones matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de la derivada basado en un networking of theories entre la Teoría de las conexiones y el Enfoque ontosemiótico

Tesis que para obtener el grado de Doctor en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa presenta:

M.C. Camilo Andrés Rodríguez-Nieto

Directores de tesis:

Dra. Flor Monserrat Rodríguez Vásquez

Dr. Vicenç Font Moll

Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, México Julio de 2021

Análisis de las conexiones matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de la derivada basado en un networking of theories entre la Teoría de las conexiones y el Enfoque ontosemiótico

Analysis of mathematical connections in the teaching and learning of the derivative based on a networking of theories between the Theory of connections and the Onto-semiotic Approach

Tesis Doctoral:

M.C. Camilo Andrés Rodríguez-Nieto

Directores de tesis:

Dra. Flor Monserrat Rodríguez-Vásquez. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Dr. Vicenç Font Moll. Universidad de Barcelona, España.

Comité evaluador:

1. Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México.
2. Dr. Armando Morales Carballo. Universidad Autónoma de Guerrero, México.
3. María del Socorro García-González. Universidad Autónoma de Guerrero, México.
4. Dr. Javier García-García. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

2021
Universidad Autónoma de Guerrero
Facultad de Matemáticas
Doctorado en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa
Chilpancingo, Guerrero, México.

Agradecimientos

Agradecimiento especial a la Universidad Autónoma de Guerrero de Chilpancingo, México y al Centro de Investigación en Matemática Educativa por permitir formarme académicamente como Maestro y Doctor en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa.

*Al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología** de México por apoyarme y darme la oportunidad de cumplir uno de mis sueños de estudiar el Doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa en la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Por apoyarme económicamente en la estancia académica y de investigación realizada en la Universidad de Barcelona, España.*

Becario No. **602990**

Agradecimientos y dedicatoria:

Primero agradezco a Dios por darme la vida y la oportunidad de gozar de sus bendiciones y maravillas que Él ha puesto en mi camino, siempre permanezco sin temor y con fe porque Él está conmigo donde quiera que vaya, me fortalece y me lleva a la victoria (Isaías 41, 10). A la virgencita María por protegerme con su amor de madre de Dios. A mis padres Ramiro y Yadira (mi motivación para seguir adelante) por dejar en mí su amor, valores y la semilla de la humildad en mí corazón y mente. Les agradezco mucho por confiar en mí y tener la esperanza de algún día volverme a ver en casa, así como les dije hasta luego un primero de agosto de 2016. A mi hermano Ramiro por ser mi motivación para ser alguien en la vida y ser un ejemplo para él.

A mis familiares paternos y maternos que me han apoyado en todo momento, animándome y orando por mí para que algún día pudiese lograr el objetivo que vine a buscar en México lindo y querido. Especialmente, mis tíos Eugenio, Nohora, Doris, Félix, José, Eliecer, Amparo, Rita, Marcos, Miguel, María, Alberto, Miguel, Arturo, Álvaro, Margarita, Chagui, entre otros. A mis primos, Jesús, Ana, Barto, Jorge, Carlos Alberto, Yuranis, Laura, Cristian, Claribel, Malka, Karen, Einstein, Félix, Margarita, Tisbe, especialmente a Hilton y Belkys que fueron de gran ayuda incondicional con apoyos de la Banda de música de Baranoa y la gobernación del Atlántico. Agradezco a mi novia Julitsha por su amor, respeto, espiritualidad, oración, apoyo y esperarme durante mi estancia posgradual y, también a sus familiares. A mis abuelos que en paz descansen.

A mis amigos en México que batallaron a mi lado durante cinco años Karina, Jonathan cervantes, Gustavo, Mayra, Arenas, Romario, Adrian, Lizzet, Reynaldo, Stiven, Katty, Diego, Jorge, Eduard, Erika, los José Luis, Toña, Melby, Kike, Alian, Cyntia, Angie, Safira, entre otros. Especialmente a Karina y a Cervantes por mantener la unión en la oración, la eucaristía y amistad. Agradezco especialmente al profesor Daniel (y familia) quien inspirado en su buen accionar me ayudó en mis estudios de secundaria y me motivó a estudiar matemáticas, apoyándome en todo momento. Hoy día es un gran amigo que quiero mucho. Al profesor Armando Aroca quien me motivó para hacer mis estudios de posgrado e hizo todo lo posible para que siguiera adelante en mi vida profesional. A mis padrinos Jane y Juan, y, también a mis compadres, es para ustedes.

A mis amigos y vecinos de la vida Cafú, Diana, Gian, Luis f., Daniel, Mauricio, Leo, Johan, Ricardo, Eilen, Hernán, Jesús, Daniel A. Andrea, Cristian, Juan C., José, Roy, Mauricio, Carlos, Aramis, Álvaro, Juancho S., Fily, Tico, Hansel, Emma, Mauxi, Yeni, Clare, Chamo, Yoma, Migue, Fabián (Callo), Harold, y vecinos como Wilson, Irma, Geo, Yola, Alberto, Juanita, Luzme, Alejo, Edgar, Mire, Vicente, Villano, Nidia, Chucho, Gene, Grego, Nacira, Iván, Pocho, Rosa, Carmen G., Orlando, Florinda, Rocío, Pisi, Jesús Pérez. Al padre Marco Fidel por sus oraciones y colaboración incondicional. A mis amigos de lazos de amor mariano, quienes me apoyaron en todo momento y hoy sus oraciones las agradezco. A la congregación Santa Ana. Agradezco a todas las personas de Baranoa que por extensión no pude mencionar, los llevo en mi corazón. A Edward Roa por tu buena atención.

Agradezco a mis asesores de tesis: Dra. Flor Monserrat Rodríguez-Vásquez quien confió en mis capacidades como estudiante y me ayudó incondicionalmente a seguir adelante en mis estudios doctorales. Durante todo este tiempo no solo se vivió la academia de escritura de artículos, tesis, etc., sino una amistad que pido a Dios sea por mucho tiempo. Agradezco sus consejos en los buenos y malos momentos que realmente me han servido para crecer como investigador y persona, gracias por

invertir su tiempo en horas de lectura, trámites, asesorías que fueron para bien, tiempo que en muchos momentos pudo disfrutar con su familia. Son muchos momentos vividos que llevo en mente y corazón y siempre se lo agradeceré. También, agradezco al Dr. Vicenç Font Moll quien aceptó trabajar conmigo incondicionalmente en una estancia de investigación para avanzar en la tesis doctoral y se convirtió en el segundo asesor de tesis, dedicando gran parte de su tiempo y conocimiento para la escritura de artículos, la tesis y consejos que me ha dado para crecer como investigador y como persona. También, agradezco por brindarme su amistad y sus frases como “agarrar callo” “cojonudo” y “San Sebastián”. En general queridos asesores, les agradezco mucho y créanme que me despido muy motivado y lleno de sus conocimientos para emprender una nueva etapa de mi vida, Bendiciones.

Agradezco a los evaluadores de tesis al Dr. Javier García-García, Dra. Lidia Hernández Rebollar, Dr. Armando Morales-Carballo y Dra. María García-González, por invertir horas de trabajo en la lectura, hacer comentarios y aportaciones sustanciales para la mejora de la memoria doctoral. También, agradezco a la Dra. Judith Hernández por su aportación en la etapa predoctoral. Especialmente, agradezco a los doctores Javier y Armando por su colaboración incondicional en las discusiones de artículos y procesos administrativos clave. Agradezco a los evaluadores anónimos que han revisado los artículos científicos que se han publicado durante este doctorado. Agradezco a la Dra. Ángela Castro por ayudarme en todo este tipo posgradual, nuestros estudiantes, a la familia Córdova Avendaño en Chile, a mis colegas Alicia, Viviane, Adriana y amigos de España Dario, Tuly, Pame, Martha, Carlos, Saida, Andreina, muchas gracias. Gracias a las personas y estudiantes que participaron en mis investigaciones, su información ha sido relevante.

Por último, agradezco a mis profesores durante la maestría y el doctorado: Dra. Guadalupe Cabañas, Dr. Gustavo Martínez, Dr. Crisologo Dolores, Dra. Catalina Navarro, Dra. Marcela Ferrari, Dr. Antonio Zabaleta, Dr. Javier García, Dr. Armando Morales, Dra. María García, entre otros, siempre llevaré presente sus conocimientos y enseñanzas que recibí para mejorar. Agradezco a Yesenia, Carolina, Gerardo, Mary, Mica, Elloy y Santiago que hacen una labor importante en el posgrado. Dedico especialmente al Dr. Ubiratan D’Ambrosio quien hace poco falleció, quien fue el fundador del Programa Etnomatemática, Muchas gracias.

Camilo Andrés Rodríguez Nieto

Contenido

Resumen 15

Abstract 17

Introducción 19

Capítulo 1 23

Planteamiento del problema 23

1.1. Estado actual de la investigación sobre conexiones matemáticas 23

1.1.1. Las conexiones matemáticas en distintos niveles educativos 24

1.1.2. Investigaciones que han aportado tipologías de conexiones matemáticas 33

1.1.3. Investigaciones sobre Networking of theories 39

1.1.4. Justificación 46

1.2. Preguntas específicas de investigación 46

1.3. Objetivos específicos 47

Capítulo 2 48

Marco teórico de la investigación 48

2.1. Teoría de las Conexiones matemáticas 48

2.1.1. Conexión de modelado (MD) 49

2.1.2. Conexión orientada a la instrucción (COI) 49

2.1.3. Representaciones diferentes (RD) 50

2.1.4. Procedimental (P) 50

2.1.5. Implicación (I) 51

2.1.6. Parte-todo (P-T) 51

2.1.7. Significado (S) 51

2.1.8. Característica (C) 51

2.1.9. Reversibilidad (R) 52

2.2. El Enfoque Ontosemiótico 52

2.3. Networking of theories en Educación Matemática 58

2.4. La derivada 61

Capítulo 3 66

Metodología de la investigación 66

3.2. Recolección de los datos 67

3.2.1. Momento de recolección de datos 1: Observación no participante 67

3.2.2. Momento de recolección de datos 2: Entrevista semiestructurada 68
3.2.3. El cuestionario 69
3.2.3.1. Tareas 72
3.2.3.1.1. Tarea 1 72
3.2.3.1.2. Tarea 2 72
3.2.3.1.3. Tarea 3 72
3.2.3.1.4. Tarea 4 73
3.2.3.1.5. Tarea 5 73
3.2.3.1.6. Tarea 6 74
3.2.3.1.7. Tarea 7 75
3.3. Análisis de los datos 76
3.3.1. Momento de análisis 1 76
3.3.2. Momento de análisis 2 77
Capítulo 4 79
Análisis y resultados 79
4.1. Surgimiento de la Teoría Ampliada de las Conexiones matemáticas 79
4.1.1. Desarrollo de las fases del análisis temático e identificación de las conexiones matemáticas 79
4.1.1.1. Conexiones matemáticas de tipo significado 86
4.1.1.2. Conexiones matemáticas de tipo representaciones diferentes 86
4.1.1.3. Conexiones matemáticas de tipo procedimental 87
4.1.1.4. Conexiones matemáticas de tipo parte-todo 88
4.1.1.5. Conexiones matemáticas de tipo orientadas a la instrucción 89
4.1.1.6. Conexiones matemáticas de tipo característica 90
4.1.1.7. Conexiones matemáticas de tipo implicación 90
4.1.2. Triangulación 91
4.2. Networking entre la TAC y el EOS 98
4.2.1. Estrategia 1: comprensión de las teorías 99
4.2.2. Estrategia 2: Comparación y contrastación de las teorías 100
4.2.2.1. Principios de ambas teorías 100
4.2.2.2. Conexión matemática versus función semiótica 102
4.2.2.3. Comprensión matemática para ambas teorías 102
4.2.2.4. Concordancia de métodos 103

4.2.2.5. Concordancia de preguntas de investigación 103
4.2.3. Estrategia 3: Coordinación y combinación de las teorías 104
4.2.3.1. Análisis de las conexiones matemáticas de E1 con la TAC 106
4.2.3.2.1. Transcripción de la entrevista 115
4.2.3.2.2. Narrativa 115
4.2.3.2.3. Prácticas matemáticas (Pm1, ..., Pm14) 116
4.2.3.2.4. Configuración cognitiva de objetos primarios 117
4.2.3.2.5. Funciones semióticas 119
4.2.4. Estrategia 4: Integración y síntesis local entre la TAC y el EOS 121
4.3. Conexiones matemáticas evidenciadas en la resolución de las tareas propuestas 128
4.3.1. Conexiones matemáticas en la resolución de la tarea 1 128
4.3.2. Conexiones matemáticas establecidas en la resolución de la tarea 2 137
4.3.2.1. Narrativa 137
4.3.2.2. Prácticas matemáticas (Pm1, …, Pm15) 138
4.3.2.3. Configuración cognitiva de objetos primarios 139
4.3.2.4. Análisis detallado de las conexiones matemáticas en la tarea 2 basado en la integración entre la TAC y el EOS 146
4.3.3. Conexiones matemáticas establecidas en la resolución de la tarea 3 150
4.3.3.1. Prácticas matemáticas (Pm1, …, Pm26) 150
4.3.3.2. Configuración cognitiva de objetos primarios de E1 sobre la tarea 3 152
4.3.3.3. Análisis detallado de las conexiones matemáticas en la tarea 3 basado en la integración entre la TAC y el EOS 162
4.3.4. Conexiones matemáticas establecidas en la resolución de la tarea 4 167
4.3.4.1. Prácticas matemáticas (Pm1, …, Pm20) 167
4.3.4.2. Configuración cognitiva de objetos primarios de E1 sobre la tarea 4 169
4.3.4.3. Análisis detallado de las conexiones matemáticas en la tarea 3 basado en la integración entre la TAC y el EOS 174
4.3.5. Conexiones matemáticas establecidas en la resolución de la tarea 5 175
4.3.5.1. Prácticas matemáticas (Pm1, …, Pm13) 175
4.3.5.2. Configuración cognitiva de objetos primarios activados en resolución de la tarea 5 177
4.3.6. Conexiones matemáticas establecidas en la resolución de la tarea 6 185
4.3.7. Conexiones matemáticas establecidas en la resolución de la tarea 7 187

4.4. Dificultades para establecer conexiones matemáticas clave para la resolución de tareas sobre la derivada 189
Capítulo 5 192
Discusión y Reflexiones finales 192
5.1. Discusión 192
5.2. Reflexiones finales 200
Referencias bibliográficas 201
Anexos 217
Productos de la investigación 217
Otros productos del doctorando 218

Índice de Figuras

Figura 1. Tipología de conexiones matemáticas (Tomado de García-García (2018, p. 166) y Campo-Meneses y García-García (2020)). 37
Figura 2. Modelo de conexiones internas y externas desde la Etnomatemática. 39
Figura 3. Articulación de los cinco marcos en un marco para examinar aulas de matemáticas de alta calidad centradas en involucrar a los estudiantes en la justificación (Adoptado de Thanheiser et al. (2021)). 45
Figura 4. Representaciones gráficas de $y = ex$ y $y = lnx$ (Stewart, 1999, p. 71). 50
Figura 5. Representación ontosemiótica del conocimiento matemático (tomado de Font y Contreras (2008)). 54
Figura 6. Encadenamiento de FSs (Adaptado de Font y Contreras (2008)). 57
Figura 7. Estrategias para articular marcos teóricos (Prediger et al., 2008, p. 170). 60
Figura 8. Pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(a + h, f(a + h))$ (tomado de Stewart, 1999, p. 144). 63
Figura 9. Interpretación geométrica de la derivada (tomado de Stewart (1999, p. 152)). 63
Figura 10. Significado epistémico global de la derivada (tomado de Pino-Fan, Godino y Font (2011, p. 174)). 64
Figura 11. Esquema de metodológico de la investigación. 67
Figura 12. Evidencia de la observación no participante en el aula de clases. 68
Figura 13. Modalidades de las entrevistas semiestructuradas (presencial y en línea). 69
Figura 14. Gráfica de la función f (Leithold, 1998, p. 248). 73
Figura 15. Gráfica de la función derivada f' (Leithold, 1998, p. 228). 74
Figura 16. Gráfica de la derivada f' (Spivak, 1992, p. 284). 75
Figura 17. Problema de aplicación (Leithold, 1998, p. 208). 75
Figura 18. Regla de los cuatro pasos. 80
Figura 19. Gráfico para iniciar la interpretación geométrica de la derivada. 81
Figura 20. Características de la función continua. 81
Figura 21. Ejemplo de la gráfica de una función con un pico. 82
Figura 22. Gestos que hacen referencia a la continuidad de la función. 82
Figura 23. Gestos para recorrer por la gráfica de una función. 83
Figura 24. Esquema de la conexión matemática de significado. 86

Figura 25. Producción escrita del profesor en relación con los códigos C1 y C34. 87
Figura 26. Evidencia de la conexión matemática de tipo procedimental. 88
Figura 27. Un ejemplo de función discontinua en un punto. Evidencia de la conexión matemática de tipo parte-todo. 88
Figura 28. Evidencia de la conexión de tipo parte-todo. 89
Figura 29. Evidencia de la conexión matemática de tipo característica. 90
Figura 30. Esquema de la conexión de implicación. 91
Figura 31. Conexión matemática de tipo característica (Creación propia). 92
Figura 32. Conexión matemática de tipo metafórica (Creación propia). 93
Figura 33. Caracterización y proyección de la conexión metafórica (Tomado de Rodríguez-Nieto et al. (2020)). 94
Figura 34. El "Origen-Camino-llegada" (tomado de Font et al. (2010, p.136)). 95
Figura 35. Conexiones matemáticas con adaptaciones de García-García y Dolores-Flores (2018; 2019; 2020) y ampliaciones realizadas en esta investigación. 97
Figura 36. Producción escrita de la resolución de la tarea por parte de E1. 107
Figura 37. Representaciones gráficas. 118
Figura 38. Funciones semióticas identificadas en la actividad matemática de E1. 120
Figura 39. Relaciona el gráfico de función continua con un esquema básico (camino). ... 124
Figura 40. Evidencia de una conexión matemática de significado desde la TAC. 124
Figura 41. Conexión matemática definida metafóricamente como la punta de un iceberg (Dibujo creado por el autor). 126
Figura 42. Conexión matemática de significado basada en la información de la Tabla 14 (Dibujo creado por el autor). 127
Figura 43. Esquemas de conexión matemática de tipo significado. 130
Figura 44. Producción escrita de donde se infirió la conexión de significado de E7. 130
Figura 45. Esquema de la conexión de tipo característica. 132
Figura 46. Esquema de la conexión metafórica. 133
Figura 47. Evidencia de la conexión metafórica. 134
Figura 48. Esquema de la conexión de tipo implicación. 135
Figura 49. Conexiones matemáticas entre representaciones diferentes alternas. 136
Figura 50. Casos particulares de derivadas de funciones polinómicas. 136

Figura 51. Representación gráfica de la función y la ecuación de la recta tangente a la función. 140
Figura 52. Evidencia del cálculo de la derivada. 141
Figura 53. Evidencia de la evaluación de la función para encontrar el punto de tangencia y la pendiente. 142
Figura 54. Evidencia del cálculo de la pendiente por medio de la ecuación punto pendiente, la pendiente y el punto de tangencia. 143
Figura 55. Uso de propiedades del álgebra para encontrar la ecuación de la recta. 143
Figura 56. Evidencia de cómo hallar los puntos de corte de la recta con los ejes x e y. 144
Figura 57. Funciones semióticas establecidas con los objetos primarios por parte de E1 en la resolución de la tarea 2. 145
Figura 58. Procedimiento para derivar la función. 147
Figura 59. Conexión procedimental para hallar el punto de tangencia y la pendiente. 148
Figura 60. Aplicación de la fórmula punto pendiente para encontrar la ecuación de la recta. 148
Figura 61. Conexiones matemáticas de tipo representaciones diferentes alternas. 149
Figura 62. Esquema de la conexión matemática de tipo procedimental para la resolución de la tarea 2. 150
Figura 63. Tablas de valores para gráficar a g y g'. 153
Figura 64. La gráfica de g y la gráfica de g'. 154
Figura 65. Evidencia del procedimiento para encontrar la derivada, los puntos críticos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. 156
Figura 66. Procedimiento para encontrar los máximos y mínimos. 157
Figura 67. Procedimiento para calcular el punto de inflexión. 157
Figura 68. Procedimiento para determinar los puntos de concavidad. 158
Figura 69. Funciones semióticas establecidas con los objetos primarios por parte de E1 en la resolución de la tarea 3. 161
Figura 70. Evidencia de la Conexión matemática de significado 163
Figura 71. Conexiones matemáticas de tipo procedimental. 164
Figura 72. Intervalos de crecimiento y decrecimiento. 164
Figura 73. Conexiones matemáticas para hallar el máximo y el mínimo 165

Figura 74. Conexiones matemáticas para hallar el punto de inflexión e intervalos de concavidad. 166
Figura 75. Conexiones matemáticas de tipo representaciones diferentes y parte-todo. 167
Figura 76. Gestos de E1 para referirse a la concavidad de *f*. 168
Figura 77. Representación gráfica de *f* y *f '*. 169
Figura 78. Evidencia escrita sobre las proposiciones. 170
Figura 79. Funciones semióticas establecidas con los objetos primarios por parte de E1 en la resolución de la tarea 4. 173
Figura 80. Representación gráfica de *f'* construida a partir de la información de *f*. 175
Figura 81. Representación gráfica de *f'’* y *f*. 178
Figura 82. Evidencia escrita sobre las proposiciones. 179
Figura 83. Funciones semióticas establecidas con los objetos primarios por parte de E1 en la resolución de la tarea 5. 182
Figura 84. Gráfica de *f* a partir de la información de *f '*. 184
Figura 85. Estructura de la conexión matemática de reversibilidad desde la TAC y el EOS. 185
Figura 86. Representación gráfica de f con base en f '. 186
Figura 87. Esquemas de la conexión matemática de tipo implicación. 187
Figura 88. Evidencias de las conexiones de tipo modelado, representaciones diferentes y procedimental. 188
Figura 89. Conexiones matemáticas de tipo procedimental y respuesta a la tarea. 189
Figura 90. Ejemplo de conexiones incorrectas realizadas por E9. 190
Figura 91. Movimiento de dos autos (tomado de Badillo et al. (2011)). 193
Figura 92. Aproximación dinámica a la tangente mediante líneas secantes (Tomado de Font (2000, p.117)). 195

Índice de Tablas

Tabla 1. Síntesis de las categorías de conexiones matemáticas propuesto por Evitts. 33
Tabla 2. Síntesis de las categorías de conexiones matemáticas propuesto por Businskas. .. 34
Tabla 3. Síntesis de las categorías de conexiones matemáticas propuesto por Eli et al. (2011). 35
Tabla 4. Síntesis de las categorías de conexiones entre conceptos propuestas por Lapp et al. (2010). 36
Tabla 5. Tipos de FSs (Adaptado de Font y Contreras (2008)). 57
Tabla 6. Fases del análisis temático. 76
Tabla 7. Extractos de la transcripción del discurso del profesor. 80
Tabla 8. Síntesis de los tipos de conexiones matemáticas establecidas por el profesor. 84
Tabla 9. La gráfica es un camino. 95
Tabla 10. Extractos de la transcripción de la entrevista. 108
Tabla 11. Asignación de códigos. 110
Tabla 12. Conexiones matemáticas establecidas por el estudiante E1. 112
Tabla 13. Configuración cognitiva activada de objetos primarios. 117
Tabla 14. Análisis detallado de la actividad realizada por E1 utilizando herramientas del EOS y su relación con las conexiones de la TAC. 121
Tabla 15**.** Configuración cognitiva del estudiante. 139
Tabla 16. Análisis detallado de la actividad matemática del estudiante con base en el EOS y la TAC. 146
Tabla 17. Configuración cognitiva activada de objetos primarios de E1 para la resolución de la tarea 3. 152
Tabla 18. Análisis detallado de la actividad matemática de E1 al resolver la tarea 3. 162
Tabla 19. Configuración cognitiva activada de objetos primarios de E1 para la resolución de la tarea 4. 169
Tabla 20. Análisis detallado de la actividad matemática de E1 al resolver la tarea 4. 174
Tabla 21. Configuración cognitiva activada de objetos primarios de E1 para la resolución de la tarea 5. 177
Tabla 22. Análisis detallado de la actividad matemática de E1 al resolver la tarea 5. 183

Resumen

En la investigación en Educación Matemática, se han reportado modelos para analizar conexiones matemáticas en los que se consideran categorías de conexiones específicas. En la literatura se identificó que el modelo más usado es el Businskas con aportaciones de otros investigadores. No obstante, la problemática refiere a que algunas categorías de conexiones limitan el análisis de la actividad matemática y, por tanto, la investigación sugiere que las categorías establecidas se validen y si es posible se reporten nuevas categorías de conexiones. Otras investigaciones enfocadas en la exploración de conexiones matemáticas y en la comprensión sobre la derivada, revelan que los estudiantes de bachillerato, los futuros profesores y algunos profesores de matemáticas en servicio presentan dificultades para conectar múltiples representaciones de la derivada (e.g., algebraica o simbólica, verbal, gráfica, tabular) y establecer conexiones entre significados parciales sobre este concepto.

Para atender a esta problemática se planteó el objetivo general: desarrollar un networking de teorías de dos perspectivas (la Teoría de las conexiones matemáticas y el EOS) sobre la actividad matemática involucrada en los procesos de conexión matemática necesarios para resolver problemas de derivadas, el cual se concreta en los objetivos siguientes: 1) identificar las categorías de conexiones matemáticas que debe contemplar una Teoría Ampliada de las Conexiones (TAC) que permita sintetizar, englobar y ampliar las categorías de conexiones existentes en la literatura, 2) explorar las concordancias y complementariedades desde la articulación entre la TAC y el EOS para un análisis más detallado de las conexiones matemáticas, 3) caracterizar las conexiones matemáticas que establecen los estudiantes universitarios al resolver problemas sobre la derivada mediante el uso combinado de la TAC y el EOS, 4) explicar por qué los estudiantes tienen dificultades para establecer determinadas conexiones matemáticas que son clave para la resolución de tareas sobre derivadas con base en el uso combinado de la TAC y el EOS. El trabajo se fundamentó en la teoría de las conexiones matemáticas que propone una definición de conexión y sus categorías de conexiones extramatemáticas e intramatemáticas, algunas herramientas del EOS y la fundamentación teórica metodológica para hacer redes de teóricas.

Para alcanzar los objetivos, la investigación se desarrolló con base en una metodología cualitativa en tres etapas: En la etapa 1 se seleccionaron los participantes de la investigación que fueron un profesor y sus estudiantes. Posteriormente, en la etapa 2 se recolectaron los datos a través de dos métodos de recolección implementados en dos momentos. En el primer momento (MR1), se realizó una observación no participante a siete clases impartidas por el profesor, interactuando con sus estudiantes sobre el concepto de derivada. En el segundo momento (MR2) se realizaron entrevistas semiestructuradas a los estudiantes cuando resolvian siete tareas en el contexto de la derivada. En la etapa tres, se analizaron los datos considerando dos momentos de análisis (MA1 y MA2) correspondientes a cada uno de los momentos de recolección de la etapa 2 (MR1 y MR2) respectivamente. En los resultados,

inicialmente se presentó el surgimiento de la Teoría Ampliada de las Conexiones, donde se consideró el primer momento de análisis (MA1) fundamentado en un análisis temático deductivo, tomándose como categorías previas las propuestas en el modelo de Businskas ampliado con las aportaciones de otros investigadores (nueve tipos de conexiones a priori). En este análisis se reconocieron dos niveles de ambigüedades y por tal motivo emergió la nueva categoría de conexión metafórica para la conformación de la TAC.

Posteriormente, en el segundo momento de análisis (MA2) se siguieron las estrategias de creación de networking of theories propuestas por Prediger et al. (2008) entre la TAC y el EOS, lográndose concordancias entre ambas teorías, las cuales entienden a la conexión matemática como la punta de un iceberg conformada por un conglomerado de prácticas, procesos, objetos primarios activados en estas prácticas y relacionados por medio de funciones semióticas (**FSs**), lo que posibilita un análisis profundo que detalla la estructura y funcionamiento de la conexión. Por último, se usó el análisis temático sugerido por la TAC y el modelo para el análisis de la actividad matemática propuesto por el EOS para caracterizar las conexiones matemáticas sobre la derivada, donde se evidenciaron conexiones de significado, representaciones diferentes, parte-todo, metafórica, modelado, reversibilidad, implicación y característica.

Palabras clave. Networking of theories; Conexiones matemáticas; Enfoque ontosemiótico, función semiótica; derivada; profesor; estudiantes.

Abstract

In research in Mathematics Education, models have been reported to analyze mathematical connections in which specific connection categories are considered. In the literature, it was identified that the most used model is the Businskas with contributions from other researchers. However, the problem refers to the fact that some categories of connections limit the analysis of mathematical activity and, therefore, the research suggests that the established categories are validated and, if possible, new categories of connections are reported. Other investigations focused on exploring mathematical connections and understanding the derivative reveal that high school students, pre-service teachers, and some in-service mathematics teachers have difficulty connecting multiple representations of the derivative (e.g., algebraic, or symbolic, verbal, graphic, tabular) and establish connections between partial meanings about this concept.

To address this problem, the general objective was proposed: to develop a networking of theories from two perspectives (the Theory of mathematical connections and the OSA) on the mathematical activity involved in the mathematical connection processes necessary to solve derivative problems, which is specified in the following objectives: 1) to identify the categories of mathematical connections that an Extended Theory of Connections (ETC) should contemplate that allows synthesizing, encompassing and expanding the existing connection categories in the literature, 2) exploring the concordances and complementarities from the articulation between the ETC and the OSA for a more detailed analysis of the mathematical connections, 3) characterize the mathematical connections that university students establish when solving problems in the derivative context through the combined use of the ETC and the OSA, 4) explain why students find it difficult to establish certain mathematical connections that are key to solving tasks on derivatives based on the combined use of ETC and OSA. The work was based on the theory of mathematical connections that proposes a definition of connection and its categories of extra-mathematical and intra-mathematical connections, some tools of the Onto-semiotic approach and the methodological theoretical foundation to make networking of theories.

To achieve the objectives, the research was developed based on a qualitative methodology in three stages: In stage 1, the research participants who were a teacher and his students were selected. Subsequently, in stage 2 the data were collected through two collection methods implemented in two moments. In the first moment (MR1), a non-participant observation was made to seven classes taught by the teacher, interacting with their students on the notion of derivative. In the second moment (MR2), semi-structured interviews were conducted with the students when they solved seven tasks in the context of the derivative. In stage three, the data were analyzed considering two moments of analysis (MA1 and MA2) corresponding to each of the collection moments of stage 2 (MR1 and MR2) respectively. In the results, the emergence of the Extended Theory of Connections was initially presented, where it was considered the first moment of analysis (MA1) based on a deductive thematic analysis, taking as previous categories the proposals in the expanded Businskas model with the contributions from other researchers (nine types of a priori connections). In this analysis, two levels of ambiguities were recognized and for this reason the new category of metaphorical connection emerged for the conformation of the ETC.

Subsequently, in the second moment of analysis (MA2), the theoretical networking strategies proposed by Prediger et al. (2008) between the ETC and the OSA, achieving concordances between both theories, which understand the mathematical connection as the tip of an iceberg made up of a conglomerate of practices, processes, primary objects activated in these practices and related through semiotic functions (SFs), which enables a deep analysis that details the structure and operation of the connection. Finally, the thematic analysis suggested by the ETC and the model for the analysis of mathematical activity proposed by the OSA were used to characterize the mathematical connections on the derivative, where connections of meaning, different representations, part-whole, metaphorical, modeling, reversibility, implication and feature were evidenced.

Keywords. Networking of theories; Mathematical connections; Onto-semiotic approach; semiotic function; derivative; teacher; students.

Introducción

El establecimiento de conexiones matemáticas entre conceptos, procedimientos, representaciones, etc., es importante, porque contribuye a que los estudiantes comprendan conceptos matemáticos y los usen adecuadamente, así como organizar su conocimiento y para dar argumentos que les permitan explicar por qué algunos hechos son consecuencias de otros (National Research Council [NRC], 2001). En esta línea, muchos investigadores coinciden en que las conexiones matemáticas favorecen, entre otros aspectos, la integración de conocimientos y la interdisciplinariedad (Hiebert y Carpenter, 1992; Koestler, Felton, Bieda y Otten, 2013; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; 2014; Sari, Sudirman y Chandra, 2018; García-García, 2019; Zengin, 2019). Según Alsina (2014),

> las conexiones matemáticas se refieren a: las relaciones entre los diferentes bloques de contenido matemático y entre los contenidos y los procesos matemáticos (intradisciplinariedad); las relaciones de las matemáticas con otras áreas de conocimiento (interdisciplinariedad); y las relaciones de las matemáticas con el entorno que nos rodea (enfoque globalizado) (p. 14).

En particular, los principios y estándares del NCTM (2000) consideran el proceso de conexión, que es entendido como aquel que permite conectar diferentes contenidos matemáticos entre sí y también conectar las matemáticas con contextos extramatemáticos, como un aspecto clave para la comprensión de las matemáticas "cuando un estudiante conecta ideas matemáticas, su comprensión es más profunda. Pueden ver conexiones matemáticas en la rica interacción entre temas matemáticos, en contextos que relacionan las matemáticas con otras materias, y en sus propios intereses y experiencia" (NCTM, 2014, p. 64).

Este interés por las conexiones matemáticas ha llevado a la aparición de una agenda de investigación cuyo objetivo es explorar las conexiones en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en distintos niveles escolares (Campo-Meneses y García-García, 2020; Dolores-Flores y García-García, 2017; Kenedi et al., 2019). Especialmente los estudios sobre conexiones y derivadas manifiestan que los estudiantes tienen mejor comprensión de este concepto cuando realizan conexiones entre representaciones diferentes, significados, características, entre otras (García-García y Dolores-Flores, 2019; Rodríguez-

Nieto, Rodríguez-Vásquez y García-García, 2021).

Otras investigaciones se han centrado en las dificultades que manifiestan los estudiantes al resolver tareas que involucran la derivada y/o en explorar la comprensión matemática que estos logran; y su conclusión es que las dificultades en estudiantes y profesores se relaciona con *conectar* diferentes representaciones del concepto derivada, así como en establecer la reversibilidad entre los diferentes órdenes de la derivada y con la función original (Fuentealba, Badillo y Sánchez-Matamoros, 2019). Por lo tanto, se podría considerar que este tipo de conexiones mencionadas son las más relevantes para explicar las dificultades de los alumnos y su comprensión, o, dicho de otra manera, serían unas conexiones de más calidad que otras que también pueden emerger en la resolución de una tarea.

La literatura revisada, desde distintos enfoques teóricos sobre conexiones (Evitts, 2004; Businskas, 2008; Lapp, Nyman y Berry, 2010; Eli et al., 2011; García-García y Dolores-Flores, 2018; 2019) dejan ver que, no solo es importante investigar sobre conexiones matemáticas con fenómenos empíricos sino las conexiones o redes entre teorías, lo cual permite mejorar la comprensión y análisis de los fenómenos estudiados (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2014; Radford, 2008). Particularmente, en esta investigación se considera el EOS porque es un enfoque creado con el fin de articular teorías y también, asume importante el establecimiento de conexiones en términos de FSs. De hecho, García-García (2019) enfatiza que, en la teoría de las conexiones matemáticas, las categorías de conexiones se deben validar, refinar e incluir unas nuevas categorías si se requieren. Esta valoración de las conexiones se considera un problema de interés teórico y práctico suficientemente relevante para ser investigado, por esa razón, en esta investigación el objetivo es desarrollar un networking de teorías de dos perspectivas (la Teoría de las conexiones matemáticas y el EOS) sobre la actividad matemática involucrada en los procesos de conexión matemática necesarios para resolver problemas de derivadas, para dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿De qué manera la aplicación de los constructos ontosemióticos complementan el análisis, desde una perspectiva cognitiva, de los procesos de conexión matemática necesarios para resolver problemas de derivadas?

Esta pregunta se concreta en las siguientes preguntas más específicas:

P1: ¿Qué categorías de conexiones debe contemplar una Teoría Ampliada de las Conexiones (TAC) que permita sintetizar, englobar y ampliar las categorías de conexiones existentes en la literatura?

P2: ¿Qué concordancias y complementariedades existen entre TAC y EOS acerca de las conexiones, que permitan un análisis más detallado de las conexiones matemáticas?

P3: ¿Cómo caracterizar, mediante el uso combinado de la TAC y el EOS, las conexiones matemáticas que establecen los estudiantes universitarios al resolver problemas usando la derivada?

P4: ¿Cómo el uso de las complementariedades entre la TAC y el EOS permite explicar por qué los estudiantes tienen dificultades para establecer determinadas conexiones matemáticas que son clave para la resolución de problemas sobre derivadas?

Se proponen las preguntas de investigación, porque se han identificado problemáticas relacionadas con la necesidad de detallar las categorías de conexiones matemáticas a la luz de la articulación de marcos teóricos para enriquecer la teoría de las conexiones a partir de las complementariedades y concordancias, donde el contexto sobre la derivada tiene lugar por las dificultades que presentan los estudiantes universitarios sobre este concepto. Por tal motivo, esta investigación tiene dos intereses, uno teórico referido a la ampliación del modelo de conexiones y el otro empírico ligado al estudio de las conexiones sobre la derivada en un aula de clases que involucra al profesor y sus estudiantes.

Por otra parte, esta tesis doctoral se constituye por cinco capítulos. En el *Capítulo 1* se muestra un estado actual de las investigaciones sobre conexiones matemáticas, que se han clasificado en las investigaciones enfocadas en las conexiones en diferentes niveles educativos, investigaciones que han aportado tipologías de conexiones matemáticas al campo de la investigación en Educación Matemática, investigaciones sobre Networking of theories o redes teóricas y, por último, se muestran las preguntas y objetivos de la investigación.

En el *Capítulo 2* se presenta el marco teórico que fundamenta esta investigación, donde se describe la teoría de las conexiones matemáticas y su tipología de conexiones, algunas herramientas teóricas del EOS, las bases conceptuales y metodológicas de la creación de redes teóricas y luego, se muestra el concepto de derivada enfatizando en su significado y en las representaciones diferentes.

En el *Capítulo 3* se presenta la ruta metodológica de la investigación enmarcada en tres etapas como la selección de los participantes del estudio que fue guiado por la problemática de frontera identificada en la revisión de la literatura, la segunda etapa se refirió a la recolección de los datos realizada en dos momentos: 1) observación no participante a un profesor de matemáticas y sus estudiantes de primer año de licenciatura en Matemáticas, y 2) se diseñó un cuestionario, el cual fue aplicado a los estudiantes y, simultáneamente se realizaron entrevistas semiestructuradas de manera individual. En la tercera etapa se describieron los métodos de análisis como el análisis temático y el análisis de la actividad matemática.

En el *Capítulo 4* se presenta detalladamente el análisis de datos y los resultados de la investigación que dan respuesta a las preguntas formuladas. Por ejemplo, se muestra el surgimiento de la Teoría Ampliada de las Conexiones y la nueva categoría de conexión metafórica; el networking de teoría que muestra la concordancias y complementariedades entre la TAC y el EOS; se caracterizan las conexiones matemáticas establecidas por los estudiantes universitarios en tareas relacionadas con la derivada, considerando que una conexión está conformada por prácticas, procesos, objetos y funciones semióticas que los relacionan. Por último, se presenta una reflexión sobre las conexiones que no realizan los estudiantes, que son las causas de las dificultades para resolver problema y, por ende, comprender la derivada.

Por último, en el *Capítulo 5* se presenta la discusión que gira en torno a la importancia de la incorporación de la nueva categoría de conexión metafórica y la ampliación de la teoría de las conexiones (TAC). Asimismo, se reflexiona sobre la contribución del networking entre la TAC y el EOS para el análisis de las conexiones. Posteriormente, se discute con la literatura especializada sobre las conexiones y comprensión de la derivada para dar a conocer el aporte de esta investigación. Finalmente, se concluye mencionando futuras investigaciones y los productos de esta tesis doctoral al conocimiento científico en Educación Matemática.

Capítulo 1

Planteamiento del problema

1.1. Estado actual de la investigación sobre conexiones matemáticas

Para diversos autores y organismos curriculares, las conexiones matemáticas son importantes para que los estudiantes comprendan conceptos matemáticos en distintos niveles educativos (Association of Mathematics Teacher Educators [AMTE], 2017; Koestler *et al*., 2013; Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006; NCTM, 2000), dado que permiten relacionar significados, representaciones, proposiciones, situaciones cotidianas con las matemáticas institucionalizadas (García-García y Dolores-Flores, 2018; Hiebert y Carpenter, 1992; Kaur y Lam, 2012; Novo, Berciano y Alsina, 2019; Rodríguez-Nieto, 2020; Rodríguez-Nieto *et al*., 2021; Rodríguez-Nieto, Rodríguez-Vásquez, Font y Morales-Carballo, en prensa; Rodríguez-Vásquez y Arenas-Peñaloza, 2021; Sugiman, 2008; Wittmann, 2021; Zengin, 2019; Zohar, 2006). En particular, las conexiones se tuvieron en cuenta en los estándares y principios del NCTM (2000) ya que en esta propuesta se afirma que "cuando los estudiantes pueden conectar ideas matemáticas, su comprensión es más profunda y duradera. Pueden ver conexiones matemáticas en la rica interacción entre temas matemáticos, en contextos que relacionan las matemáticas con otras materias" (p. 64).

En esta línea, Pambudi, Budayasa y Lukito (2018) afirmaron que "las conexiones matemáticas tienen una estrecha relación con la 'resolución de problemas', donde la capacidad de los estudiantes para conectar ideas matemáticas determinará el éxito de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos" (p. 74). Estudios como este evidencian que para resolver problemas es importante realizar determinadas conexiones matemáticas; de hecho, las conexiones surgen cuando los estudiantes o docentes resuelven tareas y se pueden identificar en las hojas de trabajo, en argumentos orales o mímicos (García-García y Dolores-Flores, 2018), y aparecen en el plan de estudios.

En el currículo de diferentes países las conexiones matemáticas juegan un papel relevante, por ejemplo, se consideran una competencia básica para que los estudiantes resuelvan problemas, establezcan relaciones entre ideas matemáticas, entre conocimientos previos y nuevos conocimientos como se evidencia en el currículo de enseñanza Secundaria de Cataluña (Departament d'Ensenyament, 2017), en Colombia (MEN, 2006), en Singapur (Ministry of Education [MOE], 2006a;2006b), en Sudáfrica (Mwakapenda, 2008), en los Estados Unidos de América (NCTM, 2000); en Turquía (Özgen, 2013), en Brasil (São Paulo State, 2012). Particularmente en el currículum mexicano, que es el país donde se desarrolla esta investigación, la Dirección General de Bachillerato (DGB, 2018) propone que en el desarrollo del contenido de la derivada se deben tener fórmulas de derivación, teoremas, criterios máximos y mínimos aplicado en la solución de situaciones reales o de la vida cotidiana, evidenciando implícitamente las conexiones intramatemáticas y extramatemáticas. Asimismo, el Currículo de Matemáticas de nivel superior de la Universidad Autónoma de Guerrero [UAGro] (2009; 2020) sugiere que se promuevan diferentes significados e interpretaciones de la derivada (velocidad, tangente, tasa de cambio y la definición formal de la derivada), además de resolver problemas de aplicación, dando a entender que se deben promover las conexiones matemáticas.

Así como las conexiones matemáticas en el currículo son importantes, también son de interés en el campo de investigación en Educación Matemática, por ejemplo, Rodríguez-Nieto (2020) muestra el papel de las conexiones internas, externas y de significado en los sistemas de medición en las prácticas diarias desde un punto de vista etnomatemático. En esta misma línea, Rodríguez-Nieto (2021) considera que una conexión etnomatemática es la relación entre los conocimientos matemáticos de las personas que emergen en las prácticas cotidianas con los conceptos matemáticos institucionalizados. Además, en varias investigaciones se han reportado tipologías de conexiones matemáticas que han emergido de análisis de datos cualitativos y cuantitativos, en especial el análisis temático.

1.1.1. Las conexiones matemáticas en distintos niveles educativos

En los diferentes niveles escolares establecidos por todas las instituciones a nivel mundial, las conexiones son importantes. Por ejemplo, en Educación primaria se considera fundamental que los alumnos establezcan conexiones matemáticas. Al respecto, Frías y Castro (2007) investigaron acerca de la influencia de las conexiones en la representación simbólica de problemas aritméticos de dos pasos o etapas con estudiantes de quinto y sexto de primaria. Sus resultados evidenciaron que los nodos o conexiones influyen en la resolución de los problemas aritméticos de dos etapas, por ejemplo, este tipo de problemas son difíciles de trasladar del enunciado verbal a la expresión matemática.

Barmby, Harries, Higgins y Suggate (2009) adoptaron un modelo de razonamiento representacional enfatizando en la representación de la matriz en la multiplicación donde la comprensión se entiende como las conexiones que se hacen entre las representaciones mentales de los conceptos, y el razonamiento une las diferentes partes de la comprensión. Los resultados mostraron que los niños realizaron cálculos de multiplicación con el uso de matrices. Por su parte. Kenedi et al. (2019) afirmaron que:

> La capacidad de los estudiantes para conectarse matemáticamente es una de las cosas esenciales que deben lograr los estudiantes en el proceso de aprendizaje porque si los estudiantes conocen la relación entre los conceptos, comprenderán rápidamente las matemáticas en sí y abrirán oportunidades para que los estudiantes desarrollen sus habilidades matemáticas (p. 70).

McMillan (2018) trabajó con estudiantes de quinto grado de primaria de una escuela pública del sur de California, dado que estos estudiantes no tienen la oportunidad de desarrollar su propio pensamiento para conectar ideas matemáticas relacionadas con el campo multiplicativo desde la escuela primaria hasta la secundaria. De hecho, la investigación dentro del campo multiplicativo se ha centrado principalmente en las matemáticas y no lo suficiente en las conexiones dentro del pensamiento matemático de los estudiantes. Sus hallazgos revelaron que los estudiantes mejoraron su comprensión de las propiedades matemáticas desde la planificación implícita a explícita hasta la planificación intencionada del uso de las propiedades distributivas y asociativas de la multiplicación y conectaron las soluciones con representaciones gráficas.

En educación secundaria y en el preuniversitario, se han realizado trabajos de investigación sobre conexiones matemáticas con estudiantes enfocados en diferentes conceptos matemáticos. Por ejemplo, ante las dificultades de los estudiantes para explicar su razonamiento, comprender conceptos matemáticos y desarrollar sus significados, Haltiwanger y Simpson (2013) investigaron sobre la preocupación de los profesores por ayudar a sus estudiantes a explicar sus maneras de pensar, utilizando herramientas que fortalecieran la escritura matemática. Sus resultados revelaron la comunicación y organización del pensamiento, porque la escritura ayudó a ver las matemáticas como conceptos interconectados, ayudándolos a establecer conexiones entre el contenido del aula y las situaciones de la vida real. Adu-Gyamfi, Bossé y Chandler (2016) se centraron en cómo los estudiantes de precálculo de una escuela del suroeste de Estados Unidos de América hacen conexiones matemáticas cuando resuelven tareas que involucran representaciones gráficas y algebraicas de funciones polinomiales.

Kayhan, Yalvaç y Yeltekin (2017) en sus resultados mostraron que la habilidad de los estudiantes de octavo grado para conectar las matemáticas con la vida real no está en un nivel suficiente, y, observaron que la mayoría de los estudiantes solo pueden relacionar las matemáticas en la vida real con números y formas. Safi y Desai (2017) enfatizaron en la importancia de explorar representaciones algebraicas y geométricas para reforzar y mejorar la coherencia de las matemáticas y resaltar el papel que los manipuladores como bloques 2D y 3D pueden jugar en la conexión de múltiples representaciones de los estudiantes de secundaria. Lianawati y Purwasih (2018) en su investigación reportaron que, la comprensión de la capacidad de conexión matemática se basa en el concepto de "construcción sociocultural" y su diferencia radica en la perspectiva de género, dado que, los hombres hacen mejores conexiones entre conceptos matemáticos básicos, pero, los autores sostienen que en las mujeres influyen roles, deberes y otros factores socioculturales.

En el contexto de la resolución de problemas verbales, Sari, Surdiman y Chandra (2018) describieron las conexiones matemáticas (modelado, entre conceptos y procedimental) de un estudiante de secundaria cuando resolvió problemas. Los autores concluyeron que, “el proceso de conexión matemática se demuestra por la capacidad de los estudiantes para traducir el problema en modelos matemáticos y conectar conceptos y procedimientos matemáticos” (p. 715). Pambudi et al. (2020) investigaron acerca de las conexiones matemáticas y la comprensión de estudiantes de octavo grado de una escuela secundaria en Jember, Indonesia en la resolución de problemas matemáticos relacionados con la geometría y la aritmética social con el contexto de la venta de terrenos y el costo de cercados. En sus resultados reportaron que aquellos estudiantes que resolvieron adecuadamente los problemas, es porque tienen buenas habilidades de conexión matemática, mientras que otros no tuvieron éxito por las deficientes habilidades de conexiones.

Rohmah, Kusmayadi y Fitriana (2020) en su estudio reportaron que la mayoría de los estudiantes de octavo grado tienen habilidades de conexiones matemáticas y presentan alta resiliencia dado que establecieron relaciones entre ideas matemáticas y la aplicación de un contenido matemático a otro contenido matemático (hacer conexiones matemáticas). Mientras que otros estudiantes no pudieron recuperase y proceder exitosamente (baja resiliencia) y las principales causas de este rendimiento son: 1) la comprensión deficiente de los conceptos de las preguntas dadas 2) la falta de conocimiento sobre la materia que se evalúa, 3) no poder modelar problemas de historias en modelos matemáticos y no poder realizar procedimientos matemáticos.

Es oportuno mencionar que esta investigación se ha desarrollado en el contexto mexicano, donde se han realizado varias investigaciones sobre conexiones matemáticas con estudiantes del preuniversitario, entre las que se destacan García-García y Dolores-Flores (2018) quienes exploraron las conexiones intramatemáticas en el contexto de la resolución de problemas de Cálculo, donde identificaron doscientos veintitrés conexiones matemáticas que corresponden a representaciones diferentes, procedimental, significado, característica y, por último, la conexión de reversibilidad que contribuyen a la comprensión de conceptos. García-García y Dolores-Flores (2019) identificaron las conexiones matemáticas cuando los estudiantes dibujaban la gráfica de la derivada y la antiderivada, donde los estudiantes usaron la visualización para resolver tareas gráficas.

En García-García y Dolores-Flores (2020) se reconocieron las conexiones matemáticas en la resolución de problemas de aplicación (que involucran a la derivada y a la integral) por estudiantes del preuniversitario. En este mismo contexto, Dolores-Flores, Rivera-López y García-García (2019) investigaron las conexiones matemáticas que hicieron treinta y tres estudiantes en la resolución de tareas sobre la razón de cambio. En sus resultados evidenciaron que algunos estudiantes consideraron la pendiente como un concepto desconectado de otros conceptos como la velocidad, rapidez y aceleración.

Por otra parte, se presentan investigaciones sobre conexiones matemáticas con estudiantes universitarios, por ejemplo, Dolores-Flores y García-García (2017) reportaron las conexiones que un grupo de estudiantes universitarios establecen al resolver problemas en contexto, evidenciándose conexiones extramatemáticas (modelado) e intramatemáticas de representaciones diferentes, procedimental, parte-todo. También, los estudiantes usaron la relación entre la derivada y la integral establecida en el Teorema Fundamental del Cálculo.

En relación con las investigaciones sobre conexiones realizadas con futuros profesores, Eli et al. (2011) argumentaron que los futuros profesores tienen dificultades para enseñar conceptos geométricos, debido a la falta de conexiones entre dominios matemáticos, por ejemplo, relacionando el área del círculo en su representación simbólica con la representación gráfica de una curva y en particular, la mayoría de los futuros profesores no hicieron conexiones entre diferentes representaciones de una función (algebraica/geométrica). Eli, Mohr-Schroeder y Lee (2013) examinaron el conocimiento matemático de los futuros maestros de grados intermedios para la enseñanza de la geometría y las conexiones realizadas al completar tareas de clasificación de tarjetas abiertas y cerradas. Los autores encontraron que el conocimiento matemático de los futuros profesores para enseñar geometría estaba por debajo del promedio, y, las conexiones curriculares (relacionar ideas o conceptos en términos de impacto en el currículo) realizadas tuvieron un impacto positivo para la enseñanza de la geometría.

Moon et al. (2013) afirmaron que los futuros profesores de secundaria tienen dificultades cognitivas en el tema de las curvas cónicas (es decir, conexión cartesiana, gráfica como lugar geométrico de puntos), lo cual los limita para hacer conexiones entre representaciones. Özgen (2013) identificó las conexiones matemáticas en las producciones escritas de futuros profesores de matemáticas en la resolución de problemas no rutinarios. Encontró que las habilidades de conexión de los profesores en formación no están al nivel adecuado y fueron limitaciones de muchas formas en el contexto de la resolución de problemas, por la falta de conexiones entre otras disciplinas y en el mundo real.

Pirasa (2016) examinó los conceptos geométricos que dieron los futuros profesores de matemáticas junto con su capacidad de hacer conexiones matemáticas, donde los futuros profesores en su mayoría dieron ejemplos de lo que habían aprendido desde la escuela primaria y de los términos que usaban en las lecciones frecuentemente. Se concluyó que los ejemplos dados por los profesores son insuficientes, porque no poseen conocimientos adecuados en el campo de la geometría y bajos niveles de conexiones con la vida cotidiana. En un contexto geométrico, Caviedes, De Gamboa y Badillo (2019) indagaron acerca de las manifestaciones del área asociadas al cálculo de superficies planas, realizadas por maestros en formación o futuros profesores. Encontraron que los futuros profesores privilegian el uso de procedimientos numéricos y el uso de fórmulas, dejando de lado algunos procedimientos geométricos importantes e intuitivos que facilitarían la cuantificación del área de superficies planas.

Ante la afirmación "después de que los futuros profesores presentaron múltiples estrategias de solución, ¿Qué sigue?", Gil, Zamudio-Orozco y King (2019) identificaron tres tipos de conexiones hechas por los futuros profesores (conexiones de conocimiento superficiales, conexiones de conocimiento procedimentales y conexiones de conocimiento conceptual), y, en sus respuestas, los autores identificaron una disminución en la cantidad de conexiones de conocimientos superficiales y un aumento en la cantidad de conexiones de conocimientos procedimentales y conexiones de conocimientos conceptuales. Otro trabajo se enfocó en las conexiones con GeoGebra, por ejemplo, Zengin (2019) concluyó que este software podría usarse como una herramienta importante para el desarrollo de habilidades de conexión matemática, dado que les permitió a los futuros profesores hacer conexiones entre conceptos geométricos como área y volumen de sólidos de revolución, gráficas de funciones trigonométricas y generalmente, pudieron establecer conexiones entre las representaciones concretas y abstractas de los conceptos.

Yavuz-Mumcu (2018) exploraron las habilidades de conexión matemática de futuros profesores de Turquía, cuyos resultados indicaron que la mayoría de los futuros profesores conservan algunos conocimientos aprendidos de los libros de texto con respecto al concepto de derivada, pero no pueden comprenderlos y utilizarlos en situaciones problemas y para una comprensión más significativa y relacional de las matemáticas, de hecho, en menor frecuencia hacen conexiones entre representaciones diferentes acerca de la derivada. El autor sugiere que los profesores de matemáticas deberían enfocarse en la comprensión conceptual e incluir actividades y prácticas que permitan que los conceptos se aprendan de manera significativa y en conexión con la vida real en sus clases.

Rodríguez-Nieto et al. (2021) identificaron que los futuros profesores de matemáticas hicieron conexiones de significado, procedimental, característica, implicación y representaciones diferentes cuando resolvieron tareas sobre la derivada. Sin embargo, algunos futuros profesores conciben a la derivada como la recta tangente y no hacen énfasis en la pendiente de dicha recta, lo cual los conduce a hacer procedimientos desconectados y dificultades para graficar. Otros estudiantes emplean equívocamente la fórmula punto pendiente (e.g., $y + y_1 = m(x - x_1)$) cuando desean hallar la ecuación de la recta tangente.

Así como es importante que los estudiantes hagan conexiones matemáticas, los profesores también deben promoverlas, por lo cual, las conexiones matemáticas se logran cuando los profesores son capaces de proporcionar a los estudiantes oportunidades para resolver situaciones cotidianas donde experimenten relaciones entre las matemáticas y otras asignaturas (Kaur y Lam, 2012; Özgen, 2013; NCTM, 2000). Para que esto se logre, es necesario establecer relaciones entre el conocimiento conceptual, procedimientos y representaciones equivalentes de conceptos matemáticos (Coxford, 1995). En este sentido, sin la comprensión de los conceptos matemáticos y su funcionalidad, los profesores podrían carecer de la adecuada preparación para involucrar a sus estudiantes a hacer conexiones matemáticas, en el razonamiento y en la resolución de problemas (Eli *et al*., 2013). Específicamente, el NCTM (2000) reporta que, en el contexto de las unidades de medida, conversiones, cálculos y procedimientos algebraicos, “los profesores deben ayudar a los estudiantes a ver las conexiones entre la fórmula y el objeto real” (p. 46).

Diversas investigaciones se han centrado en las conexiones que hacen los profesores de matemáticas. Al respecto, Businskas (2008) analizó las conexiones realizadas por profesores de secundaria en la resolución de tareas que implican a la ecuación y función cuadrática. Además, destacó que las repuestas de los profesores fueron analizadas a partir de un modelo que construyó con cinco tipos de conexiones: representaciones diferentes, implicación, parte-todo, procedimental y conexiones orientadas a la instrucción, donde se encontró que los profesores se refirieron a la enseñanza de las matemáticas y consideraron que las matemáticas son una red de conceptos interconectados. Asimismo, Businskas afirmó que una conexión matemática es una relación verdadera entre dos ideas matemáticas. Sin embargo, sería importante reflexionar acerca de aquellas conexiones que no son verdaderas.

Asimismo, en Mhlolo (2012) se indagó acerca de la calidad de las conexiones matemáticas que hacen profesores, enfocados especialmente en las conexiones de representaciones diferentes, quienes propusieron una herramienta para analizar las conexiones en función de tres niveles: cuando el sujeto hace procedimientos incorrectos y no hay conexión matemática (nivel 0), cuando el sujeto hace conexiones matemáticas, pero superficial o rutinariamente algorítmica, sin ninguna explicación o justificación adicional (nivel 1), y cuando el sujeto establece conexiones matemáticas y justifica matemáticamente consistentemente sus respuestas se encuentra en el nivel 2. Con base en la herramienta sobre la calidad de conexiones y las representaciones diferentes vistas desde Businskas (2008), en el estudio de Mhlolo, Venkat y Schäfer (2012) se reportó que los profesores establecieron conexiones matemáticas sobre un tema de álgebra y algunos hicieron representaciones defectuosas o superficiales ubicadas en el nivel 0 y 1 en su mayoría.

Después de conocer estudios que exploran las conexiones en distintos niveles educativos (e.g., Kayhan *et al*., 2017; Kenedi *et al*., 2019; McMillan, 2018; Rodríguez-Nieto *et al*., 2021; Zengin, 2019), también, es importante conocer que en estos trabajos se abordan diferentes conceptos matemáticos, por ejemplo, sobre problemas aritméticos que involucran a la adición, la sustracción, la multiplicación y la división (Frías y Castro, 2007), acerca de funciones polinomiales y sus gráficas (e.g., Adu-Gyamfi *et al*., 2016), sobre la razón de cambio (e.g., Dolores-Flores *et al*., 2019), derivada e integral (e.g., García-García y Dolores-Flores, 2018; 2019; 2020), entre otros, donde los estudiantes presentan dificultades para conectar las matemáticas con la vida cotidiana, conciben la pendiente como un concepto desconectado de otros conceptos como la velocidad, rapidez y aceleración, por ejemplo, algunos futuros profesores tienen dificultades para conectar los registros analíticos y gráficos, lo cual es la principal causa para no comprender conceptos geométricos, entre otros.

Particularmente los estudios sobre el concepto de derivada que es de interés en esta investigación, algunos trabajos han identificado las conexiones de estudiantes en el contexto de la derivada y la integral (García-García y Dolores-Flores, 2018; 2019; 2020) y conexiones en la resolución de problemas sobre la razón de cambio (Dolores-Flores *et al*., 2019). En el nivel universitario, los estudiantes de licenciatura en matemáticas hacen conexiones intra y extramatemáticas en problemas de Cálculo (Dolores-Flores y García-García, 2017). Por su parte, Yavuz-Mumcu (2018) estudió las conexiones matemáticas que hacen los futuros profesores sobre la derivada. En Rodríguez-Nieto et al. (2021) algunos futuros profesores presentaron algunas dificultades para hallar la ecuación de la recta tangente, producto del significado inadecuado que tienen de la derivada.

Es importante resaltar que el foco principal en otras investigaciones no son las conexiones matemáticas sobre la derivada, sino la comprensión de este concepto. Sin embargo, cabe señalar que estas investigaciones han reportado que muchos estudiantes de bachillerato, universitarios, futuros profesores (y algunos profesores en servicio) tienen dificultades para establecer conexiones o relaciones entre las diferentes representaciones de la derivada (Badillo, 2003; Badillo, Azcárate y Font, 2011; Borji, Font, Alamolhodaei, y Sánchez, 2018; Font, 2000; Fuentealba *et al*., 2019; Fuentealba *et al*., 2018; Hashemi, Abu, Kashefi y Rahimi, 2014; Pino-Fan, Godino, & Font, 2015; 2018; Pino-Fan, Guzmán, Font y Duval, 2017; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2015; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008; Sari *et al*., 2018), y entre los significados parciales del concepto de derivada (Fuentealba *et al*., 2019; Fuentealba *et al*., 2015; Pino-Fan *et al*., 2015; 2018). Por ejemplo, Pino-Fan et al. (2018) afirman que, algunos futuros profesores no conectan significados de la derivada tales como: la tasa de cambio de y con respecto a x es cero en aquellos puntos donde la recta tangente de la función es horizontal.

Ahora bien, sobre la gráfica de la derivada, Berry y Nyman (2006) y Ubuz (2007) reportaron que los estudiantes tienen dificultades para conectar la representación gráfica de la función y la de su derivada. De hecho, Ubuz (2007), consideró que era difícil para los estudiantes utilizar la información gráfica para dar sentido a las representaciones simbólicas. Además, los estudiantes no comprenden la derivada porque tienen dificultades para relacionar tanto el crecimiento como la disminución de f y el signo de f' y f'' y trabajan más con información gráfica y el significado analítico puntual de la derivada (Fuentealba *et al*., 2018; Fuentealba, *et al*., 2018; 2019).

Por su parte, Nemirovsky y Rubin (1992) reconocieron que muchos estudiantes dibujan la gráfica de f' similar a la gráfica de f. Asimismo, Nemirovsky y Rubin (1992) y Oehrtman, Carlson y Thompson (2009) coinciden en que los estudiantes no consideran la relación lógica entre la función y su derivada y viceversa en un contexto gráfico. Ferrini-Mundy y Graham (1994) identificaron que los estudiantes desean hallar la ecuación de una función cuando se les da solo gráficamente, y, de manera similar lo reportaron García-García y Dolores-Flores

(2019) quienes evidenciaron que los estudiantes del preuniversitario necesitan la expresión algebraica de la función para hacer una representación gráfica de ella misma y de su derivada, de lo contrario no grafican. En este sentido, se considera que es un aspecto clave investigar sobre las conexiones matemáticas teniendo en cuenta las propiedades de los gráficos, como transitar de la representación gráfica de una función g al gráfico de la derivada g' (García-García y Dolores-Flores, 2020).

García-García y Dolores-Flores (2020) manifiestan que es un aspecto clave investigar sobre las conexiones matemáticas considerando las propiedades de los gráficos, por ejemplo, transitar de la representación gráfica de una función g al gráfico de la derivada g', pero también es importante invertir el proceso, debido a que genera mejor comprensión de los conceptos del Cálculo en su representación gráfica. Estos enfoques relacionales ayudan sustancialmente al aprendizaje basado en el establecimiento de conexiones, ya que son útiles para formar parte del panorama general del Cálculo y no enfatizar en el uso de algoritmos y reglas (Berry y Nyman, 2003).

1.1.2. Investigaciones que han aportado tipologías de conexiones matemáticas

En la literatura, en particular en algunos de los trabajos citados en el apartado anterior, se han propuesto modelos de tipologías de conexiones matemáticas (Evitts, 2004; Businskas, 2008; Lapp *et al*., 2010; Eli *et al*., 2011; García-García y Dolores-Flores, 2018; 2019). A continuación, se describen sintéticamente cada uno de ellos.

En el estudio exploratorio de Evitts (2004) se reconocieron cinco tipos de conexiones matemáticas establecidas por profesores cuando resolvieron problemas seleccionados de los planes curriculares (Ver Tabla 1). El autor reconoce que "el establecimiento de conexiones en el contexto de la resolución de problemas a partir de planes de estudio basados en estándares puede proporcionar información a otras personas interesadas en el pensamiento matemático, a los profesores y proponentes del cambio del plan de estudios y a los diseñadores de experiencias de profesores en formación" (p. 8).

Tabla 1. Síntesis de las categorías de conexiones matemáticas propuesto por Evitts.

Conexión	Descripción

Modelado	Vínculos entre las matemáticas y la vida real o la cotidianidad de los estudiantes.
Estructural	Se manifiesta cuando se reconoce la similitud de dos ideas o construcciones matemáticas.
Representación	Se establece cuando las relaciones matemáticas pueden ser representadas en formas gráficas, numéricas, simbólicas, pictóricas y verbales.
Procedimental-conceptual	Se identifica cuando se vinculan conceptos matemáticos con procedimientos, disminuyendo la percepción de las matemáticas como regla-orientada.
Entre conceptos matemáticos	Vincular distintos conceptos matemáticos, es decir, como un todo integrado.

Nota. Información retomada de Evitts (2004).

Posteriormente, se presentan las conexiones matemáticas propuestas en el modelo de Businskas (2008) (ver Tabla 2). Cabe destacar, que estas conexiones fueron identificadas después de un análisis de las transcripciones de entrevistas realizadas a profesores sobre conceptos de ecuación cuadrática.

Tabla 2. Síntesis de las categorías de conexiones matemáticas propuesto por Businskas.

Conexión	Descripción
Representaciones diferentes	El mismo concepto se representa de dos o más formas. Las representaciones alternativas son aquellas en diferentes modos de representación. Las representaciones equivalentes son aquellas en el mismo modo.
Implicación	Un concepto lleva a otro en forma lógica, SI..., ENTONCES. Esta conexión matemática indica una dependencia de un concepto con otro en forma lógica.

Relaciones Parte-todo	Un concepto está vinculado a otro en algún sentido de parte y todo. Las relaciones parte-todo incluyen ejemplos, inclusiones y generalizaciones.
Procedimental	Un procedimiento algorítmico está asociado con un concepto particular.
Orientada a la instrucción	Se manifiestan de dos formas principales. Primero, los maestros hicieron referencia general a la importancia de vincular el nuevo tema con el conocimiento previo de los estudiantes. A menudo, las conexiones específicas con el conocimiento previo podrían describirse como extensiones de lo que los estudiantes ya sabían. En segundo lugar, los grupos de conceptos y procedimientos matemáticos se vincularon como requisitos previos, conceptos, habilidades o vocabulario que los estudiantes deberían haber dominado antes de embarcarse en el nuevo tema.

Nota. Información retomada de Businskas (2008).

Seguidamente se muestran las categorías de conexiones matemáticas propuestas por Eli et al. (2011) que se presentan en la Tabla 3, las cuales emergieron en un análisis mixto (Card-Sort Activity), usando tarjetas y el método comparativo constante con una guía de codificación para proporcionar una descripción de cada uno de los cinco tipos de conexión matemática emergentes junto con ejemplos para cada tipo.

Tabla 3. Síntesis de las categorías de conexiones matemáticas propuesto por Eli et al. (2011).

Conexión	Descripción
Categóricas	Uso de características superficiales principalmente como base para definir un grupo o categoría.
Procedimiento	Relacionar ideas basadas en un procedimiento matemático o algoritmo posiblemente mediante la construcción de un ejemplo; puede incluir una descripción de la mecánica involucrada en la realización del

	procedimiento en lugar de las ideas matemáticas integradas en el procedimiento.
Característica/ propiedad	Definir características o describiendo las propiedades de los conceptos en términos de otros conceptos.
Derivación	Conocimiento de un concepto para construir o explicar otro concepto; incluido, entre otros, el reconocimiento de la existencia de una derivación.
Curricular	Relacionar ideas o conceptos en términos de impacto con el plan de estudios, incluido el orden en que uno enseñaría conceptos / temas.

Nota. Información retomada de Eli et al. (2011).

Por su parte, Lapp et al. (2010) propusieron cuatro categorías de conexiones que giran en torno a relaciones entre conceptos que verbalizaron los estudiantes en las entrevistas (ver Tabla 4).

Tabla 4. Síntesis de las categorías de conexiones entre conceptos propuestas por Lapp et al. (2010).

Conexión	Descripción
Computacional/ Procedimental	Toma la forma de algoritmos o procedimientos que se pueden aprender con poca comprensión de los conceptos.
Recurso	Caracterizado por utilidad para llegar a otro resultado. Esto es diferente de computacional / procesal en que esta categoría se refiere al uso de un concepto general en lugar de un algoritmo o procedimiento específico.
Figurativo	Este tipo de enlace se refiere al mismo concepto matemático en una forma representativa diferente.
Relacional	Este tipo de enlace se refiere a las conexiones de los estudiantes entre conceptos relacionados a través de propiedades, teoremas, definiciones o patrones de comportamiento.

Nota. Información retomada de Lapp et al. (2010).

Con base en la descripción de las tipologías de conexiones, se evidencia que todas comparten el tipo de conexión procedimental y solo los trabajos de Evitts (2004), Businskas (2008) y Lapp et al. (2010) consideran la categoría de conexión entre representaciones diferentes. Cabe resaltar que, el modelo de Lapp y colaboradores hace referencia a conexiones entre conceptos matemáticos, pero involucra algunos aspectos de los otros modelos, por ejemplo, las conexiones entre representaciones.

En cuanto a las conexiones matemáticas en Cálculo, García-García (2018; 2019), García-García y Dolores-Flores (2018; 2019) en los hallazgos teóricos de sus trabajos han propuesto y organizado tipologías de conexiones matemáticas que fueron confrontadas con las investigaciones de Evitts (2004), Businskas (2008) y Eli et al. (2011). En este sentido, García-García (2018; 2019) clasificó a las conexiones matemáticas en dos grandes tipologías: extramatemáticas e intramatemáticas (ver Figura 1a en la Figura 1), las cuales fueron reorganizadas por Campo-Meneses y García-García (2020) enfatizando en que las conexiones intramatemáticas también emergen de problemas de aplicación y solo las conexiones de modelado emergen cunado el sujeto resuelve problemas no matemáticos (ver Figura 1b en la Figura 1).

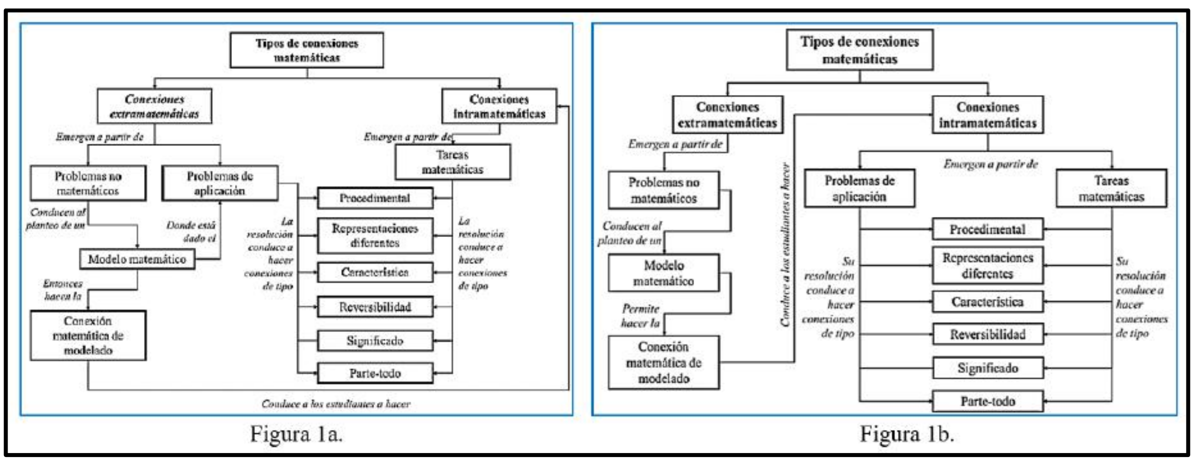


Figura 1. Tipología de conexiones matemáticas (Tomado de García-García (2018, p. 166) y Campo-Meneses y García-García (2020)).

Los tipos de conexiones matemáticas presentadas en la Figura 1, se explican en la sección de marco teórico, y, se puede afirmar que el modelo de García-García y Dolores-Flores (2018; 2019) es una ampliación del modelo de Businskas (2008).

Ahora bien, existen otros enfoques teóricos donde las conexiones matemáticas juegan un papel fundamental, por ejemplo, la Etnomatemática (Cortes y Orey, 2020; Rosa y Orey, 2020; D'Ambrosio, 2001; 2014; Rodríguez-Nieto, 2020; 2021), la teoría de la metáfora conceptual (Acevedo, 2008; Lakoff y Núñez, 2000; Font, Bolite y Acevedo, 2010), el enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007; 2019; Breda, Font y Pino-Fan, 2018; Rondero y Font, 2015) donde las conexiones matemáticas se conceptualizan en términos de FSs, entre otros. Desde otra perspectiva, en Educación Matemática son relevantes las conexiones entre marcos teóricos para analizar mejor fenómenos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Arzarello y Olivero 2006; Prediger, Bikner-Ahsbahs y Arzarello, 2008; Radford, 2008).

Con relación a las diferentes propuestas de categorías de conexiones hay que señalar que en algunos casos contemplan el mismo de tipo de conexión, en otros casos proponen diferentes tipos de conexiones e incluso hay autores que sugieren la necesidad de ampliar las categorías propuestas en función de los resultados empíricos de nuevas investigaciones. Ante esta situación, se considera relevante realizar una investigación que aporte una tipología de conexiones que permita sintetizar, englobar y ampliar las categorías de conexiones existentes en la literatura. Por ejemplo, en la investigación sobre Etnomatemática se han reconocido dos tipos de conexiones internas y externas para el análisis de prácticas cotidianas y sistemas de medidas (Rodríguez-Nieto, 2020).

En este contexto, una conexión interna se refiere a "las relaciones que hace un sujeto entre unidades de medidas (convencional o no convencional) de un mismo sistema de medida usado en una práctica cotidiana, considerando equivalencias y conversiones" (Rodríguez-Nieto, 2020, p. 12), y, las conexiones externas "se promueven cuando una unidad de medida (convencional o no convencional) es usada de manera similar en diferentes sistemas de medidas de prácticas cotidianas distintas" (Rodríguez-Nieto, 2020, p. 26). Las conexiones internas y externas dependen del significado y el uso que la persona le da a la unidad de medida en su práctica cotidiana (ver Figura 2).

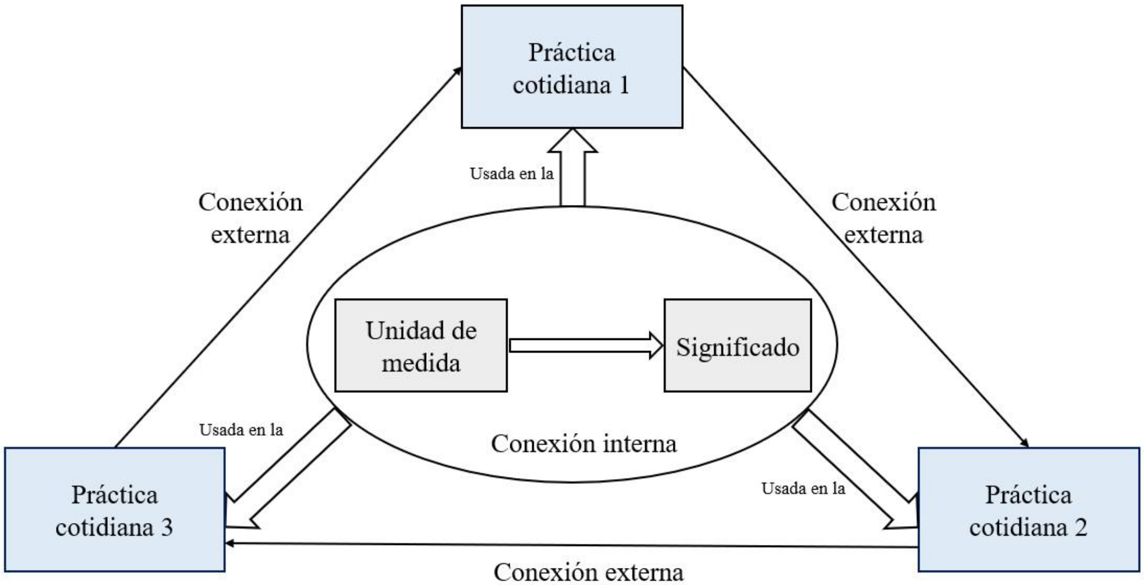


Figura 2. Modelo de conexiones internas y externas desde la Etnomatemática.

Por otra parte, si bien se han investigado las conexiones con los enfoques teóricos que acabamos de comentar, asimismo se han investigado con muchos otros marcos teóricos, por lo que también se considera relevante explorar qué tipo de concordancias son posibles entre las teorías de las conexiones propuestas hasta el momento con otros enfoques teóricos que se han interesado por investigar las conexiones en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

1.1.3. Investigaciones sobre Networking of theories

En la investigación en Educación Matemática se ha optado por el uso de marcos teóricos para analizar fenómenos o problemas de investigación de manera separada, así como el uso de dos o más marcos teóricos integrados para desarrollar una investigación. El interés por los procesos de integración de diferentes teorías se debe a dos complejidades, una es la de los objetos matemáticos y la otra su enseñanza y aprendizaje (Boero *et al*., 2002). Otra motivación para articular teorías es porque en varios casos los datos recolectados en una investigación se tornan complicados de analizar con una sola teoría (Arzarello y Olivero, 2006; Font, 2016).

Por su parte Radford (2008) propuso que las redes teóricas consisten en la diferenciación y complementariedad basada en una visión tripartita referida a los principios teóricos, metodologías y preguntas de investigación, las cuales han emergido y son necesarias para robustecer las colaboraciones entre investigadores a nivel internacional y generar estructuras de conocimiento tanto educativas como social, política, cultural, entre otras. A su vez se manifiesta el potencial de las conexiones teóricas que surgen de las limitaciones que puede presentar una teoría A y la complementariedad que le puede dar una teoría B y viceversa, o bien concordancias entre las dos teorías A y B para analizar fenómenos.

Prediger et al. (2008) muestran una discusión sobre la variedad de teorías en Educación matemática, sistematizando las estrategias y métodos para la creación de redes teóricas, que, de hecho, proponen que las estrategias de trabajo en red buscan reducir el número de teorías inconexas respetando su especificidad, principios y métodos. Además, propuso cuatro pares de estrategias para articular marcos (comprender otras teorías-comprender las teorías a usar; contrastar-comparar; coordinar-combinar; sintetizar-integración local) contenidas entre dos polos, la no relación de ignorar otras teorías y la unificación de teorías globalmente (ver esquema en la Figura 7 de la sección 2.3.). En este contexto, Bikner-Ahsbahs y Prediger (2010) caracterizaron cada par de estrategias de la siguiente manera:

> *El primer par* de estrategias en el panorama anterior describe que la comprensión mutua de las teorías es necesaria cuando los investigadores comienzan a practicar la creación de redes; *el segundo par* se enfoca en estrategias de comparación; *el tercer par* capta el paso que hay que dar hacia otras teorías al vincularlas; y *el cuarto* describe el equilibrio de las teorías reductoras integrando al menos partes de una teoría en otra y construyendo nuevas teorías que subsumen otras. Incluso si los investigadores desean integrar partes teóricas solo localmente en una nueva visión teórica, deben comprender profundamente las otras teorías antes de usar las estrategias de compararlas, contrastarlas, coordinarlas y combinarlas en el curso de la integración (p. 147).

Font, Malaspina, Giménez y Wilhelmi (2011) vincularon el EOS, la teoría APOE y Ciencia cognitiva de las Matemáticas (CSM) para un mejor uso de la noción de objeto dado que, estas teorías asumen elementos similares acerca de dicha noción. Además, concluyeron que las teorías APOE y CSM solo resaltan aspectos parciales de la complejidad y emergencia de los objetos matemáticos en las prácticas matemáticas, mientras que desde la perspectiva del EOS los objetos matemáticos permiten explicar dos aspectos: el primero es la emergencia de los objetos matemáticos primarios de las configuraciones construidas a través de prácticas y, la segunda es la muestra de la visión realista de las matemáticas en las aulas.

Por su parte, Kidron y Monaghan (2012) trabajaron sobre la complejidad del diálogo entre teorías, enfocándose en las dificultades y beneficios, dejando ver que las redes de teorías desarrollan más las teorías por los diálogos entre investigadores con visiones fundamentadas en distintas culturas científicas. Drijvers, Godino, Font y Trouche (2013) analizaron un episodio sobre el uso del álgebra computacional para el aprendizaje del concepto de parámetro con la teoría de la génesis instrumental (TGI) y el enfoque ontosemiótico (EOS). Encontraron que los enfoques instrumentales y ontosemióticos en red se complementan y uno de los principales resultados es que en la TGI el concepto de artefacto puede asimilarse en la perspectiva del EOS como un objeto primario (material o simbólico) involucrado en la práctica matemática junto con otros objetos primarios. Concluyeron que los avances teóricos de hecho pueden beneficiarse como red de actividades teóricas.

Seguidamente, en el desarrollo de la empresa o proyecto ReMath, Artigue y Mariotti (2014) después de clarificar las diferentes perspectivas teóricas y el trabajo en red, presentaron sus constructos metodológicos con base en el proyecto, quienes se centraron en identificar conexiones y complementariedades entre teorías, en la identificación y elaboración de objetos de frontera entre diferentes culturas y la construcción progresiva de un marco teórico compartido sobre representaciones semióticas y enfatizaron en las praxeologías de investigación. Este proyecto no fue obra de un solo investigador, sino de equipos de investigadores de culturas diferentes que en un diálogo profundo compartieron las mismas culturas.

En este contexto, Bikner-Ahsbahs y Prediger (2014) editaron un libro titulado: redes de teorías como práctica de investigación en educación matemática, donde se comparte los puntos de partida para abordar la diversidad de teorías entre las que se destacan: el enfoque de acción, producción y comunicación (Arzarello y Sabena, 2014), la teoría de las situaciones didácticas (Artigue, Haspekian y Corblin-Lenfant, 2014), la teoría antropológica de lo didáctico (Bosch y Gascón, 2014), la abstracción y contexto (Dreyfus y Kidron, 2014), la teoría de situaciones densas de intereses (Bikner-Ahsbahs y Halverscheid, 2014). También, se desarrollaron casos de estudio sobre redes teóricas (Prediger y Bikner-Ahsbahs, 2014; Dreyfus, Sabena, Kidron y Arzarello, 2014; Kidron, Artigue, Bosch, Dreyfus, Haspekian, 2014; Sabena, Arzarello, Bikner-Ahsbahs, Schäfer, 2014; Bikner-Ahsbahs, Artigue, Haspekian, 2014). Particularmente, en Artigue y Bosch (2014) extendieron la noción de praxeología a las prácticas de investigación, la cual, desde un principio había sido introducida para modelar actividades matemáticas y didácticas.

Con el objetivo de promover investigaciones mediante interconexiones teóricas, Kidron y Bikner-Ahsbahs (2015) mencionaron que, “al trabajar con la red de teorías, los investigadores deben comprender las teorías ajenas involucradas y comunicar las propias para ayudar a los colegas a comprender sus principios, metodologías y preguntas paradigmáticas” (p. 6). Asimismo, hicieron énfasis en la evolución de las redes de teorías que ha sido punto de discusión en diferentes ediciones del congreso CERME. Además, plantearon las estrategias para conectar teorías y los distintos casos: 1) el trabajo en red entre dos teorías, 2) articulación de tres teorías y complementariedades, 3) Aclarar el papel de los conceptos en las teorías a través del trabajo en red, y, 4) ejemplo de ReMath de un proyecto de diseño múltiple. Bikner-Ahsbahs (2016) afirmó que, “el trabajo en red de teorías permite trabajar explícitamente con diferentes teorías para beneficiarse de sus fortalezas teóricas con un enfoque específico en informar la práctica, así como en inspirarse en situaciones empíricas de la práctica” (p. 34). Para estos autores trabajar en red significa construir relaciones teóricas para abordar mejor la complejidad de los fenómenos y no hacer interpretaciones simplistas.

Por su parte Font (2016) manifiesta que en la investigación en Educación Matemática es necesario usar marcos teóricos porque existe un consenso que debe seguir un trabajo de investigación, siguiendo algunos pasos clave como 1) la formulación de la pregunta de investigación, 2) la selección de un marco con las posibilidades de coordinación de la pregunta con el marco seleccionado y coherencia con las decisiones metodológicas, 3) operatividad del marco teórico y 4) aplicación de técnicas de investigación. Este autor afirma que la diversidad de marcos puede ser conveniente dado que, cada teoría desarrolla un aspecto parcial, pero, los resultados de las investigaciones que abordan un mismo problema de investigación con diferentes teorías, la mayoría de las veces son dispares, por la complejidad, lenguajes y fundamentos distintos. Por tal motivo es necesario comparar, coordinar y combinar las teorías para un marco integral con herramientas teóricas y metodológicas para abordar un problema de investigación.

Font, Trigueros, Badillo y Rubio (2016) articularon la teoría APOE con el EOS para contrastar y comparar la conceptualización de la noción de objeto desde ambas perspectivas teóricas, donde hicieron una descomposición genética del concepto derivada y la analizaron con las herramientas teóricas y metodológicas del EOS. Asimismo, hicieron confrontaciones entre las nociones de acción y práctica, procesos y procedimientos, encapsulación y objeto primario, configuración cognitiva y esquema, tematización y segundo nivel de emergencia de un objeto. Los autores concluyeron que la articulación de estas teorías es útil en la coordinación local subyacente que proporciona herramientas para explicar las dificultades asociadas con el aprendizaje de conceptos específicos, en especial, la derivada. Bosch, Gascón y Trigueros (2017) establecieron diálogos entre la teoría antropológica de lo didáctico y la teoría APOE para analizar la noción de praxeología.

En otro estudio basado en las redes teóricas, Pino-Fan et al. (2017) articularon la teoría de los registros de representación semióticos (TRRS) con el EOS para analizar la actividad matemática asociada a la resolución de problemas sobre la derivabilidad de la función valor absoluto. Los autores concluyen que las nociones de la TRRS son importantes para comprender la actividad cognitiva necesaria para resolver una tarea matemática, y el EOS permite analizar la actividad cognitiva del sujeto que muestra objetos matemáticos que intervienen en los procesos de tratamientos y conversiones entre los registros de representación. Además, el análisis con el EOS “complementa el análisis realizado utilizando las herramientas de TRRS, pues con las herramientas de configuración de objetos y procesos y función semiótica (FS), los contenidos de las representaciones se vuelven explícitos y se utilizan como parte de dicha actividad cognitiva” (p. 121).

Bikner-Ahsbahs y Vohns (2019) presentan la articulación entre la teoría de la visión semiótica de las matemáticas, la cual, a partir del uso de signos y juego semiótico explica la dinámica de hacer matemática para analizar el razonamiento esquemático; y la teoría de la actividad de aprendizaje aplicada a las matemáticas para desarrollar las competencias de los estudiantes al hacer matemáticas considerando objetivos de aprendizajes a alcanzar. Se concluye que las redes teóricas de precursores alemanes, presenta un programa de metainvestigación que enfatiza en cómo mejora la resolución de problemas en el campo de las matemáticas. En el estudio de Fonger y Altindis (2019) integraron la teoría del razonamiento cuantitativo y la teoría de las representaciones múltiples (lentes constructivistas y semióticos sobre la cognición) con el objetivo de realizar investigaciones empíricas del estudio de la comprensión significativa de la función. Los autores afirman que se basaron en estas teorías porque permiten el aprendizaje de los estudiantes a partir de la creación, interpretación y conexión entre diversas representaciones matemáticas desde una visión de razonamiento covariacional para favorecer la comprensión de los estudiantes acerca de las funciones. Borji, Erfani y Font (2009) usaron de manera combinada la teoría APOE y el EOS para estudiar la comprensión matemática de estudiantes sobre las coordenadas polares.

Por su parte, Godino, Beltrán-Pellicer y Burgos (2020) se motivaron explorar las concordancias y complementariedades entre la Teoría de la Objetivación y el Enfoque Ontosemiótico, donde encontraron que ambas teorías comparten principios teóricos y socioculturales sobre las matemáticas en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Además, analizaron las dimensiones: epistemológica, ontológica y semiótico-cognitiva con sus respectivas implicaciones en la enseñanza, tomando como contexto de reflexión un informe de un gráfico cartesiano.

Tabach, Rasmussen, Dreyfus y Apkarian (2020) consideran que articular teorías es un enfoque poderoso para saber sobre la posibilidad de nuevos conocimientos y vínculos entre enfoques teóricos diferentes. Estos autores coordinaron dos enfoques teóricos como el RBC+C (sus siglas en inglés: Recognizing, Building, Constructing y Consolidating) complementado con la Abstracción en Contexto (AiC) y la teoría DCA (sus siglas en inglés: Documenting, Collective y Activity). Especialmente, el modelo RBC + C es usado en la mayoría de los casos para analizar la construcción del conocimiento de individuos o grupos pequeños, mientras que el enfoque DCA se caracteriza por permitir el análisis del progreso matemático de toda la clase completa o un grupo de estudiantes. Después de lograr la articulación, la usaron para analizar y reflexionar sobre la gramática argumentativa que revela la estructura implícita de niveles de análisis de combinación y coordinación de teorías.

Actualmente, Thanheiser, Melhuish, Sugimoto, Rosencrans y Heaton (2021) coordinaron cinco enfoques teóricos (cohesión de la lección, demanda cognitiva de tareas, argumentación colectiva, tipos de contribución de los estudiantes y actividad de participación cognitiva de los estudiantes), con el propósito de presentar una perspectiva holística de la cultura del aula que involucre a los estudiantes en torno a la justificación e ilustrar las relaciones observables entre el maestro, los estudiantes y el contenido (ver articulación en la Figura 3).

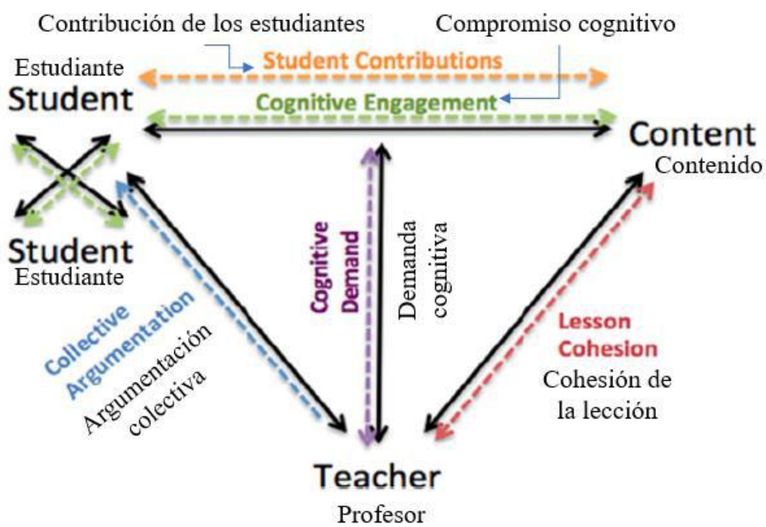


Figura 3. Articulación de los cinco marcos en un marco para examinar aulas de matemáticas de alta calidad centradas en involucrar a los estudiantes en la justificación (Adoptado de Thanheiser et al. (2021)).

En la Figura 3 se presenta un modelo de triángulo para la coordinación de los cinco marcos y las conexiones entre los principales actores (estudiante, profesor y el contenido). En este sentido, según Thanheiser et al. (2021) el análisis depende del funcionamiento del triángulo centrado en:

> 1) la relación entre el estudiante y el contenido a través de los tipos de contribución de los estudiantes, 2) el maestro y el contenido a través de la cohesión de la lección, 3) la forma en que los maestros dan forma al contenido de los estudiantes a través de la demanda cognitiva; 4) estudiantes-estudiantes y docente a través de la argumentación colectiva; y 5) estudiante-estudiante y contenido a través de la actividad de participación cognitiva del estudiante (p. 14).

Las investigaciones revisadas sobre “networking” muestran la diversidad de redes entre diferentes enfoques teóricos para analizar fenómenos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, proponiendo ejemplos con objetos matemáticos como la derivada, funciones, razón de cambio en problemas de aplicación, o bien, tema como gráficos cartesianos, entre otros. Particularmente, la Teoría de las conexiones no se ha articulado con otros marcos teóricos, aun reconociéndose que existe la necesidad de que esta teoría se complemente para detallar las conexiones. En este sentido, luego de analizar las diferentes teorías involucradas en los networking, identificamos que el EOS es un enfoque teórico articulador de teorías y, además, considera importante la noción de conexión matemática, por lo cual sería adecuado para complementarse y coordinarse con la Teoría de las conexiones.

1.1.4. Justificación

Luego de revisar la literatura relacionada con la importancia de las conexiones matemáticas a nivel curricular, las diferentes investigaciones que proponen tipologías de conexiones, las conexiones para hacer redes teóricas y estudios sobre la exploración de conexiones en distintos niveles educativos se han identificado problemáticas relacionadas con la necesidad de detallar las categorías de conexiones matemáticas a la luz de la articulación de marcos teóricos para enriquecer la TAC a partir de las complementariedades y concordancias, donde el contexto sobre la derivada tiene lugar por las dificultades que presentan los estudiantes universitarios sobre este concepto. Atendiendo a la problemática en cuestión, surge la siguiente pregunta de investigación:

> **¿De qué manera la aplicación de los constructos ontosemióticos complementan el análisis, desde una perspectiva cognitiva, de los procesos de conexión matemática necesarios para resolver problemas de derivadas?**

Esta pregunta se concreta en las siguientes preguntas más específicas:

1.2. Preguntas específicas de investigación

> **P1:** ¿Qué categorías de conexiones debe contemplar una Teoría Ampliada de las Conexiones (TAC) que permita sintetizar, englobar y ampliar las categorías de conexiones existentes en la literatura?
>
> **P2:** ¿Qué concordancias y complementariedades existen entre TAC y EOS acerca de las conexiones, que permitan un análisis más detallado de las conexiones matemáticas?
>
> **P3:** ¿Cómo caracterizar, mediante el uso combinado de la TAC y el EOS, las conexiones matemáticas que establecen los estudiantes universitarios al resolver problemas usando la derivada?

P4: ¿Cómo el uso de las complementariedades entre la TAC y el EOS permite explicar por qué los estudiantes tienen dificultades para establecer determinadas conexiones matemáticas que son clave para la resolución de problemas sobre derivadas?

Para responder a las preguntas de investigación, se planteó el siguiente objetivo general:

Desarrollar un networking de teorías de dos perspectivas (la Teoría de las conexiones matemáticas y el EOS) sobre la actividad matemática involucrada en los procesos de conexión matemática necesarios para resolver problemas de derivadas.

Este objetivo general se concreta en los siguientes objetivos específicos:

1.3. Objetivos específicos

O1: Identificar las categorías de conexiones que debe contemplar una Teoría Ampliada de las Conexiones (TAC) que permita sintetizar, englobar y ampliar las categorías de conexiones existentes en la literatura.

O2: Explorar las concordancias y complementariedades desde la articulación entre la TAC y el EOS para un análisis más detallado de las conexiones matemáticas.

O3: Caracterizar las conexiones matemáticas que establecen los estudiantes universitarios al resolver problemas en el contexto la derivada mediante el uso combinado de la TAC y el EOS.

O4: Explicar por qué los estudiantes tienen dificultades para establecer determinadas conexiones matemáticas que son clave para la resolución de tareas sobre derivadas con base en el uso combinado de la TAC y el EOS.

Capítulo 2

Marco teórico de la investigación

En esta sección se presenta en un primer momento la Teoría de las conexiones matemáticas (conceptualización de conexión matemática y sus categorías). En segundo se muestra un resumen de las herramientas del EOS. Tercero, se explica brevemente en qué consiste una red de teorías y las estrategias de articulación. Por último, se describen algunas interpretaciones del concepto de derivada.

2.1. Teoría de las Conexiones matemáticas

Inicialmente se presentan diferentes conceptualizaciones acerca la conexión matemática. En principio Brown (1983) aseguró que las conexiones matemáticas "son una relación o asociación causal o lógica, una interdependencia" (p. 481). Desde la perspectiva metafórica, las conexiones se entienden como parte de una red jerárquica, como una telaraña, donde una intersección o nodo puede verse como parte de la información representada, y los hilos entre los nodos pueden entenderse como conexiones o relaciones (Hiebert y Carpenter, 1992). Para Businskas (2008) las conexiones matemáticas son entendidas como "una relación verdadera entre dos ideas matemáticas, A y B" (p. 18).

En Eli et al. (2013) las conexiones se describen como componentes de un esquema o grupos de esquemas conectados dentro de una red mental. En el caso de De Gamboa y Figueras (2014) las conexiones matemáticas son "redes de enlaces que coordinan definiciones, propiedades, técnicas y procedimientos para construir interconceptos. Dichos enlaces son vínculos lógicos y coherentes entre representaciones" (p. 340). En esta investigación se entiende una conexión matemática desde la perspectiva de García-García y Dolores-Flores (2018) como "un proceso cognitivo a través del cual una persona relaciona dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real" (p. 229), quienes para definirla se basaron en las posturas previas de conexión matemática compartiendo la idea de que son relaciones verdaderas.

Cabe destacar que en la literatura sobre conexiones matemáticas se han reportado dos grandes grupos de conexiones: las intramatemáticas "se establecen entre ideas, conceptos, procedimientos, teoremas, representaciones y significados matemáticos entre sí" (Dolores-Flores y García-García, 2017, p. 160). Mientras que, las extramatemáticas se reconocen cuando "se relaciona un concepto o modelo matemático con un problema en contexto o de aplicación o, viceversa. Incluyen las conexiones entre contenidos matemáticos con otras disciplinas curriculares y con situaciones de la vida diaria" (Dolores-Flores y García-García, 2017, p. 161). Las conexiones matemáticas "surgen cuando los estudiantes resuelven tareas específicas y pueden identificarlas en sus producciones escritas o en los argumentos orales o mímicos que desarrollan" (García-García y Dolores-Flores, 2018, p. 229).

En total, se consideran nueve categorías de conexiones, una extramatemática donde emerge la conexión de modelado (Evitts, 2004), y ocho intramatemáticas: conexión orientada a la instrucción, diferentes representaciones, procedimental, implicación, parte-todo (Businskas, 2008), característica (Eli *et al*., 2011; García-García y Dolores-Flores, 2019), significado, reversibilidad (García-García, 2018; García-García y Dolores-Flores, 2019), que se describen a continuación.

2.1.1. Conexión de modelado (MD)

Se caracterizan por ser un vínculo entre las matemáticas y la vida real o la cotidianidad de los estudiantes y, se evidencian cuando el sujeto resuelve problemas no matemáticos o de aplicación donde tiene que plantear un modelo o expresión matemática (Evitts, 2004; García-García, 2018).

2.1.2. Conexión orientada a la instrucción (COI)

Se refiere a la comprensión de un concepto C con base en dos o más conceptos previos A y B, requeridos para ser entendidos por un sujeto. Además, estas conexiones se manifiestan de dos formas: a) asociación de un nuevo tema con conocimientos previos, b) conceptos y procedimientos matemáticos conectados entre sí se consideran prerrequisitos o habilidades que los estudiantes deben dominar antes del desarrollo de un nuevo concepto (Businskas, 2008; García-García, 2018).

2.1.3. Representaciones diferentes (RD)

Se identifican cuando el sujeto representa un concepto matemático utilizando representaciones alternas o equivalentes (Businskas, 2008; García-García y Dolores-Flores, 2019). Las representaciones *equivalentes* son transformaciones de representaciones realizadas en la misma representación o registro (algebraico-algebraico), por ejemplo, $\boldsymbol{P(t) = 10t^2 - 5}$ es equivalente a $\boldsymbol{P(t) = 5(t^2 - 1)}$. Las representaciones *alternas* se refieren a aquellas representaciones donde el registro en el cual fueron formadas se modifica, por ejemplo, las representaciones gráficas de las funciones exponencial y logaritmo natural (ver Figura 4) son representaciones alternas de $\boldsymbol{y = e^x}$ y $\boldsymbol{y = lnx}$ respectivamente, las cuales son dos representaciones diferentes (gráfico-algebraico) que representan un mismo objeto. En términos de la teoría de las representaciones semióticas, las representaciones alternas se refieren a conversiones y representaciones equivalentes a tratamientos (Duval, 2006).

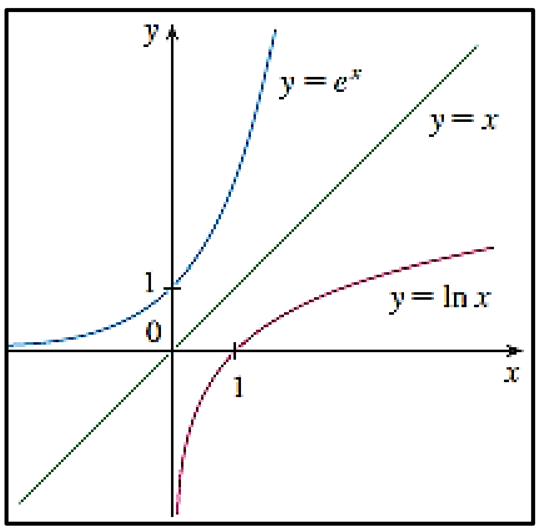


Figura 4. Representaciones gráficas de $y = e^x$ y $y = lnx$ (Stewart, 1999, p. 71).

2.1.4. Procedimental (P)

Estas conexiones se manifiestan mediante el uso de reglas, algoritmos o fórmulas para completar o resolver una tarea matemática, son de la forma, *A es un procedimiento utilizado para trabajar con el concepto B* (Businskas, 2008). Por ejemplo, la derivada de $f(x) = ax^n$ se encuentra a través de la fórmula $f'(x) = anx^{n-1}$ (García-García y Dolores-Flores, 2018).

2.1.5. Implicación (I)

Esta conexión se identifica cuando un concepto A conduce a otro concepto B mediante una relación lógica ($A \rightarrow B$) (Businskas, 2008). Por ejemplo, sí $f'(x) > 0$ en el intervalo *I*, entonces $f(x)$ es creciente en ese mismo intervalo *I*. Para identificar este tipo de conexiones, se consideró la primera forma lingüística propuesta por Selinski, Rasmussen, Wawro y Zandieh (2014) quienes enfatizaron que, un estudiante hizo una conexión a través de una implicación lógica explícita, puesto que, en las implicaciones lógicas usaban frases como si-entonces o palabras de enlace como cuándo, porque, debería, etc.

2.1.6. Parte-todo (P-T)

Se presentan cuando las relaciones lógicas se establecen en dos formas: particular-general e inclusión. El caso *particular-general* es de la forma *A* es una generalización de *B* y *B* es un caso particular de *A* (Businskas, 2008; García-García y Dolores-Flores, 2019). Por ejemplo, el polinomio $P(x) = 3x^3 - 8x^2 + \frac{1}{2}x - 4$ es un caso particular del polinomio de grado n $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ cuando $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son coeficientes y $a_n \neq 0$. La relación de *inclusión* se da cuando un concepto matemático está contenido en otro (García-García, 2019).

2.1.7. Significado (S)

Se identifica cuando un alumno atribuye un sentido a un concepto matemático (expresión-contenido), es decir, lo que significa para él o ella. Incluye aquellos en los que un estudiante da una definición que él o ella ha construido para estos conceptos. Es diferente del tipo de conexión característica porque no se describen las propiedades y cualidades de los conceptos matemáticos (García-García y Dolores-Flores, 2020). Por ejemplo, cuando el sujeto da un significado de la derivada en un punto como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto.

2.1.8. Característica (C)

Se identifica cuando el sujeto manifiesta algunas características de los conceptos o describe sus propiedades en términos de otros conceptos que los hace diferentes o similares a otros

(Eli *et al*., 2011; García-García y Dolores-Flores, 2019). Por ejemplo, $f(x) = ax^n$ tiene un coeficiente (a), una literal (x) y un exponente (n) (García-García y Dolores-Flores, 2018).

2.1.9. Reversibilidad (R)

Está presente cuando un sujeto parte de un concepto *A* para llegar a un concepto *B* e invierte el proceso partiendo de *B* para volver a *A* (García-García y Dolores-Flores, 2019; 2020). Por ejemplo, la conexión matemática de reversibilidad se establece cuando se reconoce la relación bidireccional entre derivada e integral como operadores, y cuando se utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo como forma de vincular ambos conceptos (García-García y Dolores-Flores, 2018).

Para esta investigación se considera que el conjunto de categorías de conexiones matemáticas permite caracterizar la actividad matemática específica de las conexiones desde una perspectiva cognitiva. Se trata de una mirada local, que, para efectos de esta investigación, se entiende como una teoría, en el sentido de que: 1) asume como principio que un buen proceso de enseñanza y aprendizaje de un tema matemático es aquel en el que se anima al estudiante a realizar conexiones relevantes, ya que contribuyen a una mejor comprensión. 2) se plantean preguntas de investigación referidas a *¿Qué conexiones matemáticas establece un sujeto cuando resuelve tareas matemáticas? ¿Qué conexiones matemáticas se evidencian en los materiales curriculares?* y, 3) usa un método de análisis temático de tipo inductivo para responderlas.

A continuación, se presenta un enfoque teórico, que, a diferencia de la teoría de las conexiones, proporciona herramientas para el análisis de cualquier actividad matemática.

2.2. El Enfoque Ontosemiótico

Según Godino y Batanero (1994), el EOS es un sistema teórico inclusivo sobre el conocimiento y la instrucción matemática, el cual surgió por la necesidad de clarificar, articular y mejorar nociones teóricas y metodológicas de diferentes marcos teóricos usados en Educación Matemática desde una visión unificada. Además, algunos de sus propósitos son dar respuesta a preguntas fundamentales, por ejemplo: *¿Qué es un objeto matemático?*; *¿Cuál es el significado de un objeto matemático?*; o bien, *¿Qué tipos de objetos intervienen en la actividad matemática?*

En el EOS es fundamental describir la actividad matemática desde una perspectiva institucional o personal, la cual se modela en términos de prácticas y de configuración de objetos primarios y procesos que son activados en dichas prácticas (Font, Godino y Gallardo, 2013). En este sentido, una práctica matemática se concibe en esta teoría como una secuencia de acciones, reguladas por reglas institucionalmente establecidas, orientadas hacia una meta que es generalmente la resolución de un problema (Drijvers *et al*., 2013).

Para llevar a cabo estas prácticas matemáticas y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios es necesario, además del problema, poner en funcionamiento otros objetos matemáticos‒en la ontología del EOS según Font et al. (2013) el "objeto" se usa en un sentido amplio para referirse a cualquier entidad que, de alguna manera, está involucrada en la práctica matemática y puede identificarse como una unidad. En efecto, la resolución requiere el uso de lenguajes (*verbales, simbólicos, gráficos, etc*.), que son la parte ostensiva de una serie de definiciones, proposiciones y procedimientos involucrados en la elaboración de los argumentos para la resolución del problema. En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una secuencia de prácticas matemáticas, activa un conglomerado formado por situaciones-problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en lo que, en términos del EOS, se denomina configuración de objetos primarios (Font *et al*., 2013). En el EOS, el término configuración se utiliza con el propósito de designar un conjunto o sistema heterogéneo de objetos relacionados. Asimismo, cualquier configuración de objetos primarios puede verse tanto desde una perspectiva personal como institucional, lo que permite distinguir configuraciones cognitivas (personales) y epistémicas (institucionales) de objetos primarios (Font *et al*., 2013).

En el EOS, la noción de juego de lenguaje ocupa un lugar importante, al considerarla, junto con la noción de institución, como los elementos contextuales que relativizan las formas de ser y existir de los objetos matemáticos (Wittgenstein, 1953). Por otra parte, los objetos primarios que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en el que participan, se pueden considerar desde las siguientes formas de 'estar participando', que se agrupan en facetas o dimensiones duales: personal-institucional, extensivo-intensivo, unitario-sistémico, ostensivo-no ostensivo y de expresión-contenido (Font *et al*., 2013), ver Figura 5.

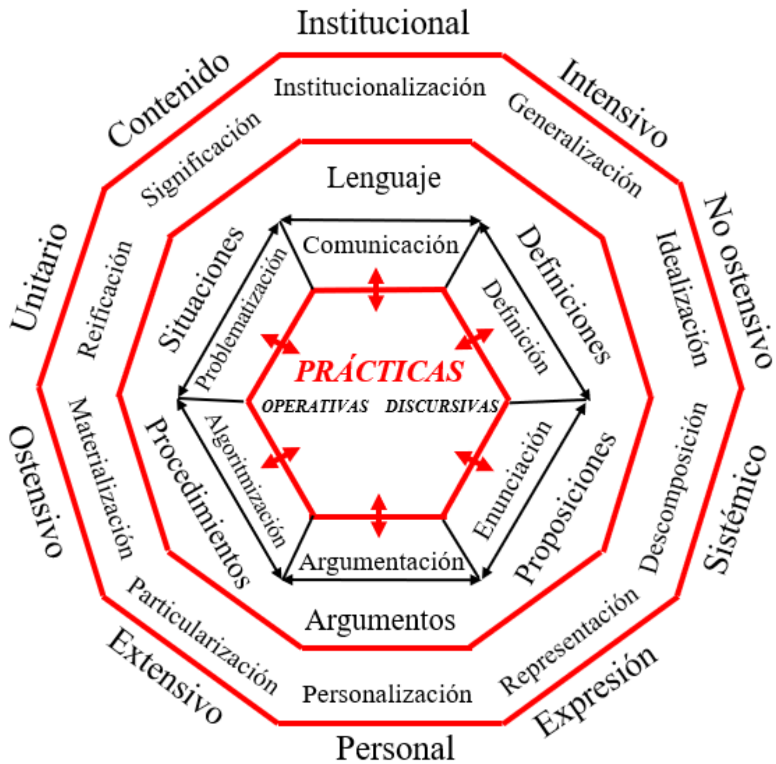


Figura 5. Representación ontosemiótica del conocimiento matemático (tomado de Font y Contreras (2008)).

En términos de EOS (Font *et al*., 2016), si la perspectiva proceso-producto se aplica a los objetos primarios de las configuraciones, por ejemplo, una representación (objeto primario) puede considerarse como el resultado de un proceso de representación, un argumento es el resultado de un proceso de argumentación, un procedimiento está relacionado con el proceso de automatización, etc. Por tanto, para analizar la actividad matemática, además de las prácticas y configuraciones de objetos primarios, el EOS considera los procesos derivados de la aplicación de la perspectiva proceso-producto a los objetos primarios, junto con los procesos derivados de las cinco dualidades (personalización-institucionalización; síntesis-análisis; representación-significado; materialización-idealización; generalización-particularización), ver Figura 5. Otros procesos que se toman en cuenta son el modelado, visualización, entre otros (Font *et al*., 2016). Este listado de procesos derivados de la tipología de objetos primarios y facetas duales utilizados como herramientas de análisis de la actividad matemática en el EOS, si bien contempla algunos de los procesos que se consideran importantes en la actividad matemática, no pretende incluir todos los procesos involucrados en la actividad matemática, porque algunos de los más importantes (por ejemplo, resolución de problemas o modelado) más que procesos son hiper o mega procesos (Godino *et al*., 2019), ya que involucran procesos más elementales: representación, argumentación, idealización, generalización, etc.

Un ejemplo esencial para distinguir la práctica, los objetos primarios y los procesos es cuando se considera la actividad matemática involucrada en la resolución de la tarea: Calcula la derivada de la función $g(x) = (x^3 - 2x^2 + 4)(5x - 1)$. Para la resolución, el estudiante realiza una secuencia de acciones (prácticas), como leer el enunciado y calcular la derivada usando la regla para la derivada del producto de funciones: $g'(x) = (3x^2 - 4x)(5x - 1) + 5(x^3 - 2x^2 + 4)$, que es un procedimiento (objeto primario). Ahora, cuando el estudiante resuelve ejercicios similares, se involucra en un proceso de automatización (Font *et al*., 2016).

Una noción clave para asociar prácticas con objetos primarios y los procesos que se activan en ellos es la noción de FS. En el EOS, la FS se concibe, de manera metafórica, como una correspondencia entre conjuntos que pone en juego tres componentes: un plano de expresión (objeto inicial), un plano de contenido (objeto final) y un criterio o regla de correspondencia (Godino *et al*., 2007). La FS está asociada, desde el principio, a la dualidad expresión / contenido y al proceso de significación; por ejemplo, cuando se le pide a alguien que comprenda la derivada en un punto (expresión) y responde que es la pendiente de la recta tangente en un punto (contenido). Esta forma de entender la FS se extiende en EOS y considera que tanto el plano de expresión como el plano de contenido pueden ser objetos materiales o mentales que podrían ser cualquiera de los seis tipos de objetos primarios de la configuración y, además, cualquiera de las formas de involucrarse en las prácticas matemáticas consideradas en las dualidades.

Teniendo en cuenta los objetos primarios que son la expresión (6) o el contenido (6) de una FS, se consideran 6x6 (36) tipos de FSs básicos. Por otro lado, cada uno de ellos puede dar lugar a otras FSs como resultado de la mirada que ofrecen las diferentes dualidades -por ejemplo, la FS que relaciona el teorema de Pitágoras con el teorema de Pitágoras generalizado, desde la perspectiva de objetos primarios relacionados, es una FS que relaciona una proposición con otra, sin embargo, al contemplar la dualidad extensiva-intensiva, también se puede convertir, si es el caso, en una FS que relaciona un particular (un extensivo) con un general (un intensivo).

Además, al cruzar las facetas aparecen nuevas FSs, por ejemplo, si consideramos la doble faceta extensiva / intensiva desde la perspectiva expresión / contenido, aparecen cuatro nuevas FSs: extensional-extensional, extensional-intensional, intensional-extensional, intensional- intensional (ver Tabla 5). Por otro lado, las FSs no suelen establecerse de forma aislada, suelen formar parte de cadenas o conjuntos de FSs, que, a su vez, pueden considerarse globalmente como una FS. Desde esta perspectiva, en el EOS (Rondero y Font, 2015) se han considerado tres tipos de agrupaciones de FSs: 1) un conjunto de FSs que determina niveles de generalización, 2) un conjunto de FSs que determina proyecciones metafóricas, y 3) una trama de FSs semióticas en general. A continuación, se muestra un ejemplo de la última categoría para ilustrar lo que se ha dicho.

Por ejemplo, si alguien respondiera a la pregunta ¿*Cuál es la definición de la derivada*? y su respuesta es:

> << Dada la función $y = f(x)$, su derivada es otra función que asocia a cada punto a en el dominio de f su derivada $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (cuando existe). Esta función es representada con y' o $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ >>

Se puede considerar que esta persona ha realizado una FS, donde la expresión es el término derivada (considerado como un objeto lingüístico primario) y el contenido es la definición de derivada como límite de la tasa de variación media de la función (considerado como otro objeto primario). Ahora bien, la tipología de FS contemplada por el EOS permite la comprensión de esta FS de definición de lenguaje como resultado de un conjunto de FS que el estudiante ha puesto en funcionamiento para expresar este significado. En otras palabras, una recursividad o un *zoom* a esta FS podría establecerse y entenderse como el resultado de un conjunto de otras FSs.

Según el EOS para entender esta definición de una manera significativa, el estudiante tiene que activar (plausiblemente) un encadenamiento de FSs como el siguiente (ver Figura 5).

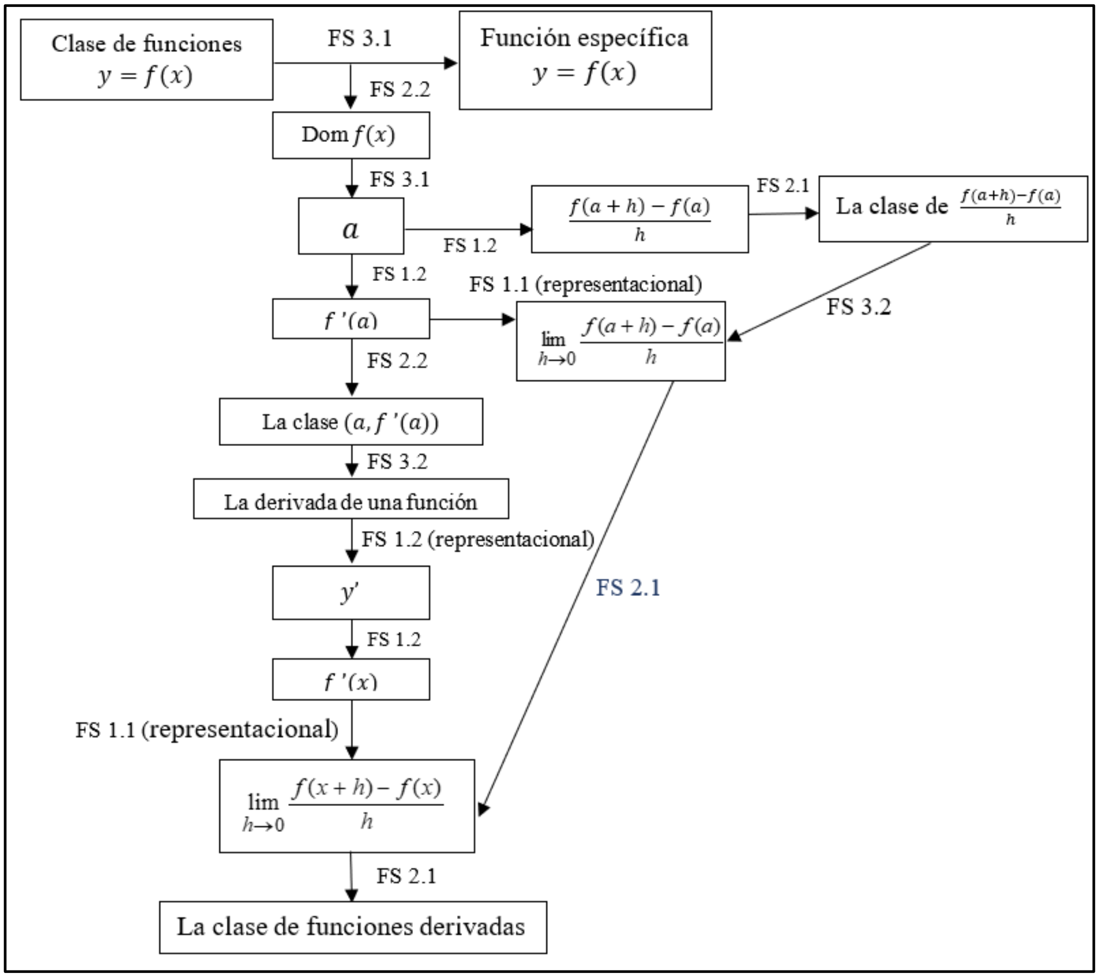


Figura 6. Encadenamiento de FSs (Adaptado de Font y Contreras (2008)).

Es decir, tiene que activar, entre otras, la siguiente tipología de FSs relacionada con la faceta extensiva e intensiva de los objetos matemáticos (ver Tabla 5):

Tabla 5. Tipos de FSs (Adaptado de Font y Contreras (2008)).

	Extensional	Intensional
Extensional	FS1	FS2
Intensional	FS3	FS4

1. FS1 relaciona una entidad extensional con otra entidad extensional.

- FS1.1 relaciona un objeto con otro de la misma clase.
- FS1.2 relaciona un objeto con otro que no es de la misma clase.

2. FS2 relaciona una entidad extensional con una entidad intensional.

- FS2.1 relaciona un objeto con la clase a la que pertenece.
- FS2.2 relaciona un objeto con una clase a la que no pertenece.

3. FS3 relaciona una entidad intensional con una entidad extensional.

- FS3.1 relaciona una clase con un ejemplo de la clase.
- FS3.2 relaciona una clase con un objeto que no pertenece a esa clase.

4. FS4 relaciona una entidad intensional con otra entidad intensional.

- FS4.1 define una clase de objetos de una manera diferente.
- FS4.2 relaciona una entidad intensional con otra entidad intensional diferente.

Esta tipología de ocho FSs surge de la reflexión sobre uno de los elementos cruciales de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos y la observación de episodios de aula en los que se establecen sus reglas de uso. En Font y Contreras (2008) la plausibilidad de este tipo de encadenamiento se justifica con argumentos como los siguientes: cuando, en la respuesta anterior dada para definir la derivada se dice "dada una función $y = f(x)$", hay que tener en cuenta que el autor pretende dar la definición de la función derivada de cualquier función. Para ello, lo primero que hace es llamar la atención sobre "una función", es decir, va de lo general a lo particular, y, por tanto, se ha introducido un objeto particular a través de una FS intensiva / extensiva (una FS 3.1). Para obtener más información sobre la justificación de este encadenamiento, consulte Font y Contreras (2008).

2.3. Networking of theories en Educación Matemática

La perspectiva de investigación sobre redes de teorías no es nueva, por ejemplo, investigaciones previas han realizado este tipo de estudios (e.g., Arzarello y Olivero 2006; Prediger *et al*., 2008; Radford, 2008). El trabajo de redes de teorías ha comenzado a proporcionar ejemplos concretos para la investigación, señalando sus beneficios y posibles dificultades y limitantes de un enfoque multiteórico (Bikner-Ahsbahs y Vohns, 2019). En general, el objetivo principal de la investigación centrada en el desarrollo de redes de teorías es explorar y comprender cómo se pueden conectar (o no) diferentes teorías con éxito, respetando sus principios conceptuales y metodológicos subyacentes, para comprender mejor la complejidad de los fenómenos involucrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Prediger et al., 2008; Kidron y Bikner-Ahsbahs, 2014; Pino-Fan *et al*., 2017).

En este sentido, el interés de varios autores es el reconocimiento de los principales aspectos que caracterizaron las teorías para poder compararlas, contrastarlas y conectarlas (e.g., Radford, 2008; Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2010; Artigue y Mariotti, 2014; Tabach et al., 2020). Por lo tanto, es importante reconocer la conceptualización de teoría, por ejemplo, en la literatura se evidenciaron diversas posturas sobre el término "teoría", no obstante, en esta investigación se reconocen dos visiones que comparten aspectos en común. Primero, Niss (2007) define una teoría como un sistema de conceptos y afirmaciones con ciertas propiedades, considerando que:

- Una teoría consiste en una red organizada de conceptos y afirmaciones sobre algún dominio extenso o una clase de dominios, que consta de objetos, procesos, situaciones y fenómenos.
- En una teoría, los conceptos están vinculados en una jerarquía conectada, en la que un cierto conjunto de conceptos, considerados básicos, se utilizan como bloques de construcción en la formación de otros conceptos.
- En una teoría, las afirmaciones son hipótesis básicas, supuestos o axiomas, tomados como fundamentales, o afirmaciones obtenidas de las afirmaciones fundamentales mediante derivación formal o material (p. 308).

Para Radford (2008) las conexiones entre teorías son posibles, pero sostiene que este proceso está limitado por el propósito de la conexión y las particularidades de los componentes de las teorías (*P*, *M*, *Q*) a conectar. Por tanto, en esta investigación se asume la postura de Radford (2008, p. 320), quien define que una teoría puede verse como una forma de producir entendimientos y formas de acción basadas en:

- Un sistema, *P*, de principios básicos, que incluye visiones implícitas y enunciados explícitos que delimitan la frontera de lo que será el universo del discurso y la perspectiva de investigación adoptada.
- Una metodología, *M*, que incluye técnicas de recopilación e interpretación de datos respaldadas por *P*.
- Un conjunto, *Q*, de preguntas de investigación paradigmáticas (plantillas o esquemas que generan preguntas específicas a medida que surgen nuevas interpretaciones o cuando los principios se profundizan, amplían o modifican).

El trabajo sobre redes teóricas no solo enfatiza en las teorías, sino que es “un enfoque metodológico para la investigación teórica y empírica que conecta diferentes teorías para ampliar y profundizar la comprensión de los problemas” (Kidron y Bikner-Ahsbahs, 2014, p. 221). Existen diferentes estrategias y métodos para realizar este tipo de investigación. Por ejemplo, Prediger et al. (2008) y Bikner-Ahsbahs y Prediger (2010) informan que conectan estrategias y métodos para articular teorías, que van desde ignorar por completo otros marcos teóricos en un extremo, hasta unificar globalmente diferentes enfoques en el otro extremo. Como estrategias intermedias, los autores mencionan la necesidad de hacer comprensible la propia perspectiva y otras perspectivas teóricas, y las estrategias de comparar y contrastar diferentes enfoques, coordinar y combinar perspectivas y lograr la integración y síntesis local (ver Figura 7).

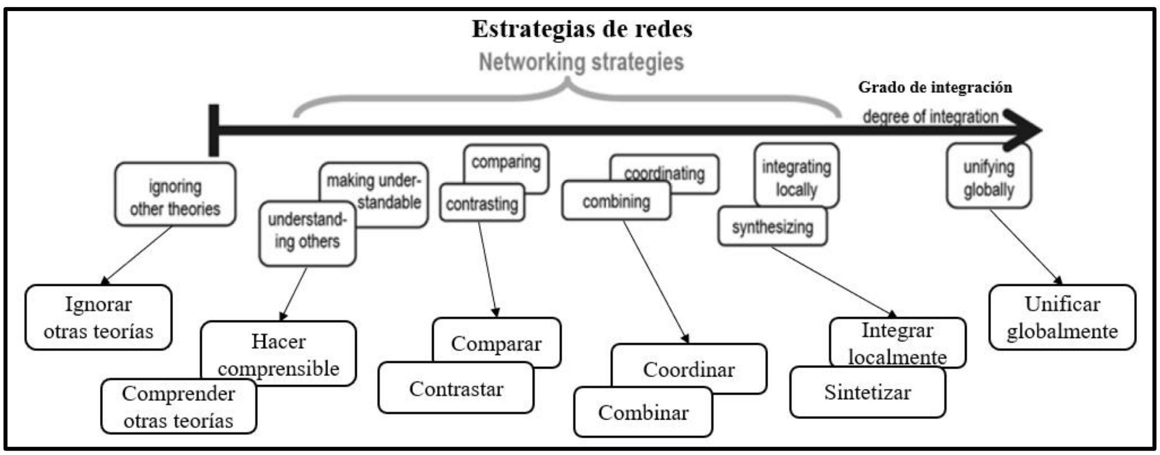


Figura 7. Estrategias para articular marcos teóricos (Prediger et al., 2008, p. 170).

De manera detallada, *ignorar las teorías* se refiere a que el autor reconoce que existen diversas teorías en Educación Matemática, pero, se encuentran aisladas menos una (s) que se van a usar. *La comprensión de las teorías* es una condición o requisito previo antes de conectarlas y se trata de que los investigadores deben fomentar la empatía con el fin de ayudar a los colegas a comprender los principios, metodologías o métodos y preguntas paradigmáticas. Seguidamente, *la comparación y contrastación* es un par de estrategias que no difiere sustancialmente, por ejemplo, al impulsar la comparación se buscan similitudes y diferencias de manera general para percibir componentes teóricos, mientras que la contrastación es la extracción de diferencias típicas (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2010; 2014).

El par de estrategias de *coordinación y combinación* aluden a la comprensión más profunda sobre un fenómeno empírico o episodio (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2010). Particularmente, la combinación "se realiza cuando las teorías se yuxtaponen y conducen, por ejemplo, a puntos de vista complementarios. Mediante la coordinación, la conexión entre las teorías se vuelve más estrecha mientras se pueden construir marcos y metodologías comunes para la investigación" (Kidron y Bikner-Ahsbahs, 2015, p. 225).

Según Bikner-Ahsbahs y Prediger (2014) el par de estrategias de *integración local y síntesis* se enfocan en:

> el desarrollo de teorías reuniendo un pequeño número de enfoques teóricos en un nuevo marco. Hacemos una distinción gradual entre las dos estrategias relacionadas que esta vez se refiere al grado de simetría de los enfoques teóricos involucrados. La noción de síntesis se utiliza cuando dos (o más) teorías igualmente estables están conectadas de tal manera que surge una nueva teoría. Pero a menudo, el alcance y el grado de desarrollo de las teorías no es simétrico, y solo hay algunos constructos o aspectos de una teoría integrados en una teoría ya más elaborada o convertidos y elaborados en otra. Esta integración no debe confundirse con unificar totalmente, por lo que enfatizamos el "local" en el nombre de la estrategia de integración local. Llamamos simétrica a una integración local si un concepto en la frontera de dos teorías se elabora e integra en ambos enfoques teóricos. Este último puede desarrollarse más y dar como resultado una síntesis (p. 120).

2.4. La derivada

En este apartado, que hace referencia al objeto matemático, se están considerando algunos de los significados de la derivada que podrían ser útiles en el desarrollo de la investigación**.**

Para Stewart (1999) la derivada de una función en $x = a$, denotada con $f'(a)$, es $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, si este límite existe. Si escribimos $x = a + h$, entonces $h = x - a$ y h tiende a 0 si y sólo si x tiende a a. En relación con la definición de la derivada como el límite del cociente incremental, Spivak (1992) resalta que, la función f' recibe el nombre de derivada de f, y f' es el conjunto de todos los pares $\left(a, \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$. Por su parte, Apóstol (2001) sostiene que la derivada $f'(x)$ está definida por la igualdad $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ con tal que el límite exista.

Asimismo, de forma detallada se dice que la función f debe estar definida por lo menos en un intervalo (a, b) del eje x, y tomando un punto x del intervalo se forma el cociente

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ de diferencias siendo h un número positivo o negativo diferente de cero, de tal forma que, $x+h$ pertenezca también a (a, b). En el numerador se mide la variación de la función cuando x varía de x a $x+h$, este cociente presenta la variación media o el cambio de la función f en el intervalo que une x a $x+h$. Si h tiende hacia un cierto valor como límite (y será el mismo, tanto si h tiende a cero con valores positivos como negativos), entonces ese límite indica la derivada de la función f en x.

También, a la derivada $f'(a)$ se le conoce como la razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ con respecto a x cuando $x = a$. En esta definición, Stewart (1999), primero considera la razón promedio de cambio sobre intervalos cada vez más pequeños haciendo que x_2 tienda a x_1 y, por lo tanto, al hacer que Δx tienda a cero, el límite de las razones de cambio se llama razón de cambio y con respecto a x en $x = x_1$. Esto a su vez es interpretado como la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en $P(x_1, f(x_1))$. La razón de cambio instantánea se representa simbólicamente a través de: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Stewart (1999) define “la velocidad o velocidad instantánea $v(a)$ en el instante $t = a$ como el límite de las velocidades promedio” (p. 145). El cual se representa simbólicamente de la siguiente manera: $v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y se conoce como la *interpretación física de la derivada*, refiriéndose a la velocidad media, considerando la distancia y el tiempo.

Por otra parte, es importante considerar conceptos previos a la derivada como lo es la pendiente de la secante $m_{PQ} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$; y si $h = x - a$, entonces $x = a + h$ y la pendiente viene dada por $m_{PQ} = \frac{f(a+x)-f(a)}{h}$ (ver Figura 8), y la recta tangente. Stewart (1999) afirma que, la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P cuya pendiente $m = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, indica la existencia del límite.

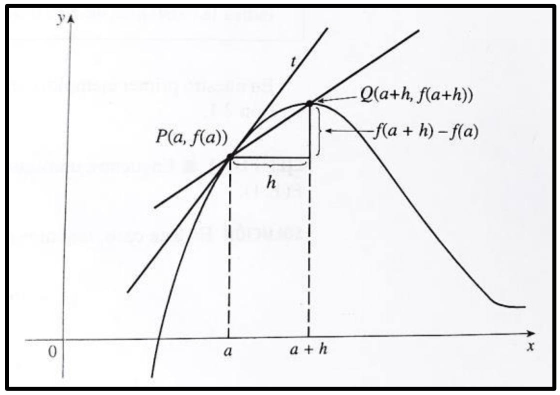


Figura 8. Pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(a + h, f(a + h))$ (tomado de Stewart, 1999, p. 144).

En este contexto, geométricamente la derivada de f en a es: “la recta tangente a $y = f(x)$, en $(a, f(a))$, es la recta que pasa por $(a, f(a))$ cuya pendiente es igual a $f'(a)$” (Stewart, 1999, p. 152). A continuación, en la Figura 9 se muestra la representación gráfica de la interpretación geométrica de la derivada.

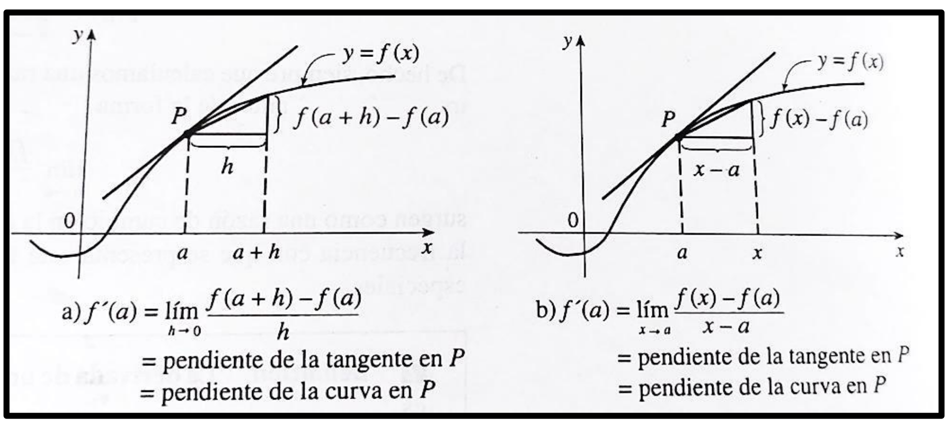


Figura 9. Interpretación geométrica de la derivada (tomado de Stewart (1999, p. 152)).

En los párrafos anteriores se hace evidente que la derivada es un objeto matemático de una cierta complejidad (con diferentes significados, interpretaciones, tipos de problemas donde se aplica), lo cual implica que para entenderlo es necesario establecer muchas conexiones, y de diferente tipo, entre las diferentes partes que forman esta complejidad.

Para el objeto matemático derivada, Pino, Godino y Font (2011) caracterizan su complejidad en términos de plurisignificaciones, más en concreto, mediante nueve configuraciones de objetos primarios: 1) tangente en la matemática griega; 2) variación en la edad media; 3) métodos algebraicos para hallar tangentes; 4) concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; 5) ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos; 6) métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes; 7) cálculo de fluxiones; 8) cálculo de diferencias; y 9) derivada como límite (ver Figura 10).

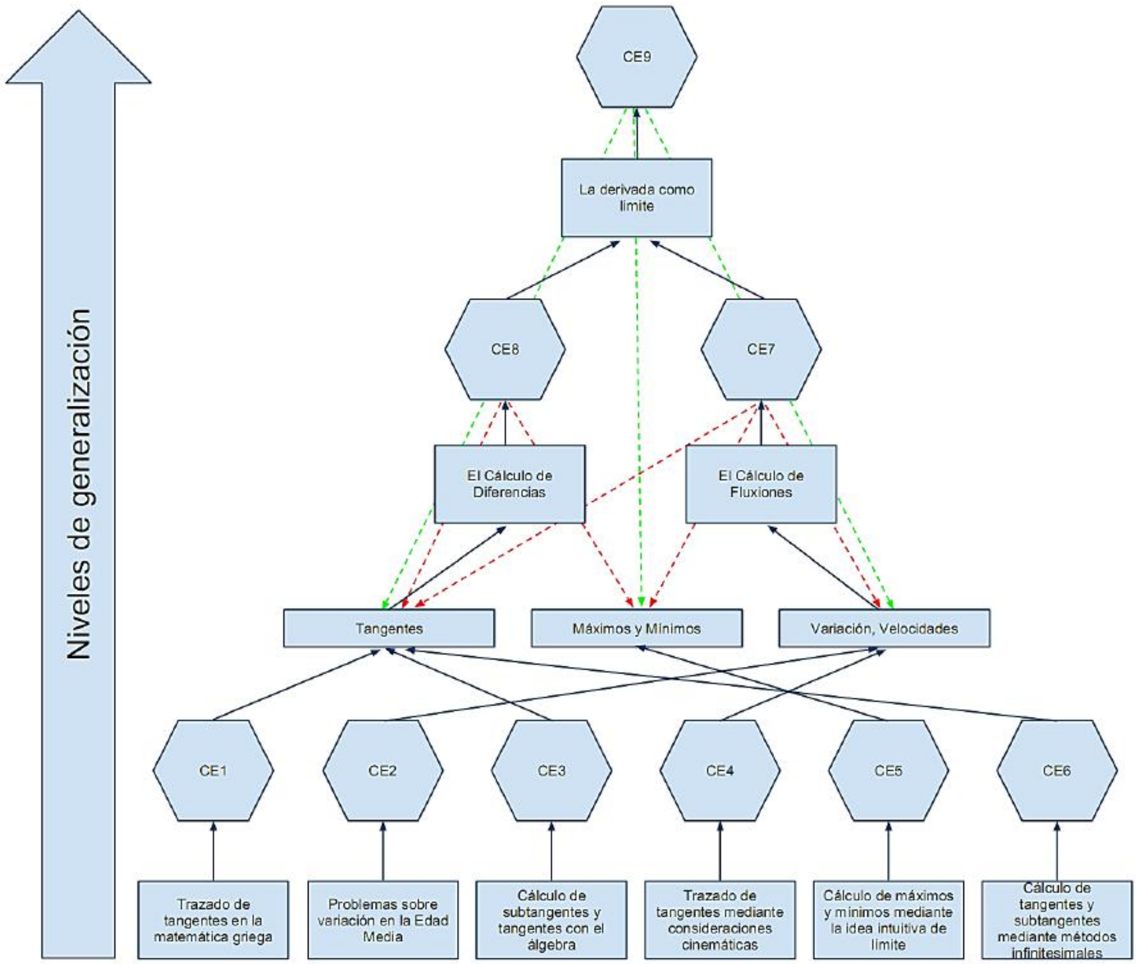


Figura 10. Significado epistémico global de la derivada (tomado de Pino-Fan, Godino y Font (2011, p. 174)).

La definición de derivada como límite de las tasas medias de la función (CE9) se puede considerar, metafóricamente, como la cúspide de una pirámide de organizaciones matemáticas donde alguna versión de la derivada tiene un papel central. En este esquema se observa cómo la derivada a lo largo de la historia ha tenido diferentes interpretaciones (*sentidos o significados parciales*), entre los cuales queremos destacar, además del significado como límite de las tasas medias de variación de la función, el significado como velocidad instantánea y el geométrico, como pendiente de la recta tangente.

En Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013) se utilizan estas nueve configuraciones para la reconstrucción del significado global de la derivada, el cual es utilizado para valorar la representatividad del significado pretendido en el currículo de Bachillerato de México (a partir de las configuraciones de objetos primarios activadas en las prácticas matemáticas propuestas tanto en el Plan de Estudios como en los libros de texto de dicho nivel).

La caracterización de la complejidad de la derivada realizada en Pino-Fan, Godino y Font (2011) facilita tener elementos para diseñar cuestionarios que permiten caracterizar la comprensión de los estudiantes, futuros profesores o profesores en servicio sobre la derivada. En Pino-Fan, Godino y Font (2018), se diseñó un cuestionario para determinar la comprensión de futuros profesores sobre la derivada en el que se incluyeron tareas que activan los diversos significados parciales de la derivada caracterizados en Pino-Fan, Godino y Font (2011).

Capítulo 3

Metodología de la investigación

Esta investigación es cualitativa exploratoria (Cohen, Manion y Morrison, 2018) desarrollada en tres grandes etapas. En la etapa 1 se seleccionaron los participantes de la investigación que fueron un profesor y sus estudiantes. Posteriormente, en la etapa 2 se recolectaron los datos a través de dos métodos de recolección implementados en dos momentos. En el primer momento (MR1), se realizó una observación no participante a siete clases impartidas por el profesor interactuando con sus estudiantes sobre el concepto de derivada. En el segundo momento (MR2) se realizaron entrevistas semiestructuradas a los estudiantes cuando resolvían tareas sobre la derivada.

En la etapa tres, se analizaron los datos considerando dos momentos de análisis (MA1 y MA2) correspondientes a cada uno de los momentos de recolección de la etapa 2 (MR1 y MR2) respectivamente. En este sentido, con el fin de responder a la primera pregunta de investigación sobre el surgimiento de la Teoría Ampliada de las Conexiones, en el primer momento de análisis (MA1) se realizó un análisis temático deductivo o basado en teoría, donde se tomaron como categorías previas las propuestas en el modelo de Businskas ampliado con las aportaciones de otros investigadores (nueve tipos de conexiones matemáticas a priori). Para responder a la segunda pregunta de investigación, en el segundo momento de análisis (MA2) se siguieron las estrategias de creación de redes teóricas propuestas por Prediger et al. (2008) entre la TAC y el EOS y, para responder a la tercera y cuarta preguntas se usó el análisis temático sugerido por la TAC y el modelo para el análisis de la actividad matemática propuesto por el EOS para caracterizar las conexiones matemáticas sobre la derivada (ver esquema de la metodología en la Figura 11).

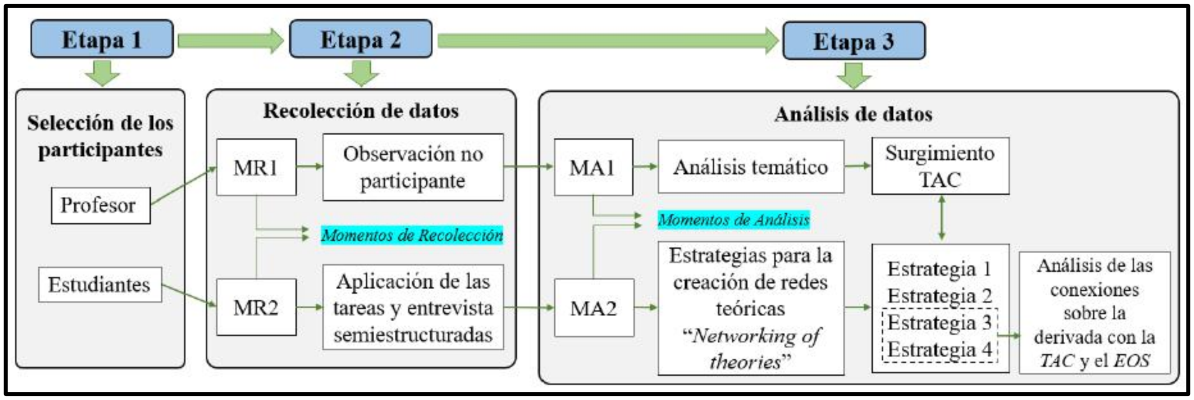


Figura 11. Esquema de metodológico de la investigación.

3.1. Participantes y contexto

La investigación se llevó a cabo con la participación de un profesor con título de Doctor en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa y sus estudiantes que se encontraban en el aula de trabajo. El profesor cuenta con trece años de experiencia impartiendo el curso de Cálculo Diferencial en una Universidad del suroeste de México. El profesor fue seleccionado por su buena comprensión del concepto derivada y, además, permitió voluntariamente la participación de sus estudiantes y la observación durante las clases que se referían a la derivada. En este contexto, participaron diez estudiantes (E1, E2, E3, …, E10), seis hombres y cuatro mujeres entre 18 y 26 años quienes cursaban el primer año de licenciatura en matemáticas donde se desarrolla la temática de la derivada y sus aplicaciones.

3.2. Recolección de los datos

3.2.1. Momento de recolección de datos 1: Observación no participante

La observación no participante se usó para recopilar la información (Caldwell y Atwal, 2005; Cohen, Manion y Morrison, 2018). Este método se usó porque permite capturar la acción social y la interacción a medida que ocurre, entre el profesor y los estudiantes (Caldwell y Atwal, 2005). También, se consideró la perspectiva de Cohen et al. (2018) quien afirma que, "la mejor ilustración del papel de observador no participante es quizás el caso del investigador sentado al fondo de un aula codificando cada tres segundos los intercambios verbales entre profesor y alumnos" (p. 259). En esta línea, la posición que se adoptó fue la de situarse en el fondo del aula como se ilustra en la Figura 12.

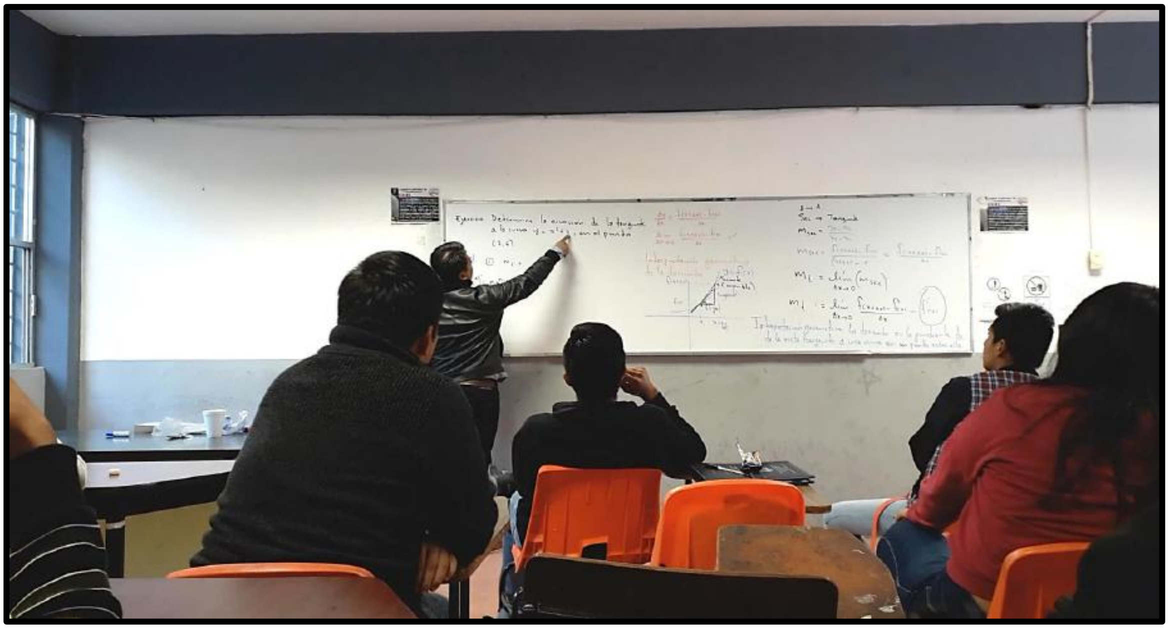


Figura 12. Evidencia de la observación no participante en el aula de clases.

Por lo tanto, en el MR1 de la etapa 2 se observó el desarrollo de las clases de un profesor desde el 8 de enero hasta el 4 de junio de 2019, donde se escuchó, se videograbó y se tomaron notas sin intervenir en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Se observaron siete clases, y se seleccionó la primera porque en ella se identificaron la mayoría de las conexiones matemáticas del modelo de Businskas ampliado con las aportaciones de García-García y Dolores-Flores (2018; 2019). Además, en esta clase (ver extractos de la transcripción en la Tabla 7), se explica la derivada, que requiere el establecimiento de diferentes conexiones por parte del profesor y de los estudiantes.

3.2.2. Momento de recolección de datos 2: Entrevista semiestructurada

En el MR2 de la etapa 2, se realizaron entrevistas semiestructuradas a los estudiantes participantes cuando resolvían un *cuestionario* constituido por siete tareas sobre la derivada (ver sección 3.2.3.). Se usó la entrevista semiestructurada porque,

> Es un intercambio verbal en el que una persona, el entrevistador, intenta obtener información de otra persona haciendo preguntas. Aunque el entrevistador prepara una lista de preguntas predeterminadas, las entrevistas semiestructuradas se desarrollan de una manera conversacional ofreciendo a los participantes la oportunidad de explorar temas que consideran importantes (Longhurst, 2010, p. 103).

Algunas preguntas planteadas en las entrevistas fueron: ¿En qué otro contexto o asignatura se puede definir la derivada? ¿Cómo se trabaja? ¿Qué significa ese hueco o interrupción que mencionaste? ¿Cuándo te refieres a continuidad a qué haces referencia? ¿Por qué es importante hablar de continuidad? ¿Qué características tiene ese punto? ¿Si el límite no existe que pasaría? Estas preguntas se realizaron con base en las respuestas de los estudiantes para profundizar en la temática de interés.

Cabe destacar que, las entrevistas se realizaron cara a cara o presencial entre el investigador y los estudiantes de manera individual desde el 4 hasta el 13 de junio de 2019, pero, hubo situaciones donde se hicieron entrevistas adicionales y aclaraciones por medio de *Skype*, *Google Meet* y *Zoom* (e.g., 12 de octubre de 2019), especialmente en tiempos de la pandemia generada por la Covid-19 procedente del virus SARS-CoV-2 (e.g., 22 de mayo de 2021), ver Figura 13.

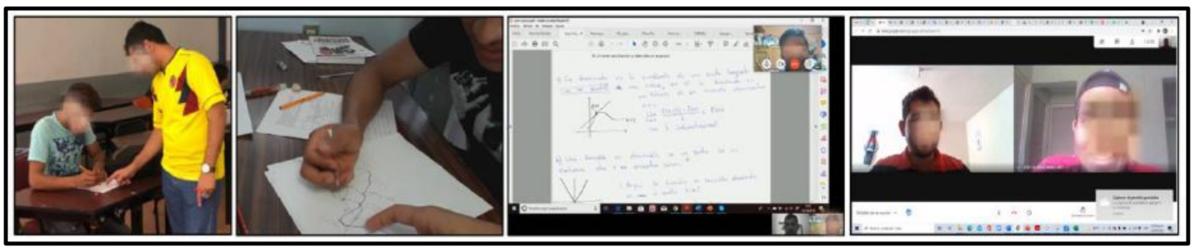


Figura 13. Modalidades de las entrevistas semiestructuradas (presencial y en línea).

3.2.3. El cuestionario

Para la recolección de los datos se diseñó y propuso un cuestionario constituido inicialmente por seis tareas, con el objetivo de explorar las conexiones matemáticas. Para ello, se consideró la revisión de la literatura donde se obtuvo información importante sobre la problemática relacionada con las conexiones y la comprensión del concepto derivada y qué tipo de tareas son pertinentes (e.g., García-García, 2018; Fuentealba *et al*., 2019). Otro elemento importante que se tuvo en cuenta fue la revisión del Plan de Estudios de la licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro, 2009), dado que localmente el trabajo se implementa en dicha institución de nivel superior.

El plan de estudios se revisó con el objetivo de saber qué contenidos se abordan en la asignatura de Cálculo Diferencial y en que semestre se imparte el curso. Asimismo, se identificó el contenido curricular sobre el tema derivada, en el cual se presenta un objetivo de aprendizaje, habilidades del egresado respecto del programa de Cálculo y unidades de aprendizaje. En este contexto, se describen sintéticamente aspectos esenciales del documento curricular avalado y sugerido por la Facultad de Matemáticas. El objetivo general de la unidad de aprendizaje es fundamentar y ampliar los conocimientos de Cálculo adquiridos durante la preparatoria e introducir a los estudiantes en el pensamiento abstracto, y, a continuación, se presentan algunas habilidades que tendrá el estudiante egresado del programa de licenciatura en matemáticas (UAGro, 2009):

- Formular y aplicar las proposiciones que caracterizan al conjunto de los números reales.
- Definir y utilizar los conceptos de función, función compuesta y función inversa, así como las funciones elementales.
- Enunciar, interpretar y aplicar los conceptos de límite de una función real de una variable real, así como formular, demostrar y aplicar propiedades de estos.
- Calcular límites de funciones elementales, incluyendo casos indeterminados
- Enunciar e interpretar el concepto de continuidad de una función en un punto o en un intervalo, así como analizar y determinar la continuidad de ciertas funciones
- Enunciar, demostrar y aplicar las proposiciones que dependen de la continuidad de una función en un punto o en un intervalo.
- Formular el concepto de derivada y sus aplicaciones e interpretaciones (haciendo énfasis en las interpretaciones físicas y geométricas de la misma. Se analizarán conceptos de área, volumen, velocidad, aceleración, máximos y mínimos).

Ahora bien, el contenido a desarrollar en el curso de Cálculo Diferencial programado para el primer semestre de la licenciatura en matemáticas (UAGro, 2009), está constituido por tres unidades de aprendizaje. En la primera se identificó el contenido relacionado con los números reales. En la segunda se desarrolla el contenido de límite y continuidad, y la tercera unidad hace referencia al tema de *derivada*, el cual es de interés en esta investigación. Además, es importante mencionar que, el objetivo que se debe lograr en el curso de derivada es: hacer que el estudiante domine el concepto de derivada y sus diferentes aplicaciones. También, que el estudiante sea capaz de usar este conocimiento en problemas de aplicación de máximos y mínimos. Para el logro de los objetivos, se deben considerar algunos contenidos, por ejemplo,

a) *el concepto de derivada y sus interpretaciones:* velocidad, tangente, razón de cambio, interpretación intuitiva y definición formal de la derivada; b) *propiedades de las funciones diferenciables*: propiedades de la derivada, ejemplos y contraejemplos; c) aplicaciones: máximos y mínimos, funciones convexas.

La revisión del Plan de estudios permitió entre otros aspectos, evidenciar que en la primera unidad deben promoverse conexiones matemáticas entre significados e interpretaciones de la derivada (velocidad, tangente, razón de cambio, interpretación intuitiva y definición formal de la derivada). Asimismo, lo que sugiere el plan de estudios coincide con la exigencia de la investigación sobre las conexiones y comprensión del concepto derivada: que los estudiantes resuelvan problemas extramatemáticos y de aplicación sobre máximos y mínimos.

El cuestionario fue validado por de dos formas: 1) *por usuarios* (cuatro estudiantes de licenciatura en matemáticas), a quienes se les aplicó el cuestionario en el contexto de una aplicación piloto con los siguientes propósitos: a) verificar la claridad de las tareas del cuestionario. b) Obtener retroalimentación sobre la validez de las tareas del cuestionario, la operacionalización de los constructos y los propósitos de la investigación para eliminar ambigüedades en la comprensión de las tareas, y, c) identificar omisiones, elementos o palabras redundantes e irrelevantes (Cohen et al., 2018). 2) *por dos profesores-investigadores* expertos en la temática de la derivada, conexiones matemáticas y las perspectivas teóricas usadas en esta investigación, uno de la Universidad Autónoma de Guerrero y el otro profesor de la Universidad de Barcelona. La validación implicó la revisión detallada de las tareas, considerándose que al resolverse emergieran conexiones matemáticas. También, que las tareas fueran adecuadas para los estudiantes, comprensibles y coherentes con el nivel educativo. Por último, uno de los profesores sugirió la incorporación de una tarea al cuestionario (actualmente es la tarea 5 de 7) para que emergiera la conexión matemática de reversibilidad.

En este sentido, la revisión de la literatura y del plan de estudios de la UAGro, los resultados obtenidos del pilotaje fueron útiles para el rediseño de las tareas y conformar un instrumento final que se constituyó por siete tareas. Además, el cuestionario se aplicó presencialmente en una sesión de tres horas con entrevistas semiestructuradas y, posteriormente se hicieron algunas entrevistas complementarias de manera virtual para corroborar algunas respuestas de los estudiantes. A continuación, se presentan las tareas, el propósito de cada una y su relación con el problema de investigación.

3.2.3.1. Tareas

3.2.3.1.1. Tarea 1

Nombre: ________________________________Edad: ________Semestre: ________

Carrera/Asignatura: __________________________________Fecha: _____________

a) Para ti ¿Qué significa la derivada? Explica tu respuesta y si es posible da ejemplos.

b) ¿Cuándo una función es derivable en un punto? Argumenta tu respuesta.

La tarea 1 se propuso con el objetivo de explorar las conexiones matemáticas de significado de la derivada que tienen los estudiantes universitarios. Además, esta tarea es adecuada porque manifiesta su importancia y necesidad de profundizar sobre el significado de la derivada, de hecho, la literatura reporta que los estudiantes, futuros profesores y algunos profesores en servicio tienen dificultades para conectar significados parciales del concepto de derivada.

3.2.3.1.2. Tarea 2

Dada la función $f(x) = 2x^2 - x$, halla la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = \frac{5}{2}$. Argumenta tu respuesta.

La tarea 2 fue retomada y adaptada de la investigación de Orts, Llinares y Boigues (2018), que se había propuesto en el diseño de una trayectoria de aprendizaje sin superar la concepción euclídea. No obstante, en esta investigación se propuso para explorar conexiones de significado, procedimientos y representaciones diferentes.

3.2.3.1.3. Tarea 3

Dada la función $g(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$,

a) Encuentre los intervalos en los que g es creciente o decreciente.

b) Determine dónde la función tiene máximo relativo o mínimo relativo.

c) Halle los puntos de inflexión de la función.

d) Determine dónde la gráfica es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

e) Realice una gráfica de la función derivada g'.

f) Explique ampliamente ¿Qué relación tiene la gráfica de g con la gráfica de g'?

Dado que la literatura sugiere que los estudiantes resuelven adecuadamente problemas sobre la gráfica de la derivada cuando se les da la expresión algebraica de g o g', en esta investigación se propone la tarea 3 con el objetivo de identificar las conexiones cuando los estudiantes encuentren los intervalos de crecimiento y decrecimiento, valores extremos, puntos de inflexión y concavidad de la función dada por una expresión algebraica.

3.2.3.1.4. Tarea 4

Dada la gráfica de una función f (ver Figura 14), determina:

a) Los intervalos en los que f es creciente o decreciente.

b) En qué puntos la función tiene máximo relativo o mínimo relativo.

c) Los puntos de inflexión de la función.

d) En qué intervalo la gráfica de f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

e) Realiza una posible gráfica de la función derivada f'.

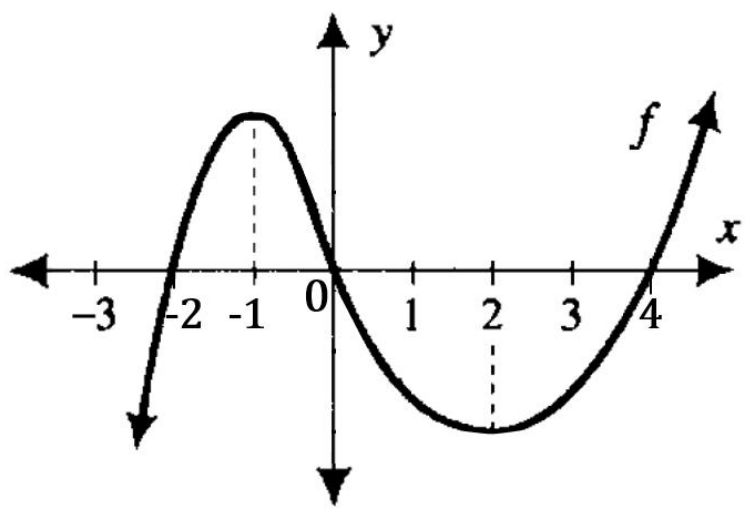


Figura 14. Gráfica de la función f (Leithold, 1998, p. 248).

3.2.3.1.5. Tarea 5

Dada la gráfica de la derivada de f (ver Figura 15), bosqueja la(s) posible(s) gráfica(s) de la función f. Argumenta tu respuesta y, además, determina:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) Los valores máximos o mínimos de f.

c) Los puntos de inflexión.

d) Los intervalos donde f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

e) Esboza la gráfica de f considerando la información de la gráfica de f'.

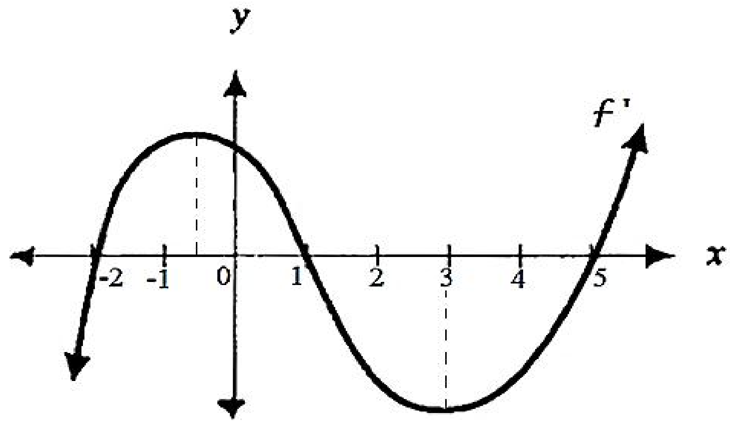


Figura 15. Gráfica de la función derivada f' (Leithold, 1998, p. 228).

Las tareas 4 y 5 fueron propuestas para que los estudiantes establecieran conexiones matemáticas, en especial la de reversibilidad donde a partir de la gráfica de la función derivada, se debe bosquejar la gráfica de la función original o viceversa. Estas tareas fueron retomadas del libro de Cálculo de Leithold (1998) y, además, fueron de interés en este estudio porque la literatura afirma que los estudiantes tienen dificultades para gráficar a f dada f' o viceversa, lo cual requiere del establecimiento de conexiones o relaciones lógicas.

3.2.3.1.6. Tarea 6

La gráfica (ver Figura 16) corresponde a la derivada f' de la función f, bosqueja la(s) posible(s) gráfica(s) de la función f, y determina:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) Los valores máximos o mínimos de f.

c) Los intervalos donde f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

d) Los puntos de inflexión.

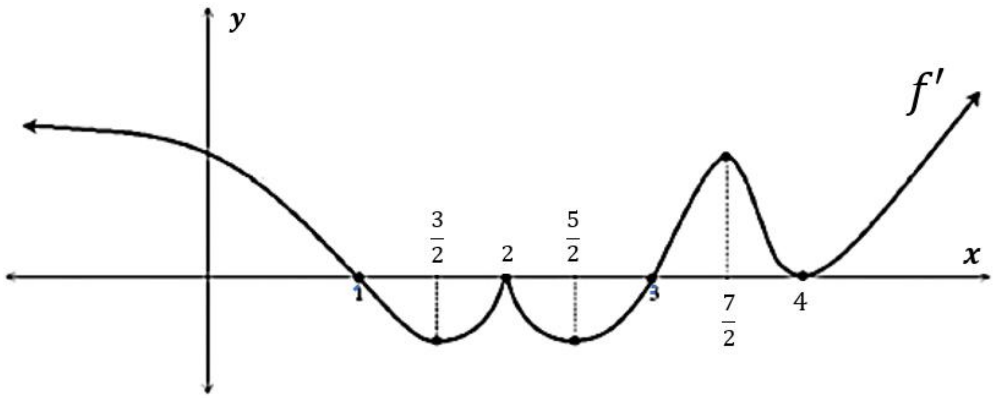


Figura 16. Gráfica de la derivada f' (Spivak, 1992, p. 284).

La tarea 6 fue retomada del libro Cálculo de Spivak (1992, p. 289), y tuvo el propósito de que los estudiantes bosquejaran la gráfica de f a partir de la gráfica de la derivada sin considerar la expresión algebraica, de tal forma que emergieran las conexiones matemáticas de reversibilidad. Cabe resaltar que, esta tarea ha sido utilizada en los trabajos de Fuentealba et al. (2015), Fuentealba (2017) y Fuentealba et al. (2019) para analizar los esquemas de la derivada desde la teoría APOE.

3.2.3.1.7. Tarea 7

Un fabricante de cajas de cartón quiere elaborar cajas abiertas a partir de trozos rectangulares de cartón con dimensiones de 10 pulgadas por 17 pulgadas, cortando cuadrados en las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba. Con base en la información anterior, determine la longitud del lado de los cuadrados que se deben cortar de modo que la caja tenga el mayor volumen posible.

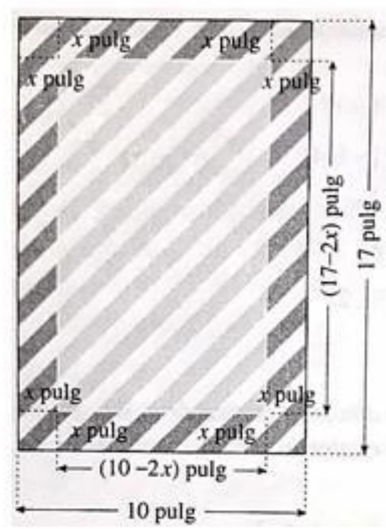


Figura 17. Problema de aplicación (Leithold, 1998, p. 208).

La tarea 7 (ver Figura 17) fue retomada del libro de Cálculo de Leithold (1998), con el objetivo de que los estudiantes establecieran conexiones matemáticas de modelado, dado que se les pide hallar la longitud del lado de los cuadrados que se deben cortar de tal forma que la caja tenga el mayor volumen posible. En este sentido, es indispensable que los estudiantes identifiquen un modelo que les permita resolver la tarea.

3.3. Análisis de los datos

3.3.1. Momento de análisis 1

En la etapa 3, en el momento de análisis 1 (MA1) se siguió una adaptación del análisis temático propuesto por Braun y Clarke (2006), que "es un método para identificar, analizar y reportar patrones (temas) dentro de los datos" (p. 79). Según Braun y Clarke (2006) el análisis temático puede ser inductivo o deductivo basado en teoría y, se lleva a cabo en seis fases (ver Tabla 6). El análisis inductivo se basa en la codificación de los datos sin intentar encajarlos en un marco teórico previo que sea de interés para el investigador (Braun y Clarke, 2006). Mientras que, el análisis deductivo se desarrolla a partir de un proceso de codificación con base en unas categorías previas. En la investigación que se presenta se ha usado en diferentes momentos los dos tipos de análisis, ya que se ha evolucionado desde un enfoque deductivo a un enfoque inductivo, lo cual, según Braun y Clarke (2006), es una evolución de codificación que se da en algunos casos "puede codificar una pregunta de investigación bastante específica (que se asigna al enfoque más teórico) o la pregunta de investigación específica puede evolucionar a través del proceso de codificación (que se asigna al enfoque inductivo)" (Braun y Clarke, 2006, p. 84).

Tabla 6. Fases del análisis temático.

Fases	Descripción
Familiarización con los datos	Las grabaciones de clases del profesor fueron transcritas y leídas para familiarizarse con la información obtenida.
Generación de códigos iniciales	Se generaron códigos iniciales donde se identificaron palabras o frases relacionadas con la tipología de conexiones matemáticas (las nueve categorías a priori sobre conexiones matemáticas mencionadas en el marco teórico).
Búsqueda de temas	Se identificaron las relaciones entre los códigos generados en la fase anterior con el fin de establecer un conjunto de códigos, es decir, tipos

	de conexiones matemáticas que, de ser necesario, se usaron para la conformación de temas.
Revisión de temas	La asignación de temas a los extractos codificados se triangula con expertos sobre conexiones matemáticas y el EOS.
Nombramiento de temas y temas ambiguos	Se hace un análisis detallado para cada código para ver si cae bajo el dominio de un tema, si es un código ambiguo que podría asignarse a varios temas (conexiones) o debería asignarse a un nuevo tipo de conexión matemática.
Reporte de conexiones y nuevos temas	Finalmente, se hizo una confrontación de los códigos ambiguos con la literatura para generar nuevos tipos de conexiones o afinar algunas de las categorías a-priori.

También consideramos las notas de campo tomadas durante la observación no participante para este análisis, conformadas por interpretaciones del investigador sobre la práctica del profesor. Cabe destacar que, a partir de la quinta fase se inició un proceso de triangulación donde se tuvieron en cuenta *dos niveles de ambigüedades* para analizar las conexiones.

3.3.2. Momento de análisis 2

En el momento de análisis 2 (MA2) se consideraron los cuatro pares de estrategias de creación de redes (descritas en el marco teórico), con el propósito de coordinar y combinar las teorías. Según Prediger et al. (2008) y Bikner-Ahsbahs y Prediger (2010) es importante seguir estrategias para articular teorías, que van desde ignorar por completo otros marcos teóricos en un extremo, hasta unificar globalmente diferentes enfoques en el otro extremo. El primer par de estrategias se refieren a la compresión de ambas teorías por parte de los investigadores (doctorando y asesores en este caso). El segundo par de estrategias invita a la comparación y contrastación de las teorías para identificar puntos en común o diferencias entre las teorías. El tercer par dirige a los investigadores a la combinación y coordinación de las teorías dejando un marco de complementariedades conceptuales para generar una nueva teoría o metodología. En el cuarto y último par de estrategias, se integra y sintetiza localmente las complementariedades que llevan a la conformación de un marco teórico holístico. No obstante, en esta investigación se sintetizan localmente ambas teorías, dado que, la conceptualización de conexión es de frontera y común para ambos enfoques teóricos, lo cual permite el análisis más detallado de las conexiones.

Particularmente, en esta investigación las primeras tres estrategias de redes fueron usadas para comprender, comprar y combinar las teorías. Ahora bien, para responder a la tercera y cuarta preguntas de investigación, en la cuarta estrategia de redes (*integración y síntesis*), se utilizaron las concordancias entre las dos teorías (TAC y EOS) para analizar un contexto de aplicación referido a la resolución de tareas sobre la derivada por parte de estudiantes universitarios, pertenecientes al curso impartido por el profesor participante en la etapa 1. En sus respuestas se caracterizaron las conexiones matemáticas a través de dos análisis que se complementan: el análisis temático deductivo usado en la TAC y el modelo de análisis de la actividad matemática propuesto por el EOS (ver la sección de 4 de análisis y resultados).

Capítulo 4

Análisis y resultados

En este apartado se presentan los resultados basados en el análisis de los datos. Primero, siguiendo las fases del análisis temático del MA1 de la etapa 3, se presenta la Teoría Ampliada de las Conexiones matemáticas y se justifica su necesidad. A continuación, con base en el MA2, se presentan los resultados del networking de teorías entre la TAC y el EOS, y, por último, su aplicación para el estudio de las conexiones matemáticas en el proceso de aprendizaje de los estudiantes sobre la derivada.

4.1. Surgimiento de la Teoría Ampliada de las Conexiones matemáticas

Primero se tomó una posición propia a partir de la revisión de la literatura sobre conexiones. En particular, se tuvieron en cuenta los modelos de Evitts (2004), Businskas (2008), Lapp et al. (2010), Eli et al. (2011) y los aportes de García-García y Dolores-Flores (2018; 2019). Lo anterior permitió establecer nueve categorias de conexiones matemáticas para ser usadas a priori en el análisis temático.

4.1.1. Desarrollo de las fases del análisis temático e identificación de las conexiones matemáticas

En la fase 1 del análisis temático, se transcribió toda la información contenida en el video de la observación no participante y se dejó en forma de texto. De manera simultánea, se reprodujo lo que el profesor escribió en el pizarrón y, en algunos casos, se colocaron fotos de gestos significativos del profesor (ver Figuras 18 - 23). En la fase 2 de la Tabla 6 se dividió el texto transcrito en unidades de análisis denominados códigos. La selección de un párrafo como código viene determinada por la presencia de algunas palabras o frases que sugieren uno de los nueve tipos de conexiones matemáticas. En total, las transcripciones se agruparon en 59 códigos. En la Tabla 7 se muestra una selección de estos 59 códigos, que fueron seleccionados para ilustrar el tipo de conexiones del modelo extendido de Businskas (que se ha tomado como categorías a priori en el marco teórico) o para presentar un nivel de ambigüedad en la asignación del tipo de conexión matemática.

Tabla 7. Extractos de la transcripción del discurso del profesor.

<table>
<tr><th>Código</th><th>Extractos de la transcripción</th></tr>
<tr><td>C3</td><td>Mire esto, el uso del método de cuatro pasos es el uso de la definición (ver Figura 18). Dijimos que hay una variable dependiente que condiciona la función, luego podríamos darle un incremento, diferente de cero, que podría ser positivo o negativo y asignarlo a la variable independiente ($x + \Delta x$). Entonces, dijimos que, bajo este cambio, también habrá otro cambio en la otra variable; esto significa que, si asignamos un valor, nombraremos incremento, a esta variable dependiente, que escribimos así en nuestro caso ($\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$). Una vez que tengamos esta asignación (Δy), y esta asignación (Δx), colocaremos el cociente incremental y luego pasaremos a la situación límite de este cociente incremental. Luego asignamos un valor positivo o negativo a la variable independiente, digamos un incremento. Podríamos hacer que tienda a cero, dijimos que es infinitesimal. Para este incremento asignado a la variable independiente, también es posible medir un cambio en la variable dependiente a través de diferencias; luego forme el cociente incremental, muévase a la situación límite y, si el límite existe como un número real, entonces este límite será la derivada de la función.

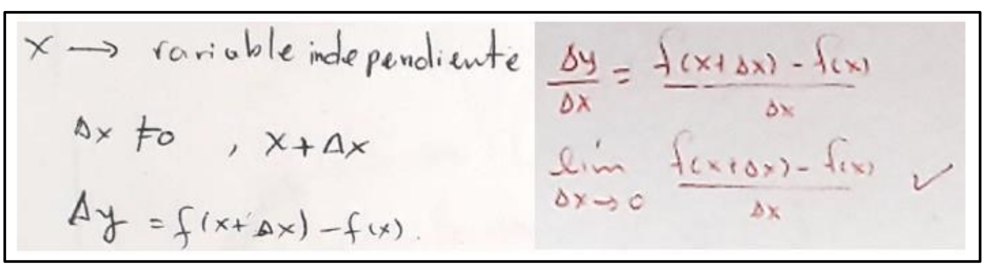
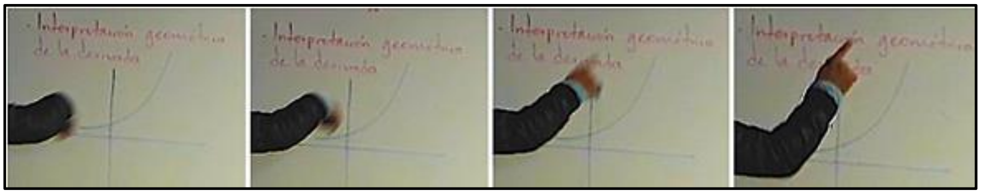
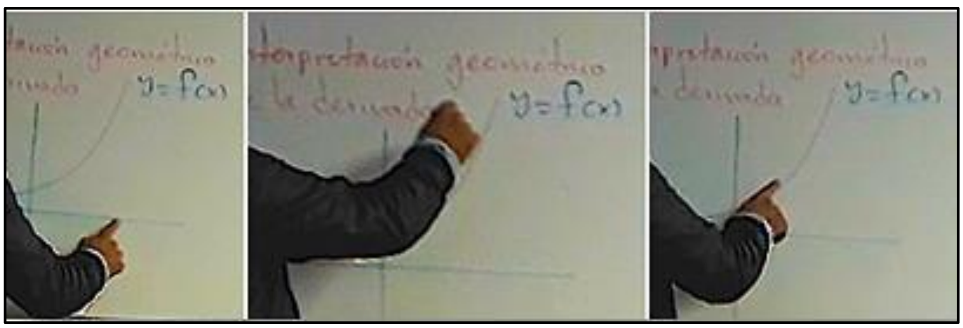
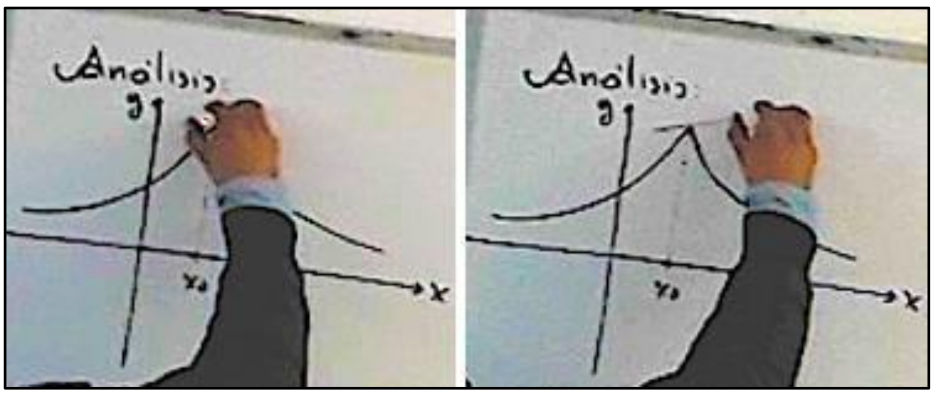
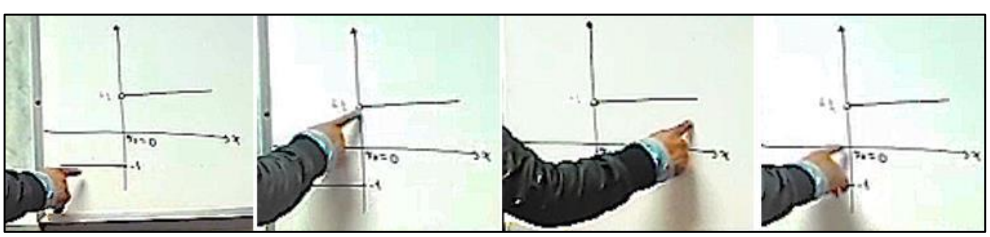
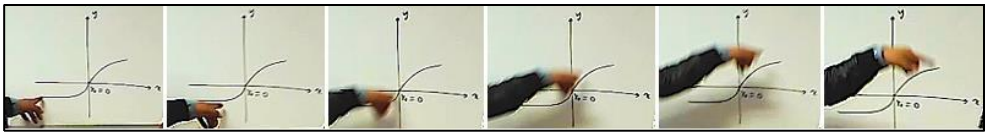


Figura 18. Regla de los cuatro pasos.</td></tr>
<tr><td>C5</td><td>Recordemos que, una de las interpretaciones de la derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto dado.</td></tr>
</table>

C6	Consideremos esto en un gráfico, un pedazo de gráfico (dibuja un gráfico en la pizarra (ver la Figura 19)).  Figura 19. Gráfico para iniciar la interpretación geométrica de la derivada.
C7	Trabajemos en el dominio de los reales (apunta al eje *x*). El gráfico se comporta bien (señala el gráfico); no tiene huecos ni picos, no tiene dificultades (ver Figura 20).  Figura 20. Características de la función continua.
8	En este gráfico, colocaremos un punto A sobre él y trazaremos la recta tangente en este punto. Entonces, lo que estamos diciendo es que la recta tangente y la curva se encuentran en este punto; tienen este punto en común.
C17	Tomemos un valor x que cumpla con (x, y), y le damos un incremento positivo Δx, el cual es $x + \Delta x$; entonces, ¿cuáles serán las coordenadas de este nuevo punto? De aquí para acá, ¿cuánto es?$f(x + \Delta x)$; entonces, ¿cuál será $f(x)$? (se responde a sí mismo Δy). (Ver Figura 25, cuando el maestro está dibujando los segmentos correspondientes de los incrementos mientras explica).
C34	Ahora tenemos una interpretación geométrica de la derivada ... ya tenemos, que la derivada se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos.

C36	Quiero que miren; primero, usé la definición y luego, la interpretación geométrica para ver si esta función tiene una derivada en este punto. El segundo está en el origen (antes, en C35, el profesor dibujó cuatro gráficos, el primero está en C42, el segundo es el gráfico del valor absoluto, el tercero está en C48 y el cuarto está en C50).
C42	La situación [gráfica con pico] habilita la posibilidad de un número infinito [de rectas tangentes] porque rompe con el esquema de la definición de derivada; por lo tanto, esta función, con un pico en su gráfico justo ahí, en el pico, no es derivable (señala el pico del gráfico) (ver Figura 21).  Figura 21. Ejemplo de la gráfica de una función con un pico.
C46	Si una función tiene un límite, su límite es único; por lo tanto, si una función tiene una derivada, su derivada es única.
C48	*Este gráfico está formado en dos partes*; para todos los valores de *x* que sean menores o iguales a cero, la función siempre será menos uno (-1), su imagen es menos uno. El *pequeño hueco* aquí (lo señala con el dedo) significa que esta *rama* del gráfico tiene un significado para todo *x* estrictamente mayor que cero; entonces, para todo *x* mayor que cero, la función siempre será más uno (+1), ver Figura 22.  Figura 22. Gestos que hacen referencia a la continuidad de la función.

C50	Esta pequeña curva, tal como está, ¿creen ustedes que tiene derivada? Puede tener, bajo ciertas restricciones, a diferencia de las otras, cuando analizamos la continuidad, podemos recorrer *(movernos)* a través de ella sin levantar el lápiz del papel (ver Figura 23). Debemos atender a las condiciones que se deben cumplir.  Figura 23. Gestos para recorrer por la gráfica de una función.
C51	Dijimos que todas las fórmulas de derivadas, la mayoría de ellas aparecen en libros de texto, se deducen de la definición de derivada. En cada caso se construye el cociente incremental y luego la situación límite. El resultado es la derivada de la función y se corresponde con la definición dada y con las interpretaciones que estamos obteniendo.
C52	Como tenemos que resolver las siguientes situaciones, dada una función y un punto, prueba que tiene una derivada en el punto dado. Realmente necesitamos usar la definición de derivada; tenemos que construir el cociente incremental y demostrar que existe el límite.
C53	Tenemos que usar la definición para la prueba. Utilice la regla para calcular el valor; particularmente, cuando se usa la definición se pueden ver algunas cosas que no son evidentes. Se encuentran inconsistencias y contradicciones. Nos ayuda a decidir si hay una derivada de la función o no.
C54	Dibujo los gráficos con un propósito. Así como existen los límites laterales a la izquierda y a la derecha, se puede estudiar la continuidad lateral a la izquierda y a la derecha; también hay derivada lateral, a la izquierda y a la derecha del punto. Una condición necesaria y suficiente para que una función sea derivable en un punto es que sus derivadas a la izquierda del punto y a la derecha existan y coincidan.
C55	La fórmula para obtener expresiones de esta forma, ¿cómo dijimos que era la derivada de esta expresión? n por x elevado a la potencia n menos uno

	$(x^n)' = n\, x^{n-1}$. Lo dedujimos ayer; por lo tanto, si usamos esta fórmula, la derivada de esta constante es cero y la derivada de esta expresión es ... Dos x al cuadrado menos uno $(2x^{2-1})$, dos x $(2x)$.
C56	Como nos interesa este punto, colocaremos aquí la pendiente en este punto, ¿cómo quedará? Si reemplazamos este valor por este otro, obtendremos la pendiente, ¿sí o no? Bueno, entonces obtenemos la pendiente $m = 4$ y un punto $(2, 6)$, puede utilizar Geometría analítica.
C57	La fórmula punto-pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$, obteniendo $y - 6 = 4(x - 2) =\ y - 6 = 4x - 8$. ¿Me están siguiendo? Lo igualas a cero $4x - 8 + 6 - y = 0$ entonces $4x - y - 2 = 0$. Esta será la ecuación de la recta tangente a la gráfica en este punto.

En la fase tres, *Búsqueda de temas* (ver Tabla 6), los códigos de la Tabla 7 se agruparon por tipos de conexiones matemáticas (las nueve categorías de conexiones consideradas a priori). En la transcripción solo se identificaron siete de los nueve tipos de conexiones matemáticas, específicamente: significado, representaciones diferentes, procedimental, parte-todo, orientadas a la instrucción, característica e implicación (ver Tabla 8). Finalmente, los códigos agrupados en un tipo de conexión matemática se definen en *temas* que agrupan los tipos de conexiones y el párrafo que se analiza.

Tabla 8. Síntesis de los tipos de conexiones matemáticas establecidas por el profesor.

Temas donde se evidencia algún tipo de conexión		Conexiones matemáticas	Frecuencia
1	Significados o interpretaciones asociados con la derivada (límite del cociente incremental o pendiente de la recta tangente a una curva en un punto).	Significado (S)	11
2	Representación y relación entre los conceptos matemáticos a través de representaciones verbales, algebraicas y simbólicas.	Representaciones diferentes (RD)	8

3	Procedimientos realizados utilizando las fórmulas de derivadas o la definición.	Procedimental (P)	8
4	Relación entre casos de conceptos particular-generales y la relación de inclusión.	Parte-Todo (P-T)	7
5	Requisitos o conceptos previos relacionados con plantear un nuevo concepto.	Orientada a la instrucción (COI)	15
6	Características y propiedades de la función (continuidad de una función).	Característica (C)	10
	Si existe el límite de una función, es única.		3
7	Si se conoce el comportamiento de la recta tangente, también se conoce el comportamiento de la curva.	Implicación (I)	2
	Si existe el cociente incremental, entonces es la pendiente de la recta secante.		3
	Derivabilidad de una función en un punto.		4
		Total	71

Las frecuencias de las conexiones matemáticas en la Tabla 8 difieren del número de códigos en la Tabla 7, porque algunos extractos están en más de una categoría de conexión matemática. Por ejemplo, la conexión matemática de significado se infirió en el código C3; sin embargo, también es posible identificar este extracto con una conexión de tipo parte-todo y con una conexión de tipo procedimental. Por lo tanto, la frecuencia correspondiente de C3 es de tres conexiones matemáticas.

Una de las nueve categorías de conexiones consideradas a priori, la reversibilidad, no se infirió de ningún código (creemos que esto se debe al texto utilizado como contexto de reflexión). A continuación, se muestra el análisis de algunos de los extractos considerados en la Tabla 7, donde están presentes los siete tipos de conexiones matemáticas, siguiendo el mismo orden que los temas (conexiones) presentados en la Tabla 8.

4.1.1.1. Conexiones matemáticas de tipo significado

El término <<derivada>> en C5, C34, C38 da evidencia del significado geométrico (pendiente de la recta tangente a la curva en un punto) como se observa en la Tabla 7; además, esta conexión también se infiere en otros códigos (C33, C38, C58 y C59), que no están contemplados en la Tabla 7. En algunos de estos códigos (C3, C33, C58), el término derivada se asocia con el significado de límite del cociente de las tasas medias de variación de la función. Estos códigos se consideran evidencia de las conexiones matemáticas del tipo significado (Tema 1 de la Tabla 8). Por ejemplo, en el código C33, el profesor mencionó que "*la pendiente de la recta tangente se calcula utilizando el límite del cociente incremental de la función original…, que es la derivada de la función",* lo que indica que ha conectado dos significados con el objeto derivada. Asimismo, en C58 el profesor comentó a sus estudiantes que había definido la derivada como *"el límite del cociente incremental, analizando la interpretación geométrica*" (ver Figura 24).

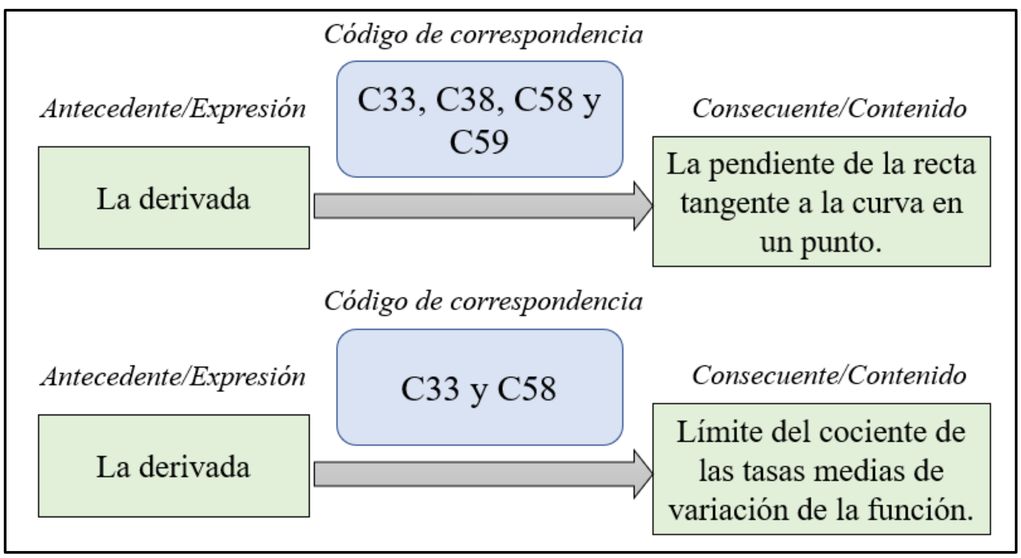


Figura 24. Esquema de la conexión matemática de significado.

4.1.1.2. Conexiones matemáticas de tipo representaciones diferentes

Las conexiones matemáticas entre representaciones diferentes se identificaron en C6 (Tema 2 de la Tabla 8) cuando el profesor mencionó "*consideremos esto en un gráfico, un trozo de* *gráfico*" y escribe la representación simbólica $y = f(x)$ y dibuja un gráfico que es la representación gráfica de esta función. Posteriormente, en C17, conecta los incrementos simbólicos de las variables de la función con su representación gráfica (ver Figura 25).

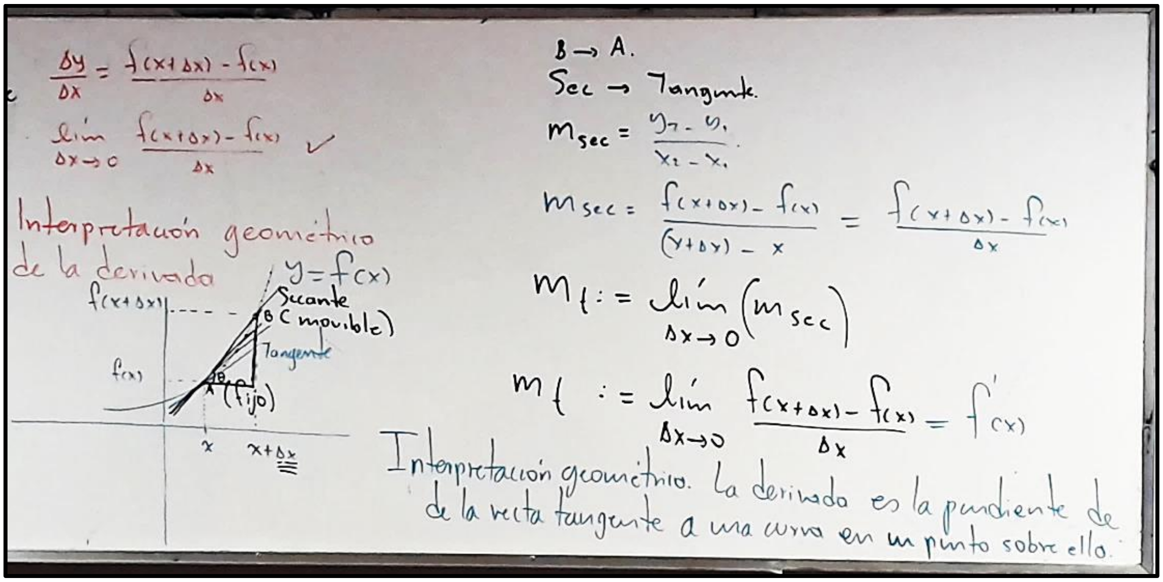


Figura 25. Producción escrita del profesor en relación con los códigos C1 y C34.

Además, en la Figura 25 y en C20 se evidenció la conexión matemática de representaciones diferentes de tipo equivalente, cuando el profesor comentó "*entonces* $f(x + \Delta x)$ *menos* $f(x)$ *sobre* $x + \Delta x$ *menos* x, *hace cuentas ahí*" mientras escribe en la pizarra: $m_{sec} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Otra conexión matemática de tipo representaciones diferentes (equivalentes) se observó en C33, cuando el profesor, después de escribir en la pizarra: $m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, escribió que es igual a $f'(x)$.

4.1.1.3. Conexiones matemáticas de tipo procedimental

Las conexiones matemáticas del tipo procedimental se identificaron en C3 (Tema 3). Incluso cuando C3 se consideró anteriormente como una conexión de significado, también se puede considerar una conexión de tipo procedimental, porque la definición de derivada como límite se convierte en la regla de los cuatro pasos. Otro ejemplo de conexión está en C55, donde se usa la regla de la derivada de una función potencia $(x^n)' = n\, x^{n-1}$. Otros ejemplos de este tipo de conexión se evidencian en C56 y C57. Por ejemplo, en C57 el maestro explicó que puede usar la fórmula punto-pendiente ($y - y_0 = m(x - x_0)$), ya que tiene el valor de la pendiente ($m = 4$) y un punto $(2, 6)$, puede sustituir en la fórmula y obtendrá la ecuación de la recta tangente a la gráfica en un punto dado ($4x - y - 2 = 0$), ver Figura 26.

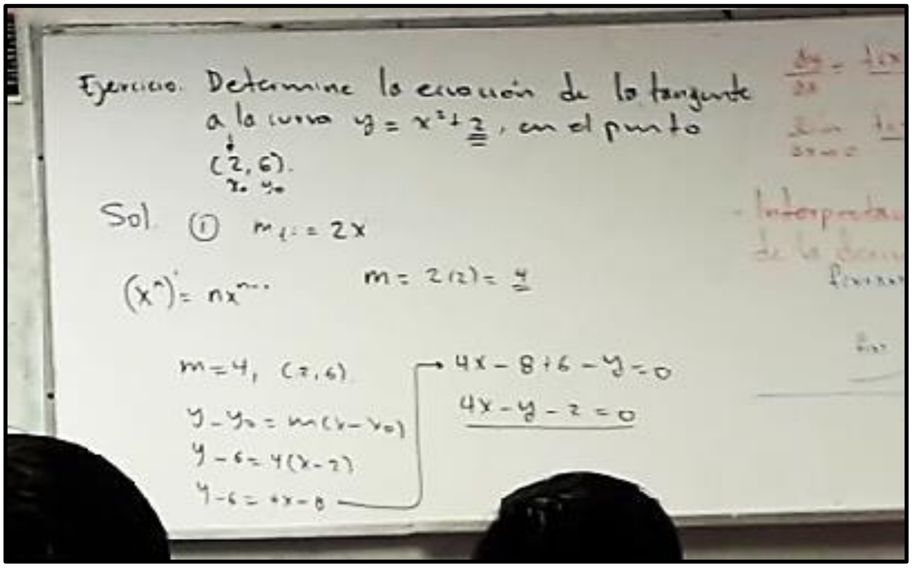


Figura 26. Evidencia de la conexión matemática de tipo procedimental.

4.1.1.4. Conexiones matemáticas de tipo parte-todo

Un ejemplo de este tipo de conexión se da en C48 (Tema 4), donde el profesor da un ejemplo de la gráfica de una función que no tiene derivada en un punto (una de las cuatro gráficas dibujadas por el profesor en C35; específicamente, el tercero). Antes de C48, el profesor explicaba que las gráficas con pico en un punto no tienen derivada, y ahora explica que las gráficas con discontinuidad no son derivables. Consideramos que se establece la conexión matemática del tipo parte-todo, porque trabajó con cuatro casos particulares de funciones no derivables, y estableció implícitamente una categoría general de funciones no derivables en un punto. Por otro lado, cuando el profesor expresó "*esta gráfica está formada por dos partes*", hizo otra conexión matemática de tipo parte-todo, porque hizo referencia a las partes donde se define la función (ver Figura 27).

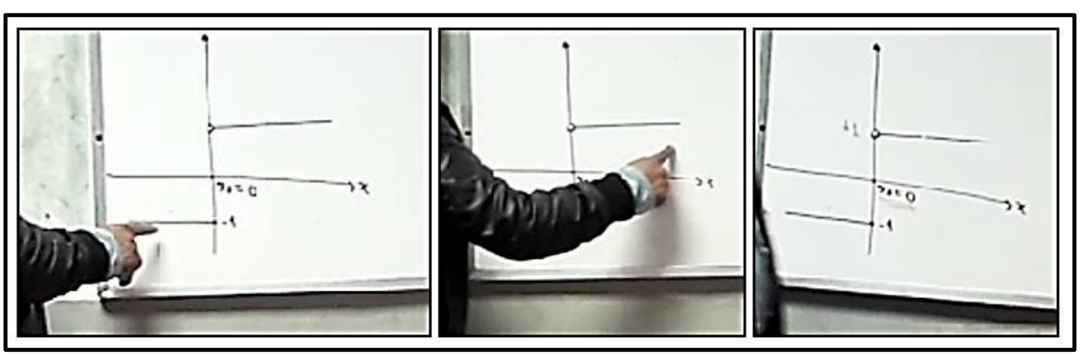


Figura 27. Un ejemplo de función discontinua en un punto. Evidencia de la conexión matemática de tipo parte-todo.

En C6 y C45 se reconocieron otras conexiones matemáticas de tipo parte-todo, ya que el profesor se refirió a *"partes de la gráfica"* en ambos códigos. Por ejemplo, en C45 cuando el profesor preguntó a sus estudiantes sobre la pendiente de cada parte de la gráfica de $f(x) = |x|$: *"¿Cuál es la pendiente de esta parte de la gráfica? Menos 1, ¿y qué pendiente tiene esta parte? Uno"* (ver Figura 28).

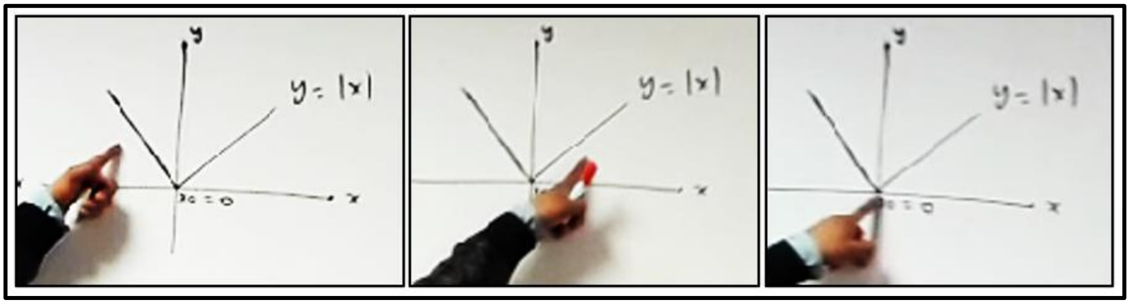


Figura 28. Evidencia de la conexión de tipo parte-todo.

4.1.1.5. Conexiones matemáticas de tipo orientadas a la instrucción

La conexión matemática orientada a la instrucción se identificó en C36 (Tema 5), porque el profesor sugirió a los estudiantes una conexión entre nociones que podría ayudarlos a resolver la tarea propuesta "*Quiero que miren; primero, use la definición y luego, la interpretación geométrica para ver si esta función tiene una derivada en este punto*". Además, en C53 el profesor recomienda que sus alumnos utilicen la definición de derivada, que es importante para identificar si una función tiene derivada o no.

Otro caso de la conexión matemática orientada a la instrucción se identificó en C51, porque el maestro hizo un repaso de todo lo estudiado hasta ese momento. Se pueden ver más ejemplos de esta conexión en C52 y C53 cuando el profesor sugirió considerar conocimientos específicos para resolver las tareas de cálculo de derivadas. Particularmente, en C52 el profesor dijo: "*Ya que tenemos que resolver las siguientes situaciones, dada una función y un punto, demuestre que tiene una derivada en el punto dado. Realmente necesitamos usar la definición de derivada; tenemos que construir el cociente incremental y demostrar que existe el límite".* Otro ejemplo de conexión matemática orientada a la instrucción se observó en el C11, donde el profesor afirmó que *"para saber cómo se comporta la tangente hay que determinar su ángulo de inclinación o su pendiente o la tangente del ángulo de inclinación*".

4.1.1.6. Conexiones matemáticas de tipo característica

Este tipo de conexión se identificó en C7 (Tema 6) cuando el profesor mencionó "*Trabajemos en el dominio de los reales. El gráfico se comporta bien; no tiene agujeros ni picos. No hay dificultades*" con la intención de que los estudiantes tomen nota de que la gráfica es una función derivable en todos los puntos. Asimismo, en C12 cuando el profesor mencionó que la gráfica es "*una curva bien comportada, no tiene huecos, no tiene picos*". Este tipo de conexión matemática también se infirió en C50 cuando el profesor se refirió a la continuidad de la curva al afirmar que "*podemos recorrerla [la gráfica] sin levantar el lápiz del papel".* Otra conexión de tipo característica se evidenció en C42 cuando el profesor se refirió a una de las cuatro gráficas, señalando que la función no tiene derivada en el punto con pico, porque se podrían dibujar infinitas líneas tangentes en ese punto (ver Figura 29), o en C8 cuando comentó que la recta tangente y la curva tienen en común el punto de tangencia.

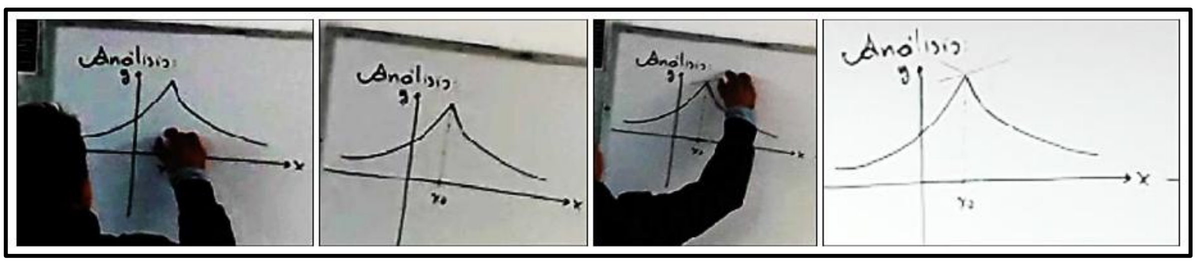


Figura 29. Evidencia de la conexión matemática de tipo característica.

4.1.1.7. Conexiones matemáticas de tipo implicación

La conexión matemática de tipo implicación se infirió en C54 (Tema 7) cuando el profesor argumentó "*(…) así como existen los límites laterales por la izquierda y por la derecha, se puede estudiar la continuidad lateral por la izquierda y por la derecha; también hay derivada lateral, a la izquierda y a la derecha del punto. Una condición necesaria y suficiente para que una función sea derivable en un punto es que sus derivadas a la izquierda del punto y a la derecha existan y coincidan*". Esta conexión también se identifica en C46 y parte de C48. Además, otras conexiones matemáticas que inicialmente se consideraron de tipo de característica (C42, C43 y C44), se observó que también pueden ser consideradas del tipo implicación, es decir, caen en el dominio de dos tipos de conexiones matemáticas simultáneamente. Por ejemplo, en C42 el profesor afirmó que: "*la situación [gráfica con pico] habilita la posibilidad de un número infinito [de rectas] porque rompe con el esquema* *de la definición de derivada; por lo tanto, esta función, con un pico en su gráfica justo ahí, en el pico, no es derivable*", de lo cual se interpreta que, si una función es continua y tiene puntos angulosos o picos, entonces no es derivable en ese punto (ver esquemas de la conexión de implicación en la Figura 30).

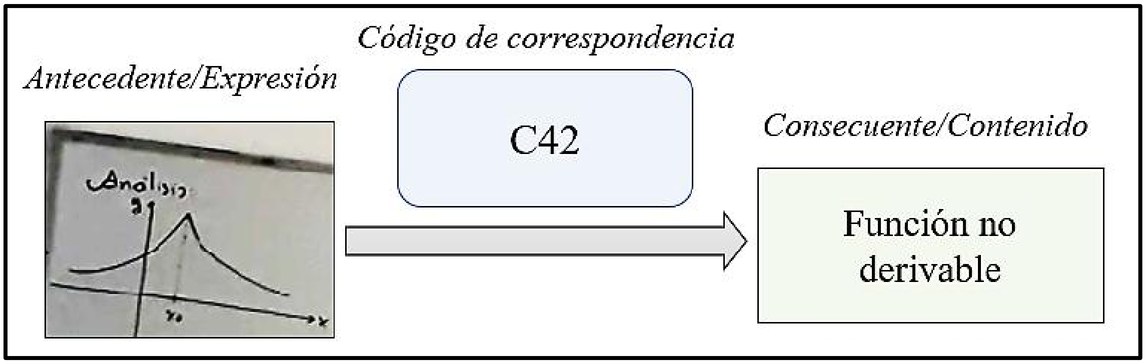


Figura 30. Esquema de la conexión de implicación.

4.1.2. Triangulación

En la fase cuatro del análisis temático, se triangularon todas las conexiones matemáticas identificadas en la Tabla 8 (Aguilar y Barroso, 2015) con un experto en el estudio de las conexiones matemáticas, quien estuvo de acuerdo con el tipo de conexión asignada excepto en dos casos. Por ejemplo, en principio se codificó a C46 como una conexión matemática de implicación, pero finalmente se consideró como una conexión de tipo característica. En el caso de C48, inicialmente se consideraron dos tipos de conexiones (implicación y parte-todo); sin embargo, después de la triangulación la conexión de implicación se modificó a una conexión de tipo característica.

Por otro lado, se destaca que el experto coincidió con el tipo de conexión matemática asignada al C50 debería ser la conexión de tipo característica; no obstante, el experto no identificó que algunas partes del extracto (frases) sugieren otros tipos de conexiones.

Seguidamente, como resultado de la triangulación, en las fases 5 y 6 de la Tabla 6 se muestran algunos de los códigos en la Tabla 7 donde se identificaron ambigüedades durante el análisis utilizando el modelo extendido de Businskas. Estas ambigüedades no permiten la codificación con un solo tipo de conexión matemática, por lo tanto, se han generado dos niveles en la clasificación de estas ambigüedades: 1) los que no necesitan nuevos tipos de conexiones matemáticas, y 2) los que requieren del establecimiento de un nuevo tipo de conexión matemática, diferente a los planteados en el marco teórico. Los primeros se refieren a los códigos que podrían asignarse a dos o más tipos de conexiones, mientras que en los segundos se tiene la necesidad de crear nuevos tipos de conexiones matemáticas.

En las ambigüedades de *nivel 1*, la conexión matemática de significado se identificó en C3 durante el primer análisis, cuando el docente explicó la <<derivada>> como el límite del cociente incremental. Sin embargo, este párrafo también evidencia el uso de la regla de los cuatro pasos; esto significa que este código también podría asignarse a la conexión matemática de tipo procedimental. Desde otra perspectiva, también se observó que el cociente incremental se consideró implícitamente como cualquier cociente de una clase de tasas medias durante el discurso del profesor. En este sentido, en C3 también se identifica la conexión matemática de tipo parte-todo. Una posible forma de avanzar en estos casos es la triangulación entre expertos para concretar la conexión más relevante en este contexto. Otra posibilidad es asignar el mismo código a varios tipos de conexiones matemáticas simultáneamente.

En las ambigüedades de *nivel 2*, se mostrará a continuación un ejemplo de los problemas producidos utilizando las tipologías a-priori de conexiones matemáticas tomadas del marco teórico. El código C50 se relacionó con la conexión matemática de tipo de característica durante el primer análisis (ver Figura 31), porque el profesor animó a sus estudiantes a visualizar que la función tiene la propiedad de ser continua en todos sus puntos.

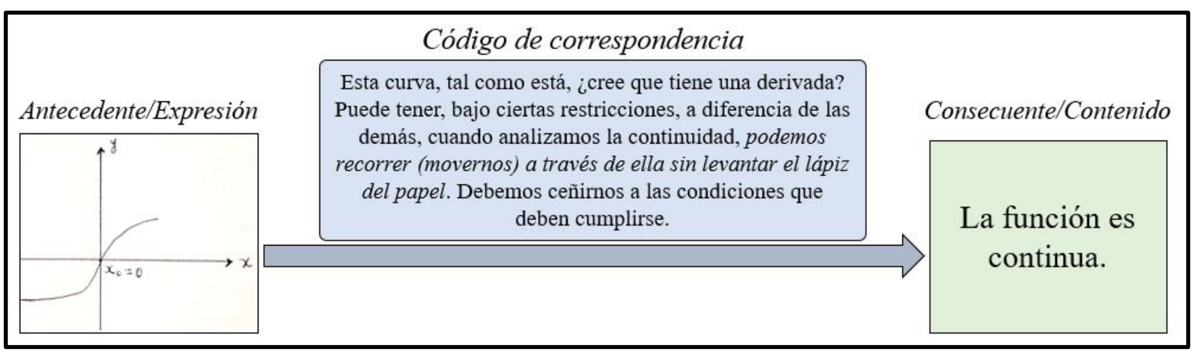


Figura 31. Conexión matemática de tipo característica (Creación propia).

Sin embargo, si este es el único tipo de conexión considerada, dejaría de mostrarse la evidencia de los otros tipos de conexiones que también podrían ser relevantes para explicar los errores y las dificultades de los estudiantes. La continuidad asociada con el dibujo de un trazo de gráfica con un lápiz se considera una idea intuitiva que ayuda a comprender una función continua; sin embargo, varias investigaciones señalan algunas dificultades y limitaciones relacionadas con esta idea intuitiva. Por ejemplo, Jayakody (2015) mencionó algunas dificultades de los estudiantes cuando dicen que una función continua es la que se podría dibujar sin levantar el lápiz del papel. Además, Hanke (2018) afirmó que esta idea debe usarse con cuidado para hacer demostraciones matemáticas en los cursos de topología, y Millspaugh (2006) expresó las dificultades y limitaciones para conectar esta idea intuitiva con una definición más formal de una función continua.

Por otro lado, la idea de que un gráfico pueda ser considerado como el trazo que deja el lápiz sugiere la idea de que "*la gráfica es un camino*" (Lakoff y Núñez, 2000); incluso puede ayudar a generar el error conceptual común de que los gráficos son simples «dibujos» de las situaciones representadas (Shell Center for Mathematical Education, 1990). Por ello, este código (C50) también puede ser considerado como una expresión metafórica (*podemos recorrer (movernos) a través de él sin levantar el lápiz del papel)* que sugiere la metáfora conceptual del tipo grounding "*la gráfica es un camino*". En otras palabras, el profesor podría pensar que ha explicado en C50 que la función es continua; y de hecho, es posible pensar que esto es cierto para algunos estudiantes (ver Figura 32). No obstante, la literatura sobre funciones ha documentado que muchos estudiantes mantienen la idea de que una gráfica es un camino.

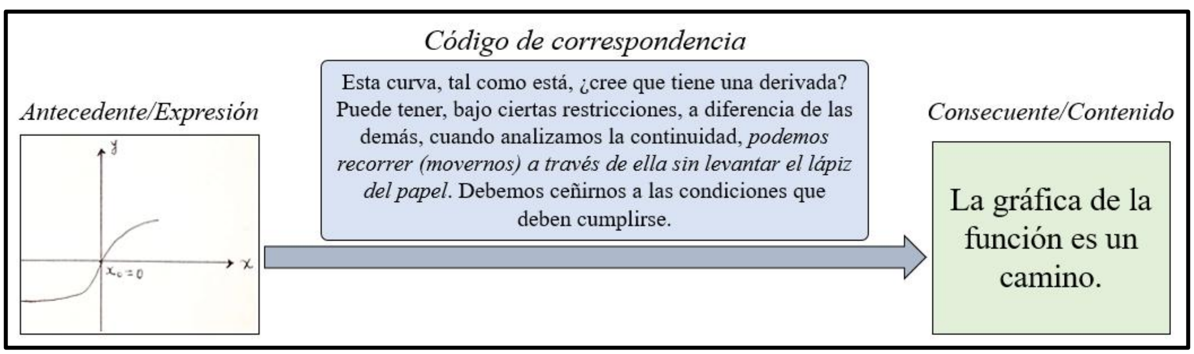


Figura 32. Conexión matemática de tipo metafórica (Creación propia).

En consecuencia, se propone la incorporación de un nuevo tipo de conexión a los nueve tipos de conexiones matemáticas presentadas en el marco teórico inicial, a saber, la conexión *metafórica*. Esta conexión surge de la revisión de la literatura sobre cómo las metáforas afectan (en pro o en contra) la comprensión de las nociones matemáticas. Este nuevo tipo de conexión funciona como se muestra en la Figura 33, donde se resume el proceso de la conexión metafórica "*la gráfica es un camino*". Esta nueva tipología responde al llamado hecho por García-García (2019) donde manifiesta que se pueden incluir otras categorías de conexiones matemáticas a las ya existentes.

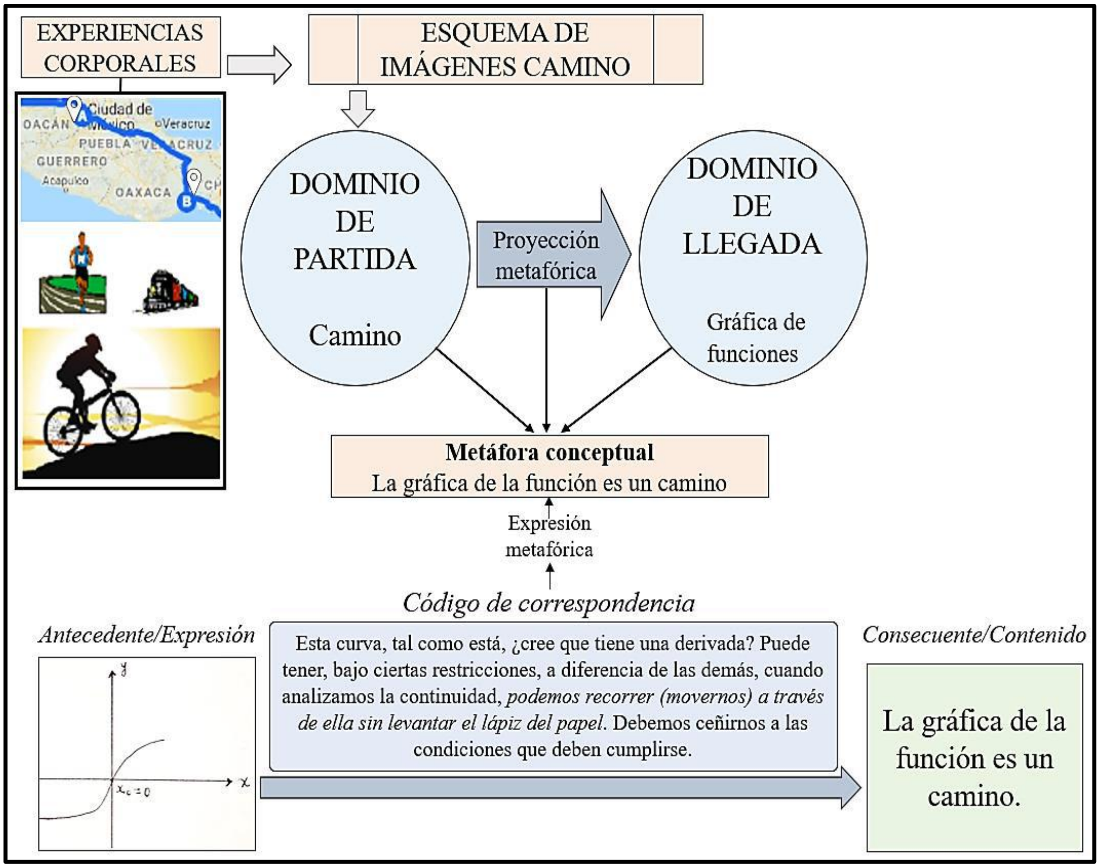


Figura 33. Caracterización y proyección de la conexión metafórica (Tomado de Rodríguez-Nieto et al. (2020)).

En la Figura 33, se evidencia que el profesor utiliza expresiones verbales como "*podemos recorrer (movernos) a través de él sin levantar el lápiz del papel*" (llamadas expresiones metafóricas) que implícitamente sugieren en el estudiante la metáfora conceptual "*la gráfica es un camino*". Se trata de una proyección metafórica del tipo *grounding* en la que el dominio de salida es el esquema de imagen del camino (Johnson, 1987) cuya estructura es "*Fuente-Camino-Meta*" que todos tenemos desde la infancia como resultado de nuestras experiencias físicas al caminar (ver Figura 34).

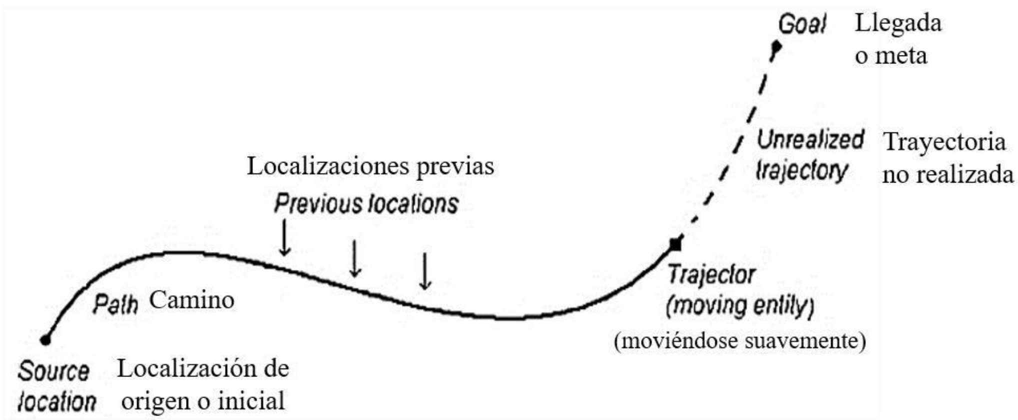


Figura 34. El "Origen-Camino-llegada" (tomado de Font et al. (2010, p.136)).

Este esquema de imagen (Figura 34) surge de nuestras experiencias físicas al caminar desde un punto de partida (origen), una ruta a seguir (camino) y un punto de llegada (meta). Se experimenta el mismo patrón en una variedad de actividades y experiencias motoras básicas, e incluso se podría proyectar en otras experiencias de dominios no básicos que podrían entenderse con esta estructura. Estas experiencias no serían significativas para nosotros sin la participación de este patrón. La proyección de este esquema de imagen nos permite hablar y razonar sobre los diferentes tipos de entidades abstractas (funciones en este caso) como si fueran el resultado de seguir un camino. En términos de Lakoff y Núñez (2000), esta es una proyección metafórica del tipo grounding (conectada a tierra), que se describe en la Tabla 9.

Tabla 9. La gráfica es un camino.

DOMINIO DE PARTIDA Camino	DOMINIO DE LLEGADA Gráfica de la función
Una localización en el camino	Punto de la gráfica
Estar sobre el camino	La relación de pertenencia (ser un punto de la gráfica)
Origen del camino	Origen del camino (por ejemplo, menos infinito)
Final del camino	Final de la gráfica (por ejemplo, más infinito)
Estar fuera del camino	Puntos que no pertenecen a la gráfica

Note. Información tomada de Font *et al*. (2010, p. 139).

Cabe destacar que, el profesor participante utiliza otras expresiones metafóricas durante sus clases que implícitamente sugieren la misma metáfora conceptual a la que nos referimos; por ejemplo, en los códigos C7, C8 y C12. También, se debe tener en cuenta que esta proyección metafórica no solo se activa a través de las expresiones verbales, sino también por los gestos que realiza el profesor mientras *sigue el recorrido del gráfico con el dedo* (ver Figuras en los códigos C6, C42, C48 y C50). En este sentido, en Font et al. (2010) afirma que las metáforas conceptuales

> Permiten agrupar expresiones metafóricas. Una expresión metafórica, por otro lado, es un caso particular de metáfora conceptual. Por ejemplo, la metáfora conceptual "la gráfica es un camino" aparece en el discurso del aula a través de expresiones como "la función pasa por el origen coordenado" o "si antes del punto M la función es ascendente y después descendente entonces tenemos un máximo". Es poco probable que el profesor diga a los estudiantes que "*la gráfica es un camino",* sino que utilizará expresiones metafóricas que lo sugieran (p. 19).

Asimismo, se consideran dos tipos de metáforas conceptuales (Font, Bolite y Acevedo, 2010; Lakoff y Núñez, 2000): 1) *Metáforas de tipo grounding*: estas relacionan un dominio de llegada de las matemáticas con un dominio de origen fuera de las matemáticas. 2) *Metáforas de tipo linking*: mantienen los dominios de origen y llegada dentro de las matemáticas e intercambian propiedades entre diferentes campos matemáticos.

Se considera que, si no se introduce la idea de conexión metafórica, se podría ignorar la sutil diferencia que existe entre los códigos C8 y C48 que va más allá de la consideración de que el primer extracto se considera como una conexión de tipo característica y el segundo como una conexión de tipo parte-todo. En C8, el profesor dijo que el punto está arriba del gráfico, en este sentido, la metáfora "*la gráfica es un camino*" está en uso porque las personas están por encima del camino y no son parte del camino en el dominio inicial. Por otro lado, el gráfico en C48 se entiende como algo formado por partes, y estas partes están formadas por puntos; esto implica que los puntos son parte del gráfico, lo que da como resultado una vista *estática* del gráfico, mientras que C8 tiene una vista más *dinámica* del gráfico. Además de la conexión de característica, C8 también utiliza una conexión matemática metafórica.

La conexión metafórica es la nueva categoría que permite detallar y conformar la Teoría Ampliada de las Conexiones matemáticas (TAC) (ver Figura 35).

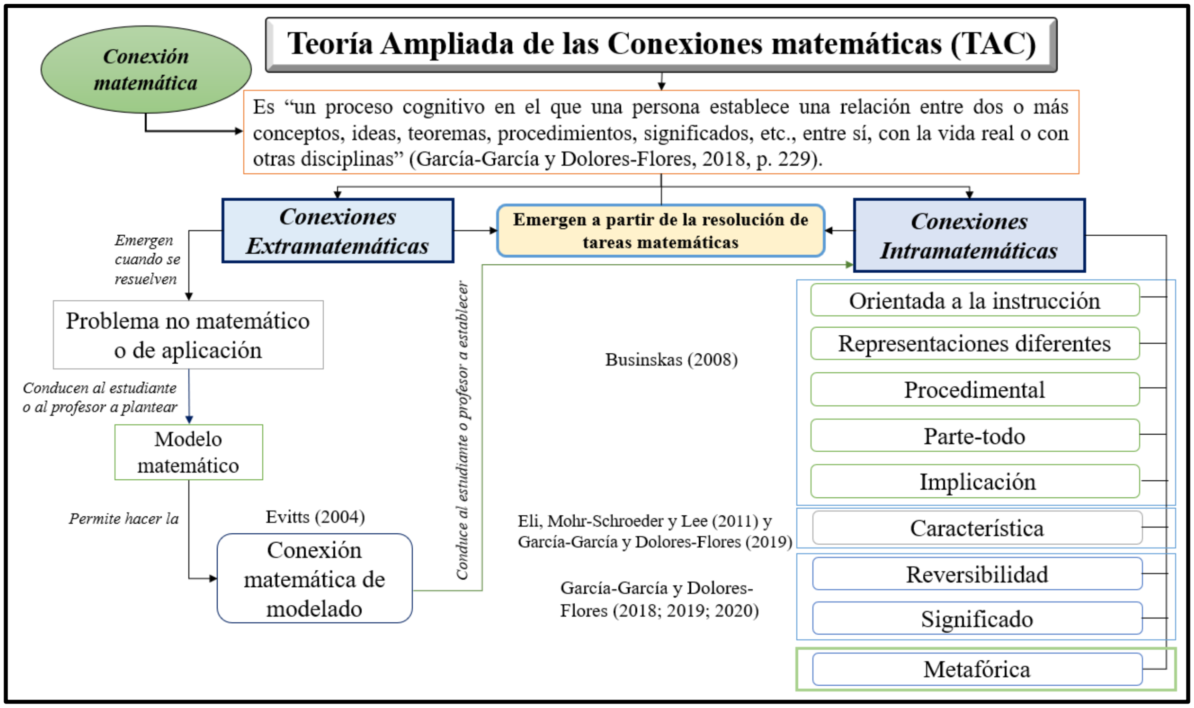


Figura 35. Conexiones matemáticas con adaptaciones de García-García y Dolores-Flores (2018; 2019; 2020) y ampliaciones realizadas en esta investigación.

Seguidamente, se concluyó que la conexión metafórica permitió un mejor análisis de las conexiones matemáticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, que es esencial para comprender las nociones matemáticas y son un recurso muy utilizado por los profesores de matemáticas durante sus clases. Además, esto llevó a la extensión del modelo de Businskas (2008) que se había reforzado con aportaciones de otros autores (García-García y Dolores-Flores, 2018; 2019), es decir, con la nueva categoría de conexión se estructura la Teoría Ampliada de las Conexiones (TAC). No obstante, de este análisis solo se profundizó en la conexión de tipo característica, pero se identificó una nueva categoría "la conexión metafórica", sugiriéndose que esta conexión debe ser incluida en las categorías existentes. Además, las otras categorías de conexiones deberían ser detalladas y refinadas para un mejor análisis de las conexiones en la actividad matemática de estudiantes y profesores o bien, en libros de textos y otros materiales curriculares.

Teniendo en cuenta que la TAC considera importante las conexiones y la metáfora, también, en la literatura se reconoce que el EOS asume importante las conexiones en términos de funciones semióticas y, por ejemplo, se reflexiona sobre la metáfora desde la dimensión expresión/contenido, que actúa de manera icónica, dado que una representación icónica, además de representar al objeto, nos informa de la estructura de dicho objeto (Font, 2007). Además, en el EOS cuando se construye una configuración cognitiva, se hacen conexiones entre los objetos primarios y procesos que emergen en la actividad matemática.

Cabe destacar que, la necesidad de refinar las tipologías de conexiones que constituyen a la TAC podría dirigir la mirada de investigación hacia la articulación de teorías para generar un enfoque teórico más detallado de análisis de las conexiones matemáticas. De hecho, cuando se hacen articulaciones teóricas se establecen conexiones entre los elementos que las conforman (Bikner-Ahsbahs, 2016; Radford, 2008). En este sentido, profundizando sobre conexiones teóricas, se reconoce en la literatura una amplia agenda de investigaciones sobre redes de teorías (*por sus siglas en inglés: Networking of theories*), que se presenta a continuación.

4.2. Networking entre la TAC y el EOS

Para responder a la segunda pregunta de investigación, en la etapa dos se realizó un networking entre la TAC y el EOS, teniendo en cuenta los cuatro pares de estrategias de creación de redes teórica propuestas por Prediger et al. (2008) y Bikner-Ahsbahs y Prediger (2010) aunado con la de Radford (2008) sobre la teoría, asumiendo que, los elementos esenciales de una teoría incluyen principios, métodos y preguntas de investigación paradigmáticas, los cuales orientan la comprensión, comparación y el contraste entre los dos enfoques teóricos. En este sentido, se consideraron las cuatro estrategias de creación de redes de teorías (ver Figura 7), y, en la primera estrategia abordamos la comprensión mutua de los fundamentos y conceptos teóricos y cómo se aplican a la noción de conexión matemática.

La segunda estrategia, consiste en la comparación y contrastación de los principios, conceptualizaciones de conexión (de la TAC) y FS (del EOS), puntos de vista de la comprensión matemática para ambas teorías y preguntas de investigación. Con base en los resultados conseguidos en la estrategia anterior, en la tercera estrategia se realizó la coordinación y combinación de las teorías, donde se evidenciaron puntos en común entre ambas teorías y su compatibilidad para el análisis de las conexiones. En el desarrollo de esta estrategia y siguiendo la perspectiva de Bikner-Ahsbahs y Prediger (2010), se usó un contexto de aplicación de la red teórica lograda, donde se seleccionaron diez estudiantes universitarios quienes resolvieron siete tareas sobre la derivada, con el objetivo de responder a las preguntas de investigación tres y cuatro. Por último, en el desarrollo de la cuarta estrategia de integración y síntesis, se evidenció que las dos teorías se complementan en cuanto a los métodos, pero en realidad el EOS complementa a la TAC en relación con la noción de conexión, por lo cual en la Tabla 14 se presenta la integración local asumiendo que una conexión está conformada por un conglomerado de prácticas, procesos, objetos y funciones semióticas.

Cabe destacar que, el autor de la investigación y los asesores son especialistas en las teorías seleccionadas para articularse. Un tipo de estudio similar donde siguió esta consideración de los autores fue en Drijvers et al. (2013), donde los dos marcos teóricos fueron Teoría de la Génesis Instrumental (TGI) y el EOS.

4.2.1. Estrategia 1: comprensión de las teorías

Inicialmente, se reconocieron las teorías que, de alguna manera consideran importante las conexiones matemáticas, pero en este trabajo se consideran teorías que enfatizan en las conexiones en diferentes aspectos. En este sentido, el autor de la investigación y los asesores compartieron información sobre la conformación y uso de cada teoría con el fin de llevar una articulación o no exitosa, es decir, se comprendieron profundamente las teorías recíprocamente y, especialmente para reconocer que cada teoría tiene principios, preguntas y métodos. En este sentido, en el contexto de la investigación en Educación Matemática, la TAC se posiciona sobre una base cognitiva; su objetivo es estudiar las conexiones que ocurren durante la actividad matemática para inferir un tipo específico de comprensión de ellas. Además, en la TAC se consideran dos grandes tipos de conexiones intra y extramatemáticas (*orientada a la instrucción, procedimental, representaciones diferentes, implicación, parte-todo, significado, reversibilidad, característica, modelado y metafórica*) que dependen y emergen de la resolución de una tarea por parte de un sujeto.

Por otro lado, el EOS considera que deben abordarse aspectos descriptivos, explicativos y predictivos inherentes al conocimiento científico, así como aspectos prescriptivos y evaluativos propios del conocimiento tecnológico. Según el EOS, la Didáctica debe proporcionar resultados que permitan la adecuada actuación en un campo de la realidad: la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en los diferentes contextos en los que se desarrolla. Para ello, se debe tener en cuenta cuatro tipos de áreas problemáticas y sus interacciones: epistemológicas, ontológicas, semiótico-cognitivas, educativo-instruccionales, ecológicas y de optimización del proceso instruccional (Godino *et al*., 2019). Algunas de las herramientas desarrolladas para dar respuestas a estas áreas problemáticas se utilizaron en las secciones anteriores.

4.2.2. Estrategia 2: Comparación y contrastación de las teorías

Según Radford (2008), los elementos esenciales de una teoría incluyen principios, métodos y preguntas de investigación paradigmáticas. Por esta razón, estos tres elementos orientan la comparación y el contraste entre las dos teorías, y, además se consideran conceptos teóricos como la comprensión matemática y cómo se aplican a la noción de conexión matemática. Además, la comparación se orientó hacia las diferencias y aspectos similares de cada teoría, mientras que la contrastación se direccionó a resaltar elementos diferentes, por ejemplo, en el EOS se enfatiza en los criterios de idoneidad donde se consideran las conexiones, pero en la TAC no se contemplan todos, dado que solo considera el criterio de realizar y fomentar las conexiones en los estudiantes.

4.2.2.1. Principios de ambas teorías

Desde un punto de vista epistemológico-ontológico, la TAC se posiciona en un punto de vista representacional, mientras que el EOS lo hace en un tipo de constructivismo convencionalista que es antirrepresentacional (en particular, cuestiona la dualidad interna / externa característica de perspectiva cognitivo representacional), pero no afecta que ambos enfoques compartan la noción de representación. La TAC asume el principio de que un buen proceso de enseñanza y aprendizaje de un tema o concepto matemático es aquel en el que se anima al alumno a realizar conexiones matemáticas relevantes, ya que contribuyen a una mejor comprensión. Por tanto, la TAC asume, según el NCTM (2000) entre otros organismos curriculares, que un estándar de calidad de un proceso de enseñanza y aprendizaje es la consecución de procesos de conexión, entendidos como aquellos que permiten conectar diferentes contenidos matemáticos entre sí y entre las matemáticas y contextos extramatemáticos o de la vida cotidiana.

La noción de idoneidad didáctica (Breda, 2020; Breda *et al*., 2018) ha sido incluida en el sistema teórico que configura EOS, como criterio sistémico para optimizar la instrucción matemática. Se define como el grado en que el proceso (o parte del mismo) tiene determinadas características consideradas óptimas o adecuadas para lograr la adaptación entre los significados personales de los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales (enseñanza), tomando en consideración las circunstancias y los recursos disponibles (medio ambiente). Es un constructo multidimensional que se descompone en idoneidad parcial, componentes e indicadores.

Además, consideramos importantes algunos componentes e indicadores de los criterios de idoneidad epistémica y ecológica más estrechamente relacionados con las conexiones matemáticas (Breda *et al*., 2017). Por ejemplo, en la idoneidad epistémica, se consideran dos componentes: a) *riqueza de procesos*: los procesos relevantes en la actividad matemática (modelado, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.) se consideran en la secuencia de tareas, y b) *representatividad de la complejidad*: los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.), son muestras representativas de la complejidad de la noción matemática elegida para ser enseñada como parte del currículo. Para uno o más significados parciales, se proporciona una muestra representativa de problemas y el uso de diferentes formas de expresión (verbal, gráfica, gestual, simbólica…), tratamientos y conversaciones entre ellos (Breda *et al*., 2017).

Asimismo, la idoneidad ecológica tiene en cuenta el componente de *conexiones intra e interdisciplinarias*. Este componente significa que el contenido enseñado está relacionado con otros temas matemáticos (conexión de la matemática avanzada con la matemática curricular y la conexión entre diferentes contenidos matemáticos cubiertos en el plan de estudios) o con el contenido de otras disciplinas, (extramatemáticas o más bien vínculos con otros sujetos de la misma etapa educativa) (Breda *et al*., 2017).

El proceso de conexión aparece en el componente de riqueza de procesos (como uno de los procesos a considerar) de idoneidad epistémica y también aparece en el componente de conexiones intra e interdisciplinarias de idoneidad ecológica. En otras palabras, promover las conexiones se considera un aspecto que mejora la idoneidad del proceso de instrucción de un tema matemático.

4.2.2.2. Conexión matemática versus función semiótica

En la TAC se entiende la conexión matemática como “un proceso cognitivo mediante el cual una persona relaciona dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real” (García-García y Dolores-Flores, 2018, p. 229) que se infieren en las producciones escritas, verbales, gestuales y mímicas que realiza un sujeto al resolver una tarea matemática. Mientras que en el EOS la FS se entiende como la “relación entre un antecedente (expresión, sentido) y un consecuente (contenido, sentido) establecido por un sujeto (persona o institución) según un determinado criterio o código de correspondencia” (Font, 2007, p. 105). Los diferentes tipos de objetos primarios también serán expresión o contenido de las funciones semióticas.

4.2.2.3. Comprensión matemática para ambas teorías

Como se argumentó en Font (2007) y Godino et al. (2007) existen dos formas básicas de concebir la “comprensión matemática”: como un proceso mental o como una competencia, que corresponden a concepciones epistemológicas divergentes o incluso conflictivas.

Los enfoques cognitivos en Educación Matemática consideran la comprensión como un proceso mental que es el resultado de tener una red bien conectada de representaciones mentales, siendo esta la forma en que la TAC concibe la comprensión. Sin embargo, el análisis de las investigaciones que utilizaron este modelo revela que lo que realmente hacen es el análisis de la actividad matemática que realiza el sujeto para encontrar conexiones entre los diferentes elementos involucrados en esta actividad mediante el análisis temático.

Por otro lado, la posición pragmática del EOS considera la comprensión como competencia, dado que, se dice que un sujeto comprende un objeto matemático cuando lo utiliza de manera competente en diferentes prácticas (Font, 2007). Ahora bien, para realizar las prácticas que resuelven la tarea matemática, el sujeto necesita activar una configuración de objetos primarios y establecer la FS adecuada entre el objeto primario y esta configuración.

Ambos enfoques teóricos consideran la activación de conexiones / FSs entre diferentes elementos involucrados en la actividad matemática por parte del sujeto como un tema importante en la comprensión matemática. Además, se interpreta la comprensión de un objeto O por parte de un sujeto X (*individuo o institución*) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en circunstancia fijadas, en las que pone en juego O como funtivo (*expresión-contenido*) (Font, 2007).

4.2.2.4. Concordancia de métodos

El método utilizado por la TAC analiza la actividad matemática que realiza el sujeto para encontrar conexiones entre los diferentes elementos involucrados en esta actividad. Sin embargo, esta actividad matemática es analizada desde el punto de vista de un observador que conoce las reglas matemáticas que regulan la práctica matemática y, por tanto, puede dar sentido (o no) a las conductas observables del estudiante, lo cual concuerda, en parte, con el método onto-semiótico de análisis de la actividad matemática realizado por el EOS. En otras palabras, lo que la TAC lleva a cabo, de hecho, es más un enfoque cognitivo-semiótico que un enfoque cognitivo. La coherencia de esta forma de analizar la actividad matemática es lo que permite la complementariedad y coordinación de los dos enfoques teóricos.

4.2.2.5. Concordancia de preguntas de investigación

Las preguntas de investigación de la TAC se centran en las conexiones matemáticas, por ejemplo, ¿qué conexiones se hacen al estudiar un objeto matemático en particular? ¿Cuál es la calidad de las conexiones matemáticas? ¿Cómo generamos una nueva tipología de conexiones matemáticas? ¿Cuáles son las conexiones matemáticas presentes en los libros de texto de matemáticas escolares y cuáles se promueven en los planes y programas de estudio, y cuáles son las conexiones que hace el profesor en el aula de clases? ¿Cómo desarrollamos intervenciones de enseñanza que ayuden a desarrollar en los estudiantes la capacidad de utilizar conexiones matemáticas en diferentes dominios matemáticos y extramatemáticos? ¿Cuáles son las creencias que tanto los estudiantes como los profesores atribuyen al uso y la importancia de las conexiones matemáticas y cuál es su percepción del papel que desempeñan en la enseñanza-aprendizaje? (García-García, 2019; García-García y Dolores-Flores, 2020). Además, es necesario construir y validar un marco de referencia para estudiar la comprensión matemática a partir de conexiones (García-García, 2019).

En el EOS (Godino *et al*., 2019), la intención es dar respuesta a diferentes tipos de problemas:

1) *Problema epistemológico*: ¿Cómo surgen y se desarrollan las matemáticas?

2) *Problema ontológico*: ¿Qué es un objeto matemático? ¿Qué tipos de objetos están involucrados en la actividad matemática?

3) *Problema semiótico-cognitivo*: ¿Qué es conocer un objeto matemático? ¿Qué significa el objeto O para un sujeto en un momento y circunstancia determinada?

4) *Problema educativo-instruccional*: ¿Qué es enseñar? ¿Qué es aprender? ¿Cómo se relacionan?

5) *Problema ecológico*: ¿Qué factores y normas condicionan y apoyan el desarrollo de los procesos instruccionales?

6) *Problema de optimización del aprendizaje - Criterios de idoneidad didáctica*: ¿Qué tipo de acciones y recursos deben implementarse en los procesos instruccionales para optimizar el aprendizaje matemático?

Por otra parte, Bikner-Ahsbahs y Prediger (2010) afirman que, el par de estrategias de *comparación y contrastación* son usadas para la compresión de ambas teorías estableciendo diferencias, similitudes y la vista de desarrollo de una nueva teoría o metodología, mientras que, “las estrategias de *coordinación y combinación* se utilizan principalmente para una comprensión en red de un fenómeno empírico o una parte de datos teóricos” (p. 10).

La comparación y contrastación realizada permite resaltar la especificidad de cada teoría, las fortalezas de cada una y sus posibles interrelaciones, así como las limitaciones que dificultan su vinculación e integración.

4.2.3. Estrategia 3: Coordinación y combinación de las teorías

A efectos prácticos, la conexión matemática y la FS pueden considerarse equivalentes, ya que, de hecho, la TAC define la conexión matemática como una FS. La idea de FS es más general que la idea de conexión matemática como se conceptualiza en la TAC ya que las conexiones se consideran casos particulares de FSs (personales o institucionales). Inicialmente, la conexión matemática en el trabajo fundamental de Businskas (2008) tenía que ser cierta incluso cuando un sujeto la estableció; esto significa que, de hecho, se consideró como una FS institucional (es decir, cualquier miembro de la institución matemática podría reconocer la conexión como válida desde un punto de vista matemático).

El desarrollo de la TAC estableció más tarde que una conexión puede ser verdadera o no (cuando la conexión del sujeto es correcta, coincide con la institucional, y la conexión se considera personal pero diferente de institucional si no es correcta).

En el EOS según Rondero y Font (2015), las conexiones matemáticas se consideran como FS, las cuales se pueden agrupar en tres categorías: 1) un conjunto de FSs que determina niveles de generalización, 2) un conjunto de FSs que determina proyecciones metafóricas, y 3) un conjunto de FSs en general. Por otro lado, teniendo en cuenta los objetos primarios que son expresión o contenido de una FS, se consideran 36 tipos de FSs básicos, que se incrementan si, además, se tienen en cuenta las dualidades. En contraste, la TAC considera diez categorías de conexiones extramatemáticas (modelado) e intramatemáticas: representaciones diferentes, implicación, parte-todo, procedimental, orientada a la instrucción, característica, significado, reversibilidad y metafórica.

Los métodos utilizados por ambas teorías, básicamente, son el análisis de contenido. Ahora bien, en el análisis temático de la TAC, realizado de acuerdo con la propuesta de Braun y Clarke (2006), se utiliza una tipología de conexiones matemáticas establecidas a priori y se les denomina temas. Mientras que el análisis realizado con el EOS utiliza diversas herramientas (prácticas, procesos, objetos matemáticos, FSs, etc.) aunque el nivel de detalle de los dos métodos de análisis es diferente, ambos son complementarios como se muestra en el ejemplo de la Tabla 14.

Las preguntas de investigación planteadas por el EOS más relacionadas con las planteadas por la TAC se derivan del problema semiótico-cognitivo. Respecto a esta problemática, en la EOS se asume el conocimiento como el conjunto de relaciones que el sujeto (persona o institución) establece entre objetos y prácticas, relaciones que se modelan utilizando la noción de FS. Concluimos que las preguntas de investigación que se formulan desde la TAC pueden enmarcarse en cualquiera de las áreas problemáticas del EOS o en la intersección de algunas de ellas (en especial en la problemática semiótica-cognitiva). En otras palabras, las herramientas desarrolladas en el EOS para dar respuesta a estas áreas problemáticas pueden ser muy útiles para responder a las preguntas formuladas desde el TAC.

Por último, coordinando y combinado las posturas sobre la "*comprensión matemática*" de la TAC y el EOS, en esta investigación se considera que la *comprensión matemática* es el proceso cognitivo que emerge en la actividad matemática mediante la cual un sujeto *X* en su práctica matemática relaciona objetos primarios *O* (*situaciones problemas, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, representaciones, argumentos, procedimientos*) entre sí, con otras asignaturas o con la vida cotidiana, relaciones que establece por medio de funciones semióticas (*agrupadas en conexiones matemáticas de la TAC*). Además, comprender un concepto matemático le permite al sujeto usarlo competentemente en la resolución de problemas. De esta manera, la comprensión entendida en términos de conexiones queda englobada en una visión más amplia de la comprensión.

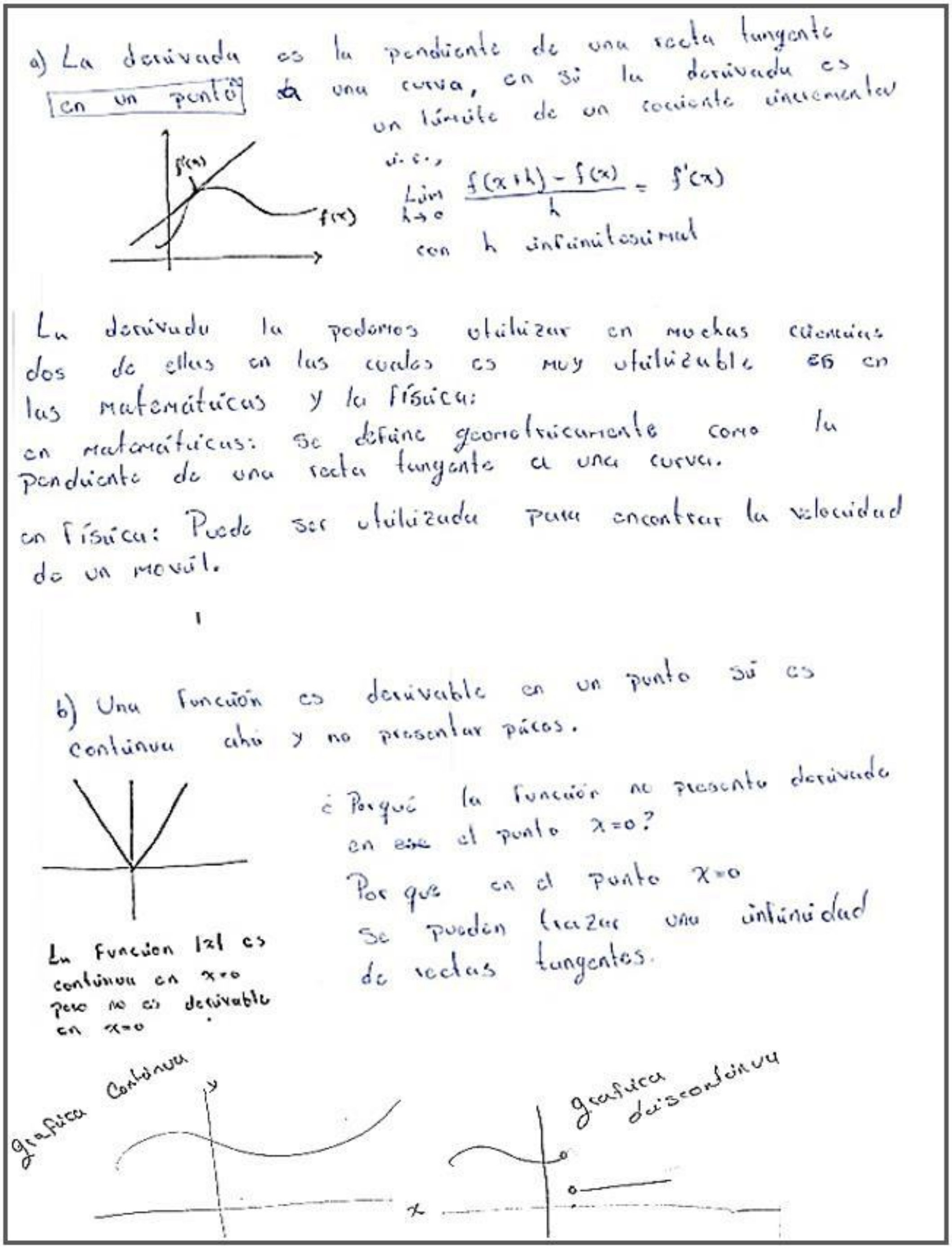
En este trabajo también se asume la perspectiva de Bikner-Ahsbahs y Prediger (2010) cuando mencionan que, al *coordinar y combinar* las teorías no necesariamente se debe direccionar la articulación de las teorías completas, sino que se pueden usar algunas herramientas analíticas de ambos marcos teóricos coordinadas para el análisis de fenómenos empíricos. En esta línea, en el momento de recolección de datos 2 (MR2) descrito en la etapa 3 de la metodología, se describió un contexto de aplicación de siete tareas sobre la derivada a diez estudiantes universitarios, las cuales se analizaron con base en el análisis temático (TAC) y con el modelo de análisis de la actividad matemática (EOS) con el fin de analizar las conexiones matemáticas. Se trata de un paso previo a la coordinación y combinación de las teorías en su totalidad.

En resumen, la combinación se realiza dado que las dos teorías se yuxtaponen y conducen a puntos de vista complementarios para el análisis de las conexiones matemáticas. Ahora bien, esta combinación en el caso concreto de la TAC y el EOS se convierte en una coordinación, dado que la relación entre ambos enfoques teóricos permite construir un marco teórico-metodológico común para la investigación sobre conexiones matemáticas.

4.2.3.1. Análisis de las conexiones matemáticas de E1 con la TAC

En el momento de análisis 2 (MA2), específicamente en el desarrollo de la estrategia tres de redes teóricas, se realiza un análisis temático donde los temas se dieron a priori (categorías de conexiones consideradas en el marco teórico), y se siguieron las seis fases siguientes:

En la fase uno del análisis temático "*familiarización con los datos*" se transcribió y leyó la entrevista y se consideró la producción escrita (ver Figura 36 y extractos de la transcripción en la Tabla 10). Cabe destacar que, a manera de ejemplo se tendrá en cuenta las respuestas del estudiante 1 (E1) acerca de la primera tarea del cuestionario: *a) ¿Qué significa la derivada? Explica tu respuesta y si es possible, da ejemplos. b) ¿Cuándo una función es derivable en un punto? Argumenta tu respuesta.*


a) La derivada es la pendiente de una recta tangente en un punto de una curva, en sí la derivada es un límite de un cociente incremental

i.e.,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

con h infinitesimal

La derivada la podemos utilizar en muchas ciencias dos de ellas en las cuales es muy utilizable es en las matemáticas y la física:

en matemáticas: se define geometricamente como la pendiente de una recta tangente a una curva.

en física: Puede ser utilizada para encontrar la velocidad de un movil.

b) Una función es derivable en un punto si es continua ahí y no presentar picos.

¿Porqué la función no presenta derivada en ese el punto $x=0$?

Por que en el punto $x=0$ se pueden trazar una infinidad de rectas tangentes.

La Funcion $|x|$ es continua en $x=0$ pero no es derivable en $x=0$

Figura 36. Producción escrita de la resolución de la tarea por parte de E1.

La entrevista se fundamentó en las respuestas escritas del estudiante en su hoja de trabajo. El entrevistador (I) le hizo preguntas sobre su respuesta y E1 responde verbalmente y señala partes del texto que escribía simultáneamente (ver Tabla 10). Cabe destacar que, cuando se requería hacer aclaraciones en la transcripción, se consultaba directamente el video de la entrevista, así como las producciones escritas de la respuesta de E1.

Tabla 10. Extractos de la transcripción de la entrevista.

Número de fila	Transcripción de la entrevista
1	I: ¿Qué significa la derivada?
2	E1: La derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, es decir geométricamente (apunta con el dedo al primer gráfico en la hoja de respuestas y más o menos reproduce el texto que escribió), ver Figura 36.
3	E1: En si la derivada es el límite de la función más un incremento menos la función original sobre ese incremento cuando ese incremento tiene a cero (señala la siguiente expresión simbólica que se halla en la hoja de respuesta), ver Figura 36.
4	I: En otro contexto ¿Cómo has trabajado la derivada?
5	E1: Como la velocidad de algún cuerpo móvil, de alguna partícula en movimiento (señala con el dedo el texto que escribió al final de la respuesta al apartado a), ver Figura 36.
6	I: y ¿En relación con el gráfico que hiciste? (el entrevistador señala el gráfico de la izquierda que se halla en la hoja de respuesta del estudiante).
7	E1: Ahí yo trate de definir lo que es geométricamente la derivada, o sea lo que escribí aquí lo representé en este dibujo, como la pendiente de la recta que toca a la curva en el punto (señala la gráfica mientras hace este comentario).
8	I: ¿Cuándo una función es derivable en un punto?

9	E1: Una función es derivable en un punto si es continua allí y no tiene picos, porque por ese pico puede trazar infinitas rectas tangentes, por lo que se dice que no tiene derivada. La función de valor absoluto es continua en el punto x = 0, pero tiene un pico y podemos trazar infinitas rectas en ese pico (apunta a la gráfica del valor absoluto que había dibujado en su respuesta a la pregunta b), ver Figura 36.
10	E1: Si una función es derivable, es continua, pero según la definición de continuidad para que una función sea continua, debe estar definida y el límite debe existir.
11	E1: La función es derivable cuando el límite existe allí como un número real y, además, que el punto evaluado en la función coincida con el límite, es igual al límite.
12	I: ¿Qué entiendes por continuidad?
13	E1: Que la función no presente ninguna interrupción ...
14	I: ¿Interrupción?
15	E1: Significa que la función se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel, sería relacionarlo con el hecho de que es continua.
16	E1: No tiene cortes ni huecos en el medio de la curva.
17	I: ¿Podrías dar un ejemplo?
18	E1: Esta gráfica es continua (indica la gráfica continua de la Figura 36), no presenta ninguna interrupción ..., esto (indica la gráfica discontinua en la parte inferior de la Figura 3) ya presenta una discontinuidad en este punto (ver Figura 36).
19	I. ¿Por qué afirmas eso?

20	E1: Hay una interrupción, no es continua, no se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel, había que quitarlo, y en este caso no, aquí tiene una discontinuidad (ver Figura 36).
21	E1: Este gráfico (continuo) se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel, en este caso he levantado el lápiz del papel, por lo que tiene una discontinuidad (ver las dos gráficas en la parte inferior de la Figura 36). Entonces, se podría decir que se puede dibujar cualquier gráfico continuo sin levantar el lápiz del papel.

Cabe destacar que, la entrevista transcrita y la producción escrita del estudiante E1 fue triangulada para generar un texto ampliado de la transcripción para distinguirlo de la transcripción de la entrevista.

En la fase dos "*generación de códigos iniciales*", el texto obtenido en la fase uno (transcripción ampliada) se dividió en unidades de análisis denominadas códigos (la selección de un párrafo como código viene determinada por la presencia de algunas palabras, símbolos, figuras o frases que sugieren uno de los diez tipos de conexiones matemáticas), lo que nos permitió una primera asignación implícita de conexiones del alumno a partes específicas de esta transcripción ampliada. La transcripción ampliada se dividió en 20 códigos. La Tabla 11 especifica los códigos (C1, …, C20). Sin embargo, aquí solo se reproducen las frases de la entrevista; las producciones escritas que acompañan a la transcripción ampliada, lo cual es importante para entender las razones para ser consideradas como un código, no se colocan debido al espacio limitado. Por ejemplo, la razón básica para considerar el código C4 como una unidad es el dibujo de la producción escrita anterior que el estudiante señala al contestar al entrevistador.

Tabla 11. Asignación de códigos.

Códigos	Extractos de la transcripción
C1	La derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto (geométricamente). (Fila 2 de la entrevista, ver Tabla 10).

C2	La derivada es el límite de la función más un incremento menos la función original sobre ese incremento cuando ese incremento tiende a cero (fila 3 de la entrevista).
C3	La velocidad de algún cuerpo móvil, de alguna partícula en movimiento (fila 5 de la entrevista).
C4	Yo traté de definir la derivada geométricamente, lo que escribí aquí lo representé en este dibujo, como la pendiente de la recta que toca la curva en el punto. (Fila 7 de la entrevista).
C5	Una función es derivable en un punto si es continua allí (fila 9 de la entrevista).
C6	Si la función es derivable, no presenta picos (fila 9 de la entrevista).
C7	No presenta picos, porque por ese pico se pueden trazar infinitas tangentes, por lo que se podría decir que no tiene derivada (Fila 9 de la entrevista).
C8	La función de valor absoluto, es decir, la función si es continua en el punto $x=0$ pero termina en un pico y podemos dibujar infinitas líneas sobre ese pico (fila 9 de la entrevista).
C9	La función $\|x\|$ es continua en $x=0$ pero no es derivable en $x=0$ (fila 9 de la entrevista).
C10	Si una función es derivable, es continua (fila 10 de la entrevista).
C11	Por definición de continuidad, para que una función sea continua, debe estar definida y el límite debe existir (fila 10 de la entrevista).
C12	La función es derivable cuando el límite existe allí como un número real y además que el punto evaluado en la función coincide con el límite, es igual al límite (fila 11 de la entrevista).
C13	Que la función no presente ninguna interrupción (fila 13 de la entrevista).
C14	Significa que la función se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel, sería relacionarlo con sí, es continuo (fila 15 de la entrevista).

C15	No tiene cortes ni huecos en el medio de la curva (fila 16 de la entrevista).
C16	Esta gráfica es continua (indica la gráfica continua de la Figura 36), no presenta ninguna interrupción, ..., esto (indica la gráfica discontinua de la Figura 36) ya presenta una discontinuidad en este punto (fila 18 de la entrevista).
C17	Hay una interrupción, no es continua, no se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel, había que quitarlo, y en este caso no, aquí tiene una discontinuidad (Fila 20 de la entrevista), ver Figura 36.
C18	Esta gráfica (continua) se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel (fila 21 de la entrevista).
C19	En este caso, he levantado el lápiz del papel, por lo que tiene una discontinuidad (fila 21 de la entrevista).
C20	Entonces, se podría decir que se puede dibujar cualquier gráfico continuo sin levantar el lápiz del papel (fila 21 de la entrevista).

Durante la fase tres "*búsqueda de temas*" del análisis temático, los códigos de la Tabla 11 se agruparon por los tipos de conexiones matemáticas que se infieren (según las categorías de conexiones consideradas a priori en la referencia conceptual). En la transcripción se identificaron seis de los diez tipos de conexiones matemáticas de la TAC, estos son: significado, diferentes representaciones, parte-todo, implicación, característica y metafórica (segunda columna de la Tabla 12). Al mismo tiempo, también se realiza una primera agrupación por temas (columna uno de la Tabla 12), permitiendo asociar los tipos de conexiones matemáticas con el tema del texto que se analiza.

En la cuarta fase "*revisando temas*" se verifica la agrupación por temas (se obtiene la versión final de la columna uno de la Tabla 12).

Tabla 12. Conexiones matemáticas establecidas por el estudiante E1.

Descripción del tema	Conexiones matemáticas	Frecuencia

La derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto.	Significado	3
La derivada es el límite del cociente de las medias de variación de la función.		1
La derivada es la velocidad de un cuerpo movil.		2
La función está definida, el límite debe existir y el punto evaluado en la función coincide con el límite.		2
Relaciona la expresión simbólica *f(x)* y su gráfico (simbólico-gráfico).	Representaciones diferentes	1
Relaciona la expresión simbólica de la función de valor absoluto $\|x\|$ y su gráfica (simbólico-gráfico).		1
Relaciona la expresión simbólica de la derivada como el límite del cociente incremental y la expresión simbólica de la derivada de *f (x)* (simbólico-simbólico).		1
Relaciona las representaciones verbales y gráficas de la función continua.		2
Ejemplo de función de valor absoluto (continua pero no derivable en un punto).	Parte-Todo	1
Una parte de la gráfica de la función *f(x)* es un caso particular de la gráfica de la función general *f(x)*.		1
Caso particular de una gráfica continua.		1
Caso particular de una gráfica discontinua.		1
Si una función es derivable, es continua.	Implicación	2

Si el gráfica no tiene una interrupción, entonces es continua.		2
Se pueden dibujar infinitas rectas tangentes a través de este pico.		1
La gráfica de la función valor absolute $\|x\|$ es continua en $x=0$, pero no es derivable en $x=0$.	Característica	1
Se puede dibujar el gráfico sin levantar el lápiz del papel.		6
Se puede dibujar el gráfico sin levantar el lápiz del papel.	Metafórica	6
	Total	35

En la fase cinco "*definiendo y nombrando temas*" del análisis temático se refinaron y se definieron las conexiones identificadas en la fase cuatro, analizando si las partes de la transcripción ampliada consideradas como códigos coinciden con una sola categoría de conexión matemática del marco teórico, o si hay códigos ambiguos en los que podría inferirise más de una categoría de conexión matemática; de esta manera, se refinan las columnas dos y tres de la Tabla 12. Ejemplos de asignación de dos tipos de conexiones a un solo código son los códigos C14, C15, C17, C18, C19 y C20 donde, además de la conexión metafórica, se podría inferir una conexión matemática de tipo característica. Estos códigos tienen expresiones metafóricas, por ejemplo, "*se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel*" que sugiere la metáfora conceptual "*la gráfica es un camino*" y, por otro lado, se puede considerar como un tipo de conexión característica.

En cierto modo, la Tabla 12 podría considerarse como la fase seis "*producción de un reporte*" del análisis temático, porque perfila los resultados obtenidos. No obstante, el total de todas las conexiones matemáticas establecidas por los estudiantes se detallarán en la sección 4.2.4 y 4.3.

4.2.3.2. Análisis de las conexiones matemáticas de E1 con el EOS

El método seguido por el EOS para analizar la actividad matemática realizada por E1 es: 1) Se realiza una narrativa temporal para explicar, en términos matemáticos, lo que hizo el estudiante para resolver la tarea (esta narrativa también considera los comentarios realizados sobre la resolución de su tarea durante la entrevista). Implícitamente se encuentran en esta narrativa las prácticas matemáticas realizadas por el estudiante y algunos objetos primarios que, metafóricamente, juegan el papel de los protagonistas principales de la narrativa. 2) Las prácticas matemáticas se describen a partir de la narrativa. 3) Se realiza la configuración cognitiva de los objetos primarios involucrados en estas prácticas. Siguiendo la metáfora de los personajes de la narración, los protagonistas principales que han aparecido explícitamente en la narrativa se completan con otros personajes que han quedado en el fondo de la narración. Finalmente, 4) se establecen las FSs entre los objetos primarios de la configuración (Font y Rubio, 2017).

4.2.3.2.1. Transcripción de la entrevista

La entrevista primero fue transcrita, leída y organizada para familiarizarse con la información obtenida (ver Tabla 10); también se consideraron las producciones escritas (ver Figura 36).

4.2.3.2.2. Narrativa

Se propuso la *tarea* a E1, donde se le preguntó ¿Qué significa la derivada? S respondió dando la *definición* de derivada como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto. Posteriormente, dio una segunda *definición,* como el límite del cociente de las tasas medias de variación de la función y escribió la expresión simbólica: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$ (*representación*). Luego, dio una tercera definición como velocidad instantánea, como la velocidad de un cuerpo movil o una partícula en movimiento. Esta definición volvería a utilizarse cuando el entrevistador le preguntara: "*En otro contexto, ¿cómo ha trabajado la derivada?*" Luego, E1 respondió a la pregunta del entrevistador: "*¿Qué podría decir sobre la gráfica que hizo?*" de la siguiente manera: "*esa es la derivada vista geométricamente*" y la representó, mediante un dibujo, como la pendiente de la recta que toca la curva en un punto. Luego mencionó que una función es derivable en un punto si es continua allí y no tiene picos, y además explicó en la entrevista que se pueden trazar infinitas líneas rectas en un pico y, por lo tanto, no tiene derivada (proposición). Ejemplificó este argumento con la función de valor absolute $|x|$, explicando que es continua en el punto $x = 0$, pero tiene un pico donde se pueden trazar infinitas líneas rectas. E1 también dijo que una función derivable es continua, y si es continua el límite coincide con la imagen. Finalmente, respondió a la pregunta: ¿Qué quiere decir con continuidad? expresando que la función no mostró ninguna interrupción, es decir que se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel y dio ejemplos de funciones continuas y discontinuas.

4.2.3.2.3. Prácticas matemáticas (Pm1, …, Pm14)

Pm1: E1 comprende la primera pregunta.

Pm2: Enuncia la definición de la derivada como pendiente de la recta (interpretación geométrica).

Pm3: Hace la representación de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto y hace un gesto resaltando la inclinación de la recta para indicar su pendiente.

Pm4: Enuncia la definición de la derivada como límite del cociente de tasas medias de variación de la función.

Pm5: Representa simbólicamente la función derivada como límite de las tasas medias de variación: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$.

Pm6: Enuncia una nueva interpretación de la derivada (como la velocidad instantánea de un objeto).

Pm7: Comprende la segunda pregunta.

Pm8. Enuncia la siguiente propiedad: una función es derivable en un punto si es continua en este punto y no presenta picos.

Pm9: Argumenta porque una función que presenta picos no es derivable y lo ejemplifica para el caso x=0 con la gráfica de la función valor absoluto (al tener un pico podemos trazar infinitas rectas que toquen en este pico).

Pm10: Enuncia la siguiente propiedad: si una función es derivable es continua

Pm11: Enuncia la siguiente definición de función continúa en un punto: una función es continua en un punto cuando existe el límite y coincide con la imagen de la función en este punto (de hecho, responde a la tercera pregunta).

Pm12: Comprende la tercera pregunta.

Pm13: Explica que la función es continua cuando se puede dibujar sin despegar el lápiz del papel (no presenta interrupciones).

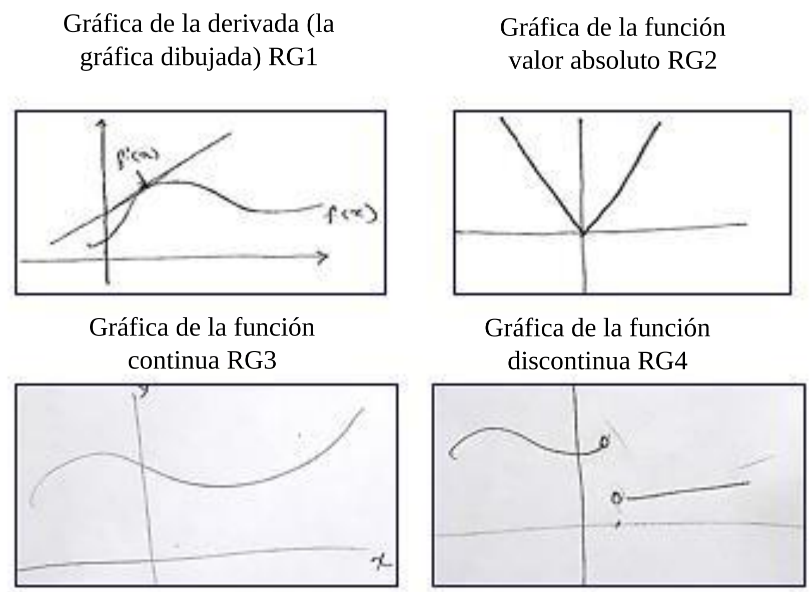
Pm14: Da ejemplos de funciones continuas y discontinuas.

4.2.3.2.4. Configuración cognitiva de objetos primarios

El primer objeto primario identificado es la tarea, porque las tareas propuestas desencadenaron las prácticas. Entonces, se reconoce un significado asociado a la derivada (definición). A continuación, la Tabla 13 muestra la configuración cognitiva.

Tabla 13. Configuración cognitiva activada de objetos primarios.

Objetos primarios	Descripción
Situaciones problemas/Tareas (T)	T1: Explicar el significado de la derivada. T2: Explicar cuando una función es derivable en un punto. T3: Explicar el significado de continuidad de una función.
Conceptos/ Definiciones (D)	D1: La derivada de una función es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto.
	D2: Derivada como el límite del cociente de las tasas medias de variación de la función.
	D3: Derivada como velocidad instantánea.
	D4: La función está definida, el límite tiene que existir y el punto evaluado en la función coincide con el límite.
	D5: La función es continua cuando se puede dibujar sin despegar el lápiz del papel (no presenta ni interrupciones ni huecos).
Elementos lingüísticos	*Verbal*: Derivada, derivada en un punto, función, pendiente, recta, gráfica, recta tangente, función continua, función discontinua, función derivable…
	Simbólico: $f(x)$ (RS1), $f'(x)$ (RS2)

	$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ (RS3)
	$\lvert x \rvert$ (RS4)
	Gráfico: ver Figura 37.  Figura 37. Representaciones gráficas.
Proposiciones/ Propiedades (Pr)	Pr1: Si la función es continua y no tiene puntos angulosos, entonces es derivable. Pr2: La función valor absoluto es continua en $x = 0$ pero no es derivable. Pr3: Si la función es derivable, es continua.
Argumentos (A)	***Argumento 1* (A1)** **Tesis**: Si una función es continua y no tiene puntos angulosos, entonces es derivable. ***Razón 1* (R1):** Debido a que por ese pico se pueden trazar infinitas rectas, se podría decir que no tiene derivada.

	R2: Ejemplifica la razón 1 con el punto de abscisa $x=0$ de la función de valor absoluto.

Además de los objetos primarios de la Tabla 13, existen otros objetos que podrían tomarse en consideración como, por ejemplo, el procedimiento para esbozar una representación gráfica que está implícita en las representaciones gráficas realizadas por el alumno, u otras definiciones, como la recta tangente, pendiente, etc. En otras palabras, por las características de la tarea, en la configuración emergente de los objetos primarios, los procedimientos, un tipo de objeto primario, no se considera relevante; sin embargo, es muy importante en otro tipo de tareas.

4.2.3.2.5. Funciones semióticas

Una vez obtenida la configuración cognitiva del alumno, la herramienta de FS nos permite visualizar las relaciones entre los objetos primarios de esta configuración (ver Figura 38).

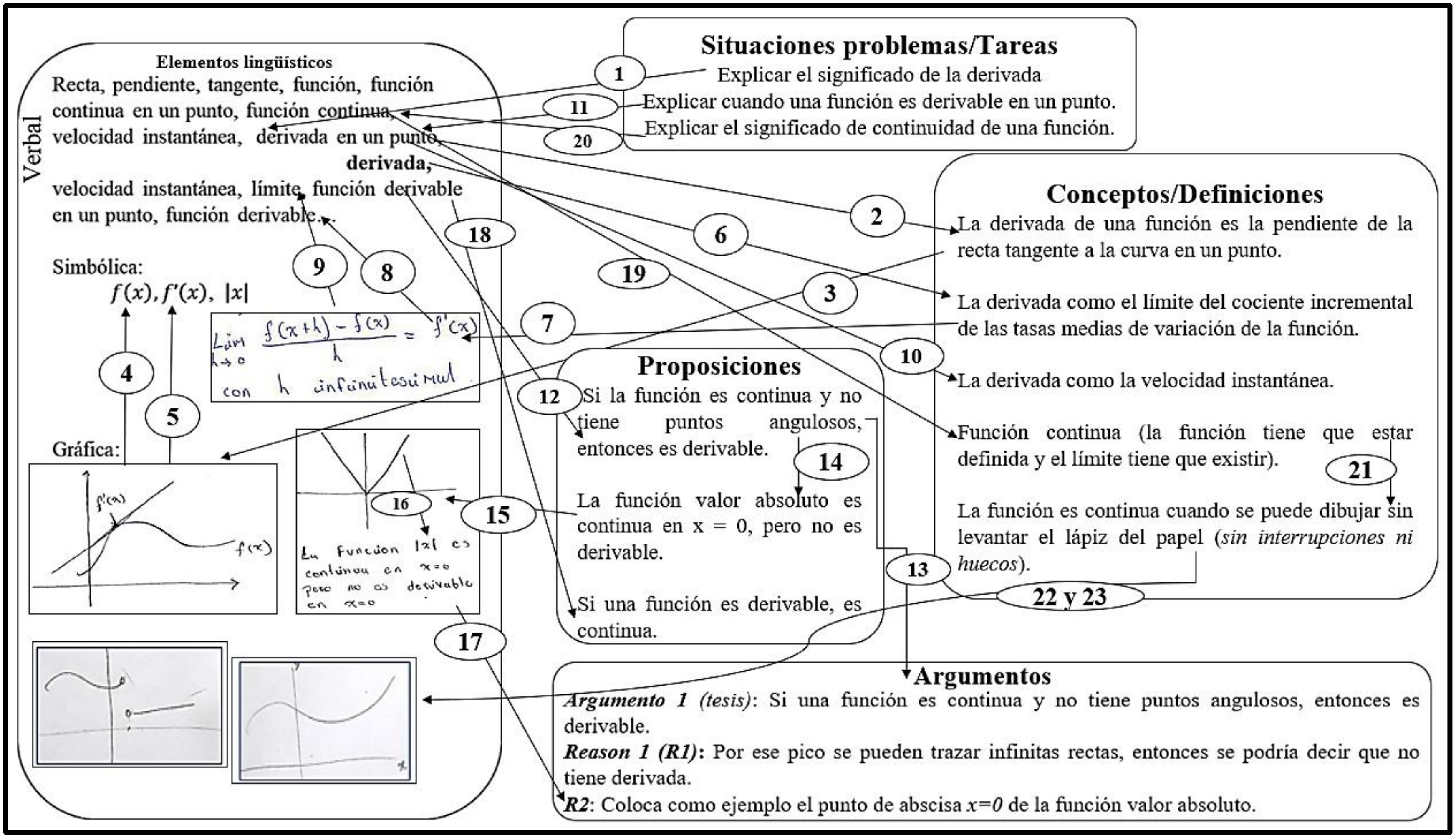


Figura 38. Funciones semióticas identificadas en la actividad matemática de E1.

4.2.4. Estrategia 4: Integración y síntesis local entre la TAC y el EOS

En el desarrollo de la estrategia 4 se muestra el análisis integrador de la actividad matemática del estudiante E1 con herramientas del EOS y su relación con los tipos de conexiones consideradas en la TAC. En esta línea, la Tabla 14, por un lado, resume el análisis de la actividad matemática realizada por el estudiante con herramientas del EOS (las cuatro primeras columnas); mientras que la quinta columna sintetiza el análisis siguiendo la TAC, realizado en la Tabla 12; y cada fila relaciona el análisis realizado con ambos métodos. Por otro lado, la Tabla 14 muestra que ambos métodos se complementan ya que el análisis más detallado realizado con las herramientas del EOS, visualiza una conexión matemática como la punta de un iceberg de un conglomerado de prácticas, procesos, objetos primarios activados en estas prácticas y funciones semióticas que los relacionan; y, a su vez, la TAC categoriza un segmento de la actividad matemática como un cierto tipo de conexión matemática.

Tabla 14. Análisis detallado de la actividad realizada por E1 utilizando herramientas del EOS y su relación con las conexiones de la TAC.

Prácticas	Procesos	Objetos	FS	Conexiones matemáticas
Pm1	-Significación / Comprensión. -Problematización. (Estos dos primeros procesos siempre están presentes, aunque la tarea es sencilla, ya que el estudiante debe entender lo que se pregunta y asumirlo como algo que tiene que resolver).	T1: Explica el significado de la derivada.	FS1	
Pm2	-Resolución de problemas. -Enunciación.	D1: La derivada es la pendiente de la	FS2	Significado

		recta tangente a la curva en un punto.		
Pm3	-Resolución de problemas. -Representaciones gráfica y simbólica.	Representación gráfica (RG1) Representación simbólica (RS1 y RS2).	FS3, FS4, FS5	Representaciones diferentes
Pm4	-Resolución de problemas. -Enunciación.	D2: La derivada es el límite del cociente de las tasas medias de variación de la función.	FS6	Significado
Pm5	-Representación.	RS3	FS7, FS8, FS9	Representaciones diferentes
Pm6	-Resolución de problemas. -Enunciación.	D3: La derivada como la velocidad instantánea.	FS10	Significado
Pm7	-Significación / Comprensión. -Problematización.	T2: Explica cuando una función es derivable en un punto.	FS11	
Pm8	-Resolución de problemas. -Enunciación.	Prop1: Si una función es continua y no tiene ángulos, entonces es derivable.	FS12	Implicación

Pm9	-Resolución de problemas. -Argumentación. -Representación y conversión de representaciones. -Particularización.	Argumento 1 Proposición Prop1 y Prop2 Representación gráfica (RG2) Representación simbólica (RS3)	FS13 FS17 FS15 FS16 FS14	Implicación Característica Característica Parte-todo
Pm10	-Resolución de problemas. -Enunciación.	Prop3: Si la función es derivable es continua.	FS18	Implicación
Pm11	-Resolución de problemas. -Enunciación.	D4: Una función es continua si está definida, el límite tiene que existir y el punto evaluado en la función coincide con el límite.	FS19	Significado
Pm12	-Significación / Comprensión. -Problematización.	T3: Explica el significado de continuidad de una función.	FS20	
Pm13	-Resolución de problemas. -Enunciación.	D5: La función es continua cuando se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel (la gráfica no tiene interrupciones ni huecos).	FS21	Característica

Pm14	-Resolución de problemas. -Representación. -Particularización.	FS22	Representaciones diferentes
		FS23	Parte-todo

Tanto el EOS como la TAC contemplan la conexión metafórica que algunos estudiantes podrían establecer simultáneamente con la conexión de tipo característica. Es decir, algunos estudiantes pueden entender que la gráfica es un camino cuando dicen "*una función es continua si puedes dibujar la gráfica sin levantar el lápiz del papel*" (ver Figura 39).

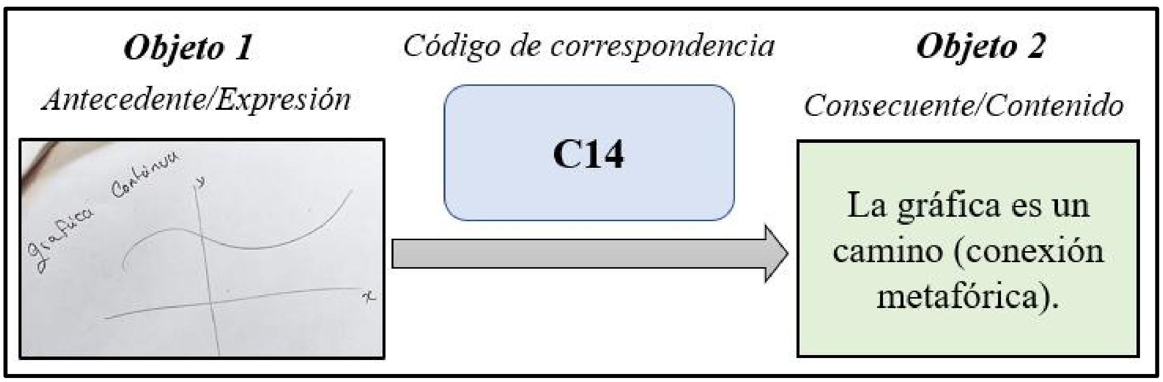


Figura 39. Relaciona el gráfico de función continua con un esquema básico (camino).

En general, se puede decir que las conexiones matemáticas contempladas en la TAC se pueden reinterpretar como FS o conjuntos de FSs en el EOS. Por ejemplo, en la tarea 1 se consideró que la siguiente producción escrita del estudiante era evidencia de una conexión matemática de tipo significado entre el término derivada y su significado como el límite del cociente de las tasas medias de variación de la función (ver Figura 40).

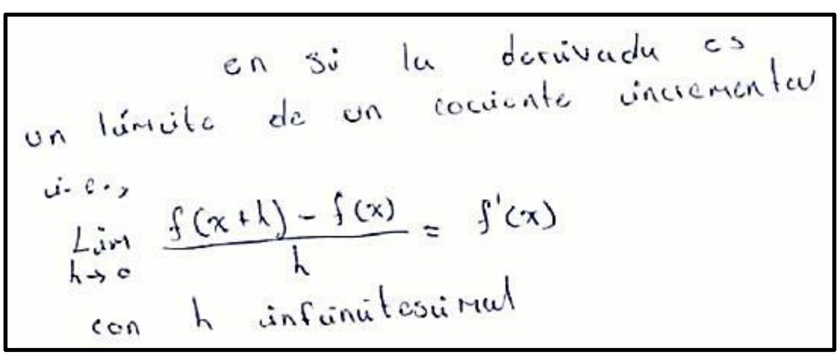


Figura 40. Evidencia de una conexión matemática de significado desde la TAC.

En el texto de la Figura 40, el EOS de acuerdo con la TAC, considera que una FS del tipo lenguaje-definición también es una evidencia (el término derivada está asociado con su definición como el límite de las tasas medias de variación de una función).

Por otro lado, la tipología de FSs proporcionada por el EOS nos permite entender esta FS de lenguaje-definición como el resultado de un encadenamiento de FSs que el estudiante ha puesto en funcionamiento para expresar este significado (similar al que se encuentra en la Figura 6 del marco teórico). En otras palabras, una recursividad o un *zoom* a esta FS puede establecerse y entenderse como resultado de un encadenamiento de otras FSs. El establecimiento de una recursividad o un *zoom* a las conexiones matemáticas que se contemplan en el TAC es un aporte de la EOS a este enfoque teórico, ya que las conexiones se entienden de forma unitaria y no se consideran sistemáticamente (como resultado de una red de conexiones) en la TAC.

Otra contribución del uso de las herramientas del EOS para analizar la actividad matemática del estudiante es que, como se muestra en la Tabla 14, una conexión matemática (recuadro en la última columna) es como la punta de un iceberg (recuadros en las primeras cuatro columnas) de un conjunto de prácticas, procesos, objetos primarios activados en estas prácticas y funciones semióticas que las relacionan. Las herramientas de EOS establecen una lupa que permite un análisis profundo y minucioso que detalla, define e ilustra la estructura y funcionamiento de la conexión matemática (ver Figura 41).

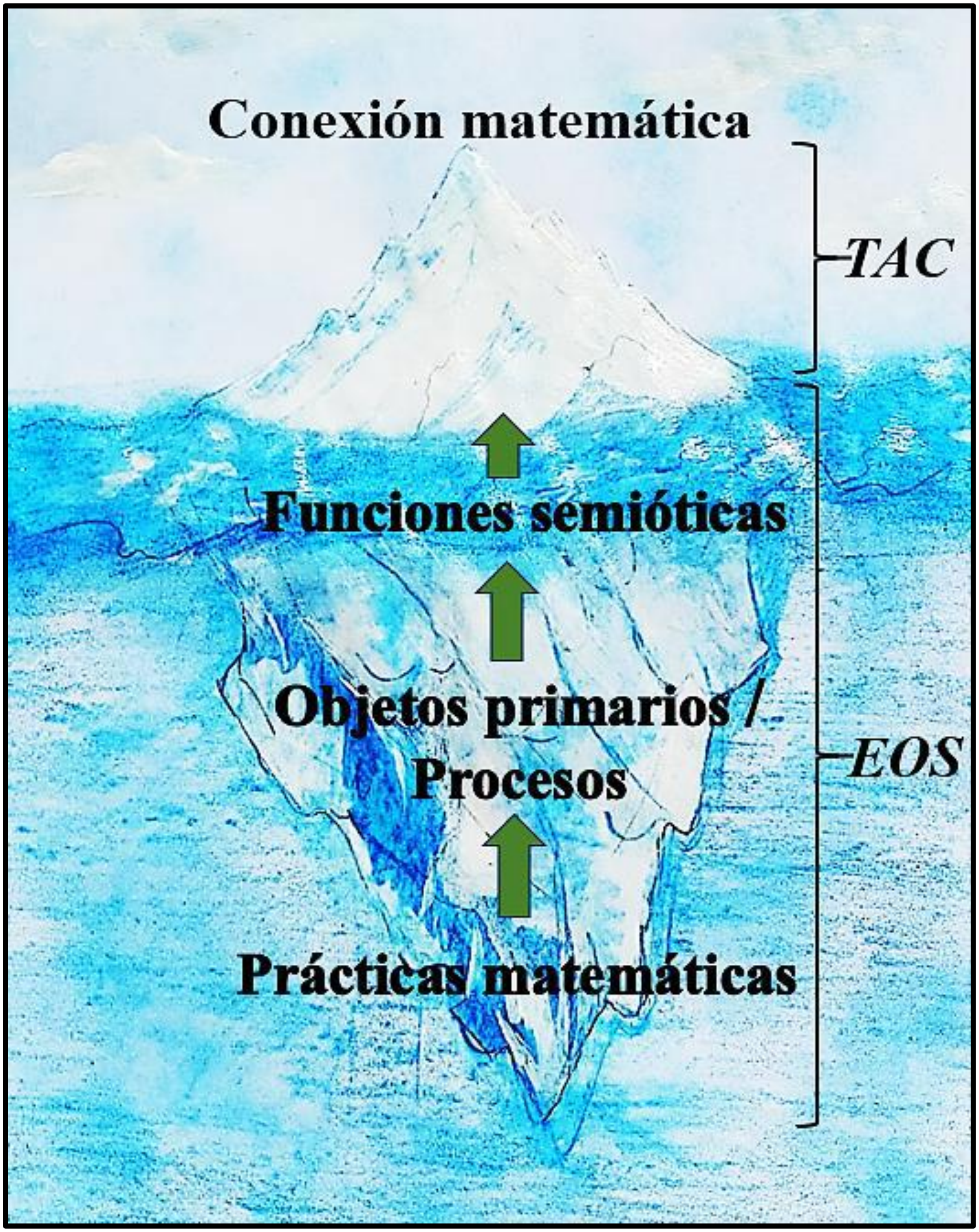


Figura 41. Conexión matemática definida metafóricamente como la punta de un iceberg (Dibujo creado por el autor).

En este sentido, en esta investigación se propone que, una conexión matemática vista desde una perspectiva de integración de la TAC y el EOS, en términos metafóricos se entiende como la punta de un iceberg conformada por un conglomerado de prácticas matemáticas, procesos, objetos primarios identificados en la actividad matemática de un sujeto cuando resuelve una tarea (*intra o extramatemática*) y funciones semióticas que las relacionan. Ahora bien, un caso particular de la conexión matemática que se presenta en la Figura 42 es la de tipo significado, representada a través de un esquema y su funcionamiento basado en la metáfora del iceberg.

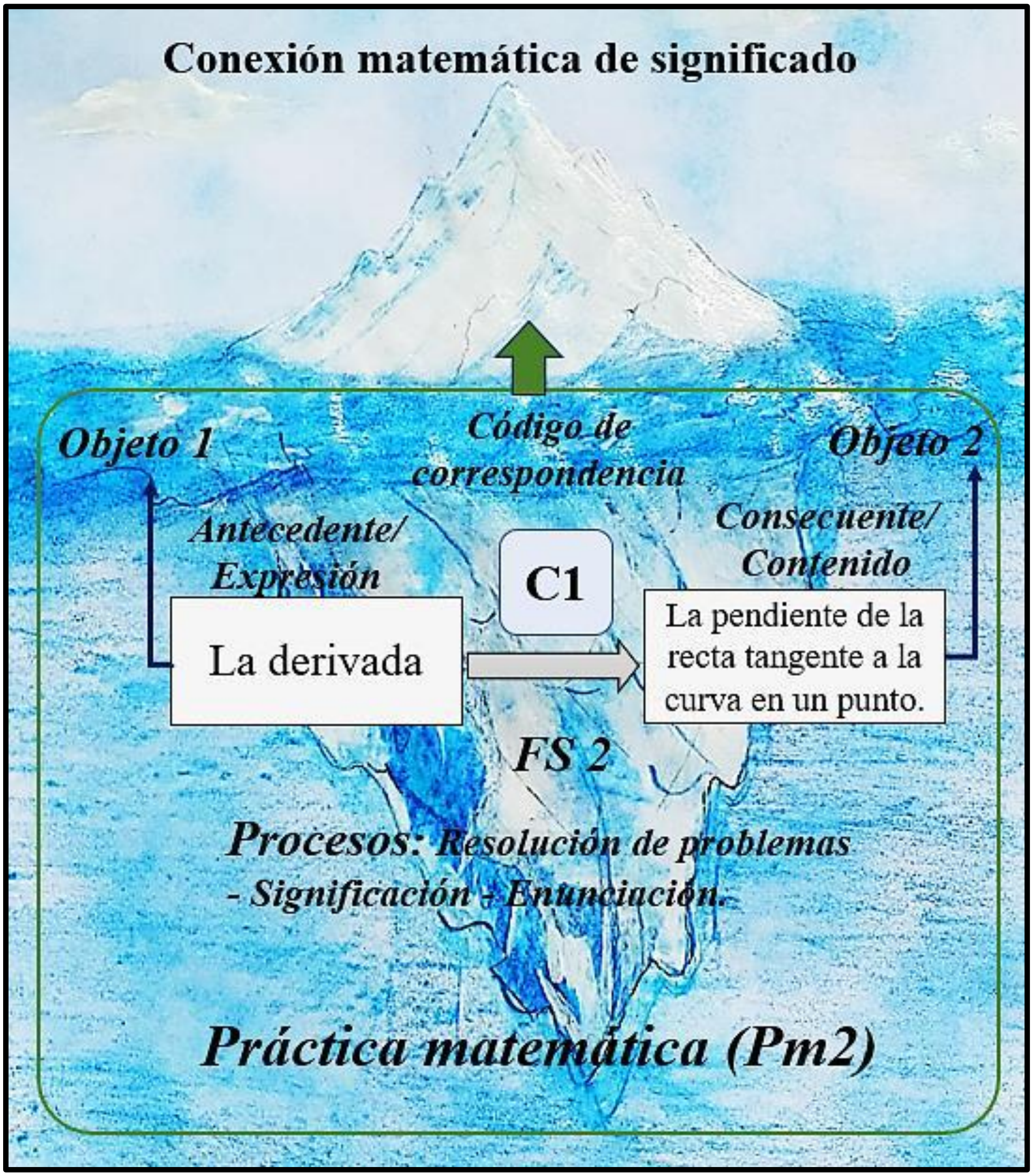


Figura 42. Conexión matemática de significado basada en la información de la Tabla 14 (Dibujo creado por el autor).

Se afirma que no se ha hecho una reflexión ontológica profunda sobre lo que debe entenderse como objeto matemático en la TAC, y no existe una definición explícita de lo que debe entenderse como objeto matemático en la TAC. Sin embargo, hay un uso implícito de objetos primarios del EOS que son los dos elementos asociados con una conexión (significados, propiedades, diferentes representaciones, etc.). En otras palabras, el EOS estructura la TAC en un sentido que muestra la red de objetos primarios, procesos, prácticas que componen una conexión matemática.

En el análisis de la actividad matemática de E1 realizado con las herramientas integradas de la TAC y el EOS, solo se usaron las evidencias escritas y verbales de la respuesta a la tarea 1. No obstante, a continuación, en la sección 4.3. se mostrará la caracterización de las conexiones matemáticas establecidas por E1 en la resolución de las seis tareas restantes, y, simultáneamente por cada tarea se darán a conocer algunas conexiones activadas por los otros estudiantes (E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9 y E10).

4.3. Conexiones matemáticas evidenciadas en la resolución de las tareas propuestas

4.3.1. Conexiones matemáticas en la resolución de la tarea 1

En la Tabla 12 de la sección 4.2.3.1. y en la Tabla 14 de la sección 4.2.4. se realizó un análisis detallado de la actividad matemática realizada por E1 cuando resolvió la tarea 1, donde se evidenciaron las conexiones matemáticas de tipo significado, representaciones diferentes, parte-todo, característica, implicación y metafórica. No obstante, en esta investigación participaron otros estudiantes quienes establecieron conexiones matemáticas al resolver las siete tareas propuestas. En este sentido, en la resolución de la tarea 1, los estudiantes E2, E3, E4, E5, E7, E8, E9 y E10 también hicieron conexiones de significado. Por ejemplo, en las producciones verbales y escritas de E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8 y E10 se identificaron significados de la derivada como 1) la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, 2) como el límite de las tasas medias de variación de la función, 3) como la tangente del ángulo, 4) la primera derivada como la velocidad en función del tiempo, 5) la segunda derivada como la aceleración el espacio respecto al tiempo, y, la derivada se puede interpretar como 6) la razón de cambio instantánea (ver extractos de las transcripciones y esquemas de conexión de significado en la Figura 43).

E2: La derivada es la pendiente de la recta tangente en un punto determinado de la función (…). al dibujar la tangente, podemos completar un triángulo rectángulo y de esa forma tenemos un ángulo le asignamos un nombre a este lado *h* y a este *l*, utilizando la fórmula tangente del ángulo θ en este caso puedo encontrar el valor de la pendiente en ese punto cero que es igual al cociente de $\frac{h}{l}$, esa es la pendiente y el valor de la derivada. la otra forma es usando límite de la forma $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ podemos obtener la derivada porque las pendientes cercanas tienden al valor en ese punto.

E3: La derivada es la pendiente de la recta tangente (…), es que estoy viendo la derivada con los límites $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, lo que recuerdo de mi curso de bachillerato.

E4: La derivada es la pendiente de una recta que pasa por una curva en un punto definido. La derivada como el límite, la definición formal: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. La primera derivada como la velocidad en función del tiempo y la segunda derivada como la aceleración en función de espacio y tiempo.

E6: Es el resultado de un límite de la función en un punto y donde está el punto, es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto.

E7: La derivada se puede interpretar como la razón de cambio de la recta tangente a la curva (ver Figura 44).

E8: La derivada para mí significa la pendiente de la recta tangente a la curva, aquí viene la curva, aquí está el punto, aquí está la línea morada que es la tangente, la derivada marca la pendiente esta recta tangente y aquí la anoté en forma de límite cuando el incremento de *x* tiende a cero de *f(x)* más el incremento de *x* menos *f(x)* entre el incremento de *x*.

E9. La derivada permite conocer la recta tangente de la función.

E10: La pendiente de la recta.

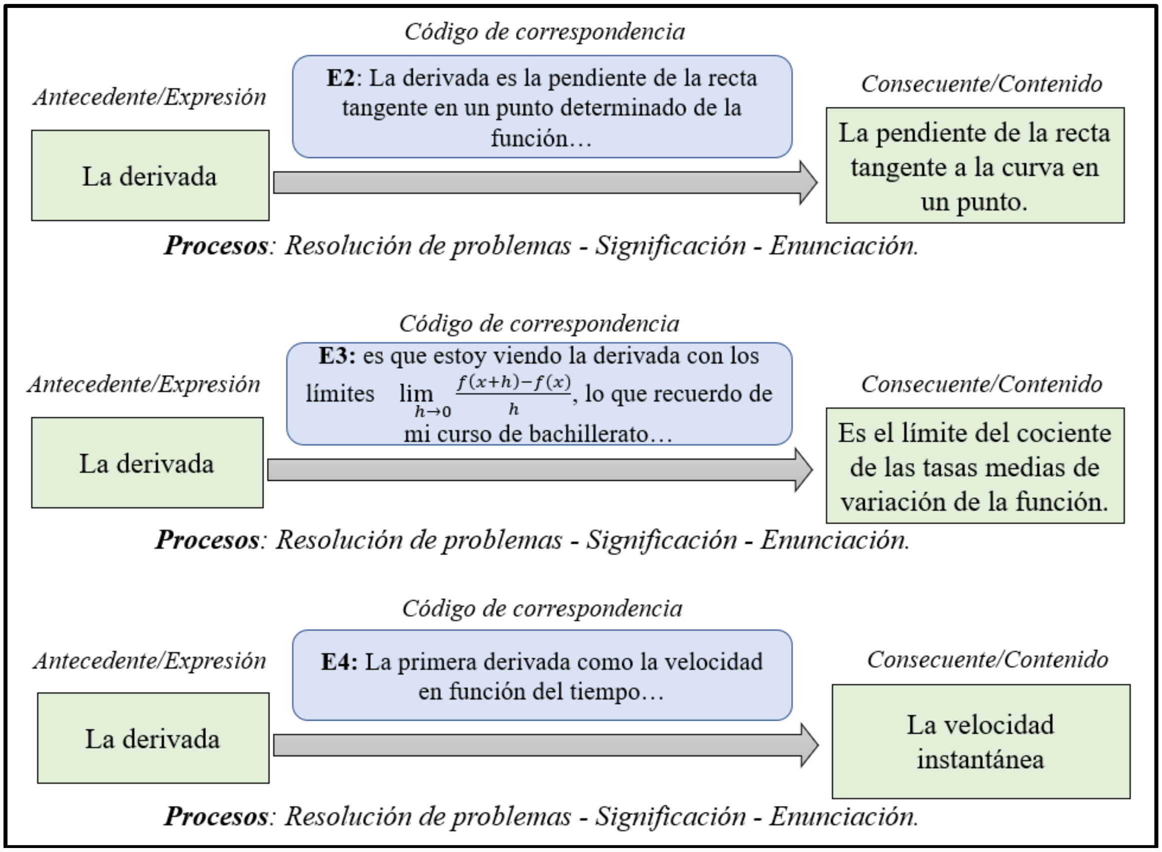


Figura 43. Esquemas de conexión matemática de tipo significado.

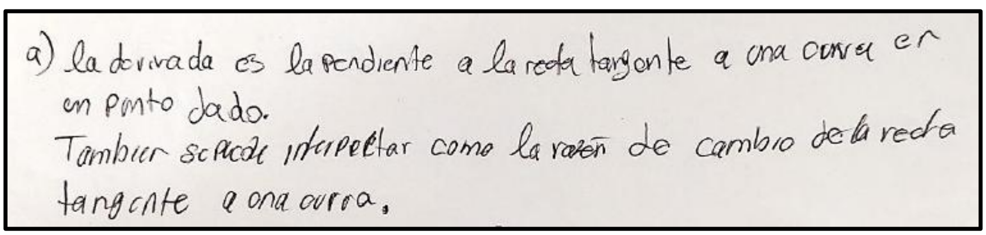


Figura 44. Producción escrita de donde se infirió la conexión de significado de E7.

Otras conexiones matemáticas de tipo significado se identificaron cuando los estudiantes respondieron a la pregunta *¿Cuándo una función es derivable en un punto? Por* ejemplo, E2, E3, E4, E5, E6, E7 y E8 coinciden en que una función es derivable en un punto cuando es continua es ese punto y los límites laterales respecto de ese punto son iguales (ver extractos de las transcripciones).

> **E2**: La función es derivable cuando es continua, quiere decir que no hay huecos en la gráfica de la función, que si los hubiera en ese punto no hay una tangente. De esta función tenemos la posibilidad de sacar lo límites por la izquierda y por la derecha y si los límites son iguales de ambos lados, entonces es derivable. Un ejemplo de cuando no es derivable es cuando hay picos en la función, porque cuando hay un pico se pueden

trazar infinitas rectas a ese punto, pero la derivada es única, así que debe haber una sola tangente, cuando hay picos no es derivable.

E3: La función es derivable en un punto si es continua y no presenta curvas pronunciadas, picos.
I: Pero ¿Esa función es continua en ese punto?
E3: que sea continua y no presente curvas pronunciadas. Este ejemplo, es continua en este punto, pero no presenta picos entonces es derivable.
I: ¿A qué te refieres con continua?
E3: A que no presente huecos, por ejemplo, una función así que esté definida a trozos aquí y acá, supongamos que este es el intervalo (a, b). Si nosotros queremos derivar en un punto de este intervalo como no es continua nuestra función porque aquí corta y aquí vuelve, entonces no vamos a poder obtener la derivada.
I: ¿A qué te refieres con hueco?
E3: Que no es continua y está definida a trozos, en el comportamiento de la gráfica está truncada, no vemos seguimiento, por eso no es continua.

E8: La función es derivable en un punto cuando es continua en ese punto, que el límite existe, existe una épsilon y un delta. Se habla de continuidad cuando el límite existe en este caso en Cálculo, si el límite existe entonces se puede derivar porque es continua.
I: ¿Podrías explicarme eso?
E8: Tengo aquí mi plano cartesiano, aquí está mi función y quiero saber si aquí en este punto sea derivable. Para que sea derivable, el límite de una función f(x) cuando x tiende a x_1 de f(x), debe ser igual límite y a la función evaluada en ese punto $f(x_1)$ cuando esto se cumple es continua y por ende es derivable la función.
I: ¿Cuándo una función es continua?
E8: Cuando pasa esto (señala que el límite debe ser igual a la imagen), no tiene cortes es una línea así (recorre la gráfica con el lápiz sin levantarlo del papel), por ejemplo, la función valor absoluto no es continua en ese punto.

Ahora bien, en los extractos de la transcripción presentados anteriormente, se evidencia que los estudiantes mencionan características sobre el concepto de función continua, por ejemplo, afirman que una función es continua cuando no tiene cortes en su gráfica, o bien, que la gráfica no tenga huecos ni picos, lo cual sugiere una conexión de tipo característica (ver esquema de conexión característica en la Figura 45).

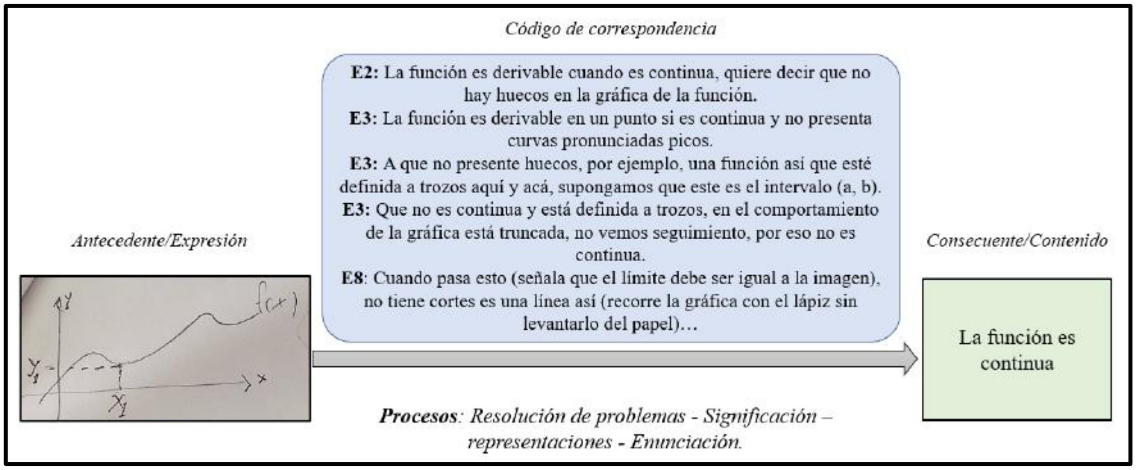


Figura 45. Esquema de la conexión de tipo característica.

Reflexionando sobre los extractos de la transcripción contenidos en la casilla de códigos de correspondencia de la Figura 45, se identifica que los estudiantes mencionaron características y propiedades de las funciones para que sean continuas. Sin embargo, en estos extractos hay expresiones metafóricas como las mencionaba el profesor de los estudiantes cuando hacía referencia a la continuidad, por ejemplo, las frases "quiere decir que no hay huecos en la gráfica de la función", "no tiene cortes", "en el comportamiento de la gráfica está truncada", entre otras, que, realmente son expresiones metafóricas que sugieren la metáfora conceptual "la gráfica es un camino", de lo cual se infiere la conexión metafórica (ver esquema de la conexión metafórica en la Figura 46).

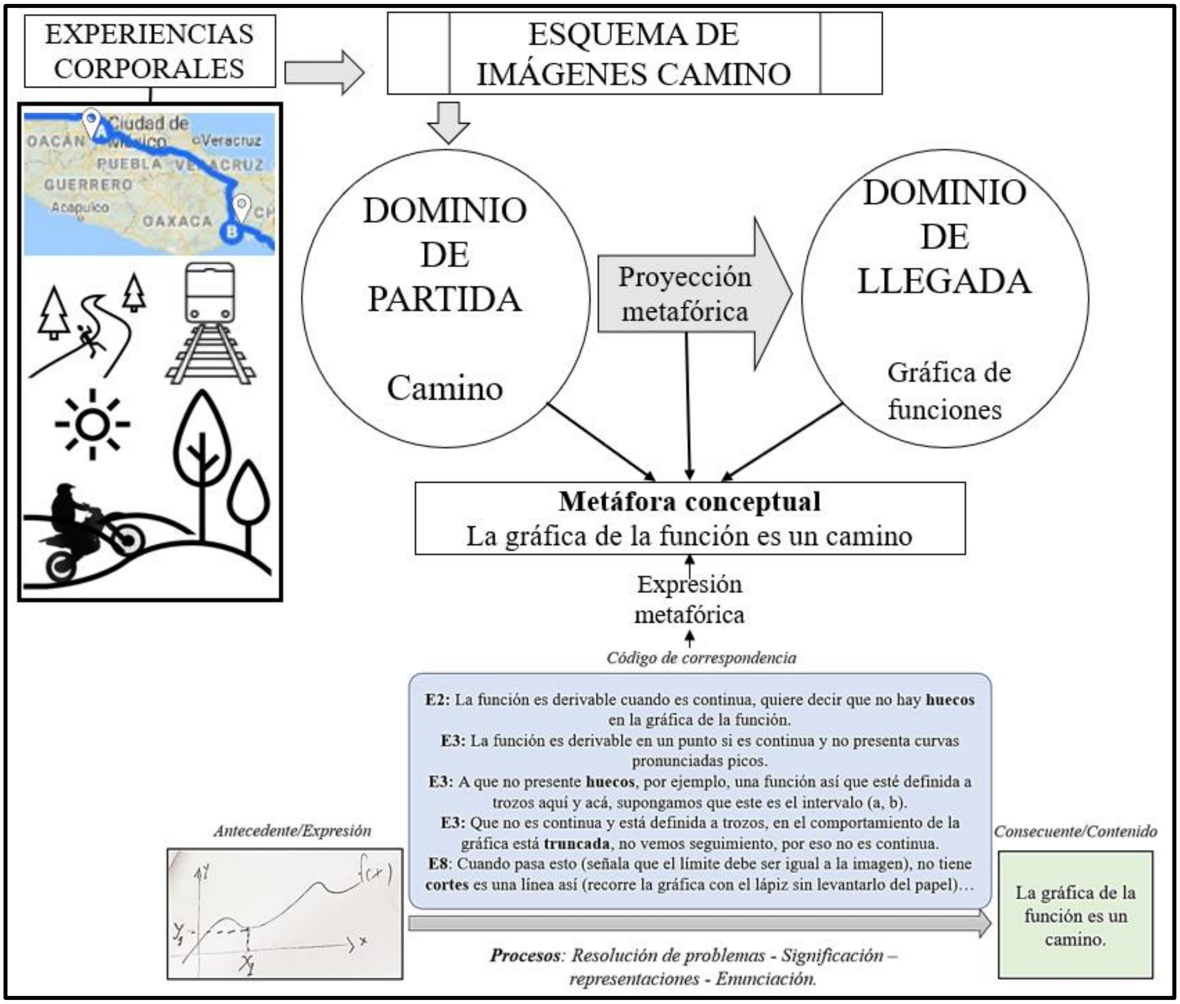


Figura 46. Esquema de la conexión metafórica.

Profundizando en el código de correspondencia que soporta a la conexión de tipo metafórica, en la Figura 47 se muestran cómo el estudiante usa su lápiz para recorrer la gráfica sin levantar el lápiz del papel.

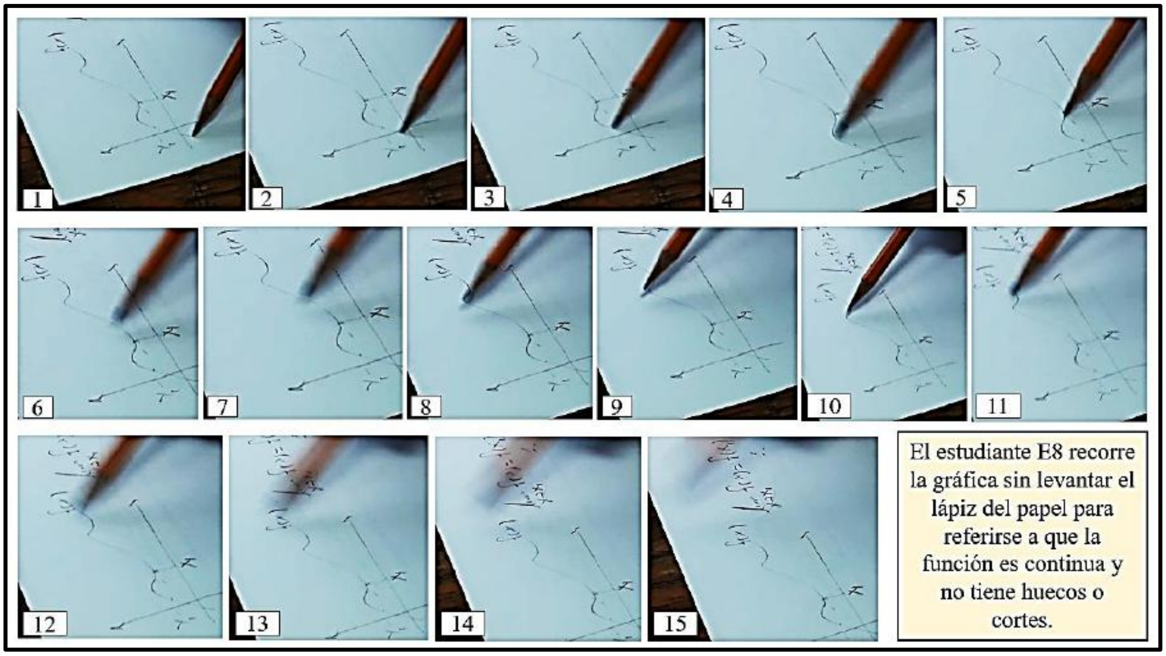


Figura 47. Evidencia de la conexión metafórica.

Por otra parte, en los extractos de la transcripción y en las producciones escritas de los estudiantes se evidenciaron conexiones matemáticas de tipo implicación, dado que establecen relaciones lógicas ($P \rightarrow Q$) para definir a la función continua, haciendo referencia a que "si f es derivable en x=a, entonces f es continua en x=a" o bien, "si $f'(a^-) = f'(a^+)$ y f es continua en x=a, entonces f posee un punto cúspide o anguloso en x=a". Específicamente, los estudiantes E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8 y E9, realizaron la conexión de implicación como se muestra en los extractos de la transcripción y en la Figura 48.

E2: La función es derivable cuando es continua (…), de esta función tenemos la posibilidad de sacar lo límites por la izquierda y por la derecha y si los límites son iguales de ambos lados, entonces es derivable.

E3: La función es derivable en un punto si es continua y no presenta curvas pronunciadas, picos, como, por ejemplo, el valor absoluto en este punto específico no es derivable. El ejemplo que estudiamos es el del valor absoluto la gráfica, si nosotros queremos tener la derivada en el punto (x, y), vamos a ver que si la evaluamos por la izquierda y por la derecha utilizando los límites vemos que van a ser diferentes por lo tanto no van a ser derivables en ese punto.
E3: Es que al evaluar este límite por la izquierda y por la derecha de este puntito, los límites van a ser diferentes entonces no puede decirse que es derivable en ese punto.

E4: Una función es derivable si, su gráfica describe a una curva suave.
I: ¿A qué haces referencia con suave?

E4: Que sea continua, que la función esté definida en cierto dominio que yo quiera trabajar. En este caso específico que no es derivable en ese punto (señala una gráfica con punto anguloso). Una función es continua cuando se cumple que este definida en el dominio, que el límite exista y no recuerdo la última condición…

E5: Para que sea derivable tiene que ser continua en (a, b) entonces deben existir los límites laterales.

E6: Si una función no tiene límite se dice que no es derivable.

E9: Es derivable cuando existe una recta tangente y debemos tomar en cuenta que la función sea continua, si la función es continua entonces va a existir una tangente en ese punto.

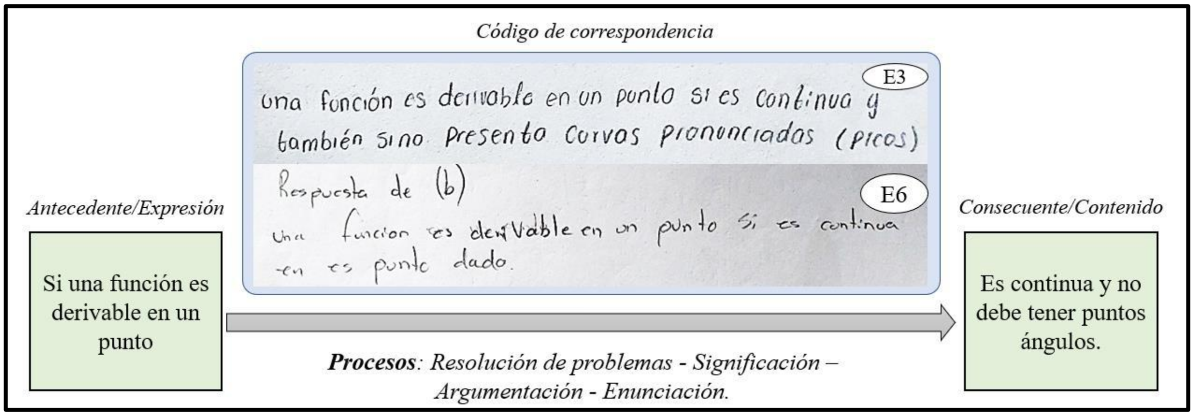


Figura 48. Esquema de la conexión de tipo implicación.

Cabe destacar que, en la resolución de la tarea 1 por parte de los estudiantes se identificaron conexiones matemáticas de tipo representaciones diferentes. Por ejemplo, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8 y E9 establecieron conexiones matemáticas de representaciones diferentes *alternas* cuando dibujaron la gráfica de la función y al lado ubicaron su expresión algebraica o simbólica: *f o f(x)*. De igual manera se identificaron las conexiones de representaciones diferentes cuando los estudiantes dibujaron la gráfica de la función derivable y la no derivable (ver Figura 49).

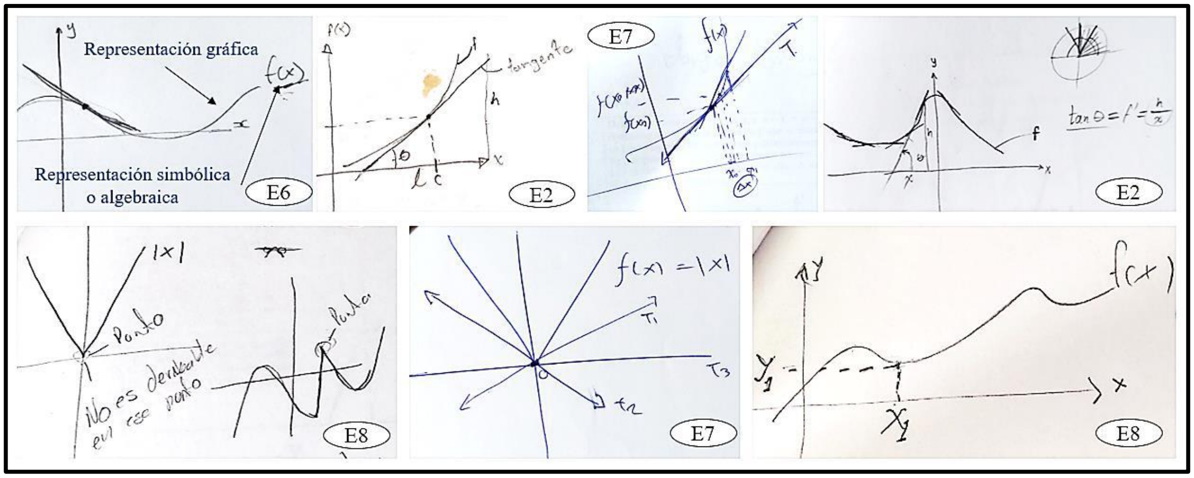


Figura 49. Conexiones matemáticas entre representaciones diferentes alternas.

En la Figura 49 además de presentarse evidencias de la conexión de representaciones diferentes, se reconocen conexiones matemáticas de tipo parte-todo dado que, las representaciones realizadas por los estudiantes con casos particulares de gráficas de funciones en todo el dominio de definición, es decir, en la Figura 48 solo se muestran partes o pedazos de gráficas de funciones más generales. Por ejemplo, E2, E6, E7 y E8 propusieron bosquejos de gráficas de funciones *f(x)*, donde señalan la recta tangente y evidencian que la curva está definida y tiene derivada en un punto. Mientras que E7 y E8 comparten la idea de que la función $f(x) = |x|$, es un caso particular de funciones continuas en todos sus puntos, pero no son derivables en uno de sus puntos (e.g., en el punto de abscisa *x=0*).

Ahora bien, los estudiantes E3, E6 y E7 también propusieron casos particulares como ejemplos de derivadas de las funciones $y = x$ y $f(x) = x^2$, donde se infirió la conexión de tipo parte-todo (ver Figura 50).

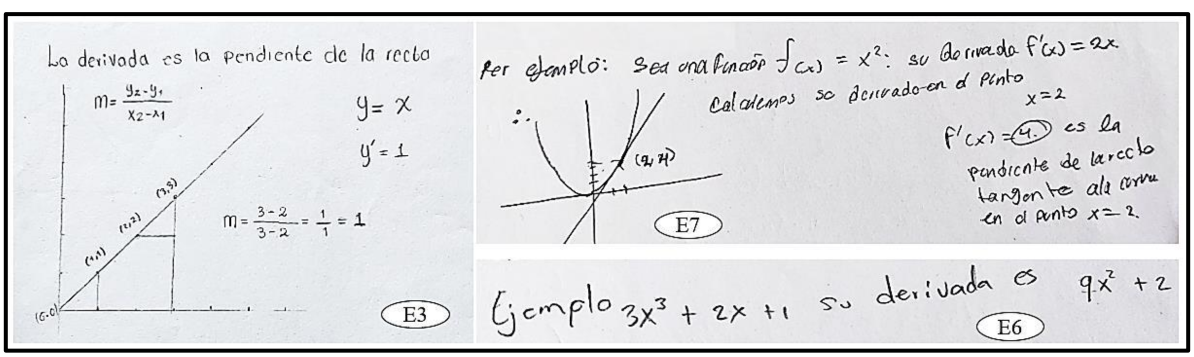


Figura 50. Casos particulares de derivadas de funciones polinómicas.

En la Figura 50, los estudiantes E3, E6 y E7 evidenciaron la conexión matemática de tipo procedimental dado que, usaron implícitamente la fórmula para la derivada de una potencia

$\left(\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}\right)$. También, en cada ejemplo propuesto se evidencia este tipo de conexión matemática cuando los estudiantes hicieron un sistema de coordenadas cartesianas, ubicaron puntos y dibujaron la gráfica de la función polinómica. Además, E3 enfatizó en encontrar la pendiente de la recta, y para ello, usó la fórmula $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ como razón algebraica.

4.3.2. Conexiones matemáticas establecidas en la resolución de la tarea 2

Se presenta el análisis detallado de las conexiones matemáticas identificadas en la actividad matemática del estudiante E1 desde una perspectiva integrada de la TAC y el EOS y, luego, se reflexiona brevemente sobre las conexiones realizadas por los otros estudiantes.

4.3.2.1. Narrativa

Se le propuso la tarea a E1 pidiéndole encontrar la ecuación de la recta tangente. El estudiante leyó y comprendió la tarea y primero derivó la función dada obteniendo $f'(x) = 4x - 1$. Posteriormente, encontró la ordenada (y) evaluando la función en $x = \frac{5}{2}$ y haciendo operaciones algebraicas equivalentes, de lo cual obtuvo que $y = 10$ y simultáneamente afirmó que el punto de tangencia es $\left(\frac{5}{2}, 10\right)$. Luego, calculó la pendiente evaluando en la expresión simbólica de la derivada el valor de la abscisa $x = \frac{5}{2}$, consiguiendo como resultado $M = 9$. En este momento el investigador (I) le preguntó: ¿Para qué te sirve la derivada? Luego, el estudiante respondió: "*para encontrar la pendiente de esta recta*". Una vez conseguida la pendiente y el punto de tangencia, el estudiante los evaluó en la fórmula de la ecuación punto pendiente ($y - y_1 = M(x - x_1)$) para obtener la ecuación implícita de la recta $9x - y - \frac{25}{2} = 0$. Cabe destacar que, en este proceso usó operaciones algebraicas (propiedades distributiva y conmutativa), y, despejando la ecuación implícita, halló la ecuación implícita de la recta en su expresión simbólica $\left(y = 9x - \frac{25}{2}\right)$.

Seguidamente, el estudiante hace una gráfica para verificar el proceso realizado y su afirmación que había encontrado la ecuación de la recta tangente. En este contexto, primero dibujó un sistema de coordenadas, halló y ubicó los puntos de corte de $y = 9x - \frac{25}{2}$ con el eje *x* e *y* en el plano. Luego, dibujó la recta $y = 9x - \frac{25}{2}$ que pasa por los puntos de corte con los ejes y ubicó el punto $\left(\frac{5}{2}, 10\right)$. También, realizó una tabla de valores para gráficar la función, ubicó los puntos en el plano y dibujó la gráfica. Por último, concluyó que Encontró la ecuación de la recta tangente.

4.3.2.2. Prácticas matemáticas (Pm1, …, Pm15)

Pm1. El estudiante comprendió la tarea propuesta.

Pm2. Calculó la derivada de $f(x) = 2x^2 - x$, obteniendo $f'(x) = 4x - 1$.

Pm3. Encontró la ordenada (*y*) sustituyendo $x = \frac{5}{2}$ en $f(x) = 2x^2 - x$, obteniendo $y = 10$. Para ello, realizó operaciones algebraicas que le permiten ir obteniendo expresiones equivalentes.

Pm4. Identificó el punto $\left(\frac{5}{2}, 10\right)$ como el punto de tangencia por donde pasa la recta tangente.

Pm5. Calculó la pendiente de la recta reemplazando el valor de la abscisa $x = \frac{5}{2}$ en la expresión simbólica de la derivada $f'(x) = 4x - 1$, obteniendo que la pendiente es $M = 9$.

Pm6. Utilizó la fórmula de la ecuación punto pendiente ($y - y_1 = M(x - x_1)$) para obtener la ecuación de la recta. Para ello, sustituyó los valores de $x_1 = \frac{5}{2}$, $y_1 = 10$ y la pendiente $M = 9$ en la fórmula $y - y_1 = M(x - x_1)$, y, después realizó operaciones algebraicas que le permiten ir obteniendo expresiones equivalentes, para hallar la ecuación de la recta en su forma general o implícita $9x - y - \frac{25}{2} = 0$.

Pm7. Obtuvo la ecuación explícita $y = 9x - \frac{25}{2}$, despejando la y en la ecuación implícita.

Pm8. Para verificar el proceso analítico realizado, usó un razonamiento gráfico que inicia construyendo un sistema de coordenadas cartesianas.

Pm9. Encontró los puntos de cortes de $y = 9x - \frac{25}{2}$ con el eje y $\left(si\ x = 0 \implies y = -\frac{25}{2}\right)$ y con el eje x $\left(si\ y = 0 \implies x = \frac{25}{18}\right)$ y los ubicó en el plano cartesiano.

Pm10. Dibujó la recta $y = 9x - \frac{25}{2}$ que pasa por los puntos de corte con los ejes.

Pm11. Ubicó el punto $\left(\frac{5}{2}, 10\right)$ en la recta, señalando sus coordenadas.

Pm12. Construyó una tabla de valores para graficar $f(x) = 2x^2 - x$.

Pm13. Ubicó los puntos conseguidos en la tabla de valores en el plano cartesiano.

Pm14. Bosquejó la gráfica de $f(x) = 2x^2 - x$.

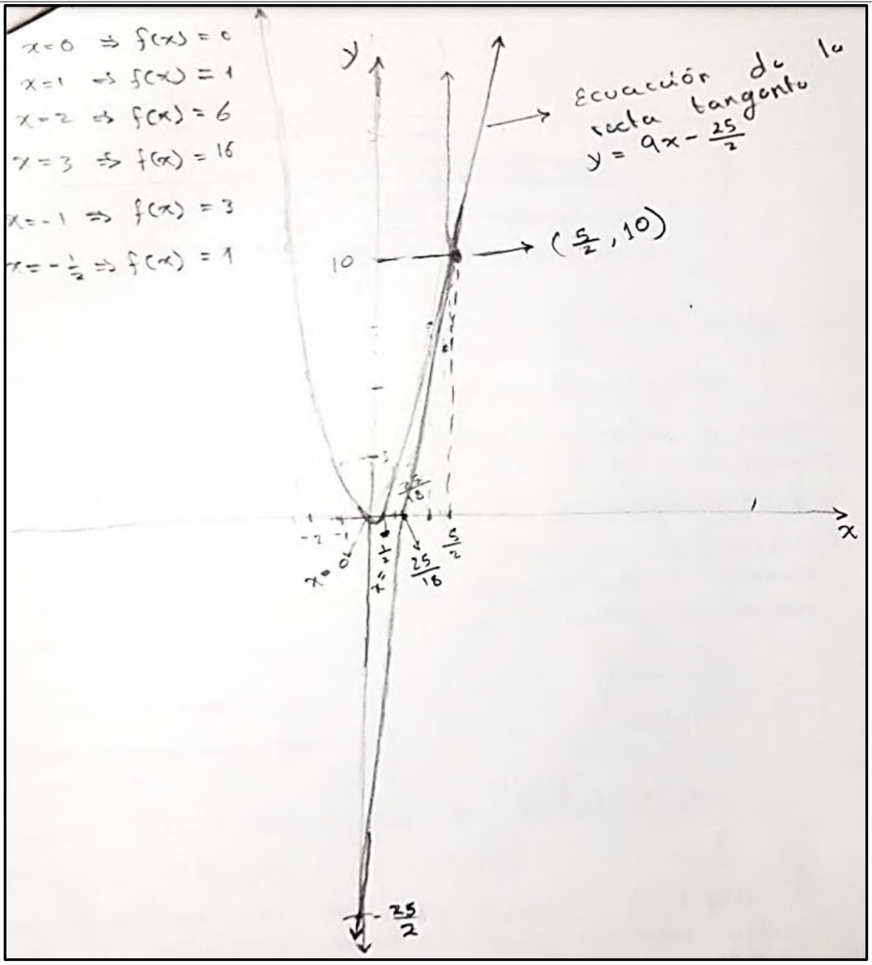
Pm15. Dado que la recta tangente se aproxima mucho a la gráfica de la función, concluyó que ha calculado correctamente la recta tangente.

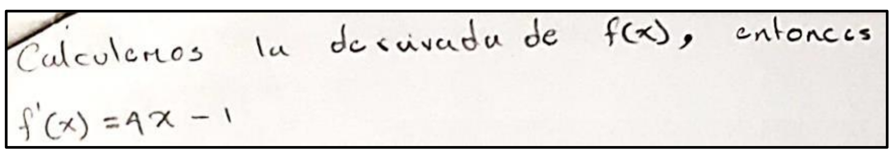
4.3.2.3. Configuración cognitiva de objetos primarios

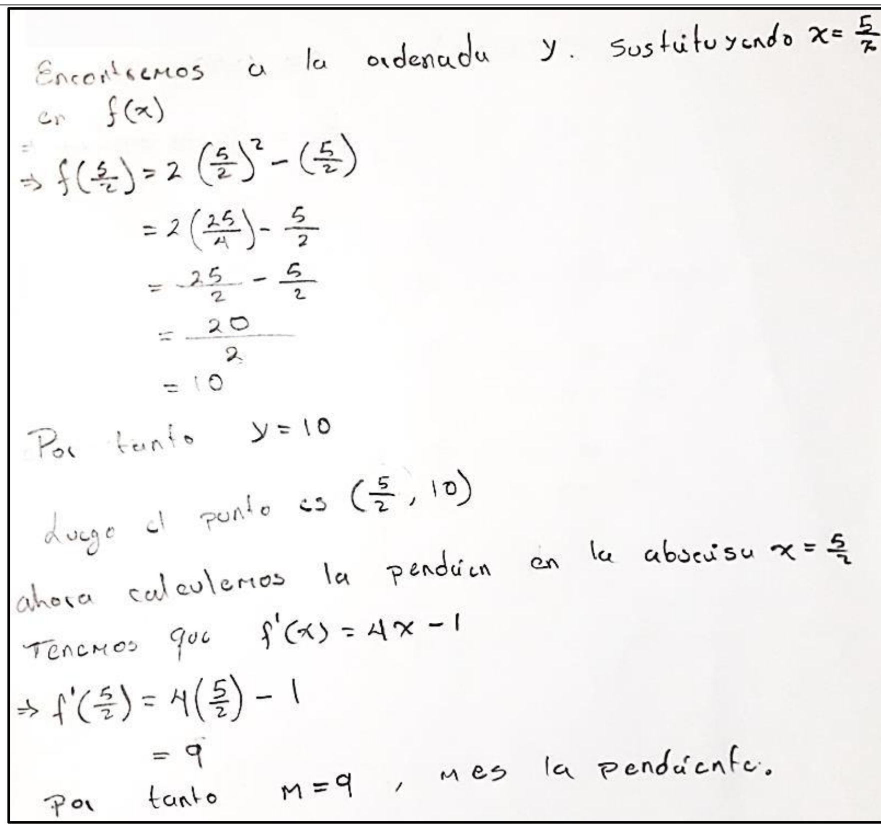
Con base en las prácticas matemáticas identificadas, se obtiene la configuración cognitiva de objetos primarios (ver Tabla 15).

Tabla 15**.** Configuración cognitiva del estudiante.

Objetos primarios	Descripción
Situación problema/Tarea	T1: Dada la función $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - x}$ con dominio en los reales, halla la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $\boldsymbol{x = \frac{5}{2}}$. Argumenta tu respuesta.
Elementos lingüísticos	*Verbal*: punto, recta, gráfica, ecuación, recta tangente, derivada, derivada en un punto, punto de tangencia, …
	Gráfico: (ver Figura 51).

	 Figura 51. Representación gráfica de la función y la ecuación de la recta tangente a la función.
	Simbólico: $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - x}$, $\boldsymbol{x = \frac{5}{2}}$, $\boldsymbol{f'(x) = 4x - 1}$, $\boldsymbol{M = 9}$, $\boldsymbol{y_1 = 10}$, $\boldsymbol{\left(\frac{5}{2}, 10\right)}$, $\boldsymbol{y - y_1 = M(x - x_1)}$, $\boldsymbol{9x - y - \frac{25}{2} = 0}$, $\boldsymbol{y = 9x - \frac{25}{2}}$. Recomendamos ver más evidencias de símbolos en los procedimientos.
Conceptos/ Definiciones (D)	*Conceptos previos*: punto, recta, gráfica, ecuación, recta tangente, derivada, derivada en un punto, punto de tangencia, punto de corte con un eje, … D1: la derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto. D2: la recta tangente es la recta que un entorno del punto de tangencia más se aproxima a la gráfica de $\boldsymbol{f(x)}$.

Proposiciones/ Propiedades (Pr)	*Proposiciones previas:* propiedades asociativa, distributiva y conmutativa del álgebra. Pr1: el punto $\left(\frac{5}{2}, \mathbf{10}\right)$ es el punto de tangencia. Pr2: la derivada en $\boldsymbol{x} = \frac{5}{2}$ es igual a 9. Pr3: la pendiente de la recta tangente es 9. Pr4: la recta tangente en el punto de abscisa en $\boldsymbol{x} = \frac{5}{2}$ es $\boldsymbol{y} = \mathbf{9}\boldsymbol{x} - \frac{25}{2}$. Pr5: los puntos de corte de la recta $\boldsymbol{y} = \mathbf{9}\boldsymbol{x} - \frac{25}{2}$ con los ejes de coordenadas son: $\left(\frac{25}{18}, \mathbf{0}\right)$ y $\left(\mathbf{0}, -\frac{25}{2}\right)$.
Procedimientos (Pc)	**Procedimiento principal**: Cálculo de la recta tangente a la función en un punto usando la derivada. **Procedimientos auxiliares**: Pc1: Calcular la derivada de una función de segundo grado (ver Figura 52).  Figura 52. Evidencia del cálculo de la derivada. Pc2: Evaluar la función para un valor de la abscisa (ver Figura 53 y extracto de la transcripción).



Encontremos a la ordenada y. Sustituyendo $x=\frac{5}{2}$

en $f(x)$

$\Rightarrow f\left(\frac{5}{2}\right)=2\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)$

$=2\left(\frac{25}{4}\right)-\frac{5}{2}$

$=\frac{25}{2}-\frac{5}{2}$

$=\frac{20}{2}$

$=10$

Por tanto $y=10$

Luego el punto es $\left(\frac{5}{2}, 10\right)$

ahora calculemos la pendiente en la abscisa $x=\frac{5}{2}$

Tenemos que $f'(x)=4x-1$

$\Rightarrow f'\left(\frac{5}{2}\right)=4\left(\frac{5}{2}\right)-1$

$=9$

Por tanto $M=9$, M es la pendiente.

Figura 53. Evidencia de la evaluación de la función para encontrar el punto de tangencia y la pendiente.

I: ¿Qué pasa por ese punto $\left(\frac{5}{2}, 10\right)$?

E: Pasa la tangente.

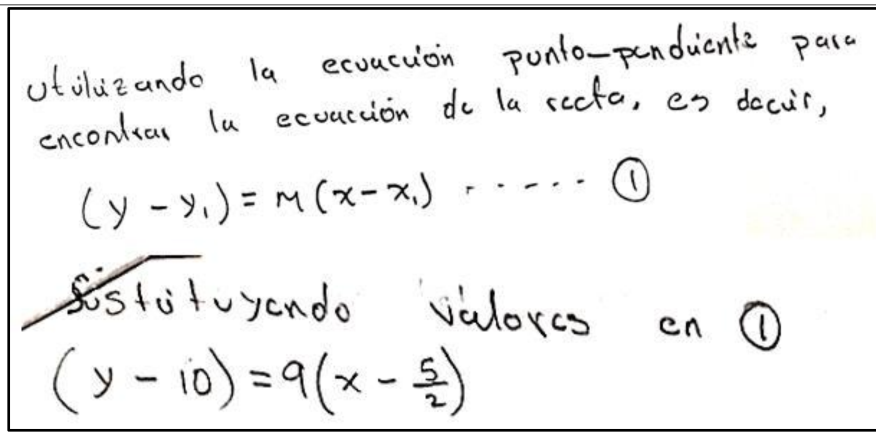
I: Y ¿Qué te están pidiendo?

E: La ecuación de la recta tangente a este punto $\left(\frac{5}{2}, 10\right)$.

I: Aquí iniciaste derivando a f, pero ¿Para qué te sirve la derivada?

E: Para encontrar la pendiente de esta recta.

Pc3: Calcular la ecuación de una recta usando la fórmula punto pendiente ($y - y_1 = M(x - x_1)$), conociendo la pendiente y el punto de tangencia (ver Figura 54 y extracto de la transcripción).



utilizando la ecuación punto-pendiente para encontrar la ecuación de la recta, es decir,

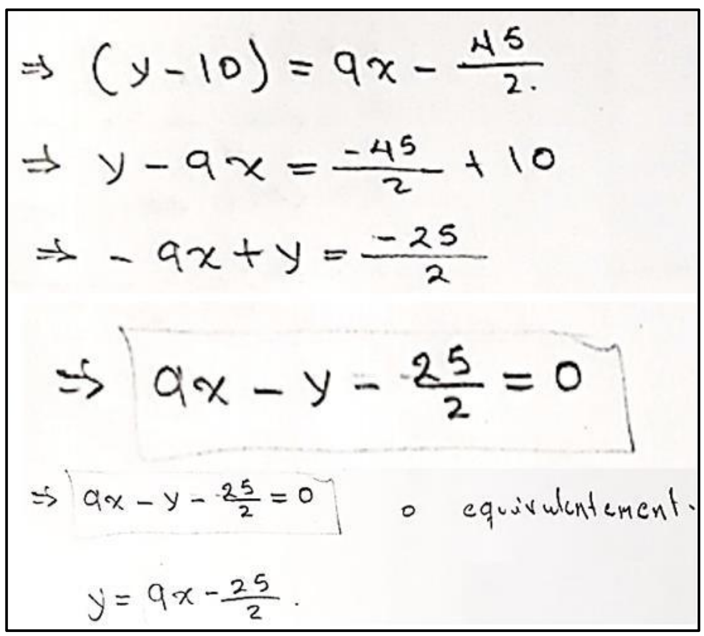
$$(y - y_1) = m(x - x_1) \; \ldots\ldots \; (1)$$

Sustituyendo valores en (1)

$$(y - 10) = 9\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

Figura 54. Evidencia del cálculo de la pendiente por medio de la ecuación punto pendiente, la pendiente y el punto de tangencia.

Pc4: Encontrar expresiones equivalentes usando las propiedades del álgebra (distributiva, asociativa, conmutativa), ver Figura 55.



$$\Rightarrow (y - 10) = 9x - \frac{45}{2}$$

$$\Rightarrow y - 9x = \frac{-45}{2} + 10$$

$$\Rightarrow -9x + y = \frac{-25}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{9x - y - \frac{25}{2} = 0}$$

$\Rightarrow \boxed{9x - y - \frac{25}{2} = 0}$ o equivalentement.

$$y = 9x - \frac{25}{2}.$$

Figura 55. Uso de propiedades del álgebra para encontrar la ecuación de la recta.

Pc5: Hallar los puntos de corte de una recta con los ejes de coordenadas (ver Figura 56).

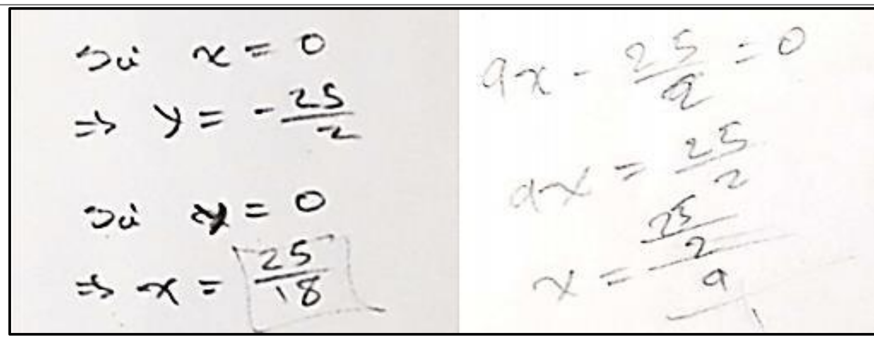


Figura 56. Evidencia de cómo hallar los puntos de corte de la recta con los ejes *x* e *y*.

Pc6: Representar una recta a partir de dos puntos por los que pasa (ver Figura 51 y el siguiente extracto de la transcripción).

> I: ¿Cómo puedes hacer esa gráfica?
>
> E: Dándole valores, no se me ocurre otra cosa.

Pc7. Representación gráfica de una función $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - x}$ a partir de una tabla de valores (ver Figura 51).

Argumentos (A)

Tesis: Esta es la ecuación de la recta tangente $\left(\boldsymbol{y = 9x - \frac{25}{2}}\right)$.

Razón 1 (R1): Si esta es la recta tangente, en el punto de tangencia coincide la recta con la gráfica de $\boldsymbol{f(x)}$ y en los alrededores del punto de tangencia la recta se aproxima a la gráfica.

R2: Dibujo la recta, dibujo la gráfica y veo que alrededor del punto de tangencia coinciden.

Conclusión: la recta es tangente.

Después de elaborar la configuración cognitiva de E1, se usa la herramienta de FS para visualizar las relaciones entre los objetos primarios de dicha configuración (ver Figura 57).

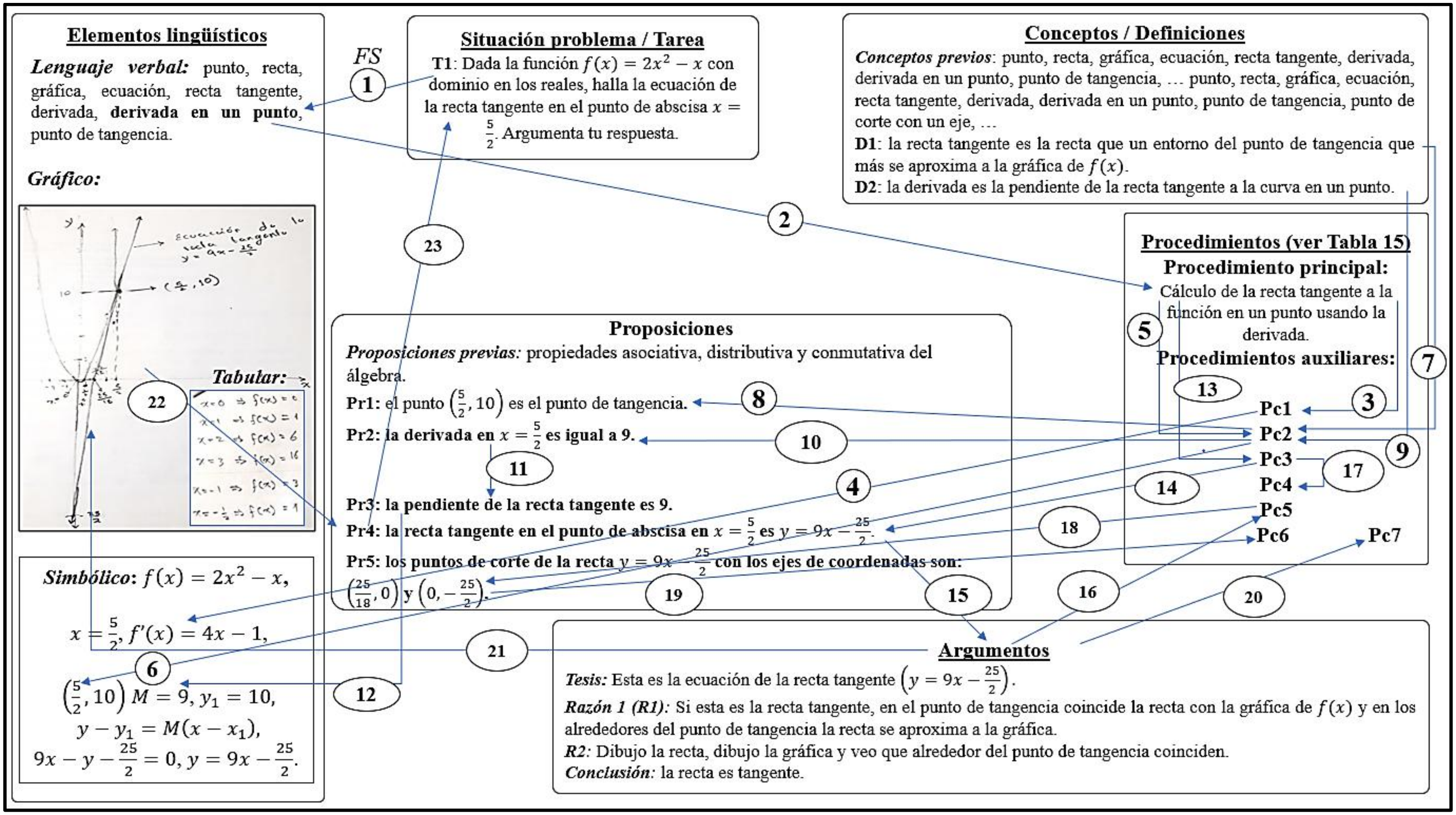


Figura 57. Funciones semióticas establecidas con los objetos primarios por parte de E1 en la resolución de la tarea 2.

Después de estos análisis parciales consecutivos de la actividad matemática de E1 usando herramientas del EOS (ver Figura 57), en la Tabla 3 se dan algunos ejemplos de cómo éstos se dan simultáneamente (primeras cuatro columnas). Por otra parte, en la quinta columna se presenta la conexión matemática correspondiente, de acuerdo con las categorías de conexiones de la TAC. En la Tabla 16 se evidencia que una conexión de la TAC es un conglomerado de prácticas, procesos, objetos primarios activados en estas prácticas y FSs que los relacionan.

4.3.2.4. Análisis detallado de las conexiones matemáticas en la tarea 2 basado en la integración entre la TAC y el EOS

Tabla 16. Análisis detallado de la actividad matemática del estudiante con base en el EOS y la TAC.

Prácticas	Procesos	Objetos	Funciones semióticas	Conexión matemática
Pm1	Significación / comprensión. -Problematización.	Tarea (T1)	FS1	
Pm2	Resolución de problemas Representación (verbal y simbólica)	Pc1: El estudiante Calcula la derivada ($f'(x) = 4x - 1$) de una función de segundo grado ($f(x) = 2x^2 - 2$). Función derivada.	FS2, FS3, FS4	Procedimental
… (otras Pm)	…	…	…	…
Pm5	Resolución de problemas Representación Significación/ enunciación	Pc2: Evaluar la función para un valor de la abscisa (ver Figura 7). Pr2, Pr3.	FS5 FS6, FS12	Procedimental Representaciones diferentes

		D1.	FS7, FS8, FS9, FS10, FS11.	Significado
… (otras Pm)	…	…	…	…
Pm14	Resolución de problemas Representación	Pc7. Representación gráfica de una función $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - x}$ a partir de una tabla de valores. Figura 50.	FS20, FS21 y FS 22	Representaciones diferentes Procedimental Parte-todo

Por otra parte, se presentan algunas conexiones matemáticas realizadas por los estudiantes E2, E3, E4, E7 y E8 que, al igual que E1, procedieron adecuadamente para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x^2 - x$ en el punto de abscisa $x = \frac{5}{2}$. En este sentido, se identificó que E2, E3, E4, E7 y E8 establecieron conexiones siguiendo el mismo procedimiento que se ha dividido en seis fases: que se encuentran en la casilla de procedimientos en la Tabla 15.

En la primera, los estudiantes calcularon la derivada de una función de segundo grado donde establecieron conexiones matemáticas de tipo procedimental dado que emplearon implícitamente la fórmula para derivar una potencia $\left(\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}\right)$, obteniendo $f'(x) = 4x - 1$ (ver Figura 58).

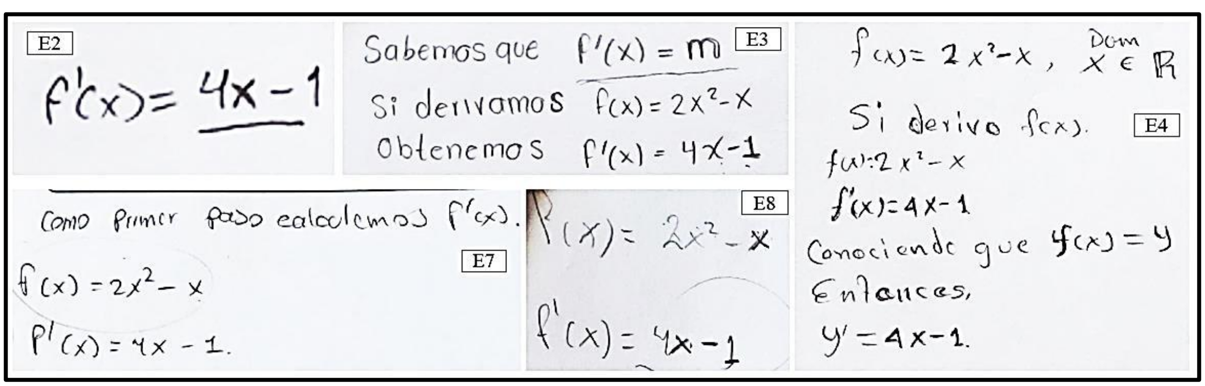


Figura 58. Procedimiento para derivar la función.

En la segunda fase, los estudiantes establecieron una conexión de tipo procedimental dado que, evaluaron la función $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - x}$ para un valor de la abscisa $x = \frac{5}{2}$, encontrando que $y = 10$, es la ordenada del punto de tangencia $\left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}, \mathbf{10}\right)$. Luego, establecieron otra conexión de tipo procedimental porque evaluaron la función derivada $f'(x) = 4x - 1$ en $x = \frac{5}{2}$ con el propósito de encontrar la pendiente $m = 9$ (ver Figura 59).

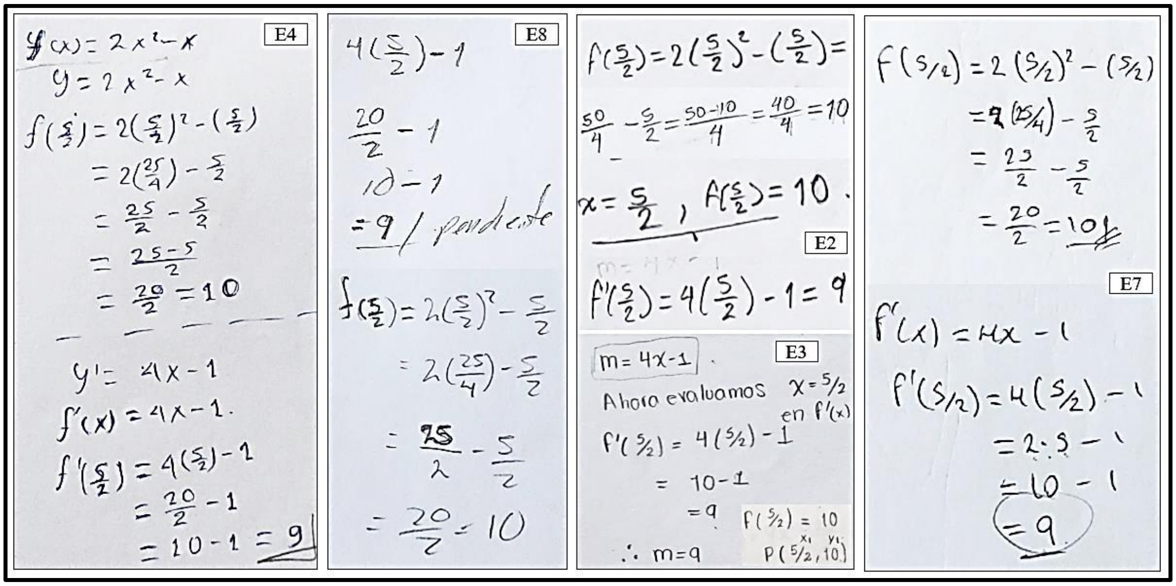


Figura 59. Conexión procedimental para hallar el punto de tangencia y la pendiente.

En la tercera, los estudiantes establecieron una conexión de tipo procedimental debido a que usaron la fórmula de la ecuación punto pendiente ($\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$) y en ella, sustituyeron el punto de tangencia $\left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}, \mathbf{10}\right)$ y el valor de la pendiente *m=9*. Seguidamente, realizaron conexiones matemáticas de tipo representaciones equivalentes a partir de operaciones aritméticas y propiedades del álgebra (conmutativa y distributiva) hasta encontrar la ecuación de la recta $\left(\boldsymbol{y = 9x - \frac{25}{2}}\right)$, ver la Figura 60.

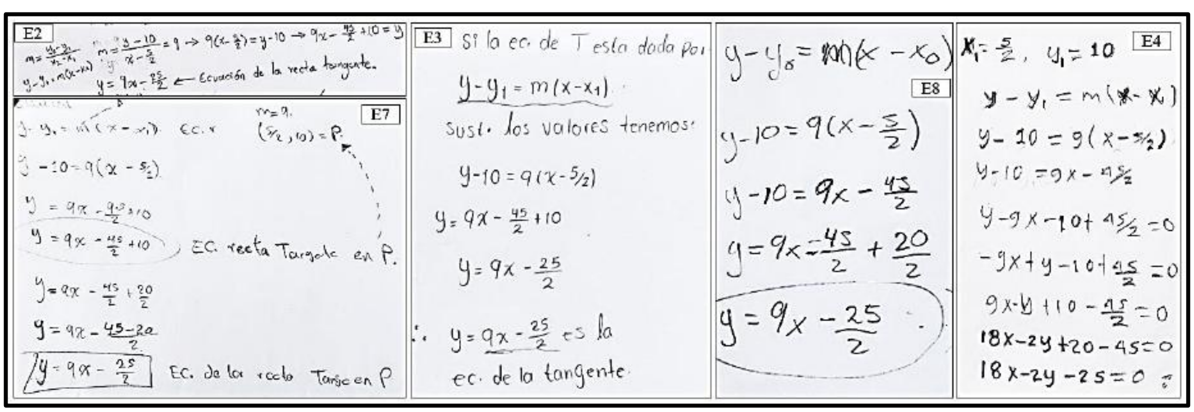


Figura 60. Aplicación de la fórmula punto pendiente para encontrar la ecuación de la recta.

En la cuarta fase, establecieron conexiones matemáticas de tipo representaciones diferentes alternas porque representaron gráficamente la función $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - x}$ y la ecuación de la recta tangente: $\boldsymbol{y = 9x - \frac{25}{2}}$ o bien, $18x - 2y - 25 = 0$, es decir, usaron dos registros de representación (gráfico y algebraico-simbólico) de la misma función (ver Figura 61).

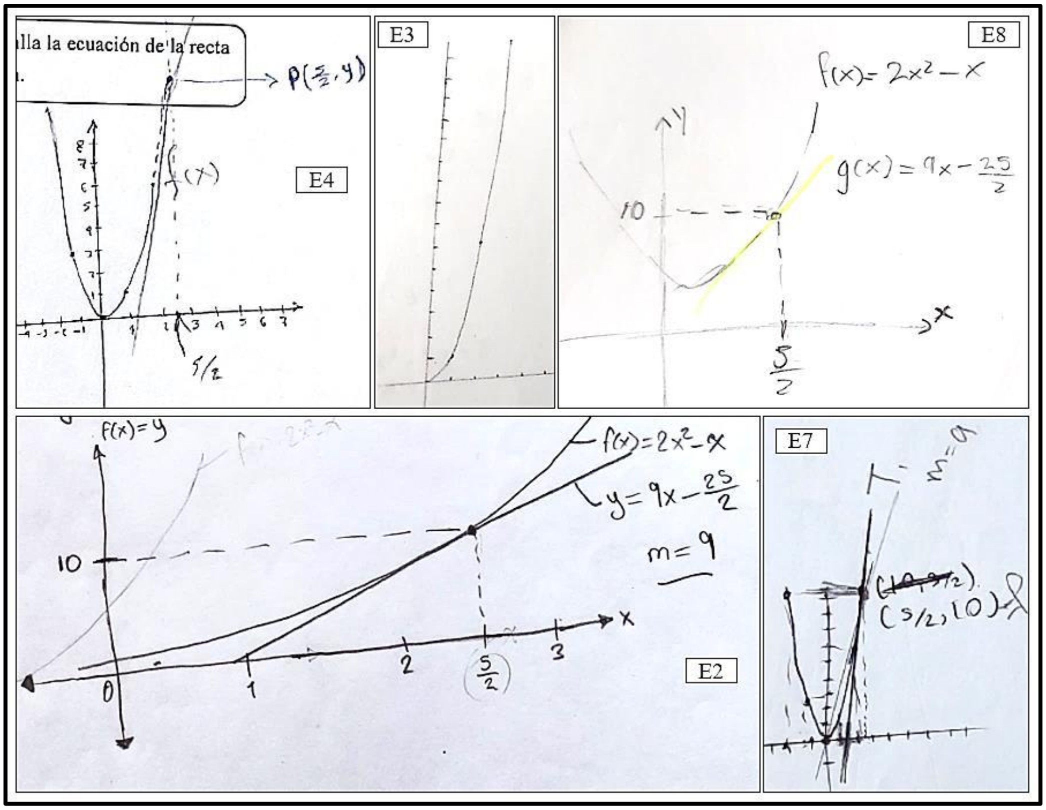


Figura 61. Conexiones matemáticas de tipo representaciones diferentes alternas.

En la Figura 61 se observa que E3 no hizo la conexión de representaciones diferentes alternas para ambas expresiones algebraicas, dado que no realizó la gráfica completa, sólo bosquejó una parte de $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - x}$. Cabe destacar que, los estudiantes establecieron otras conexiones matemáticas como la de significado, dado que conciben que la derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto dado. Asimismo, establecieron conexiones de tipo parte-todo porque solo grafican la función en el dominio donde la recta es tangente a la función. A continuación, se muestra el esquema de conexión matemática de tipo procedimental (ver Figura 62).

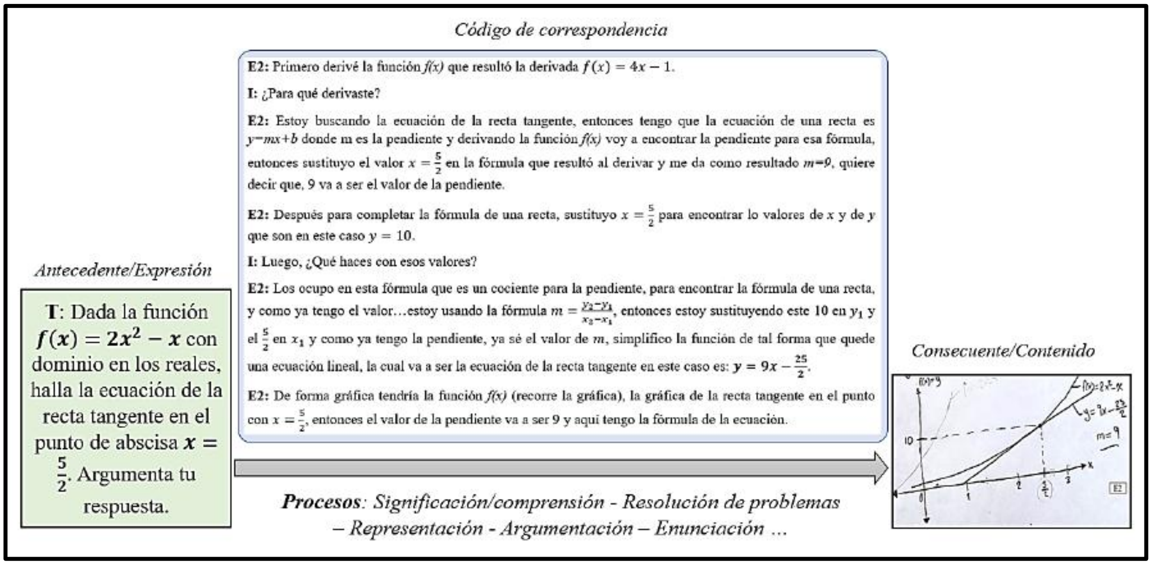


Figura 62. Esquema de la conexión matemática de tipo procedimental para la resolución de la tarea 2.

Por otra parte, en el análisis de las conexiones matemáticas que emergen en la resolución de las tareas siguientes, solo se mostrarán las prácticas matemáticas, las configuraciones cognitivas, las funciones semióticas y el análisis integrador de la TAC y el EOS.

4.3.3. Conexiones matemáticas establecidas en la resolución de la tarea 3

4.3.3.1. Prácticas matemáticas (Pm1, …, Pm26)

Pm1: El estudiante E1 leyó y comprendió la tarea propuesta.

Pm2: Comprendió la derivada como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto y el punto crítico como el valor en *x* donde la derivada se hace cero.

Pm3: Calculó la derivada de la función $g(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$, obteniendo como resultado $g'(x) = x^2 - 4x + 3$. Para ello, implícitamente usó la fórmula $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$.

Pm4: Calculó los **puntos críticos** de la función. Para ello, consideró el criterio de la primera derivada, igualó a cero la derivada $x^2 - 4x + 3 = 0$, *completó cuadrado*, realizó algunas operaciones algebraicas, aritméticas y expresiones equivalentes, hasta encontrar los puntos (*x=1* y *x=3*).

Pm5: Determinó los intervalos de crecimiento $(-\infty, \mathbf{1})\boldsymbol{y}\ (\mathbf{3}, +\infty)$ y decrecimiento $(\mathbf{1}, \mathbf{3})$. Para lograrlo, consideró el criterio de la primera derivada y sustituyó *x=0* en g y obtuvo

$g'(0) = 3 > 0$, entonces afirmó que en $(-\infty, \mathbf{1})$ la función es creciente. Luego, sustituyó x= 2 en g y obtuvo $g'(2) = -1 < 0$, entonces afirmó que, en $(\mathbf{1}, \mathbf{3})$ la función es decreciente. Por último, sustituyó *x= 4* en g y obtuvo $g'(4) = 3 > 0$, entonces afirmó que, en $(\mathbf{3}, +\infty)$ la función es creciente.

Pm6: Con base en el punto crítico x=1, E1 encontró el punto máximo. Para ello usó el criterio de la primera derivada y sustituyó *x= 0* en g', que es un valor antes de *x=1*, de lo cual obtuvo $g'(0) = 3 > 0$ (positivo). Luego, sustituyó x=2 en g' que es un valor después de *x=1*, obteniendo $g'(2) = -1 < 0$ (negativo). Por lo tanto, E1 afirmó que en *x=1*, g tiene un máximo.

Pm7: Sustituyó *x=1* en g, realizó operaciones aritméticas y encontró que el punto máximo es $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.

Pm8: Con base en el punto crítico *x=3*, E1 encontró el punto mínimo. Sustituyó *x=4* en g', que es un valor después de x=3, obteniendo $g'(4) = 3 > 0$ (positivo). Por lo tanto, E1 afirmó que en *x=3*, g tiene un mínimo.

Pm9: Sustituyó x=3 en g, realizó operaciones aritméticas y halló el punto mínimo (3, 1).

Pm10: Encontró el punto de inflexión por medio del criterio de la segunda derivada. Es decir, halló la segunda derivada de g, la igualó a cero $g''(x) = 2x - 4 = 0$, despejó y obtuvo que $x = 2$.

Pm11: Evaluó *x=2* en g y obtuvo la imagen $\frac{5}{3}$, lo cual le permitió encontrar el punto de inflexión $\left(2, \frac{5}{3}\right)$.

Pm12: Determinó los intervalos de concavidad $(-\infty, \mathbf{2})$ y $(\mathbf{2}, +\infty)$**.** Para ello, usó el criterio de la segunda derivada, mencionando que, si la segunda derivada en un intervalo es menor que cero entonces la función es cóncava hacia abajo, por ejemplo, E1 evaluó a $x = 1$ en g'' que es un valor que está antes de $x = 2$ y obtuvo que $g''(1) = -2 < 0$. Por lo tanto, g es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 2)$. Posteriormente, evaluó *x=3* en g'' que es un valor que está después de $x = 2$, obteniendo que $g''(3) = 2 > 0$. Por lo tanto, g es cóncava hacia arriba en $(\mathbf{2}, +\infty)$**.**

Pm13: Identificó que el punto en *x=2* si es el punto de inflexión porque genera el cambio de ser cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

Pm14: Para hacer la gráfica de g, E1 primero dibujó un sistema de coordenadas cartesianas.

Pm15: Ubicó los intervalos donde g es creciente y decreciente.

Pm16: Ubicó en el plano el punto máximo $\left(1, \frac{7}{3}\right)$ y punto mínimo (3, 1) y los puntos de corte con el eje *x*.

Pm17: Construyó una tabla de valores para graficar a $g(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

Pm18: Ubicó los puntos obtenidos en la tabla de valores en el plano cartesiano.

Pm19: Dibujó la gráfica de $g(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

Pm20: Para hacer la gráfica de g', E1 hizo un sistema de coordenadas cartesianas.

Pm21: Ubicó los puntos en el plano donde la derivada se hace cero: (1, 0) y (3, 0).

Pm22: Construyó una tabla de valores para graficar a $g'(x) = x^2 - 4x + 3$.

Pm23: Ubicó los puntos obtenidos en la tabla de valores en el plano cartesiano.

Pm24: Dibujó la gráfica de $g'(x) = x^2 - 4x + 3$.

Pm25: Enunció características de las funciones y sus gráficas, dado que afirmó que ambas funciones son continuas, que la gráfica de g tiene un máximo y un mínimo, y la gráfica de g' solo tiene un mínimo.

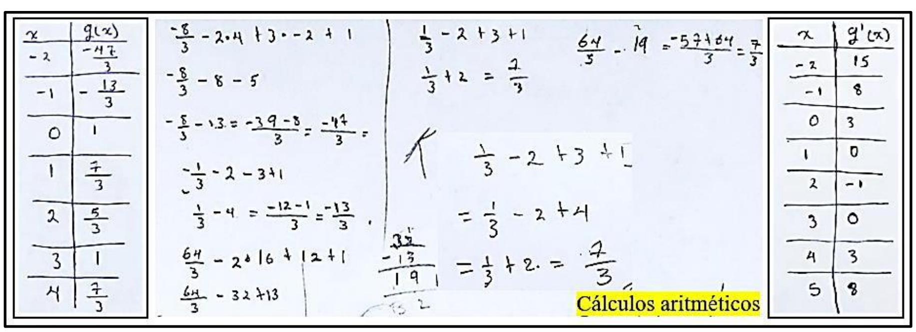
Pm26: Enunció que la derivada es una función de grado menor que la función original.

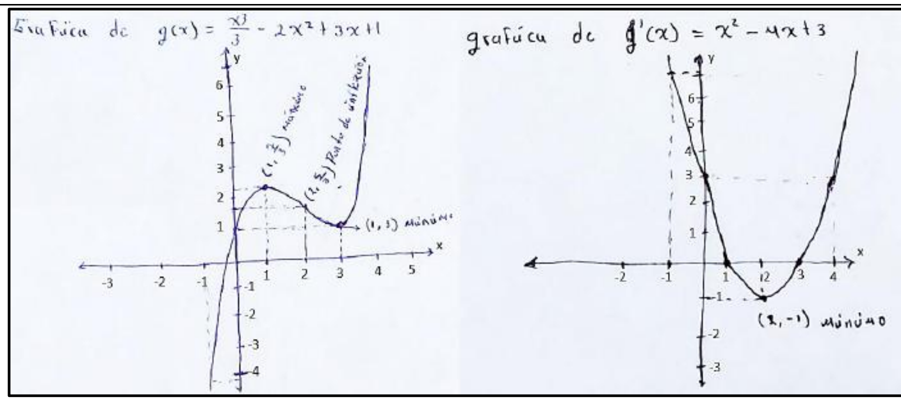
4.3.3.2. Configuración cognitiva de objetos primarios de E1 sobre la tarea 3

A continuación, con base en las prácticas matemáticas descritas, se conforma la configuración cognitiva de E1 cuando resolvió la tarea 3 (ver Tabla 17).

Tabla 17. Configuración cognitiva activada de objetos primarios de E1 para la resolución de la tarea 3.

Objetos primarios	Descripción

Situación problema/Tarea (T)	Dada la función $g(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$, **T1**: a) Encuentre los intervalos en los que g es creciente o decreciente. **T2**: b) Determine dónde la función tiene máximo relativo o mínimo relativo. **T3**: c) Halle los puntos de inflexión de la función. **T4**: d) Determine dónde la gráfica es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo. **T5**: e) Realice una gráfica de la función derivada g'. **T6**: f) Explique ampliamente ¿Qué relación tiene la gráfica de g con la gráfica de g'?
Elementos lingüísticos	*Verbal*: Verbal: punto, punto crítico, punto máximo, punto mínimo, punto de inflexión, recta, gráfica, ecuación, recta tangente, derivada, segunda derivada, derivada en un punto, concavidad hacia arriba y hacia abajo, función creciente y decreciente, intervalo, plano cartesiano…
	Tabular: ver Figura 63.  Figura 63. Tablas de valores para gráficar a g y g'.
	Gráfico: ver Figura 64.

	 Figura 64. La gráfica de g y la gráfica de g'.
	Simbólico: $g(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$; $g'(x) = x^2 - 4x + 3$; $g''(x) = 2x - 4$; *x=1*; *x=3*; *x=0*; *x=2*; *x=4*; intervalos de crecimiento: $(-\infty, \mathbf{1})$y $(\mathbf{3}, +\infty)$**;** intervalos de decrecimiento: $(\mathbf{1}, \mathbf{3})$**;** $g'(0) = 3 > 0$; $g'(2) = -1 < 0$; $g'(4) = 3 > 0$; $g'(0) = 3 > 0$; $g'(2) = -1 < 0$; $g'(4) = 3 > 0$; punto máximo $\left(1, \frac{7}{3}\right)$ y mínimo (3, 1); intervalos de concavidad hacia abajo $(-\infty, \mathbf{2})$ y hacia arriba $(\mathbf{2}, +\infty)$**;** $g''(1) = -2 < 0$; $g''(3) = 2 > 0$; puntos de corte (1, 0) y (3, 0); punto de inflexión: $\left(2, \frac{5}{3}\right)$. Cabe destacar que, en los procedimientos se mostraran más símbolos.
Conceptos/ Definiciones (D*)*	**Conceptos previos**: punto, punto máximo o mínimo, punto de inflexión, punto crítico, recta, gráfica, ecuación, recta tangente, derivada, segunda derivada, derivada en un punto, punto de corte con un eje, … **D1**: La derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto. **D2**: Un número crítico de una función *f* es un número *c* en el dominio de *f* tal que *f'(c)=0* o *f'(c)=0* no existe. **D3**: "Sea *f* continua en *c*. Llamamos a (*c*, *f* (*c*)) un punto de inflexión de la gráfica de *f*, si *f* es cóncava hacia arriba a un lado de *c* y cóncava

	hacia abajo del otro lado de *c*” (Purcell, Varberg y Rigdon, 2007, p. 159).
Proposiciones/ Propiedades (Pr)	**Proposiciones previas:** propiedad conmutativa. **Pr1**: Los puntos críticos están en *x=1* y *x=3*. **Pr2**: Los intervalos de crecimiento son: $(-\infty, \mathbf{1})$y $(\mathbf{3}, +\infty)$ y el intervalo de decrecimiento es: $(\mathbf{1}, \mathbf{3})$**.** **Pr3**: El punto máximo es $\left(1, \frac{7}{3}\right)$ y el punto mínimo es (3, 1). **Pr4**: El punto de inflexión es $\left(2, \frac{5}{3}\right)$. **Pr5**: La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, \mathbf{2})$ y cóncava hacia arriba en $(\mathbf{2}, +\infty)$**.** **Pr6**: Las funciones g y g' son continuas. **Pr7**: La derivada es una función de grado menor que la función original.
Procedimientos (Pc)	**Procedimiento principal 1 (Pcp1):** Determinación de los intervalos en los que g es creciente o decreciente. **Procedimientos auxiliares (Pca1.1)**: Calcular la derivada de una función de tercer grado (ver Figura 65). **Pca1.2**: Determinar los puntos críticos de la función. Para ello, usa el criterio de la primera derivada y método de completar cuadrado para factorizar la ecuación cuadrática y encontrar lo valores donde la derivada vale cero (ver Figura 65). **Pca1.3**: Evaluar la función con valores de ubicados antes y después de los puntos críticos para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función (ver Figura 65).

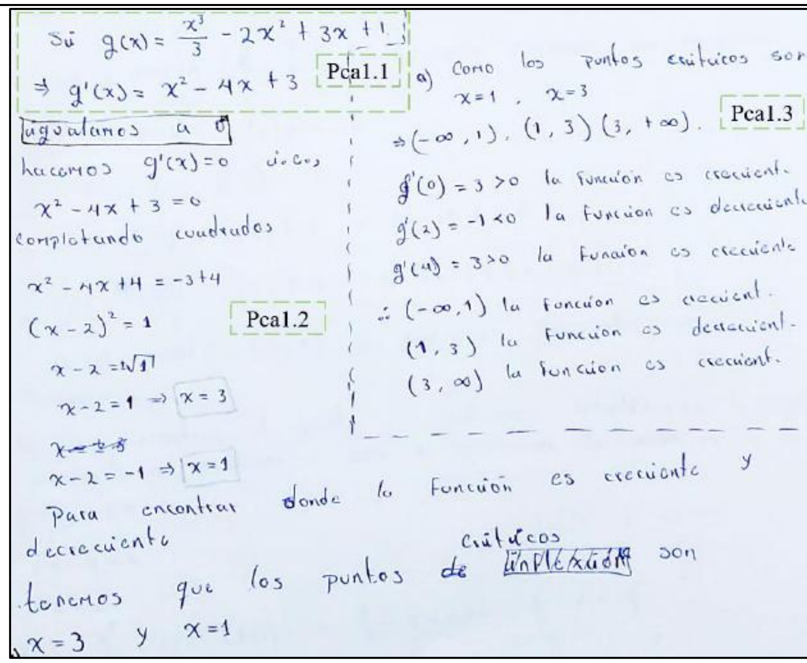
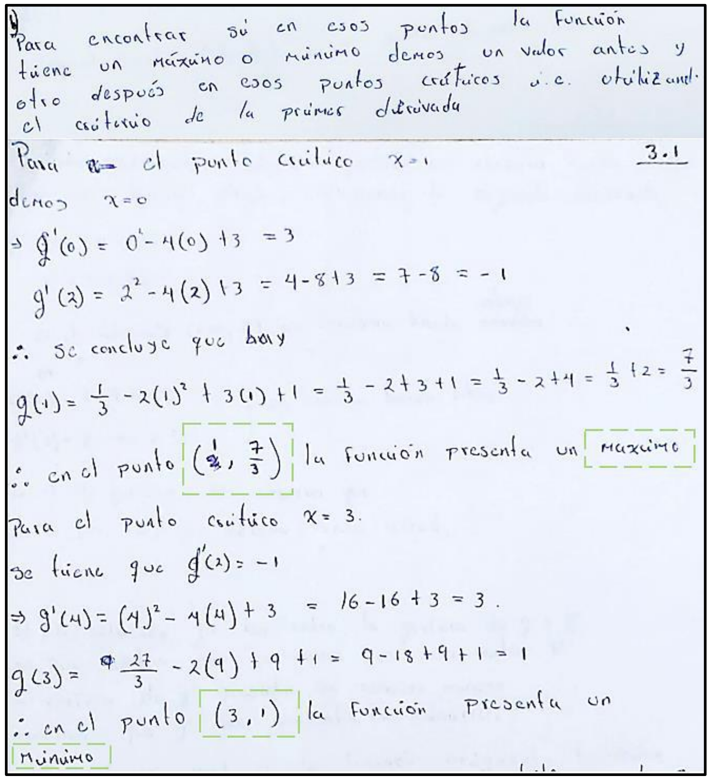


Figura 65. Evidencia del procedimiento para encontrar la derivada, los puntos críticos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Pcp2: Calcular los extremos de la función: máximo y mínimo.

Pca2.1: Evaluar la función derivada g' en los puntos críticos y considerar los intervalos de crecimiento y decrecimiento (ver Figura 66).



b) Para encontrar si en esos puntos la función tiene un máximo o mínimo demos un valor antes y otro después en esos puntos críticos i.e. utilizando el criterio de la primer derivada

Para el punto crítico $x=1$ 3.1

demos $x=0$

$\Rightarrow g'(0) = 0^2 - 4(0) + 3 = 3$

$g'(2) = 2^2 - 4(2) + 3 = 4 - 8 + 3 = 7 - 8 = -1$

$\therefore$ se concluye que hay

$g(1) = \frac{1}{3} - 2(1)^2 + 3(1) + 1 = \frac{1}{3} - 2 + 3 + 1 = \frac{1}{3} - 2 + 4 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$

$\therefore$ en el punto $\boxed{\left(1, \frac{7}{3}\right)}$ la función presenta un $\boxed{\text{máximo}}$

Para el punto crítico $x = 3$.

se tiene que $g'(2) = -1$

$\Rightarrow g'(4) = (4)^2 - 4(4) + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$.

$g(3) = \frac{27}{3} - 2(9) + 9 + 1 = 9 - 18 + 9 + 1 = 1$

$\therefore$ en el punto $\boxed{(3, 1)}$ la función presenta un $\boxed{\text{mínimo}}$

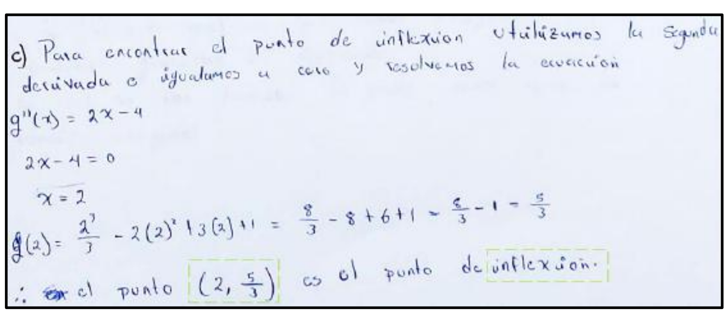
Figura 66. Procedimiento para encontrar los máximos y mínimos.

Pcp3: Calcular el punto de inflexión de la función.

Pca3.1: Calcular la derivada de una función de segundo grado (ver Figura 67).

Pca3.2: Aplicar el criterio de la segunda derivada, propiedades de inversos aditivos y operaciones aritméticas para hallar $x=2$ (ver Figura 67).

Pca3.3: Evaluar la función en $x=2$ para encontrar el punto de inflexión $\left(2, \frac{5}{3}\right)$, ver Figura 67.



c) Para encontrar el punto de inflexión utilizamos la segunda derivada e igualamos a cero y resolvemos la ecuación

$g''(x) = 2x - 4$

$2x - 4 = 0$

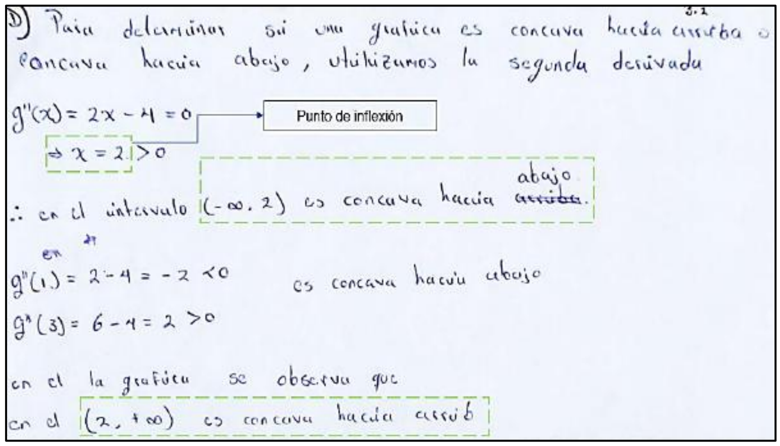
$x = 2$

$g(2) = \frac{2^3}{3} - 2(2)^2 + 3(2) + 1 = \frac{8}{3} - 8 + 6 + 1 = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}$

$\therefore$ el punto $\boxed{\left(2, \frac{5}{3}\right)}$ es el punto de $\boxed{\text{inflexión.}}$

Figura 67. Procedimiento para calcular el punto de inflexión.

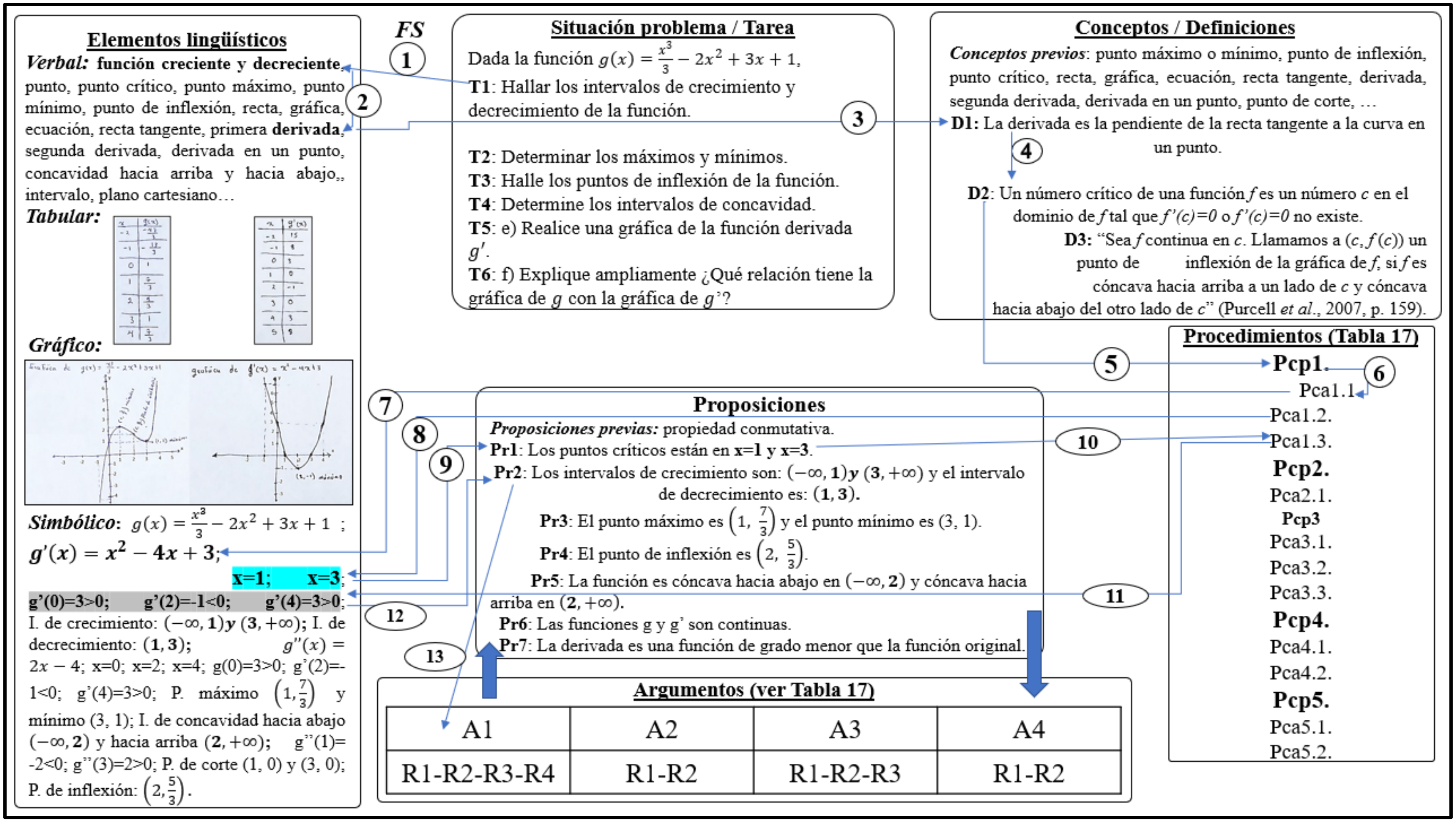
Pcp4: Determinar los intervalos de concavidad de la función.

	Pca4.1: Aplicar el criterio de la segunda derivada (ver Figura 68). **Pca4.2**: Evaluar la función en dos puntos ubicados antes y después del punto de inflexión (ver Figura 68).  D) Para determinar si una gráfica es concava hacia arriba o concava hacia abajo, utilizamos la segunda derivada $g''(x) = 2x - 4 = 0$ → Punto de inflexión $\boxed{\Rightarrow x = 2} > 0$ ∴ en el intervalo $\boxed{(-\infty, 2)\text{ es concava hacia abajo } \cancel{\text{arriba}}}$. en $g''(1) = 2 - 4 = -2 < 0$ es concava hacia abajo $g''(3) = 6 - 4 = 2 > 0$ en el la gráfica se observa que en el $\boxed{(2, +\infty)\text{ es concava hacia arrib}}$ Figura 68. Procedimiento para determinar los puntos de concavidad.
	Pcp5: Representación gráfica de la función g y la de su derivada g'. **Pca5.1**: Representación gráfica de g a partir de la expresión algebraica y una tabla de valores (ver Figuras 63 y 64). **Pca5.2:** Representación gráfica de g' a partir de la expresión algebraica y una tabla de valores (ver Figuras 63 y 64).
Argumentos (A)	**Argumento 1 (A1): Tesis**: Estos son los intervalos de crecimiento $(-\infty, \mathbf{1})\,\boldsymbol{y}\,(\mathbf{3}, +\infty)$ y el intervalo de decrecimiento es: $(\mathbf{1}, \mathbf{3})$**.** **Razón 1 (R1):** Si una función es continua, los puntos críticos separan intervalos de crecimiento y/o decrecimiento. **R2:** En esta función los puntos críticos son *x=1* y *x=3* porque para estos valores la derivada vale 0. **R3:** Existen tres intervalos y el signo de la derivada en cada uno siempre es el mismo. Si el signo es negativo es decreciente, y si el signo es positivo es creciente. **R4:** Basta buscar el signo de la derivada para un valor cualquiera del intervalo. Para *x=0* la derivada es positiva, por tanto, en el intervalo

	$(-\infty, 1)$ g es creciente. Para el valor *x=2* la derivada es negativa, por tanto, en el intervalo $(1, 3)$ g es decreciente. Para *x=4* la derivada es positiva, entonces en el intervalo $(3, +\infty)$ g es creciente. **Conclusión 1**: La función es creciente en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(3, +\infty)$ y decreciente en el intervalo $(1, 3)$.
	A2: Tesis: Este es el punto máximo $\left(1, \frac{7}{3}\right)$ y este es el punto mínimo (3, 1). **R1**: En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función es creciente y en el intervalo $(1, 3)$ la función es decreciente, porque para un valor anterior a *x=1* la derivada es positiva y para un valor después de *x=1*, la derivada es negativa, por tanto, g tiene un máximo en *x=1*. Luego, en el intervalo $(3, +\infty)$ la función es creciente dado que, para un valor en este intervalo la derivada es positiva, entonces g tiene un mínimo en *x=3*. **R2**: La imagen de *x=1* es $g(1) = \frac{7}{3}$ y la imagen de *x=3* es $g(3) = 1$. **Conclusión 2:** El punto máximo es $\left(1, \frac{7}{3}\right)$ y el mínimo es (3, 1).
	A3: Tesis: El punto de inflexión de la función es $\left(2, \frac{5}{3}\right)$. **R1:** Si una función es continua, los puntos de inflexión separan intervalos de concavidad (cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa). **R2**: La función tiene un punto de inflexión en *x=2* porque la segunda derivada g'' en ese valor es igual a 0. **R3**: Encuentra la imagen de *x=2* que es $g(2) = \frac{5}{3}$. **Conclusión 3**: $\left(2, \frac{5}{3}\right)$ si es el punto de inflexión.

	A4: **Tesis**: La función g es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 2)$ y cóncava hacia arriba en $(2, +\infty)$. **R1**: El punto de inflexión es $\left(2, \frac{5}{3}\right)$, existen dos intervalos y el signo de la segunda derivada en cada uno siempre es el mismo. **R2**: Basta buscar el signo de la segunda derivada para un valor cualquiera del intervalo. Para *x=1* la segunda derivada es negativa, por tanto, en el intervalo $(-\infty, 2)$ g es cóncava hacia abajo. Para el valor *x=3* la segunda derivada es positiva, por tanto, en el intervalo $(2, +\infty)$, g es cóncava hacia arriba. **Conclusión 4:** g es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 2)$ y cóncava hacia arriba en $(2, +\infty)$.

Posteriormente, se relacionan los objetos primarios activados en la configuración cognitiva con base en la herramienta de FS (ver Figura 68). Cabe destacar que, en la Figura 68 se muestran algunas funciones semióticas (1-13) porque al colocar las otras complicaría la comprensión por parte de lector. También, se ha venido siguiendo la misma línea de las configuraciones y funciones semióticas anteriores, pero, en este caso se colocó una flecha más gruesa de color azul para evidenciar que algunas *proposiciones* se usan en los argumentos. La otra flecha azul en sentido contrario (argumentos → proposiciones), indica que los argumentos justifican y validan a las proposiciones, que son las afirmaciones de cada respuesta a las preguntas de la tarea. Asimismo, las flechas gruesas son un conjunto de FSs que no se detallan por la densidad del contenido de la Figura 69.



A1	A2	A3	A4
R1-R2-R3-R4	R1-R2	R1-R2-R3	R1-R2

Figura 69. Funciones semióticas establecidas con los objetos primarios por parte de E1 en la resolución de la tarea 3.

En la Tabla 18 se presentan algunos casos de conexiones matemáticas establecidas por E1 al resolver la tarea 3 (presentadas en la Figura 69), teniendo en cuenta el conglomerado de prácticas, procesos, objetos y funciones semióticas que constituyen a la conexión.

4.3.3.3. Análisis detallado de las conexiones matemáticas en la tarea 3 basado en la integración entre la TAC y el EOS

Tabla 18. Análisis detallado de la actividad matemática de E1 al resolver la tarea 3.

Prácticas	Procesos	Objetos	Funciones semióticas	Conexión matemática
Pm1	Significación / comprensión. -Problematización.	Tarea (T1)	FS1	
Pm2	-Resolución de problemas -Enunciación	**D1:** La *derivada* es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto. **D2**: Un *número crítico* de una función f es un número *c* en el dominio de *f* tal que *f'(c)=0.*	FS2, FS3 y FS 4	Significado
Pm3	Resolución de problemas Representación (verbal y simbólica)	Pca1.1: El estudiante Calcula la derivada de $g(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$, que es igual a $g'(x) = x^2 - 4x + 3$, usando implícitamente la fórmula $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$.	FS5, FS6, FS7	Procedimental
Pm4	Resolución de problemas Representación (verbal y simbólica)	Pca1.2: Calculó los **puntos críticos** de la función. Usó el criterio de la primera derivada, igualó a cero la derivada ($x^2 - 4x + 3 = 0$), completó cuadrado y encontró los puntos críticos (*x=1* y *x=3*).	FS8 y FS9	Procedimental

Pm5	Resolución de problemas Representación	Pca1.3: Determinó los intervalos de crecimiento $(-\infty, \mathbf{1})\boldsymbol{y}\ (\mathbf{3}, +\infty)$ y decrecimiento $(\mathbf{1}, \mathbf{3})$. Usó el criterio de la primera derivada y sustituyó *x=0* en g y obtuvo $g'(0) = 3 > 0$, luego, sustituyó *x=2* en g y obtuvo $g'(2) = -1 < 0$, y, por último, sustituyó *x=4* en g y obtuvo $g'(4) = 3 > 0$.	FS10 y FS11	Procedimental
	Argumentación Enunciación Representación	Afirmó que en $(-\infty, \mathbf{1})$ la función es creciente. Enunció que, en $(\mathbf{1}, \mathbf{3})$ la función es decreciente. Enunció que, en $(\mathbf{3}, +\infty)$ la función es creciente.	FS12 y FS13	Implicación
…	…	…	…	…

Por otra parte, los estudiantes E2, E3, E4, E5 y E7 Resolvieron adecuadamente la tarea propuesta, dado que, procedieron de manera similar a E1. En este sentido, solo se mostrarán algunas evidencias de conexiones matemáticas realizadas por E2 y E5, quienes inicialmente establecieron una conexión matemática de tipo significado, debido a que entienden a la derivada como la pendiente de la recta tangente que toca a la curva en un punto (ver Figura 70).

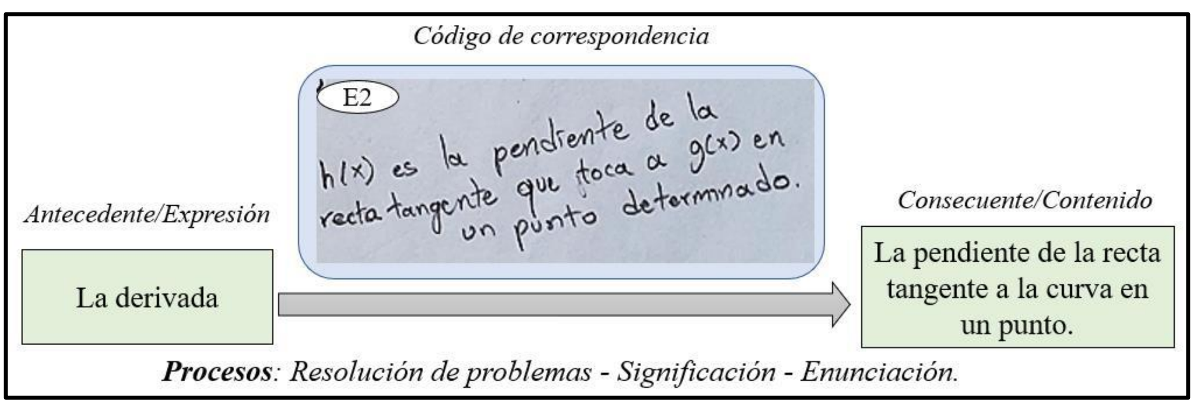


Figura 70. Evidencia de la Conexión matemática de significado

Posteriormente, hicieron una conexión de tipo procedimental cuando derivaron la función $g(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$, obteniendo como resultado a $h'(x) = x^2 - 4x + 3$ (así la denominó E2) y $g'(x) = x^2 - 4x + 3$ (así la denominó E5), donde usaron implícitamente la fórmula $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$. Luego, por medio de otra conexión de tipo procedimental encontraron las raíces del polinomio cuadrático a través de la factorización encontrando dos raíces ($x_1 = 1\ y\ x_2 = 3$), que serían las abscisas de los puntos críticos (ver Figura 71).

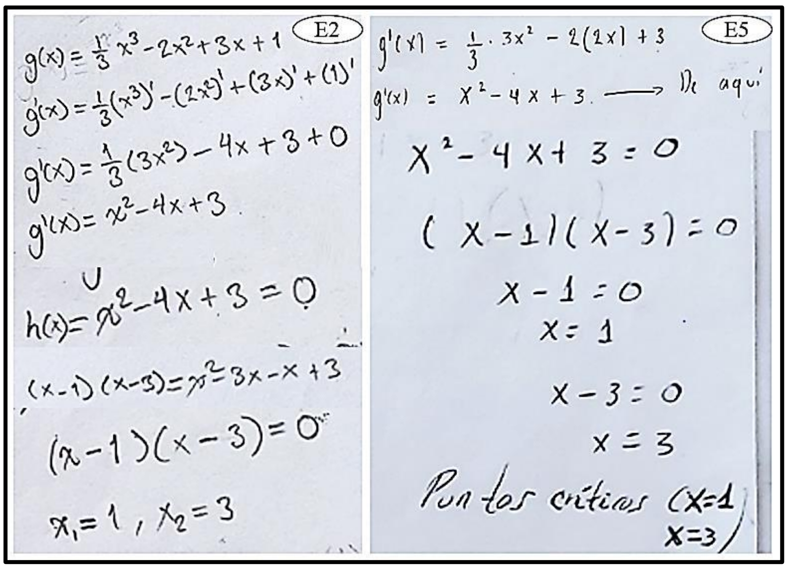


Figura 71. Conexiones matemáticas de tipo procedimental.

Luego, E2 y E5 hicieron conexiones matemáticas de tipo procedimental debido a que, evaluaron la función en diferentes valores de x que se ubicaran antes y después de los puntos críticos ($x_1 = 1\ y\ x_2 = 3$), de lo cual obtuvieron que la función es creciente en los intervalos: $(-\infty, \mathbf{1})\boldsymbol{y}\ (\mathbf{3}, +\infty)$, y, decreciente en el intervalo (1, 3), ver Figura 72.

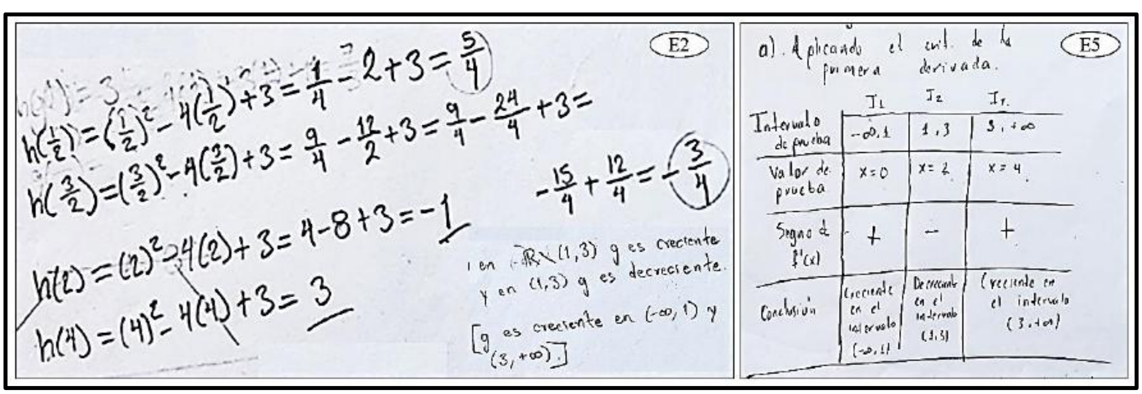


Figura 72. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

En el procedimiento seguido en la Figura 72, E2 y E5 usaron proposiciones soportadas con argumentos, las cuales se reconocieron como conexiones matemáticas de tipo implicación, por ejemplo, E2 se basó en los criterios de la primera derivada: "*si la derivada de una función evaluada en un punto perteneciente a un intervalo I es mayor que cero, entonces la función original es creciente en I*", o bien, "*si la derivada de una función evaluada en un punto perteneciente a I es menor que cero, entonces la función original es creciente*". Seguidamente, para hallar los valores extremos de la función, E2 usó el criterio de la primera derivada estableciendo una conexión de tipo procedimental y mencionaba que "*en el valor x=1 la función pasa de ser creciente a decreciente, entonces en x=1 hay un máximo*" y "*en el valor x=3 la función pasa de ser decreciente a creciente, entonces en x=3 hay un mínimo*". No obstante, E2 procedió equivocadamente al realizar operaciones aritméticas, lo cual no le permitió hallar el punto mínimo adecuado (ver Figura 73). Mientras que, E5 hizo conexiones matemáticas de tipo implicación teniendo en cuenta el criterio de la segunda derivada, por ejemplo, ya sabía que en *x=1* y *x=3* la derivada es igual a cero, por lo tanto, a través de conexiones de tipo procedimental e implicación para hallar el máximo y el mínimo (ver Figura 73).

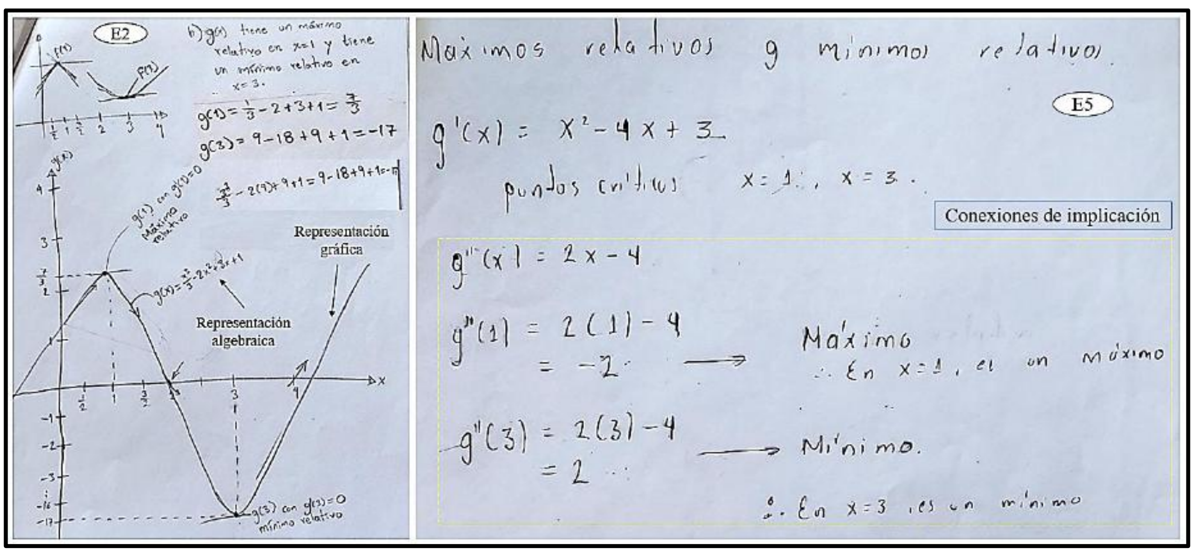


Figura 73. Conexiones matemáticas para hallar el máximo y el mínimo.

Por su parte E5 hizo conexiones matemáticas de implicación inferidas del uso de relaciones lógicas, por ejemplo, si $g''(1) < 0$, entonces en $g(1)$ hay un máximo relativo, y, si $g''(3) > 0$, entonces en $g(3)$ hay un mínimo relativo. Además, en la Figura 72 se evidencia la conexión matemática representaciones diferentes alternas entre la gráfica de la función y su expresión algebraica o simbólica.

Para hallar el punto de inflexión, los estudiantes E2 y E5 hicieron la conexión de tipo procedimental dado que aplicaron el criterio de la segunda derivada, igualaron a cero $2x - 4 = 0$, obteniendo que *x=2*. Luego, sustituyeron a *x=2* en la función original, hicieron algunas operaciones aritméticas y encontraron el valor $y = \frac{5}{3}$, lo cual les permitió encontrar el punto de inflexión $\left(2, \frac{5}{3}\right)$, ver Figura 73. Posteriormente, mediante las conexiones de tipo procedimental e implicación, porque aplicaron el criterio de la segunda derivada y las relaciones lógicas para determinar los intervalos de concavidad. Para ello evaluaron la segunda derivada en *x=1* y *x=3*, de lo cual obtuvieron que $g''(1) = -2 < 0$ entonces g es cóncava hacia abajo en $(-\infty, \mathbf{2})$, y $g''(3) = 2 > 0$ entonces g es cóncava hacia arriba en $(\mathbf{2}, +\infty)$, ver Figura 74.

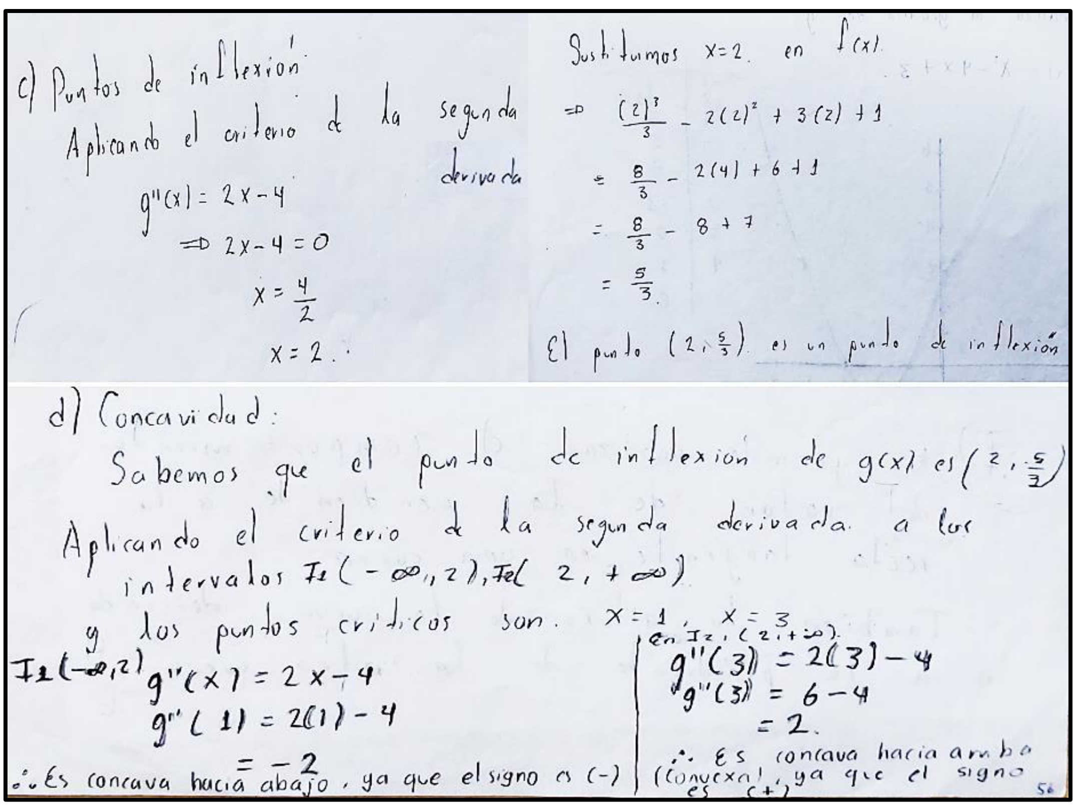


Figura 74. Conexiones matemáticas para hallar el punto de inflexión e intervalos de concavidad.

Por último, E2 y E5 establecieron conexiones matemáticas de tipo representaciones diferentes y de parte-todo para hacer la gráfica de la derivada, quienes activaron procesos de resolución de problemas y representación (ver Figura 75).

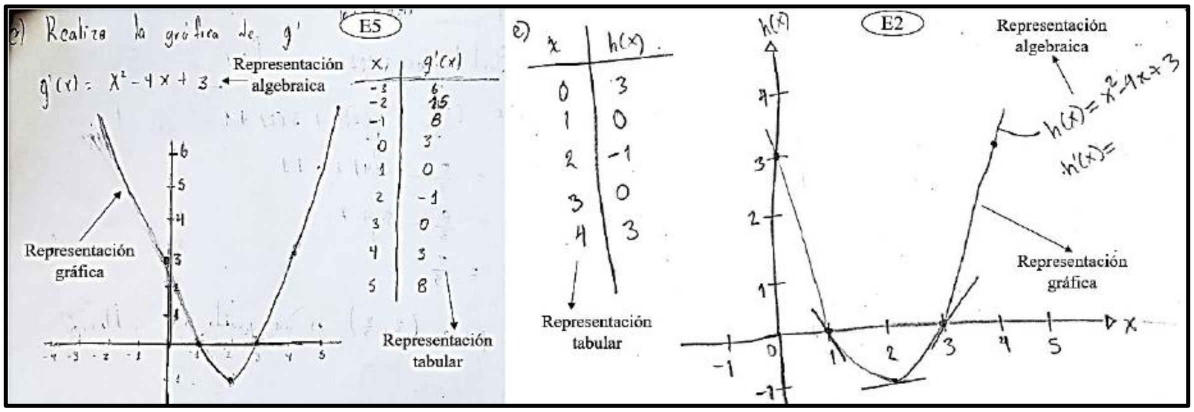


Figura 75. Conexiones matemáticas de tipo representaciones diferentes y parte-todo.

4.3.4. Conexiones matemáticas establecidas en la resolución de la tarea 4

4.3.4.1. Prácticas matemáticas (Pm1, …, Pm20)

Pm1. El estudiante E1 leyó y entendió el inciso a) de la tarea propuesta.

Pm2. Enunció la derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto.

Pm3. Identificó los puntos críticos en la gráfica que es donde la derivada se hace cero.

Pm4. Determinó los intervalos de crecimiento $(-\infty,-1)$ y $(2,+\infty)$, y decrecimiento en el intervalo (-1, 2) de la función *f*, a partir de la gráfica dada y considerando el signo de la pendiente de la recta tangente.

Pm5. El estudiante E1 leyó y entendió el inciso b) de la tarea propuesta.

Pm6. Encontró el punto máximo de la función. Para ello señaló el punto (con abscisa en *x=-1*) en la gráfica de *f* y enunció que, en ese punto la gráfica de la derivada *f'* corta al eje *x*, es igual a cero.

Pm7. Encontró el punto mínimo de la función. Para ello señaló el punto (en *x=2*) en la gráfica de *f* y enunció que, en ese punto la gráfica de la derivada *f'* corta al eje *x*, es igual a cero.

Pm8. El estudiante E1 leyó y entendió el inciso c) de la tarea propuesta.

Pm9. Enunció que el punto de inflexión es *x=0* en el origen del plano de coordenadas cartesianas, dado que ahí la función cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo (el estudiante hace gestos con sus manos refiriéndose a la concavidad, ver Figura 76).

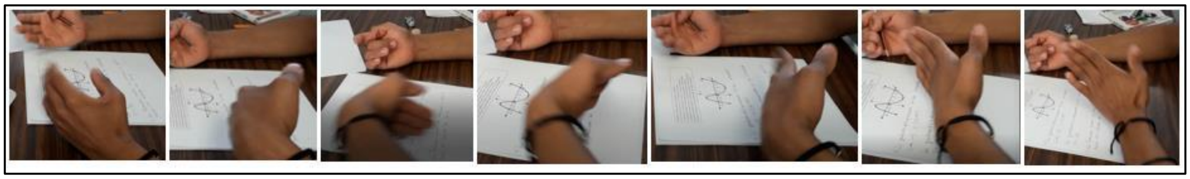


Figura 76. Gestos de E1 para referirse a la concavidad de *f*.

Pm10. El estudiante E1 leyó y entendió el inciso d) de la tarea propuesta.

Pm11. Con base en la gráfica, E1 explica que la función es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en el intervalo $(0, +\infty)$.

Pm12. El estudiante E1 leyó y entendió el inciso e) de la tarea propuesta.

Pm13. Dibujó la gráfica de la derivada. Para ello, dibujó primero dibujó un plano de coordenadas cartesianas.

Pm14. Ubicó los puntos donde la derivada es igual a cero (x=-1 y x=2).

Pm15. Enunció que en el intervalo $(-\infty, -1)$ la función *f* es creciente, entonces la derivada *f’* es positiva y la dibujó. Además, explicó que en ese intervalo las pendientes de las rectas a la curva son positivas y enunció que la derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva, entonces la derivada es positiva.

Pm16: Enunció que donde la gráfica de *f* tiene un máximo en la abscisa *x=-1*, la derivada se hace cero, se cruza con el eje de las *x*.

Pm17. Enunció que en el intervalo $(-1, 2)$ la función *f* es decreciente, entonces las pendientes de las rectas tangentes son negativas, la derivada es negativa, debe estar por debajo del eje *x* y la dibujó.

Pm18. Enunció que la función tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa *x=0*, entonces la gráfica de la derivada tiene un mínimo.

Pm19. Enunció que la función tiene un mínimo, la pendiente es cero en el punto de abscisa *x=2*, entonces *f’* es igual a cero, *f’* tiene que cortar el eje *x* en *x=2*.

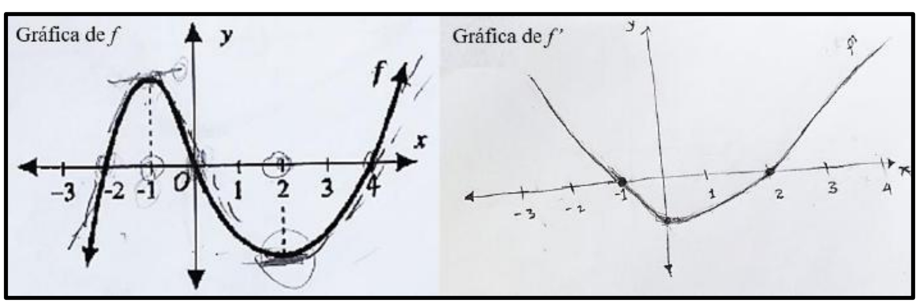
Pm20. Enunció que la función es creciente en el intervalo (2, +∞), entonces tiene sus pendientes positivas, la gráfica de *f'* es positiva, debe estar por encima del eje *x* y la dibujó.

A continuación, se presenta detalladamente la configuración cognitiva de objetos primarios activados por E1 al resolver la cuarta tarea propuesta.

4.3.4.2. Configuración cognitiva de objetos primarios de E1 sobre la tarea 4

En este apartado se presentan la configuración de objetos primarios evidenciados en las prácticas matemáticas secuenciadas útiles para resolver la tarea 4.

Tabla 19. Configuración cognitiva activada de objetos primarios de E1 para la resolución de la tarea 4.

Objetos primarios	Descripción
Situaciones problemas /Tarea (T)	Dada la gráfica de la función *f* (ver Figura 77), determina: T1: a) Los intervalos en los que *f* es creciente o decreciente. T2: b) En qué puntos la función tiene máximo relativo o mínimo relativo. T3: c) Las abscisas de los puntos de inflexión de la función. T4: d) En qué intervalo la gráfica de *f* es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo. T5: e) Realiza una posible gráfica de la función derivada *f'*.
Elementos lingüísticos	*Verbal*: Punto, pendiente, función, gráfica de la función, función derivada, derivada en un punto, segunda derivada, tangente, recta tangente, …
	Simbólico: *f*, *f'*, intervalos: $(-\infty, -\mathbf{1})$; $(\mathbf{2}, +\infty)$; (-1, 2); $(-\infty, \mathbf{0})$; (0, +∞); Puntos: (0, 0); *x=-1*; *x=2*; *x=0*.
	Gráfico: ver la Figura 77.  Figura 77. Representación gráfica de *f* y *f '*.
Conceptos/ Definiciones (D)	***Conceptos previos*:** punto máximo o mínimo, punto de inflexión, punto crítico, recta, gráfica, ecuación, recta tangente, derivada, segunda derivada, derivada en un punto, punto de corte, …

<table>
<tr><td></td><td>

D1: La derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto.

D2: Un número crítico de una función *f* es un número *c* en el dominio de *f* tal que *f'(c)=0* o *f'(c)=0* no existe.

D3: "Sea *f* continua en *c*. Llamamos a (*c*, *f* (*c*)) un punto de inflexión de la gráfica de *f*, si *f* es cóncava hacia arriba a un lado de *c* y cóncava hacia abajo del otro lado de *c*" (Purcell *et al*., 2007, p. 159).

</td></tr>
<tr><td>Proposiciones / Propiedades (Pr)</td><td>

Proposiciones: ver Figura 78.

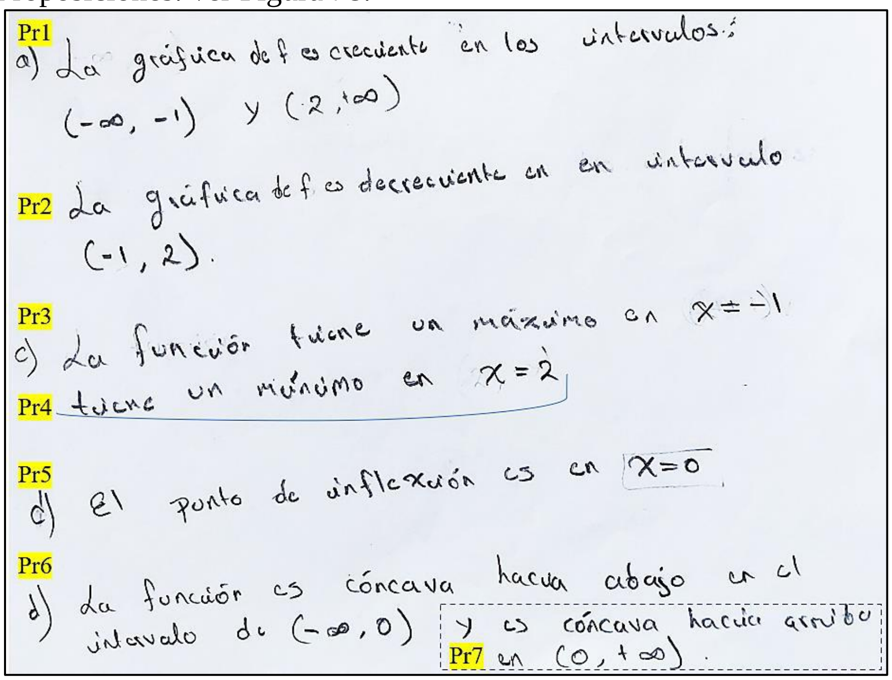


Figura 78. Evidencia escrita sobre las proposiciones.

</td></tr>
<tr><td>Procedimientos (Pc)</td><td>

Procedimiento principal 1 (Pcp1): Encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Procedimiento auxiliar 1.1 (Pca1.1): Ubicó los puntos críticos (*x=-1* y *x=2*) en la gráfica dada y mencionó que ahí la derivada se hace cero.

Pca1.2: Con base en la gráfica dada señaló que la gráfica es creciente en $(-\infty, \mathbf{-1})$ y $(\mathbf{2}, +\infty)$, y decreciente en (-1, 2).

</td></tr>
<tr><td></td><td>

Pcp2: Determinar los extremos en la gráfica de la función dada.

Pca2.1: Señaló el punto con abscisa en *x=-1* en la gráfica de *f*, mencionando que ese es el máximo.

</td></tr>
</table>

	Pca2.2: Señaló el punto con abscisa *x=2* en la gráfica de *f*, mencionado que ese el mínimo de la función.
	Pcp3: Determinar el punto de inflexión de la función dada. **Pca3.1**: Señaló el punto con abscisa en *x=0* en la gráfica de *f*, mencionando que ese es el punto de inflexión.
	Pcp4: Determinar los intervalos de concavidad de la función dada. **Pca4.1**: Menciona que en el punto *x=0* la función cambia de concavidad y afirmó que en $(-\infty, \mathbf{0})$ la función es cóncava hacia abajo y en $(\mathbf{0}, +\infty)$, es cóncava hacia arriba.
	Pcp5: Hacer un bosquejo de *f'*. **Pca5.1:** Hacer un sistema de coordenadas cartesianas. **Pca5.2**: Ubicar los puntos de abscisa *x=-1* y *x=2* que son los puntos de corte de la derivada con el eje *x*. **Pca5.3**: Bosqueja la gráfica de *f'* por partes, considerando los intervalos de crecimiento y los extremos de la función y el punto de inflexión.
Argumentos (A)	**A1**: Tesis: Los intervalos de crecimientos son $(-\infty, -\mathbf{1})$ y $(\mathbf{2}, +\infty)$, el intervalo de decrecimiento es $(-1, 2)$. **Razón 1 (R1)**: Si una función es continua, los puntos críticos separan intervalos de crecimiento y/o decrecimiento. **R2**: En esta función los puntos críticos son $x = -1$ y $x = 2$ dado que para estos valores la derivada vale 0. **R3**: Existen tres intervalos y el signo de la derivada en cada uno siempre es el mismo. Si el signo de la pendiente es negativo f es decreciente, y si el signo de la pendiente es positivo *f* es creciente. **Conclusión:** La función es creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(2, +\infty)$ y decreciente en el intervalo $(-1, 2)$.
	A2: Tesis: El punto máximo está en *x=-1* y el punto mínimo está en $x = 2$. **R1:** En *x=-1* y en *x=2* la gráfica de la derivada corta al eje *x*, y la pendiente es igual a cero.

	R2: si la función es creciente y en un punto pasa ser decreciente, entonces hay un máximo, y, si la función es decreciente y en un punto pasa a ser creciente, entonces ese punto es un mínimo. **Conclusión 2**: La función tiene un máximo en *x=-1* y un mínimo en *x=2*.
	A3: Tesis: El punto de inflexión está en *x=0.* **R1:** En ese punto la función cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo. **R2:** E1 hace gestos con sus manos refiriéndose a la concavidad (ver Figura 75). **Conclusión 3**: En el punto de abscisa *x=0* si está el punto de inflexión.
	A4: Tesis: La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$. **R1:** la función es continua y tiene un punto de inflexión en *x=0*, donde deja de ser cóncava hacia abajo y pasa a ser cóncava hacia arriba (hace un gesto con su mano). **Conclusión**: La función si es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y si es cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$.

Con base en las prácticas matemáticas y la configuración de objetos primarios de la Tabla 19, se presentan algunos ejemplos de funciones semióticas en la Figura 79.

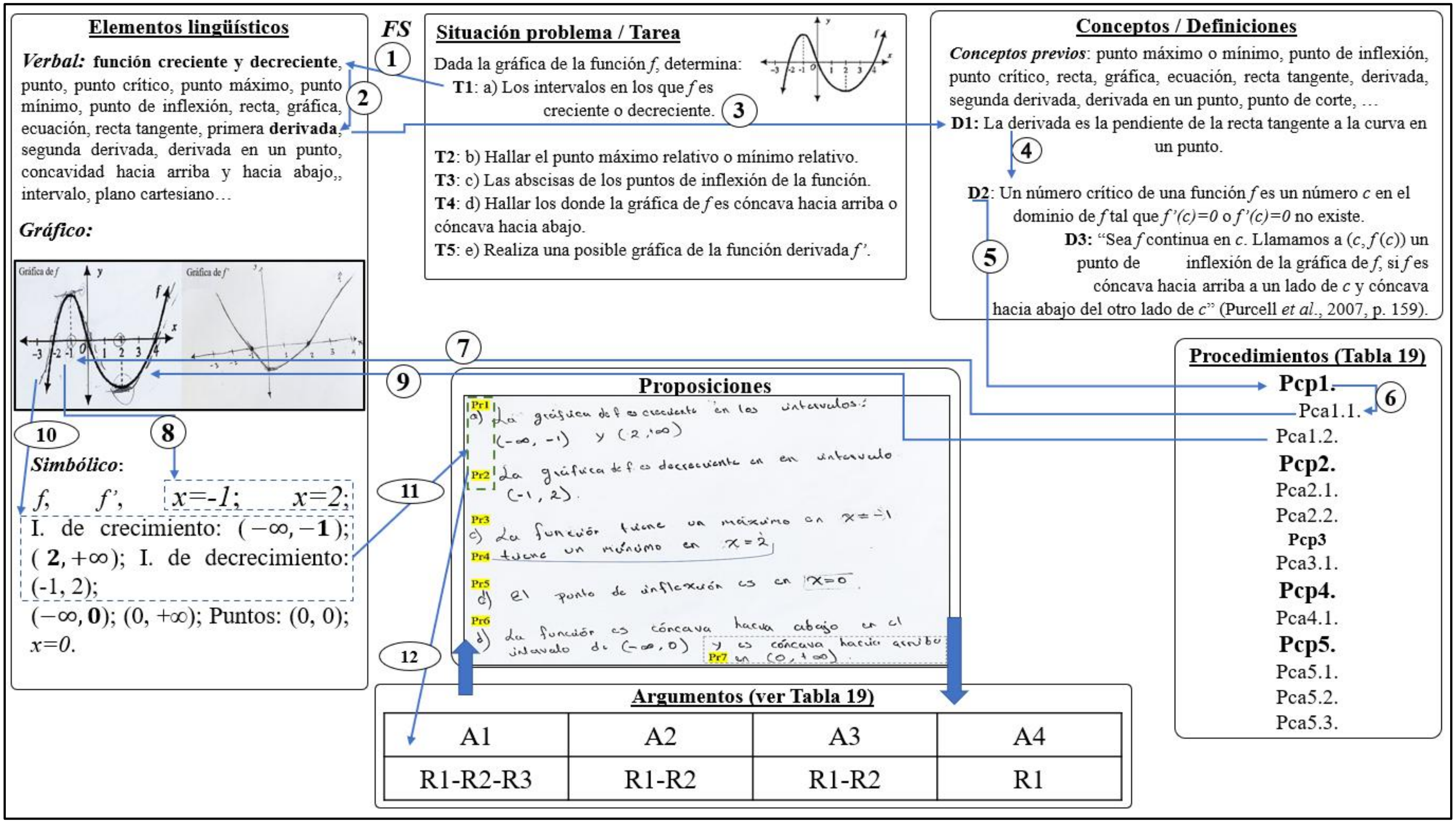


Figura 79. Funciones semióticas establecidas con los objetos primarios por parte de E1 en la resolución de la tarea 4.

Es oportuno mencionar que, en la Figura 79 las flechas gruesas de color azul se refieren a que las proposiciones se relacionan con los argumentos y estos validan y soportan cada afirmación contenida en las casillas de proposiciones y procedimientos.

4.3.4.3. Análisis detallado de las conexiones matemáticas en la tarea 3 basado en la integración entre la TAC y el EOS

En la Tabla 20 se presentan algunas conexiones matemáticas establecidas por E1 al resolver la tarea 4 (presentadas en la Figura 79), teniendo en cuenta el conglomerado de prácticas, procesos, objetos (Tabla 19) y funciones semióticas que constituyen a la conexión.

Tabla 20. Análisis detallado de la actividad matemática de E1 al resolver la tarea 4.

Prácticas	Procesos	Objetos	Funciones semióticas	Conexión matemática
Pm1	Significación / comprensión. -Problematización.	Tarea (T1)	FS1	
Pm2	-Resolución de problemas -Enunciación	**D1:** La *derivada* es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto. **D2**: Un *número crítico* de una función *f* es un número *c* en el dominio de *f* tal que *f'(c)=0.*	FS2, FS3 y FS4	Significado
Pm3	Resolución de problemas Representación (verbal, gráfica y simbólica)	Pca1.1: El estudiante ubicó los puntos críticos (*x=-1* y *x=2*) en la gráfica dada y mencionó que ahí la derivada se hace cero.	FS5, FS6, FS7 y FS8	Procedimental Representaciones diferentes
Pm4	Resolución de problemas Representación (verbal, gráfica y simbólica)	Pca1.2: Determinó los intervalos de crecimiento $(-\infty,-1)$ y $(2,+\infty)$, y decrecimiento en el intervalo (-1, 2) de la función *f*, a partir de la gráfica dada y considerando el signo de	FS9 y FS10	Procedimental Representaciones diferentes

	Argumentación	la pendiente de la recta tangente. A1 (Figura 78) Si la función es creciente, las pendientes de esta recta tangente son positivas, es decir, la derivada es positiva.	FS11 y FS12	Implicación
…	…	…	…	…

En relación con los otros estudiantes, se evidenció que E2, E3 y E7 realizaron conexiones matemáticas de manera similar que E1, lo cual les permitió resolver la tarea 4 adecuadamente (ver Figura 80).

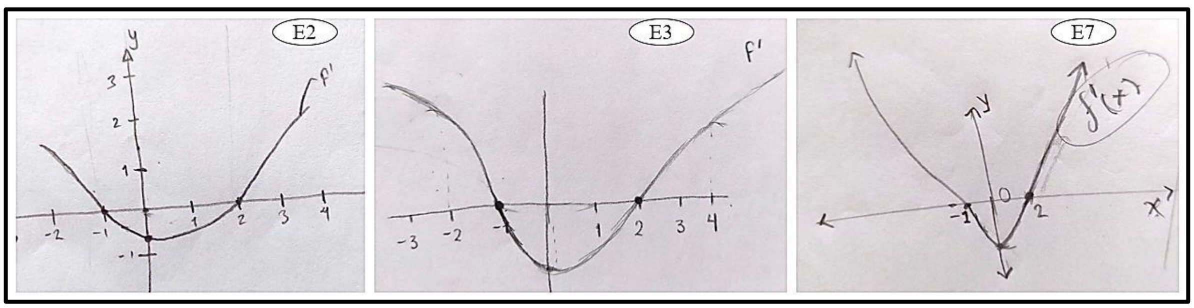


Figura 80. Representación gráfica de *f'* construida a partir de la información de *f*.

4.3.5. Conexiones matemáticas establecidas en la resolución de la tarea 5

4.3.5.1. Prácticas matemáticas (Pm1, …, Pm13)

Pm1. El estudiante E1 leyó y comprendió en inciso a) de la tarea 5.

Pm2. Entiende la derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto y al punto crítico como el punto donde la derivada se hace cero y la función tiene un máximo o un mínimo.

Pm3. Determinó los puntos críticos de la función *f* con abscisa en $x=-2$, $x=1$ y $x=5$. Para ello consideró la gráfica de *f'* se le dio en la tarea. Además, mencionó que eso son los puntos críticos porque ahí la gráfica de *f'* corta al eje de las *x*, es donde la derivada se hace cero y puede haber un máximo o un mínimo.

Pm4. El estudiante E1 leyó y comprendió en inciso b) de la tarea 5.

Pm5. Encontró que los intervalos de decrecimiento de la función son: $(-\infty, -2)$ y (1, 5), los intervalos de crecimiento son: (-2, 1) y $(5, +\infty)$. Para ello usó el criterio de la primera derivada dado que mencionó que, en $(-\infty, -2)$ la derivada es negativa, está en el tercer cuadrante, entonces en este intervalo, la función en decreciente. La función es creciente en el intervalo (-2, 1). Para ello, argumentó que en este intervalo la derivada es positiva, entonces la función original es creciente en (-2, 1). En el intervalo (1, 5) la función es decreciente porque si la derivada es negativa es negativa en este intervalo, entonces la función es decreciente. Luego, determinó que la función es creciente en el intervalo $(5, +\infty)$. En este caso argumentó que la derivada en positiva en $(5, +\infty)$, entonces la función es creciente.

Pm6. El estudiante E1 leyó y comprendió en inciso c) de la tarea 5.

Pm7. Determinó que *x=-2* es un punto crítico, la derivada es cero, entonces hay un mínimo. Mencionó que la función viene decreciendo y en el punto de abscisa *x=-2* pasa a crecer.

Pm8. Encontró que la función tiene un máximo en el punto de abscisa *x=1*. Para ello, afirmó que en *x=1* la derivada corta al eje *x* y es igual a cero y, viene de ser creciente y en ese punto pasa a ser decreciente, entonces ahí la función tiene un máximo.

Pm9. Encontró que la función tiene otro mínimo en *x=5*. Para ello argumentó que en *x=5* hay un punto crítico donde la derivada es cero y la función viene ser creciente y cambia a decreciente en *x=5*, entonces es un mínimo de la función.

Pm10. El estudiante E1 leyó y comprendió en inciso d) de la tarea 5.

Pm11. Determinó los puntos de inflexión en $x = -\frac{1}{2}$ y *x=3*, argumentando que estos se ubican donde la derivada alcanza un máximo o un mínimo, es decir, que los puntos donde la derivada tiene un máximo o mínimo, la función original tiene un punto de inflexión.

Pm12. Encontró que la función *f* es cóncava hacia arriba en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y de $(3, +\infty)$. En el intervalo de $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ es cóncava hacia abajo. Para ello, tuvo en cuenta que la función cambia de concavidad en sus puntos de inflexión.

Pm13. E1 bosquejó la gráfica de *f* de manera simultánea cuando iba respondiendo los incisos a, b, c y d.

4.3.5.2. Configuración cognitiva de objetos primarios activados en resolución de la tarea 5

A continuación, se presenta la configuración de objetos primarios movilizados por E1 en la resolución de la tarea 5 (ver Tabla 21).

Tabla 21. Configuración cognitiva activada de objetos primarios de E1 para la resolución de la tarea 5.

Objetos primarios	Descripción
Situaciones problemas /Tarea (T)	Dada la gráfica de la derivada de f (ver Figura 81), bosqueja la(s) posible(s) gráfica(s) de la función f. Argumenta tu respuesta y, además, determina: **T1**: a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. **T2**: b) Los valores máximos o mínimos de f. **T3**: c) Los puntos de inflexión. **T4**: d) Los intervalos donde f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo. T5: e) Esboza la gráfica de *f* considerando la información de la gráfica de *f'*.
Elementos lingüísticos	*Verbal*: función creciente y decreciente, punto, punto crítico, punto máximo, punto mínimo, punto de inflexión, recta, gráfica, ecuación, recta tangente, primera derivada, segunda derivada, derivada en un punto, concavidad hacia arriba y hacia abajo, intervalo, plano cartesiano…
	Simbólico: *f*, *f'*, *f'(x)*, *x=-2*; *x=1*; *x=5*; I. de decrecimiento: $(-\infty, -2)$ y (1, 5); I. de crecimiento: (-2, 1) y (5, +∞). P. mínimo en *x=-2* y *x=5*; P. máximo en *x=5*. P. de inflexión en $x = -\frac{1}{2}$ y *x=3*. Cóncava hacia arriba en I. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y (3, +∞); Cóncava hacia abajo en I. $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$.
	Gráfico: ver la Figura 81.

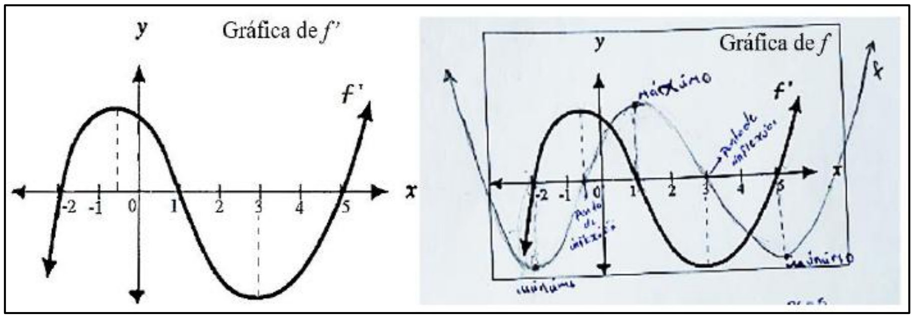


Figura 81. Representación gráfica de *f’* y *f*.

Conceptos/ Definiciones (D)	***Conceptos previos*:** punto máximo o mínimo, punto de inflexión, punto crítico, recta, gráfica, ecuación, recta tangente, derivada, segunda derivada, derivada en un punto, punto de corte, … **D1**: La derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto. **D2**: Un número crítico de una función *f* es un número *c* en el dominio de *f* tal que *f’(c)=0* o *f’(c)=0* no existe. **D3:** “Sea *f* continua en *c*. Llamamos a (*c*, *f* (*c*)) un punto de inflexión de la gráfica de *f*, si *f* es cóncava hacia arriba a un lado de *c* y cóncava hacia abajo del otro lado de *c*” (Purcell *et al*., 2007, p. 159).

Proposiciones / Propiedades (Pr)

Proposiciones: ver Figura 82.

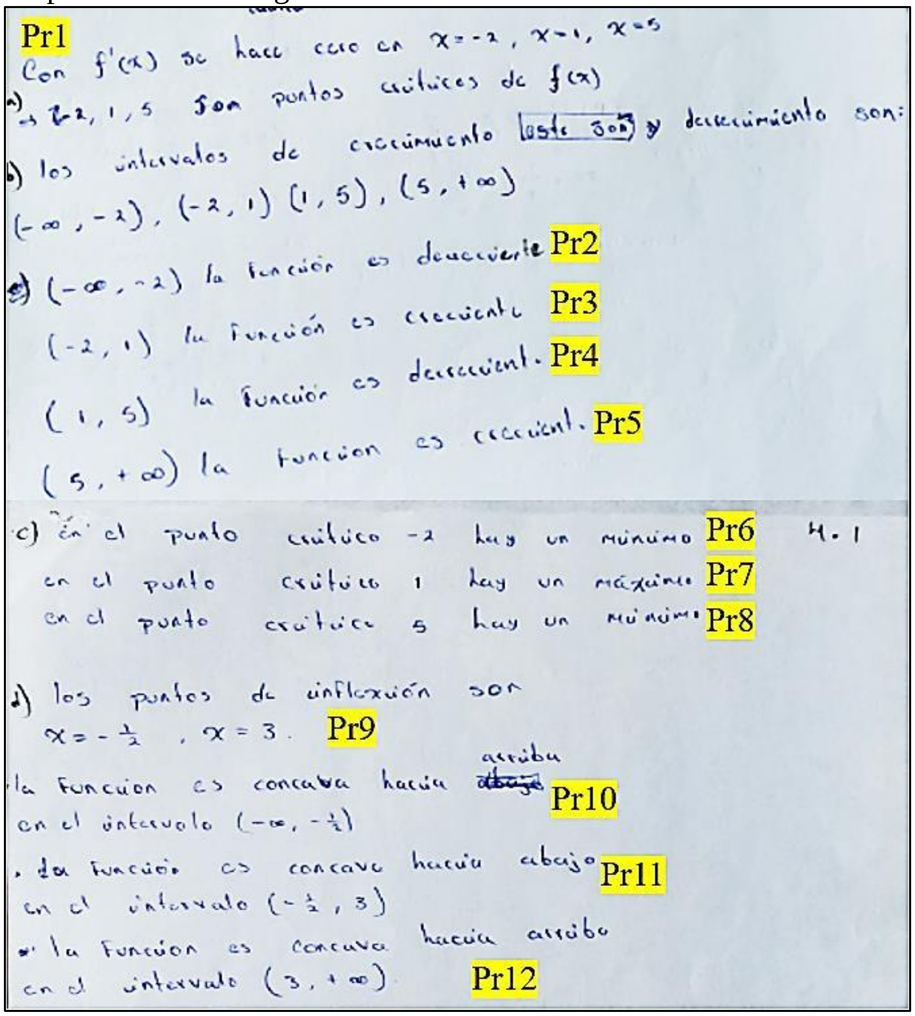

Pr1
Con f'(x) se hace cero en x=-2, x=1, x=5
a) -2, 1, 5 son puntos críticos de f(x)
b) los intervalos de crecimiento ~~este son~~ y decrecimiento son:
(-∞, -2), (-2, 1) (1, 5), (5, +∞)
c) (-∞, -2) la función es decreciente Pr2
(-2, 1) la función es creciente Pr3
(1, 5) la función es decreciente. Pr4
(5, +∞) la función es creciente. Pr5
c) En el punto crítico -2 hay un mínimo Pr6 4.1
en el punto crítico 1 hay un máximo Pr7
en el punto crítico 5 hay un mínimo Pr8
d) los puntos de inflexión son
x = -1/2, x = 3. Pr9
la función es cóncava hacia ~~abajo~~ arriba Pr10
en el intervalo (-∞, -1/2)
. la función es cóncavo hacia abajo Pr11
en el intervalo (-1/2, 3)
. la función es cóncava hacia arriba
en el intervalo (3, +∞) Pr12

Figura 82. Evidencia escrita sobre las proposiciones.

Procedimientos (Pc)

Procedimiento principal 1 (Pcp1): Encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Procedimiento auxiliar 1.1 (Pca1.1): Ubicó los puntos críticos ($x=-2$, $x=1$ y $x=5$) en la gráfica dada y mencionó que ahí la derivada se hace cero.

Pca1.2: Con base en la gráfica dada señaló que la función es decreciente en $(-\infty, -2)$ y $(1, 5)$, y, creciente en $(-2, 1)$ y $(5, +\infty)$.

Pcp2: Determinar los extremos en la gráfica de la función dada.

Pca2.1: Determinó que $x=-2$ es un punto crítico porque la derivada es cero y existe un mínimo.

	Pca2.2: Determinó que *x=1* es un punto crítico porque la derivada es cero y existe un máximo. **Pca2.3**: Determinó que *x=5* es un punto crítico porque la derivada es cero y existe un mínimo de la función.
	Pcp3: Determinar el punto de inflexión de la función dada. **Pca3.1**: Encontró que la función tiene dos puntos de inflexión en $x = -\frac{1}{2}$ y *x=3*.
	Pcp4: Determinar los intervalos de concavidad de la función dada. **Pca4.1**: Menciona que en los puntos de inflexión con las abscisas en $x = -\frac{1}{2}$ y *x=3*, la función cambia de concavidad y afirmó que es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty - \frac{1}{2}\right)$ y (3, +∞), y, cóncava hacia abajo en $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$.
	Pcp5: Hacer un bosquejo de *f* a partir de la gráfica de *f'*. **Pca5.1**: Ubicar los puntos de abscisa x=-2, x=1 y x=5 que son los puntos de corte de la derivada con el eje x, lo cual deja ver que la función tiene máximo o mínimo. **Pca5.2**: Bosqueja la gráfica de *f'* por partes, considerando los intervalos de crecimiento y los extremos de la función y el punto de inflexión.
Argumentos (A)	**A1**: Tesis: Los intervalos de decrecimiento son (−∞, −2) y (1, 5), y, de crecimiento son (-2, 1) y (5, +∞). **Razón 1 (R1)**: Si una función es continua, los puntos críticos separan intervalos de crecimiento y/o decrecimiento. **R2**: En esta función los puntos críticos son *x=-2*, *x=1* y *x=5* dado que para estos valores la derivada vale 0. **R3**: Existen cuatro intervalos y el signo de la derivada en cada uno siempre es el mismo. Si el signo de la pendiente es negativo *f* es decreciente, y si el signo de la pendiente es positivo *f* es creciente. **Conclusión:** La función es decreciente en los intervalos (−∞, −2) y (1, 5), y, creciente en (-2, 1) y (5, +∞).
	A2: Tesis: Los puntos mínimos de *f* están en *x=-2* y *x=5*, y, el punto máximo está en *x=1*.

R1: En *x=-2* y en *x=5* la gráfica de la derivada corta al eje *x,* y la pendiente es igual a cero.

R2: Si la función es decreciente y en un punto pasa ser creciente, entonces hay un mínimo, y, si la función es creciente y en un punto pasa a ser decreciente, entonces ese punto es un máximo.

Conclusión 2: La función tiene dos puntos mínimos, en *x=-2* y en *x=5* y un máximo en *x=1*.

A3: Tesis: La función tiene dos puntos de inflexión, uno en $x = -\frac{1}{2}$ y el otro en *x=3*.

R1: En ese punto la función cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo.

Conclusión 3: En los puntos de abscisas $x = -\frac{1}{2}$ y *x=3*, la función tiene puntos de inflexión.

A4: Tesis: La función es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty - \frac{1}{2}\right)$ y (3, +∞), y, cóncava hacia abajo en $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$.

R1: La función es continua y tiene un punto de inflexión en $x = -\frac{1}{2}$ y *x=3*, donde deja de ser cóncava hacia abajo y pasa a ser cóncava hacia arriba (hace un gesto con su mano).

Conclusión: La función sí es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty - \frac{1}{2}\right)$ y (3, +∞), y, sí es cóncava hacia abajo en $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$.

Después de elaborar la configuración de E1 cuando resolvió la tarea 5, se procede a presentar algunas funciones semióticas entre los objetos primarios (ver Figura 83).

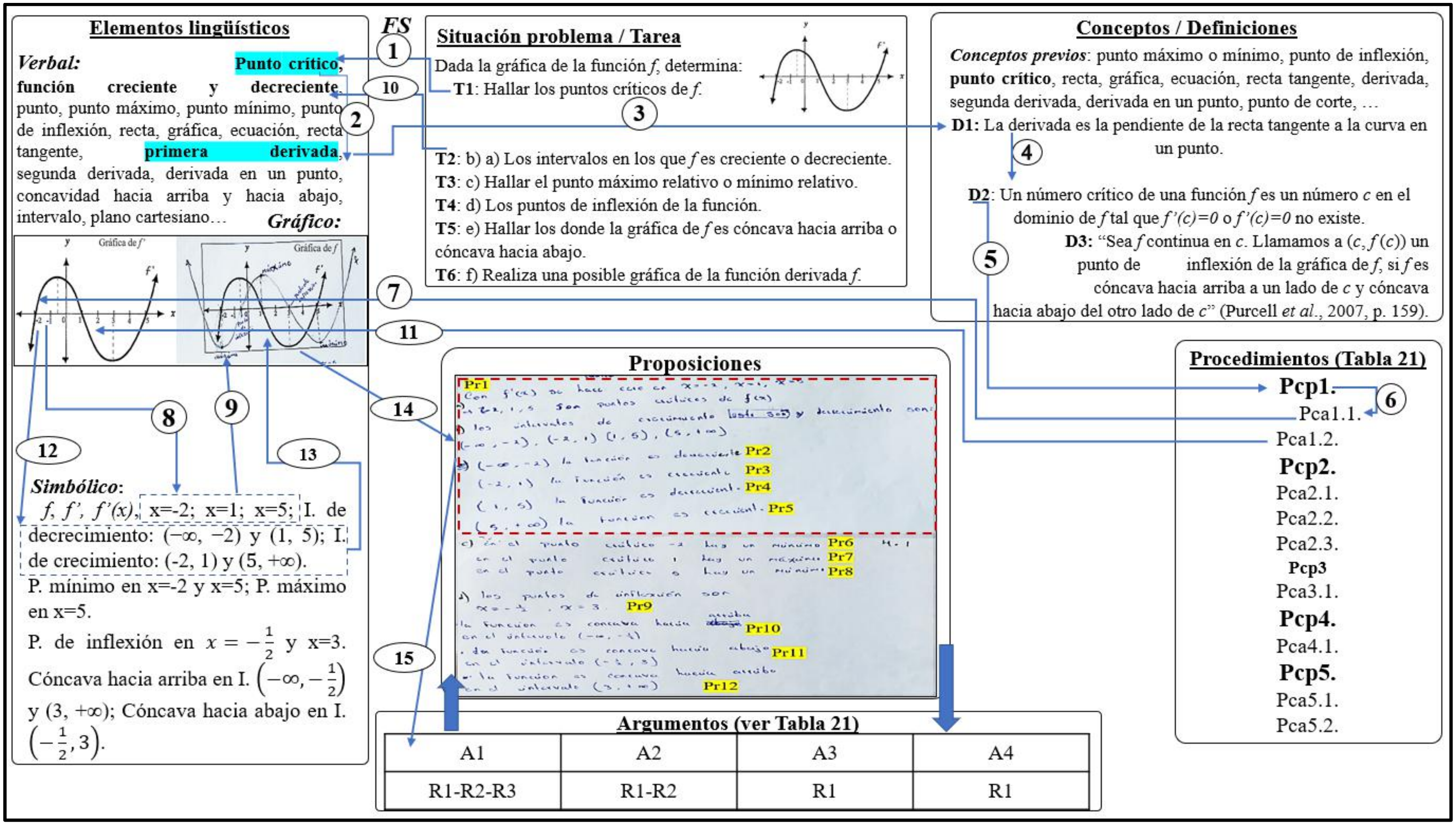


Figura 83. Funciones semióticas establecidas con los objetos primarios por parte de E1 en la resolución de la tarea 5.

En la Figura 83 se evidencian las funciones semióticas entre los objetos primarios activados por E1 para responder adecuadamente a la primera pregunta de la tarea 5. Ahora bien, en la Tabla 22 se muestran algunas conexiones matemáticas establecidas por E1 para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, detalladas en términos de prácticas, procesos, objetos y funciones semióticas.

Tabla 22. Análisis detallado de la actividad matemática de E1 al resolver la tarea 5.

Prácticas	Procesos	Objetos	Funciones semióticas	Conexión matemática
Pm1	Significación / comprensión. Problematización	Tarea (T1)	FS1	
Pm2	Resolución de problemas -Enunciación	**D1:** La *derivada* es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto. **D2**: Un *número crítico* de una función *f* es un número *c* en el dominio de *f* tal que $f'(c)=0$.	FS2, FS3 y FS4	Significado
Pm3	Resolución de problemas Representación (verbal, gráfica y simbólica)	Pca1.1: El estudiante identificó los puntos críticos (en $x=-2$, $x=1$ y $x=5$) en la gráfica dada, afirmando que ahí la derivada se hace cero.	FS5, FS6, FS7, FS8 y FS9	Procedimental Representaciones diferentes
Pm4	Significación / comprensión. Problematización	T2	FS10	
Pm5	Resolución de problemas	Pca1.2: Encontró que los intervalos de decrecimiento de la		

		función son: $(-\infty, -2)$ y (1, 5), los intervalos de crecimiento son: (-2, 1) y $(5, +\infty)$. Para ello usó el criterio de la primera derivada.	FS11 y	Procedimental
	Representación (verbal, gráfica y simbólica)	E1 hizo representaciones gráficas y simbólicas (intervalos) simultáneamente.	FS12 y FS13	Representaciones diferentes
	Argumentación	**A1** (Figura 83) Si la derivada es positiva en un intervalo I, entonces la función es creciente en I. Si la derivada es negativa en I, entonces la función es decreciente en I.	FS14 y FS15	Implicación
…	…	…	…	…

Los estudiantes E2, E3 y E7 también lograron establecer conexiones matemáticas para resolver la tarea 5. A continuación, se muestran evidencias de las gráficas de *f* que los estudiantes realizaron basándose en la información de la gráfica de la derivada (ver Figura 84).

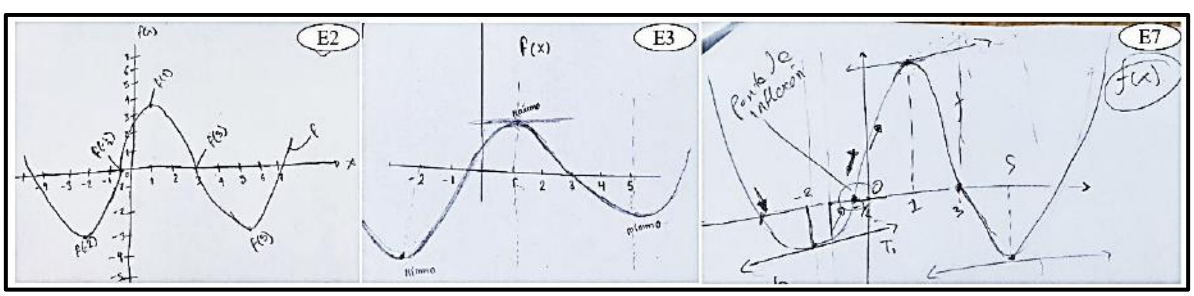


Figura 84. Gráfica de *f* a partir de la información de *f* '.

Cabe destacar que, en la resolución de las tareas 4 y 5 se evidenciaron conexiones matemáticas de tipo significado, parte-todo, representaciones diferentes, procedimental e implicación. Particularmente, las conexiones matemáticas de tipo implicación establecidas por E1, E2, E3 y E7 cuando resolvieron las tareas (ver Tablas 20 y 22), son el fundamento de la conexión matemática de tipo reversibilidad, debido a que son relaciones lógicas bidireccionales realizadas para graficar a *f'* con base en la información de *f*, o bien, graficar a *f* con base en la información de *f'*, como se muestra en la Figura 85.

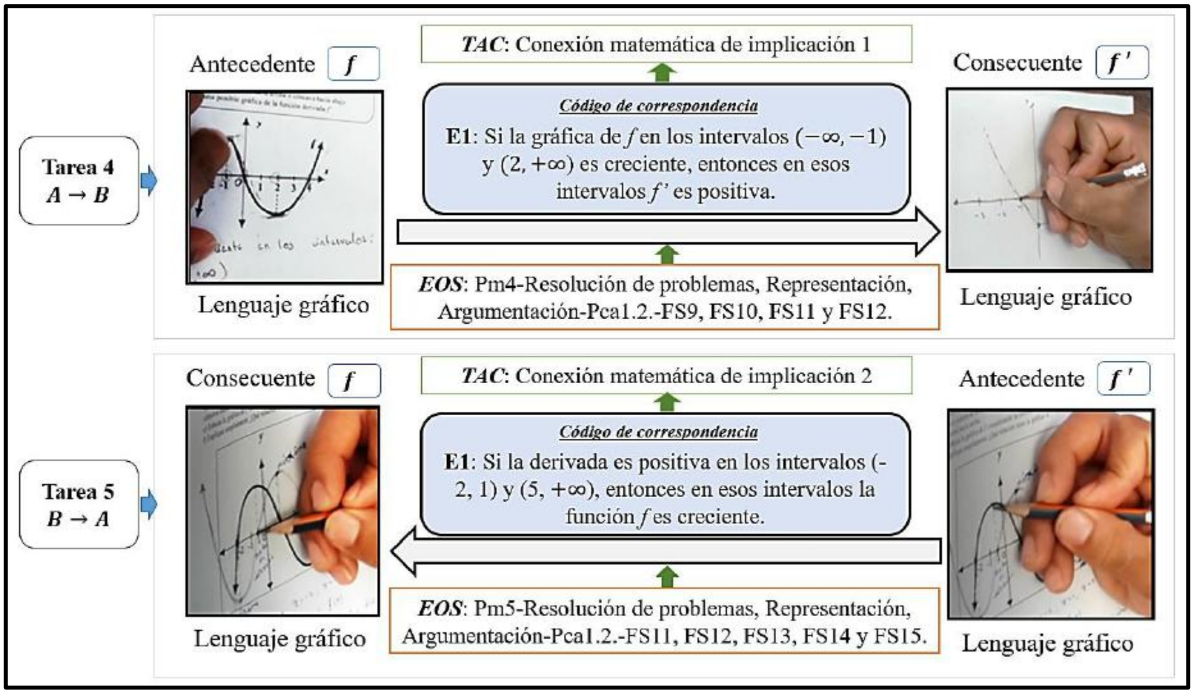


Figura 85. Estructura de la conexión matemática de reversibilidad desde la TAC y el EOS.

Por otra parte, el análisis de las conexiones matemáticas realizado en las tareas 1, 2, 3, 4 y 5 fue minucioso, mostrando detalladamente cómo se constituye cada conexión establecida por los estudiantes para resolver las tareas. En adelante, en las tareas 6 y 7 se presentarán ejemplos de las prácticas matemáticas, una parte de la configuración cognitiva de los estudiantes, algunas funciones semióticas y un esquema de las conexiones matemáticas.

4.3.6. Conexiones matemáticas establecidas en la resolución de la tarea 6

Los estudiantes E1, E2, E3 y E7, resolvieron adecuadamente la tarea 6, dado que, establecieron conexiones de tipo procedimental como el paso a paso seguido para bosquejar la gráfica de la función originas. Se evidenció la conexión de tipo implicación por las relaciones lógicas que establecieron los estudiantes para cada intervalo de crecimiento, decrecimientos, puntos de inflexión e intervalos de concavidad. También, se reconoció la conexión de tipo parte-todo porque los estudiantes dibujan la gráfica por partes, es decir, dependiendo de la información obtenida de la gráfica de *f'*, proceden a dibujar la gráfica de *f* por intervalos. La conexión matemática de tipo significado (pendiente de la recta tangente a la curva en un punto) estuvo presente en todo el proceso de resolución de problemas y significación cuando la persona asumía como un reto cada inciso de la tarea (ver Figura 86).

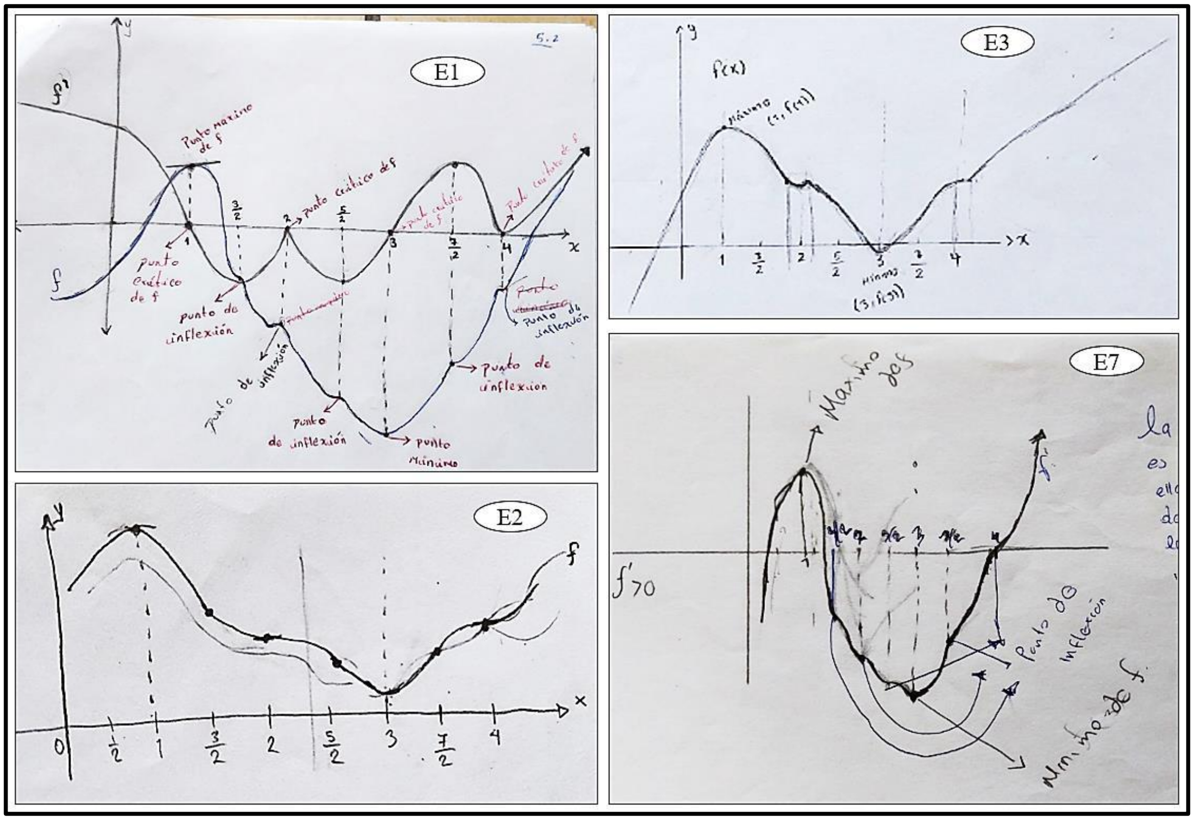


Figura 86. Representación gráfica de *f* con base en *f '*.

Por ejemplo, para la resolución de estas tareas los estudiantes establecieron conexiones de implicación como se presenta en los esquemas de la Figura 87, teniendo en cuenta que la función *f* sea continua en el intervalo *I* y derivable en todo punto de *I* y también cuando no es derivable en algún punto de I.

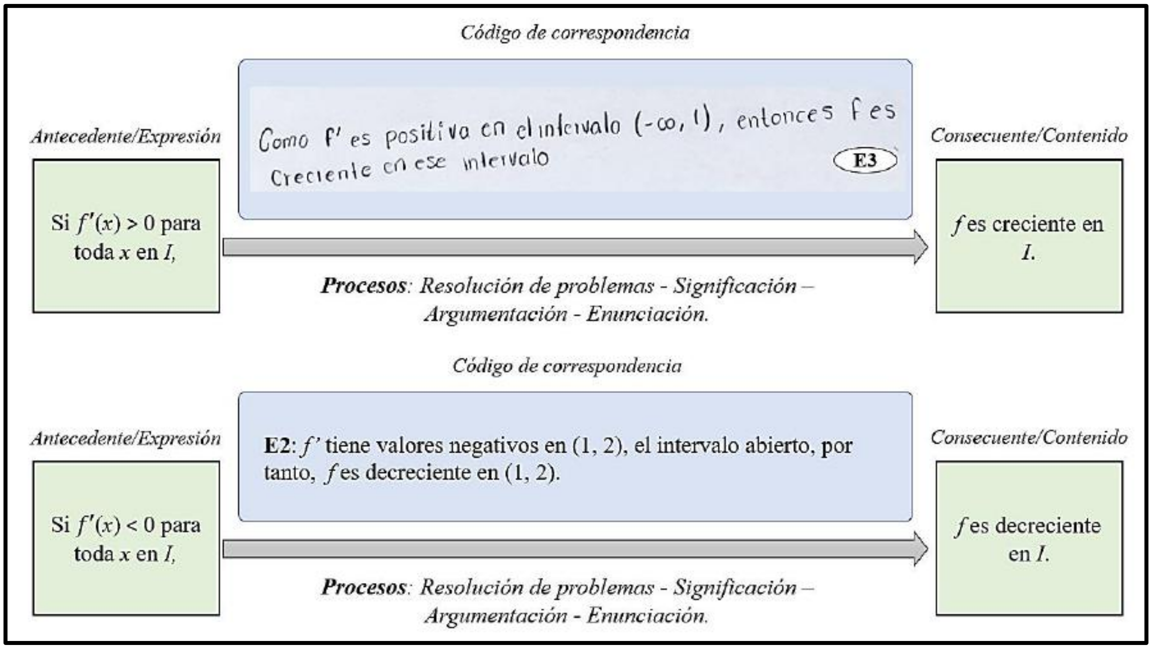


Figura 87. Esquemas de la conexión matemática de tipo implicación.

4.3.7. Conexiones matemáticas establecidas en la resolución de la tarea 7

Para resolver la tarea 7 que se trata de un problema de aplicación, los estudiantes E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7 y E8 establecieron la conexión matemática de modelado, dado que, con base en los datos del problema establecieron una expresión matemática que modela del volumen de la caja con forma de paralelepípedo V=(largo)(ancho)(alto) que es igual a: $f(x) = (10 - 2x)(17 - 2x)(x)$. Para ello, realizaron prácticas matemáticas, (e.g., Pm1: leyeron y comprendieron el problema propuesto, Pm2: identificaron las características de la realidad percibida de problema de la caja, y seleccionaron los datos más importantes para construir el modelo). Posteriormente, E2, E3, E6 y E8 hicieron una representación equivalente de la caja, conservando las medidas de los lados de la figura dada en el problema. Seguidamente, los estudiantes establecieron una conexión de tipo procedimental debido a que aplicaron la propiedad distributiva al polinomio factorizado, establecieron conexiones de tipo representaciones equivalentes o de tratamientos y obtuvieron como resultado la función volumen $f(x) = 4x^3 - 54x^2 + 170x$ o bien, $V(x) = 4x^3 - 54x^2 + 170x$. Luego, los estudiantes hicieron una conexión matemática de tipo procedimental, dado que, aplicaron el criterio de la primera derivada para optimizar la función y encontrar el valor de *x* para que la caja tuviese el mayor volumen. En este paso, E3 consideró que "*si en la gráfica se encuentra* *un máximo o un mínimo, entonces la pendiente es cero*". Por tanto, derivaron la función y la igualaron a cero, obteniendo la expresión siguiente: $12x^2 - 108x + 170 = 0$.

En este contexto, los estudiantes establecieron la conexión matemática de tipo procedimental porque utilizaron la fórmula general $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ para encontrar el valor de x. Para ello, realizaron operaciones aritméticas y algebraicas hasta conseguir los valores: $x_1 \cong 6.96$ pulgadas y $x_2 \cong 2.04$ pulgadas (ver Figura 88).

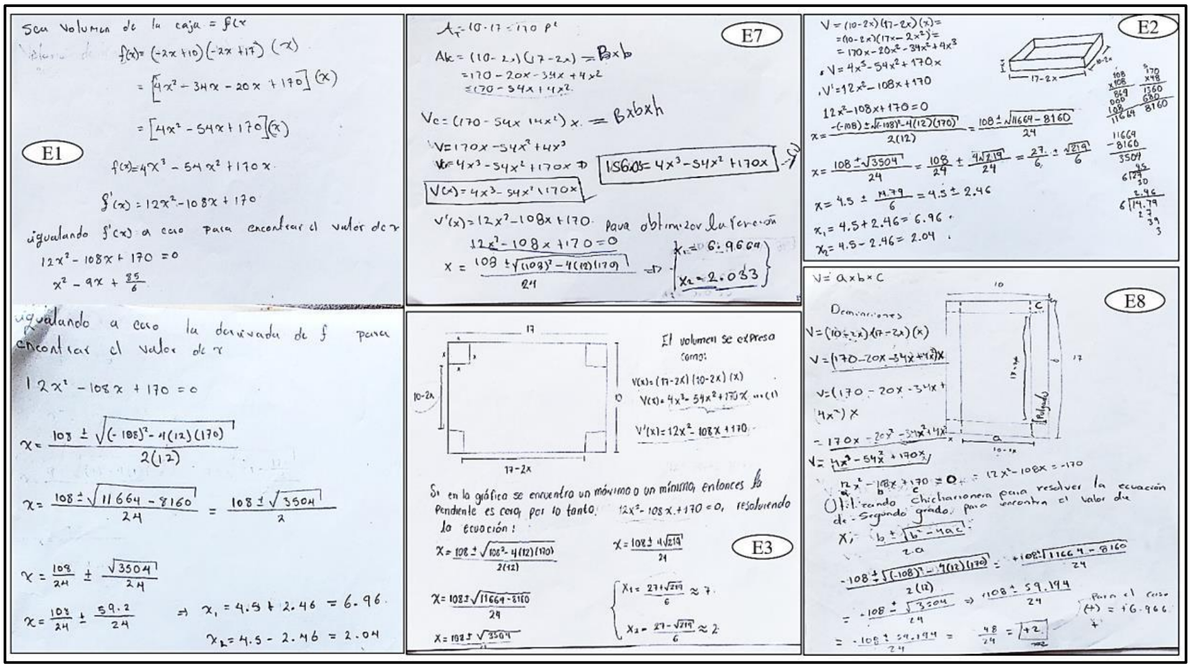


Figura 88. Evidencias de las conexiones de tipo modelado, representaciones diferentes y procedimental.

Posteriormente, por medio de una conexión de tipo procedimental los estudiantes evaluaron la función $f(x) = 4x^3 - 54x^2 + 170x$ en las abscisas $x_1 \cong 6.96$ pulgadas y $x_2 \cong 2.04$, para saber cuál de dos es la longitud del lado de la caja (ver Figura 89), de lo cual obtuvieron que la longitud del lado de los cuadrados debe ser de $x_2 = 2.04$ y el volumen máximo que puede tener la caja es 156.03 pulgadas cúbicas.

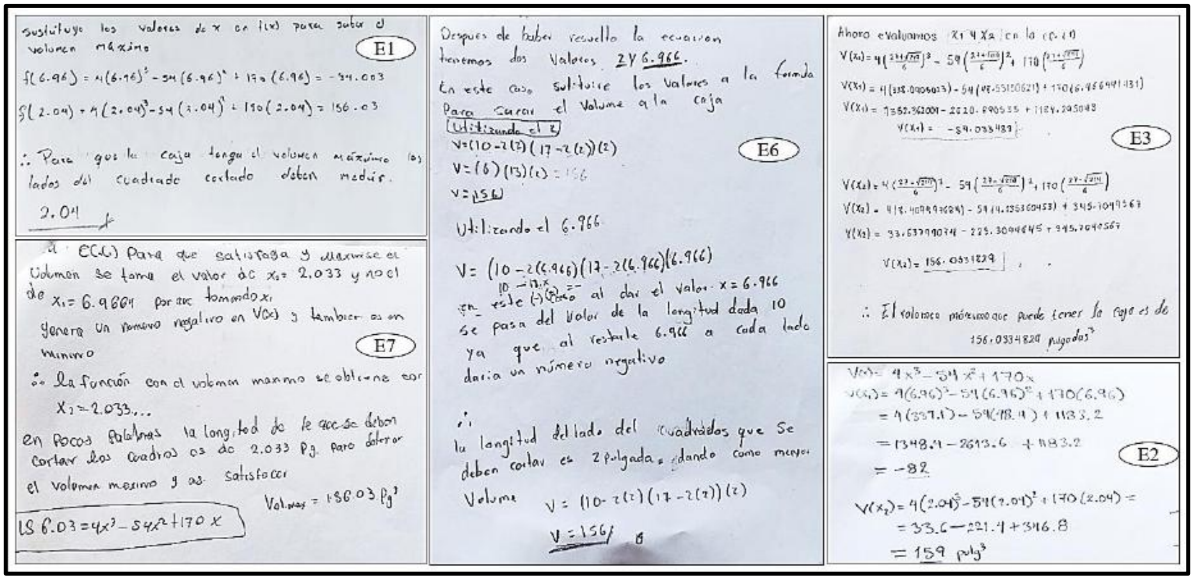


Figura 89. Conexiones matemáticas de tipo procedimental y respuesta a la tarea.

Por otra parte, para resolver a la cuarta pregunta de investigación, a continuación, se presenta un ejemplo de un estudiante que no logró resolver la tarea 2 dado que, tiene dificultades que son causadas por las conexiones matemáticas erradas.

4.4. Dificultades para establecer conexiones matemáticas clave para la resolución de tareas sobre la derivada

Para el estudiante E1, en las secciones anteriores se han aplicado los resultados del networking entre la TAC y el EOS para explicar las conexiones matematicas que establece para la resolución de las siete tareas sobre la derivada del cuestionario que se le aplicó junto con las entrevistas semiestructuradas, lo cual también informa del tipo de comprensión sobre la derivada que tiene este estudiante (dado que las respuestas de este estudiante fueron correctas considerando la actividad matemática y conexiones establecidas como institucionales). Para los otros estudiantes se realizó un proceso similar al descrito con E1 y, se realizó una comparación entre el análisis de la actividad matemática realizada por E1 y la realizada por los otros estudiantes. Dicha comparación permite ver las prácticas que faltan o la conexión incorrecta (conexión personal) que hacen los estudiantes; lo cual explica la causa de la dificultad que han tenido para resolver correctamente las tareas. Por ejemplo, a continuación, se muestra el caso del E9 en la tarea 2 (ver Figura 90):

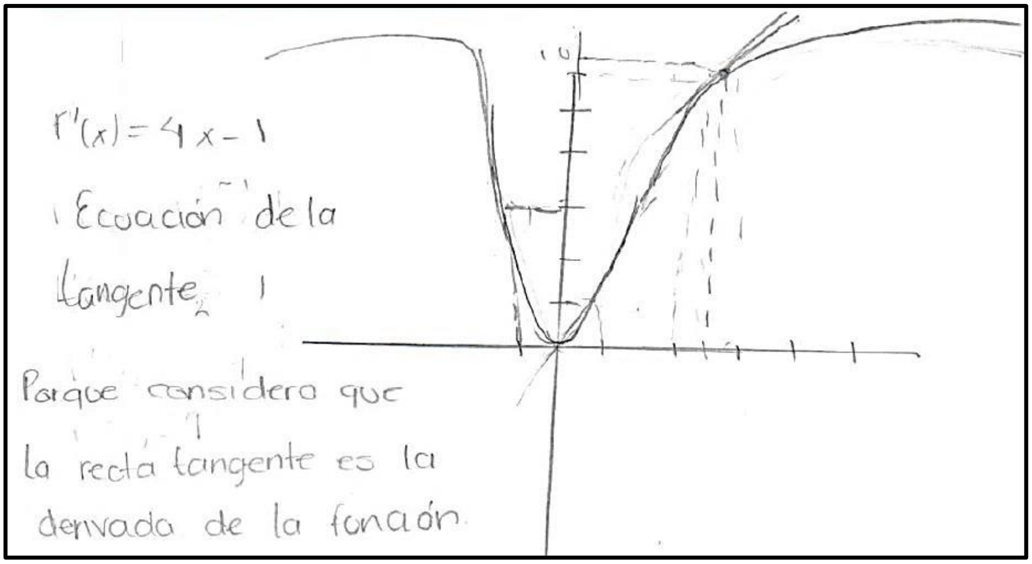


Figura 90. Ejemplo de conexiones incorrectas realizadas por E9.

En la producción escrita del estudiante E9 se observa que realizó las siguientes prácticas (Pm) y conexiones:

Pm1. El estudiante leyó la tarea propuesta.

Pm2. Calculó la derivada de $f(x) = 2x^2 - x$, obteniendo $f'(x) = 4x - 1$.

Pm3. Identifica la función derivada con la ecuación de la recta tangente (Hizo una conexión incorrecta entre la función derivada y la ecuación recta de la recta tangente).

Esta conexión incorrecta hace que el estudiante E9 no realice las otras prácticas matemáticas que son clave o necesarias para la resolución correcta de la tarea (ver prácticas matemáticas en la sección 4.3.2.2.). En este contexto, la literatura ha reportado diversas dificultades que tienen los estudiantes para hallar la ecuación de la recta tangente a una función en un punto. Por ejemplo, para ubicar puntos de la gráfica (Alarcón, 2009), no son capaces de hallar los valores de las intersecciones con el eje *x* y con el eje *y* cuando la recta se representa por $y = mx + b$; no establecen la conexión del gráfico con su ecuación y la razón de cambio (Birgin, 2012); para determinar la ordenada del punto e identificar el parámetro *a* como la abscisa del punto, y la *x* como la variable independiente que toma el valor *a* (González-García *et al*., 2018); tienen comprensión limitada sobre la recta tangente porque trabajan generalmente a través de dibujos de una recta horizontal o bien, una tangente horizontal (Vincent *et al*., 2015); presentan la desconexión entre los significados vinculados a los registros geométricos y analíticos de la recta tangente (Orts *et al*., 2018), y, los futuros profesores de matemáticas emplean equívocamente la fórmula punto pendiente (e.g., $y + y_1 = m(x - x_1)$) cuando desean hallar la ecuación de la recta tangente. Además, conciben a la derivada como la recta tangente y no enfatizan en la pendiente de dicha recta, lo que ha generado dificultades para graficar la función y la recta tangente (Rodríguez-Nieto *et al*., 2021).

Ante esta situación, una explicación plausible para esta variedad de dificultades es que la complejidad de la actividad matemática necesaria para establecer las conexiones que permiten encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva en un punto, puede ser superior a la actividad matemática que puede realizar el estudiante, lo cual lo conduce a dejar de realizar alguna (s) práctica (s), a dejar de establecer alguna FS, etc. y, por tanto, a dejar de establecer determinada conexión matemática. Cada una de estas conexiones no realizadas es la principal causa de las diferentes dificultades que señala la literatura. Dicho de manera resumida, tal como señala la literatura, los estudiantes presentan diversas dificultades para hallar la ecuación de la recta tangente, cada una de las cuales es una consecuencia de alguna conexión necesaria que no han realizado.

Capítulo 5

Discusión y Reflexiones finales

5.1. Discusión

La investigación sobre conexiones matemáticas y la comprensión de la derivada, documenta que muchos estudiantes y algunos profesores tienen dificultades para conectar múltiples representaciones (gráfica, algebraica, verbal, simbólica) y significados parciales asociados con la derivada (e.g., Badillo, 2003; Badillo *et al*., 2011; Borji *et al*., 2018; Font, 2000; Fuentealba *et al*., 2019; Fuentealba *et al*., 2018; Hashemi *et al*., 2014; Pino-Fan *et al*., 2017; Pino-Fan *et al*., 2015 ; 2018; Sari *et al*., 2018). Sin embargo, el profesor participante en esta investigación hizo conexiones matemáticas entre diferentes significados de la derivada (límite del cociente incremental y como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto) y conexiones entre diferentes representaciones de la derivada.

En el análisis de los resultados también se identificó el papel de la metáfora en el discurso del profesor, mostrando, sobre todo, el uso de la metáfora conceptual "*la gráfica es un camino*". Este resultado concuerda con otras investigaciones que muestran el papel de la metáfora en la comprensión de conceptos matemáticos (Font, 2007; Font y Acevedo, 2003; Font *et al*., 2010; Lakoff y Núñez, 2000; Núñez, Edwards y Matos,1999; Oehrtman, 2009; Presmeg, 1992; 2005; Zandieh, Ellis y Rasmussen, 2017; Zandieh y Knapp, 2006, 2018a; 2018b). En particular, Font et al. (2010) muestran que el uso de la metáfora es algo inevitable y, a veces, inconsciente. Este hecho llevó a proponer un nuevo tipo de conexión: la metafórica.

Las razones que justifican la incorporación de este tipo de conexión metafórica están relacionadas con la importancia de las metáforas en la comprensión de las nociones matemáticas, y los errores y dificultades asociados al uso de metáforas en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo, Badillo (2003) y Badillo et al. (2011) presentaron a los profesores una tarea con dos gráficas (ver Figura 91) que representan el movimiento de dos autos (teniendo el tiempo como variable independiente y la distancia recorrida como variable dependiente) con un común punto. El texto sugiere implícitamente que la gráfica es la trayectoria del auto y esto llevó a los profesores a decir que los autos chocan en el punto común, en lugar de responder que tienen la misma velocidad porque la pendiente es la misma.

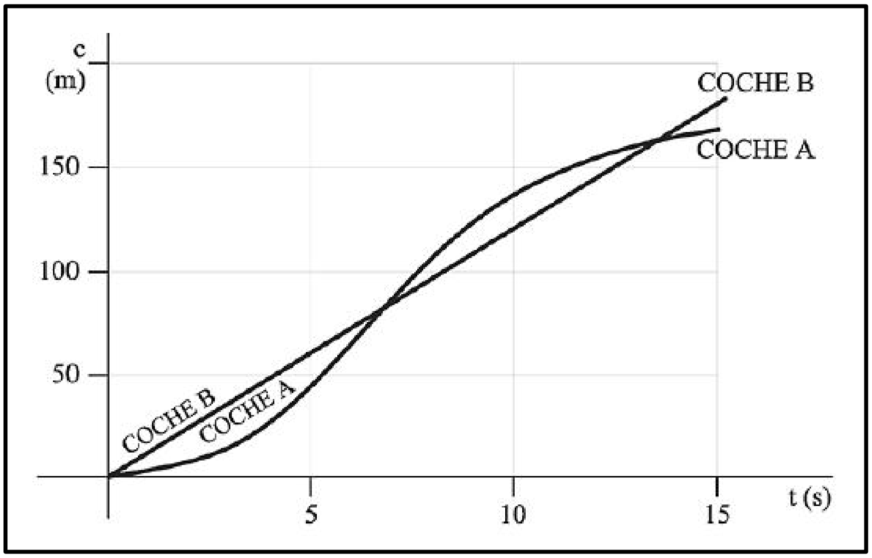


Figura 91. Movimiento de dos autos (tomado de Badillo et al. (2011)).

La primera razón para incorporar las conexiones metafóricas como un nuevo tipo de conexión se justifica por la importancia de estas conexiones en la comprensión de las nociones matemáticas (funciones y derivadas en nuestro caso) tanto para profesores como para estudiantes, y también en la historia de matemáticas. Por ejemplo, el siguiente párrafo muestra la importancia de las metáforas dinámicas para Newton en su conceptualización de las curvas:

> No considero las magnitudes matemáticas como formadas por piezas, por pequeñas que sean, sino como se describe en el movimiento continuo. Las líneas no se describen ni se generan por la yuxtaposición de sus partes, sino como el movimiento continuo de puntos; áreas por el movimiento de líneas; sólidos por el movimiento de áreas; ángulo por rotación de sus lados; tiempo por un flujo continuo. Considerando, entonces, que las magnitudes que crecen en tiempos iguales son mayores o menores según una mayor o menor velocidad, busqué un método para determinar magnitudes a partir de la velocidad de los movimientos o los incrementos que la generan. Llamé a las magnitudes generadas como fluxons, se me ocurrió el método de fluxiones alrededor de los años 1665-1666, y lo utilizaré en la cuadratura de curvas (extraído de Lacasta y Pascual, 1998, p. 28-29).

En este sentido, Newton estaba a favor de las metáforas dinámicas y en contra de las metáforas estáticas. Para él, las gráficas de funciones debían considerarse no como un agregado estático de puntos (el punto de vista de Leibniz), sino como la trayectoria descrita por el movimiento de un punto, que puede expresarse mediante una fórmula (generalmente de manera implícita) (Font, Giménez, Larios y Zorrilla, 2012).

La metáfora dinámica domina en los libros de texto hasta la aritmética del análisis infinitesimal (principios del siglo XIX). Esto significa que, hasta este momento, las gráficas de funciones se consideraban principalmente como la trayectoria descrita por un punto en movimiento, que podía expresarse mediante una fórmula (Acevedo, 2008; Font y Acevedo, 2003; Font *et al*., 2012). Para estos autores, las metáforas dinámicas y estáticas tienen similitudes, incluso cuando son claramente diferentes. Por ejemplo, ambas metáforas permiten la distinción entre gráfico y punto (Font *et al*., 2012). Sin embargo, el punto está en el gráfico en las metáforas dinámicas, mientras que es parte del gráfico en la metáfora estática.

Font et al. (2012) plantean que un docente experto puede dominar ambos tipos de metáforas sin causarle ningún problema; sin embargo, su trasfondo condiciona las metáforas dinámicas a las estáticas. En particular, en el caso de una función con un dominio dado por un intervalo cerrado, podemos suponer que el punto extremo del intervalo se mueve hacia el otro punto extremo y que el dominio de la función es un conjunto (estático). Para el caso estudiado en esta investigación, el docente habla de puntos en el gráfico utilizando implícitamente una metáfora dinámica en los códigos C34 y C38, mientras que utiliza una metáfora estática en C6 y C48 al hablar de las partes de un gráfico.

El fenómeno que se evidencia en el discurso del docente al explicar funciones es que, por un lado, la metáfora estática se fundamenta en las matemáticas que tiene que explicar -por ejemplo, Spivak (1992) dijo que "una función no es más que un conjunto de pares de números ... la gráfica contiene todos los puntos correspondientes a los pares *(x, f (x))*" (p.74)-, y, por otro lado, la metáfora dinámica es un recurso utilizado por el docente que difícilmente pudo evitar en sus explicaciones. Esto significa que hay una mayor presencia de metáforas dinámicas en las explicaciones del profesor que en los libros de texto utilizados (Font et al., 2012; Font *et al*., 2010).

Existen numerosas investigaciones sobre el impacto de las metáforas y otras figuras lingüísticas en la comprensión de las nociones matemáticas, y los errores y dificultades de los estudiantes. En cuanto al objeto matemático de la derivada (utilizado como contexto de reflexión en este trabajo), Zandieh y Knapp (2018a; 2018b) estudiaron el impacto de las metonimias y metáforas en la comprensión. En particular, Zandieh y Knapp (2006, 2018b) se centraron en la importancia de las metáforas para conectar contextos familiares de la derivada con contextos menos familiares. Por otro lado, Zandieh y Knapp (2006; 2018a) se centraron en el efecto de las expresiones metonímicas en la comprensión de la derivada; por ejemplo, “la derivada es la pendiente”, o las expresiones metonímicas incorrectas como “la derivada es la recta tangente”, y oraciones ambiguas como “la derivada es la recta tangente de una función”.

Con respecto al uso de la metáfora la gráfica es un camino en el contexto de la enseñanza de las derivadas, uno de los fenómenos observados en Font (2000) cuando el docente experimentó con la construcción que se hacía de la aproximación a la recta tangente en un punto a través del visualización de líneas secantes usando un programa dinámico (ver Figura 92) fue el hecho de que usando la metáfora "la gráfica de una función puede ser considerada como la traza que deja un punto mientras se mueve en la gráfica" de una manera inconsciente, el profesor produjo la siguiente dificultad en algunos estudiantes:

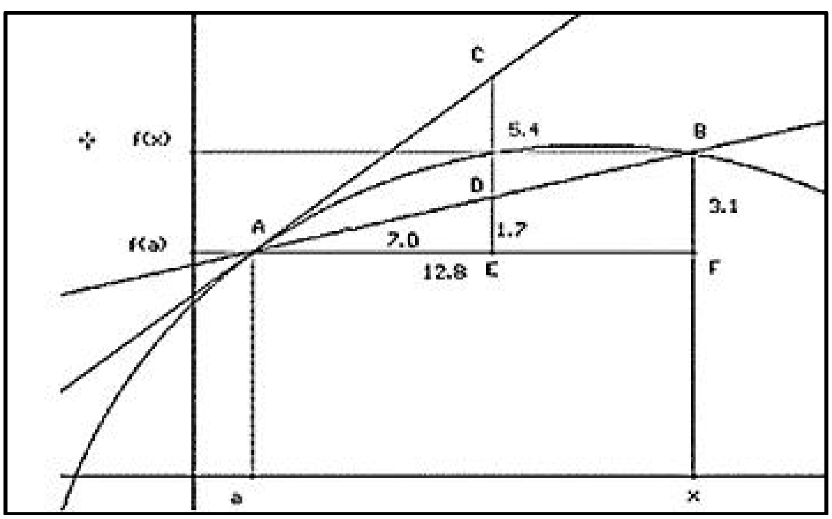


Figura 92. Aproximación dinámica a la tangente mediante líneas secantes (Tomado de Font (2000, p.117)).

> (...) observamos que algunos estudiantes, mientras movían el punto A, pensaban que el nuevo punto seguía siendo el punto A, y que la nueva tangente era la misma que antes, pero con una pendiente diferente. De hecho, es como si estructuraran la situación en términos de una persona que se mueve (punto A) con una bolsa en la espalda (la línea tangente) en una carretera que sube primero y luego baja (gráfico) y como si consideran a la persona y al bolso como una misma cosa, a pesar de estar en lugares diferentes y tener diferente pendiente (Font, 2000, p.122).

Se observa que esta conexión de tipo metafórica es establecida por el profesor cuando explica la derivada y la continuidad de la función y es usada se manera similar por sus estudiantes. Ante esta situación, se cree que las conexiones establecidas por los profesores influyen directamente en las conexiones matemáticas que realizan los estudiantes y en su comprensión de las matemáticas. No obstante, este tipo de conexiones pueden activarse en la mente del profesor o del estudiante a través de expresiones metafóricas verbalizadas o encontradas escritas en los libros de texto de matemáticas de Cálculo, por ejemplo, en Purcell et al. (2007) intuitivamente, que la función sea continua en $[a, b]$, significa que:

> la gráfica de f en $[a, b]$ no debe tener saltos, de modo que debemos ser capaces de "*dibujar*" la gráfica de f desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ *sin levantar nuestro lápiz del papel*. Así, la función f debe tomar todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$ (p. 87).

En esta investigación se realizó una reflexión teórica sobre las conexiones matemáticas que estableció un profesor de Cálculo Diferencial mientras enseñaba la derivada. Esta reflexión se basó en el modelo de Businskas ampliado con aportaciones de otros investigadores. Se identificaron siete de los ocho tipos de conexiones matemáticas: significados, diferentes representaciones, procedimentales, parte-todo, características, implicaciones y orientadas a la instrucción. El modelo extendido se ha utilizado en los trabajos de Dolores-Flores y García-García (2017), Dolores-Flores et al. (2019), y García-García y Dolores-Flores (2018; 2019; 2020) para explorar las conexiones matemáticas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos de derivada, integral y tasa de cambio con estudiantes preuniversitarios; la conexión orientada a la instrucción no se identificó porque estaban enfocadas en los estudiantes. Por el contrario, este tipo de conexión se identificó en esta investigación, porque estudia a un docente en servicio mientras enseña derivada, como en los trabajos de Mhlolo (2012) y Mhlolo et al. (2012). Además, este estudio identificó un tipo de conexión diferente, la metafórica, que se propone como una nueva categoría de conexión para ampliar el modelo para un análisis más detallado de las conexiones.

Un tema para discutir es si esta nueva categoría es realmente una extensión del modelo o si se puede categorizar como una de las conexiones ya existentes. Por ejemplo, se podría preguntar si la metáfora "la gráfica es un camino" podría considerarse como una conexión extramatemática, porque asocia el dominio inicial del mundo real con el dominio objetivo de las matemáticas. Por otro lado, es un hecho que los profesores utilizan conscientemente las metáforas para facilitar, en su opinión, la comprensión de los alumnos. Estas metáforas podrían interpretarse como una conexión orientada a la instrucción. Sin embargo, el profesor utilizó muchas expresiones metafóricas que podrían sugerir metáforas conceptuales de las que no es consciente. Por tanto, no parece razonable incluir todas las conexiones metafóricas dentro de la conexión orientada a la instrucción.

Según Lakoff y Núñez (2000), esta investigación entiende la "*metáfora*" como una relación entre un dominio inicial o de origen y un dominio final o de destino, mientras que las propiedades se proyectan del primero al segundo dominio. Las metáforas se denominan metáforas de enlace cuando los dominios inicial y objetivo provienen del mundo matemático, y metáforas de base cuando el dominio inicial es extramatemático y el dominio objetivo es matemático. Esta variedad de conexiones metafóricas nos lleva a proponer la metáfora como una nueva categoría de conexión que puede expandir tanto las conexiones intramatemáticas como las extramatemáticas. Sin embargo, podríamos preguntarnos si las metáforas de puesta a tierra son un nuevo tipo de conexión extramatemática. Incluso cuando las metáforas de puesta a tierra podrían considerarse conexiones extramatemáticas, no son el tipo de conexiones especificadas en la literatura sobre conexiones extramatemáticas (Dolores-Flores y García-García, 2017). Es común pensar en modelación y contextualización cuando se habla de este tipo de conexiones. Básicamente, uno está pensando en una relación particular-general donde un contexto extramatemático se encuentra debajo del dominio de una noción matemática.

Una razón para considerar incluir cualquier metáfora en una de las categorías de conexión del modelo extendido de Businskas es que hay metáforas fosilizadas (es decir, ya no se consideran metáforas). Por ejemplo, Descartes, en su libro La geometría, estableció una de las metáforas de enlace más creativas de la historia de las matemáticas que permite la interpretación de curvas como puntos que satisfacen una ecuación. Esta metáfora permite considerar, por ejemplo, que una circunferencia es el conjunto de puntos que son la solución de ecuaciones del tipo $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ (o simplemente, una circunferencia es una ecuación del tipo $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$) (Font, 2007). El paso del tiempo fosiliza una metáfora creativa, como en el caso de Descartes, y pasa a ser considerada como un cambio de representaciones del mismo objeto matemático.

Las metáforas fosilizadas aparecieron cuando analizamos las conexiones producidas en una lección, pero el discurso del profesor también utilizó otras metáforas que no pueden considerarse fosilizadas. Por ejemplo, el maestro participante usó metáforas fosilizadas en el código C54 como "(…) los límites laterales a la izquierda y a la derecha (…)", pero también usó metáforas no fosilizadas del tipo orientacional en el código C45 referidas a las tangentes como rectas horizontales (C45). El código C45 se interpreta como una conexión de tipo parte-todo según el primer análisis, pero también se puede interpretar como una conexión metafórica del tipo orientacional.

En relación con la articulación de teorías se afirma que, ambas teorías se complementan para un análisis exhaustivo de las conexiones matemáticas. En particular, el análisis con la TAC que da como resultado una lista temporal de conexiones matemáticas y una tabla de frecuencias de las conexiones matemáticas producidas fue articulado y enriquecido por el análisis ontosemiótico de la actividad matemática realizado con el EOS, ya que este último proporciona una estructura a la lista de las conexiones matemáticas identificadas a través del análisis temático y también especifíca qué objetos matemáticos están conectados.

Una cuestión para discutir es si se habría llegado a un resultado simular o diferente usando otra teoría de las conexiones, u otra teoría diferente al EOS que permita el análisis de la actividad matemática en general. Otra cuestión para discutir es, si el propio desarrollo de la TAC que poco a poco se hace una teoría más compleja, llevaría a un análisis de las conexiones tan minucioso y detallado como el que se ha conseguido con el networking realizado. Ahora bien, se trata de una discusión que necesitaría de un trabajo diferente y futuro al que se presenta en esta memoria de investigación.

Por otra parte, en los resultados de esta investigación, se evidenció que la mayoría de los estudiantes universitarios establecieron conexiones matemáticas de tipo significado, representaciones diferentes, procedimental, parte-todo, característica, implicación, reversibilidad, metafórica y de modelado, las cuales fueron importantes para la resolución de los problemas propuestos. Es oportuno mencionar, que la literatura reporta que las dificultades para la comprensión de la derivada se enfocan hacia la desconexión entre representaciones, significados, inconvenientes para bosquejar la gráfica de *f* con base en la información de la gráfica de *f'* o viceversa, dado que no establecen relaciones lógicas o bien conexiones de implicación (Fuentealba *et al*., 2015; Fuentealba *et al*., 2018; Fuentealba *et al*., 2018; 2019; García-García y Dolores-Flores, 2019; Nemirovsky y Rubin, 1992; Oehrtman *et al*., 2008; Pino-Fan *et al*., 2015; 2018; Sánchez-Matamoros *et al*., 2008; Ubuz, 2007). No obstante, esta investigación reporta que los estudiantes sí establecen conexiones entre representaciones diferentes, parte todo, característica, implicación, reversibilidad y significado, fundamentales para relacionar las gráficas de *f* y *f'*. De hecho, este trabajo se afirma que la construcción de las gráficas de *f* y *f'* sin considerar una expresión algebraica o simbólica, requiere del establecimiento de conexiones matemáticas y aplicación de conceptos y propiedades como asumir la derivada desde una perspectiva geométrica, como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, criterios de la primera y segunda derivada, entre otros.

Además, en las investigaciones se resalta que los estudiantes no proceden adecuadamente para gráficar a *f* o *f'* cuando no se les da la expresión algebraica o simbólica de *f* o *f'* (Berry y Nyman, 2006; Ferrini-Mundy y Graham, 1994; García-García y Dolores-Flores, 2019; Voskoglou, 2017), sin embargo, en esta investigación se evidencia que los estudiantes sí pueden bosquejar la gráfica de las funciones y su derivada sin necesitar la expresión algebraica. También, en la resolución de la tarea 3, los estudiantes tuvieron la oportunidad de conocer la expresión algebraica de *f* y la mayoría graficaron adecuadamente a *f',* pero, realmente lo que se observó fue el impacto y la riqueza de las conexiones matemáticas para resolver este tipo de tareas, asumiendo la conexión como la punta de un *iceberg*.

5.2. Reflexiones finales

En este trabajo se ha realizado una reflexión teórica que pretende ser una contribución al desarrollo del modelo de conexiones matemáticas propuesto por Businskas (ampliado con las aportaciones de otros investigadores). Específicamente, se hizo evidente que las nueve categorías de conexiones en este modelo podrían extenderse, porque no se proporciona un tipo de conexión matemática, las conexiones metafóricas, que es esencial para comprender las nociones matemáticas. Por eso se propone la incorporación de este tipo de conexión como décima categoría. Se considera que esta nueva extensión del modelo extendido de Businskas permitió un mejor análisis de la conexión matemática en el proceso de enseñanza y aprendizaje; especialmente si se tiene en cuenta que las metáforas son un recurso muy utilizado por los profesores de matemáticas durante sus clases (Font *et al*., 2010).

Hay posibles rutas para continuar este trabajo, por ejemplo, refinar la nueva categoría de conexiones en tipos más específicos de conexiones metafóricas. Además, esta investigación muestra que identificar si las conexiones matemáticas se establecieron con expresiones metafóricas utilizadas por el profesor o los estudiantes, de manera consciente o inconsciente, es un enfoque para una forma más profunda de analizar las conexiones matemáticas. Se cree que es importante estudiar la calidad de las conexiones matemáticas establecidas por el profesor y los estudiantes al resolver tareas matemáticas y cómo afecta la comprensión matemática. Finalmente, se afirma que este tipo de investigaciones futuras ampliarían los resultados de esta investigación ya que solo se consideró el análisis de una clase de un solo profesor de matemáticas.

En relación con la articulación de teorías, se concluye que la TAC se enriqueció con las herramientas del EOS, dado que permitió refinar la estructura de una conexión matemática, se mejoró el método de análisis de la actividad matemática que combina el análisis temático con el análisis de la actividad matemática. Esta articulación muestra una esquematización de las conexiones dejando ver los objetos matemáticos que se conectan, la FS y el código de correspondencia que soporta la conexión matemática. De hecho, el EOS para este tipo de trabajo de networking of theories es fundamental, debido a que es un sistema teórico inclusivo y articulador de teorías que surgió para mejorar el análisis de fenómenos presentados en la investigación en Educación Matemática y otras áreas de investigación.

Referencias bibliográficas

Acevedo, J. I. (2008). *Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones.* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Barcelona, España.

Adu-Gyamfi, K., Bossé, M. J., & Chandler, K. (2017). Student connections between algebraic and graphical polynomial representations in the context of a polynomial relation. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(5), 915-938.

Aguilar, S. & Barroso, J. (2015). La triangulación de datos como estrategia en investigación educativa [Data triangulation as education researching strategy]. *Píxel-Bit. Revista de Medios y Educación*, 45, 73-88. doi: 10.12795/ pixelbit.2015.i47.05

Alarcón, C. (2009). *Las convenciones matemáticas en la construcción de relaciones graficas de la función y su derivada* (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo.

Alsina, Á. (2014). Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave. *Números*, *86*, 5-28.

Altay, M. K., Yalvaç, B., & Yeltekin, E. (2017). 8th Grade Student's Skill of Connecting Mathematics to Real Life. *Journal of Education and Training Studies*, *5*(10), 158-166.

Artigue, M., & Bosch, M. (2014). Reflection on networking through the praxeological lens. In *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 249-265). Springer, Cham.

Artigue, M., Haspekian, M., & Corblin-Lenfant, A. (2014). Introduction to the theory of didactical situations (TDS). In *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 47-65). Springer, Cham.

Artigue, M., & Mariotti, M. A. (2014). Networking theoretical frames: The ReMath enterprise. *Educational Studies in Mathematics*, 85, 329–355. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9522-2

Association of Mathematics Teacher Educators [AMTE]. (2017). *Standards for Preparing Teachers of Mathematics.* Available online at amte.net/standards.

Arzarello, F., & Olivero, F. (2006). Theories and empirical researches: towards a common framework. In *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1305-1315).

Arzarello, F., & Sabena, C. (2014). Introduction to the approach of action, production, and communication (APC). In *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 31-45). Springer, Cham.

Badillo, E. (2003). *La Derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia.* (Tesis doctoral no publicada). Universidad Autónoma de Barcelona. Spain.

Badillo, E., Azcárate, C., & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de compresión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de matemáticas [Analysis of Mathematics teachers' level of understanding of the objects *f'(a)* and *f'(x)*]. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(2), 191–206.

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S. y Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 217-241.

Berry, J. y Nyman, M. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(4), 479–495.

Bikner-Ahsbahs, A. (2016). *Networking of Theories in the Tradition of TME. Theories in and of Mathematics Education, 33–42.* doi:10.1007/978-3-319-42589-4_5

Bikner-Ahsbahs, A., & Halverscheid, S. (2014). Introduction to the theory of Interest-Dense Situations (IDS). In *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 97-113). Springer, Cham.

Bikner-Ahsbahs, A., Artigue, M., & Haspekian, M. (2014). Topaze effect: A case study on networking of IDS and TDS. In *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 201-221). Springer, Cham.

Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (2010). Networking theories—an approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of mathematics education* (Advances in mathematics education, pp. 589–592). Heidelberg/New York: Springer.

Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (Eds.). (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Dordrecht: Springer.

Bikner-Ahsbahs, A., & Vohns, A. (2019). Theories of and in Mathematics Education. In *Traditions in German-Speaking Mathematics Education Research* (pp. 171-200). Springer, Cham.

Birgin, O. (2012). Investigation of eighth-grade students' understanding of the slope of the linear function. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *26*(42A), 139-162.

Boero, P., Dreyfus, T., Gravemeijer, K., Gray, E., Hershkowitz, R., Schwarz, B., Sierpinska, A., & Tall, D. (2002). Abstraction: Theories about the emergence of knowledge structures. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th international conference on the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 111–138). Norwich: East Anglia University/PME.

Borji, V., Erfani, H., & Font, V. (2019). A combined application of APOS and OSA to explore undergraduate students' understanding of polar coordinates. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-19. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1578904

Borji, V., Font, V., Alamolhodaei, H., & Sánchez, A. (2018). Application of the Complementarities of Two Theories, APOS and OSA, for the Analysis of the University Students' Understanding on the Graph of the Function and its Derivative. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(6), 2301-2315.

Bosch, M., & Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 67-83). Springer, Cham.

Bosch, M., Gascón, J., & Trigueros, M. (2017). Dialogue between theories interpreted as research praxeologies: The case of APOS and the ATD. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(1), 39-52.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77–101.

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *34*(66), 69-88. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04

Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *32*(60), 255-278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Brown, L. (Ed.). (1993). *The new shorter Oxford English dictionary on historical principles.* Oxford: Clarendon Press.

Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections.* (Unpublished PhD Thesis). Simon Fraser University. Canada.

Caldwell, K., & Atwal, A. (2005). Non-participant observation: using video tapes to collect data in nursing research. *Nurse Researcher*, *13*(2), 42–54. doi:10.7748/nr.13.2.42.s6

Campo-Meneses, K., & García-García, J. (2020). Explorando las conexiones matemáticas asociadas a la función exponencial y logarítmica en estudiantes universitarios colombianos. Revista Educación Matemática, *32*(3), 209-240.

Caviedes, S., de Gamboa, G., & Badillo, E. (2019). Conexiones matemáticas que establecen maestros en formación al resolver tareas de medida y comparación de áreas. *Praxis*, *15*(1), 69-87.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research methods in education*. London and New York: Routledge.

Cortes, D. P., & Orey, D. C. (2020). Connecting Ethnomathematics and Modelling: a mixed methods study to understand the dialogic approach of Ethnomodelling. *Revemop*, *2*, e202011-e202011.

Coxford, A.F. (1995). The case for connections. In P. A. House & A.F. Coxford (Eds.), Connecting mathematics across the curriculum. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

D’Ambrosio, U. (2001). *Etnomatemática: Elo entre las tradições e a modernidad. Colección: Tendencias en educación matemática*. Belo Horizonte: Autêtica.

D'Ambrosio, U. (2014). Las bases conceptuales del Programa Etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 100-107.

De Gamboa, G., & Figueiras, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 337–344). Salamanca: SEIEM.

Departament d'Ensenyament. (2017). Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Recuperado de: http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/colleccions/competenc ies-basiques/eso/eso-matematic.pdf.

Dirección General de Bachillerado [DGB]. (2018). *Cálculo diferencial.* Recuperado el 06 de diciembre de 2019 https://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/CFP/5to-Semestre/Calculo-Diferencial.pdf

Dolores-Flores, C., & García-García, J. (2017). Conexiones intramatemáticas y extramatemáticas que se producen al resolver problemas de Cálculo en contexto: un estudio de casos en el nivel superior. *Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 158–180. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08

Dolores-Flores, C., Rivera-López, M. I., & García-García, J. (2019). Exploring mathematical connections of pre-university students through tasks involving rates of change. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *50*(3), 369–389.

Dreyfus, T., & Kidron, I. (2014). Introduction to abstraction in context (AiC). In *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 85-96). Springer, Cham.

Dreyfus, T., Sabena, C., Kidron, I., & Arzarello, F. (2014). The Epistemic Role of Gestures: A Case Study on Networking of APC and AiC. In *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 127-151). Springer, Cham.

Drijvers, P., Godino, J. D., Font, V., & Trouche, L. (2013). One episode, two lenses. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 23–49. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9416-8

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61,* 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J., & Lee, C. W. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal*, *23*(3), 297-319.

Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J., & Lee, C. W. (2013). Mathematical Connections and Their Relationship to Mathematics Knowledge for Teaching Geometry. *School Science and Mathematics*, *113*(3), 120–134.

Evitts, T. (2004). *Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula.* (Unpublished doctoral dissertation). Pennsylvania State University College of Education. EE. UU.

Ferrini-Mundy, J., & Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives, and integrals. *MAA notes*, 31-46.

Fonger, N. L., & Altindis, N. (2019). Meaningful Mathematics: Networking Theories on Multiple Representations and Quantitative Reasoning. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 1176-1786).

Font, V. (2000). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades [Procedures for obtaining symbolic expressions from graphs: Applications in relation to the derivative]*. (Unpublished doctoral dissertation). University of Barcelona, Spain.

Font, V. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular/general, representación, metáfora y contexto. *Educación matemática*, *19*(2), 95-128.

Font, V. (2016). Coordinación de Teorías en Educación Matemática: el caso del enfoque ontosemiótico. *Perspectivas da Educação Matemática*, *9*(20).

Font, V., & Acevedo, J, I. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias*, *21*(3), 405-418.

Font, V., & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 33-52. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9123-7

Font, V., Bolite, J., & Acevedo, J. (2010). *Metaphors in mathematics classrooms: analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions. Educational Studies in Mathematics*, *75*(2), 131–152. doi:10.1007/s10649-010-9247-4

Font, V., Giménez, J., Larios, V., & Zorrilla, J. F. (2012). *Competencias del profesor de matemáticas de secundaria y bachillerato*. Edicions Universitat Barcelona.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97–124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Font, V., Godino, J. D., Planas, N., & Acevedo, J. I. (2010). The object metaphor and synecdoche in mathematics classroom discourse. *For the Learning of Mathematics*, *30*(1), 15-19.

Font, V., Malaspina, U., Giménez, J., & Wilhelmi, M. R. (2011). Mathematical objects through the lens of three different theoretical perspectives. In *Proceedings of The 7th Conference of the European society for Research in Mathematics Education CERME* (Vol. 7).

Font, V., & Rubio, N. V. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Font, V., Trigueros, M., Badillo, E., & Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics*, *91*(1), 107-122. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9639-6

Frías, A. y Castro, E. (2007). Influencia del número de conexiones en la representación simbólica de problemas aritméticos de dos pasos. *PNA*, *2*(1), 29-41.

Fuentealba, C., Badillo, E., & Sánchez-Matamoros, G. (2018). Puntos de no-derivabilidad de una función y su importancia en la comprensión del concepto de derivada. *Educação e Pesquisa*, *44*, 1-20.

Fuentealba, C., Badillo, E., & Sánchez-Matamoros, G. (2019). Identificación y caracterización de los subniveles de desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, *37*(2), 63-84. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2518

Fuentealba, C., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G., & Cárcamo, A. (2018). The understanding of the derivative concept in higher education. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *15*(2), 1-15.

Fuentealba, C., Sánchez-Matamoros, G., & Badillo, E. (2015). Análisis de tareas que pueden promover el desarrollo de la comprensión de la derivada. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 71, 72-78.

García-García, J. (2018). *Conexiones matemáticas y concepciones alternativas asociadas a la derivada y a la integral en estudiantes del preuniversitario*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad Autónoma de Guerrero, México.

García-García, J. G. (2019). Escenarios de exploración de conexiones matemáticas. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, (100), 129-133.

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(2), 227–252. DOI: 10.1080/0020739X.2017.1355994

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2019). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. *Mathematics Education Research Journal*. doi.org/10.1007/s13394-019-00286-x

García-García, J. & Dolores-Flores, C. (2020). Exploring pre-university students' mathematical connections when solving Calculus application problems, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, DOI: 10.1080/0020739X.2020.1729429

Gil, I., Zamudio-Orozco, L., & King, B. (2019). After Presenting Multiple Solution Strategies, What's Next? Examining the Mathematical Connections Made by Preservice Teachers. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, *10*(2), 9-20.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1–2), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39* (1), 37-42.

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., & Burgos, M. (2020). Concordancias y complementariedades entre la Teoría de la Objetivación y el Enfoque Ontosemiótico. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *5*(2), 51-66.

González-García, A., Muñiz-Rodríguez, L., & Rodríguez-Muñiz, L. J. (2018). Un estudio exploratorio sobre los errores y las dificultades del alumnado de Bachillerato respecto al concepto de derivada. *Aula abierta*, *47*(4), 449-462.

Haltiwanger, L., & Simpson, A. M. (2013). Beyond the write answer: Mathematical connections. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *18*(8), 492-498.

Hanke, E. (2018). A function is continuous if and only if you can draw its graph without lifting the pen from the paper"–Concept usage in proofs by students in a topology course. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild & N.M Hogstad (Eds.), *Proceedings of the Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2018, 5-7 April 2018)* (pp. 44-53). Kristiansand, Norway: University of Agder and INDRUM.

Hashemi, N., Abu, M. S., Kashefi, H., & Rahimi, K. (2014). Undergraduate students' difficulties in conceptual understanding of derivation. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 143, 358-366.

Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research of mathematics teaching and learning* (pp. 65–79). New York: Macmillan.

Jayakody, G. N. (2015). *University first year students' discourse on continuous functions: A commognitive interpretation.* (Unpublished doctoral dissertation). University Simon Fraser, Burnaby, Canada.

Johnson, M. (1987). *The body in the mind: The bodily basis of meaning, imagination, and reason*. Chicago, IL: Chicago University Press.

Kaur, B., y Lam, T. T. (2012). Reasoning, Communication and Connections in Mathematics: An Introduction. In B. Kaur, & T. T. Lam, *Reasoning, Communication and Connections in Mathematics* (pp. 1-10). World Scientific Publishing.

Kenedi, A. K., Helsa, Y., Ariani, Y., Zainil, M., & Hendri, S. (2019). Mathematical connection of elementary school students to solve mathematical problems. *Journal on Mathematics Education*, *10*(1), 69-80.

Kidron, I., Artigue, M., Bosch, M., Dreyfus, T., & Haspekian, M. (2014). Context, milieu, and media-milieus dialectic: A case study on networking of AiC, TDS, and ATD. In *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 153-177). Springer, Cham.

Kidron, I., & Bikner-Ahsbahs, A. (2015). Advancing research by means of the networking of theories. In A. Bikner-Ahsbahs, Ch. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative methods in mathematics education—Examples of methodology and methods* (pp. 221–232). New York: Springer.

Kidron, I., & Monaghan, J. (2012). Complexity of dialogue between theories: Difficulties and benefits. *Pre-Proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (pp. 7078–7084). Seoul: COEX.

Koestler, C., Felton, M. D., Bieda, K. N., & Otten, S. (2013). *Connecting the NCTM Process Standards and the CCSSM Practices.* United States of America: National Council of Teachers of Mathematics.

Lacasta, E., & Pascual, J. R. (1998). *Las funciones y los gráficos cartesianos [The functions and the cartesian graphs]*, Madrid: Síntesis.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York, NY: Basic Books.

Lapp, D., Nyman, M., & Berry, J. (2010). Student connections of linear algebra concepts: an analysis of concept maps. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(1), 1-18, DOI: 10.1080/00207390903236665

Leithold, L. (1998). *El cálculo* (Vol. 7). Harla. (México): Oxford University Press.

Lianawati, I., & Purwasih, R. (2018). Analysis Ability of Mathematical Connection of SMP students in Comparative Material in Review of Gender Differences. *Daya Matematis: Jurnal Inovasi Pendidikan Matematika*, 6(1), 14-23.

Longhurst, R. (2010). Semi-structured interviews and focus groups. En N. Clifford, S. French & G. Valentine. (Eds.), *Key Methods in Geography* (pp. 103-115). London: Sage.

McMillan, B. (2018). *Connecting the Multiplicative Field with Student Mathematical Thinking* (Doctoral dissertation). University of California, Los Angeles.

Mhlolo, M. K. (2012). Mathematical connections of a higher cognitive level: A tool we may use to identify these in practice. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *16*(2), 176–191.

Mhlolo, M.K., Venkat, H., & Schäfer, M. (2012). The nature and quality of the mathematical connections teachers make. *Pythagoras*, *33*(1), 1-9. http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v33i1.22

Millspaugh, R. P. (2006). From intuition to definition: Teaching continuity in first semester calculus. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *16*(1), 53-60.

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, Matemáticas, ciencia y ciudadanas*. Bogotá, Colombia: MEN.

Ministry of Education [MOE] (2006a). *Mathematics syllabuses – Primary*. Singapore: Author.

Ministry of Education [MOE] (2006b). *Mathematics syllabuses – Lower secondary*. Singapore: Author

Moon, K., Brenner, M. E., Jacob, B., & Okamoto, Y. (2013). Prospective secondary mathematics teachers' understanding and cognitive difficulties in making connections among representations. *Mathematical Thinking and Learning*, *15*(3), 201-227.

Mwakapenda, W. (2008). Understanding connections in the school mathematics curriculum. *South African Journal of Education*, *28*(2), 189-202.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2014). *Principles to action: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Research Council [NRC]. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. J.Kilpatrick, J. Swafford, and B. Findell (Eds.). *Mathematics Learning*

Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

Nemirovsky, R., & Rubin, A. (1992). Students' tendency to assume resemblances between a function and its derivatives. *TERC Working 2-92*. Cambridge MA: TERC.

Niss, M. (2007). Reflections on the state and trends in research on mathematics teaching and learning: From here to utopia. In F. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 1293–1311). Greenwich, Connecticut: Information Age Publishing, Inc.

Novo, M.L., Berciano, A., & Alsina, A. (2019). Conexiones matemáticas de tipo conceptual en niños de 4 años. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, *8*(2), 166-192. doi: 10.17583/redimat.2019.3938

Núñez, R. E., Edwards, L. D., & Matos, J. F. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational studies in mathematics*, *39*(1-3), 45-65.

Oehrtman, M. (2009). Collapsing dimensions, physical limitation, and other student metaphors for limit concepts. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(4), 396-426.

Orts, A., Llinares, S., y Boigues, F. J. (2018). Trayectorias de aprendizaje del concepto de recta tangente en alumnos de Bachillerato. *Enseñanza de las ciencias*, *36*(3), 121-140.

Özgen, K. (2013). Self-Efficacy Beliefs In Mathematical Literacy And Connections Between Mathematics And Real World: The Case Of High School Students. *Journal of International Education Research*, *9*(4), 305–316.

Pambudi, D. S., Budayasa, I. K., & Lukito, A. (2018). Mathematical connection profile of junior high school students in solving mathematical problems based on gender difference. *International Journal of Scientific Research and Management*, *6*(08), 73-78. https://doi.org/10.18535/ijsrm/v6i8.m01

Pino-Fan, L. R., Castro, W. F., Godino, J. D., & Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, *34*(2), 129-150. http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512013000200008&lng=es&nrm=iso>. ISSN 1011-2251.

Pino-Fan, L., Godino, J., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, *13*(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *Bolema*. *Boletim de Educação Matemática*, *29*(51), 60-89.

Pino-Fan, L., Godino, J, D., & Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, doi:10.1007/s10857-016-9349-8

Pino-Fan, L., Guzmán, I., Font, V., & Duval, R. (2017). Analysis of the underlying cognitive activity in the resolution of a task on derivability of the absolute-value function: Two theoretical perspectives. *PNA*, *11*(2), 97-124.

Prediger, S., & Bikner-Ahsbahs, A. (2014). Introduction to networking: Networking strategies and their background. In *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 117-125). Springer, Cham.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connection theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *40* (2), 165–178. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0086-z

Pirasa, N. (2016). The Connection Competencies of Pre-Service Mathematics Teachers about Geometric Concepts to Daily-Life. *Universal Journal of Educational Research*, *4*(12), 2840-2851.

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies, and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(6), 595–610.

Presmeg, N. C. (2005). Metaphor and metonymy in processes of semiosis in mathematics education. In M. Hoffmann, J. Lenhard, & F. Seeger (Eds.), *Activity and sign: Grounding mathematics education* (pp. 105–115). Dordrecht: Springer.

Purcell, E., Varberg, D., & Rigdon, S. (2007). Cálculo diferencial e integral. México: PEARSON.

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. ZDM-*The International Journal on Mathematics Education*, 40, 317–327. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0090-3

Rodríguez-Nieto, C. A. (2020). Explorando las conexiones entre sistemas de medidas usados en prácticas cotidianas en el municipio de Baranoa. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, 11, e-857. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v11i0.857

Rodríguez-Nieto, C. A. (2021). Conexiones etnomatemáticas entre conceptos geométricos en la elaboración de las tortillas de Chilpancingo, México. *Revista de investigación desarrollo e innovación*, *11* (2), 273-296.

Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M., Font, V., & Morales-Carballo, A. (en prensa). *Revemop.*

Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M., & García-García, J. (2021). Pre-service mathematics teachers' mathematical connections in the context of problem-solving about the derivative. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *12*(1), 202-220. https://doi.org/10.16949/turkbilmat.797182

Rodríguez-Vásquez, F. M., & Arenas Peñaloza, J. (2020). Categories to assess the understanding of university students about a mathematical concept. *Acta Scientiae*. *23*(1), 102-134.

Rohmah, S., Kusmayadi, T. A., & Fitriana, L. (2020, May). Mathematical connections ability of junior high school students viewed from mathematical resilience. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1538, No. 1, p. 012106). IOP Publishing.

Rondero, C., & Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 29–49. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1386

Rosa, M., & Orey, D. C. (2020). Discussing culturally relevant education and its connection to cultural aspects of mathematics through ethnomathematics. *Revista Eletrônica de Educação Matemática-REVEMAT*, *15*, 01-20.

Sabena, C., Arzarello, F., Bikner-Ahsbahs, A., & Schäfer, I. (2014). The Epistemological Gap: A Case Study on Networking of APC and IDS. In *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 179-200). Springer, Cham.

Safi, F., & Desai, S. (2017). Promoting mathematical connections using three-dimensional manipulatives. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *22*(8), 488-492.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *11*(2), 267-296.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., & Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers'noticing of students'understanding of the derivative concept. *International journal of science and mathematics education*, *13*(6), 1305-1329.

Sari, P., Hadiyan, A., & Antari, D. (2018). Exploring derivatives by means of GeoGebra. *International Journal on Emerging Mathematics Education*, *2*(1), 65-78. http://dx.doi.org/10.12928/ijeme.v2i1.8670

Sari, F. K., Sudirman, S., & Chandra, T. D. (2018). Proses Koneksi Matematis Siswa SMP dalam Menyelesaikan Soal Cerita. *Jurnal Pendidikan: Teori, Penelitian, dan Pengembangan*, *3*(6), 715-722. http://doi.org/10.17977/jptpp.v3i6.11116

São Paulo [state]. (2012). *Currículo do Estado de São Paulo: matemática e suas tecnologias*. Secretaria da Educação, São Paulo, Brasil.

Selinski, N. E., Rasmussen, C., Wawro, M. y Zandieh, M. (2014). A method for using adjacency matrices to analyze the connections students make within and between concepts: The case of linear algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(5), 550-583.

Shell Centre for Mathematical Education (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas [The language of functions and graphs]*. Bilbao: Servicio Editorial Universidad del País Vasco.

Spivak, M. (1992). *Cálculo Infinitesimal [Infinitesimal Calculus]*. España: Reverté.

Stewart, J. (1999). Cálculo. Conceptos y contextos. México: International Thomson Editores.

Sugiman, S. (2008). Koneksi matematik dalam pembelajaran matematika di sekolah menengah pertama. *Pythagoras: Jurnal Pendidikan Matematika*, *4*(1), 56-66.

Tabach, M., Rasmussen, C., Dreyfus, T., & Apkarian, N. (2020). Towards an argumentative grammar for networking: a case of coordinating two approaches. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09934-7

Thanheiser, E., Melhuish, K., Sugimoto, A., Rosencrans, B., & Heaton, R. (2021). Networking frameworks: a method for analyzing the complexities of classroom cultures focusing on justifying. *Educational Studies in Mathematics,* 1-30.

Ubuz, B. (2001). First year engineering students’ learning of point of tangency, numerical calculation of gradients, and the approximate value of a function at a point through computers. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *20*(1), 113–137.

Universidad Autónoma de Guerrero [UAGro]. (2009). *Plan de Estudios de la licenciatura en Matemáticas*. México: Autor.

Universidad Autónoma de Guerrero [UAGro]. (2020). *Plan de Estudios de la licenciatura en Matemáticas*. México: Autor.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.

Wittmann, E. C. (2021). Connecting Mathematics and Mathematics Education: Collected Papers on Mathematics Education as a Design Science. Springer.

Yavuz-Mumcu, H. (2018). Matematiksel ilişkilendirme becerisinin kuramsal boyutta incelenmesi: türev kavramı örneği. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *9*(2), 211-248. DOI: 10.16949/turkbilmat.379891.

Zandieh, M., Ellis, J., & Rasmussen, C. (2017). A characterization of a unified notion of mathematical function: the case of high school function and linear transformation. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(1), 21-38.

Zandieh, M. J., & Knapp, J. (2006). Exploring the role of metonymy in mathematical understanding and reasoning: The concept of derivative as an example. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(1), 1-17.

Zandieh, M. J., & Knapp, J. (2018a). Metonymy and metaphor: How language can impact understanding of mathematical concepts (Part I). *The Journal of the American Mathematical Association of Two-Year Colleges*, *9*(2), 23-29.

Zandieh, M. J., & Knapp, J. (2018b). Metonymy and metaphor: How language can impact understanding of mathematical concepts (Part II). *The Journal of the American Mathematical Association of Two-Year Colleges*, *9*(3), 21-26.

Zengin, Y. (2019). Development of mathematical connection skills in a dynamic learning environment. *Education and Information Technologies*, *24*(3), 2175-2194.

Zohar, A. (2006). Connected Knowledge in Science and Mathematics Education, International Journal of Science Education, *28*(13), 1579-1599, https://doi.org/10.1080/09500690500439199

Anexos

Productos de la investigación

De esta investigación se han producido tres artículos publicados (todos indexados en Scopus, dos de ellos en Q2 y otro en Q3), un artículo en prensa, un artículo aceptado con cambios y un artículo en revisión. También, se han producido dos capítulos de libro de divulgación (uno en prensa y otro en revisión), los cuales se presentan a continuación:

Rodríguez-Nieto, C., Font, V., Borji, V., & Rodríguez-Vásquez, F. M. (2021). Mathematical connections from a networking theory between Extended Theory of Mathematical connections and Onto-semiotic Approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1799254

Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M., Font, V., & Morales-Carballo, A. (en prensa). Una visión desde el networking TAC-EOS sobre el papel de las conexiones matemáticas en la comprensión de la derivada. *Revemop.*

Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M., & García-García, J. (en revisión). Exploring university mexican students' quality of intra-mathematical connections when solving tasks about derivative concept.

Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M., & García-García, J. (2021). Pre-service mathematics teachers' mathematical connections in the context of problem-solving about the derivative. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *12*(1), 202-220. https://doi.org/10.16949/turkbilmat.797182

Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F. M., & Font, V. (2020). A new view about connections. The mathematical connections established by a teacher when teaching the derivative. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1799254

Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F. M., & Font, V. (aceptado con cambios). Comprensión de estudiantes universitarios a través de las conexiones matemáticas creadas al resolver una tarea sobre la derivada. Un análisis con las teorías TAC y APOE.

Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F. M., & Font, V. (capítulo de libro en prensa). Nueva mirada para analizar las conexiones desde dos lentes teóricos: la teoría ampliada de las conexiones matemáticas y el enfoque ontosemiótico.

Rodríguez-Nieto, C., Rodríguez-Vásquez, F. M., & Font, V. (capítulo de libro en revisión). Uso de la articulación entre la TAC y el EOS para analizar conexiones matemáticas. El caso de la ecuación de la recta tangente.

Otros productos del doctorando

Castro, A., Rodríguez-Nieto, C., Aravena, L., Loncomilla, A. y Pizarro, D. (2020). Nociones matemáticas evidenciadas en la práctica cotidiana de un carpintero del sur de Chile. *Revista Científica*, *39*(3). https://doi.org/10.14483/23448350.16270

Jiménez-Consuegra, M. A., Flórez, E., Domenech, G., Berrío-Valbuena, J., Rodríguez-Nieto. C. A., Cervantes-Barraza, J. A., y Aroca, A. (2021). Estrategias y organización digital de los profesores universitarios en enseñanza y conectividad en el contexto de la pandemia generada por el COVID-19. *Academia y Virtualidad*, *14*(1), 63 - 85. https://doi.org/10.18359/ravi.5027

Rodríguez-Nieto, C. (2020). Explorando las conexiones entre sistemas de medidas usados en prácticas cotidianas en el municipio de Baranoa. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, 11, e-857. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech. v11i0.857

Rodríguez-Nieto, C. A. (2021). Conexiones etnomatemáticas entre conceptos geométricos en la elaboración de las tortillas de Chilpancingo, México. *Revista de investigación desarrollo e innovación*, *11* (2), 273-296.

Rodríguez-Nieto, C. (2021). Ampliación del modelo de conexiones entre sistemas de medidas con las actividades universales desde la Etnomatemática. (Capítulo de libro que se publicará en el libro que se titulará: *Tendencias en la Educación Matemática*).

Rodríguez-Nieto, C., Aroca, A., & Rodríguez-Vásquez, F. M. (2019). Procesos de medición en una práctica artesanal del caribe colombiano. Un estudio desde la Etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *12*(4), 61-88. https://doi.org/10.22267/relatem.19124.36

Rodríguez-Nieto, C., Morales-García, L., Muñoz, A., & Navarro, C. (2021). Etnomatemática y medidas. Un estudio con comerciantes de un mercado del suroeste mexicano. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*. En prensa.

Rodríguez-Nieto, C., Mosquera, G., & Aroca, A. (2019). Dos sistemas de medidas no convencionales en la pesca artesanal con cometa en Bocas de Cenizas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *12*(1), 6-24.

Rodríguez-Nieto, C., Navarro, C., Castro, A., & García-González, M. (2019). Estructuras semánticas de problemas aditivos de enunciado verbal en libros de texto mexicanos. *Revista Educación Matemática*, *31*(2), 75-104.

Rodríguez-Nieto, C., García-González, M., Navarro, C., & Castro, A. (en revisión). Creación de problemas aditivos de enunciado verbal por profesores de Educación primaria en México

Por otra parte, se comenta que este trabajo se ha presentado en congresos como la RELME, SEIEM, la EIME, TEMBI, Coloquios de Matemática Educativa en la UAGro, y se impartió un taller en la EIME con la Dra. Flor Rodríguez-Vásquez que se tituló: Promoviendo conexiones matemáticas en la resolución de problemas sobre la derivada. También, el estudiante Rodríguez-Nieto realizó una estancia doctoral en la Universidad de Barcelona, España, para avanzar en la tesis de doctorado junto con el Dr. Vicenç Font Moll. En la estancia realizada, Rodríguez-Nieto ha establecido relaciones académicas con sus profesores, lo cual le ha permitido participar en seminarios internos y publicar artículos.

Finalmente, Rodríguez-Nieto ha sido invitado para codirigir tesis de pregrado en la Universidad Austral de Chile y en la Universidad del Atlántico, Colombia.

Aravena, L., Loncomilla, A., & Pizarro, D. (2020). *Nociones matemáticas en la construcción de muebles. Estudio de caso con un mueblista del sur de Chile* (Tesis de pregrado). Universidad Austral de Chile, Puerto Montt, Chile.

Cantillo-Fuentes, L., & Pupo-Paba, N. (2020). *Análisis del sistema de medidas no convencionales en una práctica artesanal y su problematización en un aula de clases de sexto grado* (Tesis de pregrado). Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia.

Mansilla, L. (en ejecución). *Exploración de nociones matemáticos de pescadores de la Bahía de Puerto Montt, Chile*. Universidad Austral de Chile, Puerto Montt, Chile.