UAGro
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

Unidad Académica: Matemáticas

Doctorado en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

Conceptualizaciones de pendiente que poseen los profesores del bachillerato y las que enseñan a sus estudiantes

Tesis que presenta:

M.C. Gerardo Salgado Beltrán

para obtener el grado de Doctor en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

Director de Tesis:

Dr. Crisólogo Dolores Flores

Chilpancingo de los Bravo, Gro. Julio de 2020

Conceptualizaciones de pendiente que poseen los profesores del bachillerato y las que enseñan a sus estudiantes

Tesis de Doctorado

Autor: M.C. Gerardo Salgado Beltrán
Director de Tesis: Dr. Crisólogo Dolores Flores

Comité evaluador:
Dr. Crisólogo Dolores Flores
Dr. Mario Sánchez Aguilar
Dr. Javier García García
Dra. Deborah Moore Russo
Dra. María S. García González

2020
Centro de Investigación en Matemática Educativa
Universidad Autónoma de Guerrero
Chilpancingo de los Bravo, Gro., México.

A mi hija Sofía Salgado. Mi ángel y amor de mi vida
A mi madre Esperanza Beltrán. Mi pilar
A mis hermanos
A mi familia

Agradecimientos

A dios por darme fortaleza y permitirme cumplir este objetivo de vida.

Al Dr. Crisólogo Dolores Flores por asesorar esta investigación y por el tiempo brindado al desarrollo y culminación de la misma. Por compartir sus conocimientos y fomentar en mi persona el trabajo y la disciplina constante. Su apoyo y confianza son, fueron y han sido un pilar fundamental en mi formación.

A la Dra. Martha Iris Rivera López mi equipo de investigación, compañera y amiga en este camino. Las horas de trabajo constante, discusiones, análisis y reflexiones han sido relevantes para culminar esta investigación.

Al Dr. Mario Sánchez Aguilar, Dr. Javier García García, Dra. Deborah Moore Russo y Dra. María S. García González por las horas destinadas a la lectura de este trabajo y por sus aportes para la mejora en su presentación.

Índice

Resumen

El presente estudio tuvo como objetivo investigar qué conceptualizaciones de pendiente poseen profesores de bachillerato y cuáles son las que enseñan a sus estudiantes cuando abordan dicho concepto en un contexto escolar. Se trata de un estudio de corte cualitativo que involucró la participación de diez profesores de matemáticas en servicio y el uso de las notas de clase del cuaderno de matemáticas (CM) de diez estudiantes de onceavo grado que ya habían culminado el estudio de pendiente en sus respectivos cursos. Los participantes provienen de 10 instituciones educativas ubicadas principalmente en la región centro del Estado de Guerrero, México.

La recolección de los datos se realizó en dos etapas: en la primera, se diseñó y aplicó una Entrevista Basada en Tareas a los profesores, esta estuvo integrada por 12 tareas que involucran las diferentes representaciones de la pendiente y, en la segunda, se seleccionó el CM de uno de sus estudiantes para ser objeto de análisis. Los datos se analizaron a partir de la identificación de frases, procedimientos o palabras clave contenidas en la descripción de las once conceptualizaciones que sobre pendiente han sido reportadas por Moore-Russo, Conner y Rugg (2011) y el método de Análisis de Contenido sugerido por Bardin (2002) empleado principalmente en las notas de clase. Por lo cual, el marco conceptual de esta investigación se integra por: la definición de pendiente, el constructo conceptualización de pendiente y la acepción de notas de clase (Arce, 2018; Lehman, 1980; Moore-Russo et al., 2011).

Los resultados muestran que las conceptualizaciones de pendiente predominantes en las respuestas de los profesores al resolver diversas tareas que involucran dicho concepto fueron: razón algebraica, propiedad física, indicador de comportamiento, coeficiente paramétrico y la conceptualización trigonométrica. Mientras que, las conceptualizaciones razón algebraica, trigonométrica y coeficiente paramétrico fueron las que más promueven al enseñar el concepto y lo hacen enfatizadas en lo procedimental, cuando definen, explican, ejemplifican y proponen actividades vinculadas al mismo. En ambos casos, tales conceptualizaciones se desprenden de la definición analítica del

concepto de pendiente, lo cual induce, por un lado, a la formación de la idea de que la pendiente tiene sentido sólo en el contexto intramatemático y, por otro lado, privilegian el desarrollo del conocimiento procedimental en detrimento del conocimiento conceptual. Al confrontar lo que saben y lo que enseñan, los resultados han evidenciado que la mayoría de los profesores poseen ideas relativas a la mayoría de las conceptualizaciones de pendiente. Sin embargo, al enseñar dicho concepto, suelen hacer a un lado la mayoría de sus ideas y centran su atención en la discusión de algoritmos implicados en el cálculo de la pendiente y la reproducción de estos. Por lo cual, los resultados sugieren la necesidad de la capacitación de los profesores para que desarrollen un conocimiento más integral acerca de la pendiente y tengan la posibilidad de mejorar su enseñanza y su consiguiente aprendizaje.

Abstract

This study aimed to identify what slope's conceptualizations have high school teachers and which ones they teach their students when they approach this concept in the classroom. To achieve that ten in-service math teachers participated in this qualitative study and, likewise, we used the math notebook class notes (CM) of ten eleventh grade students who had already completed the slope topic in their respective courses. Participants come from 10 different schools located mainly in the central region of the State of Guerrero, Mexico.

The data collection was carried out in two stages: in the first, a Task-Based Interview that included 12 tasks involving the different representations of the slope was designed and applied to the teachers, and, in the second, the CM was selected one student from each teacher to be analyzed. The eleven conceptualizations that have been reported on by Moore-Russo, Conner and Rugg (2011) was used to analyze the teacher' productions trough the identification of phrases, procedures or keywords identified in those. On the other hand, the Content Analysis method suggested by Bardin (2002) was used to analyze the class notes. Therefore, the conceptual framework of this research is integrated by the definition of slope, the construct conceptualization of slope and the meaning of class notes (Arce, 2018; Lehman, 1980; Moore-Russo et al., 2011).

The results indicated that the prevailing conceptualizations of slope in teachers' answers when solving different tasks that involve this concept were: algebraic ratio, physical property, behavioral indicator, parametric coefficient, and trigonometric conceptualization. While, the algebraic, trigonometric, and parametric coefficient conceptualizations were those that they most promote when teaching the concept emphasizing in the procedural knowledge, when they define, explain, illustrate, and propose activities related to it. In both cases, such conceptualizations emerge from the analytical definition of the concept of slope, which causes, on the one hand, the formation of the idea that the slope makes sense only in the intra-mathematical context and, on the other hand, promotes the development of procedural knowledge in detriment of conceptual

knowledge. When we confronted what they know and what they teach, the results showed that most teachers have the most of eleven slope's conceptualizations proposed by Moore-Russo et al. (2011). However, when teaching this concept, it seems that they use the conceptualizations the have and they focus their attention on the discussion of algorithms involved in the calculation of the slope and the reproduction of these. Therefore, the results suggest that teachers need to be trained to develop a more complete knowledge of the slope and thus have the possibility of improving their teaching and, consequently, the learning of their students.

INTRODUCCIÓN

Esta investigación asume como objeto de estudio a las conceptualizaciones de pendiente. Las cuales son representaciones inherentes a la pendiente, concepto protagonista en el currículum de matemáticas de México y otros países donde es objeto de enseñanza y aprendizaje desde la escuela secundaria hasta el superior (Dolores, Rivera y Moore-Russo, 2020; Moore-Russo et al., 2011; Stump, 1999). La pendiente es un prerrequisito fundamental para desarrollar un pensamiento matemático avanzado, debido al vínculo con otros conceptos matemáticos y fenómenos de la vida real (Carlson, Oehrtman y Engelke, 2010; Confrey; Smith, 1995; Stump, 2001a; Noble, Nemirovsky, Wright y Tierney, 2001). Por tanto, su comprensión no es fácil, ya que va más allá de solo considerarlo como un cálculo algebraico relacionado a la inclinación de una recta (Moore-Russo et al., 2011; Mudaly y Moore-Russo, 2011; Stanton y Moore-Russo, 2012; Stump, 1999, 2001a, 2001b).

Desde la década de los noventa, el estudio de pendiente ha sido un tema vigente en la agenda de la investigación en educación matemática. Algunos de los trabajos que se han publicado han documentado *errores y dificultades* en estudiantes de diferentes niveles educativos al trabajar la pendiente (por ejemplo, Barr, 1980, 1981; Moschkovich, 1990; Azcárate, 1992; Schoenfeld, Smith y Arcavi, 1993; Zaslavsky, Sela y Leron, 2002; Herbert y Pierce, 2008; Teuscher; Reys, 2010, 2012; Cho y Nagle, 2017; Dolores-Flores, Rivera-López y García-García, 2018). También se ha explorado el *conocimiento en profesores y estudiantes* a través de las múltiples conceptualizaciones que acepta el concepto (por ejemplo, Stump, 1999, 2001; Moore-Russo et al., 2011; Mudaly y Moore-Russo, 2011; Nagle, Moore-Russo, Viglietti y Martin, 2013; Newton y Poon, 2015; Casey y Nagle, 2016; Nagle, Casey y Moore Russo, 2017, Rivera, Salgado y Dolores, 2019).

Otros estudios, han *explorado el currículum oficial* con la intención de conocer qué conceptualizaciones de pendiente son favorecidas en el currículum matemático estadounidense (Stanton y Moore-Russo, 2012; Nagle y Moore-Russo, 2014) y el mexicano (Dolores, Rivera y Moore-Russo, 2020). Con relación al *currículum potencial*, se han explorado las conceptualizaciones consideradas por profesores de matemáticas para el diseño de materiales de instrucción (Nagle y Moore–Russo, 2013), también se ha investigado sobre qué conceptualizaciones de pendiente tienen presencia en los libros de textos (Dolores e Ibáñez, en prensa; Choy, Lee y Mizzi, 2015) así como una exploración sobre los elementos no textuales en libros de texto estadounidenses y coreanos, donde la pendiente fue uno de los tópicos analizados (Kim, 2012). Sin embargo, aún existen vacíos y necesidades por satisfacer en esta línea de investigación. Stanton y Moore-Russo (2012) señalan la necesidad de investigar cómo el profesor aborda en clase este concepto, debido al poco conocimiento que se tiene en la educación matemática de esta situación, mientras que, Nagle et al. (2013) plantean la búsqueda de la existencia de una relación jerárquica entre conceptualizaciones de pendiente, o bien cómo las imágenes personales de los profesores, acerca de la pendiente, se relacionan con su práctica.

Si bien es cierto que los trabajos pioneros referidos a las conceptualizaciones de pendiente (Moore-Russo et al., 2011; Stump 1999) se centraron en el conocimiento de profesores y estudiantes norteamericanos. En México muy poco se sabe al respecto, debido a que la investigación centrada en la pendiente y sus conceptualizaciones es reciente. Algunos trabajos que han sido reportados muestran parcialmente las dificultades que tienen los estudiantes para conectar la pendiente con la razón de cambio (por ejemplo, Dolores, Alarcón y Albarrán, 2002; Dolores, García y Gálvez, 2017; Dolores-Flores et al., 2018; Nájera, 2015). En otros, se ha encontrado que, en los libros de texto de bachillerato, las ideas geométricas y variacionales del concepto están desconectadas (Martínez, 2005). Recientemente, utilizando como marco a las conceptualizaciones de pendiente, Dolores et al. (2020) reportan las que son favorecidas por el currículum matemático desde nivel básico hasta el bachillerato, mientras que Dolores e Ibáñez (en prensa) exhiben las que son promovidas por los libros de texto del mismo nivel. Siguiendo esta línea, Rivera et al. (2019) documentan las que tienen los estudiantes universitarios, sin embargo, estas no han sido exploradas en profesores de bachillerato y más aún, poco se sabe acerca de lo que discuten y enseñan en el aula con sus estudiantes.

Por ello, en el presente estudio se propone dar cuenta de qué conceptualizaciones de pendiente poseen profesores de bachillerato y cuáles son las que enseñan a sus estudiantes en un contexto geográfico específico de México. Para lograrlo, se realizaron dos estudios exploratorios, el primero se centra en investigar qué conceptualizaciones de pendiente evidencian profesores cuando resuelven tareas que involucran tal concepto y, el segundo explora las conceptualizaciones de pendiente presentes en el contenido que enseñan a través de las notas de clase de sus estudiantes. Dichas exploraciones siguen las líneas de investigación marcadas por Nagle et al. (2013) y Stanton y Moore-Russo (2012) y en consecuencia atienden necesidades que existen en el campo de la investigación en la educación matemática.

Por consiguiente, en esta investigación se planteó responder la siguiente pregunta: ¿qué conceptualizaciones de pendiente poseen los profesores del bachillerato y cuáles enseñan a sus estudiantes? Esto dio la pauta para establecer una comparación entre ambos escenarios y otros que han centrado su interés en el conocimiento de estudiantes y el promovido por el currículo matemático de este país (Rivera et al., 2019; Dolores et al., 2020). Finalmente, se aportan elementos para la construcción de un marco referencial sobre la enseñanza y aprendizaje de la pendiente en el nivel bachillerato.

Los resultados de esta investigación, servirán para que futuros estudios cuyo interés se centre en el diseño y aplicación de propuestas metodológicas orientadas hacia la mejora de la enseñanza y aprendizaje de este concepto en el bachillerato, tengan como referencia lo que saben y enseñan los profesores y, posiblemente lo que están aprendiendo los estudiantes respecto a la pendiente. Esto, aportará elementos para que dichas propuestas ganen en efectividad. También, con una óptica aún más ambiciosa, los hallazgos de esta investigación pudieran servir para que los diferentes programas de formación y actualización de profesores de matemáticas del país, conozcan las áreas de oportunidad de los profesores cuando trabajan con este tipo de conceptos críticos en la matemática escolar (Moore- Russo et al., 2011; Rivera et al., 2019) y propongan cursos que se centren en la reflexión sobre la definición este concepto y ofrezcan oportunidades para construir relaciones entre las diversas conceptualizaciones de pendiente. De lo contrario, seguirá la práctica centrada en la memorización de fórmulas, así como la discusión de algoritmos y procedimientos tal y como lo advierte Dolores et al. (2018) y por consiguiente el desarrollo de nociones conceptuales se relegará a un segundo plano, produciendo en los estudiantes una endeble comprensión de conceptos como la pendiente que son fundamentales en su formación (Báez, Cantú y Gómez, 2007; Stump, 1999, 2001a, 2001b; Walter y Gerson, 2007).

El documento está organizado en cinco capítulos, en los cuales se puntualizan las características de esta investigación, el análisis de los datos recabados y las conclusiones. En el capítulo 1, se expone el problema de investigación, los antecedentes que dieron sustento y permitieron tener una aproximación al problema aquí planteado, la pregunta, los objetivos y la justificación de la presente investigación. En el capítulo 2, se describe el contenido matemático del estudio y marco referencial conformado por las conceptualizaciones de pendiente (Moore-Russo et al., 2011; Stump, 1999) y las notas de clase (Arce, 2018). En el capítulo 3, se especifican las características metodológicas de esta investigación: tipo de estudio, población participante y condiciones tomadas en cuenta para su selección, los instrumentos para la recopilación de datos y su validación y, la organización y análisis de los datos. En el capítulo 4, se presentan los resultados del estudio. Y finalmente, en el capítulo 5 se exponen: la discusión y conclusiones, así como las perspectivas futuras de la investigación.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 ANTECEDENTES

Este capítulo está dedicado al planteamiento del problema. Para ello en primer lugar, se describen y analizan los antecedentes en función de lo reportado en la literatura especializada respecto al conocimiento del profesor sobre la pendiente, así como de las notas de clase como instrumentos que dan cuenta de lo que los profesores enseñan. Y en segundo lugar, como derivación de los antecedentes, son planteados el problema de investigación, las preguntas y los objetivos de la misma.

1.2 El profesor y su conocimiento sobre pendiente

Diversas investigaciones en el campo de la educación matemática se han interesado por estudiar el conocimiento del profesor y los efectos de éste en la enseñanza y el aprendizaje de los alumnos (por ejemplo, Adler, 2000; Gueudet y Trouche, 2009, 2010; Guzmán y Kieran, 2013; Páez, Guzmán, y Zambrano, 2015; entre otros), debido a que su conocimiento es base fundamental y juega un rol importante en la naturaleza y el desarrollo de su práctica (Adler, 2000; Byerley y Thompson, 2017; Gueudet y Trouche, 2010).

Al respecto, algunos estudios han puntualizado que los profesores de matemáticas tienen dificultades para comprender conceptos matemáticos propios del nivel académico donde estos inciden (por ejemplo, Artzt y Armour-Thomas, 1999; Gueudet y Trouche, 2009, 2010; Guzmán y Kieran, 2013; entre otros), situación que repercute negativamente cuando estos deben enseñarlos (Artzt y Armour-Thomas; 1999; Byerley y Thompson, 2017). Por ejemplo, el concepto de la pendiente es uno de ellos, en diversas investigaciones se han evidenciado las dificultades que estos tienen para conectar la ideas geométricas y variacionales del mismo, situación que trae consigo una endeble comprensión (Dolores-Flores et al., 2018; Nagle et al., 2013; Stump, 2001a; Walter y Gerson, 2007) y por tanto, una práctica poco reflexiva sobre su definición y el vínculo de esta con las diversas conceptualizaciones que acepta (Stump, 1999).

Desde la década de los 90, el análisis y caracterización del conocimiento del profesor de matemáticas acerca del concepto de la pendiente ha interesado a los investigadores. Al respecto Stump (1999) y Moore-Russo et al. (2011) han investigado el conocimiento de profesores norteamericanos y descubrieron en ellos múltiples representaciones de la pendiente cuando resuelven tareas que involucran tal concepto. Posteriores investigaciones las han llamado conceptualizaciones de pendiente. En un primer estudio, Stump (1999) identificó siete conceptualizaciones en profesores de 9º a 12º grado: *razón algebraica* (A), *razón geométrica* (G), *propiedad funcional* (F), *propiedad física* (P), *conceptualización trigonométrica* (T), *coeficiente paramétrico* (PC) y *conceptualización en cálculo* (C). Posteriormente, Stump (2001) agrega, *situación mundo real* (R), la cual la clasifica en *situaciones físicas* (RP) y *situaciones funcionales* (RF). Y finalmente, Moore-Russo et al. (2011) identifica en estudiantes de posgrado tres conceptualizaciones más: *indicador de comportamiento* (B), *constante lineal* (L) y *propiedad determinante* (D), tal como se describen en la Tabla 1.

Tabla 1

Conceptualizaciones de pendiente

CONCEPTUALIZACIÓN	DESCRIPCIÓN	CÓDIGO
Razón Algebraica	Cambio en y entre cambio en x, razón con la expresión algebraica $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ o $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.	A
Razón Geométrica	La razón del desplazamiento vertical y desplazamiento horizontal en la gráfica de una recta. Subida sobre corrida en el gráfico de una recta.	G
Propiedad Funcional	Razón de cambio constante entre dos variables encontradas en representaciones múltiples, incluyendo tablas y descripciones verbales (por ejemplo, cuando *x* incrementa en 2, *y* incrementa en 3).	F
Situación Mundo Real	Situación física (estática, por ejemplo: una rampa, escalera, techos, calles, etc.) o situación funcional (dinámica, por ejemplo: distancia en función del	R

	tiempo, volumen en función del tiempo, etc.)	
Indicador de Comportamiento	Número real con signo que indica crecimiento (+), decrecimiento (−), tendencia horizontal de la línea (0). Si no es cero, indica la intersección con el eje x.	B
Propiedad Física	Descripción de una recta utilizando expresiones como grado, inclinación, tendencia, ladeo, declive, ángulo, etc.	P
Coeficiente Paramétrico	Coeficiente m (o su valor numérico) en $y = mx + b$ ó $y - y_1 = m(x - x_1)$.	PC
Trigonométrica	Propiedad relacionada con el ángulo de una recta que forma con una recta horizontal; tangente del ángulo de inclinación.	T
En Cálculo	Medida relacionada con la derivada como la pendiente de la tangente a una curva, de una recta secante, o cómo razón de cambio instantánea para cualquier función (incluso una no lineal).	C
Propiedad Determinante	Propiedad que determina si las rectas son paralelas o perpendiculares entre sí; además de determinar una recta si se da un punto.	D
Constante Lineal	Propiedad constante y única para las rectas; pendiente de la recta que no es afectada por la traslación de esta. Es una propiedad constante en la colinealidad de los puntos de una recta, independiente de la región del gráfico lineal que se está considerando, es decir que dos puntos cualesquiera de la recta determinan la pendiente.	L

Nota: Adaptada de Nagle y Moore-Russo (2014) «Traducción propia»

En este sentido, las conceptualizaciones de pendiente y la búsqueda de las mismas se han constituido como un eje referencial para otros estudios. Tal es el caso de Nagle et al. (2013) quienes comparan las conceptualizaciones de pendiente que tienen estudiantes y profesores en nivel superior y encuentran resultados poco coincidentes, ya que la conceptualización *indicador de comportamiento* fue la más sobresaliente en los estudiantes, mientras que en los profesores fue la conceptualización *situaciones mundo real*. Este estudio, evidenció el escaso razonamiento covariacional en los estudiantes y la poca convergencia entre lo que saben los profesores y lo que aprenden los estudiantes (Nagle et al., 2013).

Por otra parte, Nagle y Moore–Ruso (2013) exploraron las conceptualizaciones de pendiente en profesores de matemáticas norteamericanos y las que utilizan para elaborar materiales de instrucción, los resultados indican que *razón algebraica*, *razón geométrica* e *indicador de comportamiento* son las que sobresalen en su conocimiento, mientras que *indicador de comportamiento, razón geométrica* y *propiedad física* son las que más utilizan al elaborar materiales para orientar la enseñanza y aprendizaje de la pendiente. En este sentido, Hoffman (2015) encuentra que la conceptualización que predomina en los profesores de secundaria canadienses (grado 6-8) es la *razón algebraica* seguida de la *situación mundo real* asociada a objetos físicos, encontrando escasa la *conceptualización trigonométrica*, *conceptualización en cálculo*, *propiedad determinante* y *constante lineal*. Estas investigaciones coinciden en que los profesores norteamericanos de este nivel educativo poseen una perspectiva procedimental de la pendiente.

El estudio de las conceptualizaciones no ha sido solo en profesores, también se han explorado en estudiantes (por ejemplo, Casey y Nagle, 2016; Rivera et al., 2019; Stump, 2001a, entre otros), las que están presentes en el currículo estadounidense y mexicano (Dolores et al., 2020; Nagle y Moore-Russo, 2014; Stanton y Moore-Russo, 2012), y en libros de texto (Dolores e Ibáñez, en prensa; Martínez, 2005; Kim, 2012,). Sin embargo, aún hay vacíos y necesidades por satisfacer en esta línea de investigación. Por ejemplo, Stanton y Moore-Russo (2012) señalan que es escaso el conocimiento que se tiene en educación matemática acerca de cómo los profesores abordan el concepto de pendiente en sus clases. Por su parte, Nagle et al. (2013) plantean la búsqueda de la existencia de una relación jerárquica entre conceptualizaciones de pendiente, o bien cómo las imágenes personales de los profesores, acerca de la pendiente, se relacionan con su práctica. También, sugieren centrarse en el papel que juegan los profesores de educación secundaria (grado 6-12) en el desarrollo de las conceptualizaciones de los estudiantes en la universidad.

En otro orden de ideas, la investigación centrada en el conocimiento del profesor acerca de la pendiente tiene otra arista. En los últimos años, algunos investigadores se han interesado por los significados que estos atribuyen a dicho concepto (por ejemplo, Byerley y Thompson, 2017; Coe, 2007; Thompson, 1994; Thompson y Thompson, 1994). Thompson (2013) afirmó que, el conocimiento matemático más importante que deben tener los docentes, reside en los significados matemáticos que tienen y tratan de enseñar a sus estudiantes. De igual manera, Byerley y Thompson (2017) señalaron que en virtud de que el concepto de razón de cambio es central en la educación secundaria, es importante comprender hasta qué punto, los significados de los maestros para este concepto y otros relacionados son suficientes para que estos apoyen a sus estudiantes en su comprensión.

En este orden de ideas, Thompson (2016) desarrolló un instrumento que permite diagnosticar los significados matemáticos que tienen maestros de secundaria (MMTsm). El cual, Byerley y Thompson (2017) aplican a 251 profesores de dicho nivel, con la finalidad de explorar los significados que tienen para la pendiente, medida y razón de cambio. Los resultados mostraron que la mayoría de los maestros, transmitieron significados principalmente aditivos para pendiente y razón de cambio. Pocos transmitieron la idea de que una razón de cambio compara los tamaños relativos de cambios entre dos cantidades. En general, los profesores evidenciaron una débil comprensión para la medición. Razón por la cual, sus significados fueron limitados para la pendiente y razón de cambio. Este hallazgo es similar a lo reportado por Thompson (2013), quien señaló que los profesores de secundaria difícilmente vinculan la pendiente y la razón de cambio, debido a los escasos significados que estos desarrollan respecto al concepto de pendiente.

Pues bien, de acuerdo con la revisión realizada se ha podido constatar que la investigación centrada en el conocimiento del profesor acerca de la pendiente y sus múltiples conceptualizaciones y/o significados, es un tema vigente en la agenda de la investigación en matemática educativa de algunos países. Sin embargo, la mayoría de los trabajos se han realizado con profesores norteamericanos y algunas partes de Medio Oriente. A pesar de ello, existen países como México donde no se han realizado estudios de este tipo. Dado que son circunstancias educativas específicas diferentes de las que prevalecen en otros países, tales como: el perfil y formación de los profesores, currículum de matemáticas, libros de texto, etc. Es, por tanto, razonable suponer que las conceptualizaciones de pendiente que poseen los profesores mexicanos tengan sus propias connotaciones. Dichas razones, han despertado nuestro interés por estudiarlas en la presente investigación.

1.3 Las notas de clase como objeto de estudio

Para conocer las conceptualizaciones de pendiente que los profesores enseñan recurrimos a las notas de clase de sus estudiantes (mismas que representa un registro de instrucción previa). Recientemente, la investigación ha encontrado en las notas de clase un aliado, que, como objeto de estudio y fuente documental, puede dar cuenta de los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como la labor del maestro y del alumno como actores principales en la construcción del conocimiento (Arce, 2018; Chartier, 2009; Viñao, 2006). Sin embargo, hasta ahora los hallazgos han sido relativamente escasos, ya que la mayoría de las investigaciones se han centrado en analizar cómo son las notas de los estudiantes, desde una perspectiva psicopedagógica en la que el contenido no se considera variable de investigación (por ejemplo, Badger et al., 2001; Espino, 2012; Gil, Ávila y Ferrer, 2011; Hartley y Davies, 1978; Van Meter et al., 1994).

Con respecto a la investigación centrada en las notas de clase de matemáticas, los hallazgos sugieren que esta, representa un área de oportunidad en el campo de la investigación en educación matemática (Arce, 2018). Ya que, hasta ahora, algunos de los hallazgos que han sido reportados se refieren a las características de estas; cuando los estudiantes resuelven problemas (Mercado, 2003) o en dependencia del medio expositivo que implementa el profesor en la clase (Iannone y Miller, 2019; Rensaa, 2014). En otros, se ha comparado el contenido que exponen los profesores con las notas que toman sus estudiantes (Andrà, 2013; Arce y Conejo, 2017; Arce, Conejo y Ortega, 2016). También, se ha estudiado en la instrucción matemática avanzada, el contenido informal y como el modo en que este es presentado infiere en las notas que toman los estudiantes (Fukawa-Connelly, Weber y Mejía-Ramos, 2017). Con otra perspectiva, Valenzuela y Dolores (2011) comparan el curriculum oficial y el impartido en el bachillerato, referido a los temas: sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones de segundo grado e introducción a las funciones. Utilizando las notas de clase de los estudiantes como un referente central para explorar la instrucción del profesor.

Pues bien, la revisión realizada de la literatura, sugiere que un estudio que utilice las notas como un “intermediario” para obtener información de lo que enseñan los profesores de matemáticas en sus clases, acerca de la pendiente sería novedoso y factible, ya que estas, pueden brindar información muy rica sobre este aspecto (Arce, 2016; 2018; Viñao, 2006). Por tanto, la investigación que realizamos utiliza las notas como un recurso, a través del cual, obtenemos información acerca de qué conceptualizaciones de pendiente utilizan los profesores al enseñar este contenido a sus estudiantes.

En conclusión, hasta ahora, la mayoría de las investigaciones, han documentado la problemática existente desde una perspectiva global respecto al concepto de la pendiente. Sin embargo, México y el estado de Guerrero en consecuencia, no forman parte de la estadística. De hecho, no se han encontrado publicaciones en nuestro campo que den cuenta de cómo enseñan la pendiente, ni mucho menos de qué conceptualizaciones utilizan los docentes cuando la enseñan. ¿Cómo podríamos mejorar la enseñanza y el aprendizaje de este concepto si poco o casi nada se sabe al respeto? Empero, es necesario precisar qué se ha hecho en México y lo que falta por hacer. En el siguiente epígrafe nos ocupamos de este particular.

1.4 La investigación en México respecto al concepto de pendiente

En México, la enseñanza del concepto de pendiente es obligatoria, su tratamiento inicia en educación secundaria (SEP, 2011), se extiende en el bachillerato (SEP, 2013a; 2013b; 2013c) y trasciende a los estudios universitarios (Rivera y Dolores, 2017). Por lo tanto, se esperaría que en condiciones escolares los estudiantes desarrollaran habilidades y capacidades para trabajar con este concepto, producto de la compresión desarrollada a través de la instrucción (Byerley y Thompson, 2017; García, 2006), sin embargo, existen trabajos de investigación que muestran que estas habilidades y capacidades no se desarrollan en porciones significativas de estudiantes, incluso, algunas señalan que los mismos profesores no las tienen. A continuación, mostramos trabajos que fundamentan la problemática vinculada al concepto de pendiente en México.

Al realizar un estudio didáctico del concepto de pendiente en 10 libros de texto del bachillerato, Martínez (2005) encontró que las ideas geométricas y variacionales del concepto se presentan de manera desconectada, además del uso excesivo de ejemplos y ejercicios propuestos con un enfoque procedimental y un escaso tratamiento reflexivo sobre las ampliaciones de este concepto. Al respecto, el autor señala que este tratamiento al ser retomado en su práctica por algunos profesores (Báez et al., 2007; Dolores-Flores et al., 2018) es fuente de errores que cometen los estudiantes al resolver tareas que involucran este concepto, de entre los cuales, los más frecuentes que encuentra en estudiantes del bachillerato son: definir la pendiente de una recta como su ángulo de inclinación y asociar el valor de la pendiente con el valor numérico donde la recta interseca el eje de las ordenadas o abscisas (Martínez, 2005).

Por otra parte, la mayoría de los estudios que han sido reportados, se han interesado por estudiar la razón de cambio, tal es el caso de Dolores et al. (2002) quienes al explorar en estudiantes y profesores de secundaria y bachillerato, sus concepciones alternativas entorno a la lectura de gráficas cartesianas que representan movimiento físico, encuentran que tanto alumnos como profesores asocian: mayor velocidad media con la gráfica cuya ordenada presenta mayor altura, velocidad negativa con gráficas cuyas ordenadas son negativas y al estimar la velocidad media a través de una gráfica dan la magnitud de la ordenada. Estos resultados evidenciaron las dificultades que tienen tanto estudiantes como profesores para comprender el concepto de razón de cambio.

En ese mismo sentido, Nájera (2015) planteó situaciones que involucraron el cálculo de la pendiente de una recta, la velocidad, rapidez y aceleración a estudiantes recién egresados del bachillerato, y encontró que utilizan razones de cambio, pero no son conscientes de que se trata del mismo modelo matemático, esto por desconocer el devenir de las fórmulas, evidenciando así una desconexión entre pendiente y razón de cambio.

En esta línea, Dolores et al. (2017) al estudiar la estabilidad y el cambio conceptual en estudiantes del bachillerato sobre algunas razones de cambio, reportan que los cambios producidos fueron: de interpretar a la velocidad en una gráfica distancia-tiempo “como punto” o como “magnitud de la distancia” a la concepción geométrica del “desplazamiento vertical” respecto del “desplazamiento horizontal” y del uso de la fórmula $v = d/t$ a la utilización del cociente de diferencias $v = \Delta s/\Delta t$. A este respecto, los autores señalan que la concepción que asocia a las ordenadas de mayor magnitud de una gráfica (estatura-tiempo), como las que representan la “mayor rapidez de crecimiento” fue la que se mantuvo estable. Los resultados muestran que a pesar de la instrucción los estudiantes mantienen algunas de sus concepciones alternativas entorno al concepto de razón de cambio.

En un estudio reciente, Dolores-Flores et al. (2018) al explorar las conexiones matemáticas de estudiantes preuniversitarios cuando resuelven tareas que implican razones de cambio, reportan, que la mayoría considera desconectada la pendiente de la velocidad, rapidez y aceleración, incluso los hallazgos muestran el predominio del conocimiento procedimental y la escasa comprensión conceptual. Una hipótesis sugerida por los autores, es que la enseñanza-aprendizaje de la pendiente en el bachillerato prioriza lo procedimental y el desarrollo de nociones conceptuales queda relegado a un segundo plano, tal como lo sugieren Lingefjärd y Farahani (2017).

Recientemente y con una nueva perspectiva, la investigación en México ha retomado con más fuerza el estudio de la pendiente, ahora, el principal interés radica en conocer la presencia de las múltiples conceptualizaciones que acepta dicho concepto en los diferentes componentes que integran el sistema educativo, esto con la finalidad de incidir en la mejora de la enseñanza y aprendizaje del mismo. Sin embargo, al ser una temática nueva, los hallazgos hasta ahora reportados son escasos. A este respecto, uno de los estudios pioneros en esta dirección es el de Rivera y Dolores (2018), quienes al explorar las conceptualizaciones en estudiantes del bachillerato, encuentran que las más recurrentes en sus respuestas son las que se vinculan a las ideas geométricas del concepto, tales como: *propiedad física, razón algebraica y coeficiente paramétrico,* seguidas con menor énfasis de, *razón geométrica*, *constante lineal, propiedad determinante*, *indicador de comportamiento*, *cálculo* y la *conceptualización trigonométrica.* A este respecto, los autores señalan que los resultados se deben a que los estudiantes tienen dificultades para interpretar la pendiente como una razón de cambio, situación que puede estar vinculada al tratamiento que el profesor da a este concepto, en el cual, parece ser que se enfatiza más en lo procesal que en lo conceptual.

En este sentido, Rivera et al. (2019) exploran las conceptualizaciones de pendiente en estudiantes universitarios y encuentran que las evocadas con mayor frecuencia al resolver tareas que involucran la pendiente son: *propiedad física y razón algebraica,* seguidas con menor énfasis de, *propiedad determinante, constante lineal, coeficiente paramétrico, razón geométrica, indicador de comportamiento y situación mundo real-situación física.* Este estudio evidenció la desconexión entre la pendiente y la razón de cambio en los razonamientos de los estudiantes, resultado similar a lo encontrado en estudiantes del bachillerato. Al respecto, se tiene la hipótesis de que lo encontrado es producto de la instrucción, probablemente porque los profesores no propician este vínculo o los miran como conceptos aislados. Al respecto, Stump (1999) y Nagle et al. (2013) muestran resultados en profesores estadounidenses que respaldan dicha hipótesis. Sin embargo, en México hacen falta estudios que lo confirmen o refuten.

Al explorar las conceptualizaciones de pendiente presentes en el currículo de Matemáticas de nivel básico y medio superior (grado 1-12), Dolores et al. (2020) encuentran que se promueven por lo menos diez, de entre las cuales, la conceptualización *propiedad funcional* es la que tiene un énfasis principal seguida de *situación mundo real*, *coeficiente paramétrico*, *constante lineal* e *indicador de comportamiento*, al respecto, los autores concluyen que la escasa presencia de las otras ocho conceptualizaciones y el tratamiento desconectado que sugiere el plan de estudios, puede conducir a una comprensión débil del concepto de la pendiente en los estudiantes.

Continuando con esta línea, al explorar qué conceptualizaciones de pendiente están presentes y cuáles predominan en libros de texto de matemáticas del bachillerato, Dolores e Ibáñez (en prensa) encuentran la presencia de la mayoría de las conceptualizaciones, con predominio de aquellas que se desprenden de la definición analítica de pendiente como *coeficiente paramétrico, razón algebraica* y la *trigonométrica*, además, de la que se aplica dentro de la misma geometría en la determinación del paralelismo o perpendicularidad entre rectas como lo es la *propiedad determinante.* En relación a lo encontrado, los autores señalan que los textos que utilizan los profesores, difícilmente contribuyen a la comprensión de la pendiente. Ya que, por un lado, inducen a la formación de la idea de que la pendiente tiene sentido sólo en el contexto intramatemático, y por otro lado, privilegian el desarrollo del conocimiento procedimental en detrimento del conocimiento conceptual. Otro aspecto fundamental que encuentran en los libros los autores es la desconexión entre las diversas conceptualizaciones, resultado similar a lo encontrado en el currículum por Dolores et al. (2020).

Pues bien, los hallazgos hasta ahora reportados acerca de las conceptualizaciones de pendiente, han evidenciado las que tienen estudiantes de bachillerato y universitarios (Rivera 2020; Rivera et al., 2019), las que son promovidas en el currículum (Dolores et al., 2020) y en los libros de texto (Dolores e Ibáñez, en prensa). Sin embargo, no han sido exploradas, las que poseen los profesores guerrerenses al igual que las que enseñan a sus estudiantes cuando abordan dicho concepto. Por lo tanto, con este estudio se pretende llenar este vacío y aportar elementos para la construcción de un marco referencial entorno a la enseñanza y aprendizaje de la pendiente desde esta perspectiva.

1.5 Planteamiento del problema, pregunta de investigación y objetivos

La revisión que hemos realizado en la literatura existente acerca de la pendiente, indica que los investigadores se han interesado por los errores, dificultades y confusiones en estudiantes y profesores (Dolores et al., 2002; Dolores, García y Gálvez, 2017; Dolores-Flores et al., 2018, Martínez, 2005; Nájera, 2015). Otros se han interesado por la desconexión entre la pendiente y razón de cambio, en el conocimiento de los estudiantes (Dolores-Flores et al., 2018, Nájera, 2015, Rivera et al., 2019), otros las han estudiado en los libros de texto (Martínez, 2005; Dolores e Ibáñez, en prensa) y en el currículo (Dolores et al., 2020). Algunos investigadores han señalado que el conocimiento del profesor y la instrucción que este realiza, influyen en el aprendizaje de los estudiantes (Byerley y Thompson, 2017; Dolores-Flores et al., 2018; García, 2006), el cual ha mostrado ser procedimental y escasamente conceptual (Dolores-Flores et al., 2018; Nájera, 2015; Rivera y Dolores, 2018; Rivera et al., 2019; Wagener, 2009). Sin embargo, no se sabe qué conceptualizaciones de pendiente poseen los profesores guerrerenses y, menos aún, cuáles son las que enseñan a sus estudiantes cuando en sus clases tocan este tema. Estos cuestionamientos son coincidentes con los planteados por Nagle et al. (2013) y Stanton y Moore-Russo (2012), por lo que se insertan en esa misma línea de investigación.

Por tanto, la pregunta de investigación que se pretende responder en esta tesis es: ¿Qué conceptualizaciones de pendiente poseen los profesores del bachillerato y cuáles enseñan a sus estudiantes?

Para lograrlo se plantearon como objetivos:

- Identificar las conceptualizaciones de pendiente que manifiestan profesores de matemáticas cuando resuelven tareas que involucran tal concepto.
- Identificar, a través de las notas de clase de los estudiantes, las conceptualizaciones de pendiente que enseña el profesor cuando trata el concepto en la clase de matemáticas.

CAPÍTULO II

2. MARCO REFERENCIAL

La presente investigación, tiene por objetivo identificar las conceptualizaciones de pendiente que tienen profesores de matemáticas de bachillerato y las que enseñan a sus estudiantes cuando abordan dicho concepto en condiciones escolares. Por lo tanto, los elementos referenciales de este estudio son: la definición de pendiente, el constructo conceptualización de pendiente y la acepción de notas de clase. Estos elementos referenciales en su conjunto, nos permitirán interpretar los resultados, además de servir de guía para el diseño de la investigación. Estos serán abordados en las siguientes líneas a partir de la literatura especializada en Matemática Educativa.

2.1 ¿Qué es la pendiente?

La pendiente es definida por Lehman (1980) como coeficiente angular de una recta a la tangente de su ángulo de inclinación:

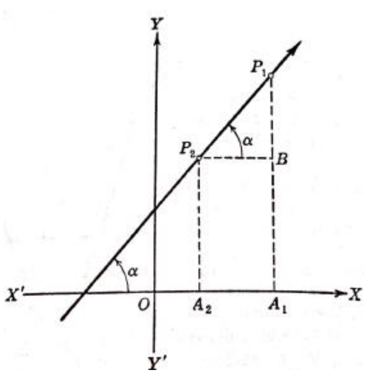


Figura 1. Imagen tomada de Lehman (1980, p. 17)

“The slope is often denoted by the letter m, therefore, we can write $m = \operatorname{tg} \alpha$. If $P_1(x_1, y_1)$ and $P_2(x_2, y_2)$ are two different points in a straight line, the slope of the line is: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ x_1 \neq x_2$” (p. 17)

En términos numéricos la pendiente se representa a través de una razón, la cual puede interpretarse de dos formas diferentes: como la razón que hace referencia a una medida de la inclinación de la recta y, como noción variacional, a la razón de cambio, la cual representa la variación de una variable respecto de otra entre dos puntos particulares, en referencia a las funciones cuya naturaleza está ligada a la covariación (Lobato y Thanheiser, 2002; Reyes-Gasperini, 2013; Stewart, 2012; Thompson y Carlson, 2017). En este sentido, la pendiente puede interpretarse como la forma más básica de la razón de cambio. Dicha conexión, contribuye a que ambos conceptos puedan representarse con el mismo modelo matemático $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (Stanton y Moore-Russo, 2012).

2.2 Conceptualización de pendiente

La conceptualización es parte del proceso cognitivo del ser humano que está asociado a la representación de una idea abstracta, que surge a partir de los conocimientos que se tienen sobre uno o diversos temas y que por algún motivo se buscan representar (D'Amore, 2011). Para Vergnaud (1996) el desarrollo cognitivo de una persona se da a través de la conceptualización, la cual permite el dominio progresivo de una diversidad de campos conceptuales. Este último entendido como un conjunto de conceptos que forman un sistema referido a una clase de situaciones, y que se originan en la actividad del sujeto en esas situaciones (Vergnaud, 2013). En este sentido, la conceptualización se inicia desde etapas muy tempranas y la enseñanza juega un papel irremplazable (Otero et al., 2014).

Al respecto, Otero et al. (2014) señala que la conceptualización puede describirse a través de dos aspectos: uno inmediato y otro mediato. El primero, refiere a la actividad del sujeto en acción y el segundo con el desarrollo de esquemas que permiten dominar un cierto campo conceptual el cual se produce a largo plazo, cuando el sujeto es expuesto a una gama de situaciones de cierta clase, durante un tiempo prologado de la vida, que incluso pueden ser años. De este modo, en esta investigación nos centramos en el aspecto inmediato de una conceptualización.

Por lo cual, entenderemos a una conceptualización de pendiente como una representación específica del concepto, necesariamente materializada a través del lenguaje verbal (oral, escrito e icónico) o no verbal (kinestésico). Esta representación tiene la facultad de hacer presente el concepto y los procedimientos matemáticos, con los cuales cada sujeto aborda e interactúa con el conocimiento matemático, es decir, registra y comunica su conocimiento sobre pendiente (Hoffman, 2015; Rivera et al., 2019; Stump, 1999, 2001a, 2001b). Por tanto, al hablar de una representación específica de pendiente nos referimos a una de las once conceptualizaciones reportadas por Moore-Russo et al. (2011), las cuales se describen en la Tabla 1.

2.3 Notas de clase

Desde una perspectiva escolar, el CM es un instrumento común del estudiante en las clases de muchos países (Arce, 2018), en él, se hacen anotaciones derivadas de las explicaciones o discusiones que tienen lugar en la clase de matemáticas (Badanell y Mahamud, 2007), por lo tanto, este instrumento puede aportar información rica sobre aspectos ligados al docente, al estudiante, al contenido abordado en el aula y al modo de abordarlo (Arce, 2016; 2018; Viñao, 2006). Constituyéndose así, como una fuente de información muy valiosa para realizar investigación en educación matemática (Badanell y Mahamud, 2007), siempre y cuando, se tomen en cuenta las diversas condiciones sobre las cuales se ha producido. Esto permitirá, la interpretación adecuada de lo que en él se encuentre (Arce, 2018).

En este sentido, la toma de apuntes o anotaciones como un proceso inherente al CM, es considerado como una tarea híbrida ya que es necesario tener presente y articular diferentes capacidades, como las asociadas a la comprensión del discurso, a la lectura y a la escritura (Arce, 2018). Esto lo vuelve una actividad compleja, que precisa de un alto nivel cognitivo, al relacionar la comprensión de la información presentada y los procesos de análisis y síntesis de la misma (Espino, 2008; Saint-Onge, 1997). A este respecto, existen dos hipótesis sobre la toma de apuntes: la de codificación, que da más importancia al proceso de elaboración de las notas y, la de almacenamiento, que da más trascendencia a la revisión posterior de las notas recogidas. Esta última, suele ser preponderante en las visiones de los estudiantes (Arce, 2018; Badger et al., 2001; Guasch y Castelló, 2002).

En esta línea, Monereo et al. (1999) establece dos perfiles en los estudiantes en relación a las notas que estos toman: *los copistas*, quienes buscan reproducir y plasmar fielmente la información anotando todo lo posible para su estudio posterior y, *los* *estratégicos*, quienes tratan de identificar y de seleccionar las ideas que constituyen la estructura del tema desde el punto de vista del docente, para el recuerdo de lo trabajado en clase.

Por otra parte, en la literatura especializada en Matemática Educativa, existen diferentes posturas acerca de lo que se entiende por notas de clase. Para Espino (2012), es la información recolectada por los estudiantes durante una exposición oral o escrita durante una clase, la cual, contiene aspectos de carácter personal y/o funcional. Por su parte, Fried y Amit (2003) indican que las notas de clase son una estructura que sirve de intermediario entre un producto sobre el que se trabaja (una conferencia, una exposición oral, etcétera) y una producción que debe obtenerse a partir de él (examen, trabajo, informe, etcétera). Mientras que, Nogueira (2005) las asume como el género discursivo que somete a su productor a la tensión entre la fidelidad y la reducción de una fuente, oral o escrita. Finalmente, para efectos de esta investigación, entenderemos a las notas de clase en el mismo sentido que Arce (2018), como el registro y almacenamiento de la información que se produce en la interacción entre el profesor y el alumno en el día a día escolar. Debido a que esta, se ajusta a los objetivos planteados para este estudio y da la pauta concebirlas como un medio que refleja el contenido que enseña el profesor en su clase.

CAPÍTULO III

3. METODOLOGÍA

Dado que, los objetivos de esta investigación son identificar las conceptualizaciones de pendiente que poseen los profesores y las que enseñan a sus estudiantes en sus clases de matemáticas, se emplearon recursos metodológicos diferenciados. En el primer caso utilizamos la Entrevista Basada en Tareas y en el segundo revisamos las notas de sus estudiantes a través del método de Análisis del Contenido. Para dar cuenta de cómo alcanzamos estos objetivos este capítulo está dedicado al planteamiento y argumentación de estos recursos metodológicos. Su estructura consta, en primer lugar, del bosquejo del tipo de estudio; en segundo, se describe la población participante y las condiciones consideradas para su selección; en tercero, son abordados tanto los instrumentos para la recopilación de los datos de esta investigación, como las etapas mediante las cuales se recopilaron. Por último, se muestra como fueron organizados y analizados los datos recopilados.

3.1 Tipo de estudio

La presente investigación es cualitativa. De acuerdo con Kothari (2004) con este tipo de estudios se busca la comprensión e interpretación del comportamiento humano, con un interés práctico y, con el propósito de ubicar y orientar la acción humana y su realidad subjetiva. En este sentido, la investigación cualitativa consiste en un conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo visible, lo que significa que se estudian los fenómenos en su contexto natural, intentando dar sentido o interpretarlos en función de los significados que las personas le dan (Denzin y Lincoln, 2005; Flick, 2014). En este orden de ideas, Merriam y Tisdell (2015) señalan que los investigadores cualitativos están interesados en examinar la realidad tal como otros la experimentan, a partir de la interpretación de sus propios significados, sentimientos, creencias y valores.

Ampliando la perspectiva anterior, Flick (2014) señala que la investigación cualitativa puede tener tres objetivos: describir un fenómeno en mayor o menor detalle inherente a las experiencias subjetivas de un individuo o grupo, identificar las condiciones subyacentes bajo las cuales persisten semejanzas o diferencias entre varios casos vinculados a individuos o grupos y desarrollar una teoría del fenómeno en estudio a partir del análisis de las evidencias empíricas. A este respecto, la presente investigación persigue objetivos que se corresponden con lo planteado por Flick (2014). No obstante, la detección de las conceptualizaciones de pendiente que poseen los profesores y las que enseñan a sus estudiantes, se logró a través de: la recopilación, representación, manipulación e interpretación de los datos recopilados. Procesos que según Schoenfeld (2007) son propios de la investigación cualitativa.

3.2 Participantes

Para la realización de esta investigación, participaron de forma voluntaria 10 profesores de matemáticas en servicio de Nivel Medio Superior (8 hombres y 2 mujeres). Los cuales, se encontraban impartiendo en una etapa final el curso de Geometría Analítica[1] y habían culminado el trabajo con la pendiente (SEP, 2013a). Los profesores, provenían de 10 instituciones educativas diferentes, ubicadas principalmente en la región centro del Estado de Guerrero, México. También, fueron seleccionados 10 cuadernos de notas matemáticas de sus estudiantes (uno por profesor), para analizarlas atendiendo a las conceptualizaciones de pendiente ahí presentes.

3.2.1 Elección y características de los participantes

El autor de esta investigación acudió a 14 escuelas de Nivel Medio Superior con la finalidad de invitar a los profesores de matemáticas, que imparten o han impartido los cursos de Geometría Analítica (grado 11) y Calculo Diferencial (grado 12), a participar en esta investigación. Para ello, primero se entrevistó a las autoridades correspondientes de cada institución (director y subdirector) con el objetivo de solicitar su permiso para invitar a los profesores e introducir en la institución una videocámara para la recopilación de datos.

[1] Llamamos en términos genéricos Geometría Analítica, ya que en dependencia del subsistema al que pertenece la escuela también puede ser Matemáticas 3 o Matemáticas 4.

En la totalidad de las escuelas se autorizó el permiso y posteriormente nos entrevistamos con 14 profesores de matemáticas que cubrían una parte del perfil que buscábamos para esta investigación. En este sentido, al dialogar con ellos acerca de nuestra intención, todos los profesores se mostraron interesados en participar y acto seguido se les aplicó una encuesta en la que se les preguntó: *datos personales*, *cómo estructura el tratamiento que da a los conceptos matemáticos en su clase* y *qué mecanismos utiliza para evaluar a los estudiantes*. Los resultados indicaron que 4 de los encuestados no consideran el CM como objeto de evaluación, lo cual orilló a descartarlos de este estudio, ya que según Fried y Amit (2003) las notas de clase que son objeto de evaluación, reflejan más características del contenido que enseña el profesor en el aula, debido al control que este ejerce sobre las mismas.

Posteriormente, se acordó que la totalidad del grupo en el que cada profesor impartía el curso de Geometría Analítica, facilitara sus notas de clase para que el autor de esta investigación las fotocopiara (solo el apartado dedicado a la pendiente). Esto se realizó un día viernes, para tener un fin de semana completo para realizar su reproducción y así no afectar las actividades escolares de los estudiantes, la devolución fue el lunes inmediato. Durante este tiempo el investigador se familiarizó con las notas y posteriormente se reunió con cada profesor para comparar el contenido de los cuadernos (para mirar su correspondencia) y determinar cuáles reflejaban de manera más completa (desde su punto de vista) el tratamiento del contenido en el aula. A este respecto, cada profesor manifestó tener conocimiento de las características que frecuentemente tenían las notas de sus estudiantes, por lo cual, se procedió a elegir las notas de aquel estudiante que cumpliera con la característica de ser *copista total* en el sentido de Monereo et al. (1999). De este modo, el objeto de estudio fueron las notas de clase de un CM por profesor.

Por tanto, en el marco de la presente investigación se trabajó con los profesores: Simón, Mario, Ulises, Noé, Salvador, Diana, Aracely, Roberto, José y José Antonio (seudónimos). Los cuales se encontraban impartiendo la asignatura de Geometría Analítica en el 11avo grado, consideraban el CM como objeto de evaluación y estaban familiarizados con las ideas geométricas y variacionales de la pendiente. La totalidad manifestó que su formación universitaria fue la de Licenciado en Matemáticas área Matemática Educativa. A este respecto, cabe mencionar que esta última fue una característica que no había sido considerada para esta investigación, dado que, no necesariamente los profesores de matemáticas en activo llegan a tener dicho perfíl y, sin embargo, la ejercen por su formación a fin (por ejemplo, contadores, ingenieros, entre otros). Por otra parte, las notas de los diez cuadernos considerados para esta investigación, provienen de autores que cumplen con el perfil de ser *copista total*.

3.3 Instrumentos para la recopilación de los datos

Son dos objetivos los que rigen esta investigación (ver apartado 1.4). Para el logro del primero, se diseñó y aplicó una Entrevista Basada en Tareas en el sentido de Goldin (2000) y, para el segundo, ya fueron expuestas las características y condiciones consideradas para la recolección de los CM que fueron objetos de análisis en esta investigación (ver apartado 3.2.1). Por tanto, en este apartado se expondrán las características del protocolo de la entrevista que fue aplicada a los profesores.

3.3.1 Entrevista Basada en Tareas

La elección de esta metodología, se debe a que combina dos recursos: La entrevista y un instrumento (Goldin, 2000). Con la entrevista, se puede conseguir la verbalización de los procesos de pensamiento que tiene un individuo y, el instrumento (cuestionario, tareas, etc.), permite conocer los procedimientos e ideas que pone en acción dicho individuo al resolverlo.

Una entrevista basada en tareas es aquella en la que se requiere de una interacción mínima entre un sujeto (el que resuelve problemas) y un entrevistador (el que plantea o pregunta), donde el sujeto habla durante o inmediatamente después de resolver una tarea (preguntas, problemas o actividades) evidenciando así su conocimiento y razonamiento en la resolución de problemas (Koichu y Harel, 2007). Consideramos que esta metodología es adecuada porque permite observar cómo los participantes ponen en juegos sus ideas matemáticas. Además, esto nos permite hacer inferencias sobre el posible significado matemático que se les atribuyen (Goldin, 1997); también, da oportunidad de conocer el conocimiento conceptual de los participantes, así como de ampliar su entendimiento

(Assad, 2015). Para nuestro estudio, la entrevista basada en tareas sirve para recolectar los datos y tener la información necesaria para explorar las conceptualizaciones de pendiente que cada profesor tiene y pone en práctica al resolver cada una de las tareas.

3.3.2 Diseño del protocolo de la entrevista

Las tareas planteadas a los profesores son el resultado del trabajo colaborativo, entre el autor de esta investigación y dos investigadores pertenecientes al grupo que estudia la pendiente en la Facultad de Matemáticas de la universidad Autónoma de Guerrero. Se diseñaron sobre la base de los siguientes criterios, primero, se consideraron los resultados de diversas investigaciones tales como Mudaly y Moore-Russo (2011), Nagle et al. (2013) y Stump (1999, 2001a). Con la finalidad de adaptar tareas consistentes con los objetivos de este estudio. Segundo, dar la oportunidad de evidenciar libremente procedimientos, estrategias, representaciones o argumentaciones en el proceso de resolución de las tareas. Tercero, que fueran asequibles con el conocimiento requerido en el nivel que incide, y por último, que posibilitaran el uso de diversos registros de representación, por ejemplo, el verbal, el analítico, el gráfico, etcétera.

Para ganar confiabilidad en redacción, asequibilidad y correspondencia con los objetivos del estudio, se hizo una aplicación piloto del instrumento a cinco profesores de matemáticas en formación y a dos profesores de matemáticas de bachillerato en servicio. Para ello, se utilizó una entrevista basada en tareas, la cual estuvo a cargo del autor de esta investigación, misma que fue videograbada para su posterior análisis. El pilotaje fue importante para rediseñar las tareas que integran el protocolo final empleado para este estudio, el cual se conformó por doce tareas de las cuales dos son adaptaciones de Byerley y Thompson (2017) y Hoffman (2015) respectivamente. El resto, fueron diseñadas por el autor de esta investigación y dos colaboradores anteriormente señalados. Los cuales, cuentan con amplia experiencia y conocimiento sobre la enseñanza y aprendizaje de este concepto.

3.3.3 Protocolo de la entrevista

Después de la aplicación piloto, el protocolo final se conformó de 12 tareas y algunas preguntas auxiliares para cada una. A los profesores se les proporcionó el protocolo en forma de cuestionario con las tareas que lo conforman, sin las preguntas auxiliares. El protocolo de la entrevista se estructuró en tres partes como se describe enseguida.

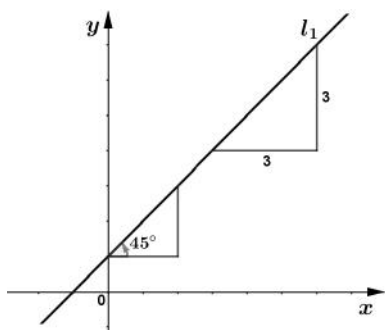
Parte I. Datos Generales del entrevistado. Su objetivo fue recopilar información personal de los participantes y de su experiencia como profesor de matemáticas en los cursos Geometría Analítica y Cálculo. Las preguntas planteadas fueron:

1. ¿Cuál es su nombre y cuál es su edad?
2. Sexo (dato tomado directamente por el entrevistador)
3. ¿Cuál el es nombre de la institución donde labora?
4. ¿Cuál es su grado máximo de estudios?
5. ¿Cuál es su área o especialidad?
6. ¿Cuántos años de experiencia tiene como docente de la matemática?
7. ¿Ha impartido los cursos de Geometría Analítica y/o Cálculo? Indique cuantas veces.
8. Fecha y lugar de aplicación (dato tomado directamente por el entrevistador).

Parte II. Explorando las conceptualizaciones de pendiente en los profesores. Su objetivo fue identificar las conceptualizaciones de pendiente que aparecen cuando los profesores resuelven las tareas que involucran dicho concepto. Se integra de diez tareas, las cuales, involucran las diferentes representaciones del concepto de pendiente, mismas que son sugeridas en los Planes y Programas de Estudio de Nivel Medio Superior en los cursos de Geometría Analítica y Cálculo. Por tanto, suponemos que los profesores tienen familiaridad con las ideas geométricas y variacionales del concepto, debido a que son objeto de estudio en sus clases.

La primer tarea, involucra la pendiente como la tangente del ángulo de inclinación de la recta o como el cociente de diferencias; la tarea dos, involucra los criterios de paralelismo y perpendicularidad; la tarea tres, explora la pendiente como un indicador que permite establecer el comportamiento de una función a través de su gráfica; la tarea cuatro y seis, involucran la derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto de la misma, en la primera se da la fórmula de la función y en la otra no; la tarea cinco, involucra la pendiente con objetos físicos como una escalera y una rampa; la tarea siete, involucra la pendiente con la ecuación de la recta como un coeficiente paramétrico; la tarea ocho, explora la pendiente como una razón geométrica; la tarea nueve, explora la pendiente como una propiedad constante que permite establecer la colinealidad de puntos en el plano y la tarea diez explora la pendiente como una propiedad de la recta que depende de la graduación del plano donde está construida.

1. ¿Cuál es la pendiente de la recta l_1?

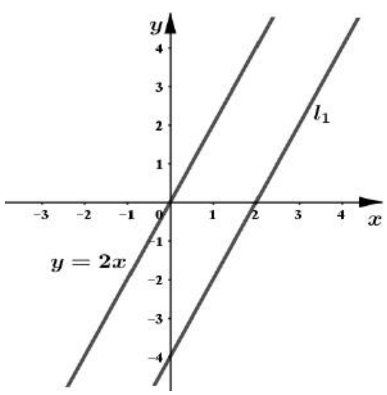


- *Si el profesor conoce más de una vía de solución alentarlo a que lo presente*
- *Pedirle al profesor que explique su procedimiento*

2. La recta $y = 2x$ es paralela a la recta l_1

a) ¿Cuál es la ecuación de la recta l_1?

b) ¿Cuál es la pendiente de la recta l_1?

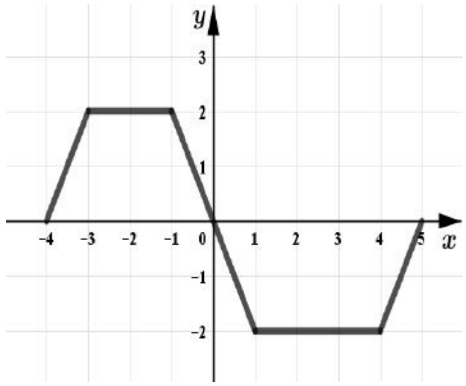


- *Pedirle al profesor que explique su procedimiento*

Pregunta auxiliar

¿Cuál sería la ecuación de la recta de l_1 si fuera perpendicular a $y = 2x$?

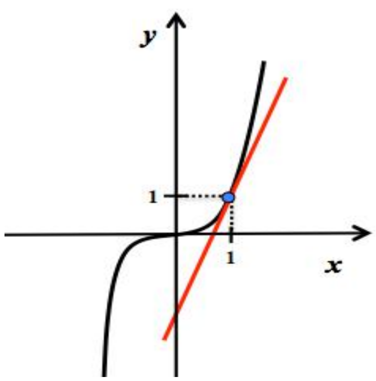
3. Indique en qué intervalos la siguiente gráfica es: creciente, decreciente y constante.



	Intervalos	Argumentos
a) Creciente		
b) Decreciente		
c) Constante		

- *Pedirle al profesor que explique su procedimiento*

4. Calcule la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3$ en el punto (1,1)



- *Si el profesor conoce más de una vía de solución alentarlo a que lo presente*
- *Pedirle al profesor que explique su procedimiento*

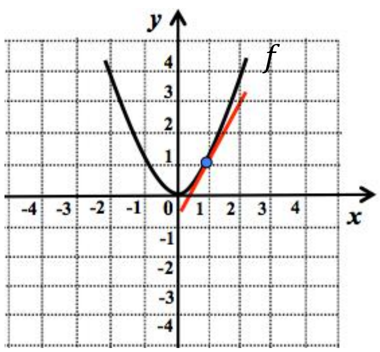
Pregunta auxiliar

¿Cuál es la pendiente de la curva en $x = 0$?

5. La entrada a una cafetería tiene dos accesos: una escalera y una rampa. La imagen muestra sus medidas. ¿Qué acceso tiene mayor pendiente?

- *Si el profesor conoce más de una vía de solución alentarlo a que lo presente.*
- *Pedirle al profesor que explique su procedimiento*

6. Obtenga la derivada de la función $f(x)$ en $x = 1$



- *Si el profesor conoce más de una vía de solución alentarlo a que lo presente.*
- *Pedirle al profesor que explique su procedimiento*

7. Indique las ecuaciones que se corresponden con rectas: crecientes, decrecientes y constantes. Argumenta tus respuestas.

		Creciente/decreciente/constantes
a)	$y = -5$	
b)	$y = -1 - 3x$	
c)	$y = x + 2$	
d)	$y = \frac{1}{3}$	
e)	$y = \frac{7x}{4}$	

- *Pedirle al profesor que explique su procedimiento*

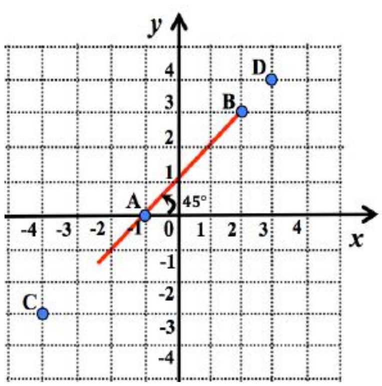
8. La profesora de Geometría Analítica en una lección introductoria sobre la pendiente comentó: “Para calcular la pendiente de una recta dividimos 7 entre 3 obteniendo 2.3” ¿Qué significa el 2.3?

- *Si el profesor conoce más de una vía de solución alentarlo a que lo presente.*
- *Pedirle al profesor que explique su procedimiento*

Pregunta auxiliar

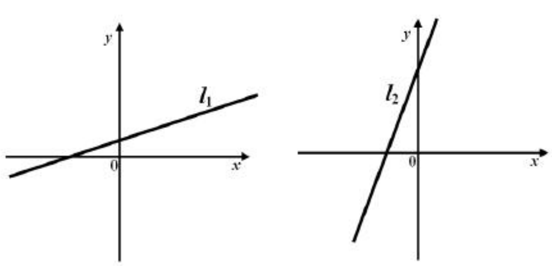
Si se interpreta la pendiente igual a 2.3 como: “por cada unidad que avanzó en x, en y subo 2.3 unidades” o “por cada 3 unidades que avanzó en x, en y subo 7 unidades”, se pregunta ¿qué ocurre en la situación si el cambio en x es 5?

9. Pablo y Pedro son compañeros de la clase de Geometría Analítica. Un día, en su clase, se encontraban analizando la gráfica dada. Pablo le aseguraba a Pedro que al prolongar el segmento $\overline{AB}$ con su regla de presición esta pasaría por los puntos D y C y su argumento era que a simple vista todos los puntos estarían en la misma recta. Este argumento no convencía del todo a Pablo. Proponga un argumento para convencerlo.



- *Si el profesor conoce más de una vía de solución alentarlo a que lo presente.*
- *Pedirle al profesor que explique su procedimiento*

10. ¿Cómo son entre sí las pendientes de la recta l_1 y l_2? Argumente su respuesta.



- *Si el profesor conoce más de una vía de solución alentarlo a que lo presente.*

- *Pedirle al profesor que explique su procedimiento*

Pregunta auxiliar

En caso de no utilizar alguna graduación en los ejes de los planos, preguntar ¿cómo repercute la graduación de los ejes en la pendiente de las rectas?

Parte III. ***Explorando la definición de pendiente y su vínculo con el medio circundante.*** Su objetivo fue explorar las ideas que utilizan los profesores al definir la pendiente y los ejemplos del medio circundante que vinculan con este concepto. Para tal fin se plantearon dos preguntas.

11. ¿Qué es para usted la pendiente?

12. Mencione al menos tres ejemplos de su medio circundante donde esté presente la pendiente.

- *Pedirle al profesor que explique cómo sus ejemplos se vinculan con la pendiente*

3.3.4 Recolección de los datos

Los datos fueron recolectados en los meses: noviembre, diciembre, abril y mayo del 2018 y 2019. Debido a que el estudio de la Geometría Analítica en algunas escuelas se imparte en semestre par y en otras impar. Para ello, se acudió a las instalaciones de los centros de trabajo de cada participante. Cada entrevista fue videograbada y realizada de manera individual por el autor de este estudio, con la finalidad de captar evidencia de lenguaje verbal (oral, escrito e icónico) y no verbal (kinestésico). Cada una tuvo una duración entre 60 a 90 minutos. Esta giró en torno al protocolo y preguntas auxiliares básicas para todas las tareas (*¿por qué lo hiciste así*?, *¿conoces otra vía de solución*?, *¿a qué te refieres con este término*?, *¿por qué utilizaste esa fórmula*?) y otras específicas (ver apartado 3.3.3), que permitieron conocer a detalle su razonamiento y conocimiento sobre pendiente. Con respecto a las notas de clase, en el apartado 3.2.1 se señalan los criterios y el proceso de recolección, por tanto, no será retomado dicho aspecto en este apartado.

3.4 Organización y análisis de los datos

3.4.1 Conceptualizaciones en los profesores

Para el análisis de los datos, se utilizaron las descripciones de las conceptualizaciones de pendiente señaladas en la Tabla 1. Cada entrevista fue transcrita en el procesador de texto (Microsoft Word) y sus producciones escritas digitalizadas con la finalidad de reunir evidencia verbal y no verbal de cada participante. Estas evidencias fueron objeto de análisis para el autor de esta investigación y dos colaboradores[2]. Para registrar el análisis individual, se diseñó una tabla conformada por 15 filas y 13 columnas (ver Tabla 2). En ella, se registró con una **X** la conceptualización identificada en cada tarea.

Tabla 2

Ejemplo de la tabla empleada para el registro del análisis de los datos por profesor

Profesor 1	Conceptualizaciones											
Tareas (T_n)	A	G	F	R		B	P	PC	T	C	D	L
				RP	RF							
T_1												
⋮												
T_{12}												

Fuente: Elaboración propia

Cada investigador revisó y contrastó la evidencia digitalizada y las transcripciones de las entrevistas, a fin de identificar **frases**, **palabras** o **procedimientos clave** empleados por los profesores en cada tarea. De este modo, se establecieron códigos asociados a la descripción de cada conceptualización de pendiente presente en las producciones de los profesores.

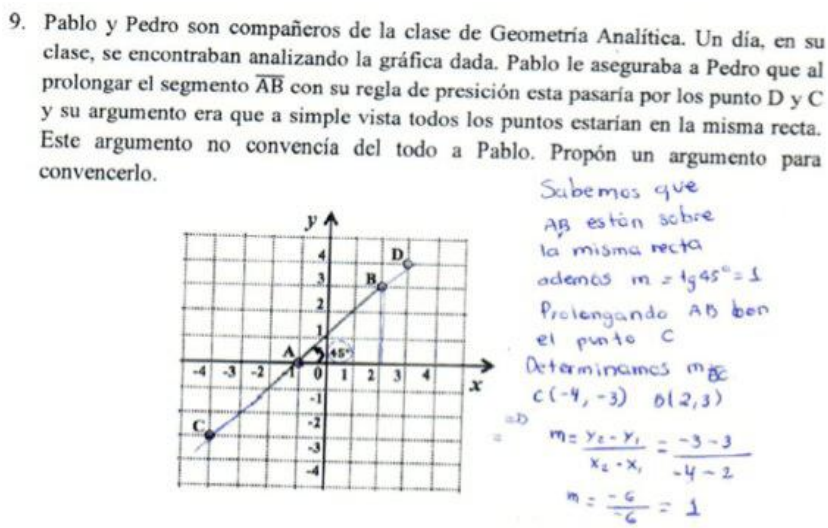
Para decidir qué conceptualizaciones de pendiente exteriorizaron los profesores, la triangulación por investigadores fue crucial. En caso de algún desacuerdo, se discutieron las posturas hasta llegar a un consenso y así decidir el tipo de conceptualización presente. Esto

[2] Dr. Crisólogo Dolores Flores y Dra. Martha Iris Rivera López. Ambos han publicado artículos de investigación referidos a las conceptualizaciones de pendiente. El Dr. Dolores es coordinador de la línea de investigación “comprensión de la pendiente” en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero.

incrementó la confiabilidad de los resultados y su validez, eliminando así el sesgo de un único investigador.

A continuación, mostramos como ejemplo la producción y un extracto de la entrevista realizada a la profesora Aracely al resolver la tarea 9, en el cual haremos explícitos los procesos metodológicos empleados en el estudio. La primera fase del análisis fue la familiarización con los datos, se revisó la producción escrita de la profesora (ver Imagen 1) y se leyó la transcripción de la entrevista que se le realizó. Al contrastar las producciones, se identificaron las conceptualizaciones: *constante lineal*, *razón algebraica* y *trigonométrica*. A continuación, mostramos un extracto de la entrevista realizada a la profesora Aracely donde se identifican las conceptualizaciones.

> **Entrevistador:** Propón un argumento para convencerlo
> **Aracely:** Bueno, lo que yo considero es que para que los puntos C y D estén en la prolongación del segmento AB. Cuando calculemos *la pendiente de CD esta debe ser la misma que la de AB.*
> **Entrevistador:** ¿Por qué las pendientes deben ser iguales?
> **Aracely:** Porque es una condición que deben cumplir los puntos que están en una misma recta. De hecho, *con cualquier pareja de puntos de una recta se debe cumplir que la pendiente sea la misma*.
> **Entrevistador:** Y en este caso ¿se cumple?
> **Aracely:** Si, yo podría calcular *la pendiente del segmento AB* [*escribe Tan 45º=1*] ya que cuarenta y cinco grados es su ángulo de inclinación, luego si *determinamos la pendiente* del segmento BC *con la fórmula* $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ [sustituye las coordenadas de los puntos B y C] y nos da 1. Por lo tanto, si están sobre la prolongación.
> **Entrevistador:** ¿Por qué lo hiciste así?
> **Aracely:** Porque recuerdo que *la pendiente de una recta se puede calcular con la tangente del ángulo de inclinación* y aquí nos dicen que es de cuarenta y cinco, y también se calcula con la fórmula que apliqué aquí [señala sus procedimientos en la hoja]


9. Pablo y Pedro son compañeros de la clase de Geometría Analítica. Un día, en su clase, se encontraban analizando la gráfica dada. Pablo le aseguraba a Pedro que al prolongar el segmento $\overline{AB}$ con su regla de presición esta pasaría por los punto D y C y su argumento era que a simple vista todos los puntos estarían en la misma recta. Este argumento no convencía del todo a Pablo. Propón un argumento para convencerlo.

Sabemos que AB están sobre la misma recta además $m = tg 45° = 1$

Prolongando AB con el punto C

Determinamos m_{BC}

$C(-4, -3)$ $B(2, 3)$

$\Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-3}{-4-2}$

$m = \frac{-6}{-6} = 1$

Imagen 1. Producciones de la profesora Aracely en la Tarea 9

Fuente: Elaboración propia

Las frases y procedimientos clave (resaltadas en cursiva en el extracto) identificados son: *con cualquier pareja de puntos de una recta la pendiente es la misma*, *la pendiente del segmento AB es* $\text{tg}\, 45°$ y *la pendiente se puede determinar con la fórmula* $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Estas frases se utilizaron para definir los códigos L_1, T_1 y A_1, que a su vez están vinculados a las conceptualizaciones L, T y A respectivamente (ver Tabla 3).

3.4.2 Conceptualizaciones en las notas de clase

El análisis de las notas de clase se realizó utilizando el método de análisis de contenido sugerido por Bardin (2002), el cual, consta de tres fases: pre-análisis, explotación del material y el tratamiento de los resultados. En la fase de pre-análisis, se preparó el material, consistente en la identificación y la elección de las notas de clase (ver apartado 3.2.1). se utilizaron las notas de diez estudiantes que cumplieron la característica de ser *copista total*.

La fase de explotación del material está centrada en las operaciones de codificación, elección de las unidades de análisis y análisis del contenido. En primer lugar, las notas de cada CM fueron estructuradas conforme a unidades de contexto, para esto se utilizó la información recolectada en las encuestas hechas a los profesores (ver apartado 3.2.1), respecto a cómo estructuran el tratamiento que dan a los conceptos matemáticos en su clase. De acuerdo con los resultados, la totalidad manifestó que en principio plantean ***definiciones*** ($*$) seguidas de ***explicaciones*** ($\odot$), ***ejemplos*** ($\circ$) y ***actividades*** (ejercicios y problemas) ($\otimes$), esto permitió que fueran elegidas unidades de contexto. Posteriormente, con el apoyo de cada profesor participante en esta investigación se identificó y clasificó dicha información en las notas de clase de su estudiante para su posterior análisis.

Posteriormente, adoptamos la codificación y caracterización de las conceptualizaciones de pendiente de Nagle y Moore-Russo (2014), ya descritas en la Tabla 1, de este modo las unidades de análisis fueron: las frases, procedimientos o palabras clave que hacen referencia a la descripción de alguna de las conceptualizaciones de pendiente. Para realizar el análisis se digitalizaron y clasificaron las notas de clase de acuerdo con las unidades de contexto (ver Imagen 2), luego, esta información fue puesta a disposición de los dos colaboradores involucrados en este estudio. Cada investigador codificó y completó una tabla análoga a la Tabla 3. En ella se registró el código que identifica la conceptualización, acompañada por un subíndice que indica el número de código y un superíndice que indica la unidad de contexto (Por ejemplo, A_1^* indica el primer código asociado a la conceptualización *razón algebraica* (A) identificada en ***definiciones***).

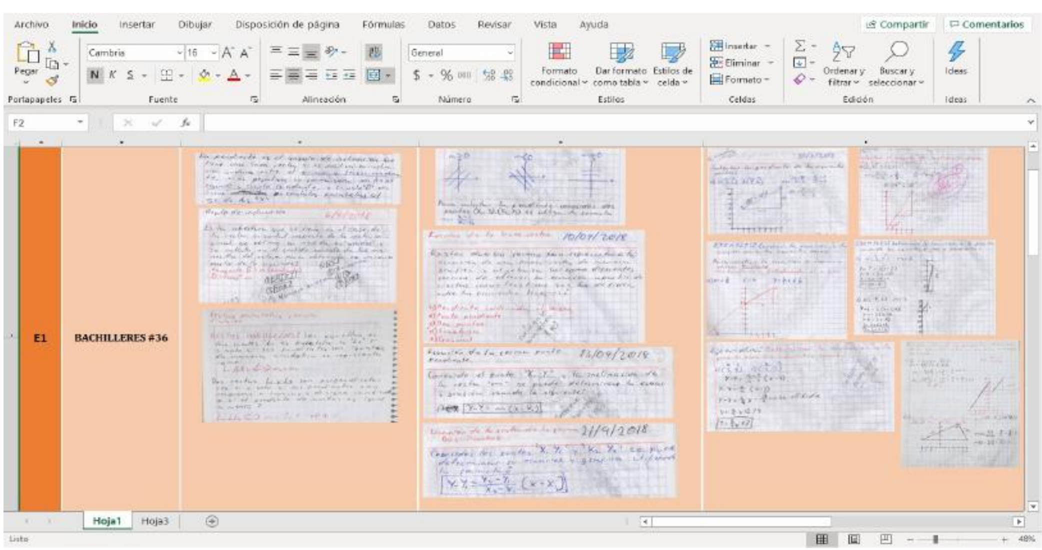


Imagen 2: Ejemplo de la clasificación de las notas de clase utilizando Microsoft Excel

Fuente: Elaboración propia

Tabla 3

Ejemplo de la tabla empleada para registrar el análisis de cada investigador

Escuela	Estudiante/ Profesor	Conceptualizaciones											
		A	G	F	R		B	P	PC	T	C	D	L
					RP_1	RF_1							
	E1/P1												
	⋮												
	E10/P10												

Fuente: Elaboración propia

A continuación, se presentan dos ejemplos de cómo fueron identificadas las conceptualizaciones de pendiente en las notas de clase. La Imagen 3 muestra una ***definición*** que el profesor presenta a sus estudiantes en clase. En ella, se ha identificado como frase clave a "la pendiente es la inclinación de la recta". De acuerdo con la Tabla 1 esta frase está directamente vinculada con la conceptualización P. Por lo tanto, se asignó el código P_1^*.

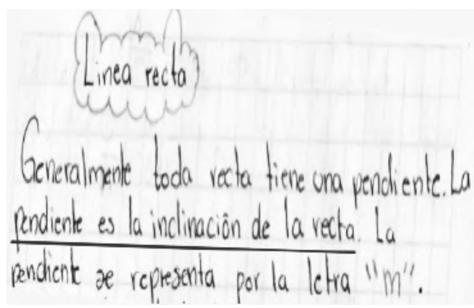


Imagen 3. Evidencia de la conceptualización propiedad física en definiciones

Fuente: Elaboración propia

La Imagen 4 muestra los ***ejemplos*** que otro profesor trabajó durante su clase. En esta, se identificó como procedimiento clave "utiliza la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para calcular la pendiente de una recta conocidos dos puntos por donde pasa". Este procedimiento se asocia con la descripción de la conceptualización A y se asignó el código $\mathring{A}_1$.

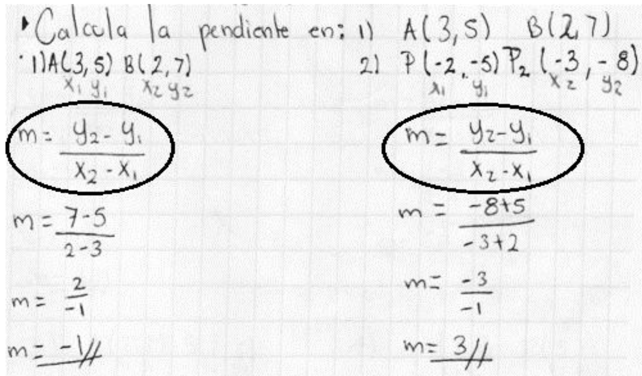


Imagen 4. Evidencia de la conceptualización razón algebraica en ejemplos

Fuente: Elaboración propia

En la tercera fase, dedicada al tratamiento de los resultados, se empleó al método de triangulación por investigadores. Lo cual, permitió decidir el tipo de conceptualización presente en las notas de clase. En caso de algún desacuerdo, se discutieron las posturas hasta llegar un consenso y determinar la conceptualización presente. Esto permitió la confiabilidad de los resultados y garantizó su validez, credibilidad y rigor, eliminando así el sesgo de un único investigador.

CAPÍTULO IV

4. RESULTADOS

En el presente capítulo se despliegan los resultados obtenidos mediante los instrumentos de investigación utilizados. Su estructura consta, en primer lugar, de las conceptualizaciones de pendiente identificadas en los procedimientos y argumentos utilizados por los profesores al resolver las tareas propuestas y, en segundo lugar, se describen las conceptualizaciones de pendiente que dichos profesores enseñan a sus estudiantes cuando trabajan dicho concepto en sus clases, esto, a través de las notas de clase seleccionadas para tal fin.

4.1 Acerca de las conceptualizaciones demostradas por los profesores

Del análisis realizado a las producciones individuales de los profesores, se determinaron los códigos asociados a la descripción de cada conceptualización identificada en *frases*, *palabras* o *procedimientos clave* utilizados para resolver las tareas del protocolo. La Tabla 4 muestra la codificación asignada y la frecuencia de a parición de cada conceptualización.

Tabla 4

Conceptualizaciones encontradas en los profesores

Conceptualización/ Códigos	Descripción de los códigos específicos	Frecuencia
Razón Algebraica (A)	A_1: Utiliza la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para calcular la pendiente a partir de las coordenadas de dos puntos en el plano. A_2: Cuantifica y utiliza los cambios Δx y Δy para obtener la pendiente. A_3: Cociente obtenido al dividir la longitud de los catetos de un triángulo rectángulo construido bajo una recta u objeto físico como escalera ó rampa.	49
Propiedad Física (P)	P_1: Describe la pendiente en términos de inclinación de la recta. P_2: Emplea algún brazo o algún objeto (lápiz, regla, cuaderno, etc.) para simular la inclinación. P_3: Compara pendientes a través del ángulo de inclinación de las rectas. P_4: La pendiente es el ángulo de inclinación de la recta respecto al eje de las abscisas.	40
Indicador de Comportamiento (B)	B_1: Si la pendiente es positiva la recta es creciente y si es negativa entonces es decreciente. B_2: La pendiente es cero si la recta es horizontal	31

Coeficiente Paramétrico (PC)	PC_1: El valor numérico de la pendiente está dado por el número que acompaña la x en la ecuación $y = mx + b$.	25
Trigonométrica (T)	T_1: La pendiente es la tangente del ángulo de inclinación.	23
Razón Geométrica (G)	G_1: Representa la pendiente de la recta a través de aumento en y cuando x aumenta su valor en 1. G_2: Representa la pendiente de la recta a través de desplazamientos verticales y horizontales.	21
Propiedad Determinante (D)	D_1: Rectas paralelas tienen la misma pendiente. D_2: Rectas perpendiculares tienen pendientes reciprocas y de signo contrario [su producto es -1].	18
Cálculo (C)	C_1: La derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.	16
Situación Mundo Real. Física (RP) **Funcional** (RF)	RP_1: La pendiente se vincula a rampas, escaleras, calles, cerros, techos, surcos, etc. RF_1: La pendiente vinculada a situaciones funcionales en la que la razón de cambio es constante. Por ejemplo, velocidad de un automóvil, llenado de un recipiente, costos, etc.	14
Constante Lineal (L)	L_1: Dada la gráfica de una recta se puede tomar cualquier pareja de puntos y la pendiente será la misma.	12
Propiedad Funcional (F)	F_1: La pendiente es la razón de cambio constante.	4

Códigos: X_n: X= conceptualización, n = acción específica de X.

Fuente: Elaboración propia

La Tabla 5 muestra en códigos las conceptualizaciones de pendiente, identificadas en los procedimientos y argumentos empleados por cada profesor en la resolución de las tareas que integraron el protocolo de la entrevista utilizada en este estudio.

Tabla 5

Códigos asignados: X_n: X= conceptualización, n = acción específica de X.

Profesor	Tareas											
	T_1	**T_2**	**T_3**	**T_4**	**T_5**	**T_6**	**T_7**	**T_8**	**T_9**	**T_{10}**	**T_{11}**	**T_{12}**
Simón	A_3 T_1	PC_1 D_1 D_2	B_1 B_2	C_1	P_2 A_3	C_1	B_1 B_2 PC_1	G_2 F_1	L_1	P_3	T_1 C_1	RP_1 P_1
Mario	A_1 A_2 T_1	PC_1 D_1 D_2		PC_1 C_1	A_2	A_2 C_1	B_1 B_2 PC_1	G_1 G_2 PC_1	A_2 G_1 T_1 L_1	A_2 G_1 G_2	A_1 F_1 G_2 L_1	RF_1
Ulises	T_1	PC_1 D_1 D_2		L_1 T_1	A_3	C_1	B_1 B_2 PC_1	G_2 T_1	A_2 G_2 L_1	T_1 P_3	P_1 R_{P1} P_4	RP_1
Noé	A_3	PC_1	B_1	C_1	A_3	A_1	B_1	G_2	PC_1	P_3	P_4	RP_1

	P_4 T_1	D_1 D_2	B_2		T_1	C_1	B_2 PC_1	L_1	T_1			
Salvador	A_1 A_2 T_1	PC_1 D_1	B_1 B_2	C_1	A_2 P_1 P_2 P_3	A_2 C_1	B_1 PC_1	G_2 D_1	A_1 A_2 G_2 L_1	P_2 P_3	P_1 P_3	RP_1
Diana	A_1 A_2 P_3	PC_1 D_1 D_2	B_1 B_2	A_2	P_2 A_3	A_2	B_1 B_2 PC_1	A_2 G_2 P_1 P_2 P_3	A_2 G_2 T_1 L_1	P_3	A_2 P_1	RP_1
Aracely	T_1	PC_1 D_1	B_1 B_2	C_1	A_3 P_2 T_1	A_1 PC_1 C_1	B_1 B_2 PC_1	A_1 G_2 L_1	A_1 T_1 L_1	P_2 P_3 T_1	F_1	RF_1 RP_1
Roberto	A_1 A_3 T_1	PC_1 D_1 D_2	B_1 B_2	A_1	A_3		B_1 PC_1	A_2 P_1	PC_1	P_3	A_1 T_1 P_3 P_4	RP_1
José	A_2 T_1	PC_1 D_1 D_2		C_1	A_3	A_1 C_1	B_1 B_2 PC_1	A_2 G_1	A_1 L_1	P_1 P_3 G_2	F_1 P_1	RF_1 RP_1
José Antonio	A_3 P_1 P_4 T_1 B_2	PC_1 D_1	P_2	C_1	A_1 A_2 RP_1	G_2 C_1	B_1 PC_1 P_2	G_1 G_2	A_2 G_2 L_1	P_1 T_1 B_2	A_1 A_3 P_1 P_2 T_1	RP_1

Fuente: Elaboración propia

Las conceptualizaciones de pendiente utilizadas por los profesores al resolver las tareas variaron de siete a once. Las más recurrentes fueron: *razón algebraica*, *propiedad física, indicador de comportamiento, coeficiente paramétrico, conceptualización trigonométrica* y *razón geométrica*. Seguidas, con menor énfasis por: *razón geométrica*, *propiedad determinante*, *conceptualización de cálculo*, *situación mundo real*, *constante lineal* y *propiedad funcional.*

Razón algebraica. Esta conceptualización fue evidenciada por la totalidad de los participantes. A este respecto, durante las entrevistas ocho de los profesores señalaron que las diversas experiencias en las que han trabajado con el concepto (por ejemplo, durante su formación, su práctica, etc.), ha prevalecido el uso de la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ como referente principal. Situación reflejada en los resultados de este estudio, que muestra predominio de dicha conceptualización, debido a que en nueve tareas utilizaron la fórmula como argumento principal o colateral. A continuación, se muestra una evidencia identificada en el extracto de la entrevista realizada al profesor Noé en la resolución de la Tarea 6.

> **Entrevistador:** Obtenga la derivada de la función $f(x)$ en $x = 1$
> **Noé:** Sabemos que *la derivada en un punto es la pendiente de la recta tangente en ese punto* y como ya tengo la recta dada, entonces *tomo dos puntos y aplico la fórmula de la pendiente* [*escribe la fórmula* $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ *y sustituye con los puntos* (1,1) *y* (2,3)], entonces la pendiente es dos.
> **Entrevistador:** ¿Conoces otra forma de encontrar la derivada?
> **Noé:** Sí, pero tendría que conocer la fórmula de la función, y aquí no me la dan.
> **Entrevistador:** ¿Sin la fórmula de la función no la puedes obtener?
> **Noé:** No, pero por la gráfica fácilmente se puede ver que su fórmula es $f(x) = x^2$, la derivo y sustituyo el valor de 1.
> **Entrevistador:** ¿Por qué consideraste como primera opción el uso de la fórmula algebraica?
> **Noé:** "Bueno, yo creo que por lo familiar que me resulta hacerlo, porque por lo regular en los libros siempre se plantea ejercitarla, incluso recuerdo que cuando era estudiante mi profesor de preparatoria nos ponía muchos ejercicios para no olvidarla".
> **Entrevistador:** Pero explícitamente se te preguntaba sobre la derivada.
> **Noé:** Pero al ver la recta, pensé en encontrar dos puntos por donde pasa y es que no me dan la fórmula de la función.
> **Entrevistador:** En caso de que hubieras conocido la fórmula, ¿qué habrías hecho?
> **Noé:** Directo lo resuelvo con las reglas de derivación.

Propiedad Física. Evidenciada en las producciones que los profesores realizaron en ocho tareas que integran el protocolo de la entrevista. Dicha conceptualización se manifestó cuando los participantes describieron "la pendiente en términos de la inclinación de la recta"; "al emplear algún movimiento kinestésico (con la mano) o algún objeto (por ejemplo, lápiz, regla, cuaderno, etc.) para simular la inclinación", tal es el caso de Salvador y Diana (ver Imagen 5), asimismo para simular la inclinación de una recta, escalera o rampa; "al comparar las pendientes a través del ángulo de inclinación de las rectas", por ejemplo, cuando compararon las pendientes de dos rectas situadas en su respectivo plano cartesiano no graduado, la mayoría de los profesores mostró un enfoque visual cuando resolvió la tarea, ya que se centraron en utilizar el ángulo de inclinación de las rectas al responderla (ver Imagen 6). Solo los profesores Diana y Mario señalaron la necesidad de conocer una graduación de los ejes coordenados para tomar una decisión, lo cual da cuenta de una postura con más elementos conceptuales que visuales; al asumir “La pendiente como el ángulo de inclinación de la recta respecto al eje de las abscisas” (ver Imagen 7).

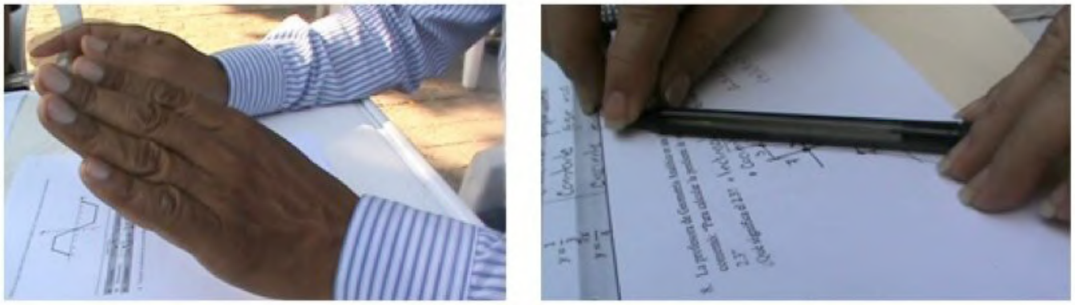


Imagen 5. Movimientos kinestésicos empleados por dos profesores para describir la inclinación

Fuente: Elaboración propia

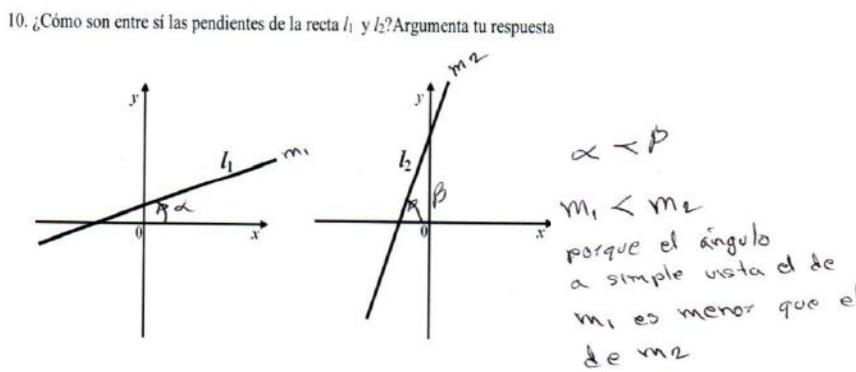
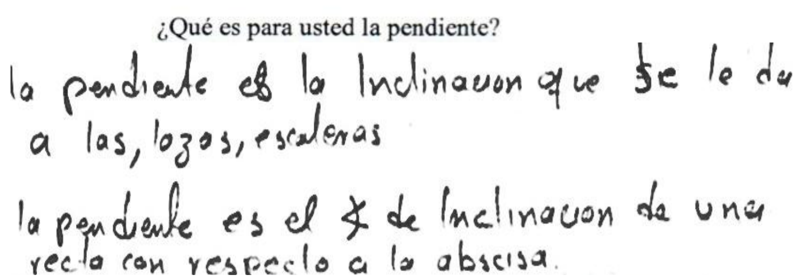


Imagen 6. Evidencia de la conceptualización propiedad física en Salvador

Fuente: Elaboración propia



¿Qué es para usted la pendiente?

la pendiente es la Inclinacion que se le da
a las, lozos, escaleras

la pendiente es el ∡ de Inclinacion de una
recta con respecto a la abscisa.

Imagen 7. Conceptualización propiedad física en Ulises

Fuente: Elaboración propia

Indicador de comportamiento. Evidenciada en las producciones que los profesores realizaron en tres tareas que integran el protocolo de la entrevista. Dicha conceptualización se manifestó cuando los participantes utilizaron "el signo de la pendiente para describir el comportamiento de una recta a partir de su gráfica". La Imagen 8, proporciona evidencia de la conceptualización en la producción de Aracely para la tarea 3 y de Mario para la tarea 7. Sin embargo, algunos profesores como José, Diana y Simón fueron más proclives a visualizar el dibujo de la gráfica propuesta en la tarea 3, para responder que la pendiente es positiva en la porción de la gráfica que sube, negativa en la que baja y cero en la que no hay variación.

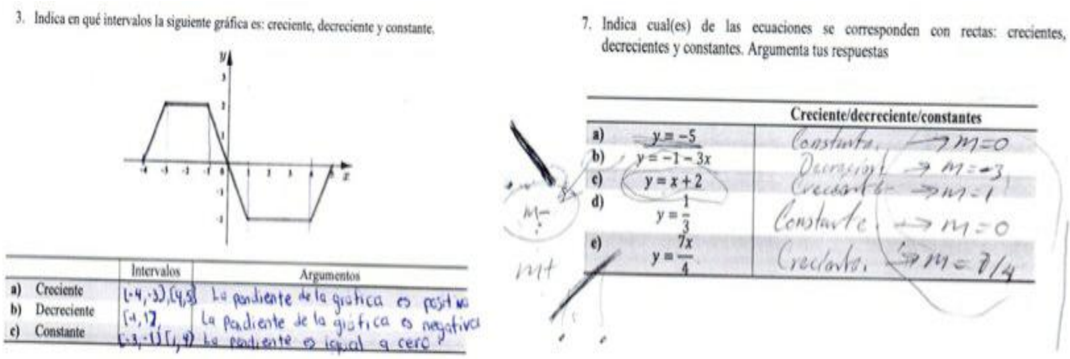


Imagen 8. Evidencia de la conceptualización indicador de comportamiento

Fuente: Elaboración propia

Coeficiente paramétrico. Evidenciada en las producciones que los profesores realizaron en seis tareas que integran el protocolo de la entrevista. A este respecto, la totalidad de los participantes manifestaron dicha conceptualización al asociar "el valor numérico de la pendiente con el valor de m en la ecuación $y = mx + b$". Por ejemplo, en la tarea 2 y 7 (ver Imagen 5). Incluso, algunos la utilizaron en tareas en las cuales era poco probable su aparición, por ejemplo, el profesor Mario en la tarea 8.

Conceptualización Trigonométrica. Evidenciada por todos los participantes, pero con menor énfasis a las anteriores, dicha conceptualización fue utilizada en seis tareas del protocolo, al señalar que "la pendiente es la tangente del ángulo de inclinación" y utilizarla para obtener el valor numérico de la misma. La Imagen 9, muestra como el profesor Mario utiliza la conceptualización para responder la Tarea 1.

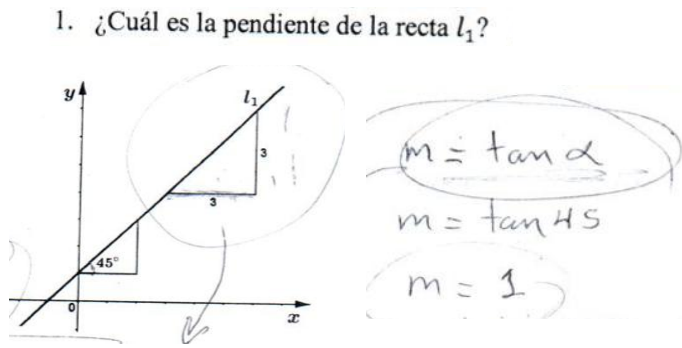


Imagen 9. Evidencia de la conceptualización trigonométrica en Mario

Fuente: Elaboración propia

Razón geométrica. Evidenciada por nueve de los participantes, dicha conceptualización fue identificada en las respuestas y procedimientos que los profesores realizaron en cinco de las tereas propuestas. Esta, fue externada cuando representaron el valor numérico de la pendiente de una recta, a través de desplazamientos verticales y horizontales. Los cuales, fueron empleados para la graficación de la misma. La Imagen 10, da evidencia de la conceptualización en la respuesta de la profesora Diana en la tarea 8.

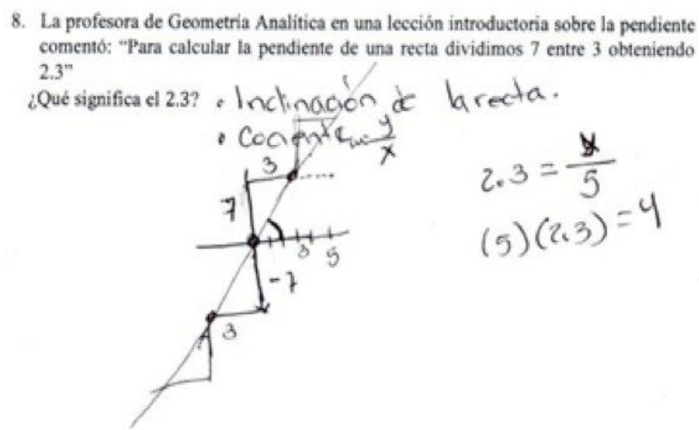


Imagen 10. Evidencia de la conceptualización razón geométrica en Diana

Fuente: Elaboración propia

Propiedad determinante. Con una frecuencia de aparición menor respecto a las anteriores, esta conceptualización fue evidenciada por la totalidad de los participantes en, a lo más, dos tareas del protocolo de la entrevista. Dicha conceptualización, fue externada al utilizar en la resolución de las tareas, los criterios: "dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales" o "dos rectas son perpendiculares si sus pendientes son reciprocas y de signo contrario”. A este respecto, los participantes mostraron tener conocimiento de dichos criterios a acepción de los profesores Salvador, Aracely y José Antonio. Quienes mostraron dificultades para utilizar el criterio de perpendicularidad en la tarea 2, argumentando que lo habían olvidado. A continuación, se muestra una evidencia identificada en el extracto de la entrevista realizada al profesor José Antonio en la resolución de la tarea 2.

> **Entrevistador:** La recta $y = 2x$ es paralela a l_1. ¿Cuál es la ecuación de la recta l_1? Y ¿cuál es su pendiente?
> **José Antonio:** Pues bien, me está dando la gráfica de la recta $y = 2x$, al ser paralelas significa que deben tener la misma pendiente [escribe $m_1 = m_2$]. De esto es posible determinar la ecuación de la recta l_1, si corta al eje Y en -4, luego la ecuación será $y = 2x - 4$ [escribe…].
> **Entrevistador:** ¿qué utiliza para determinar la ecuación?
> **José Antonio:** La ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen y como conozco esos datos, solo sustituyo. Además, en este caso la pendiente es el coeficiente de *x*.
> **Entrevistador:** ¿Cuál sería la ecuación de la recta l_1 si fuera perpendicular a $y = 2x$?
> **José Antonio:** Mmm, es un criterio, aunque ahorita ya se me fue la condición, podría buscar más datos, otros puntos, aunque la verdad por el momento no recuerdo, disculpe.
> **Entrevistador:** No se preocupe, prosigamos.

Conceptualización de cálculo. Con un enfoque procedimental, fue evidenciada por ocho de los profesores en tres de las tareas que integraron el protocolo de la entrevista. Esta fue evocada, al vincular “la derivada de una función valorada en la abscisa de un punto en el plano con la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto”. A este respecto, solo los profesores Roberto y Diana evidenciaron su desconocimiento. La Imagen11, muestra la conceptualización en los procedimientos del profesor Mario en la tarea 4.

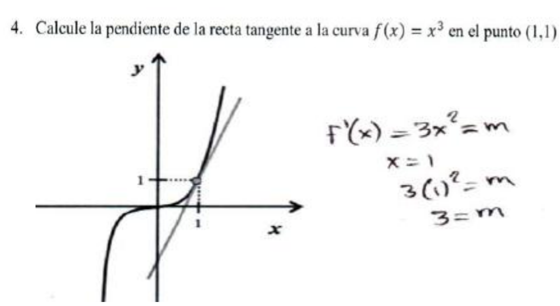
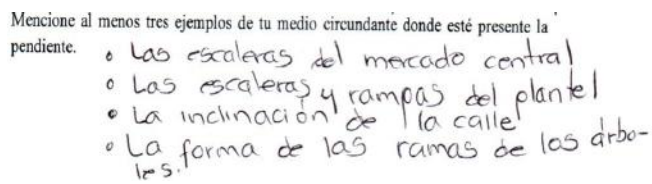


Imagen 11. Evidencia de la conceptualización de cálculo en la respuesta de Mario

Fuente: Elaboración propia

Situación mundo real. Evidenciada por la totalidad de los profesores y con menor énfasis a las anteriores, esta conceptualización se materializó cuando vincularon "la pendiente con objetos físicos como rampas, escaleras, calles, techos, etc." o "con situaciones funcionales en la que la razón de cambio es constante". A este respecto, Al pedirles que ejemplificaran la presencia de la pendiente en situaciones de su mundo circundante, sólo Mario, Aracely y José hicieron referencia a situaciones funcionales, el resto se centró en ejemplificar con situaciones físicas. Esto evidenció que la noción variacional del concepto de la pendiente no siempre es el vínculo inmediato que los profesores hacen con el concepto, pero si en objetos estáticos. La Imagen 12, muestra la conceptualización en los procedimientos de la profesora Diana en la tarea 12.


Mencione al menos tres ejemplos de tu medio circundante donde esté presente la pendiente.

- Las escaleras del mercado central
- Las escaleras y rampas del plantel
- La inclinación de la calle
- La forma de las ramas de los arbo-les.

Imagen 12. Evidencia de la conceptualización situación mundo real en las respuestas de Diana
Fuente: Elaboración propia

Constante lineal. Evidenciada por nueve profesores, esta conceptualización fue empleada para responder a cuatro tareas del protocolo de la entrevista. Solo el profesor Roberto mostró su desconocimiento al no emplearla en sus procedimientos y respuestas emitidas en las tareas. Dicha conceptualización se identificó cuando señalaron y utilizaron que la pendiente de una recta es constante, sin importar la pareja de puntos que se tome en ella para calcularla (ver ejemplo en el apartado 4.4.1).

Propiedad funcional. Evidenciada por dos profesores, esta conceptualización fue la menos evocada en la resolución de las tareas, lo cual demuestra que las ideas variacionales asociadas a la pendiente son las menos interiorizadas y comprendidas por la mayoría de los profesores. Dicha conceptualización fue evidenciada por los profesores Simón y Aracely, al señalar y utilizar que la pendiente es la razón de cambio constante.

Si bien este estudio se centró en la exploración de las conceptualizaciones de pendiente, también se obtuvieron resultados implicados en las diferentes interpretaciones que los profesores hacen de manera indistinta acerca del concepto, tales como: el ángulo de inclinación de la recta, la tangente del ángulo de inclinación, la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, la inclinación de la recta o un número. Esto aportó elementos para inferir la posible existencia de una confusión entre lo que es la pendiente y cómo se calcula (ver Imagen 13), tal como se puede observar en el siguiente extracto tomado de la entrevista realizada al profesor José Antonio en la Tarea 1.

> **Entrevistador:** ¿Cuál es la pendiente de la recta l_1?
> **José Antonio:** Bueno, aquí vemos una recta inclinada y *por definición la pendiente de una recta se define como la inclinación que tiene esa recta*, *esa inclinación puede ser horizontal y su pendiente es cero* [...] o vertical y su pendiente sería infinita [dibuja las rectas, tal como se muestra en la Imagen 5]. *Bueno entonces la pendiente, pues aquí lo marca, es de* 45*º.*
> **Entrevistador:** ¿Entonces la pendiente es el ángulo?
> **José Antonio:** Sí, pero *también puede ser la tangente del ángulo*.
> **Entrevistador:** Entonces ¿El ángulo y su tangente son lo mismo?
> **José Antonio:** *Sí, porque también son un número*. De hecho, la pendiente es tres entre tres igual a uno.
> **Entrevistador:** ¿Por qué es tres entre tres?
> **José Antonio:** *Porque la pendiente es el cociente de los catetos del triángulo.*
> **Entrevistador:** Entonces ¿la pendiente es el ángulo, un número, la tangente del ángulo y el cociente de los catetos del triángulo rectángulo?
> **José Antonio:** Sí, son equivalentes.

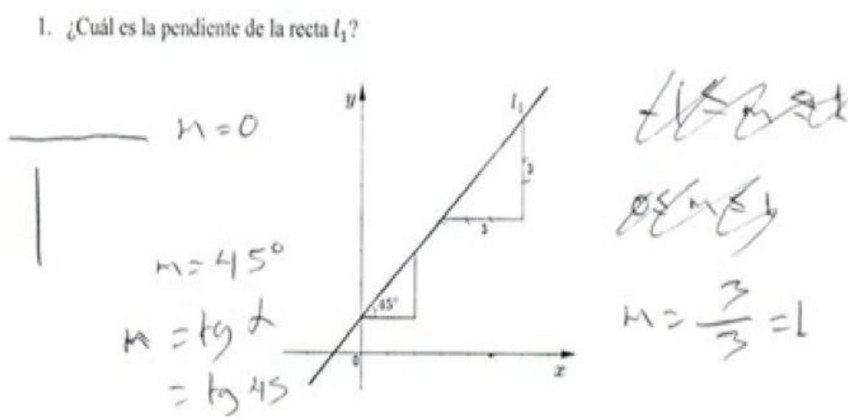


Imagen 13. Producción del profesor José Antonio en la Tarea 1.

Fuente: Elaboración propia

La figura 2, muestra las frecuencias de las conceptualizaciones exteriorizadas por los profesores al resolver las tareas. En ella, se puede notar tres grupos. El de mayor predominancia que incluye las conceptualizaciones: *razón algebraica, propiedad física, indicador de comportamiento, coeficiente paramétrico* y la *trigonométrica*. Tres de ellas provienen directamente de la definición analítica de pendiente y vinculadas a la fórmula algebraica para obtenerla (A) y a los procedimientos algebraicos implicados (CP y T); la relacionada con el comportamiento (B) es utilizada para describir funciones que crecen, decrecen o se mantienen constantes y; la implicada con descripciones que se utilizan para describir una recta (P), las cuales incluyen términos como: inclinación, tendencia, ladeo, declive, ángulo, etc. En un segundo grupo, están la *razón geométrica*, la *propiedad determinante* y la de *cálculo*. Estas parecen estar en el conocimiento de los profesores, sin embargo, no son tan utilizadas como las del primer grupo, quizá porque están más alejadas de la definición analítica y más cercanas a su interpretación geométrica (G), a sus aplicaciones al interior de la geometría (D) y al Cálculo Diferencial (C). En un tercer grupo están las que escasamente utilizaron los profesores, la de *constante lineal* implicada con las funciones que varían con razón constante y sus graficas son rectas y no curvas, las relacionadas con su aplicación en mundo real (RP y RF) y, la *propiedad funcional* vinculada a múltiples representaciones de una razón de cambio constante entre dos variables, mismas que pueden ser tablas o descripciones verbales.

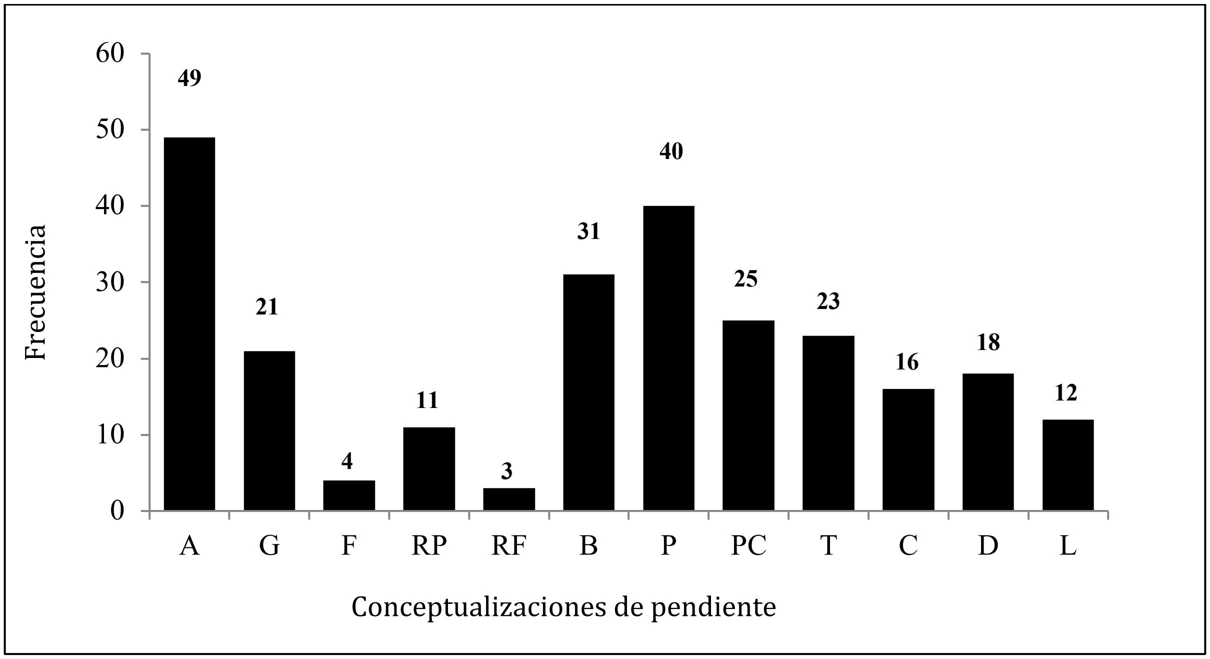


Figura 2. Conceptualizaciones utilizadas por los profesores en términos de sus frecuencias

4.2 Acerca de las conceptualizaciones encontradas en las notas de clase

Del análisis realizado a las notas de clase, se determinaron los códigos asociados a la descripción de cada conceptualización identificada en ***definiciones***, ***explicaciones***, ***ejemplos*** y ***actividades*** propuestas por los profesores y su frecuencia de aparición en el contenido que enseñan sobre el concepto de pendiente, mismos que se registran en la Tabla 6.

Tabla 6

Conceptualizaciones encontradas en las notas de clase de los estudiantes

Conceptualización/ Código	**Descripción de los códigos específicos**	**Frecuencia**
Razón Algebraica (A)	A_1: La pendiente es igual a $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ A_2: La pendiente es el cambio en x entre cambio en y, $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ó $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	59
Coeficiente Paramétrico (PC)	PC_1:En las ecuaciones de la recta $y = mx + b$, $y - y_1 = m(x - x_1)$, y $y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1)$, m y $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ representan la pendiente de la recta respectivamente.	36
Trigonométrica (T)	T_1: La pendiente se calcula como $m = \operatorname{tg}\theta$, donde θ es el ángulo de inclinación de la recta.	23
Propiedad Determinante (D)	D_1: Dos rectas son paralelas si y solo si sus pendiente son iguales y perpendiculares si son recíprocas y de signo contrario (o el producto de sus pendientes es -1)	11
Indicador de Comportamiento (B)	B_1: Las rectas con pendiente positiva son crecientes, con pendiente negativa son decrecientes y con pendiente cero son constantes.	5
Propiedad Física (P)	P_1: La pendiente es la inclinación que tiene una recta.	5
Situación Mundo Real Física (RP) **Funcional** (RF)	RF_1: La pendiente es la razón de cambio constante, por ejemplo: distancia *vs* tiempo, la pendiente representa la velocidad. RP_1: Se asocia la pendiente con el medio circundante, por ejemplo, escaleras, rampas, etc.	3
Constante Lineal (L)	L_1: La pendiente de una recta m es constante. L_2: Si la relación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se mantiene constante, el lugar geométrico es una línea recta.	2

Códigos: X_n: X= conceptualización, n = acción específica de X.

Fuente: Elaboración propia

A través del análisis de las notas de clase se identificaron entre tres y ocho conceptualizaciones de pendiente en el contenido que enseñan los profesores cuando abordan dicho concepto. Las más recurrentes en las cuatro unidades de contexto fueron: *razón algebraica*, *coeficiente paramétrico, conceptualización trigonométrica.* Seguidas, con menor énfasis por: *propiedad determinante, indicador de comportamiento, propiedad física*, *situación mundo real* y *constante lineal*. Mientras que, las conceptualizaciones: *razón geométrica*, *propiedad funcional* y la de *cálculo*, no fueron evidenciadas (ver Tabla 7). Los resultados han evidenciado, que la mayoría de los profesores al abordar el concepto d pendiente, priorizan el trabajo procedimental implicado en el cálculo de la misma y, poco explotan el vínculo que este concepto tiene con situaciones del medio circundante.

Tabla 7

Códigos asignados $X_n^{\clubsuit}$: X= conceptualización, n = acción específica de X, $\clubsuit$= definiciones ($*$); explicaciones ($\odot$); ejemplos ($\circ$); actividades ($\otimes$)

Escuela	Estudiante /Profesor	Conceptualizaciones A	G	F	RP	RF	B	P	PC	T	C	D	L
COBACH. Plantel #1	E1 / Aracely	$A_1^{\odot}$ A_1° $A_1^{\otimes}$					$B_1^{\odot}$	P_1^{*} $P_1^{\odot}$	$PC_1^{\odot}$ PC_1° $PC_1^{\otimes}$	T_1^{*} T_1°		D_1^{*} D_1°	
Preparatoria #1. UAGro	E2 / Salvador	A_1^{*} $A_1^{\otimes}$			$RP_1^{\otimes}$				$PC_1^{\odot}$ PC_1°				
CBTis #134	E3 / José	$A_1^{\odot}$ A_1° $A_1^{\otimes}$			$RP_1^{\otimes}$				$PC_1^{\odot}$ PC_1°	T_1^{*}		D_1^{*}	L_1^{*}
CETis #135	E4 / Simón	A_1^{*} $A_1^{\odot}$ A_1° $A_1^{\otimes}$							$PC_1^{\odot}$ PC_1° $PC_1^{\otimes}$	T_1^{*}			
Preparatoria #9. UAGro	E5 / Mario	$A_1^{\odot}$ A_1° $A_1^{\otimes}$						P_1^{*}	$PC_1^{\odot}$ $PC_1^{\otimes}$	$T_1^{\odot}$ $T_1^{\otimes}$		D_1^{*} D_1°	

Preparatoria # 17. UAGro	E6 /Ulises	A_1^{*} A_1°		$\mathrm{B}_1^{\odot}$		PC_1°	T_1^{*} T_1°		
Preparatoria #23. UAGro	E7 / Noé	A_1^{*} $\mathrm{A}_2^{\odot}$ A_1° $\mathrm{A}_1^{\otimes}$	$\mathrm{RF}_1^{\odot}$	$\mathrm{B}_1^{\odot}$	P_1^{*}	$\mathrm{PC}_1^{\odot}$ PC_1° $\mathrm{PC}_1^{\otimes}$	T_1^{*} T_1° $\mathrm{T}_1^{\otimes}$	D_1^{*}	$\mathrm{L}_2^{\odot}$
Preparatoria Popular. UAGro	E8 / José Antonio	$\mathrm{A}_1^{\odot}$ A_1° $\mathrm{A}_1^{\otimes}$				$\mathrm{PC}_1^{\odot}$ $\mathrm{PC}_1^{\otimes}$	T_1^{*} $\mathrm{T}_1^{\otimes}$	D_1^{*} $\mathrm{D}_1^{\otimes}$	
CONALEP #113	E9 / Roberto	A_1^{*} $\mathrm{A}_1^{\odot}$ A_1° $\mathrm{A}_1^{\otimes}$					T_1^{*} $\mathrm{T}_1^{\odot}$ T_1° $\mathrm{T}_1^{\otimes}$	D_1^{*}	
COBACH. Plantel #11	E10 / Diana	A_1^{*} $\mathrm{A}_1^{\odot}$		$\mathrm{B}_1^{\odot}$		$\mathrm{PC}_1^{\odot}$ $\mathrm{PC}_1^{\otimes}$	T_1^{*} $\mathrm{T}_1^{\odot}$		

Fuente: Elaboración propia

En este orden de ideas, las ***definiciones*** propuestas por la mayoría de los profesores se encontró el uso predominante de dos conceptualizaciones: *trigonométrica* al referirse a la pendiente como $m = \mathrm{tg}\,\theta$ donde θ es el ángulo de inclinación de la recta y *razón algebraica* cuando señalan que la pendiente es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (ver Imagen 14). Otras conceptualizaciones identificadas en esta unidad de contexto fueron: *Propiedad determinante*, al utilizar los criterios de paralelismo y perpendicularidad para definir rectas paralelas y perpendiculares; *propiedad física*, al asumir que la pendiente es el ángulo de inclinación de la recta y; *constante lineal*, al definir que una línea es recta si su pendiente es única. Estos resultados evidenciaron el desconocimiento por parte de algunos profesores acerca de la definición de pendiente.

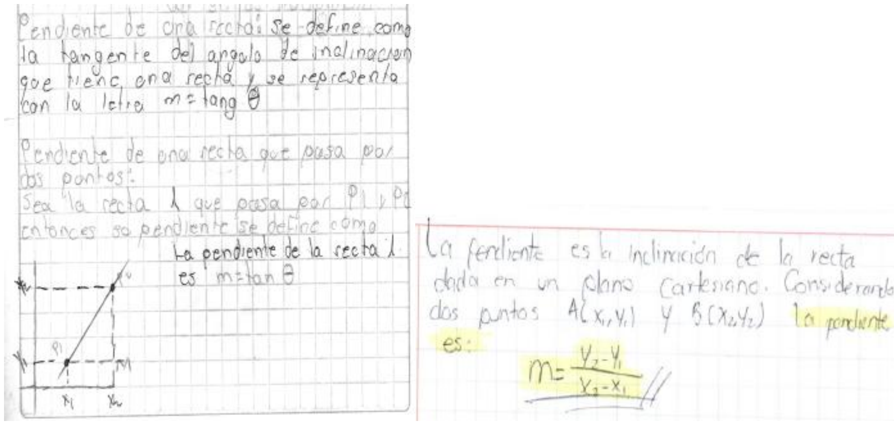


Imagen 14. Definición de pendiente en las notas de dos estudiantes

Fuente: Elaborada propia

También, se identificó que, al dar ***explicaciones***, ***ejemplos*** y proponer ***actividades*** para que los estudiantes interactúen con el concepto, los profesores recurren a la conceptualización *razón algebraica* y *coeficiente paramétrico*. La primera, al señalar que la fórmula sirve para calcular la pendiente de la recta, al proporcionar ***ejemplos,*** así como ***actividades*** que involucran la obtención de la pendiente a partir de dos puntos conocidos, centrándose en la ejercitación de la fórmula (ver Imagen 15). Y la segunda, al dar ***explicaciones*** que involucra la pendiente como el número que acompaña a la x en la ecuación $y = mx + b$, al plantear ***ejemplos*** y ***actividades*** que involucran la obtención de la ecuación una recta a partir de datos como: pendiente y ordenada al origen, dos puntos por donde pasa la recta, un punto y su pendiente y, un punto y el ángulo de inclinación (ver Imagen 16). A manera de inferencia, estos resultados sugieren un trabajo centrado en lo procedimental y algorítmico y son contradictorios respecto a los requerimientos del Programa de Estudio de Matemáticas III donde se enfatiza que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas deben dejar de lado la memorización, mecanicismo y la desarticulación de temas (SEP, 2013a).

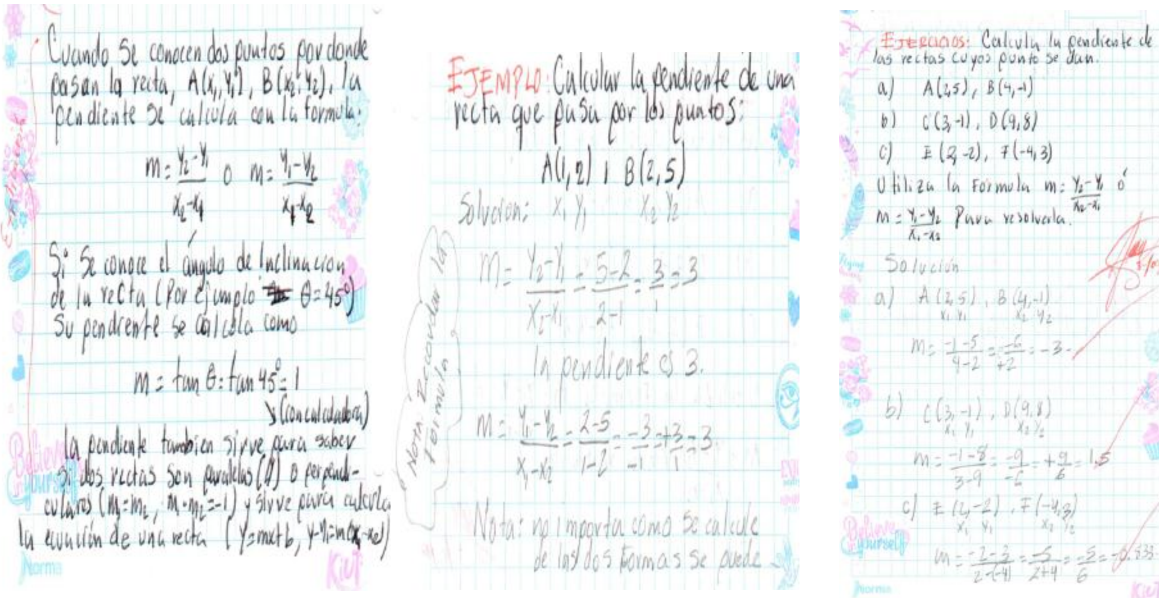


Imagen 15. Explicación, ejemplo y actividades que involucran la razón algebraica

Fuente: Elaborada propia

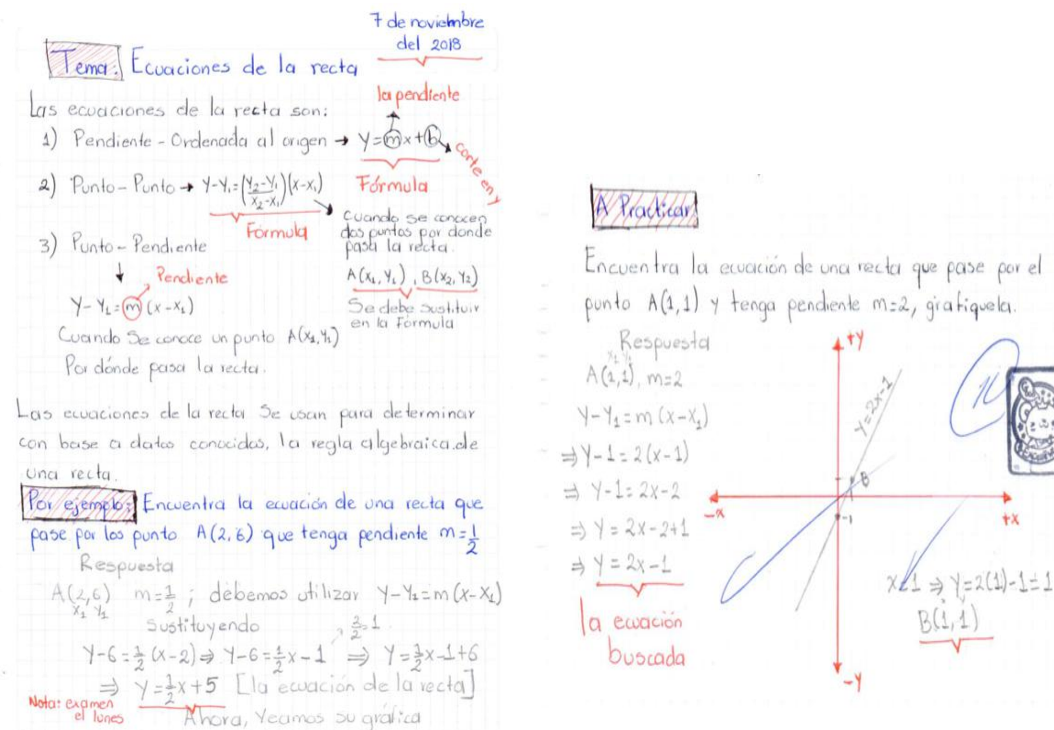


Imagen 16. Explicación, ejemplo y actividad que involucran la conceptualización coeficiente paramétrico

Fuente: Elaborada propia

Otras conceptualizaciones identificadas de mayor a menor énfasis fueron: en ***explicaciones***, *indicador de comportamiento, trigonométrica, propiedad física, constante lineal y situación mundo real*; en ***ejemplos***, *trigonométrica, propiedad determinante* e *indicador de comportamiento* y; en ***actividades***, *trigonométrica, propiedad determinante* y *situación mundo real*. Mientras que, *razón geométrica, propiedad funcional* y *cálculo* no fueron identificadas en el contenido que enseñan. La ausencia de esta última es razonable, debido a que la pendiente representada como la derivada de una función en un punto y otras ideas variacionales vinculadas a la misma, no son objeto de estudio de la Geometría Analítica (SEP, 2013a).

De acuerdo con los resultados la conceptualización *situación mundo real* fue identificada en las notas de tres estudiantes, como referente para plantear ***explicaciones*** de cómo la pendiente se vincula con la razón de cambio (en las notas de un estudiante) y para plantear ***actividades*** complementarias en las que los estudiantes por cuenta propia vincularan el concepto con situaciones cotidianas de su entorno (en las notas de dos estudiantes). Estos hallazgos insinúan que la mayoría de los profesores poco promueven el desarrollo de competencias que den oportunidad a los estudiantes realizar vinculación entre la pendiente y situaciones del entorno cotidiano, tal como se sugiere en el Programa de Estudio de Matemáticas III (SEP, 2013a).

Tabla 8

Conceptualizaciones de pendiente y su frecuencia de aparición en las notas

Conceptualización	A	PC	T	D	B	P	RP-RF	L	F	G	C
Frecuencia	59	36	23	11	5	5	3	2	0	0	0

De acuerdo con la frecuencia con las que fueron utilizadas las conceptualizaciones en las notas de los estudiantes es evidente la predominancia de tres conceptualizaciones, que en orden descendente son: *razón algebraica*, *coeficiente paramétrico* y *la conceptualización trigonométrica* (ver Figura 3). Mismas, que están directamente relacionadas con la definición analítica de pendiente. Las restantes, tienen notoriamente menor frecuencia que la anteriores. Tales como, la *propiedad determinante*, que ocupa el cuarto lugar en frecuencia y, que está asociada a los criterios de paralelismo y perpendicularidad entre dos rectas. En las notas es muy escasa la presencia de conceptualizaciones como: *indicador de comportamiento*, *propiedad física*, *situación del mundo real* y la *constante lineal*. La *razón geométrica*, *propiedad funcional* y la de *cálculo* están ausentes. Estos datos indican el uso privilegiado de las conceptualizaciones que están directamente relacionadas con la definición analítica de pendiente. Lo cual, nos hace suponer que los profesores enseñan a sus estudiantes a trabajar con la pendiente solo en el contexto intramatemático y con el uso excesivo de algoritmos. Ya que las conceptualizaciones *razón algebraica* y la *trigonométrica*, son la base para calcular la pendiente, a partir de, dos puntos por donde pasa la recta y la tangente de su ángulo de inclinación. Mientras que, la conceptualización *coeficiente paramétrico* está vinculada a las diferentes formas de la ecuación de una recta.

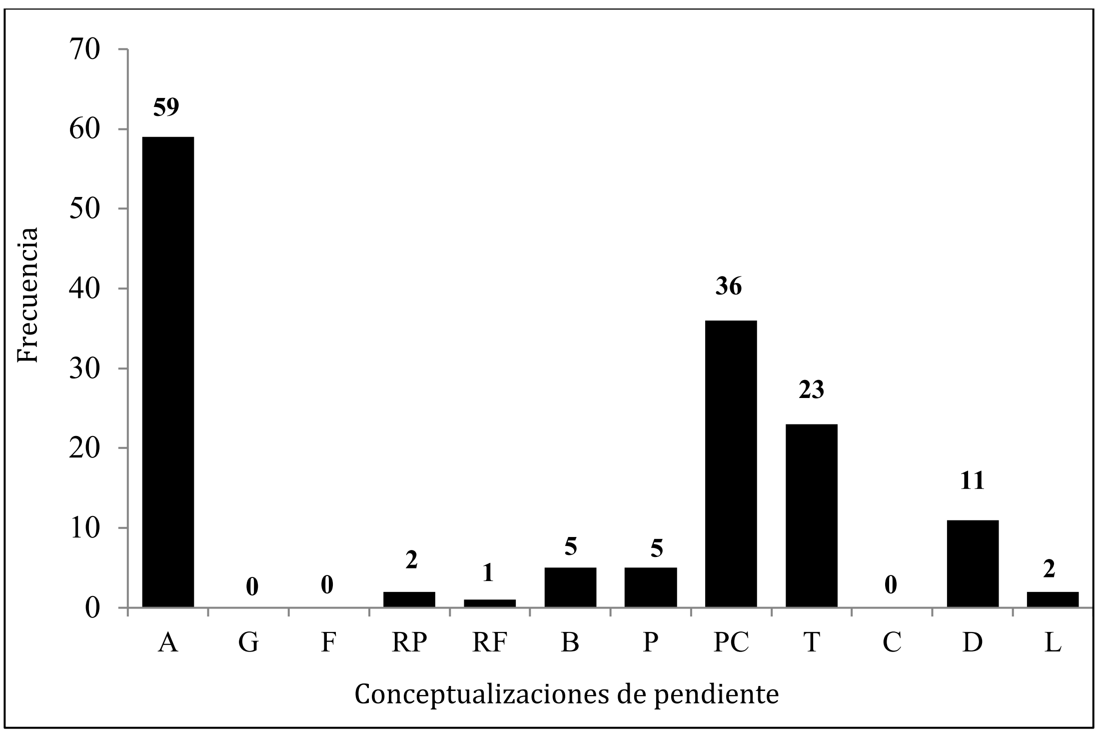


Figura 3. Conceptualizaciones de pendiente encontradas en las notas de clase

Las siguientes gráficas muestran por unidad de contexto, las conceptualizaciones de pendiente identificadas en la instrucción de los profesores. En ellas, se puede visualizar que las conceptualizaciones *razón algebraica*, *coeficiente paramétrico* y la *trigonométrica*. Son las que integran el eje central de la enseñanza de la pendiente.

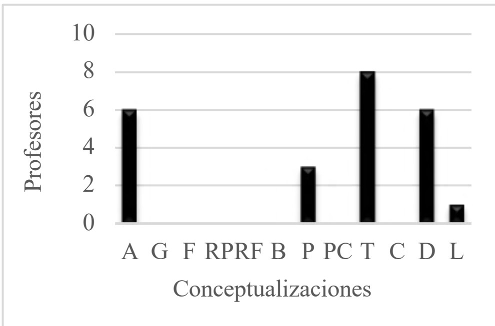


Figura 4. Conceptualizaciones identificadas en definiciones

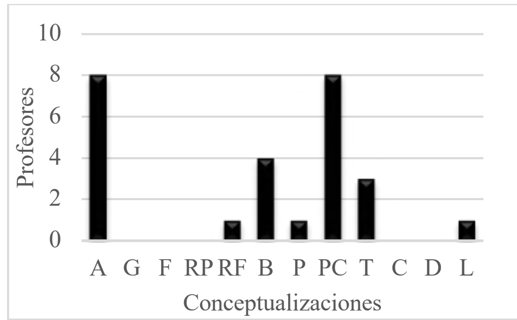


Figura 5. Conceptualizaciones identificadas en explicaciones

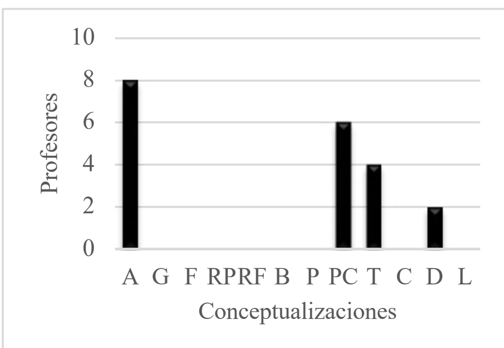


Figura 6. Conceptualizaciones identificadas en ejemplos

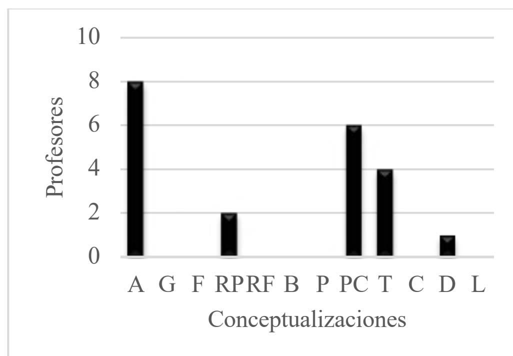


Figura 7. Conceptualizaciones identificadas en actividades

Las conceptualizaciones *propiedad funcional* y la de *cálculo* no fueron identificadas en el contenido que enseñan los profesores, este resultado se esperaba dado que dichas conceptualizaciones están orientadas hacia las ideas variacionales de la pendiente, las cuales involucran el razonamiento covariacional, mismo que no forma parte de los estándares, competencias o desempeños propuestos en Geometría Analítica.

Por otra parte, la ausencia de la conceptualización *razón geométrica* y la presencia de *coeficiente paramétrico* y con escaso énfasis la de *constante lineal,* dan la pauta para hipotetizar la existencia de una preferencia a un enfoque más analítico y procedimental en la enseñanza de la pendiente, el cual no favorece la conexión entre las conceptualizaciones. Esto, debido a que la *razón geométrica* considerada como una secuencia de triángulos rectángulos semejantes cuyas hipotenusas forman parte de la gráfica de la recta daría la pauta para conceptualizar la pendiente como una *constante lineal*. Evidenciando como la pendiente se vincula con la rectitud de una línea y cómo ésta actúa como un parámetro en las funciones lineales, lo cual conllevaría al *coeficiente paramétrico* (Dolores-Flores et al., 2020).

Por otra parte, la conceptualización *situación mundo real* (enfatizada en situaciones físicas) solo fue evidenciada escasamente en las ***explicaciones*** que los profesores dan cuando abordan el concepto (ver Figura 5). Esto es contradictorio con las intenciones de las recientes reformas curriculares en México donde se enfatiza que los conceptos deben vincularse con diversos contextos que involucren fenómenos de la vida real (Dolores e Ibáñez, 2020), lo cual, tiene la intención de favorecer la creación de escenarios significativos para desarrollar la comprensión de conceptos matemáticos como la pendiente (Stump, 2001).

CAPÍTULO V

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La investigación reportada en este documento tuvo por objetivos, identificar las conceptualizaciones de pendiente en profesores de matemáticas y, las que enseñan cuando trabajan dicho concepto en la clase de matemáticas. El presente capítulo está dedicado a la discusión y análisis de los datos y las conclusiones a las cuales se ha llegado. Su estructura consta, en primer lugar, del bosquejo de las conceptualizaciones de pendiente que poseen los profesores; en segundo, las conceptualizaciones que enseñan en la clase de matemáticas; en tercero, se realiza una comparación entre lo encontrado en ambos contextos; en cuarto, se establecen las implicaciones pedagógicas del trabajo. Por último, se plantean las limitaciones y futuras investigaciones.

5.1 Las conceptualizaciones que poseen los profesores

De acuerdo a lo señalado en el capítulo anterior, las conceptualizaciones de pendiente más utilizadas por los profesores participantes al responder las tareas fueron: *razón algebraica*, *propiedad física, indicador de comportamiento, coeficiente paramétrico,* la *conceptualización trigonométrica* y *razón geométrica*; la conceptualización *propiedad funcional* y la *situación mundo real* en situaciones funcionales fueron escasamente utilizadas. Hay predominio de la conceptualización *razón algebraica*, ya que la fórmula algebraica utilizada para calcular la pendiente es el vínculo inmediato que hacen los profesores con este concepto. Estos resultados son parcialmente similares a los obtenidos por Hoffman (2015) quien reportó que las conceptualizaciones de pendiente predominantes en profesores estadounidenses (de grado 6 a 8) son: *razón algebraica*, *razón geométrica* y *propiedad física*.

Lo anterior quizá se deba a dos razones. Primera, porque los profesores quienes participaron en este estudio trabajan en el bachillerato e incluso imparten cálculo y eso les obliga a ampliar más sus conocimientos. Segunda, porque en ambos casos, cuando se enseña la pendiente es inevitable llegar a utilizar la fórmula algebraica para calcularla e invariablemente esto se lleva al plano cartesiano para ayudar a la visualización y el significado geométrico de esa fórmula. Además, según Martínez (2005) los libros de texto cuando tratan la pendiente invariablemente lo hacen utilizando su representación algebraica y su representación geométrica. De este modo, el nivel educativo en el que se desempeñan los profesores y la influencia de los textos que utilizan pudiera estar condicionando sus conceptualizaciones.

Al pedirles una definición de pendiente, la mayoría de los profesores lo hace en términos de: **medida de la inclinación**, **ángulo de inclinación de la recta** o **inclinación de la recta**, en donde se nota el uso frecuente del término "inclinación" evidenciando con ello la conceptualización *propiedad física* y el escaso énfasis que dan a la pendiente como un concepto variacional, resultado similar a lo encontrado por Hoffman (2015) y en estudiantes de segundo de B.U.P por Azcárate (1992). Estas investigaciones evidencian que sin importar las conceptualizaciones de pendiente que tienen los individuos, estos son más proclives a realizar interpretaciones visuales cuando la definen. Situación que según Cheng y Sabinin (2008), puede estar ocurriendo debido a que las personas suelen tener su primer contacto con la pendiente a través de la inclinación de objetos en la vida cotidiana. Y, por tanto, esto permite a un individuo visualizar el concepto matemático de pendiente sin depender de alguna habilidad matemática, como usar una razón o calcular un límite (Hoffman, 2015).

La mayoría de los profesores consideran como equivalentes la **pendiente** y la **inclinación de la recta** (y no como atributos vinculados a una misma característica), resultado coincidente con lo encontrado en profesores de secundaria por Páez (2015). Al igual que Mudaly y Moore-Russo (2011) también identificamos que los profesores, Noé, Salvador, José Antonio y Ulises, asumen las frases **pendiente igual a cero** y **no tiene pendiente** como equivalentes. Lo cual sugiere la necesidad de profundizar en su conocimiento sobre la relación que establecen entre la pendiente y ángulo de inclinación de una recta, tal como lo advierten Zaslavsky et al. (2002) y Páez (2015).

Por otra parte, con base en los resultados del análisis de las producciones emitidas por los profesores, se identificó la conceptualización *situación mundo real* enfatizada en situaciones físicas al proporcionar ejemplos de su medio circundante utilizando objetos como: escaleras, rampas, calles, techos, etc. Mientras que, la pendiente vinculada a situaciones funcionales como razones o tasas de cambio se encontraron escasamente. Este resultado es similar a lo encontrado en Sudáfrica por Mudaly y Moore-Russo (2011) en profesores de grado 10 a 12. Lo cual refuerza la hipótesis de que las ideas geométricas y variacionales de la pendiente son escasamente vinculadas por profesores de matemáticas (Dolores et al., 2018; Teuscher y Reys, 2010, 2012; Walter y Gerson, 2007).

Los resultados de esta investigación evidenciaron la utilización de diferentes conceptualizaciones de pendiente por los profesores. Sin embargo, en sus respuestas prevalecieron las que tienen un vínculo directo con la noción geométrica de pendiente (medida de la inclinación de una recta). Además, la evidencia verbal obtenida sugiere que el conocimiento de algunos profesores sobre la pendiente es predominantemente **procedimental**. Esto nos hace suponer que estos profesores pueden inducir a sus estudiantes a privilegiar este tipo de conocimiento, y por tanto generar una comprensión limitada del concepto de pendiente. Esta situación pone en manifiesto la necesidad de capacitar y actualizar a los profesores para que desarrollen una comprensión más amplia y profunda sobre este concepto. En este sentido, Byerley y Thompson (2017) y Copur-Gencturk (2015) señalan que los profesores que comprenden coherentemente un concepto matemático que enseñan, brindan mayores posibilidades a sus estudiantes a realizar una comprensión completa y conectada del concepto.

5.2 Las conceptualizaciones que enseñan los profesores

A juzgar por lo encontrado en las notas de sus estudiantes, al enseñar el concepto de pendiente a sus estudiantes los profesores centran la atención principalmente en las conceptualizaciones razón algebraica, coeficiente paramétrico y la trigonométrica. Estas conceptualizaciones propician el uso excesivo del lenguaje algebraico, de reglas y algoritmos, mediante la manipulación de expresiones tales como: $y = mx + b$; $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; $m = \operatorname{tg}\theta$. Por tanto, las altas frecuencias identificadas en las notas de los estudiantes pueden inducir al privilegio del pensamiento procedimental y menoscabo del pensamiento conceptual, tal como lo advierten Dolores-Flores et al. (2018), Lingefjärd y Farahani (2017) y Walter y Gerson (2007). Esto aunado con la situación señalada por Báez et al. (2007) en el sentido de que en México son pocos los profesores de matemáticas de bachillerato que cuentan con el perfil para gestionar la enseñanza y aprendizaje, por lo cual la mayoría de ellos se limita a enseñar contenidos tal como lo sugiere un libro de texto, incluido el nivel de demanda cognitiva que en los ejercicios y problemas estos textos presentan.

En diversas investigaciones se ha insistido en la importancia del concepto de pendiente en la educación matemática (Birgin, 2012; Dolores-Flores et al., 2018; Mudaly y Moore-Russo, 2011; Özer y Sezer, 2014; Stump, 1999, 2001a, 2001b; Zou, 2014) por su presencia en la currícula de matemáticas (Stanton y Moore-Russo 2012; Rivera y Dolores, 2017; Dolores et al., 2020) y por sus múltiples conceptualizaciones (Moore-Russo et al., 2011). De acuerdo con los Principios y Estándares para la Educación Matemática del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2014), los profesores de matemáticas en su práctica deben tratar el concepto de pendiente vinculando las ideas intra-matemáticas con las extra-matemáticas, de tal forma que el estudiante tenga la oportunidad de integrar las diversas representaciones del concepto para desarrollar la comprensión de este. De acuerdo con Stump (2001a) lo señalado por la NCTM se favorecería si en la enseñanza y aprendizaje de la pendiente se enfatiza la conceptualización *situación mundo real*. No obstante, los resultados de esta y otras investigaciones (por ejemplo, Stump, 2001b; Nagle y Moore-Russo, 2013) coiciden el escaso énfasis que los profesores de matemáticas dan a la relación entre la pendiente y situaciones asociadas con el mundo real cuando enseñan el concepto.

Por otra parte, Deniz y Kabael (2017) señalan que la conceptualización *razón geométrica* es un referente importante para la interiorización de la pendiente como una razón constante en la recta, situación que se vincula directamente con la conceptualización *constante lineal*. Por lo cual, representa una idea intuitiva que posibilita la conexión con otras conceptualizaciones, siempre y cuando no sea considerada únicamente como una herramienta procedimental (Byerley y Thompson, 2017; Walter y Gerson, 2007). Al respecto, algunas investigaciones han reportado que al diseñar materiales de instrucción, los profesores tienden a enfatizar en la *razón geométrica* (Nagle y Moore-Russo, 2013; Stump 2001b), resultado similar a los hallazgos reportados por otros investigadores acerca del conocimiento de profesores y estudiantes de diferentes niveles educativos (Dündar, 2015; Newton y Poon, 2015; Nagle et al., 2013; Walter y Gerson, 2007), así como lo que se promueven en los programas de estudio (Stanton y Moore-Russo 2012; Nagle y Moore-Russo, 2014).

En el contexto mexicano esto es contrastante, ya que se ha reportado que en el currículo de la educación básica (primaria, secundaria y bachillerato) la conceptualización *razón geométrica* es escasamente promovida (Dolores et al., 2020). Aunado a esto, Rivera et al. (2019) encontraron que, en estudiantes recién egresados del bachillerato, esta conceptualización es escasamente evidenciada cuando resuelven tareas que involucran dicho concepto, a diferencia de la *razón algebraica* que es la más recurrente en sus procedimientos. Estos resultados, en contraste con el presente estudio son correspondientes, ya que en las notas de clase se identificó que la conceptualización *razón algebraica* es la que predomina en las ***explicaciones***, ***ejemplos*** y ***actividades*** que promueven los profesores del bachillerato en el contenido que enseñan al abordar el concepto de pendiente, mientras que *razón geométrica* no fue identificada.

Finalmente, la evidencia reunida y el análisis realizado proporciona elementos para inferir que en la mayoría de los profesores participantes en este estudio persisten las interpretaciones analíticas y procedimentales de la pendiente, en el mismo sentido de Zaslavsky et al. (2002). Estos resultados, ponen en manifiesto la necesidad de que los diferentes programas de formación y actualización de profesores de matemáticas ofrezcan oportunidades para examinar el concepto de pendiente, integrando: reflexión, análisis, propuestas didácticas y metodológicas sobre las diversas conceptualizaciones de pendiente. Así como la conexión entre ellas, su vínculo con otros conceptos matemáticos presentes en el currículo de matemáticas de bachillerato y el desarrollo de nociones conceptuales.

5.3 Conceptualizaciones de pendiente que poseen y las que enseñan los profesores

Los datos de esta investigación sugieren similitudes y discrepancias entre las conceptualizaciones de pendiente que poseen los profesores y las que enseñan a sus estudiantes. A juzgar por la cercanía de las frecuencias, las similitudes son notables en las conceptualizaciones ligadas directamente a la definición analítica de pendiente, tales como: *razón algebraica*, *coeficiente paramétrico* y la *trigonométrica* (ver Figura 4). Estas conceptualizaciones tienen mayor incidencia en el conocimiento procedimental. Este resultado coincide con lo encontrado por Dolores et al. (2018) en estudiantes de bachillerato de la misma región que los participantes en esta investigación y por lo encontrado por Dolores e Ibáñez (en prensa) en libros de texto de matemáticas utilizados por profesores de la misma comarca. Cierta similitud se nota también en la conceptualización *propiedad determinante*, los datos sugieren que los profesores la poseen y que la enseñan, aunque parece que no con mucho énfasis.

Sin embargo, también hay varias discrepancias. La más notable se encuentra en la conceptualización *propiedad física* (ver Figura 4), si bien es cierto que los profesores son poseedores de esa idea los datos indican que la enseñan muy poco. Ocurre lo mismo con la conceptualización *indicador de comportamiento* a pesar de que los profesores la poseen no la enseñan, es posible que esto se deba a que el curso de Matemáticas III (en el cual se revisaron las notas) por tradición es dedicado a la Geometría Analítica y esa conceptualización es más utilizada en el análisis del comportamiento de funciones en precáclulo o en cálculo (SEP, 2013c). En este sentido, llama la atención las discrepancias relativas a las conceptualizaciones *situación mundo real* y *constante lineal*, los profesores parecen conocerla, sin embargo, no las promueven en sus clases. Este hallazgo, difiere con lo señalado en los Principios y Estándares para la Educación Matemática del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2014), donde se plantea que los profesores de matemáticas deben promover y enseñar el vínculo que conceptos como la pendiente tienen con su medio circundante. Mas acentuada aún es la discrepancia relativa a la *razón geométrica*, a pesar de que los profesores mostraron conocerla no la promueven para nada en sus clases (ver Figura 4). Estos hallazgos hacen suponer, que los profesores al impartir sus clases de matemáticas podrían estar anteponiendo el contenido tal y como se es planteado en libros de texto sobre lo que ellos saben (Salgado et al., 2020), pues resulta interesante y al mismo tiempo preocupante como coinciden lo que enseñan y lo encontrado en libros de texto por Dolores e Ibáñez (en prensa), quienes señalan que estos no promueven la comprensión del concepto de pendiente.

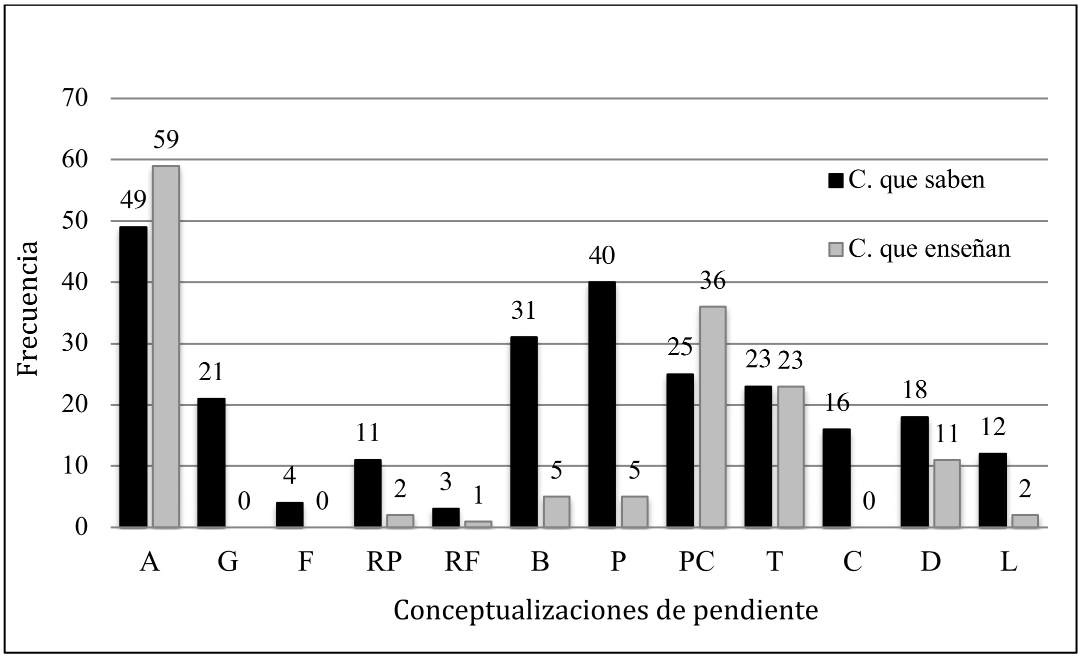


Figura 8. Gráfica comparativa entre las conceptualizaciones que conocen y las que enseñan

Por otro lado, Rivera et al. (2019) encontró que los estudiantes recién egresados del bachillerato conocen y utilizan con mayor frecuencia las conceptualizaciones: *propiedad física* y *razón algebraica.* Este resultado, coincide con lo encontrado en el conocimiento de los profesores y, parcialmente con el contenido que enseñan donde las más destacadas son: *razón algebraica* y *coeficiente paramétrico.* En este orden de ideas, Rivera y Dolores (2018) señalan que después de completar los cursos de Matemáticas III y Cálculo Diferencial, los estudiantes del bachillerato suelen desarrollar las conceptualizaciones: *propiedad física, razón algebraica y coeficiente paramétrico,* resultado que coincide parcialmente con lo encontrado en esta investigación.

Finalmente, los resultados de esta investigación han evidenciado que la mayoría de los profesores poseen ideas relativas a la mayoría de las conceptualizaciones de pendiente, algunas más acentuadas que otras. Sin embargo, al enseñar dicho concepto, suelen hacer a un lado la mayoría de sus ideas y centran su atención en la discusión de algoritmos implicados en el cálculo de la pendiente y la reproducción de estos (por ejemplo, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y $m = \operatorname{tg} \theta$). Dichas fórmulas, suelen ser aceptadas por decreto y sin un mínimo de reflexión acerca de los significados y conexiones que pueden tener. No obstante, esto podría vincularse al hecho de que algunos estudiantes al culminar sus estudios de bachillerato terminan concibiendo a la pendiente como una fórmula (Rivera et al., 2019) y con la idea de que este concepto solo tiene sentido en el contexto intramatemático. Lo cual, conlleva a una comprensión limitada y representa un problema mayor, debido a que los estudiantes no reciben un equipamiento necesario para desarrollar la comprensión de otros conceptos avanzados vinculados a la pendiente en sus estudios universitarios (Carlson et al., 2010; Confrey y Smith, 1995; Noble et al., 2001).

5.4 Implicaciones pedagógicas del trabajo

Finalmente, la evidencia reunida y el análisis realizado proporcionan elementos para inferir que existen profesores del bachillerato en México en los cuales persisten las interpretaciones analíticas y procedimentales de la pendiente en su conocimiento y, en el contenido que enseñan, en el mismo sentido de Zaslavsky et al. (2002). Estos resultados sugieren que los diferentes programas de formación y actualización de profesores de matemáticas deben ofrecer oportunidades para examinar el concepto de pendiente, integrando: reflexión, análisis, propuestas didácticas y metodológicas sobre las diversas conceptualizaciones de pendiente. Así como la conexión entre ellas y su vínculo con otros conceptos matemáticos presentes en el currículo de matemáticas de bachillerato. Sin embargo, para lograrlo es necesario trascender los conocimientos procedimentales a un plano conceptual.

Por otro lado, no debemos ignorar que, en nuestro contexto mexicano, existe un sector de profesores que imparten cursos de matemáticas en el nivel medio superior que no cuentan con el perfil para ejercer y, en consecuencia, reproducen el contenido matemático tal como es sugerido en los libros de texto que le son propuestos (Báez et al., 2007). Por lo cual, es necesario que los investigadores en educación matemática se involucren en la realización de libros de texto que favorezcan el desarrollo de conocimientos matemáticos conceptuales y en la actualización de los profesores para que estos los empleen adecuadamente, a través de talleres, cursos, congresos, etc. A este respecto, la elaboración de un libro dirigido a profesores y estudiantes de nivel medio superior, centrado en la discusión y reflexión respecto a las diversas conceptualizaciones de pendiente y la conexión entre ellas, representaría un buen inicio.

5.5 Limitaciones y futuras investigaciones

De acuerdo con los resultados de este estudio, las notas de clase han permitido identificar las conceptualizaciones de pendiente que promueven los profesores en el contenido que enseñan. Sin embargo, reconocemos que existen limitaciones desde esta perspectiva para hablar de todo lo que ocurre en el aula, dado que hay actividades que no suelen tener cabida en ellas, como, por ejemplo: diálogos orales, la gestualidad desarrollada por los diferentes actores participantes y el tiempo dedicado a cada una de las actividades, etc. Además, tampoco muestran si ha existido una interiorización real de los contenidos trabajados por parte del alumno, puesto que puede existir transcripción sin que exista comprensión o asimilación de lo copiado. Por ello, consideramos que futuras investigaciones deberían centrarse en contrastar el contenido que realmente asimilan los estudiantes con el de sus notas de clase a cerca del concepto de pendiente. Por otro lado, sería interesante explorar el contenido de las notas de clase de aquellos estudiantes cuyos profesores no ejercen control sobre las mismas, a fin de conocer la actividad del estudiante en un dominio privado tal como lo señalan Fried y Amit (2003), y de esta manera conocer más a fondo sus percepciones y focos de interés en torno al aprendizaje del concepto de pendiente.

REFERENCIAS

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *3*(3), 205–224.

Andrà, C. (2013). How do students understand mathematical lectures? Note-taking as retelling of the teacher's story. *For the learning of mathematics*, *33*(2), 18–23.

Arce, M. (2016). *Análisis de los cuadernos de matemáticas de los alumnos de bachillerato: percepciones, perfiles de elaboración y utilización y rendimiento académico*, Tesis doctoral no publicada, Universidad de Valladolid.

Arce, M. (2018). El cuaderno de matemáticas: Un instrumento relevante en las aulas que suele pasar desapercibido. *La Gaceta de la RSME*, *21*(2), 367–387.

Arce, M., Conejo L., y Ortega, T. (2016). ¿Cómo son los apuntes de matemáticas de un estudiante? Influencia de los elementos matemáticos y sus relaciones. *Enseñanza de las Ciencias*, *34*(1), 149–172.

Arce, M., y Conejo, L. (2017). Análisis de las notas tomadas por los alumnos en una presentación inicial de límite de una función. *PNA, 11*(3), 155–179.

Artzt, R. y Armour-Thomas, E. (1999). A cognitive model for examining teachers' instructional practice in mathematics: a guide for facilitating teacher reflection. *Educational Studies in Mathematics, 40,* 211–235.

Assad, D. A. (2015). Task-based interviews in mathematics: Understanding student strategies and representations through problem solving. *International Journal of Education and Social Science*, (1), 17–26.

Azcarate, C. (1992). Estudio de los esquemas conceptuales y de los perfiles de unos alumnos de segundo de BUP en relación con el concepto de pendiente de una recta. *Épsilon*, *24*, 9–22.

Badanelli, A., y Mahamud, K. (2007). Posibilidades y limitaciones del cuaderno escolar como material curricular. Un estudio de caso. *Revista de la Asociación de Inspectores de Educación de Madrid: Avances en supervisión educativa, 5*, 79–90.

Badger, R., White, G., Sutherland, P., y Haggis, T. (2001). Note perfect: an investigation of how students view taking notes in lectures. *System, 29*, 405–417.

Báez, M., Cantú, C., y Gómez, K. (2007). *Un estudio cualitativo sobre las prácticas docentes en las aulas de matemáticas en el nivel medio.* Tesis de licenciatura no publicada. Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Yucatán. México.

Bardin, L. (2002). *El Análisis de Contenido*. 3ª Edición. Madrid: Akal.

Barr, G. (1980). Graphs, gradients and intercepts. *Mathematics in School*, *9*(1), 5–6.

Barr, G. (1981). Some student ideas on the concept of gradient. *Mathematics in School*, *10*(1), 14–17.

Birgin, O. (2012). Investigation of eighth-grade students' understanding of the slope of the linear function. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *26* (42a), 139–162.

Byerley, C., y Thompson, P. (2017). Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *The Journal of Mathematical Behavior, 48*, 168–193.

Carlson, M., Oehrtman, M., y Engelke, N. (2010). The precalculus concept assessment: A tool for assessing students' reasoning abilities and understandings. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 113–145.

Casey, S., y Nagle, C. (2016). Students' use of slope conceptualizations when reasoning about the line of best fit. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(2), 163–177.

Chartier, A. M. (2009). Los cuadernos escolares: ordenar los saberes escribiéndolos. Cultura escrita y Sociedad, 8, 163-182. (Traducción de una ponencia presentada en el VIII Congreso Internacional de Historia de la Cultura Escrita, celebrado en la Universidad de Alcalá del 5 al 8 de julio de 2005).

Cheng, D., y Sabinin, P. (2008). *Elementary students' conceptions of steepness.* En O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (pp. 297–304), México: Cinvestav-UMSNH.

Cho, P. y Nagle, C. (2017). Procedural and conceptual difficulties with slope: An analysis of students' mistakes on routine tasks. *International Journal of Research in Education and Science*, *3*(1), 135–150.

Choy, B., Lee, M., y Mizzi, A. (2015). Textbook signatures: an exploratory study of the notion of gradient in germany, singapore and south korea. En Beswick, K., Muir, T., y Wells, J. (Eds.), *Proceedings of the 39th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, (pp. 161–168). Hobart, Australia.

Coe, E. (2007). *Modeling teachers' ways of thinking about rate of change.* Tesis Doctoral. Arizona State University, Tempe, AZ.

Confrey, J., y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(1), 66–86.

Copur-Gencturk, Y. (2015). The effects of changes in mathematical knowledge teaching: A longitudinal study of teachers' knowledge and instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(3), 280–330.

D'Amore, B. (2011). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista Científica*, *11*(2), 150–164.

Deniz, O., y Kabael, T. (2017b). Students' mathematization process of the concept of slope within the realistic mathematics education. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi (H.U. Journal of Education)*, *32*(1) 123–142.

Denzin, N. K., y Lincoln, Y. S. (2005). *The Sage Handbook of Qualitative Research*. London: Sage.

Dolores-Flores, C., e Ibáñez, G. (en prensa). Conceptualizaciones de la pendiente en libros de texto de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática.*

Dolores-Flores, C., Rivera-López, M. I., y García-García, J. (2018). Exploring mathematical connections of pre-university students through tasks involving rates of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(3), 369-389.

Dolores-Flores, C., Rivera-López, M. I., y Moore-Russo, D. (2020). Conceptualizations of slope in Mexican intended curriculum. *School Science and Mathematics*, *120*(2), 104-115.

Dolores, C., Alarcón, G., y Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *5*(3), 225–250.

Dolores, C., García, J., y Gálvez, A. (2017). Estabilidad y cambio conceptual acerca de las razones de cambio en situación escolar. *Educación Matemática*, *29*(2), 125–158.

Dündar, S. (2015). Knowledge of mathematics teacher-candidates about the concept of slope. *Journal of Theory and Practice in Education (ve Uyguluma), 11*(2)*,* 673–693.

Dündar, S. (2015). Knowledge of mathematics teacher-candidates about the concept of slope. *Journal of Theory and Practice in Education (Eğitimde Kuram ve Uyguluma), 11*(2), 673–693. Recuperado de http://dergipark.gov.tr/eku/issue/5465/74218.

Espino, S. (2012). *La toma de apuntes, su uso y enfoque de aprendizaje en estudiantes universitarios*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Barcelona.

Flick, U. (2014). *The SAGE Handbook of Qualitative Data Analysis.* London, Thousand Oaks and Dehli: Sage.

Fried, M. N., y Amit, N. (2003) Some reflections on mathematics classroom notebooks and their relationship to the public and private nature of student practices. *Educational Studies in Mathematics*, *53*(2), 91–112.

Fukawa-Connelly, T., Weber, K., y Mejía-Ramos, J. P. (2017). Informal content and student note-taking in advanced mathematics classes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *48*(5), 567–579.

García, E. (2006). *Un estudio descriptivo de las interacciones en el aula, elemento de análisis en la reprobación y rezago de Cálculo* (Tesis de Licenciatura). Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Gil, L., Ávila, V., y Ferrer, A. (2011). Toma de notas en lectura de textos múltiples: análisis de diferencias individuales. *Infancia y Aprendizaje, 34*(4), 449–464.

Goldin, G. A. (1997). Chapter 4: Observing mathematical problem solving through task-based interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 9*(1), 40–177.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517–545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Guasch, T., y Castelló, M. (2002). Aproximación a la enseñanza de la toma de apuntes en la Educación Secundaria Obligatoria: un estudio descriptivo. *Infancia y Aprendizaje*, *25*(2), 169–181.

Gueudet, G., y Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 199–218.

Gueudet, G., y Trouche, L. (2010). Des ressources aux documents travail du professeur et genèses documentaires. En G. Gueudet y L. Trouche (Eds.), *Ressources vives* (pp. 57–74). Lyon: Presses Universitaires de Rennes.

Guzmán, J., y Kieran, C. (2013). Becoming aware of mathematical gaps in new curricular materials: a resource-based analysis of teaching practice. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1,2), 163–190.

Hartley, J., y Davies, I. K. (1978). Note-taking: A critical review. *Programmed Learning and Educational Technology, 15*(3), 207–224.

Herbert, S. y Pierce, R. (2008). An 'emergent model' for rate of change. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*(3), 231–49.

Hoffman, W. (2015). *Concept image of slope: Understanding middle school mathematics teachers' perspective through task-based interviews*. Tesis Doctoral. Universidad de Carolina del Norte. Charlotte.

Iannone, P., y Miller, D. (2019). Guided notes for university mathematics and their impact on students' note-taking behaviour. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(3), 387–404.

Kim, R. Y. (2012). The quality of non-textual elements in mathematics textbooks: an exploratory comparison between South Korea and the United States. *ZDM*, *44*(2), 175–187.

Koichu, B., y Harel, G. (2007). Triadic interaction in clinical task-based interviews with mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(3), 349–365.

Kothari, C. R. (2004). *Research methodology: methods and techniques.* Indian: New Age International (P) Ltd., Publishers.

Lehmann, C. H. (1980). *Geometría Analítica.* México, D. F.: Limusa.

Lingefjärd, T. y Farahani, D. (2017). The elusiv slope. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *75*(1), 35–54.

Lobato, J., y Thanheiser, E. (2002). Developing understanding of ratio-as-measure as a foundation for slope. In B. Litwiller y G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook* (pp. 162–175). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Martínez, R. (2005). *La pendiente y su variación, un estudio didáctico y cognitivo*. Tesis de maestría no publicada, Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Mercado, A. I. (2003). La toma de apuntes y la resolución de problemas en educación secundaria. *Épsilon, 55*, 63–72.

Merriam, S. B., & Tisdell, E. J. (2015). *Qualitative Research: A Guide to Design and Implementation*. United States of America: Jossey–Bass.

Monereo, R. Carretero, M. Castelló, I. Gómez y M. L. Pérez Cabaní (1999). Toma de apuntes en estudiantes universitarios: Descripción de las condiciones de un escenario específico. En J. I. Pozo y C. Monereo (coords.), *El Aprendizaje Estratégico: Enseñar a Aprender desde el Currículo* (pp 219–236). Madrid: Santillana.

Moore-Russo, D., Conner, A., y Rugg, K. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(1), 3–21.

Moschkovich, J. (1990). Students' interpretations of linear equations and their graphs. En R. Speiser, C. A. Maher, y C.N. Walter (Eds.) *Proceedings of the 14th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 109–116). Snowbird, Utah: North American Chapter.

Mudaly, V., y Moore-Russo, D**.** (2011). South African teachers’ conceptualisations of gradient: A study of historically disadvantaged teachers in an Advanced Certificate in Education Programme. *Pythagoras*, *32*(1), 27–33.

Nagle, C., Casey, S., y Moore-Russo, D. (2017). Slope and line of best fit: A transfer of knowledge case study. *School Science and Mathematics*, *117*(1-2), 13–26.

Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J., y Martin, K. (2013). Calculus students’ and instructors’ conceptualizations of slope: a comparison across academic levels. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *11*(6), 1491–1515.

Nagle, C., y Moore-Russo, D. (2013). The concept of slope: Comparing teachers’ concept images and instructional content. *Investigations in Mathematics Learning*, *6*(2), 1–18.

Nagle, C., y Moore-Russo, D. (2014). Slope across the curriculum: Principles and standards for school mathematics and common core state standards. *Mathematics Educator*, *23*(2), 40–59.

Nájera, J. (2015). *Conexiones que establecen los estudiantes de bachillerato al resolver problemas de razones de cambio* (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Guerrero, México.

NCTM. (2014). *Principles to action: Ensuring mathematical success for all.* Nacional Council of Teachers of Mathematics: United State of America.

Newton, X. A., y Poon, R. C. (2015). Pre-service majors' understanding of slope according to common core mathematics standards: An exploratory study. *Global Journal of Human-Social Science, 15*(7), 27–42.

Noble, T., Nemirovsky, R., Wright, T., y Tierney, C. (2001). Experiencing change: The mathematics of change in multiple environments. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(1), 85–108.

Nogueira, S. (2005). Efectos del uso de la pizarra en la toma de apuntes de estudiantes universitarios. *Cultura y Educación, 17*(4), 373–385.

Otero, M. R., Fanaro, M. D. L. Á., Sureda, P., Llanos, V. C., y Arlego, M. (2014). *La teoría de los campos conceptuales y la conceptualización en el aula de matemática y física*. Buenos Aires: Dunken.

Özer, E., y Sezer, R. (2014). A comparative analysis of questions in american, singaporean, and turkish mathematics textbooks based on the topics covered in 8th grade in Turkey. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *14*(1), 411–421.

Páez, D. (2015). *Análisis de la práctica del profesor de Matemáticas en torno al concepto de pendiente: Énfasis en la reflexión durante y después de la acción* (Tesis Doctoral). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México.

Páez, D., Guzmán, J., y Zambrano, J. (2015). Reflexiones del profesor en torno al concepto de pendiente. En. A. Ruiz (Presidencia). *XIV Conferencia interamericana de educación matemática*. Conferencia llevada a cabo en Chiapas, México. Consultado en http://xiv.ciaemredumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/365/183

Rensaa, R. J. (2014). The impact of lecture notes on an engineering student's un- derstanding of mathematical concepts. *The Journal of Mathematical Behavior*, *34*, 33–57.

Reyes-Gasperini, D. (2013). *La transversalidad de la proporcionalidad*. México: Subsecretaría de Educación Media Superior. Secretaría de Educación Pública.

Rivera, M. I. (2020). *Preconcepciones de pendiente en estudiantes de bachillerato.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Rivera, M. I. y Dolores, C. (2017). Concepciones de la pendiente en el currículum oficial de la educación básica. *Memoria del XIV Congreso Nacional de Investigación Educativa* (pp. 1-11). Recuperado el 1 de Julio de 2018 de http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v14/doc/2566.pdf

Rivera, M. I., Salgado, G., y Dolores, C. (2019). Explorando conceptualizaciones de la pendiente en estudiantes universitarios. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*(65), 1027–1046.

Saint-Onge, M. (1997). *Yo explico, pero ellos. . . ¿aprenden?* Bilbao: Mensajero.

Salgado, B., Rivera, M. I., y Dolores, C. (2019). Conceptualizaciones de pendiente: Contenido que enseñan los profesores del Bachillerato. *UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *15*(57), 41–56.

Schoenfeld, A. (2007). Method. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on the mathematics teaching and learning* (pp. 69-109). USA: Information Age.

Schoenfeld, A. (2008). Research methods in (mathematics) education. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 467–519). USA: Routledge.

Schoenfeld, A. H., Smith, J. P., y Arcavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology* (Vol. 4, pp. 55–175). USA: Hillsdale.

SEP (2011). *Programas de estudio 2011. Educación secundaria. Matemáticas*. México, D.F.: SEP. Recuperado de http://evaluaciondocente.sep.gob.mx/materiales/SEPPROGRAMASDEESTUDIO2011.GUIAPARAELMAESTRO.SECUNDARIA.MATEMATICAS.pdf

SEP (2013a). *Matemáticas III.* México, D. F.: Secretaría de Educación Media Superior. Recuperado de http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion- academica/programas-de-estudio/3er_SEMESTRE/Matematicas_III_biblio2014.pdf

SEP (2013b). *Matemáticas I.* México, D. F.: Secretaría de Educación Media Superior. Recuperado de http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion- academica/programas-de-estudio/1er_SEMESTRE/Matematicas_I_biblio2014.pdf

SEP (2013c). *Cálculo Diferencial.* México, D. F.: Secretaría de Educación Media Superior. Recuperado de http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion- academica/programas-de-estudio/cfp_5sem/calculo-diferencial.pdf

Stanton, M., y Moore-Russo, D. (2012). Conceptualizations of slope: A review of state standards. *School Science and Mathematics, 112*(5), 270–277.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas.* México, D. F.: Cengage Learning.

Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal*, *11*(2), 124–144.

Stump, S. (2001a). Developing preservice teachers' pedagogical content knowledge of slope. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(2), 207–227.

Stump, S. (2001b). High school precalculus students' understanding of slope as measure. *School Science and Mathematics*, *101*(2), 81–89.

Teuscher, D., y Reys, R. (2010). Slope, rate of change, and Steepness: Do students understand the concepts? *Mathematics Teacher*, *3*(7), 519–524.

Teuscher, D., y Reys, R. (2012). Rate of change: AP calculus students' understandings and misconceptions after completing different curricular paths. *School Science and Mathematics, 112*(6), 359–376.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2–3), 229–274.

Thompson, P. W. (2013). In the absence of meaning. In K. Leatham (Ed.), *Vital directions for research in mathematics education* (pp. 57–93). New York: Springer.

Thompson, P. W. (2016). Researching mathematical meanings for teaching. In L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 435–461). New York: Taylor & Francis.

Thompson, P. W., y Thompson, A. G. (1994). Talking about rates conceptually, Part I: A teacher's struggle. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(3), 279–303.

Thompson, P., y Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: foundational ways of thinking mathematically. In Cai, J. (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Valenzuela, C., y Dolores, C. (2012). El currículum oficial e impartido: contenidos y objetivos. *Números. Revista de Didáctica de las matemáticas*, *79*(3), 47–69.

Van Meter, P., Yokoi, L., y Pressley, M. (1994). College students' theory of note-taking derived from their perceptions of note-taking. *Journal of Educational Psychology*, *86*(3), 323–338.

Vergnaud, G. (1996). Alguna ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. *Perspectivas: Revista trimestral de educación comparada*, *4*(1), 195–207.

Vergnaud, G. (2013). Pourquoi la theory des champs conceptuels? *Infancia y aprendizaje*, *36*(2), 131–161.

Viñao, A. (2006). Los cuadernos escolares como fuente histórica: Aspectos metodológicos e historiográficos. *Annali di Storia dell'Educazione e Delle Istituzioni Scholastiche*, *25*(1), 17–35.

Wagener, L. (2009). A worthwhile task to teach slope. *Mathematics Teaching in the Middle School. 15*(3), 168–174.

Walter, J. G., y Gerson, H. (2007). Teachers' personal agency: Making sense of slope through additive structures. *Educational Studies in Matematics, 65*(2), 203–233.

Zaslavsky, O., Sela, H., y Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: The effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(1), 119–140.

Zou, H. (2014). *U.S. and Chinese Middle School Mathematics teachers' pedagogical content knowledge: The case of functions*. Tesis Doctoral. Arizona State University.