



Universidad Autónoma de Guerrero

---

Unidad Académica de Matemáticas

“Una solución al problema  
de banach usando teoría de  
haces fibrados y convexidad”

TESIS

Que para obtener el título de:  
Maestro en Ciencias Matemáticas

PRESENTA:

Carlos Alberto Lenis Posada

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Efrén Morales Amaya



29 de Noviembre de 2017.

# Agradecimientos

Para realizar este trabajo de tesis con éxito fue necesario la colaboración de diversas personas e instituciones a las cuales quiero agradecer. En primer lugar, me gustaría agradecer a Dios por que siempre me ayudado a cumplir mis sueños uno de ellos era iniciar mis pasos de investigación matemática. De antemano le agradezco a los Doctores que aportaron a mi formación durante mi Maestría. En especial quiero agradecer a mi Director de tesis, Efraín Morales Amaya, por creer en mi y su valioso tiempo invertido para la culminación satisfactoria de mi trabajo de tesis. Le agradezco a CONACYT por alimentar mi espíritu investigativo en el campo de la matemática, esto me permitió concentrarme completamente en la investigación. También quiero agradecer a la Universidad Autónoma de Guerrero, institución en la cual realicé mis estudios de Maestría en ciencias matemáticas. Finalmente, quiero dar un especial agradecimiento a mi Familia y amigos, quienes me han brindado su apoyo incondicional a lo largo de mi carrera académica. Esto no sería posible sin ustedes.



# Resumen

En este trabajo tesis estudiamos el problema de Banach generalizado el cual es un problema geométrico y topológico. Inicialmente estudiamos algunos resultados básicos sobre haces fibrados, incluyendo las definiciones básicas y el teorema de estructura. Presentamos también algunos ejemplos de haces fibrados y seguido de ello estudiamos los haces vectoriales y haces vectoriales euclidianos. Luego revisamos el artículo del Dr. Luis Montejano **Secciones homotéticas** ver [i] . Finalmente estudiamos la solución del problema de Banach, haciendo uso de los resultados trabajados en el seminario de geometría y topología damos una solución elegante y formal..



# Introducción

Un haz fibrado es, intuitivamente, un espacio topológico que localmente luce como un espacio producto; globalmente puede tener una estructura topológica diferente.

Un haz Fibrado es un espacio topológico  $B$  que tiene asociado un espacio  $X$ , el cual llamamos espacio base, y una función continua y sobreyectiva  $p : B \rightarrow X$  que llamamos la proyección de  $B$  sobre  $X$ . La proyección debe satisfacer que para cada  $x \in X$  el subespacio  $p^{-1}(x) \subset B$  es homeomorfo a un cierto espacio  $Y$ , que llamamos la fibra del haz. Podemos entonces pensar en  $B$  como un tejido de fibras pegadas mediante el espacio  $X$ , de forma que en cada punto  $x \in X$  hay una copia de  $Y$ . Usualmente denotaremos un haz fibrado como  $\beta = \langle B, p, X, Y \rangle$  lo que indica que  $B$  es el espacio total,  $p$  es la proyección,  $X$  es el espacio base y  $Y$  es la fibra. Más adelante ampliaremos esta notación para incluir otros elementos característicos de un haz fibrado,

Un ejemplo de haz fibrado es la la fibración de Hopf (también denominada el haz de Hopf o mapa de Hopf) describe una 3-esfera (una hiperesfera en el espacio de cuatro dimensiones) mediante circunferencias y una esfera ordinaria. Descubierta en 1931 por Heinz Hopf, es un ejemplo inicial importante de un haz de fibrado. Técnicamente, Hopf descubrió una función continua de varios a uno de la 3-esfera en la 2-esfera tal que cada punto en particular de la 2-esfera proviene de una circunferencia específica de la 3-esfera (Hopf, 1931). Por lo tanto la 3-esfera se compone de fibras, donde cada fibra es una circunferencia — uno para cada punto de la 2-esfera.

Esta estructura de haz de fibras queda expresada mediante la expresión.

$$S^1 \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{p} S^2,$$

que significa que el espacio de fibra  $S^1$  (un círculo) se encuentra encajado en el espacio total  $S^3$  (la 3-esfera), y  $p : S^3 \rightarrow S^2$  (Mapa de

Hopf proyecta  $S^3$  en el espacio base  $S^2$  (la 2-esfera ordinaria). La fibración de Hopf, al igual que todo haz de fibrado, posee la propiedad que es un producto local. Sin embargo es un haz de fibras no trivial, o sea  $S^3$  no es en sentido global un producto de  $S^2$  y  $S^1$  aunque a nivel local es indistinguible de este.

Otro ejemplo más claro del tipo de espacios a los que nos referimos es un espacio producto. Sea  $B = X \times Y$ ;  $B$  es un haz fibrado con base  $X$ , fibra  $Y$  y proyección  $p(x, y) = x$ . Claramente para cualquier  $x \in X$  se tiene que  $p^{-1}(x) = \{x\} \times Y$  que es homeomorfo a  $Y$  mediante el homeomorfismo natural  $(x, y) \rightarrow y$ . Note que en esta situación también se puede pensar en  $B$  como un haz fibrado con fibra  $X$  y base  $Y$ .

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>3</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>11</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>13</b>
<b>1. Teoría general de haces fibrados</b>	<b>15</b>
<b>2. Haces vectoriales</b>	<b>29</b>
2.0.1. Haces vectoriales euclidianos . . . . .	34
<b>3. Ancho constante y Superficies con secciones circulares</b>	<b>37</b>
3.1. Figuras de ancho constante . . . . .	37
3.1.1. El círculo. . . . .	37
3.1.2. Propiedades . . . . .	39
3.2. Resultados de secciones . . . . .	39
3.2.1. Secciones . . . . .	39
3.2.2. Proyecciones . . . . .	40
3.2.3. Secciones concurrentes . . . . .	41
3.3. Secciones circulares tangentes a una esfera . . . . .	42
3.4. Problema de Barker-Larman . . . . .	44
3.5. Un problema sobre proyecciones . . . . .	46
3.6. Seminario Acapulco de Geometría 2016 . . . . .	46
3.6.1. Teorema de la curva de Jordan . . . . .	46
3.6.2. Aplicaciones del Teorema de la curva de Jordan a problemas de tomografía geométrica . . . . .	47
<b>4. Secciones homotéticas, Montejano</b>	<b>49</b>
<b>5. Problema y solución</b>	<b>59</b>
<b>6. Bibliografía</b>	<b>67</b>



# Capítulo 1

## Teoría general de haces fibrados

En este capítulo se define los objetos de estudio de este trabajo y algunos resultados básicos que serán de utilidad en los próximos capítulos de esta tesis. Se presentan varios ejemplos interesantes de haces fibrados, como el fibrado tangente de una variedad diferenciable, estudiamos algunos teoremas interesantes como el teorema de estructura para la construcción de otros haces.

Empezaremos con una definición sobre grupos topológicos algunos ejemplos y luego una definición preliminar del concepto de haz fibrado, la cual nos permite familiarizarnos con el tipo de espacios que queremos estudiar. Más adelante veremos la necesidad de introducir otros elementos característicos de un haz fibrado, como el grupo estructural y las funciones de transición. También definiremos los conceptos de mapeo e isomorfismo entre haces fibrados.

**Definición 1.0.1.** Grupo topológico.

Un grupo topológico  $G$  es un conjunto en el cual se tiene una estructura de grupo y una topología (usual) tal que:

1.  $r_1 : G \times G \rightarrow G$  definido como  $r_1(g) = g^{-1} \forall g \in G$
2.  $r_2 : G \times G \rightarrow G$  definido como  $r_2(g_1 g_2) = g_1 g_2$  es continua cuando  $g \times g$  tiene una topología usual para el espacio producto.

Las últimas dos condiciones pueden reemplazarse por la siguiente condición equivalente:

- (A)  $r_3 : G \times G \rightarrow G$  definido como  $r_3(g_1 g_2) = g_1 g_2^{-1}$

Para un grupo  $G$  con una topología  $\tau$ , la continuidad de  $r_1$  y  $r_2$  se deduce de la continuidad de la función  $r_3$ , es decir  $G$  es un grupo topológico si y solo si  $r_3$  es continua.

**Ejemplo 1.0.1.** El grupo aditivo  $(X, +)$  de todo espacio normado  $(X, \|\cdot\|)$  es un grupo topológico ya que la adición y la negación son funciones continuas. En particular,  $(\mathbb{R}^n, +)$  es un grupo topológico abeliano con respecto a cualquier métrica inducida por la norma.

En efecto, considerando la base  $\{B_\epsilon(x) : x \in \mathbb{R} \text{ y } \epsilon > 0\}$ , donde  $B_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < \epsilon\}$  sean  $x, y \in \mathbb{R}$  se tiene que  $r_2 = x + y$  y  $r_1 = -x$ . Veamos que  $r_1$  y  $r_2$  son continuas.

Sea  $x \in \mathbb{R}$  y  $V \in U^0(-x)$ . Tenemos que existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon(-x) \subseteq V$ . Veamos que  $x \in B_\epsilon(x)$  y  $r_1(B_\epsilon(x)) = B_\epsilon(-x) \subseteq V$ . Así  $r_1$  es continua.

Por otro lado, dados  $x, y \in \mathbb{R}$  y  $V \in U^0(x, y)$ , entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon(x + y) \subseteq V$ . Sea  $r = \frac{\epsilon}{2}$ , tenemos que  $x \in B_r(x)$  y  $y \in B_r(y)$ , luego

$$m(B_r(x) \times B_r(y)) \subseteq B_\epsilon(x + y) \subseteq V \text{ Por lo tanto } r_2 \text{ es continua.}$$

**Ejemplo 1.0.2.**  $(\mathbb{C}^x, \cdot)$  es un grupo topológico y el grupo  $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  es un subgrupo compacto.

**Ejemplo 1.0.3.** El grupo  $GL_n(\mathbb{R})$  de las matrices lineales invertibles de  $n \times n$  es un grupo topológico con respecto a la multiplicación de matrices llamado el **grupo general lineal** de orden  $n$  sobre  $\mathbb{R}$ . Si consideramos en  $GL_n(\mathbb{R})$  la topología generada por la métrica.

$$d(A, B) = \left( \sum_{i,j=1}^n |A_{ij} - B_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Para  $A = (A_{i,j})$ ,  $B = (B_{i,j}) \in GL_n(\mathbb{R})$ , tenemos que la función definida por  $(A, B) \rightarrow AB^{-1}$  es continua. Por lo que  $GL_n(\mathbb{R})$  es un grupo topológico con respecto a la topología  $\tau_d$ .

**Ejemplo 1.0.4.**  $SL_n(\mathbb{F}) = \{A \in GL_n(\mathbb{F}) \det(A) = 1\}$ .

**Ejemplo 1.0.5.**  $O_n = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \ A^t A = I_n\}$ .

**Ejemplo 1.0.6.**  $SO_n = \{A \in O_n \det(A) = 1\}$ .

**Ejemplo 1.0.7.**  $U_n = \{A \in GL_n(\mathbb{C} = 1) | A^* A = I_n\}$ .

**Ejemplo 1.0.8.**  $SU_n = \{A \in SU_n | \det(A) = 1\}$ .

**Ejemplo 1.0.9.** Cualquier grupo  $G$  es un grupo topológico con respecto a la topología discreta llamado grupo discreto. Y cualquier grupo asociado a la topología indiscreta es un grupo topológico llamado grupo indiscreto.

**Definición 1.0.2.** Acción de un grupo Una acción de un grupo  $(G, *)$  sobre un conjunto  $X$  es una función que cumple  $\phi : G \times X \rightarrow X$  que cumple:

1.  $\forall x \in X, \phi(e, x) = x$  donde  $e$  es el elemento neutro del grupo
2.  $\forall x \in X, g, h \in G, \phi(g * h, x) = \phi(g, \phi(h, x))$

**Definición 1.0.3.**  $\phi$  transitiva si para cualquier  $x, y \in X$  si existe  $g \in G$  tal que  $g * x = y$

**Ejemplo 1.0.10.** tenemos las siguientes acciones transitivas

$$\phi : SO_n \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$$

$$(A, v) \rightarrow A.v$$

$$\phi : SU_n \times \mathbb{S}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{2n-1}$$

$$(A, v) \rightarrow A.v$$

**Definición 1.0.4.** Un haz fibrado  $\beta$  esta formado por los siguientes elementos:

- i) Un espacio topológico  $B$ , llamado espacio total.
- ii) Un espacio topológico  $X$ , llamado la base del haz.
- iii) Una función continua y sobreyectiva  $p : B \rightarrow X$ , llamada proyección.
- iv) Un espacio topológico  $Y$  llamado fibra.

Si tomamos el conjunto  $Y_x = p^{-1}(x)$  para cada  $x \in X$ , llamada la fibra sobre  $x$ , se debe cumplir que  $Y_x$  es homeomorfa a  $Y$ . Además para cada  $x \in X$  debe existir una vecindad abierta  $V_x$  y un homeomorfismo

$$\phi : V_x \times Y \rightarrow p^{-1}(V_x)$$

tales que  $p \circ \phi(x', y)$  para  $x' \in X$ ,  $y \in Y$ . Lo anterior es equivalente a decir que existe un homeomorfismo  $\phi$  tal que el siguiente diagrama conmuta

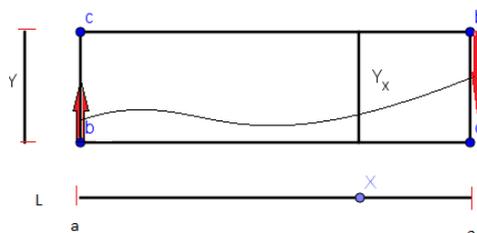
$$\begin{array}{ccc} V_x \times Y & \xrightarrow{\phi} & p^{-1}(V_x) \\ \downarrow & & \downarrow p \\ V_x & \xrightarrow{id} & V_x \end{array}$$

Denotamos un haz fibrado con espacio total  $B$ , proyección  $p$ , espacio base  $X$  y la fibra  $Y$  por la tupla  $\beta = (B, p, X, Y)$ . En ocasiones llamamos haz fibrado al espacio total  $B$  y dejamos implícito que  $B$  tiene asociado un espacio base, una proyección y una fibra, aunque no se mencionen explícitamente. Esta notación será ampliada más adelante para incluir otros elementos importantes al referirnos a un haz fibrado.

Un haz fibrado es un espacio topológico que localmente parece un espacio producto. Note que en esta definición no existe restricción sobre el homeomorfismo entre  $Y_x$  y  $Y$ . Sin embargo, debemos incorporar a la definición anterior un grupo topológico de automorfismos de  $Y$  que dotará al haz fibrado de estructura adicional. Los siguientes ejemplos muestran la necesidad de añadir a la definición el grupo mencionado, el cual llamamos grupo estructural.

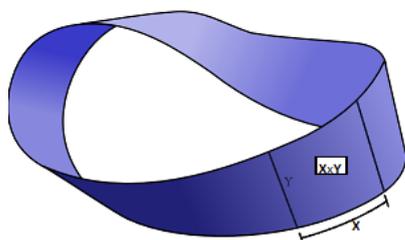
### **Ejemplo 1.0.11. Banda de Mobius**

Un ejemplo de haz fibrado es la banda de Mobius. El espacio base  $X$  es un círculo obtenido de un segmento de línea  $L$  (como se indica en la figura) identificando sus extremos. La fibra  $Y$  es un segmento de línea. El fibrado  $B$  se obtiene del producto  $L \times Y$  haciendo coincidir los dos extremos con un giro. De tal forma la proyección natural  $L \times Y \rightarrow L$  induce una proyección  $p : B \rightarrow X$ . Hay numerosas secciones transversales; cualquier curva indicada con los puntos finales que coincidan proporciona una sección transversal. Está claro que cualquier dos secciones transversales debe cortarse en al menos un punto. No existe un único homeomorfismo de  $Y_x$  con  $Y$ .



Sin embargo hay dos puntos distintos, que por la función  $g$  van de  $Y$  sobre reflejo en su punto medio. En este caso el grupo  $G$  es el grupo cíclico del orden dos generado por  $g$ .

Sea  $X = [0, 1]$  y  $Y = [1, -1]$  La banda de Möbius se obtiene de  $X \times Y$  identificando los puntos  $(0, t)$  y  $(1, -t)$  para cada  $t \in X$  para cada  $t \in$



$BandaMöbius = X \times Y | \sim$ , donde  $\sim$  es la identificación, la base del espacio se obtiene de  $X$ , la proyección  $p$  es la inducida  $X \times Y \rightarrow X$ . De esta manera se obtiene una estructura de haz fibrado cuya base es un círculo y cuya fibra es un intervalo  $I$   $G$  un grupo cíclico de orden 2, Así la banda de Möbius vista como una 5-upla sería

$$\langle X \times Y | \sim, S^1, p, G, I \rangle,$$

Para concluir los requerimientos adicionales a nuestra definición de haz fibrado necesitamos el concepto de grupo de transformaciones efectivo para un espacio topológico  $s$ .

**Definición 1.0.5.** Un haz coordinado  $B$  es colección de:

1. Un espacio topológico  $B$  llamado espacio del haz o simplemente

te Haz.

2. Un espacio topológico  $X$  llamado la base
3. Un mapeo continuo  $p : B \rightarrow X$  llamado la proyección.
4. Un espacio topológico  $Y$  llamada la “ fibra ”. El conjunto  $Y_x$  definido mediante  $Y_x = p^{-1}(x)$  es llamada la fibra sobre el punto  $x$  de  $X$   
Se requiere que la fibra  $Y_x$  sea homeomorfa a  $Y$  (Las fibras tienen que ser homeomorfas entre si).  
Luego para cada  $x \in X$  existe una vecindad  $V$  de  $X$  y un homeomorfismo  $\phi : V \times Y \rightarrow p^{-1}(V)$  tal que  $p(\phi(x', y)) = x'$  con  $x' \in V$  y  $y \in Y$ .
5. Un grupo topológico de transformaciones efectivo  $G$  de  $Y$  es llamado grupo del haz.
6. Una familia  $\{V_j\}$  de conjuntos abiertos de  $X$  indexada por el conjunto  $J$ , y los  $V_j$  son llamados vecindades coordenadas.
7. Un homeomorfismo  $\phi : V_j \times Y \rightarrow p^{-1}(V_j)$  para cada  $j \in J$  llamada la función coordenada.

Cabe señalar que la función coordenada debe satisfacer  $\phi_{j,x}(y) = x$ , para cada  $x \in V_j$ ,  $y \in Y$  si el mapeo  $\phi_{j,i} : Y \rightarrow p^{-1}(x)$  esta definido por  $\phi_{j,x}(y) = \phi_j(x, y)$  entonces para cada  $i, j \in J$  y cada  $x \in V_i \cap V_j$  el homeomorfismo  $\phi_{j,x}^{-1} \phi_{i,x} : Y \rightarrow Y$  coincide con la operación de un elemento de  $G$  (es único ya que  $G$  es efectivo) y para cada  $i, j$  en  $J$ , el mapeo  $g_{i,j} : V_i \cap V_j \rightarrow G$  definido mediante  $g_{ji}(x) = \phi_{j,x}^{-1} \phi_{i,x}$  es continua.

Denotaremos a  $p^{-1}(x)$  mediante  $Y_x$  y la llamaremos “ la fibra sobre  $x$ ”.

Las funciones  $g_{ij}$  definidas en la última condición de funciones coordenadas so llamadas “ La trasformaciones coordenadas del haz”. Una inmediata consecuencia de la definición es que, para cada  $i, j, k$  en  $J$ ,

$$g_{kj}(x)g_{ji}(x) = g_{ki}(x) \quad x \in V_i \cap V_j \cap V_k. \quad (1.1)$$

SI fijamos  $i = j = k$ , entonces

$$g_{ii}(x) = e, \text{ donde } e \text{ es la identidad de } G, x \in V_i \quad (1.2)$$

Ahora fijamos  $i = k$  en (1) y (2) para obtener

$$g_{jk}(x) = g_{kj}(x)^{-1} \text{ donde } x \in V_j \cap V_k.$$

Es conveniente introducir el mapeo

$$p_j(b) = \phi^{-1}(V_j) \rightarrow Y,$$

definido mediante

$$p_j(b) = \phi_{jx}^{-1}(b) \text{ donde } x = p(b).$$

Entonces  $p_j$  satisface las identidades.

$$p_j \phi_j(x, y) = y, \phi_j(p(b), p_j(b)) = b, \\ g_{ji}(p(b)) \cdot p_i(b) = p_j(b). \quad p(b) \in V_i \cap V_j$$

Para un fácil manejo de la definición

Un haz coordinado, lo denotaremos por  $\mathbb{B} = \langle B, X, p, Y, G, \{V_j\}_{j \in J}, \{\phi_j\}_{j \in J} \rangle$ , para un fácil manejo de la definición lo representaremos como una 5-upla, es decir,  $\mathbb{B} = \langle B, X, p, Y, G \rangle$  que implícitamente involucra las vecindades coordinadas y las funciones coordinadas.

### Definición 1.0.6. Mapeo entre haces

Sea  $\beta$  y  $\beta'$  haces coordinados con la misma fibra y el mismo grupo estructural. Un mapeo  $h : \beta \rightarrow \beta'$  es una función continua entre los espacios totales que denotaremos sin ambigüedad, con la misma letra  $h : B \rightarrow B'$ . La función  $h$  debe satisfacer las siguientes propiedades:

- $h$  envía cada fibra  $Y_x$  de  $B$  de manera homeomorfa en una fibra  $Y_{x'}$  de  $B'$ , induciendo así una función continua  $\bar{h} : X \rightarrow X'$  tal que  $p' \circ h = \bar{h} \circ p$  siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{h} & B' \\ \downarrow & & \downarrow p' \\ X & \xrightarrow{\bar{h}} & X' \end{array}$$

- Sea  $x \in V_j \cap \bar{h}^{-1}(V'_k)$ ,  $x' = \bar{h}(x)$  y  $\bar{h}_x : Y_x \rightarrow Y_{x'}$  la restricción de  $h$  a la fibra  $Y_x$ , entonces la función

$$\bar{g}_{kj}(x) = \phi'_{kx'}^{-1} \circ \bar{h}_x \circ \phi_{j,x}$$

Coincide con la acción de un elemento  $G$ ; además el mapeo obtenido

$$\bar{g}_{kj} : V_j \cap \bar{h}^{-1}(V'_k) \rightarrow G$$

Es continuo. las funciones  $\bar{g}_{kj}$  se llaman las transformaciones del mapeo y cumplen las siguientes relaciones.

$$\begin{aligned}\bar{g}_{kj}(x)g_{ji}(x) &= \bar{g}_{ki}(x), \quad x \in V_i \cap V_j \cap \bar{h}^{-1}(V'_k) \\ \bar{g}'_{lk}(x')\bar{g}_{kj}(x) &= \bar{g}_{lj}(x), \quad x \in V_j \cap \bar{h}^{-1}(V_l \cap V'_k)\end{aligned}$$

Los cuales se obtienen directamente de las definiciones de  $g_{ji}, g'_{lk}$  y  $\bar{g}_{kj}$ .

**Definición 1.0.7.** Dos haces coordenados  $B$  y  $B'$  con el mismo espacio total, la misma base la misma fibra, la misma proyección y el mismo grupo estructural se dicen equivalentes, si la unión de sus sistemas coordenado(funciones coordenadas, es decir, si  $\{V_j, \phi_j\}$  y  $\{V'_k, \phi'_k\}$  son sistemas coordenados de  $B$  y  $B'$ , respectivamente se cumple que

$$\bar{g}_{kj}(x) = \bar{\Phi}'_{k,x}{}^{-1} \Phi_{j,x} : Y \rightarrow Y \quad x \in V_j \cap V'_k$$

coincide con el homeomorfismo inducido por un elemento  $g \in G$  y la función

$$\bar{g}_{kj} : V_j \cap V'_k \rightarrow G$$

es continua.

La relación definida es una relación de equivalencia. En efecto:

**Relexiva.** Es inmediata de la definición.

**Simetría:** Note que  $\phi'_{k,x}{}^{-1} \circ \phi_{j,k}$  coincide con la acción de  $g \in G$  entonces,  $\phi_{j,x}{}^{-1} \circ \phi'_{k,x} = (\phi'_{k,x} \circ \phi_{j,x})^{-1}$  coincide con la acción elemento  $g^{-1}$  se sigue de la continuidad de  $g \rightarrow g^{-1}$ .

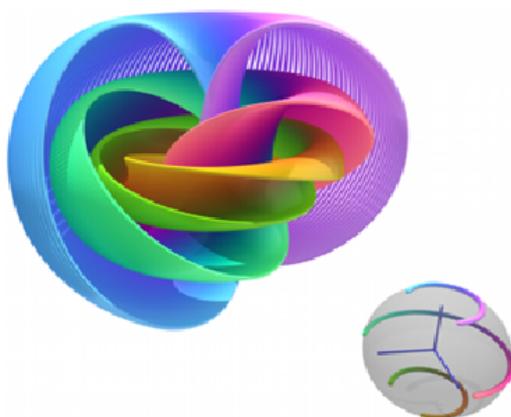
**transitiva** Si  $\phi''_{n,x}{}^{-1} \circ \phi'_{k,x}$  y  $\phi'_{k,x}{}^{-1} \circ \phi_{j,k}$  coincide con las acciones del elemento  $g_1$  y  $g_2$  respectivamente entonces  $\phi''_{n,x}{}^{-1} \circ \phi'_{k,x} \circ \phi'_{k,x}{}^{-1} \circ \phi_{j,k}$  coincide con las acciones  $g_1 g_2$ . Se sigue de la continuidad simultanea de  $(g_1, g_2) \rightarrow g_1 g_2$ .

Un haz fibrado es una clase de equivalencia de haces coordenados. De ahora en adelante cada vez que nos referimos a un haz fibrado hablamos de una clase de equivalencia de haces coordenados. Sin embargo, el estudio de los haces fibrados se realizará mediante sus representantes de clase y por tal razón nos enfocamos en estudiar haces coordenados.

Un ejemplo de la definición 1,0,2 y esta última observación es la fibración de Hopf que representa una hiperesfera en el espacio de cuatro dimensiones, su descomposición esta dada por la siguiente 5upla

$$\langle \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2, p, O_2, \mathbb{S}^1 \rangle$$

donde  $p$  es la proyección del espacio total  $\mathbb{S}^3$  al espacio base  $\mathbb{S}^2$  y  $O_2$  es el grupo de movimientos rígidos de  $\mathbb{S}^1$ .



**Definición 1.0.8.** Una sección transversal de un Haz es un función continua  $f : X \rightarrow B$  tal que  $p \circ f(x) = x$  para todo  $x \in X$ , es decir,  $f(x) \in Y_x$ .

Siempre es posible definir secciones transversales de manera local en abiertos  $X$  lo suficientemente pequeños, sin embargo, hay ocasiones en la que la estructura del espacio total es muy complicada para poder definir una sección transversal global. La existencia de secciones transversales globales en un haz fibrado es una característica del espacio total.

**Teorema 1.0.1. Teorema de estructura de un haz.**

Sea  $G$  un subgrupo cerrado de  $B$ . Si  $f$  es una sección transversal local de  $G$  en  $B$ ,  $H$  es un subgrupo cerrado de  $G$  y  $p : B|H \rightarrow B|G$  es el mapeo inducido por la inclusión de clases laterales, entonces podemos dotar a  $B/H$  de la estructura en relación con  $p$ . La fibra del haz es  $G/H$ , y el grupo del haz es  $G/H_0$  actuando sobre  $G/H$  por traslaciones por la izquierda, donde  $H_0$  es el subgrupo más grande de  $H$  invariante en  $G$ . Además,

*cualquiera dos secciones transversales llevan a haces estrictamente equivalentes. Finalmente, las traslaciones por la izquierda de  $B|H$  por elementos de  $B$  son mapeos de haces de este haz sobre si misma.*

*Introducimos los mapeos naturales.*

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{B} & \\
 p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\
 B|G & \xrightarrow{p} & B|H
 \end{array}$$

Como ya se sabe  $p_1$  y  $p_2$  son mapeos continuos. Si  $U$  es abierto en  $B|G$ , entonces por definición,  $p_2^{-1}(U)$  es abierto en  $B$ . Ya que  $p p_1 = p_2$ , tenemos que  $p_2^{-1}(U) = p_1^{-1} p_1^{-1}(U)$ . Esto significa que  $p_1^{-1}(U)$  es abierto en  $B|G$ , por tanto  $p$  es continua. Es claro que  $G|H \subset B|H$  y  $p(G|H) = x_0(x_0$  denotaremos los elementos de  $G|H$ ). Denotaremos los elementos de  $G|H$  por  $y$  y a los elementos de  $B|H$  por  $z$ .

Usando el teorema de estructura podemos contruir otros haces fibrados.

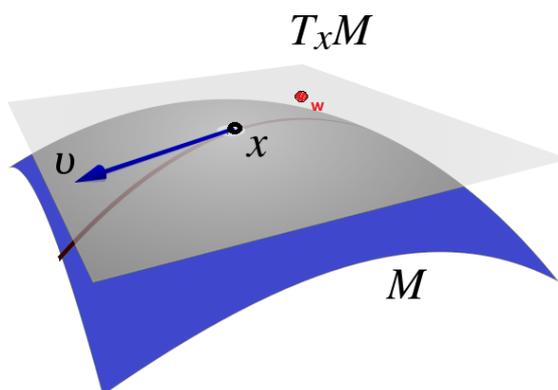
Ejemplos de haces fibrados:

**Ejemplo 1.0.12. Haz tangente.**

Sea  $M$  una variedad suave y sin frontera. El fibrado tangente  $T_x M$  de  $M$  es la unión disjunta de los espacios tangentes a la variedad en cada uno de sus puntos, es decir

$$T_x M = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_x M.$$

Cada elemento de  $T_x M$  es de la forma  $(x, v)$  donde  $x \in M$  y  $v$  es un vector a  $M$  en  $x$ . De esta forma tenemos una proyección natural  $\pi : T_x M \rightarrow M$  tal que  $\pi(x, v) = x$ . Note que  $\pi^{-1}(x) = T_x M$ . En este caso la fibra del haz sería  $\mathbb{R}^n$  ya que como sabemos todos los espacios tangentes de una  $n$ -variedad diferenciable son homeomorfos a  $\mathbb{R}^n$ . Es mas, cada  $T_x M$  es isomorfo a  $\mathbb{R}^n$  como espacio vectorial.



Así que la 5-upla de nuestra definición de haz fibrado para el haz tangente quedaría.

$$T_x = \langle \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_x M, M, \pi, Gl, T_x M \rangle$$

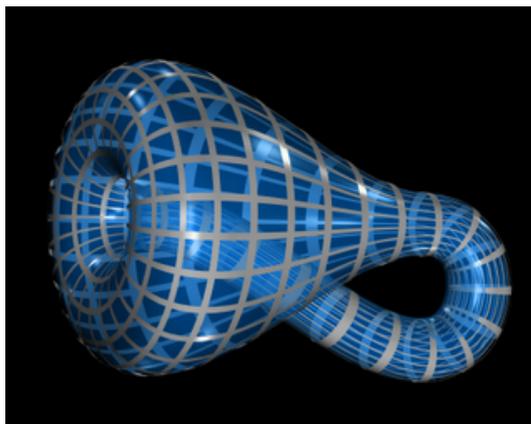
Donde  $Gl$  es el grupo lineal general.

**Ejemplo 1.0.13. Botella de Klein.**

Sea  $L = [-1, 1]$ , pero en esta ocasión hacemos  $Y = \mathbb{S}^1$ . Identificamos los extremos del cilindro  $L \times Y$  como  $(-1, y) \sim (1, y')$  donde  $y'$  se obtiene de  $y$  después de realizar la reflexión de  $\mathbb{S}^1$  respecto a un diámetro fijo. El espacio obtenido se llama *Botella de Klein* y es una *has* fibrado sobre un círculo cuya fibra es también un círculo. Note que en este caso los posibles homeomorfismos entre  $Y_x$  y  $Y$  son el trivial y la reflexión respecto al diámetro fijado anteriormente. La botella de Klein como *has* fibrado sería.

$$\langle [-1, 1] \times \mathbb{S}^1 / \sim, \mathbb{S}^1, p, O_2, \mathbb{S}^1 \rangle$$

Donde  $\sim$  es la relación de equivalencia anterior y  $p$  es la proyección de la espacio total a la base,  $O_2$  el grupo de transformaciones ortogonales que actúan sobre  $\mathbb{S}^1$



**Definición 1.0.9. El grupo ortogonal** Sea  $O_n$  el grupo ortogonal real de transformaciones en el espacio euclidiano  $n$ -dimensional  $\mathbb{E}^n$ . Este es un grupo transitivo sobre la  $(n-1)$ -esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Si  $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ , el subgrupo que deja fijo a  $x_0$  es el grupo ortogonal  $O_{n-1}$ .

Donde  $\sim$  es la relación de equivalencia

**Ejemplo 1.0.14. Variedad de stiefel.**

Un  $k$ - marco  $V^k$ , en  $\mathbb{E}^n$  es un conjunto ordenado de  $k$  vectores linealmente independientes. Sea  $L_n$  el grupo general lineal completo. todo  $k$ - marco  $v_0^k$  fijo puede ser transformado en cualquier otro  $v^k$  por un elemento de  $L_n$ . Sea  $v_{n,k}$  el conjunto de todos los  $k$ -marcos y sea  $L_{n,k}$  el subgrupo de  $L_n$  que deja fijo cada elemento de  $v_0^k$  entonces podemos identificar.

$$v_{n',k} = L_k | L_{n,k}$$

El espacio  $V_{n,k}$  es llamado la variedad de stiefel de  $k$ -marcos en el espacio.

Si nos restringimos a  $k$ -marcos ortogonales en el conjunto de estos,  $V_{n,k}$  es un subespacio de  $V'_{n,k}$ . El grupo  $\circ(n)$  mapea  $V_{n,k}$  sobre si mismo y es transitivo el subgrupo que deja fijo  $V_0^k$  es justamente  $\circ(n-k)$  oprando en el espacio ortogonal a todos los vectores de  $V_0^k$  luego

$$V'_{n,k} = \circ(n) | \circ(n-k).$$

Si nos restringimos a  $k$ -marcos ortogonales de norma unitaria ( $k$ -marco Ortogonal) les llamaremos  $V_{n,k}$  es un subespacio de  $V'_{n,k}$ . El grupo  $\circ(n)$  mapea  $V_{n,k}$  sobre si mismo y es transitivo. El subgrupo que deja fijo a  $V_k^0$  es justamente el grupo ortogonal  $\circ(n-k)$  operando en el espacio ortogonal a todos los vectores de  $v_0^k$  luego

$$V_{n,k} = \circ(n) | \circ(n-k)$$

Si se traslado un vector  $v^k$  a lo largo de su primer vector en  $S^{n-1}$  se obtiene un  $k-1$ -marco de vectores tangentes a  $S^{n-1}$ . Entonces el proceso es claramente reversible. Asi podemos interpretar  $V_{n,k}$  como una variedad de  $(k-1)$ -marco ortogonal tangentes a la esfera  $S^{n-1}$ . En particular, cuando  $k=2$ ,

$$V_{n,2} = \text{es la variedad de vectores tangentes a } S^{n-1}.$$

Otra interpretación. Sea  $S^{k-1}$  una esfera unitaria en el plano de vectores  $v_k^0$ . Un mapeo ortogonal de  $S^{n-k}$  en  $S^{n-1}$  corresponde exactamente en un mapeo  $v_0^k$  en otro  $v_k$ . Asi  $V_{n,k}$  es la variedad de mapeo ortogonal de  $S^{k-1}$  en  $S^{n-1}$ .

**Teorema 1.0.2.** *Sea  $v_0^n$ . Un  $k$ -marco ortogonal de  $\mathbb{E}^n$ , fijo, y denotemos por  $v_0^k$  los primeros  $k$  vectores de  $v_0^n$ . Sea  $\circ(n-k)$  el subgrupo que deja fijo a  $v_0^k$ . entonces*

$$\circ(n-k) \supset \circ(n-k-1).$$

Pasando al espacio de clases de estos subgrupos e introducimos proyecciones naturales (inclusión de clases) obtenemos una cadena de variedades de Stiefel y proyecciones.

$$\circ_n = V_{n,n} \rightarrow V_{n,n-1} \rightarrow \dots \rightarrow V_{n,2} \rightarrow \rightarrow V_{n,1} = S^{n-1}$$

Cada proyección o cualquier composición de ellos es un mapeo de haces por el teorema de estructura entre haces. La fibra de  $V_{n,n-k+1} \rightarrow V_{n,n-k}$  es el espacio cociente  $\circ_k | \circ_{k-1} = S^{k-1}$  y el grupo de haz es  $\circ_k$ .

Cualquier haz en el que la fibra es una  $k$ -esfera y el grupo es el grupo ortogonal es llamado un haz  $k$ -esferico. Asi que una variedad de stiefel proporciona una cadena de haces esfera relacionando  $\mathbb{O}_n$  y  $S^{n-1}$ . Un  $n-1$ -marco ortogonal en  $n$ -espacio puede ser completado a un  $n$ -marco ortogonal de dos maneras mediante la adición del  $n$  vector. Esto corresponde al hecho de que  $V_{n,n} \rightarrow V_{n,n-1}$  tiene una 0-esfera de fibra. Esto no es una doble cobertura en sentido estricto,  $V_{n,n} = \mathbb{O}_n$  es un espacio que tiene dos componentes conectadas el subgrupo  $R_n$  de matrices de determinante  $+1$  (El grupo de rotación  $S^{n-1}$ ), y una segunda componente de determinante  $-1$ . Ahora  $\mathbb{O}_1$  es un grupo de dos elementos y el determinante del elemento no trivial es  $-1$ . Por lo tanto  $V_{n,n} \rightarrow V_{n,n-1}$  mapea la componente de  $\mathbb{O}_n$  topologicamente sobre  $V_{n,n-1}$ . Así podemos identificar  $V_{n,n-1}$  con el grupo de rotaciones  $R_n$  de  $S^{n-1}$ . Por lo tanto, la proyección  $\mathbb{O}(n) \rightarrow V_{n,k}$  mapea  $R_n$  sobre  $V_{n,k}$ . Esto conduce a la identificación

$$V_{n,k} = R_n | R_{n-k}, k < n.$$

Un haz con fibra una esfera y grupo el grupo de rotaciones es llamado un haz esferico orientado. De las observaciones anteriores se depende que  $V_{n,n-k} \rightarrow V_{n,n-k-1}$  es un haz de  $k$ -esferas orientable.

### **Ejemplo 1.0.15. Variedad Grassman.**

Sea  $M_{n,k}$  denota el conjunto de  $k$ -dimensional subespacios lineales ( $k$ -planos que pasan por el origen) de  $\mathbb{E}^n$ . Cualquier elemento de  $\mathbb{O}_n$  lleva un  $k$ -plano en un  $k$ -plano, y ¿de hecho?  $\mathbb{O}_n$  es transitivo en  $M_{n,k}$ . Si  $\mathbb{E}^k$  Es un  $k$ -plano fijo y  $\mathbb{E}^{n-k}$  es su complemento ortogonal, el subgrupo de  $\mathbb{O}_n$  mapea  $\mathbb{E}^k$  sobre si mismos se divide en el producto directo  $\mathbb{O}_k \times \mathbb{O}'_{n-k}$  de dos subgrupos ortogonales, el primero deja fijo  $\mathbb{E}^{n-k}$  en el punto y el segundo deja  $\mathbb{E}^k$  fijo en el punto. Se tiene la siguiente identidad.

$$M_{n,k} = \mathbb{O}_n | \mathbb{O}_k \times \mathbb{O}'_{n-k}$$

El conjunto  $M_{n,k}$  con la estructura de variedad analitica es llamada la **Variedad Grassman de  $k$ -planos en un  $n$ -espacio.**



## Capítulo 2

# Haces vectoriales

En matemáticas, un fibrado vectorial es una construcción geométrica donde a cada punto de un espacio topológico unimos un espacio vectorial de una manera compatible, de modo que todos esos espacios vectoriales, "pegados juntos", formen otro espacio topológico.

Sea  $B$  un espacio topológico, el cual va a ser llamado *espacio base*.

**Definición 2.0.1.** Un *haz vectorial real*  $\xi$  sobre  $B$  consiste de lo siguiente:

- (1) un espacio topológico  $E = E(\xi)$  llamado el *espacio total*,
- (2) un mapeo continuo  $\pi : E \rightarrow B$  llamado *mapeo proyección* y
- (3) para cada  $b \in B$ , la estructura de espacio vectorial sobre los reales en el conjunto  $\pi^{-1}(b)$ .

Se debe satisfacer la siguiente restricción:

Condición de *trivialidad local*. Para cada  $b \in B$ , debe existir una vecindad  $U \subset B$ , un entero  $n \geq 0$ , y un homeomorfismo

$$h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$$

tal que, para cada  $b \in U$ , la correspondencia  $x \rightarrow h(b, x)$  define un isomorfismo entre el espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$  y el espacio vectorial  $\pi^{-1}(b)$ .

Tal par  $(U, h)$  va a ser llamado *sistema de coordenadas local* para  $\xi$  en  $b$ . Si es posible escoger  $U$  igual al espacio base entero, entonces  $\xi$  va a ser llamado *haz trivial*.

El espacio vectorial  $\pi^{-1}(b)$  es llamado la *fibra* sobre  $b$ . Va a ser denotada por  $F_b$ . Vamos a suponer que la dimension de  $F_b$  es constante igual a  $n$ . Uno dice entonces un *haz* de  $n$ -planos, o brevemente un  $\mathbb{R}^n$ -haz.

**Definición 2.0.2.**  $\xi$  es isomorfo a  $\eta$ , escribimos  $\xi \cong \eta$ , si existe un homeomorfismo

$$f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$$

entre los espacios totales el cual mapea cada espacio vectorial  $F_b(\xi)$  isomorfamente sobre el espacio vectorial correspondiente  $F_{f(b)}(\eta)$ .

**Ejemplo 2.0.1.** El haz trivial con espacio total  $B \times \mathbb{R}^n$ , con mapeo proyección  $\pi(b, x) = b$  y con la estructura de espacio vectorial en las fibras definida mediante

$$t_1(b, x_1) + t_2(b, x_2) = (b, t_1x_1 + t_2x_2),$$

va a ser denotado por  $\epsilon_B^n$ .

**Ejemplo 2.0.2.** El *haz tangente*  $\tau_M$  de una variedad suave  $M$ . El espacio total de  $\tau_M$  es la variedad  $TM$  que consiste de todos los pares  $(x, v)$  con  $x \in M$  y  $v$  tangente a  $M$  en  $x$ . El mapeo proyección

$$\pi : TM \rightarrow M$$

está definido por  $\pi(x, v) = x$ ; y la estructura de espacio vectorial en  $\pi^{-1}(x)$  esta definida por

$$t_1(x, v_1) + t_2(x, v_2) = (x, t_1v_1 + t_2v_2),$$

Si  $\tau_M$  es el haz trivial, entonces la variedad  $M$  es llamada *paralelizable*. Por ejemplo, supongamos que  $M$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $TM$  es igual a  $M \times \mathbb{R}^n$ , y  $M$  es claramente paralelizable.

La 2-esfera  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  es un ejemplo de una variedad que no es paralelizable. De hecho una condición necesaria para que una variedad se paralelizable es que su característica de Euler sea cero, sin embargo, la característica de Euler de  $\mathbb{S}^2$  es  $+2$ .

**Ejemplo 2.0.3.** El *haz normal*  $\nu$  de una variedad diferenciable  $M \subset \mathbb{R}^n$  es obtenido como sigue. El espacio total

$$E \subset M \times \mathbb{R}^n$$

es el conjunto de todas las parejas  $(x, v)$  tal que  $v$  is ortogonal al espacio tangente  $TM_x$ . El mapeo proyección  $\pi : E \rightarrow M$  y la estructura de espacio vectorial en  $\pi^{-1}(x)$  están definidos, como en los ejemplos 1, 2, por las fórmulas  $\pi(x, v) = x$ , y  $t_1(x, v_1) + t_2(x, v_2) = (x, t_1v_1 + t_2v_2)$ .

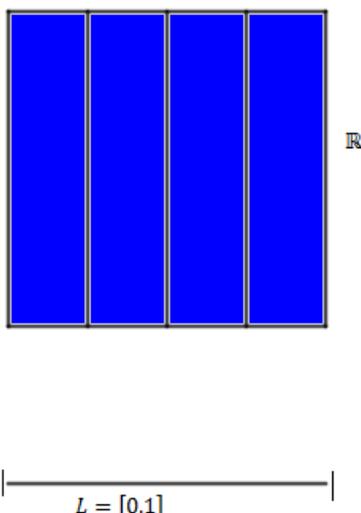
**Ejemplo 2.0.4.** El haz normal  $\nu$  de una variedad diferenciable  $M \subset \mathbb{R}^n$  es obtenido como sigue. El espacio total

$$E \subset M \times \mathbb{R}^n$$

es el conjunto de todas las parejas  $(x, v)$  tal que  $v$  es ortogonal al espacio tangente  $TM_x$ . El mapeo proyección  $\pi : E \rightarrow M$  y la estructura de espacio vectorial en  $\pi^{-1}(x)$  están definidos, como en los ejemplos 1, 2, por las fórmulas  $\pi(x, v) = x$ , y  $t_1(x, v_1) + t_2(x, v_2) = (x, t_1v_1 + t_2v_2)$ .

**Ejemplo 2.0.5.** El *La banda de mobius infinita*

La banda de mobius abierta es el espacio  $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \mid \sim$  donde la relación de equivalencia  $\sim$  identifica los puntos  $(0, t)$  y  $(1, -t)$ , estamos pensando  $\mathbb{S}^1$  como  $L = [0, 1]$  con los extremos identificados.



La banda de Mobius infinita como estructura haz vectorial sería

$$\langle \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \mid \sim, \mathbb{S}^1, p, \mathbb{R}, GL \rangle$$

Donde  $p : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \mid \sim \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $GL$  es el grupo lineal general que actúa sobre las fibras que son espacios vectoriales.

**Ejemplo 2.0.6.** Sea  $E(\gamma_n^1)$  el subconjunto de  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$  que consiste de todos los pares  $(\{\pm x\}, v)$  tal que el vector  $v$  es múltiplo de  $x$ . Definamos  $\pi : E(\gamma_n^1) \rightarrow \mathbb{P}^n$  por  $\pi(\{\pm x\}, v) = \{\pm x\}$ . Por lo tanto, cada fibra  $\pi^{-1}(\{\pm x\})$  puede ser identificada con la línea a través de  $x$  y  $-x$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . A cada línea se le da la estructura de espacio vectorial usual. El haz vectorial resultante  $\gamma_n^1$  es llamado el *haz de líneas canónico* sobre  $\mathbb{P}^n$ .

*Demostración de que  $\gamma_n^1$  es localmente trivial.* Sea  $U \subset \mathbb{S}^n$  un conjunto abierto el cual es suficientemente pequeño para no contener un par de puntos antípodos, y sea  $U_1$  la imagen de  $U$  en  $\mathbb{P}^n$ . Entonces un homeomorfismo

$$h : U_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \pi^{-1}(U_1)$$

se define por la condición

$$h(\{\pm x\}, t) = (\{\pm x\}, tx)$$

para cada  $(x, t) \in U \times \mathbb{R}$ . Evidentemente  $(U_1, h)$  es un sistema de coordenadas local; por tanto  $\gamma_n^1$  es localmente trivial.

**Teorema 2.0.1.** *El haz  $\gamma_n^1$  sobre  $\mathbb{P}^n$  es no trivial, para  $n \geq 1$ .*

Esto va a ser demostrado estudiando secciones transversales de  $\gamma_n^1$ .

**Definición 2.0.3.** Una *sección transversal* de un haz vectorial  $\xi$  con espacio base  $B$  es una función continua

$$s : B \rightarrow E(\xi)$$

la cual manda cada  $b \in B$  en la correspondiente fibra  $F_b(\xi)$ . Tal sección transversal es *cero en ningún lado* si  $s(b)$  es un vector no cero de  $F_b(\xi)$  para cada  $b$ .

(Una sección transversal del haz tangente de una variedad suave  $M$  es llamada *campo vectorial* sobre  $M$ .)

Evidentemente un  $\mathbb{R}$ -haz trivial tiene una sección transversal no cero en ningún lado. Veremos que el haz  $\gamma_n^1$  no tiene una tal sección.

Sea

$$s : \mathbb{P}^n \rightarrow E(\gamma_n^1)$$

alguna sección, y consideremos la composición

$$\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n \xrightarrow{s} E(\gamma_n^1)$$

la cual lleva cada  $x \in \mathbb{S}^n$  en algún par

$$(\{\pm x\}, t(x)x) \in E(\gamma_n^1).$$

Evidentemente  $t(x)$  es una función real continua de  $x$ , y

$$t(-x) = -t(x).$$

Puesto que  $\mathbb{S}^n$  es conexo se sigue del Teorema del valor intermedio que  $t(x_0) = 0$  para algún  $x_0$ . Luego  $s(\{\pm x_0\}) = (\{\pm x_0\}, 0)$ . Esto completa la prueba.

Es interesante tomar una mirada de cerca al espacio  $E(\gamma_n^1)$  para el caso especial  $n = 1$ . En este caso cada punto  $e = (\{\pm x, v\})$  de  $E(\gamma_n^1)$  puede ser escrito como

$$e(\{\pm(\cos \theta, \sin \theta)\}, t(\cos \theta, \sin \theta))$$

con  $0 \leq \theta \leq \pi, t \in \mathbb{R}$ . Esta representación es única excepto que el punto  $(\{\pm(\cos 0, \sin 0)\}, t(\cos 0, \sin 0))$  es igual a  $(\{\pm(\cos \pi, \sin \pi)\}, -t(\cos \pi, \sin \pi))$  para cada  $t$ . En otras palabras  $E(\gamma_n^1)$  puede ser obtenido a partir de la banda  $[0, \pi] \times \mathbb{R}$  en el plano  $(\theta, t)$ -plano identificando la frontera izquierda  $\{0\} \times \mathbb{R}$  con la frontera derecha  $\{\pi\} \times \mathbb{R}$  sobre la correspondencia  $(0, t) \rightarrow (\pi, -t)$ . Por tanto  $E(\gamma_1^1)$  es una banda de Moebius abierta.

Esta descripción da una prueba alternativa de que  $\gamma_1^1$  es no trivial. La banda de Moebius es ciertamente no homeomorfa a un cilindro  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{R}$ .

Ahora consideremos una colección  $\{s_1, \dots, s_n\}$  de secciones transversales del haz vectorial  $\xi$ .

**Definición 2.0.4.** Las secciones transversales  $s_1, \dots, s_n$  se dice que son *dependientes en ningún lado* si, para cada  $b \in B$ , los vectores  $s_1(b), \dots, s_n(b)$  son linealmente independientes.

**Teorema 2.0.2.** Un  $\mathbb{R}^n$ -haz  $\xi$  es trivial si y solo si  $\xi$  admite  $n$  secciones transversales  $s_1, \dots, s_n$  las cuales son dependientes en ningún lado.

La demostración depende del siguiente resultado básico, el cual se enuncia pero no se da la demostración.

**Lema 2.1.** Sea  $\xi$  y  $\eta$  haces vectoriales sobre  $B$  y sea  $f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$  una función continua la cual mapa cada espacio vectorial  $F_b(\xi)$  homeomorfamente sobre el correspondiente espacio  $F_b(\eta)$ . Entonces  $f$  es necesariamente un homomorfismo. Por tanto,  $\xi$  es homeomorfo a  $\eta$ .

*Demostración del Teorema 2.0.2.* Sean  $s_1, \dots, s_n$  secciones transversales de  $\xi$  las cuales son dependientes en ningún lado. Definamos

$$f : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$$

por

$$f(b, x) = x_1 s_1(b) + \dots + x_n s_n(b).$$

Evidentemente  $f$  es continua y mapea cada fibra del haz trivial  $\epsilon_B^n$  isomorficamente sobre la fibra correspondiente de  $\xi$ . Luego  $f$  es un isomorfismo de haces, y  $\xi$  es trivial.

Inversamente, supongamos que  $\xi$  es trivial, con sistema coordenada  $(B, h)$ . Definimos

$$s_i(b) = h(b, (0, \dots, 1, \dots, 0)) \in F_b(\xi)$$

(donde el 1 está en el  $i$ -ésimo lugar), es evidente que  $s_1, \dots, s_n$  son secciones transversales dependientes en ningún lado.

El haz tangente de  $\mathbb{S}^1$  admite una sección que no se anula en ningún lado, por tanto  $\mathbb{S}^1$  es paralelizable. Similarmente la 3-esfera  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$  admite tres campos vectoriales no dependientes en ningún lado  $s_i(x) = (x, \bar{s}_i(x))$  donde

$$\bar{s}_1(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$$

$$\bar{s}_2(x) = (-x_3, x_4, x_1, -x_2)$$

$$\bar{s}_3(x) = (-x_4, -x_3, x_2, x_1).$$

Por tanto,  $\mathbb{S}^3$  es paralelizable.

### 2.0.1. Haces vectoriales euclidianos

Recordemos que una función real  $\mu$  sobre un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita es *cuadrática* si  $\mu$  puede ser expresada en la forma

$$\mu(v) = \sum l_i(v)l'_i(v)$$

donde cada  $l_i(v)$  y cada  $l'_i(v)$  es lineal. Cada función cuadrática determina una forma bilineal simétrica  $(v, w) \rightarrow v \cdot w$  de  $V \times V$  a  $\mathbb{R}$ , donde

$$v \cdot w = \frac{1}{2}(\mu(v+w) - \mu(v) - \mu(w)).$$

Notemos que  $v \cdot v = \mu(v)$ . La función cuadrática es llamada *positiva definida* si  $\mu(v) > 0$  para todo  $v \neq 0$ .

**Definición 2.0.5.** Un *haz vectorial euclidiano* es un haz vectorial real  $\xi$  junto con una función continua

$$\mu : E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que la restricción de  $\mu$  a cada fibra de  $\xi$  es positiva definida y cuadrática. La función  $\mu$  misma va a ser llamada *métrica euclidiana* sobre el haz vectorial  $\xi$ .

En el caso del haz tangente  $\tau_M$  de una variedad suave, una métrica euclidiana

$$\mu : \tau_M \rightarrow \mathbb{R}$$

es llamada una *métrica Riemanniana*, y  $M$  junto con  $\mu$  es llamada una *variedad Riemanniana*.

**Ejemplo 2.0.7.** Al haz trivial  $\epsilon_B^n$  se le puede dar una métrica Euclidiana

$$\mu(b, x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

Puesto que el haz tangente de  $\mathbb{R}^n$  es trivial se sigue que la variedad suave  $\mathbb{R}^n$  posee una métrica Riemanniana estándar. Para cualquier variedad suave  $M \subset \mathbb{R}^n$  la composición

$$\tau_M \subset \tau_{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}$$

ahora hace  $M$  una variedad Riemanniana.

**Definición 2.0.6.** Sean  $M$  y  $N$  variedades riemannianas. Un difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  es llamada una *isometría* si:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \text{ para todo } p \in M, u, v \in T_p M \quad (2.1)$$

**Definición 2.0.7.** Sean  $M$  y  $N$  variedades riemannianas. Un mapeo diferenciable  $f : M \rightarrow N$  es una *isometría local en*  $p \in M$  si existe una vecindad  $U \subset M$  de  $p$  tal que  $f : U \rightarrow f(U)$  es un difeomorfismo que satisface (2.1).

**Superficies.** Notemos que en dimensión dos una superficie orientada, cerrada, compacta y conexa se construye con copias de la esfera  $\mathbb{S}^2$  y el Toro  $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  mediante la operación de suma conexa (Vea **vi**). Entonces para cada tal superficie  $F$  podemos identificar una superficie riemanniana 'modelo', no necesariamente compacta, simplemente conexa con un grupo de isometrías tal que la superficie cociente es difeomorfa con  $F$ , la cual por lo tanto hereda la correspondiente estructura riemanniana.

**Teorema 2.0.3.** Cada superficie orientada, cerrada, compacta y conexa admite una métrica riemanniana que es localmente isométrica con  $\mathbb{S}^2, \mathbb{E}^2, \mathbb{H}^2$ .

*Demostración.* Sea  $F_g^2$  una superficie orientada de genero de  $g$ . Para  $F_0^2 = \mathbb{S}^2$  la conclusión es obvia; la superficie  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  tiene la misma geometría.  $F_1^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{E}^2/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  donde el grupo  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  es generado por traslaciones, las cuales son isometrías, mediante distancias unitarias en las direcciones  $x$  y  $y$ . Ahora consideremos  $F_2^2$ . Sea  $Y$  un octagono encajado en  $\mathbb{H}^2$  con ángulos iguales a  $\pi/4$ . Definamos isometrías  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  de  $\mathbb{H}^2$  mediante las condiciones  $\alpha(AB) = DC$ ,

$\beta(BC) = ED$ ,  $\gamma(EF) = HG$ ,  $\delta(FG) = AH$ , y en todos los casos se requiere que el interior de  $Y$  y sus trasladados sean disjuntos. Entonces, dada la descripción de  $F_2^2$  en la clasificación de superficies, si  $\Gamma = \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \rangle$ ,  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  es homeomorfa a  $F_2^2$ .

Con el propósito de considerar superficies de genero mayor exhibimos  $\Gamma_g = \pi_1(F_g^2)$ ,  $g \geq 3$ , como un subgrupo de  $\pi_1(F_2^2)$ , entonces formamos el espacio de órbitas de  $\Gamma_g \subset \Gamma_2$ . ■

## Capítulo 3

# Ancho constante y Superficies con secciones circulares

### 3.1. Figuras de ancho constante

En este capítulo se presentan los principales logros obtenidos en el **Seminario Acapulco de Geometría**, en la primera parte los del año 2017 y en la segunda parte los del 2016.

Se inicia con la definición presentada por el Dr. Luis Montejano Peimber en su libro [ ] sobre figuras de ancho constante y fué esta definición el punto de encuentro entre las ideas trabajadas en el seminario de geometría y topología y el Dr. Montejano (ver apéndice A).

#### 3.1.1. El círculo.

El círculo es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro. Es precisamente debido a esta propiedad que las ruedas tienen forma circular. Si ponemos un eje en el centro, al rodar el círculo, debido a que todos los rayos tienen la misma longitud, el eje no sube ni baja, sólo se traslada, siempre a la misma altura sobre el piso.

Antes de ser usado como rueda, el círculo tuvo otra aplicación más primitiva, la de ser usado como rodillo. Si colocamos un bloque muy

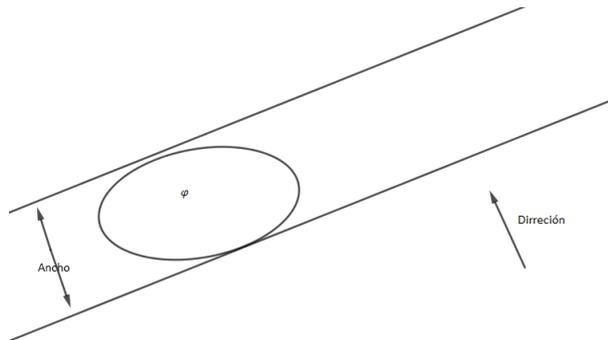
pesado sobre varios rodillos circulares, al rodar éstos, el bloque se traslada sin subir ni bajar, siempre a la misma altura sobre el piso.

Es interesante observar y difícil de creer que estas dos aplicaciones del círculo, rueda y rodillo, están basadas sobre principios radicalmente diferentes, es decir, la propiedad característica del círculo que le permite ser usado como rueda es radicalmente distinta a la propiedad del círculo que le permite ser usado como sección transversal de un rodillo. Tan es así que sólo puede haber ruedas circulares, pero existen rodillos no circulares que, sorprendentemente, funcionan tan bien como los rodillos circulares.

Veamos cuál es la propiedad del círculo que permite que los rodillos circulares funcionen adecuadamente. Esta propiedad no tiene nada que ver con el centro del círculo, lo importante es que el rodillo circular, al rodar, mantiene al bloque siempre a la misma altura sobre el piso, debido a que el ancho del círculo es el mismo en cualquier dirección. Si los rodillos tuviesen forma elíptica, es claro que al rodar éstos, el bloque subiría, bajaría y acabaría finalmente por desequilibrarse y caerse. Esto se debe a que en diferentes direcciones, una elipse tiene diferentes anchos (ver figura VI.2).

Existen figuras distintas del círculo con la propiedad de que en cualquier dirección que se tomen, su ancho es el mismo y por tanto, usadas como secciones de rodillos, funcionan tan bien como los rodillos circulares.

**Ancho de una figura  $\psi$  en una dirección dada.** Tomemos una dirección y líneas soporte perpendiculares a esta dirección que aprisionen a  $\psi$ . La distancia entre estas dos líneas es el ancho de  $\psi$  en esta dirección.



Es claro que si para dos direcciones diferentes el ancho de una figura no es el mismo, entonces esta figura, al ser usada como sección de un rodillo, producirá en el bloque que se pretende trasladar un

movimiento hacia arriba y hacia abajo.

Las figuras que tienen el mismo ancho en cualquier dirección son llamadas figuras de ancho constante.

A estas alturas supongo que es urgente conocer una figura de ancho constante distinta del círculo. Quizá la más sencilla sea el triángulo de Reuleaux:

### 3.1.2. Propiedades

Mencionaremos algunas de las propiedades más interesantes de las figuras de ancho constante.

1. Toda figura de ancho constante uno tiene diámetro uno.
2. Toda figura de ancho constante uno tiene perímetro  $\pi$ .
3. Entre las figuras de ancho constante uno, la de más área es el círculo y, la de menor área es el triángulo de Reuleaux.
4. El incírculo y el circuncírculo de una figura de ancho constante uno son concéntricos y la suma de sus radios es uno.
5. La única figura de ancho constante radicalmente simétrica es el círculo.

**Teorema 3.1.1.** *Si todas las proyecciones de un sólido  $\theta$  son figuras de ancho constante  $h$ , es porque el sólido  $\theta$  es un sólido de ancho constante  $h$  y viceversa; las proyecciones de un sólido de ancho constante  $h$  son siempre figuras de ancho constante  $h$ .*

## 3.2. Resultados de secciones

### 3.2.1. Secciones

**Pregunta 3.2.1.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$  un conjunto convexo y sea  $p$  un punto. Supongamos que cada  $(n - 1)$ -sección de  $K$  por  $p$  tiene la propiedad  $X$ . ¿Para que propiedades  $X$  se puede implicar que el cuerpo  $K$  tiene la propiedad  $X$  en dimensión  $n$ ?*

Por ejemplo, en la siguiente sección vamos a demostrar, Teorema 3.2.4, que si todas las secciones transversales de un cuerpo convexo por un punto son círculos, entonces  $K$  es una esfera. También se puede ver, aunque esta vez la prueba es considerablemente más

complicada, que si todas las secciones por un punto son elipses, entonces el cuerpo convexo es un elipsoide [?] y [?].

Otro caso muy interesante es cuando suponemos que todas las secciones son centralmente simétricas. Rogers demostró en [?], de una forma breve y elegante, que el cuerpo es centralmente simétrico. Rogers observó que no necesariamente  $p$  debe ser el centro de  $K$  y conjeturó que si el centro de simetría de  $K$  no era  $p$ , la hipótesis bastaba para garantizar que el cuerpo es un elipsoide. La conjetura fue demostrada en [?] para el caso en que  $p$  es un punto interior de  $K$  y en [?] fue demostrado el caso general.

Veamos lo anterior de manera más detalla.

Decimos que un punto  $p$  es un *falso centro de simetría* de  $K$  si todas las secciones de  $K$  por  $p$  son centralmente simétricas y  $p$  no es un centro de simetría de  $K$ .

**Teorema 3.2.1** (Falso Centro). *Sólo los elipsoides tienen falsos centros.*

En [?] se da otra demostración del Teorema 3.2.1.

El último ejemplo que mencionaremos se refiere al concepto de figuras y cuerpos de ancho constante, el cual será estudiado en el último capítulo de este trabajo.

**Teorema 3.2.2.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^3$  un cuerpo convexo y sea  $p$  un punto. Supongamos que cada sección de  $K$  por  $p$  es una figura de ancho constante<sup>1</sup>. Entonces  $K$  es un sólido de ancho constante y, más aún,  $K$  es una esfera con centro en  $p$ .*

### 3.2.2. Proyecciones

Naturalmente, tiene sentido plantearse la pregunta dual a la Pregunta 3.2.1. Para cada  $x \in \mathbb{S}^2$ , denotemos por  $H(x)$  al plano por el origen ortogonal a  $x$ . Sea  $\pi_x : \mathbb{R}^3 \rightarrow H(x)$  la proyección ortogonal sobre el plano  $H(x)$ .

**Pregunta 3.2.2.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , un conjunto convexo. Supongamos que, para cada  $u$ ,  $\pi_u(K)$  tiene la propiedad  $Y$ . ¿Para que propiedades  $Y$  se puede implicar que el cuerpo  $K$  tiene la propiedad  $Y$  en dimensión  $n$ ?*

Por ejemplo, de nuevo, fácilmente se puede probar que si  $\pi_u(K)$  es un círculo, para cada  $u$ , entonces  $K$  es una esfera. También se puede ver que si  $\pi_u(K)$  es una elipse, para cada  $u$ , entonces el cuerpo convexo es un elipsoide (se recomienda ver [?] y [?]). Siguiendo con

esta línea de investigación, Rogers demostró, también en [?], que si, para cada  $u$ ,  $\pi_u(K)$  es centralmente simétrica, entonces el cuerpo es centralmente simétrico. Sin embargo, a diferencia del problema de la falso centro, ya no se puede afirmar algo más sobre el cuerpo convexo.

**Teorema 3.2.3.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^3$  un cuerpo convexo. Supongamos que, para cada  $u$ ,  $\pi_u(K)$  tiene ancho constante. Entonces  $K$  tiene ancho constante.*

### 3.2.3. Secciones concurrentes

**Teorema 3.2.4.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 3$ , un sólido convexo y  $p \in \mathbb{R}^n$  un punto. Si toda sección transversal de  $\Omega$  por  $p$  es un círculo, entonces  $\Omega$  es una esfera.*

*Demostración.* La esfera más pequeña que contiene al sólido  $\Omega$  es llamada la circunferencia de  $\Omega$  (la esfera  $C$ ). Su cascara debe tocar al sólido  $\Omega$ , puesto que si no lo toca esta no sería la esfera más pequeña que contiene a  $\Omega$ .

Sea  $\Pi$  el plano determinado por el conjunto de puntos  $\{A, B, P\}$ . Tenemos que  $\Pi \cap C$  es un círculo. Haciendo uso de la hipótesis,  $\Pi \cap \Omega$  también es un círculo. Como  $\Omega \subset C$  entonces:

$$\Pi \cap \Omega \subset \Pi \cap C \quad (3.1)$$

Usando (3.1) y que los puntos  $A, B \in \Pi \cap \Omega, A, B \in \Pi \cap C$  se deduce que:

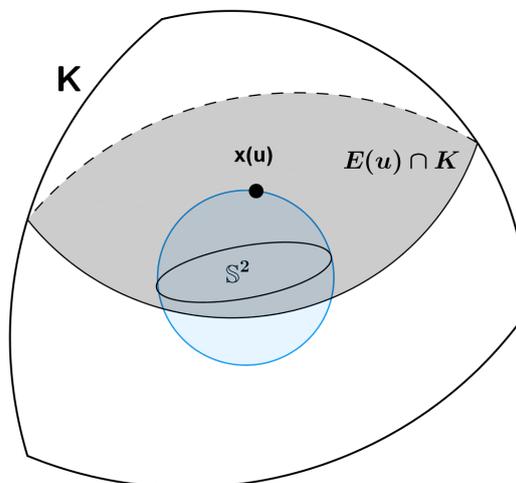
$$\Pi \cap \Omega = \Pi \cap C$$

Sea  $x \in \text{bd}\Omega$ . El objetivo del problema es probar que  $x \in \text{bd}C$ , es decir,  $\text{bd}\Omega \subset C$ .

Sea  $\Gamma$  un plano que contiene a la línea  $\text{aff}\{P, x\}$ .  $\Gamma \cap \Pi$  es una línea que tiene dos puntos en común con la sección  $\Pi \cap \Omega = \Pi \cap C$ . Además se tiene que  $\Gamma \cap \Omega$  es un círculo que contiene a  $\Gamma \cap C$  y estos círculos tienen los puntos en común  $(\Gamma \cap \Pi) \cap \Omega$ , por tanto:

$$\Gamma \cap \Omega = \Gamma \cap C$$

■



1.png

### 3.3. Secciones circulares tangentes a una esfera

Para  $u \in \mathbb{S}^2$ , denotamos por  $H(u)$  el plano ortogonal a  $u$  y por  $E(u)$  al plano  $u + H(u)$ .

**Teorema 3.3.1.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un cuerpo convexo. Supongamos que  $\mathbb{S}^2 \subset \text{int } \Omega$  y que, para toda  $u \in \mathbb{S}^2$ , la sección  $E(u) \cap \Omega$  es un círculo. Entonces  $\Omega$  es una esfera.*

Antes de probar el Teorema 3.3.1, demostraremos el siguiente caso particular de este resultado.

**Teorema 3.3.2.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un cuerpo convexo. Supongamos que  $\mathbb{S}^2 \subset \text{int } \Omega$  y que, para toda  $u \in \mathbb{S}^2$ , la sección  $E(u) \cap \Omega$  es un círculo con centro en  $u$ . Entonces  $\Omega$  es una esfera concéntrica con  $\mathbb{S}^2$ .*

*Demostración.* En primer lugar, observemos que si dos secciones de  $\Omega$  son tales que los círculos correspondientes se interceptan, entonces los radios de tales círculos son iguales. En efecto, sean  $u, v \in \mathbb{S}^2$  tales que  $[E(u) \cap \Omega] \cap [E(v) \cap \Omega] \neq \emptyset$ . Sea  $x \in [E(u) \cap \Omega] \cap [E(v) \cap \Omega] \neq \emptyset$ , el radio de  $[E(u) \cap \Omega]$  es  $|u - x|$  y el de  $[E(v) \cap \Omega]$  es  $|v - x|$ , por la simetría del cono que circunscribe a  $\mathbb{S}^2$  con vértice en  $x$ ,  $|u - x| = |v - x|$  luego los círculos en cuestión tiene radios iguales.

Para  $u \in \mathbb{S}^2$ , denotamos por  $H(u)^+$  al semi-espacio abierto que tiene como frontera al plano  $H(u)$  y contiene al vector  $u$  y por  $E(u)^+$  al conjunto  $u + H(u)^+$ . Observamos que la colección de conjuntos

$$\{\text{bd } \Omega \cap E(u)^+ \mid u \in \mathbb{S}^2\}$$

forman una cubierta abierta de  $\text{bd } \Omega$  y, por lo tanto, en virtud de la compacidad de  $\mathbb{S}^2$ , existe un número finito de vectores  $u_1, u_2, \dots, u_k$  tales que

$$\text{bd } \Omega \subset E(u_1)^+ \cup \dots \cup E(u_k)^+.$$

Vamos a ver que los círculos  $E(u_i) \cap \Omega, i = 1, 2, \dots, k$  tienen el mismo radio. Para tal fin veremos que todos los círculos tienen radio igual al radio de  $E(u_1) \cap \Omega$ . Afirmamos que existe un círculo entre la colección de círculos  $E(u_i) \cap \Omega, i = 2, \dots, k$ , digamos el primero, tal que

$$[E(u_1) \cap \Omega] \cap [E(u_2) \cap \Omega] \neq \emptyset. \quad (3.2)$$

En caso contrario,  $\text{bd } \Omega$  se descompondría en la forma

$$\text{bd } \Omega = \left\{ E(u_1)^+ \cup \text{bd } \Omega \right\} \cup \left[ \bigcup_{i=2}^k [E(u_k)^+ \cap \Omega] \right]$$

donde los conjuntos  $E(u_1)^+ \cap \Omega$  y  $\bigcup_{i=2}^k [E(u_k)^+ \cap \Omega]$  son abiertos y disjuntos, lo cual sería absurdo pues  $\text{bd } \Omega$  es conexo. De (3.2), concluimos que los radios de  $E(u_1) \cap \Omega$  y  $E(u_2) \cap \Omega$  son iguales.

Ahora afirmamos que existe un círculo, digamos  $E(u_3) \cap \Omega$  tal que o bien  $E(u_3) \cap \Omega$  tiene intersección no vacía con  $E(u_1) \cap \Omega$  o se tiene que

$$\left\{ [E(u_2) \cap \Omega] \setminus E(u_1)^+ \right\} \cap [E(u_3) \cap \Omega] \neq \emptyset. \quad (3.3)$$

En el primer caso,  $E(u_3) \cap \Omega$  tiene radio igual al de  $E(u_1) \cap \Omega$  según se vió al inicio de la prueba. Ahora supongamos que no se cumpliera (3.3), entonces tendríamos que  $\text{bd } \Omega$  nuevamente se descompondría en la forma

$$\text{bd } \Omega = \left\{ [E(u_1) \cup \text{bd } \Omega] \cup [E(u_2) \cup \text{bd } \Omega] \right\} \cup \left[ \bigcup_{i=3}^k [E(u_k)^+ \cap \text{bd } \Omega] \right]$$

donde los conjuntos

$$\{ [E(u_1)^+ \cup \text{bd } \Omega] \cup [E(u_2)^+ \cup \text{bd } \Omega] \} \text{ y } \bigcup_{i=3}^k [E(u_k)^+ \cap \text{bd } \Omega]$$

son abiertos y disjuntos, lo cual sería absurdo de nuevo pues  $\text{bd } \Omega$  es conexo.

De (3.3), concluimos que los radios de  $E(u_2) \cap \Omega$  y  $E(u_3) \cap \Omega$  son iguales y, por tanto, los los radios de  $E(u_1) \cap \Omega$  y  $E(u_3) \cap \Omega$  son iguales.

De forma análogamente, obtenemos que  $E(u_1) \cap \Omega$  y  $E(u_k) \cap \Omega$  son iguales.

Para concluir con esta parte, vemos que para cada  $u \in \mathbb{S}^2$  existe un índice  $i$  en  $\{1, 2, \dots, k\}$  tal que

$$[E(u) \cap \Omega] \cap [E(u_i) \cap \Omega] \neq \emptyset. \quad (3.4)$$

y de aquí que el radio de  $E(u) \cap \Omega$  es igual al radio de  $E(u_1) \cap \Omega$ .

Denotemos por  $\alpha$  el radio de los círculos de  $\Omega$  tangentes a la esfera. Vamos a ver que  $\Omega$  es una esfera de radio  $\sqrt{1 + \alpha^2}$ . Sea  $x \in \text{bd} \Omega$ . Tomemos  $u \in \mathbb{S}^2$  tal que  $x \in \text{bd}(E(u) \cap \Omega)$ . Luego la distancia de  $x$  a  $u$  es  $\alpha$  y por el teorema de Pitagoras  $x$  está a una distancia  $\sqrt{1 + \alpha^2}$  del centro de  $\mathbb{S}^2$ . ■

### 3.4. Problema de Barker-Larman

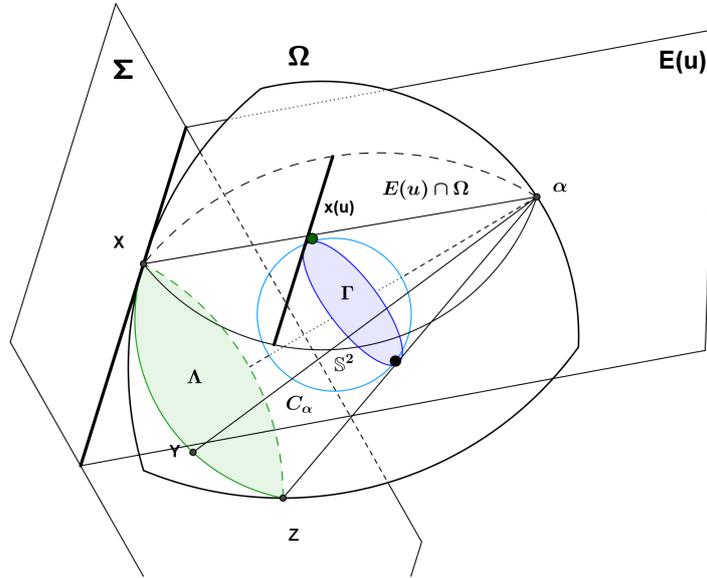
Esta sección esta basada en el siguiente difícil problema de Barker-Larman [?].

**Conjetura 3.4.1.** *Supongamos que  $K, L \subset \mathbb{R}^n$  son cuerpos convexos con  $n \geq 3$  y  $L \subset \text{int} K$ . Supongamos además que siempre que  $H$  sea un hiperplano soporte de  $L$  la sección  $H \cap K$  de  $K$  es centralmente simétrica. Entonces  $K$  es un elipsoide.*

A continuación, vamos a demostrar el siguiente caso particular interesante de la Conjetura 3.4.1.

**Teorema 3.4.1.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un cuerpo convexo. Supongamos que  $\mathbb{S}^2 \subset \text{int} \Omega$  y que, para toda  $u \in \mathbb{S}^2$ , la sección  $E(u) \cap \Omega$  es centralmente simétrica con centro en  $u$ . Entonces  $\Omega$  es una esfera concéntrica con  $\mathbb{S}^2$ .*

*Demostración.* En primer lugar, vamos a ver que, para toda  $\alpha \in \text{bd} \Omega$ , la *proyección de  $\mathbb{S}^2$  desde  $\alpha$  sobre  $\text{bd} \Omega$*  es un círculo. Sea  $\alpha \in \text{bd} \Omega$ . Denotemos por  $C_\alpha$  el cono con vértice en  $\alpha$  que circunscribe a  $\mathbb{S}^2$ , esto es, la colección de todas las líneas que pasan por  $\alpha$  y son tangentes a  $\mathbb{S}^2$ , y sea  $\Gamma$  el círculo  $C_\alpha \cap \mathbb{S}^2$ . Vamos a mostrar que el conjunto  $\text{bd} \Omega \cap [C_\alpha \setminus \{\alpha\}]$ , el cual denotamos por  $\Lambda$ , es un círculo. Sea  $x \in \Lambda$ . Como  $\text{aff}\{x - \alpha\} \subset C_\alpha$ , la línea  $\text{aff}\{x - \alpha\}$  hace contacto con  $\mathbb{S}^2$  en un punto, digamos  $y$ . Es claro que  $y \in \Gamma$ . En virtud de que  $E(y) \cap \Omega$  tiene centro en  $y$ ,  $y$  es el punto medio de la cuerda  $[\alpha, x]$  de  $\Omega$ . De aquí que se tiene que  $\Lambda = \phi(\Gamma)$ , donde  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es la



5.png

homotecia con centro y radio de homotecia  $\alpha$  y  $2$ , respectivamente. Por lo tanto,  $\Lambda$  es un círculo y está contenido en un plano paralelo al plano de  $\Gamma$ .

Ahora vamos a demostrar que, para toda  $u \in \mathbb{S}^2$ , la sección  $E(u) \cap \Omega$  tiene la siguiente propiedad: para cada punto  $x \in \text{bd}[E(u) \cap \Omega]$  existe una línea soporte  $L(x)$  de  $E(u) \cap \Omega$  tal que  $L(x)$  es ortogonal a  $x - u$ . Consecuentemente, por el Teorema ??,  $E(u) \cap \Omega$  es un círculo.

Sea  $u \in \mathbb{S}^2$ . Tomemos  $x \in \text{bd}[E(u) \cap \Omega]$ . Denotemos por  $\alpha$  a la intersección  $\text{aff}\{u - x\} \cap \text{bd}\Omega$ . Por la primera parte, existe un plano  $\Sigma$  tal que  $C_\alpha \cap \text{bd}\Omega = \Sigma \cap \text{bd}\Omega$  es un círculo y  $x \in \Sigma \cap \text{bd}\Omega$ . Como  $E(u)$  es un plano soporte de  $\mathbb{S}^2$  (y de  $C_\alpha$ ), la línea  $E(u) \cap \Sigma$  es línea soporte de  $\Sigma \cap \text{bd}\Omega$ . La línea  $E(u) \cap \Sigma$  también es línea soporte de  $E(u) \cap \Omega$ . En caso contrario, habría un punto  $y$  de  $\text{bd}\Omega$  en  $E(u) \cap \Sigma$ ,  $y \neq x$ , pero esto implicaría que  $y \in \Sigma \cap \text{bd}\Omega$  pero esto contradiría que la línea  $E(u) \cap \Sigma$  toca al círculo  $\Sigma \cap \text{bd}\Omega$  solo en  $x$ . Finalmente, observemos que  $E(u) \cap \Sigma$  es ortogonal a  $\text{aff}\{x - u\}$  en virtud de que  $C_\alpha$  es un cono circular recto.

Finalmente, en virtud del Teorema 3.3.2 concluimos que  $\Omega$  es una esfera. ■

### 3.5. Un problema sobre proyecciones

**Teorema 3.5.1** (I. Espinobarros, C. Lenis, M. Bautista). Sean  $\Phi, \Omega \subset \mathbb{R}^3$  dos cuerpos convexos,  $\Phi \subset \Omega$ . Supongamos que, para toda  $\alpha \in \text{bd}\Omega$ , la proyección de  $\Phi$  desde  $\alpha$  sobre  $\text{bd}\Omega$  es un círculo. Entonces  $\Phi$  y  $\Omega$  son dos esferas concéntricas.

*Demostración.* En primer lugar, observemos que si  $\Phi$  es una esfera, en virtud de que la únicas secciones de un cono circular recto son aquellas que son ortogonales al eje de revolución del cono, la demostración del Teorema 3.5.1 se sigue de forma análoga a la segunda parte de la prueba del Teorema 3.4.1. ■

### 3.6. Seminario Acapulco de Geometría 2016

Este apartado estuvo basado en las notas del seminario del M.C. Alejandro Estrada Tiznado.

#### 3.6.1. Teorema de la curva de Jordan

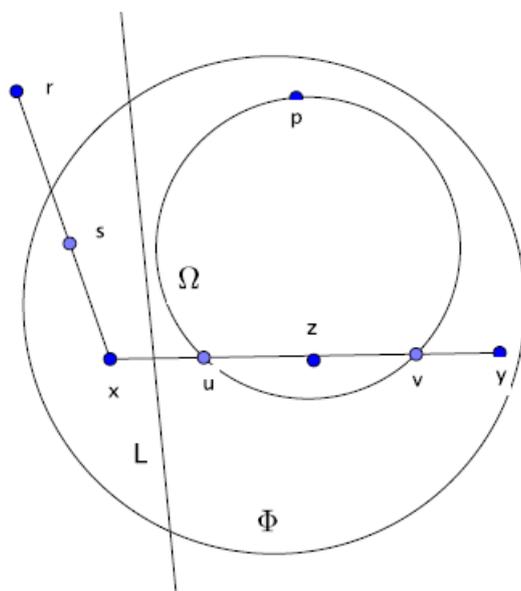
En topología, el teorema de la curva de Jordan establece que: *Toda curva cerrada simple del plano divide al plano en dos componentes conexas disjuntas que tienen a la curva como frontera común. Una de estas componentes está acotada (el interior de la curva) y la otra es no acotada y se le llama exterior.*

El teorema fue demostrado por Oswald Veblen en 1905. A pesar de su simplicidad, el teorema requiere herramienta muy técnica para demostrarlo. Por otro lado, el teorema no necesariamente es válido en cualquier superficie. Por ejemplo, aunque es válido en el plano (o la esfera), no es válido en el toro.

Con el propósito de exponer la generalización del Teorema de la curva de Jordan, es más conveniente presentar éste considerando en lugar del plano  $\mathbb{R}^2$  a la esfera  $\mathbb{S}^2$ :

*Un subespacio de  $\mathbb{S}^2$  homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$  separa a  $\mathbb{S}^2$  en dos componentes complementarias*

Recordemos que un *encaje* es un mapeo que es un homeomorfismo sobre su imagen. De modo que la versión general del Teorema de la curva de Jordan es la siguiente (Vease [?])

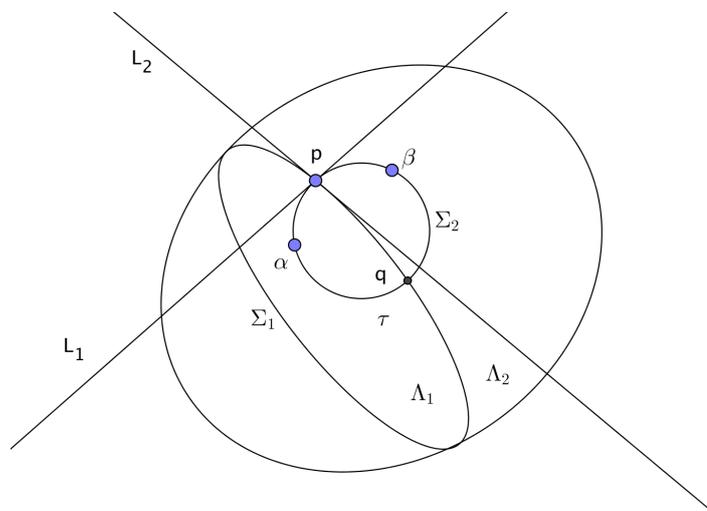


Un encaje de  $\mathbb{S}^{n-1}$  en  $\mathbb{S}^n$  divide a ésta en dos componentes, y esas componentes tienen grupos de homología como puntos.

### 3.6.2. Aplicaciones del Teorema de la curva de Jordan a problemas de tomografía geométrica

**Teorema 3.6.1.** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie que es un encaje de  $\mathbb{S}^2$  en  $\mathbb{R}^3$  y sea  $p \in \text{bd } M$ . Supongamos que todas las secciones de  $M$  por  $x$  son círculos. Entonces  $M$  es una esfera.*

Tengamos en cuenta que según el teorema de la curva de Jordan, la superficie  $M$  descompone a  $\mathbb{R}^3$  en tres conjuntos disjuntos. A saber, el *interior*, el *exterior* y la superficie *frontera*; la parte no acotada se conoce como el exterior. Denotemos a estos tres conjuntos por  $A$  (y pensemos en el color azul),  $R$  (y pensemos en el color rojo) y  $V$  (y pensemos en el color verde), respectivamente. En virtud de que estamos considerando que  $M$  es un encaje de  $\mathbb{S}^2$  en  $\mathbb{R}^3$ ,  $M$  es un conjunto compacto y, por tanto, acotado. Denotemos por  $\Sigma$  una esfera que contiene a  $M$ . Es claro que todos los puntos en  $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$  son rojos. Tenemos el siguiente resultado auxiliar importante.



**Lema 3.1.** *El Conjunto  $A$  es convexo.*

*Demostración.* Sean  $x$  y  $y$  dos puntos de  $A$ , tenemos que demostrar que el intervalo  $[x, y]$  está contenido en  $A$ . Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que existe  $z \in [x, y]$  que no está en  $A$ . Supongamos que  $z \in R$  (es decir,  $z$  es rojo). Luego en el interior de los segmentos  $[x, z]$  y  $[x, y]$  debe haber puntos  $u$  y  $v$ , respectivamente, que pertenecen a  $V$  (¿Como ir de un punto interior a uno exterior sin pasar por la frontera? ¡Imposible! de acuerdo al Teorema de Jordan). Por lo tanto, el círculo  $\Omega$  de  $M$  determinado por el plano  $\text{aff}\{p, u, v\}$  pasa por los puntos  $p, u, v$ . Como  $M \subset \Sigma$ , claramente,  $\Omega \subset \Phi$ , donde  $\Phi$  es el círculo  $\Sigma \cap \text{aff}\{p, u, v\}$ . Como  $x$  es un punto que no pertenece a  $\Omega$ , existe una línea  $L$  que separa a  $x$  y  $\Omega$ . Tomemos ahora un punto  $r \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$  que está en el mismo semiplano que  $x$ , de los dos determinados por  $L$ . Entonces

$$[x, r] \cap \Omega = \emptyset \quad (3.5)$$

Puesto que  $x \in A$  y  $r \in R$  (según se explico arriba), en el segmento  $[x, r]$  existe un punto  $s$  en  $V$  que por (3.5) no pertenece a  $\Omega$  pero esto contradice que  $M \cap \text{aff}\{p, x, y\}$  es un círculo. ■

## Capítulo 4

# Secciones homotéticas, Montejano

Cuerpo convexos con secciones homotéticas.

Luis Montejano

ABSTRACT

Se prueba que si un cuerpo convexo  $K \subset \mathbb{E}^{n+1}$ , para  $n \geq 2$ , y  $p_0 \in K$  con la propiedad de que cada  $n$ -sección de  $K$  por  $p_0$  son homotéticas entonces  $K$  es una esfera.

Introducción

Sea un cuerpo convexo  $K \subset \mathbb{E}^{n+1}$ , para  $n \geq 2$ , y sea  $p_0 \in K$ . Suponga que las  $n$ -secciones de  $K$  por  $p_0$  son afinmente equivalentes. Debe ser  $K$  un elipsoide? incluso si  $n$  es par, Gromov [20] y independientemente Mani [9] y Burtón [5] prueban que la respuesta es afirmativa. Entonces el problema todavía esta sin resolver si  $n$  es impar. Supongamos ahora que las  $n$ -secciones de  $K$  que pasa por  $p_0$  son congruentes. si  $n$  es par, el resultado de Gromov implica que  $K$  es un elipsoide y por lo tanto es facil probar que  $K$  es una esfera; si  $n = 3$ , Burtón [5] demuestra que  $K$  es una esfera; y finalmente Schneider [16] dio una prueba a la afirmación para  $n \geq 2$ . El proposito de este articulo es demostrar los siguientes enunciados.

**Teorema 1** Si las  $n$ -secciones de  $K$  por  $p_0$  son afinmente equivalente, entonces  $K$  es un elipsoide o  $K$  es centralmente simétrico con respecto a  $p_0$ .

**Teorema 2** Si las  $n$ -secciones de  $K$  por  $p_0$  son afinmente equivalente preservando el volumen, entonces  $K$  es una esfera.

Como corolario tenemos el teorema Schneider.

Corolario 1 Si las  $n$ -secciones de  $K$  por  $p_0$  son congruentes, entonces  $K$  es una esfera.

Corolario 2 Si las  $n$ -secciones de  $K$  por  $p_0$  son homotéticas, entonces  $K$  es una esfera.

Sea  $I_{n+1}$  el grupo de isometría de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , el espacio euclidiano  $n + 1$  Dimensional y sea  $O_{n+1} \subset I_{n+1}$  el subgrupo ortogonal. Escojamos una base ortonormal  $x_1, x_2, \dots, x_3, \dots, x_{n+1}$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , denotamos por  $\mathbb{R}^k$ , denotamos a los primeros  $k$  - vectores, y a  $\mathbb{S}^{k-1}$  como la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^k$  y por  $O_k$  el subgrupo de  $O_{n+1}$  que contiene todos los elementos que llevan a  $\mathbb{R}^k$  en si mismo y que actúan como la identidad en el subespacio de  $\mathbb{R}^{n+1}$  ortogonal a  $\mathbb{R}^k$ . Para cada  $x \in \mathbb{S}^n$ , sea  $E(x)$  el plano tangente de  $\mathbb{S}^n$  en  $x$  y sea  $H(x)$  el  $n$ -dimensional subespacio de  $\mathbb{R}^{n+1}$  ortogonal a  $x$ . Ya que  $H(x) = H(-x)$  y  $E(x) = x + H(x)$ . Finalmente sea  $B^n = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i \in \mathbb{S}^n \mid t_{n+1} \geq 0 \right\}$  la  $n$ - bola topológica en  $\mathbb{S}^n$  con frontera  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

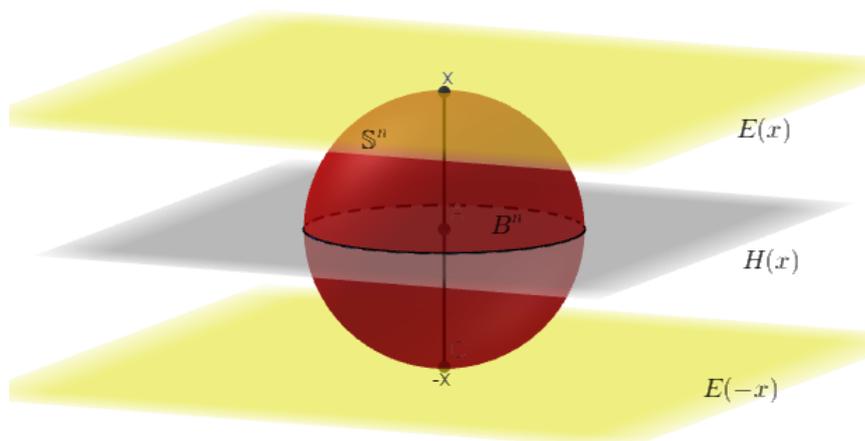


Figura 4.1:  $\mathbb{S}^n, B^n$

Un cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^{n+1}$  entenderemos un subconjunto convexo con interior no vacío en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Denotemos por  $\Omega$  el espacio de todos los cuerpos convexos en  $\mathbb{R}^{n+1}$  con la topología inducida por la métrica Hausdorff. Consideremos el mapeo continuo  $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  el cual asigna a cada  $C \in \Omega$  el centro de su circunferencia. Sea  $C_1, C_2 \in \Omega$ .

Decimos que  $C_1$  es congruente con  $C_2$  si existe  $g \in I_{n+1}$  tal que  $g(C_1) = C_2$ . Además,  $C_1$  es homotética a  $C_2$  si  $\lambda(C_1)$  es congruente con  $C_2$  para algún  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

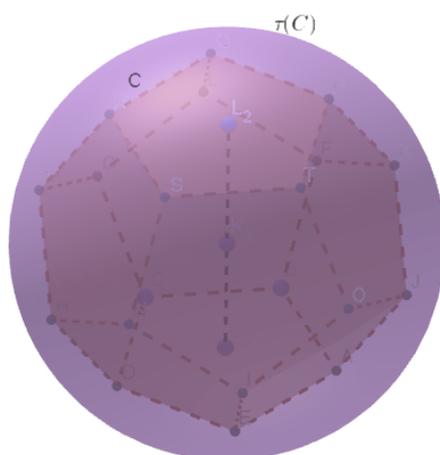


Figura 4.2: Semicusfera

Desde ahora, sea  $C \subset E^n$  un cuerpo convexo con el origen como su circuncentro, y sea  $G_0 = \{g \in O_n | g(C) = C\}$ .  $G_0$  es un subgrupo compacto de  $O_n$  y como tal es un grupo de Lie. Denotaremos por  $\Pi : O_{n+1} \rightarrow O_{n+1}|G_0$  y  $\pi : O_{n+1}|G_0 \rightarrow O_{n+1}|O_n$  las proyecciones canónicas. Notese que  $\Pi$  y  $\pi$  son haces fibrados con fibra  $G_0$  y  $O_n|G_0$ , respectivamente. Sea  $C_0 = x_{n+1} + C \subset E(x_{n+1})$  y sea  $\gamma_0 = \{g(C_0) \in \Omega | g \in O_{n+1}\}$  con la topología inducida por métrica Hausdorff.

Entonces,  $\gamma_0$  es el espacio de todos los cuerpos convexos  $n$ - dimensionales congruentes y tangentes a  $S_n$  con sus circuncentros.

$$\begin{array}{ccccc}
 O_{n+1} & \xrightarrow{\Pi} & O_{n+1}|G_0 & \xrightarrow{\pi} & O_{n+1}|O_n \\
 \downarrow 1 & & \cong \downarrow \Psi & & \cong \downarrow \psi \\
 O_{n+1} & \xrightarrow{\Upsilon} & \gamma_0 & \xrightarrow{\tau} & S^n
 \end{array}$$

Donde  $T(g) = g(C_0)$  para cada  $g \in O_{n+1}$ ,  $\Psi(gG_0) = g(C_0)$  para cada  $gG_0 \in O_{n+1}|G_0$  y  $\psi(gO_n) = g(x_{n+1})$  para cada  $gO_{n+1} \in O_{n+1}|O_n$ . No es

difícil de probar que las funciones descritas anteriormente son mapeos continuos bien definidos, el diagrama es conmutativo y los mapeos  $\Psi$  y  $\psi$  son homeomorfismos. Consecuentemente  $T; O_{n+1} \rightarrow \gamma_0$  y  $\tau : \gamma_0 \rightarrow \mathbb{S}^n$  son haces fibrados con fibras  $G_0$  y  $O_n|G_0$ , respectivamente.

Notese que también para cada  $g \in O_{n+1}$ ,  $\tau T(g) = g(x_{n+1})$

**Definición 4.0.1.** Un campo de cuerpos convexos congruentes a  $C$  tangentes a  $\mathbb{S}^n$  en un mapeo

$$\kappa : \mathbb{S}^n \rightarrow \gamma_0$$

el cual es una sección de  $\tau : \gamma_0 \rightarrow \mathbb{S}^n$  (esto es  $\tau\kappa = Id_{\mathbb{S}^n}$ ) y también tiene la propiedad de  $\kappa(x_{n+1}) = C = x_{n+1} + C$

A continuación enunciaremos un caso particular de la definición anterior.

**Definición 4.0.2.** Un giro completo de  $C$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$   $\kappa : \mathbb{S}^{n+1} \rightarrow \gamma_0$  es un giro completo de cuerpos convexos congruentes a  $C$  tangentes a  $\mathbb{S}^n$  entonces  $\kappa(x) - x = \kappa(-x) + x$  o a manera equivalente  $I_x\kappa(x) = \kappa(-x)$  donde  $I_x \in O_{n+1}$  es la reflexión a través de  $H(x)$ .

Si  $n$  es par, Mani [9] prueba que la existencia de un campo congruentes a  $C$  tangentes a  $\mathbb{S}^n$  implica que  $C$  es una esfera euclidiana. Por otro lado, Burton [5] Prueba que existe un giro completo de  $C$  en  $\mathbb{R}^4$  si y solo si  $C$  es centralmente simétrico. Además, no es difícil de ver que si la  $n$ -secciones de  $K$  a través del origen son congruentes (afinmente equivalentes respectivamente), entonces existe un giro completo de una copia congruente (afinmente equivalentes respectivamente) de  $K \cap \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$

### Prueba de los teoremas

Comenzaremos enunciando los dos siguientes lemas.

**Lema 4.1.** Sea  $\kappa : \mathbb{S}^n \rightarrow \gamma_0$  un campo de cuerpos convexos congruentes a  $C$  tangentes a  $\mathbb{S}^n$ . entonces existe un mapeo.

$$\Phi : B^n \rightarrow O_{n+1}$$

tal que:

$$[a)] \Phi_x(C_0) = \kappa(x) \text{ para cada } x \in B^n$$

$$[b)] \Phi_x(x_{n+1}) = x \text{ para cada } x \in B^n \text{ y}$$

$$[c)] \Phi_x(x_{n+1}) = 1 \in O_{n+1}.$$

Más aún, si  $\kappa$  un giro completa de  $C$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , entonces para cada  $s \in \mathbb{S}^{n-1}$ .

$$\Phi_s^{-1}\Phi_{-s} \in G_0.$$

*Demostración.*

Sea  $\tau\kappa = Id_{S^n} \circ \kappa$  es un embebimiento y  $\kappa(B^n)$  es contraíble. Consecuentemente,  $T : T^{-1}(\kappa(B^n)) \rightarrow \kappa(B^n)$  es un haz fibrado trivial. Por lo tanto, hay una función  $\phi : \kappa(B^n) \rightarrow O_{n+1}$  tal que  $T\phi = Id_{\kappa(B^n)}$  y  $\phi(C_0) = 1 \in O_{n+1}$ . Sea  $\Phi : B^n \rightarrow O_{n+1}$  es la composición de  $\phi \circ \kappa$ . Entonces  $\Phi_{x_{n+1}} = \phi(\kappa(x_{n+1})) = \phi(C_0) = 1 \in O_{n+1}$ . Sea  $x \in B^n$ . Entonces  $\Phi_x(C_0) = T(\Phi_x) = T\phi\kappa(x) = \kappa(x)$ . Además  $\Phi_x(x_{n+1}) = \tau T(\Phi_x) = \tau T\phi\kappa(x) = x$ . Por consecuencia, para cada  $s \in S^{n-1}$ ,  $\Phi_s^{-1}\Phi_{-s(x_{n+1})=x_{n+1}}$  lo que implica que  $\Phi_s^{-1}l_s\Phi_{-s} \in O_n$ . además, si  $K$  es un giro completo, tenemos que  $l_x\kappa(x) = \kappa(-x)$  para cada  $x \in S^n$ . Por lo tanto  $\Phi_s^{-1}l_s\Phi_{-s}(C_0) = C_0$ . Tal que  $\Phi_s^{-1}\Phi_{-s} \in G_0$ .

**Definición 4.0.3.** Sea  $x, y \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|x\| = \|y\|$ , y supongase que  $x \neq -y$  definimos  $\Lambda(x, y) \in O_n$  del siguiente modo si:  $x = y$ , entonces  $\Lambda(x, y) = 1 \in O_n$ ; si  $x \neq y$ , sea  $\Gamma$  el subespacio 2-dimensional de  $\mathbb{R}^n$  fijado por  $x$  y  $y$ . Ya que  $\Lambda(x, y)$  actúa como la identidad en el subespacio de  $\mathbb{R}^n$  fijado por  $x$  y  $y$ . Ya que  $\Lambda(x, y)$  actúa como identidad en un subespacio 2-dimensional de  $\mathbb{R}^n$  ortogonal a  $\Gamma$ , y en  $\Gamma$  es la rotación que envía  $x$  en  $y$ . Observe que  $\Lambda x = y$ .

El siguiente Lema lo prueba **Burton 2** para  $n = 3$ .

**Lema 4.2.** Suponga que  $C \in \mathbb{R}^n$  puede un girarse completamente en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , entonces  $C$  es centralmente simétrico.

*Demostración.* Recordemos que el origen es el circuncentro de  $C$ . Supongase que  $C$  no es centralmente simétrico, entonces existe un  $x_0 \in C$ , entonces existe un  $x_0$  tal que  $-x_0 \notin C$ . Consecuentemente, para cada  $g \in G_0$ ,  $g(x_0) \neq -x_0$ . Asumimos sin pérdida de generalidad que  $\|x_0\| = 1$ , y sea  $\kappa : S^n \rightarrow \gamma_0$  un giro completo.

Por el lema 6, existe  $\Phi : B^n \rightarrow O_{n+1}$  tal que,  $\Phi_x(C_0) = \kappa(x)$ ,  $\Phi(x_{n+1}) = \kappa(x)$  para cada  $x \in B^n$ ,  $\phi_{x_{n+1}} = 1 \in O_{n+1}$ , y para cada  $s \in S^{n-1}$ ,  $\zeta = \Phi_s^{-1}l_s\Phi_{-s} \in G_0$ . Definimos el mapeo  $\xi : I \times S^{n-1} \rightarrow O_n$  como:

$$\xi(t, s) = \Lambda(x_0, \frac{(1-t/2)x_0 + (t/2)\zeta(x_0)}{\|(1-t/2)x_0 + (t/2)\zeta(x_0)\|}).$$

Notese que  $\zeta_s \in G_0 \neq -x_0$ , y por lo tanto  $\xi(t, s)$  esta bien definida con la siguiente expresión

$$-x_0 \neq \frac{(1-t/2)x_0 + (t/2)\zeta_s(x_0)}{\|(1-t/2)x_0 + (t/2)\zeta_s(x_0)\|}.$$

Notese también para cada  $s \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $\xi(0, s) = 1 \in 0_n$  y

$$\xi(1, s)(x_0) = \frac{x_0 + \zeta_\delta(x_0)}{\|x_0 + \zeta_\delta(x_0)\|}.$$

Definase un mapeo  $N : B^n \rightarrow O_{n+1}$  como sigue: sea  $x = \sum_{k=1}^{n+1} t_k x_k \in B^n$ , entonces

$$N(x) = \begin{cases} \Phi_x \xi\left(1 - t_{n+1}, \frac{\sum_{k=1}^n t_k x_k}{\|\sum_{k=1}^n t_k x_k\|}\right) & \text{si } t_{n+1} \leq 1, \\ \Phi_{x_{n+1}} = 1 & \text{si } t_{n+1} = 1. \end{cases}$$

Claramente,  $N$  es un mapeo continuo bien definido. Mas aún, probaremos que  $N$  satisface las dos condiciones.

a)  $N_x(x_0) \in H(x)$ , para cada  $x \in B^n$ , y

b)  $N_\delta(x_0) = \frac{\Phi_\delta(x_0) + \Phi_{-\delta}(x_0)}{\|\Phi_\delta(x_0) + \Phi_{-\delta}(x_0)\|} = N_{-\delta}(x_0)$  para cada  $s \in \mathbb{S}^{n-1}$

De hecho, ya que  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y

$$\xi\left(1 - t_{n+1}, \frac{\sum_{k=1}^n t_k x_k}{\|\sum_{k=1}^n t_k x_k\|}\right) \in 0_n,$$

$N_x(x_0) \in H(x) = \Phi_x(\mathbb{R}^n)$  para cada  $x \in B^n - x_{n+1}$ . Mas aún  $x_0 = N_{x_0} = N_{x_{n+1}}(x_0) \in H(x_{n+1})$  esto concluye la prueba de (a). En orden se probará (b), sea  $s \in \mathbb{S}^{n-1}$ , entonces

$$N_\delta(x_0) = \Phi_\delta \xi(1, s) = \Phi_\delta\left(\frac{x_0 + \zeta_\delta(x_0)}{\|x_0 + \zeta_\delta(x_0)\|}\right) = \frac{\Phi_\delta(x_0) + \Phi_{-\delta}(x_0)}{\|\Phi_\delta(x_0) + \Phi_{-\delta}(x_0)\|},$$

por que  $\Phi_\delta(x_0) \in H(s)$  y consecuentemente  $I_\delta \Phi_\delta(x_0) = \Phi_\delta(x_0)$ . Esto completa la prueba de (b). Hemos probado que podemos escoger continuamente para cada  $n$ -dimensional subespacio  $H(x)$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , un vector no cero  $N_x(x_0) \in H(x)$ . esto implica que el haz vectorial estándar de subespacios  $n$ - dimensionales de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\gamma^n : E \rightarrow \mathbb{R}P^n$ , tiene una sección no cero, lo cual es una contradicción. (Ver proposición 4 y ejemplo 3 en la sección 4 de [6])

### Demostración del teorema 1, 2 y 3.

**Teorema 1** Si las  $n$ -secciones de  $K$  através de  $p_0$  son afínmente equivalentes entonces o bien  $K$  es un elipsoide o es central-

mente simétrico con respecto a  $p_0$ .

Asumimos sin pérdida de generalidad que  $p_0$  es el origen. Podemos usar un argumento de Burtón [5] y probar que existe un giro completo de una copia afín de  $K \cap \mathbb{R}^{n+1}$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Para cada  $u \in \mathbb{S}^n$  sea  $F(u)$  el único elipsoide  $n$ -dimensional de menor volumen que contiene a la sección  $K \cap H(u)$  por la dilatación de los ejes principales, la cual es una función continua de  $u$ . entonces todas las secciones  $\gamma_u(K \cap H(u))$  para cada  $u \in \mathbb{S}^n$  son congruentes, entonces existe un giro completo de  $\gamma_{x_{n+1}}(K \cap \mathbb{R}^n)$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Por el lema 7,  $K \cap \mathbb{R}^n$  y ya que cualquier sección de  $K$  a través del origen, es centralmente simétrica, entonces nuestra conclusión se sigue directamente del teorema del falso centro [2], el cual bajo esta hipótesis concluye que bien  $K$  es un elipsoide o es centralmente simétrico con respecto al origen.

**Teorema 2** Si las  $n$ -secciones de  $K$  a través de  $p_0$  preservan volúmenes afinmente equivalentes, entonces  $K$  es una bola euclidiana. Si  $K$  es un elipsoide, podemos verificar directamente que  $K$  es una bola euclidiana. Por el teorema anterior, asumimos que  $K$  es centralmente simétrico con respecto a  $p_0$ .

Para cada  $v \in \mathbb{S}^n \cap H(v)$  y sea  $\lambda_v$  que indica la medida esférica de Lebesgue  $(n-1)$ -dimensional en  $S_v$ . Sea  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(u) = \max\{0, |p_0 + tu \in K|\}$  para cada  $u \in \mathbb{S}^n$ . Notese que  $f$  es un mapeo continuo con la propiedad de que  $f(u) = f(-u)$  para cada  $u \in \mathbb{S}^n$ , asimismo, por hipótesis.

$$\int_{S_T} f^n(u) d\lambda_v = c$$

Donde la  $c$  es la constante independiente de  $v$ . Donde, por el lema 1 y [16], la función  $f^n$  es constante y así mismo  $K$  es una esfera.

$$\int_{S_T} f d\lambda_v = 0 \text{ para cada } v \in \mathbb{S}^{d-1}$$

**Demostración del teorema 3**

Sea  $K \subset \mathbb{E}^{n+1}$ ,  $n \geq 2$ , un cuerpo convexo de diámetro uno ( $d(K) = 1$ ) que contiene el origen. Supongamos que todas las  $n$ -secciones de  $K$  a través del origen son homotéticas.

Si  $n$  es par, por el resultado de Gromov [20],  $K$  debe ser un elipsoide, pero en este caso es fácil de comprobar directamente que  $K$  debe ser una esfera euclidiana. Por el teorema 1, o bien  $K$  es un elipsoide y por lo tanto una esfera Euclidiana, o  $K$  centralmente simétrica con respecto a la origen. Supongamos, por

tanto, que  $n$  es impar y  $K$  es centralmente simétrica con respecto al origen. Además, podemos suponer ahora sin pérdida de generalidad que  $d(K \cap tx_n : t \in \mathbb{R}) = d(K) = 1$ . Sea  $C = K \cap \mathbb{E}^n$  y  $C_0 = x_{n+1} + C \subset E(x_{n+1})$ . Por hipótesis hay un giro de  $C$  en  $\mathbb{E}^{n+1}$ .

$$\kappa : \mathbb{S}^n \rightarrow \gamma_0$$

y la función

$$\lambda : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$$

tal que para cada  $x \in \mathbb{S}^n$ ,

$$\kappa(x) = (K \cap H(x)) / \lambda(x) + x.$$

Consecuentemente, puesto que  $d(C) = 1$  tenemos que para todo  $x \in \mathbb{S}^n$ ,

$$|\lambda(x)| = d(K \cap H(x)).$$

Sea  $\sum_{n-1}$  la esfera unitaria de  $H(x_n)$ ; es decir,  $\sum_{n-1} = H(x_n) \cap \mathbb{S}^n =$

$\mathbb{S}_n$ . Tenga en cuenta que  $s \in \sum_{n-1}$  es la frontera de una bola topológica contenida en  $\mathbb{S}^n$ . Observe también que para cada  $s \in \sum_{n-1}$ ,  $x_n \in H(s)$ , y por lo tanto  $d(K \cap H(s)) = 1$ . Consecuentemente,

$$\lambda(s) = 1, \text{ para cada } s \in \sum_{n-1}.$$

**Reclamación.**

Sea  $\Gamma$  un subespacio  $(n-1)$ -dimensional de  $H(x_n)$ . Entonces  $d(K \cap \Gamma) = 1$ .

Sin pérdida de generalidad, podemos elegir coordenadas de tal manera que  $\Gamma = \mathbb{E}^{n-1}$ . Supongamos que  $d(K \cap \mathbb{E}^{n-1}) < 1$ . Como en el Lema 1, ya que  $\sum_{n-1}$  es la frontera de una  $n$ -esfera topológica contenida en  $\mathbb{S}^n$ , hay una función

$$\phi : \sum_{n-1} \rightarrow O_{n+1}$$

tal que

- (a)  $\phi_s(C_0) = \kappa(s) = K \cap H(s) + s$ , para cada  $s \in \sum^{n-1}$ .
- (b)  $\phi_s(x_{n+1}) = s$ , para cada  $s \in \sum^{n-1}$ , y
- (c)  $\phi_{n+1} = 1 \in O_{n+1}$ .

Vamos a probar primero que para cada  $s \in \sum^{n-1}$ ,  $\phi_s(x_{n+1}) \notin H(x_n)$ , por (b)  $\phi_{s_0}(x_{n+1}) = s_0 \in H(x)$ , donde  $x_n \in \phi_{s_0}(\mathbb{E}^{n-1})$  y por lo tanto

$$K \cap \{tx : t \in \mathbb{R}\} \subset K \cap \phi_{s_0}(\mathbb{E}^{n+1}) = \phi_{s_0}(K \cap \mathbb{E}^{n-1})$$

Consecuentemente,  $d(K \cap \mathbb{E}^{n+1}) = 1$ , lo cual es una contradicción.

Obsérvese ahora que para cada  $s \in \sum^{n-1}$ ,  $\phi_s(x_n) \neq -x_n$ . contrario,

puesto que  $\phi_{x_{n+1}}(x_n) = x_n$ , habría, por continuidad,  $s_0 \in \sum^{n-1}$  que

ya hemos demostrado no es posible. Se Define  $N : \sum^{n-1} \rightarrow O_{n+1}$

de la siguiente manera:

$$N_s = \Lambda(\phi_s(x_n), x_n)\phi_s \text{ para cada } s \in \sum^{n-1}.$$

Tenga en cuenta que  $N$  está bien definida porque  $\phi_s(x_n) \neq -x_n$ .

Obsérvese también que  $N_s(x_{n+1}) = s$ , porque  $s$  es ortogonal a  $x_n$  y  $\phi_s(x_n)$ . Además,  $N_s(x_n) = x_n$ . Consecuentemente,  $N_s(\mathbb{E}^{n-1})$  es

ortogonal a  $s$  y  $x_n$  y por lo tanto, para cada  $s \in \sum^{n-1}$ ,

$$N_s(\mathbb{E}^{n-1}) = H(s) \cap H(x_n).$$

Por consiguiente, para cada  $s \in \sum^{n-1}$ , tenemos la igualdad

$$N_s(x_n + \mathbb{E}^{n-1}) = (n-1)\text{-plano tangente de } \sum^{n-1} \text{ a } s,$$

lo que da una trivialización del espacio tangente a la  $n-1$ -esfera

$\sum^{n-1}$ . Esta es una contradicción porque  $n$  es impar (véase 27.5 de [18]). Con esto concluimos esta prueba.

*Observe ahora que para cada subespacio  $n$ -dimensional  $H(x)$  de  $\mathbb{E}^{n+1}$ ,  $d(K \cap H(x)) = d(K) = 1$ , porque si  $\Gamma = H(x) \cap H(x_n)$ , entonces por la reivindicación anterior,  $1 = d(K \cap \Gamma) \leq d(K \cap H(x)) \leq d(K) = 1$  Por lo tanto, todas las  $n$ -secciones de  $K$  a través del origen son congruente (esto es,  $\lambda(x) = 1$ ) para cada  $(x \in \mathbb{S}^n)$  y por lo tanto, por el corolario del Teorema 2,  $K$  es una esfera euclidiana.*

## Capítulo 5

# Problema y solución

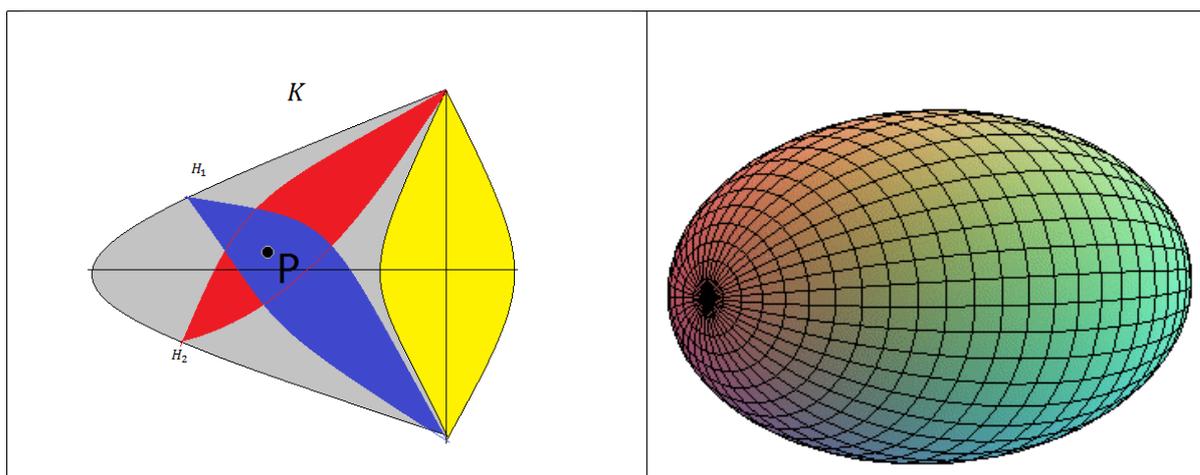
Una solución del problema de Banach generalizado usando la teoría de haces fibrados y la convexidad.

### El problema inicial de Banach.

Sea  $K \subset \mathbb{E}^n$  un convexo y  $p \in \mathbb{E}^n$  para cada pareja de hiperplanos de dimensión  $(n - 1)$  que pasa por  $p$  existe una transformación lineal  $\Omega$  tal que:

$$\Omega(H_1 \cap K) = H_2 \cap K.$$

Demostrar que  $K$  es un elipsoide.



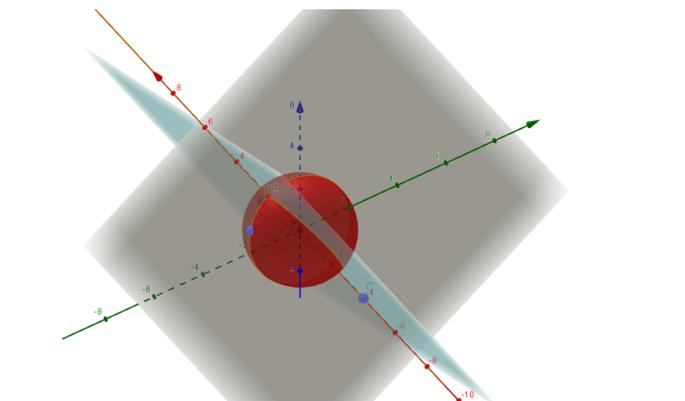
### El problema de Banach reestructurado.

Sea  $K$  un conjunto convexo en el espacio euclidiano  $\mathbb{E}^n, n \geq 3$  para cada pareja de subespacios  $H_1$  y  $H_2$  de dimensión  $n - 1$  entonces

existe  $\Omega \in O_n$  tal que

$$\Omega(H_1 \cap K) = H_2 \cap K.$$

Demostrar que  $K$  es una esfera.



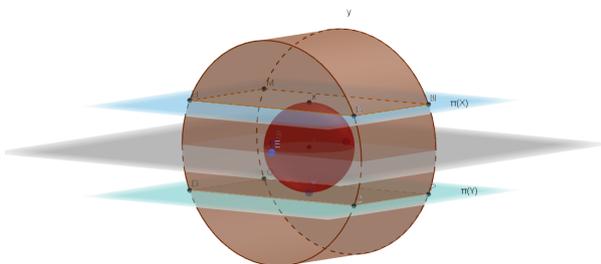
**Definición 5.0.1.** Sea  $\Pi(X)$  el hiperplano tangente a la esfera  $S^n$  en el punto  $X$ .

**Definición 5.0.2.** Sea  $S(X) = \Pi(X) \cap K$ , donde  $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$  es un conjunto convexo

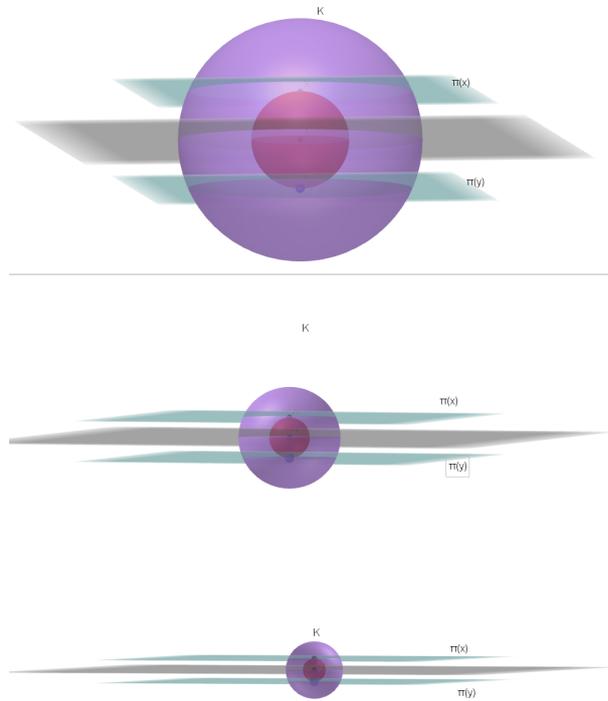
### Problema de Banach generalizado.

Sea  $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un cuerpo convexo,  $n \geq 3$  para  $X, Y \in S^n$  existe  $\Omega \in O_{n+1}$

$$\Omega(S(X)) = S(Y)$$



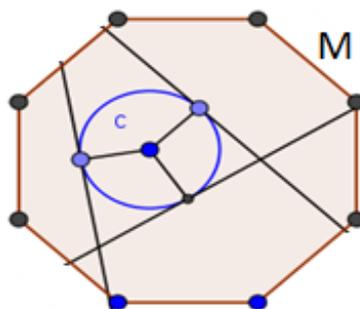
Demostrar que  $K$  es una esfera y ( $K$  Es concentrica con  $S^n$ )



Para probar el resultado anterior lo haremos para unos casos particulares para ello enunciaremos el siguiente teorema.

**Teorema 5.0.1.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 2$  un cuerpo convexo y  $n$  un número entero tal que  $n \equiv 1 \pmod{4}$ . Supongamos que todas las  $n$ -secciones de  $K$  tangentes a la  $n$ -esfera  $S^n = \{x \in \mathbb{E}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ . Situada en el interior de  $K$ , son congruentes. Entonces  $K$  es una esfera concéntrica con  $S^n$ .*

El caso  $n = 1$  del teorema 1 fue probado por Barken y Larman [3]. Es decir si todo segmento de una curva convexa  $M$  que es tangente a un círculo en el  $\text{int}M$  tienen la misma longitud, entonces  $M$  es un círculo.



Sea  $A \subset \mathbb{E}^n$  un cuerpo convexo  $n$ -dimensional, un campo de cuerpos congruentes a  $A$  es una función  $A(u)$  definida por  $u$  en la esfera unitaria  $\mathbb{S}^n$ , donde  $A(u)$  es copia congruente de  $A$  situada en el hiperplano  $\mathbb{E}^{n+1}$  perpendicular a  $u$ ; donde  $A(u)$  es una función continua en la métrica de Hausdorff. Si además  $A(u) = A(-u)$ , para cada  $u$ , decimos  $A(u)$  es un giro completo de  $A$  en  $\mathbb{E}^{n+1}$ . Claramente si todas las secciones de un cuerpo convexo  $n + 1$ -dimensional  $K \subset \mathbb{E}^{n+1}$  a través de un punto interior son congruentes, dan lugar a un giro completo de algún cuerpo  $n$ -dimensional  $M \subset \mathbb{E}^n$  en  $\mathbb{E}^{n+1}$ .

En [7] H. Hadwiger probó que: Ningún cuerpo de dimensión  $n$  con grupo de simetría trivial puede ser completamente girado en el espacio euclidiano  $(n + 1)$   $\mathbb{E}^{n+1}$ . En [9] P. Mani demuestra que si  $n \neq 3, 7$ , Ningún cuerpo convexo  $n$ -dimensional con grupo finito de simetrías determina un campo de los cuerpos convexos tangente a  $\mathbb{S}^n$ . Además, Mani afirmaba que "para las esferas de dimensiones impares no se encontraron caracterizaciones generales de los cuerpos que pueden ser girados alrededor de ellos". En [5] G.R Burton usa el método de [7] y [11] demostrar que un cuerpo convexo 3-dimensional  $M \subset \mathbb{E}^4$  puede ser un giro completo en  $\mathbb{R}^4$  si y solo si  $M$  es centralmente simétrico. En [12] Montejano generaliza Burton en el siguiente resultado, Sea  $M \subset \mathbb{E}^{n+1}$ ,  $n \geq 2$ , Se puede girar completamente en  $\mathbb{R}^{n+1}$  si y solo si  $M$  es centralmente simétrica.

En [19] se deduce que si  $M \subseteq \mathbb{E}^n$  puede ser completamente girado,  $n \geq 2$ , y los cuerpos que determinaron el giro completo corresponden a las  $n$ -secciones, que pasan a través de un punto fijo, de un cuerpo convexo  $K \subset \mathbb{E}^{n+1}$ , entonces  $M$  es una  $(n - 1)$  esfera y  $K$  una esfera.

¿Existe un giro completo de Cuerpo convexo  $n$  dimensional  $C$  en  $\mathbb{E}^{n+1}$ , donde  $C$  es una esfera y  $n$  es un impar,  $n > 4$  y  $n \neq 7$ ? generalizando tenemos.

Pregunta 1. ¿Existe un campo de cuerpos convexos congruentes de dimensión  $n$ -dimensional es congruentes  $C \subset \mathbb{E}^{n+1}$  tangente a la esfera, donde  $C$  no es una esfera,  $n$  es impar,  $n > 4$  y  $n \neq 7$ ?

En este artículo daremos respuesta negativa a la pregunta 1, En el caso  $n \equiv 1 \pmod{4}$  y el campo de cuerpos convexos  $n$ -dimensionales congruentes a  $C \subset \mathbb{E}^n$  tangentes a la  $n$ -esfera en el interior de  $K$  es dada por la familia de  $n$ -secciones de cuerpos convexos  $K \subset \mathbb{E}^{n+1}$  tangentes a la  $n$ -esfera en el  $\text{int}K$ .

**Preliminares.** Por  $u \in \mathbb{S}^n$  denotamos por  $H^+(u)$  el semi-espacio  $\{x \in$

$\mathbb{E}^n : x \cdot u \leq 0$  con  $u$  un vector normal unitario, por  $H(u)$  es la frontera del hiperplano  $\{x \in \mathbb{E}^n : x \cdot u = 0\}$  y por  $E(u)$  el hiperplano afin  $H(u) + u$ . Dado un hiperplano  $H$  con dos vectores normales  $w$  y  $-w$  segun corresponden a sus subespacios  $H^+(w)$  y  $H^+(-w)$ , ambos con  $H$ .

Sea  $O_n$  el grupo de transformaciones ortogonales real en el  $n$ -espacio euclidiano  $\mathbb{E}^n$ . Un  $k$ -marco,  $v^k$ , en  $\mathbb{E}^n$  es un conjunto ordenado de  $k$  vectores independientes. Sea  $v_0^n$ . Sea  $O_{k-k}$  el subgrupo que deja fijo  $v_0^k$ . Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{E}^n$  un conjunto compacto y  $k$  un entero,  $1 \leq k < n$ , se denota por  $G(\Omega)$  el subgrupo de simetría de  $\Omega$ .

**Definición 5.0.3.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{E}^n$  un conjunto compacto,  $n \geq 3$ , y sea  $k$  un entero,  $1 \leq k < n$ . El conjunto  $\Omega$  es un  $k$ -cuerpo de revolucion si existe una descomposicion de  $\mathbb{E}^n$  en la forma  $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}^k \oplus \mathbb{E}^{n-k}$  de tal manera que  $bd\Omega \cap \Gamma$  es una esfera de dimensión  $k - 1$  para todos los  $k$ planos afines  $\Gamma$  paralelo  $\mathbb{E}^k$ .

**Lema 5.1.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{E}^n$  un conjunto compacto y sea  $k$  un entero,  $1 \leq n < n$ . Entonces

- i)  $\Omega$  es un  $k$ - cuerpo de revolución si y solo si  $G(\Omega) = O_k$
- ii) Si  $\{\Omega_i\}$  es una sucesión de  $k$ - cuerpos de revolución de dimensión  $n$  contenidos en  $\mathbb{E}^n$  tal que  $\Omega_i \rightarrow \Omega$ , cuando  $i \rightarrow \infty$ , entonces  $\Omega$  es un  $k$ -cuerpo de revolución
- iii) Si existe dos descomposiciones diferentes de  $\mathbb{E}^n$  en la forma e nla forma  $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}^k \oplus \mathbb{E}^{n-k}$  de tal manera que  $bd\Omega \cap \Gamma$  es una esfera de imension  $k - 1$  para todos los  $k$ -planos afines  $\Gamma$  paralelo  $\mathbb{E}^k$ .

El teorema 27,18 de 18 de Claim: la  $n$ -esfera no admite campos continuos de  $k$ - planos si  $n$  es par y  $1 \leq k \leq n - 2$ .

*Demostración del teorema 1* La demostración del Teorema 1 se sigue del teorema de Mani Como se puede ver en [9], para  $n$ . De hecho, la hipótesis implica, casi auto- maticamente, que si  $n$  es par, entonces las secciones de  $K$  tangente a la  $n$ -esfera son esferas de la misma proporción y, consecuentemente, por el teorema de Bianchi-Gruber en [4],  $K$  es una esfera.

Supongamos ahora que  $n \equiv 1 \pmod{4}$ . Sea  $C \subset \mathbb{E}^n$  Es el cuerpo convexo tal que todos las  $n$ -secciones de  $K$  tangentes a la  $n$ -esfera unitaria  $\mathbb{S}^n$  son congruentes a  $C$ . Ya que  $n \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $n$  no es 3 ni 7, entonces por Proposición 2 de [9],  $G(C)$  no puede ser finito. Entonces  $G(C) = O_k$  para algunos  $k = 2, \dots, n$ . El caso  $G(C) = O_n$ , implica que  $C$  es una esfera y, de nuevo por el teorema de Bianchi-Gruber [4],

$K$  es una esfera. Ahora vamos a demostrar que los casos en que  $G(C) = O_k$  para  $k = 2, \dots, n - 2$ . Por el lema 1,  $C$  es un  $k$ -cuerpo de revolución. En consecuencia, existe una descomposición de  $\mathbb{E}^n$  en la forma  $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}^k \oplus \mathbb{E}^{n-k}$  de tal manera que  $bdC \cap \Gamma$  es una esfera de dimensión  $k - 1$  para todos los  $k$ -planos affine  $\Gamma$  paralelos a  $\mathbb{E}^k$ . El campo de los cuerpos convexos tangente a  $\mathbb{S}^n$  congruentes a  $C$  y dicha descomposición, induce dos campos continuos tangentes a  $\mathbb{S}^n$ , uno en  $k$ -planos otra en  $(n - k)$ -planos. En virtud que  $n \equiv 1 \pmod{4}$  y  $2 \leq k \leq n - 2$ , por el teorema 27,18 de [18] esto es imposible.

Finalmente, consideramos el caso  $G(C) = O_{n-1}$ . Donde  $G(C) = O_{n-1}$ , nuevamente, existe una descomposición de  $\mathbb{E}^n$  en la forma  $\mathbb{E}^n = \mathbb{E}^{n-1} \oplus \mathbb{E}^1$  de tal manera que  $bdC \cap \Gamma$  es una esfera de dimensión  $n - 2$  para todo  $(n - 1)$ -afin  $\Gamma$  paralelo a  $\mathbb{E}^{n-1}$ . El campo de cuerpos convexos tangente a  $\mathbb{S}^n$  congruentes a  $C$ , y la descomposición mencionada, induce dos campos continuos tangentes a  $\mathbb{S}^n$ , uno de  $(n - 1)$ -planos y otro de líneas, denotamos estos campos, respectivamente, por  $w$  y  $\Xi$ .

Por  $x \in bdK$ , se denota por  $C_x$  el cono que circunscribe a  $\mathbb{S}^n$  con vértice en  $x$  y por  $C^x \subset \mathbb{S}^n$  la colección de vectores unitarios  $u$  tal que  $x \in E(u)$ . Sea  $\Pi_x$  el  $n$ -plano que contiene a  $C_x \cap \mathbb{S}^n$ . Entonces tambien.

1. las líneas tangentes a  $\mathbb{S}^n$  que pertenece a  $\Xi$ , derivados de la descomposición del  $(n - 1)$ -cuerpo de revolución  $E(u) \cap K$ , están pasando por  $x$  para todos  $u \in C^x$
2. ninguna de las líneas tangentes a  $\mathbb{S}^n$  que pertenece a  $\Xi$ . se tiene de la descomposición  $(n - 1)$ -cuerpo de revolución  $E(u) \cap K$ , están pasando por  $x$  para todos  $u \in C^x$

**El caso 1)** Vamos a probar que la sección que la sección  $\Pi_x \cap K$  es una  $n - 1$ -esfera. Para demostrar que  $\Pi_x \cap K$  es una  $(n - 1)$ -esfera, demostraremos que, por cada  $(n - 1)$ -plano  $\Lambda \subset \Pi_x$  tangente a  $\Pi_x \cap \mathbb{S}^n$  entonces la sección  $\Lambda \cap (\Pi_x \cap K)$  es una  $(n - 2)$ -esfera, entonces por [4] tendríamos que  $\Pi_x \cap K$  es una  $n - 1$ -esfera. Entonces existe  $u \in \mathbb{S}^n$ . Existe  $u \in \mathbb{S}^n$  tal que podamos representar  $\Lambda$  es la intersección  $E(u) \cap \Pi_x$ . Entonces la sección  $E(u) \cap K$  es un  $(n - 1)$ -cuerpo de revolución y, ya que asumimos que 1) se tiene, existe una descomposición de  $E(u)$  en la forma  $\mathbb{E}^{n-1} \oplus \mathbb{E}^1$  tal que  $\mathbb{E}^1 = aff\{u, x\}$ . Por definición 1, la intersección de  $E(u) \cap K$  con  $(n - 1)$ -planos ortogonales a  $\mathbb{E}^1$  son  $n - 2$ -esferas. En particular. la intersección de  $E(u) \cap K$  con  $E(u) \cap \Pi_x$  es una  $(n - 2)$ -esfera, es decir  $\Lambda \cap (E(u) \cap K)$  es una  $n - 1$ -esfera y donde  $\Lambda \cap (E(u) \cap K) = \Lambda \cap (\Pi_x \cap K)$ ,  $\Lambda \cap (\Pi_x \cap K)$  es una  $(n - 2)$ -esfera

como decíamos.

**El caso 2)** Para probar que  $K$  es una esfera de dimensión  $n$  encontramos un vector  $u_0 \in \mathbb{S}^n$  tal que  $E(u_0) \cap K$  es una esfera de dimensión  $n - 1$ . En consecuencia, en virtud de la hipótesis, para todos  $u_0 \in \mathbb{S}^n$ ,  $E(u) \cap K$  sería una esfera de dimensión  $n - 1$ . Así  $K$  sería una esfera por de dimensión por [4]. Sea  $p : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \Pi$  es la proyección de  $x$  sobre  $\Pi$ . La proyección de el campo  $\Xi$  de líneas tangentes a  $\mathbb{S}^n$ , de los  $n - 1$ -cuerpos de revolución, induce un campo  $\xi$  de líneas tangentes a la  $(n - 1)$ -esfera  $\Pi_x \cap \mathbb{S}^n$ ; para cada  $u \in C^x$ ,  $p(E(u))$  es una esfera es un  $(n - 1)$ -plano tangente a la esfera  $\Pi_x \cap \mathbb{S}^n$ . En virtud que  $(n - 1)$  es dado por el inciso (i) del teorema 27, 17 en [18], existe  $u_0 \in C^x$  de manera que corresponda un número de líneas de  $\xi$  en el plano  $(n - 1)$ -plano  $p(E(u_0))$ . Se denota por  $\Delta \subset p(E(u_0))$  la colección de líneas. Afirmamos que existen dos sucesiones  $u_i, v_i \in C^x$  y dos líneas  $\lambda, \gamma \in \Delta$ ,  $\lambda \neq \gamma$  tal que  $u_i \rightarrow u_0, v_i \rightarrow u_0$ , cuando  $i \rightarrow \infty$  y las correspondientes sucesiones de líneas  $\lambda_i, \gamma_i$  de  $\xi$ , respectivamente, en lo planos  $\{p(E(u_i))\}, \{p(E(v_i))\}$  son tales que

$$\lambda_i \rightarrow \lambda \text{ y } \gamma_i \rightarrow \gamma, \text{ cuando } i \rightarrow \infty$$

De lo contrario, no sería un número finito de líneas en  $p(E(u_0))$ . Implica la existencia de dos sucesiones de líneas  $\{\Lambda_i\}, \{\Gamma_i\}$  en  $\Xi$ ,  $\Lambda_i \subset E(u_i), \Gamma_i \subset E(v_i)$ , y dos líneas  $\Lambda, \Gamma$  en  $E(u_0)$  tal que  $p(\Lambda_i) = \lambda_i, p(\Gamma_i) = \gamma_i, p(\Lambda) = \lambda$  y

$$\Gamma_i \rightarrow \Gamma \text{ y } \Lambda_i \rightarrow \Lambda, \text{ cuando } i \rightarrow \infty \quad (5.1)$$

Debido  $u_i \rightarrow u_0, v_i \rightarrow u_0$ , cuando  $i \rightarrow \infty$ , se sigue  $E(u_i) \rightarrow E(u_0)$ , cuando  $i \rightarrow \infty$ , y desde  $\Lambda_i \subset E(u_i), \Gamma_i \subset E(v_i)$ , por la continuidad de  $\Xi$  y la relación (1). Por (1) se tiene.

Por (1). la definición de  $\Xi$  y por ii) el lema 1,  $\Lambda, \Gamma \in \Xi$ , es decir,  $\Lambda, \Gamma$  determinan dos diferentes descomposiciones de  $E(u_0) \cap K$  es  $(n - 1)$ -cuerpo de revolución. Entonces por el lema 1  $E(u_0) \cap K$  es una esfera.

3) Para cada  $x \in bdK$  existe un relativo abierto de  $\Pi_x \cap K$ , sea  $\tau_x$ , tal que, por cada  $z \in \tau_x$ , la línea de  $\Xi$  que corresponden al  $n$ -soporte  $E(u(z))$  de  $\mathbb{S}^n$  en  $z$  pasa por  $x$ .

Asumiendo 3), vamos a probar, primero, que.

- (\*) Para cada  $x \in bdM$  existe un  $n$ -plano soporte de  $K$  paralelo a  $\Pi_x$ .

y, segundo, que, por cada  $u \in \mathbb{S}^n$ , la sección  $E(u) \cap K$  tiene la siguiente propiedad

- (\*\*) Para cada  $x \in bd(E(u) \cap K)$  existe un  $n - 1$ plano soporte de  $K$  paralelo a  $\Pi_x$ . de  $bdE(u) \cap K$ , que pasa a través y ortogonal a  $aff\{u, x\}$ .

Como hemos visto en 1). para cada  $z \in \tau_x$ , el plano  $E(u(z))$  tiene una descomposición de la forma  $\mathbb{E}^{n-1} \oplus \mathbb{E}^1$  y, debido a que  $\mathbb{E}^1$ .

está pasando por  $x$  y  $C^x$  es un cono derecho,  $\mathbb{E}^{n-1}$  que esta contenido en  $\Pi_x$ . De ello se deduce que existe un  $(n - 1)$ -plano soporte de  $E(u(z)) \cap K$  pasando por  $x$  y paralelo a  $\Pi_x$ . Variando  $z \in \tau_x$ , concluimos que existe un plano soporte de  $K$  paralelo a  $\Pi_x$ . Esto completa la prueba de (\*).

Por  $x \in bdM$ , denotamos por  $H_x$  al  $n$ -plano soporte de  $K$  paralelo a  $\Pi_x$ , donde  $C_x$  es un cono derecho la línea  $aff\{u, x\}$  es ortogonal a  $\Pi_x \cap E(u)$ . Por otro lado, por la propiedad (\*).  $\Pi_x \cap E(u)$  y  $H_x \cap E(u)$  son paralelo. Por consiguiente,  $H_x \cap E(u)$  es un plano de soporte de  $E(u) \cap K$  ortogonal a  $aff\{u, x\}$  y pasando por  $x$ .

## **Capítulo 6**

# **Bibliografía**



# Bibliografía

- [1] ADAMS, J., *Vectors fields on spheres*. Ann. of Math:(2), 75:603-632,1962
- [2] P.W. AITCHISON, C.M. PETTY AND C.A. ROGERS, *Rogers: A convex body with a false centre is an ellipsoid* Mathematika 18 (1971), 50-9.
- [3] J.A. BARKER, D.G. LARMAN, *Determination of convex bodies by certain sets of sectional volumes*. Discrete Mathematics 241 (2001) 79-96.
- [4] G. BIANCHI AND P. GRUBER, *Characterization of Ellipsoids*, Archiv der Math. 49 (1987),344-350.
- [5] G. R BOURTON, *Burton, Congruent sections of convex body*, Archiv der Math. Pacific Journal of Mathematics Vol. 81, No. 2, 1979.
- [6] H. BUSEMANN, *The geometry of geodesic*, New York, 1955. .
- [7] H. HADWIGER, VOLLSTÄNDIG STETIGE UMWENDUNG EBENER EIBEREICHE IM RAUM, *Studies in mathematical analysis and related topics*, (Stanford University Press, Stanford, 1962), 128-131.
- [8] D.G. LARMAN, *A note on the false center problem*, Mathematika 21 (1974), 216-27.ff
- [9] P. MANI, *Fields of planar bodies tangent to spheres*,Monatsh. Math.,74 (1970), 145-149.
- [10] L. MONTEJANO, *Convex bodies with homothetic sections*,Bull.London Math. Soc. 23 (1991) 38-386.
- [11] L. MONTEJANO, *Two applications of Topology to Convex Geometry*,Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Vol. 247. 2004, pp. 164-167.

- [12] L. MONTEJANO AND E. MORALES, *Variations of classic characterizations of ellipsoid and a short proof of the false centre theorem*, *Mathematika* 54 (2007), 37-42
- [13] L. MONTEJANO AND E. MORALES, *Shaken False Centre Theorem I*, *Mathematika* 54 (2007), 43-48.
- [14] J. W. MILNOR AND J. D. STASHEFF, *Characteristic Classes*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1974.
- [15] E. MORALES-AMAYA., *A characterization of translated convex bodies*, To be published.
- [16] R. SCHNEIDER, *Schneider. Convex bodies with congruent sections*, *Bull. London Math Soc.*, 12 (1980), 52-54.
- [17] E. H. SPANIER, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [18] STEENROD, N, *The topology of fiber bundles*, Princeton University Press, third printing, 1960.
- [19] DANZER, L, *Über das Löwnersche Ellipsoid und sein Analogon unter denen den einem Eikörper einbeschriebenen Ellipsoiden*, *Arch, Math*, 8(1957) 214-219.
- [20] GROMOV, M,L, *On a geometric hypothesis of Banach*, *Izv.Akad.Nauk SSSR, Ser.Matt*, 31(1967) 1105-1114; Mr35, No. 655.
- [21] J. MILNOR AND J. D. STASHEFF, *Characteristic classes*, Princeton University Press, third printing, 1974.

Escuela de Matematicas, Autonoma Universidad de Guerrero,  
Carlos E. Adame 54, Col. Garita C.P 39650, Acapulco, Guerrero.  
Mexico.