



Universidad Autónoma de Guerrero

Facultad de Matemáticas

“Modelo logístico de orden
fraccionario: Un análisis
Bayesiano”

TESIS

Que para obtener el título de:
Maestro en Ciencias Matemáticas

PRESENTA:

Lic. Alberto Fleitas Imbert



DIRECTOR DE TESIS:
Dr.C. Martin Patricio Arciga
Alejandre
Dr.C Francisco J. Ariza
Hernández

Acapulco, 2017.

Índice

Introducción	4
Desarrollo	6
Nociones Preliminares	6
Algunos enfoques de derivadas fraccionarias	6
Derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo	11
Modelo de crecimiento logístico ordinario	17
Elementos de la estadística bayesiana	19
Planteamiento del problema	21
Modelo de crecimiento logístico fraccionario	22
Estimación bayesiana	23
Estudio de simulación	24
Resultados de las simulaciones	24
Conclusiones	32
Bibliografía	33

Resumen

Entre los objetivos de las Matemáticas está el tratar de describir y predecir eventos que suceden en el mundo real; esto esencialmente se logra a través de representaciones matemáticas. Muchas de las leyes de la naturaleza pueden estudiarse mediante sistemas de ecuaciones diferenciales, en las cuales se ven involucrados parámetros que caracterizan dicho sistema. Por otro lado, al momento de incorporar datos experimentales, se presenta cierto grado de incertidumbre debido a múltiples factores asociados al sistema, entre ellos, errores de medición o de modelación.

Los problemas inversos son resueltos a través de métodos, donde a partir de datos obtenidos, permiten la inferencia para los valores de los parámetros involucrados en dicho fenómeno. En el presente trabajo, se hace uso de la inversión estadística bajo el enfoque Bayesiano para estimar parámetros de un modelo de crecimiento logístico con derivada de orden fraccionario, para tal propósito se hace uso de datos reales y simulados.

Abstract

Among the objectives of Mathematics is to try to describe and predict events that happen in the real world; this is essentially achieved through mathematical representations. Many of the laws of nature can be studied through systems of differential equations, in which parameters that characterize this system are involved. On the other hand, when incorporating experimental data, a certain degree of uncertainty is presented due to multiple factors associated with the system, among them, errors of measurement or modeling. The inverse problems are solved through methods, where from data obtained allow the inference for parameter values involved in said phenomenon. In the present work, he uses statistical inversion under the Bayesian approach to estimate the parameters of a logistic growth model with a fractional order derivative, to such a purpose is made up of real and simulated data.

Introducción

En cálculo elemental nos enseñan algunos de los métodos de derivación e integración clásicos, así como su importancia en el desarrollo de las matemáticas y otras ciencias. Se observa que la derivación y la integración son operaciones inversas, que difieren en una o más constantes dependiendo del orden de la derivada. Cabe destacar que las operaciones de derivación e integración vistos en los cursos básicos han sido de orden entero, que es lo que conocemos comúnmente por cálculo diferencial e integral. De aquí nos podríamos preguntar, ¿sería posible o tendría sentido que el orden de estas dos operaciones fuera fraccionario?

G. F. Antonie, marqués de L'Hospital al responder una carta de Leibniz en 1695, en relación a una derivada de orden $1/2$, este le responde que esto conduciría aparentemente a una paradoja de la cual algún día serían extraídas consecuencias muy útiles.

La importancia de las ecuaciones diferenciales para los científicos radica, esencialmente, en sus aplicaciones, debido al hecho de que la investigación de muchos problemas de ciencia y tecnología puede reducirse a la solución de tales ecuaciones.

El problema que aborda este trabajo es la estimación de parámetro mediante el enfoque Bayesiano, para así ajustar lo mejor posible una curva de crecimiento logístico a datos reales y simulados suministrados al sistema. En el presente trabajo se utiliza una herramienta matemática poco usada que modela el crecimiento logístico de ciertos fenómenos, como por ejemplo, el crecimiento de poblaciones en un entorno dado, dada la introducción de una población inicial. Para lograr esto, se estudió el problema inverso asociado a la solución del sistema dinámico de crecimiento logístico de orden fraccionario. Se entiende por modelo de crecimiento logístico aquel donde la tasa de crecimiento per capita se reduce cada vez más conforme el tamaño poblacional (caso de crecimiento biológico) se acerca a un máximo impuesto

por los recursos limitados del entorno, conocido como capacidad de carga (\mathbf{K}), produciendo una curva en forma de \mathbf{S} , Figura 1.

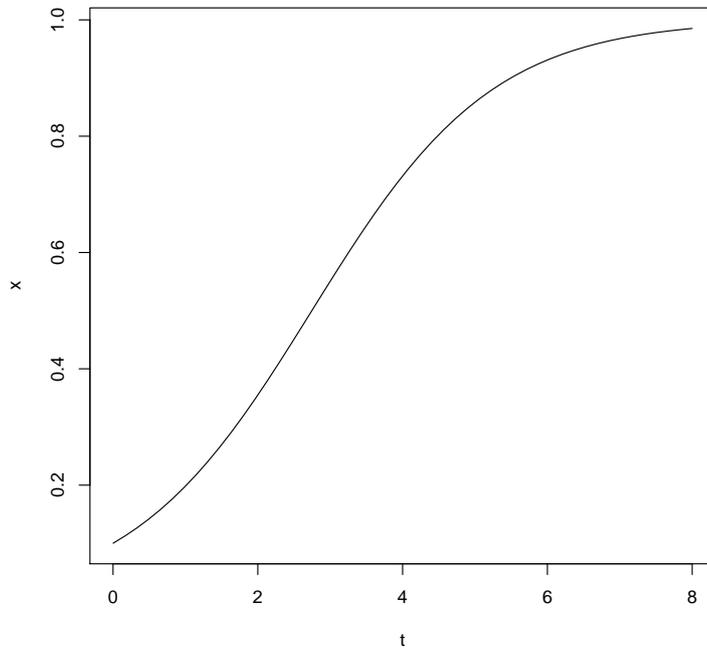


Figura 1 Ejemplo de cierto crecimiento logístico

Desarrollo

Nociones Preliminares.

En esta sección introduciremos las notaciones y resultados fundamentales que se usarán a lo largo del trabajo.

Algunos enfoques de derivadas fraccionarias.

Con el objetivo de introducir el concepto de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y Caputo definiremos a continuación la transformada de Laplace y los operadores I (operador Integral de Riemann-Liouville) y Γ (Función gamma). Posteriormente definiremos la derivada fraccionaria según Grünwald-Letnikov, la cual se utiliza en el presente trabajo debido, en lo fundamental, a su factibilidad de estructuración discreta básica.

Definición 0.0.1 Transformada de Laplace.

Sea $x(t)$ una función real o compleja de variable $t > 0$ y sea s un parámetro real o complejo. La Transformada de Laplace de $x(t)$, denotada por $L\{x(t)\}$, se define como:

$$L\{x(t)\} = X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt, \quad \text{Re}(s) > 0. \quad (1)$$

Se dice que la Transformada de Laplace de $x(t)$ existe cuando la integral (1.1) converge.

Definición 0.0.2 Transformada Inversa de Laplace.

La Transformada Inversa de Laplace de una función $X(s)$, es la función $x(t)$ que cumple con la propiedad: $L\{x(t)\} = X(s)$.

Una fórmula integral para la Transformada Inversa de Laplace, llamada integral de Bromwich, o fórmula inversa de Mellin, está dada por la integral:

$$L^{-1}\{X(s)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} X(s) ds.$$

Propiedad de la transformada de Laplace para la derivada:

$$\begin{aligned} L\{x'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} x'(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} \frac{dx}{dt} dt = \int_0^\infty e^{-st} dx(t) & (2) \\ &= e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty x(t) s e^{-st} dt \\ &= sL\{x(t)\} - x(0) \\ &= sX(s) - x(0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L\{x''(t)\} &= sL\{x'(t)\} - x'(0) = s(sL\{x(t)\} - x(0)) - x'(0). & (3) \\ &= s^2 L\{x(t)\} - sx(0) - x'(0) \\ &= s^2 X(s) - sx(0) - x'(0). \end{aligned}$$

Proposición 0.0.1 Transformada de Laplace de la derivada n -ésima.

$$\begin{aligned} L\{x^{(n)}(t)\} &= s^n L\{x(t)\} - s^{(n-1)} x(0) - s^{(n-2)} x^{(1)}(0) - \dots \\ &\quad - s^{(n-i)} x^{(i+1)}(0) - \dots - x^{(n-1)}(0) \\ &= s^n L\{x(t)\} - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1} x^{(i)}(0) = s^n \left(L\{x(t)\} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^{(i)}(0)}{s^{i+1}} \right) \\ &= s^n \left(X(s) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^{(i)}(0)}{s^{i+1}} \right). \end{aligned}$$

Demostración utilizando el método de Inducción Completa.

Casos iniciales: $n = 1$ y $n = 2$ ya resueltos en (1.2) y (1.3).
Supongamos que se cumple para $n = k$,

$$L\{x^{(k)}(t)\} = s^k \left(L\{x(t)\} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{x^{(i)}(0)}{s^{i+1}} \right).$$

Demostremos que se cumple para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned}
L\{x^{(k+1)}(t)\} &= L\{(x^{(k)})'(t)\} = s(L\{x^{(k)}(t)\}) - x^{(k)}(0) \\
&= s \left(s^k \left(L\{x(t)\} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{x^{(i)}(0)}{s^{i+1}} \right) \right) - x^{(k)}(0) \\
&= s^{k+1} \left(X(s) - \sum_{i=0}^k \frac{x^{(i)}(0)}{s^{i+1}} \right). \quad \square
\end{aligned}$$

Nótese que al aplicar la Transformada de Laplace, el problema de Ecuación Diferencial se transforma en un problema algebraico clásico.

Definición 0.0.3 Operador Integral de Riemann-Liouville.

Sea $x(t) \in L_1(\mathbb{R})$, entonces se define:

$$\begin{aligned}
I : L_1(\mathbb{R}) &\rightarrow L_1(\mathbb{R}), \\
Ix(t) &= \int_0^t x(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Propiedades del producto del Operador Integral de Riemann-Liouville.

$$\begin{aligned}
I^2x(t) &= I \int_0^t x(\tau) d\tau = \int_0^t \int_0^\tau x(s) ds d\tau = \int_0^t \int_s^t x(s) d\tau ds \\
&= \int_0^t (t-s)x(s) ds. \tag{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I^3x(t) &= II^2x(t) = \int_0^t \int_0^s (s-\tau)x(\tau) d\tau ds = \int_0^t \int_\tau^t (s-\tau)x(\tau) ds d\tau \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t (t-\tau)^2 x(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
I^4x(t) &= II^3x(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^s (s-\tau)^2 d\tau ds = \int_0^t \int_\tau^t (s-\tau)^2 ds d\tau \\
&= \frac{1}{3 \cdot 2} \int_0^t (t-\tau)^3 x(\tau) d\tau. \tag{6}
\end{aligned}$$

Proposición 0.0.2 Producto del Operador Integral de Riemann-Liouville.

$$I^n x(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} x(\tau) d\tau.$$

Demostración del cálculo de $I^n x(t)$ aplicando el método de inducción completa.

Casos iniciales $n = 2$, $n = 3$, y $n = 4$ ya resueltos en (1.4), (1.5) y (1.6). Supongamos que se cumple para $n = k$.

$$I^k x(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{k-1} x(\tau) d\tau$$

Demostremos que se cumple para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} I^{k+1} x(t) &= II^k x(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^t \int_0^s (s-\tau)^{k-1} x(\tau) d\tau ds \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \int_0^t \int_\tau^t (s-\tau)^{k-1} x(\tau) ds d\tau \\ &= \frac{1}{k!} \int_0^t (t-\tau)^k x(\tau) d\tau. \quad \square \end{aligned}$$

La función Gamma es una extensión de la función factorial al plano complejo y se define como:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Propiedad de la función Gamma.

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = \left. \frac{-t^z}{e^t} \right|_0^\infty + \int_0^\infty z t^{z-1} e^{-t} dt \\ &\quad u = t^z \quad dv = e^{-t} \\ &\quad du = z t^{z-1} \quad v = -e^{-t} \\ &= z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z\Gamma(z). \quad \square \end{aligned}$$

Nótese que:

$$\Gamma(1) = 1 = 0!$$

$$\Gamma(2) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2 = 2!$$

$$\Gamma(4) = 6 = 3!$$

de aquí,

$$\Gamma(n) = (n - 1)!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$$I^n x(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t - \tau)^{n-1} x(\tau) d\tau.$$

De aquí, podemos realizar una extensión del concepto de la integral ordinaria a la llamada integral fraccionaria de Riemann-Liouville.

Definición 0.0.4 Integral fraccionaria de Riemann-Liouville.

Sea $x(t) \in L_1(\mathbb{R})$, entonces se define:

$$I^\alpha : L_1(\mathbb{R}) \rightarrow L_1(\mathbb{R}),$$

$$I^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} x(\tau) d\tau.$$

Definiremos ahora la convolución, la cual juega un papel muy importante en el análisis en general, y particular, en el cálculo de la transformada inversa de Laplace, para la solución de un problema de Ecuación Diferencial Fraccionaria.

Definición 0.0.5 Convolución.

La Convolución de dos funciones, f y g , denotada por $f * g$, se define como:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau.$$

Transformada de Laplace de la Convolución.

$$\begin{aligned} L\{(f * g)(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau dt = \int_0^\infty e^{-st} \int_\tau^\infty f(t - \tau)g(\tau) dt d\tau \\ &= \int_0^\infty e^{-st} g(\tau) \int_\tau^\infty f(t - \tau) dt d\tau. \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable:

$\gamma = t - \tau$, obtenemos $d\gamma = dt$,

de aquí:

$$\begin{aligned} L\{(f * g)(t)\} &= \int_0^\infty e^{-s(\gamma+\tau)} g(\tau) \int_0^\infty f(\gamma) d\gamma d\tau = \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau) \int_0^\infty e^{-s\gamma} f(\gamma) d\gamma d\tau \\ &= \int_0^\infty e^{-s\gamma} f(\gamma) d\gamma \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau) d\tau \\ &= L\{f(t)\}L\{g(t)\} = F(s)G(s). \end{aligned}$$

Observación,

$$L\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s) \Rightarrow (f * g)(t) = L^{-1}\{F(s)G(s)\}.$$

de aquí:

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\} = (L^{-1}\{F(s)\} * L^{-1}\{G(s)\})(t).$$

Derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 < \alpha \leq n$.

Definición 0.0.6 *Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.*

Sea $x(t) \in L_1(\mathbb{R})$, se define:

$${}^{RL}D^\alpha x(t) = D^n I^{n-\alpha} x(t).$$

Definición 0.0.7 *Derivada fraccionaria de Caputo.*

Sea $x(t) \in L_1(\mathbb{R})$, se define:

$${}^C D^\alpha x(t) = I^{n-\alpha} D^n x(t).$$

En general,

$${}^C D^\alpha x(t) \neq {}^{RL}D^\alpha x(t).$$

Ejemplos de derivada fraccionaria:

$${}^{RL}D^{1/2} x(t) = D^1 I^{1/2} x(t).$$

$${}^c D^{1/3}x(t) = I^{1/3}D^1x(t).$$

Nótese que:

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha x(t) &= I^{n-\alpha} D^n x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} x^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= \left(\frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} * x^{(n)}(t) \right). \end{aligned}$$

Transformada de Laplace de la Derivada Fraccionaria de Caputo.

$$L\{{}^C D^\alpha x(t)\} = L\left\{ \frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} * x^{(n)}(t) \right\} = L\left\{ \frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \right\} L\{x^{(n)}(t)\},$$

pero

$$\begin{aligned} L\left\{ \frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \right\} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty e^{-st} t^{n-\alpha-1} dt = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^{n-\alpha-1} \frac{du}{s} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{1}{s^{n-\alpha}} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\alpha-1} du = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{1}{s^{n-\alpha}} \Gamma(n-\alpha) \\ &= \frac{1}{s^{n-\alpha}}. \end{aligned}$$

de aquí,

$$\begin{aligned} L\left\{ \frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \right\} L\{x^{(n)}(t)\} &= \frac{1}{s^{n-\alpha}} L\{x^{(n)}(t)\} \\ &= \frac{1}{s^{n-\alpha}} s^n \left(L\{x(t)\} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^{(i)}(0)}{s^{i+1}} \right) \\ &= s^\alpha \left(X(s) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^{(i)}(0)}{s^{i+1}} \right). \end{aligned}$$

Las funciones de Mittag-Leffler juegan un papel fundamental en el Cálculo Fraccionario. Igual que las exponenciales surgen de forma natural como

soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias lineales, la familia de funciones de Mittag-Leffler aparecen análogamente en la solución de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias, siendo la propia función exponencial e^z un caso particular de familia de funciones de Mittag-Leffler.

Definición 0.0.8 Funciones Mittag-Leffler.

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, la función de Mittag-Leffler de dos parámetros $E_{\alpha, \beta}$ es una función compleja de variable compleja definida por la serie:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

Observaciones

$$E_{\alpha, 1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

$$E_{1, 1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

$$E_{0, 1}(z) = \frac{1}{1 - z}.$$

Tranformadas de Laplace de algunas funciones de Mittag-Leffler.

$$L\{E_{\alpha, 1}(\pm at^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha \mp a}.$$

$$L\{t^{\beta-1}E_{\alpha, \beta}(\pm at^\alpha)\}(s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha \mp a}.$$

$$L\{t^{\alpha-1}E_{\alpha, \alpha}(\pm at^\alpha)\}(s) = \frac{1}{s^\alpha \mp a}.$$

Demostración para $L\{E_{\alpha,1}(at^\alpha)\}$.

$$\begin{aligned} L\{E_{\alpha,1}(at^\alpha)\} &= L\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-st} a^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha k} dt \right), \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha k} dt &= \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha k} \frac{du}{s} = \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{u^{\alpha k}}{s^{\alpha k + 1}} du \\ &= \frac{1}{s^{\alpha k + 1}} \int_0^{\infty} u^{\alpha k} e^{-u} du = \frac{1}{s^{\alpha k + 1}} \Gamma(\alpha k + 1). \end{aligned}$$

De aquí sigue

$$\begin{aligned} L\{E_{\alpha,1}(at^\alpha)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha k} dt \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{s^{\alpha k + 1}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{s^{\alpha k + 1}} = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^k = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{1 - \frac{a}{s^\alpha}}\right) = \frac{1}{s} \frac{1}{\frac{s^\alpha - a}{s^\alpha}} \\ &= \frac{s^{\alpha - 1}}{s^\alpha - a}. \end{aligned}$$

Ejemplos de Solución de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias.

1. Sea ${}^C D^\alpha x = ax$ con $0 < \alpha < 1$ y $x(0) = x_0$.

Nótese que como $0 < \alpha < 1$, entonces $n = 1$,
de aquí,

$$\begin{aligned} L\{{}^C D^\alpha\} &= L\{ax\} \\ s^\alpha X(s) - x(0)s^{\alpha-1} &= aX(s) \\ (s^\alpha - a)X(s) &= x_0 s^{\alpha-1} \\ X(s) &= \frac{x_0 s^{\alpha-1}}{s^\alpha - a} \\ x(t) &= x_0 E_{\alpha,1}(at^\alpha). \end{aligned}$$

2. Sea ${}^C D^\alpha x = ax + f(t)$ con $0 < \alpha < 1$ y $x(0) = x_0$.

$$\begin{aligned}
s^\alpha X(s) - x(0)s^{\alpha-1} &= aX(s) + F(s) \\
X(s) &= \frac{x_0 s^{\alpha-1} + F(s)}{s^\alpha - a} \\
X(s) &= x_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - a} + \frac{1}{s^\alpha - a} F(s) \\
x(t) &= x_0 E_{\alpha,1}(at^\alpha) + L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\alpha-1}} F(s) \right\} \\
&= x_0 E_{\alpha,1}(at^\alpha) + (t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(at^\alpha) * f(t)) \\
&= x_0 E_{\alpha,1}(at^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(a(t-\tau)^\alpha) f(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Con el objetivo de introducir la derivada fraccionaria de Grünwald-Letnikov, se expondrán a continuación, resultados de la derivada clásica.

Formulación para la derivada clásica.

Sea x una función definida en cierto intervalo que contiene al punto t , $x \in C^\infty$, y n el orden entero de la derivada, podemos escribir:

$$D^1 x(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t-h)}{h}. \quad (7)$$

$$D^2 x(t) = D^1(D^1 x(t)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t) - 2x(t-h) + x(t-2h)}{h^2}. \quad (8)$$

$$D^3 x(t) = D^1(D^2 x(t)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t) - 3x(t-h) + 3x(t-2h) - x(t-3h)}{h^3}.$$

Proposición 0.0.3 *Formulación general para la derivada n -ésima.*

$$D^n x(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x(t - kh).$$

Demostración utilizando en método de inducción completa:

Casos iniciales: $n = 1, 2$ desarrollados en (1.7) y (1.8).

Supongamos que se cumple para $n = q$.

$$D^q x(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-q} \sum_{k=0}^q (-1)^k \binom{q}{k} x(t - kh).$$

Demostremos que se cumple para $n = q + 1$.

$$\begin{aligned}
D^{q+1}x(t) &= DD^q x(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D^q x(t) - D^q x(t-h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[h^{-q} \sum_{k=0}^q (-1)^k \binom{q}{k} x(t-kh) \right. \\
&\quad \left. - h^{-q} \sum_{k=0}^q (-1)^k \binom{q}{k} x(t-(k+1)h) \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-q-1} \left[\sum_{k=0}^q (-1)^k \binom{q}{k} x(t-kh) \right. \\
&\quad \left. \text{haciendo } l = k+1 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=1}^{q+1} (-1)^l \binom{q}{l-1} x(t-lh) \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-q-1} \left[x(t) + \sum_{k=1}^q (-1)^k \binom{q}{k} x(t-kh) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=1}^q (-1)^l \binom{q}{l-1} x(t-lh) + (-1)^{q+1} x(t+(q+1)h) \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-q-1} \left[x(t) + \sum_{k=1}^q (-1)^k \binom{q}{k} x(t-kh) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^q (-1)^k \binom{q}{k-1} x(t-kh) + (-1)^{q+1} x(t+(q+1)h) \right] \\
&\quad \text{pero } \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \\
D^{q+1}x(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-q-1} \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k \binom{q+1}{k} x(t-kh) \quad \square
\end{aligned}$$

A partir de la formulaci3n anterior, la derivada segun Grunwald-Letnikov es definida sustituyendo el orden entero n por un orden arbitrario α y la sumatoria por una serie infinita.

Definici3n 0.0.9 Derivada de Grunwald-Letnikov.

Sea x una funci3n definida en cierto intervalo que contiene al punto t , $x \in C^\infty$, entonces la derivada fraccionaria segun Grunwald-Letnikov se define

como:

$${}^{GL}D^\alpha x(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} x(t - kh),$$

donde

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha - k + 1)}.$$

Una representación análoga

$${}^{GL}D^\alpha x(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{\alpha}{k} x(t - kh),$$

donde $\lfloor \frac{t}{h} \rfloor$ representa la parte entera del cociente de t y h .

Nótese que $\lfloor \frac{t}{h} \rfloor \rightarrow \infty$ cuando $h \rightarrow 0$.

Interpretación de la derivada de Grünwald-Letnikov para tiempos discretos equidistantes:

Sea $\{t_0 = 0, t_1, t_2, t_3 \dots, t_N\}$, una partición del intervalo $[0, N]$

nótese que:

$$t_n = t_0 + nh, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

tenemos entonces:

$${}^{GL}D^\alpha x(t_n) \approx h^{-\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} x(t_{n-k}).$$

Modelo de crecimiento logístico ordinario.

Un modelo de crecimiento logístico ordinario está asociado a un sistema dinámico del tipo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax(t)(K - x(t)), & a > 0, \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{9}$$

Este sistema dinámico puede resolverse de la siguiente manera:

$$\frac{dx}{dt} = ax(t)(K - x(t))$$

$$\frac{dx}{x(t)(K - x(t))} = adt$$

$$\frac{1}{Kx(t)} + \frac{1}{K(K - x(t))} dx = adt$$

integrando ambos miembros, nos queda:

$$\ln \frac{x}{K - x(t)} = Kat + c$$

$$e^{Kat+c} = \frac{x}{K - x(t)}$$

$$x(t) = (K - x(t))ce^{kat}$$

$$x(t) = ce^{kat}K - ce^{kat}x(t)$$

$$x(t) + ce^{kat}x(t) = ce^{kat}K$$

$$x(t)(ce^{kat} + 1) = ce^{kat}K$$

$$x(t) = \frac{cKe^{akt}}{ce^{akt} + 1}$$

calculando el valor de c:

$$x(0) = \frac{ck}{c + 1}$$

$$c = \frac{x(0)}{k - x(0)}$$

$$x(t) = \frac{Kx_0e^{aKt}}{K + x_0(e^{aKt} - 1)}. \quad (10)$$

donde $x(t)$ es el tamaño de la población en el tiempo t , x_0 es el tamaño de la población inicial, a es la tasa de cambio y K capacidad de carga del medio, Figura 2.

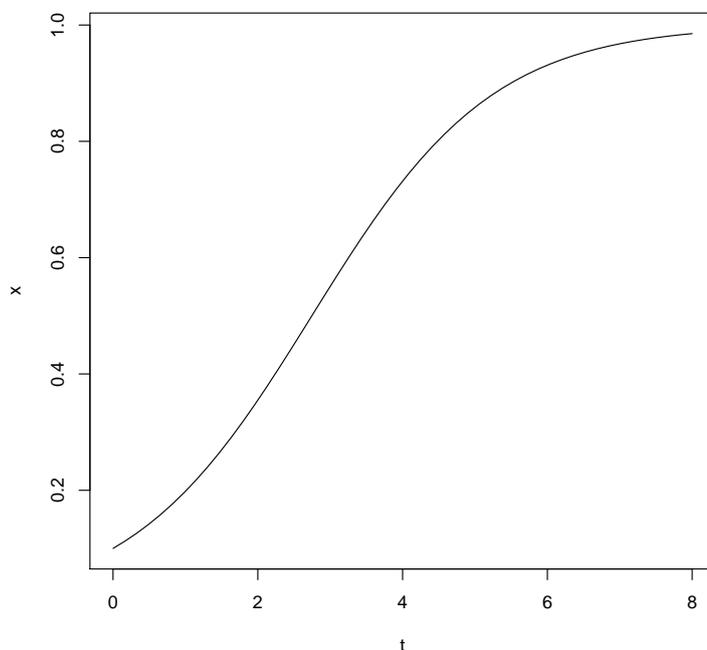


Figura 2

Definición 0.0.10 Ecuación diferencial fraccionaria.

Se denomina ecuación diferencial fraccionaria a una ecuación que relaciona la variable independiente t , la función incógnita $x = x(t)$, y sus derivadas fraccionarias $\{x^{(\alpha)}\}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, es decir, una ecuación de la forma $F(t, x^{(\alpha)}) = 0$.

Ejemplos de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias.

1. $x^{(1/2)} - tx = 3t$.
2. $x^{(3/2)} = e^{t+x}$.
3. $x^{(1/3)} = x^2tx + 1$.

Elementos de la estadística bayesiana.

Los problemas inversos, como su propio nombre indica, no son más que el inverso de problemas directos, esto pareciera un mero juego de palabras, pero en esencia, los problemas directos son aquellos en los que dado el modelo matemático asociado a cierto fenómeno, podemos predecir el estado del

fenómeno en cierto momento y circunstancias. Por otra parte, los problemas inversos, son aquellos en los que dado el estado del fenómeno en ciertos momentos y circunstancias, y teniendo conocimiento del modelo matemático asociado a dicho fenómeno, permite la estimación de los valores de los parámetros involucrados en dicho modelo.

La estimación de la inversión estadística se basa en los siguientes principios:

1. Todas las variables incluidas en el modelo se consideran como variables aleatorias.
2. La aleatoriedad describe nuestro grado de información referente a las observaciones.
3. El grado de información es codificado mediante distribuciones de probabilidad.
4. La solución del problema inverso es la distribución posterior de probabilidad de las cantidades de interés.

Esta distribución describe el grado de confianza acerca de la cuantía del vector de parámetros θ después de realizadas las observaciones $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

La estadística bayesiana es un enfoque particular de la estadística clásica, donde el termino bayesiana hace referencia al matemático inglés Thomas Bayes(1702-1761), cuya obra cumbre es el famoso teorema que lleva su nombre Teorema de Bayes, el cual se refiere a la probabilidad de un evento condicionado por la ocurrencia de otro evento. Con este teorema se resuelve el problema conocido como probabilidad inversa. Desde el punto de vista de la estimación bayesiana, existe una relación entre probabilidad e información, en donde el teorema de Bayes proporciona un modo natural de actualización de las creencias respecto a la cuantía de cierta variable con respecto a cierta información incorporada al modelo.

El teorema de Bayes será de gran utilidad para la solución de los problemas inversos tratados en este trabajo. El enfoque bayesiano parte suponiendo que todas las variables aleatorias involucradas son absolutamente continuas, o sea, que sus distribuciones de probabilidad pueden ser expresadas en términos de densidades.

Como en el caso de problemas inversos, suponiendo que se están observando cantidades $y \in \mathbb{R}^k$, para obtener alguna información de alguna otra cantidad $\theta \in \mathbb{R}^d$, con el fin de relacionar estas dos cantidades, se necesita un modelo

para su dependencia.

Teorema 0.0.1 Teorema de Bayes

Suponiendo que las variables $\theta \in \mathbb{R}^d$ tiene una densidad de probabilidad $p(\theta)$, y datos que provienen de valores observados y de una variable aleatoria $Y \in \mathbb{R}^k$, entonces:

$$p(\theta|y) = \frac{L(y|\theta)p(\theta)}{\int_{\Theta} L(y|\theta)p(\theta)d\theta}.$$

donde $p(\theta)$ es la función de densidad de probabilidad inicial, la cual expresa el conocimiento que se tiene acerca de la cantidad de interés, $L(y|\theta)$ es la función de verosimilitud, $\int_{\Theta} L(y|\theta)p(\theta)d\theta$ es una constante de normalización también llamada verosimilitud marginal de los datos y , y Θ denota el espacio muestral del parámetro θ .

Planteamiento del problema.

Los modelos logísticos ordinarios simulan de cierto modo el crecimiento poblacional de especies bajo ciertas circunstancias. Un ejemplo practico puede ser determinado por el estudio de crecimiento de pasto en un área determinada o el crecimiento de conejos en cierto entorno.

En la práctica, estos modelos no se ajustan eficientemente a ciertos crecimientos logísticos, y es ahí donde juega un papel fundamental el estudio de las derivadas fraccionarias, y su uso en estos modelos, tiene como objetivo lograr mejores resultados de aproximación mediante la resolución de problemas inversos asociados.

En nuestro caso, el problema en particular está dado en la estimación de ciertos parámetros, a partir de datos de observaciones realizadas, cuyo comportamiento responde a cierto modelo logístico.

Por ello, proponemos estudiar el modelo de crecimiento logístico desde el punto de vista fraccionario.

Modelo de crecimiento logístico fraccionario.

Un modelo de crecimiento logístico fraccionario está definido por la Ecuación Diferencial Fraccionaria:

$$\begin{aligned} x^{(\alpha)}(t) &= aX(t)(K - x(t)), & a > 0, & \alpha \in (0, 2), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (11)$$

En el presente trabajo estudiaremos su enfoque fraccionario según Grünwald-Letnikov:

$$\begin{aligned} {}^{GL}D^\alpha x(t) &= aX(t)(K - x(t)), & a > 0, & \alpha \in (0, 2), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Solución numérica de dicho modelo:

$$\begin{aligned} {}^{GL}D^\alpha x(t) &= aX(t)(K - x(t)) \\ h^{-\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} x(t_{n-k}) &= aX(t)(K - x(t)) \\ x(t_n) &= ah^\alpha x(t_{n-1})(K - x(t_{n-1})) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{\alpha}{k} x(t_{n-k}) \\ x(t_0) &= x_0, & n = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (13)$$

Donde N denota cardinalidad de las observaciones en los tiempos correspondientes.

Notemos que si $\alpha = 1$, entonces el sistema (1.9) tiene además una solución exacta dada por:

$$\begin{aligned} {}^{GL}D^1 x(t) &= aX(t)(K - x(t)) \\ \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{1}{k} x(t - kh) &= aX(t)(K - x(t)) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - h)}{h} &= aX(t)(K - x(t)) \\ \frac{dx}{dt} &= ax(t)(K - x(t)) \\ x(t) &= \frac{Kx_0 e^{aKt}}{K + x_0(e^{aKt} - 1)}. \end{aligned}$$

cuya solución ya había sido calculada en (1.8).

Ecuación de observación,

$$y_i = x(t_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (14)$$

donde y_i corresponde a la i -ésima observación del valor de x bajo incertidumbre, y ε_i son los errores de medida, los cuales consideramos variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con una distribución normal de media cero y varianza σ^2 , denotado por $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Estimación bayesiana.

Fue utilizado el enfoque Bayesiano para estimación de los parámetros del modelo de crecimiento logístico ordinario (1.10) y fraccionario (1.13). En este contexto, los parámetros se consideran como variables aleatorias y tienen distribuciones a priori que reflejan el conocimiento del observador antes de recabar información acerca del fenómeno.

Cabe destacar, que para el modelo definido en (1.10) y (1.13), se consideró como vector de parámetros de interés el siguiente:

$$\boldsymbol{\theta} = (a, \alpha, \sigma^2). \quad (15)$$

al cual se le realizará las estimaciones pertinentes.

De aquí que, hacemos la siguiente propuesta de distribuciones iniciales: $a \sim \mathcal{G}(r_a, \lambda_a)$, $\alpha \sim \mathcal{U}(0, 2)$, $\tau \sim \mathcal{G}(r_\tau, \lambda_\tau)$, donde $\mathcal{G}(r, \lambda)$ denota la distribución Gamma con parámetro de forma r y parámetro de escala λ , \mathcal{U} es una distribución uniforme en el intervalo $(0, 2)$, $\tau = 1/\sigma^2$. De aquí que, podemos escribir la distribución a priori conjunta de $\boldsymbol{\theta}$ como:

$$p(\boldsymbol{\theta}) = p(a, \alpha, \tau) = p(a) \cdot p(\alpha) \cdot p(\tau). \quad (16)$$

Sea $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ los datos observados del modelo definido por la ecuación (1.14), entonces la función de verosimilitud está dada por:

$$L(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n f_Y(y_i) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - x(t_i))^2\right), \quad (17)$$

donde $x(t_i)$ representa la solución de sistema dinámico ordinario o fraccionaria según sea el caso, o sea, las ecuaciones (1.10) o (1.13).

Por el Teorema de Bayes, la distribución posterior de los parámetros de interés están dados por:

$$p(\theta|y) = \frac{L(y|\theta)p(\theta)}{\int_{\Theta} L(y|\theta)p(\theta)d\theta}. \quad (18)$$

donde Θ denota el espacio del parámetro θ .

Usando el estimador de Bayes basado en la función de pérdida cuadrática, tenemos entonces que:

$$\hat{\theta}_B = E(\theta|y) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta p(\theta|y)d\theta. \quad (19)$$

Estudio de simulación.

Realizando un análisis riguroso en la expresión final de la distribución conjunta posterior (1.18), referente a los parámetros de interés (1.15), mediante las expansiones de los términos involucrados (1.17), (1.16), (1.10) y (1.13), la distribución conjunta posterior es analíticamente muy compleja, lo cual dificulta la estimación de parámetros mediante el estimador basado en la función de pérdida cuadrática (1.19). Sin embargo podemos obtener muestras de (1.18) utilizando la Cadena de Markov Monte Carlo(MCMC). En el presente trabajo, el método de MCMC utilizado fue el Metropolis-Hastings(poner ref de artículo), el cual permite simular distribuciones multivariadas. En la actualidad, muchos algoritmos MCMC ya han sido implementados en programas computacionales, entre ellos esta el JAGS, el cual contempla paquetes para el modelado bayesiano mediante la simulación de la distribución posterior dada información existente y un modelo específico. Fue llevado a cabo un estudio de simulación para evaluar el desempeño de los estimadores bayesianos para los parámetros de interés con respecto al modelo logístico ordinario y fraccionario. Para ello, fue utilizada la aplicación computacional R versión 3.3.3, la cual tiene soporte para JAGS.

Resultados de las simulaciones.

Nuestro objetivo es realizar una comparación entre los dos modelos (ordinario y fraccionario) en cuanto a la estimación de parámetros basado en el estimador de pérdida cuadrática de Bayes, asociados a datos observados, o sea, ver qué curva se aproxima mejor a los datos observador con respecto a los parámetros obtenidos. Para ello fueron tomamos datos reales y simulados

correspondientes a crecimientos logísticos, los cuales mostramos como puntos en las Figuras 1,2,3,4,5 y 6; y realizamos las estimaciones de parámetros para los modelos (1.10) y (1.13) provenientes del sistema dinámico ordinario (1.9) y del sistema dinámico fraccionario (1.11), arrojando los resultados que se detallan a continuación.

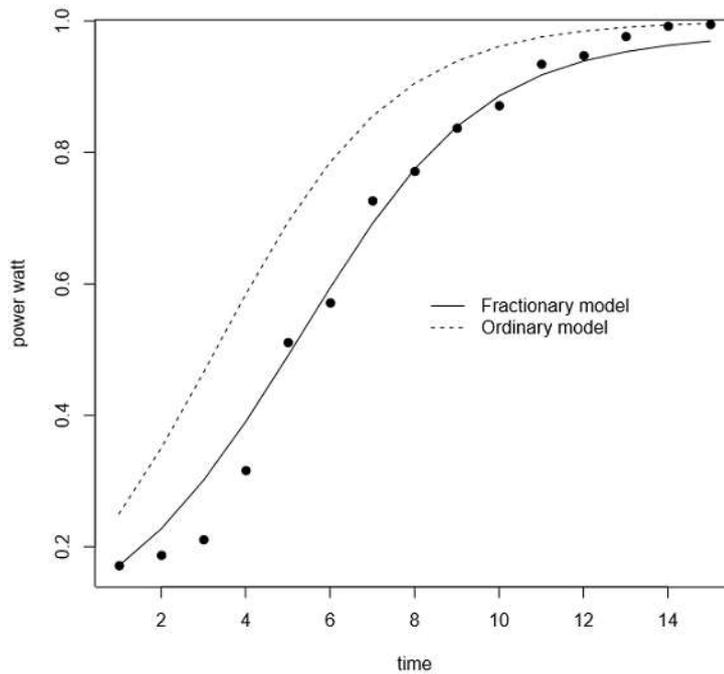


Fig 1

Figura 1: Corresponde al rendimiento energético de paneles solares medidos desde las 9 am hasta las 2 pm en Acapulco en el mes de julio de 2017 proporcionado por la empresa SolarMex.

Estimación para el modelo ordinario ($a = 0,33, \sigma = 0,08$).

Estimación para el modelo fraccionario ($a = 0,47, \sigma = 0,05, \alpha = 0,93$).

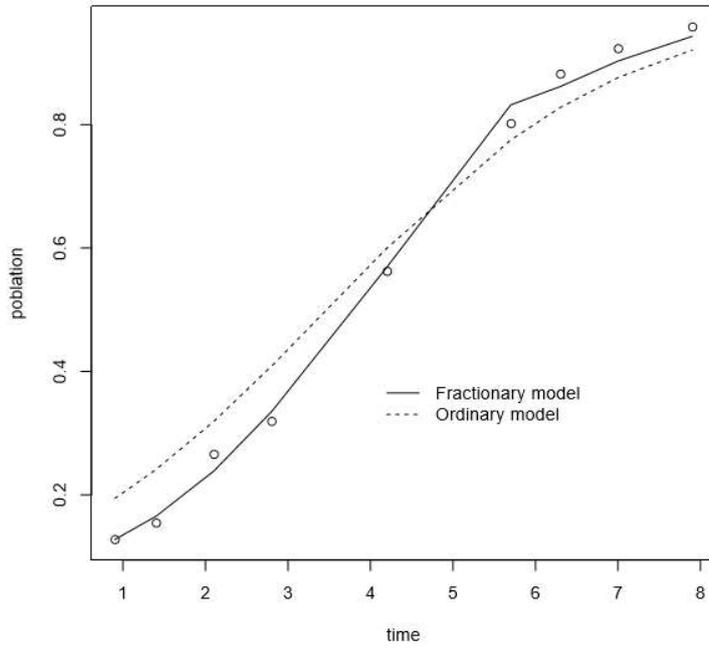


Fig 2

Figura 2: Corresponde a datos recopilados referente al crecimiento de pasto.
 Estimación para el modelo ordinario ($a = 0,55, \sigma = 0,08$).
 Estimación para el modelo fraccionario ($a = 0,82, \sigma = 0,06, \alpha = 0,91$).

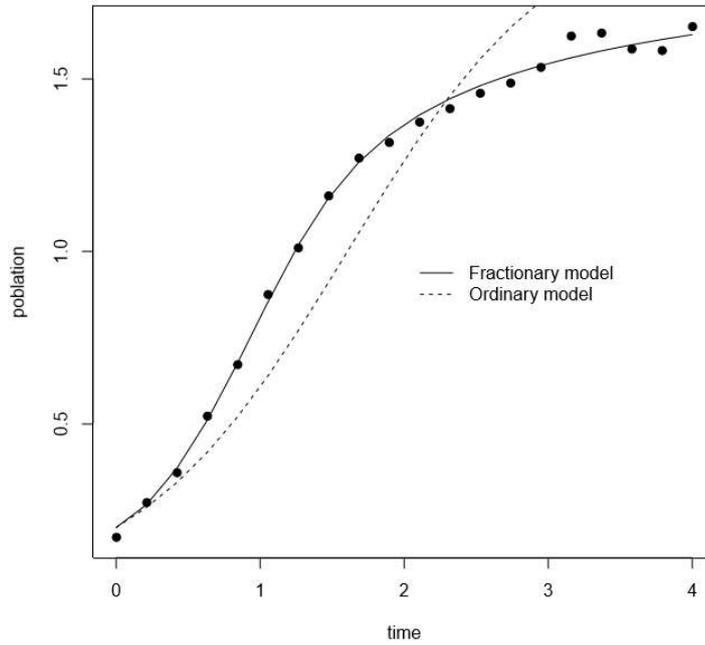


Fig 3

Figura 3: Corresponde a datos simulados provenientes de la ecuación (1.13) para $a = 1$ y $\alpha = 0,5$.

Estimación para el modelo ordinario ($a = 0,64, \sigma = 0,21$).

Estimación para el modelo fraccionario ($a = 0,98, \sigma = 0,04, \alpha = 0,52$).

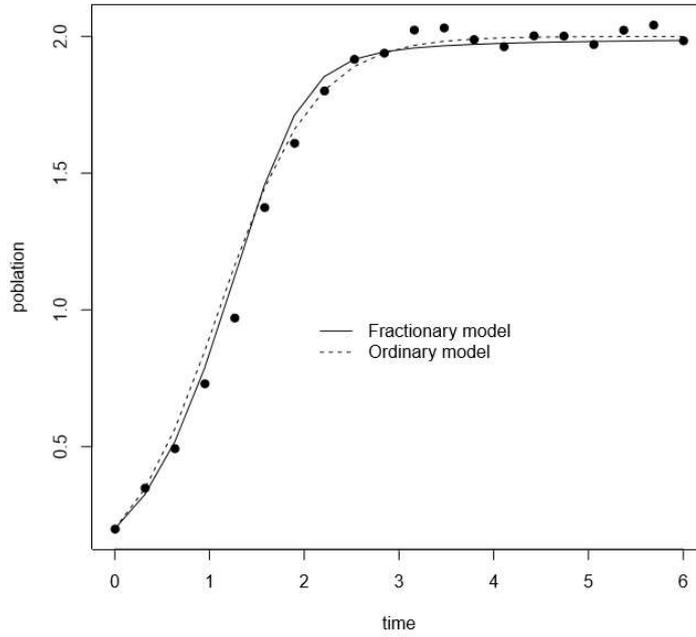


Fig 4

Figura 4: Corresponde a datos simulados provenientes de la ecuación (1.10) para $a = 1$.
 Estimación para el modelo ordinario ($a = 0,99, \sigma = 0,04$).
 Estimación para el modelo fraccionario ($a = 1,1, \sigma = 0,05, \alpha = 0,94$).

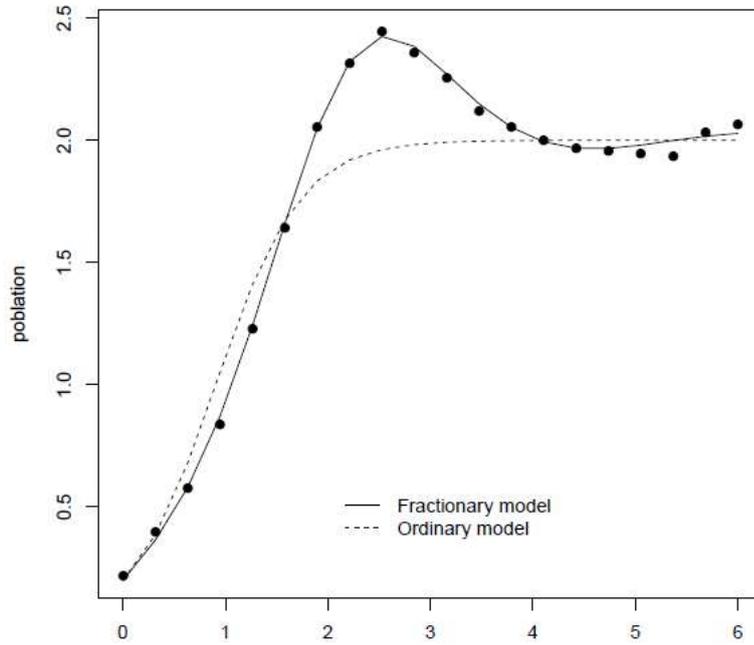


Fig 5

Figura 5: Corresponde a datos simulados provenientes de la ecuación (1.13) para $a = 1$ y $\alpha = 1,5$.
 Estimación para el modelo ordinario ($a = 1,21, \sigma = 0,22$).
 Estimación para el modelo fraccionario ($a = 1,00, \sigma = 0,05, \alpha = 1,506$).

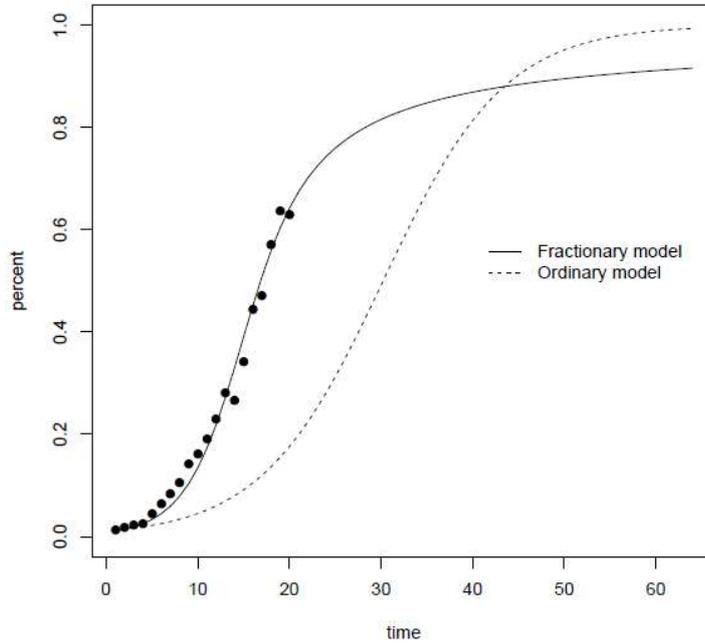


Fig 6

Figura 6: Corresponde a datos por ciento uso de teléfono móvil.

Estimación para el modelo ordinario ($a = 8,63, \sigma = 0,04$).

Estimación para el modelo fraccionario ($a = 4,51, \sigma = 0,04, \alpha = 0,55$).

Como se puede observar, mediante la utilización del enfoque fraccionario de la derivada, se logra un mejor ajuste de la curva a los datos observados que con respecto al enfoque ordinario. El modelo fraccionario es mucho más flexible que el ordinario, siendo el modelo ordinario un caso particular del fraccionario.

Podemos observar que el uso de la derivada fraccionaria hereda de cierto modo, cualidades matemáticas de la segunda derivada para el caso de que $\alpha > 1$ para el modelo fraccionario (1.13). Para evidenciar esto, notemos el comportamiento del efecto del orden de la derivada para el modelo logístico fraccionario (1.13) en la Figura 7, observemos que cuando $\alpha > 1$, las curvas de color azul tienen cierto comportamiento oscilatorio, y cuando $\alpha < 1$ las curvas de color negro decaen.

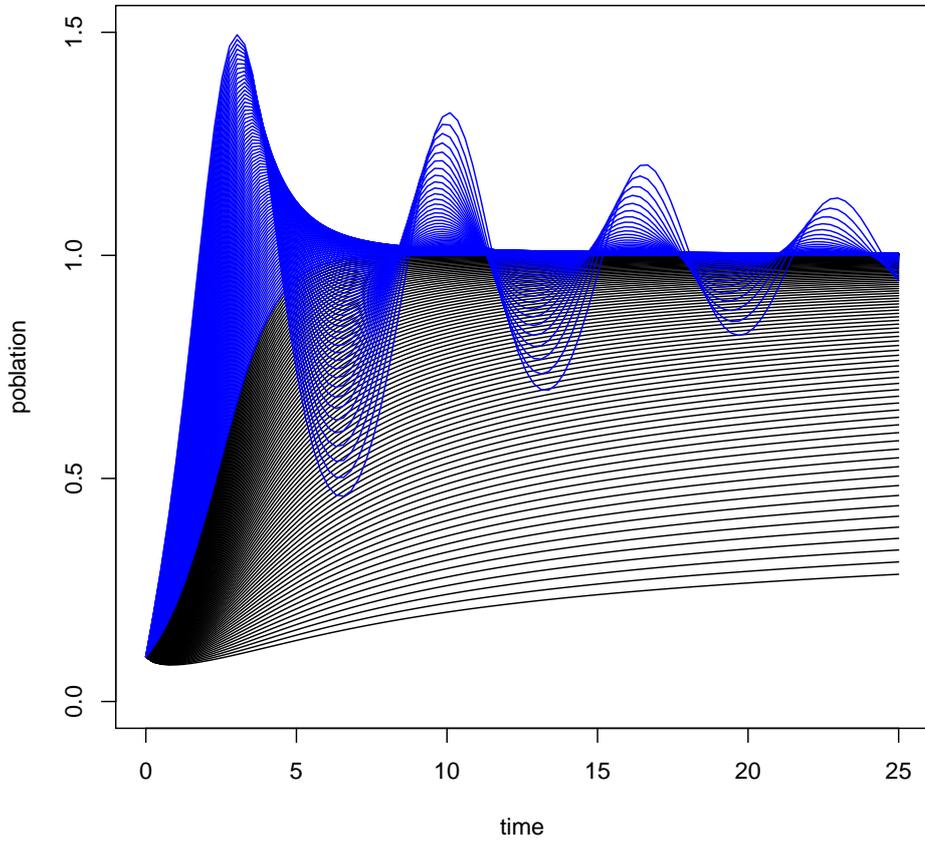


Fig 7

Conclusiones

En el presente trabajo fueron expuestos algunos de los enfoques clásicos de las derivadas fraccionarias, así como un conjunto de herramientas para darle solución a sistemas dinámicos, en los cuales estén involucrados términos con este tipo de derivada. Fue propuesto un nuevo sistema dinámico para modelos de crecimiento logístico, el cual tiene derivada fraccionaria, siendo el modelo ordinario, un caso particular del fraccionario.

Además, fueron expuestas las herramientas estadísticas fundamentales utilizadas en el trabajo para la estimación de parámetros, mediante datos de observación y descripción estadística de las variables involucradas en el modelo correspondiente.

Como se pudo notar, en la estimación de parámetros por medio datos reales y simulados, el uso del modelo fraccionario tiene mejores resultados respecto del modelo ordinario para los datos utilizados. Estos resultados eran de esperar, puesto que para el caso fraccionario se tiene una variable libre adicional (α), la cual permite una mejor aproximación de la curva a los datos observados. Por ello, el estudio de estos problemas prácticos propicia la iniciativa de cambiar la perspectiva de ordinaria por la fraccionaria en cuanto a sistemas dinámicos asociados a diferentes fenómenos de la naturaleza.

Bibliografía

- K. Balachandran, Juan J. Trujillo, Controllability of Nonlinear Fractional Delay Dynamical Systems, Reports on Mathematical Physics. Vol. 77 (2016).
- Kai Diethelm, The Analysis of Fractional Differential Equations, Ed. Springer 2004.
- Manuel Duarte Ortigueira, Fractional Calculus for Scientists and Engineers, Ed. Springer 2011.
- Banks, H. T., Hu, S., y Thompson, W. C. Modeling and Inverse Problems in the Presence of Uncertainty. CRC Press. Taylor Francis Group. (2014).
- Capistran, M., Christen, J. A., y Donnet, S. Bayesian analysis of ODEs: solver optimal accuracy and Bayes factors. arXiv preprint arXiv:1311.2281. (2013).
- Chen, M.-H., Shao, Q.-M., y Ibrahim, J. G. Monte Carlo methods in Bayesian computation. Springer Science Business Media. (2012).
- Francisco J. Ariza-Hernandez, Jorge Sanchez-Ortiz, Martin P. Arciga-Alejandre, and Luis X. Vivas-Cruz. Bayesian Analysis for a Fractional Population Growth Model.
- Chib, S. y Greenberg, E. Understanding the metropolis-hastings algorithm. The american statistician (1995).
- L. Vázquez, J. J. Trujillo, and M.P. Velazco. "Fractional heat equation and the second law of thermodynamics", Fractional Calculus and Applied Analysis. vol 14.

- Blanca Bonilla, Anatoly A. Kilbas, Juan J. Trujillo, "Cálculo Fraccionario y Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias", Universidad Nacional de Educación a Distancia, Junio 2003.

- Kai Diethelm, Neville J. Ford. Analysis of Fractional Differential Equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications 265. 2002.

- Rudolf Scherer, Shyam L. Kalla, Yifa Tang, Jianfei Huang. The Grünwald-Letnikov method for fractional differential equations. Computers and Mathematics with Applications. 2011.