UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

RAZONAMIENTO COVARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE NIVEL SUPERIOR: EL CASO DE LA FUNCIÓN SENO

Tesis que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Área: Matemática Educativa

PRESENTA:

JOAN SEBASTIAN ORDOÑEZ CUASTUMAL

Asesoras:
DRA. CATALINA NAVARRO SANDOVAL
DRA. MARCELA FERRARI ESCOLÁ

Chilpancingo de los Bravo, Guerrero. Julio 2017

Emma en tu camino van haber muchas personas que te
Dirán “no lo lograrás”. Que sea esa la mejor motivación para
Lograr tus metas. Te amo hija

No te rindas, por favor no cedas,
Aunque el frío queme,
Aunque el miedo muerda,
Aunque el sol se esconda,
Y se calle el viento,
Aún hay fuego en tu alma.
Aún hay vida en tus sueños.
Mario Benedetti.

Agradecimientos

A mi esposa María Fernanda y mi hija Emma, ustedes son el motor de mi vida y las ganas de seguir adelante. Gracias por brindarme su amor en todo momento, por ser mi razón de ser y mis ganas de vivir.

A mis padres, por darme la vida y apoyarme en todo momento.

A mi madre María Adela Cuastumal por ser la persona más dedicada y disciplinada. Tú eres parte de este sueño, eres mi ejemplo a seguir. Gracias por enseñarme a seguir aprendiendo todos los días sin importar las circunstancias, ni el tiempo.

A mi padre José Santos Ordoñez por ser la persona más responsable e intachable que este mundo podrá tener, sin su apoyo incondicional y trabajo arduo, difícilmente hubiera llegado a la culminación de esta gran meta.

A mis hermanos Alejandro y John por haber estado junto a mí.

A la doctora Catalina Navarro Sandoval tutora de este proyecto y Madre académica, gracias por su paciencia, tiempo y dedicación. De usted me llevo todo lo que es ser un maestro.

A la doctora Marcela Ferrari Escolá cotutora de este proyecto y gran ser humano.

Al Doctor Armando Carballo y a la Doctora Esther Magaly Méndez por tomarse el tiempo de leer y aportar a este trabajo de investigación,

Al consejo nacional de ciencia y tecnología (Conacyt) por la beca otorgada durante mis estudios de maestría, sin la cual hubiera sido todo más difícil.

A mi familia en México: Jonathan, Antonia, Viana, Yuri y Adrián. Por ser parte de mi vida, de mis momentos tristes y alegres, por apoyarme, por nunca dejarme caer, por siempre estar ahí.

A mis maestros, que compartieron conmigo sus conocimientos para convertirme en un profesionista, por su tiempo, dedicación y por su pasión por la actividad docente.

Por ultimo a Dios, idea clara en mi corazón.

Tabla de contenido

Introducción

La presente investigación aborda aspectos dentro de la enseñanza de la trigonometría, en particular de las funciones trigonométricas. En el estudio se han involucrado conceptos tales como la circunferencia unitaria, la longitud de arco y la traslación de medidas, los cuales se relacionan desde una perspectiva del razonamiento covariacional que permitía el desarrollo de la función seno. Particularmente se precisa sobre *los niveles de razonamiento Covariacional que emergen de estudiantes de licenciatura en matemáticas al enfrentarse a situaciones de variación ligadas a la función seno***.**

La característica principal de esta investigación radica en concebir el desarrollo de la función seno a partir de un medio de enseñanza no tan utilizado en el aula para el aprendizaje de las funciones trigonométricas, el cual está basado sobre la circunferencia unitaria. A través de dicho concepto se relaciona un arco cualquiera circunscrito en la misma circunferencia relacionándose la longitud de este (eje de las abscisas) y la proyección dirigida (sobre el eje de las ordenadas). El objetivo general de esta investigación es identificar y describir los niveles de razonamiento Covariacional presentados en un grupo determinado de estudiantes al enfrentarse a dicha situación de variación.

Desarrollar el trabajo de investigación con estudiantes de nivel universitario fue un interés académico, con la intención de abonar a investigaciones que plantean el aprendizaje de las funciones trigonométricas. Creemos que la problemática atendida, es relevante, debido a que la comprensión de la trigonometría proporciona una base de conocimiento integral que permite que los estudiantes de nivel superior puedan resolver tareas matemáticas avanzadas, Fi (2003; 2006). El estudio se desarrolló con tres estudiantes pertenecientes al segundo año del programa de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero en México, en este año los estudiantes han tomado cursos matemáticos como calculo I y II, elementos de geometría, geometría analítica I y II, Algebra, entre otras materias electivas y complementarias.

En el marco del razonamiento covariacional (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu, 2002), se identificaron y reportaron comportamientos para las acciones mentales (**AM**), las cuales concebían cinco consideraciones que permitían identificar el cambio. La **AM1** determinaba la identificación de las variables en la construcción relacionando el nivel uno (**N1**) (*coordinación*), la **AM2** permitió identificar la manera en la que se presentaba el cambio de las variables relacionando el nivel dos (**N2**) (*dirección*), la **AM3** relaciona numéricamente el cambio de las variables vinculando el nivel tres (**N3**) (*coordinación cuantitativa),* la **AM4** cuatro permitió determinar la razón de cambio promedio sobre las variables establecidas en la construcción conectando el nivel cuatro (**N4**) (*razón promedio*) y la **AM5** definió el cambio instantáneo para cualquier par de variables, esta acción mental determinaba el quinto nivel de razonamiento covariacional (**N5**) (*razón instantánea*).

La investigación adopta un marco conceptual y utiliza un método de estudio de casos, para la materialización del objetivo se desarrollaron tres instrumentos: construcción guiada, preguntas auxiliares y entrevista. La construcción guiada permitió visualizar la gráfica de la función seno desde una perspectiva covariacional, las preguntas auxiliares determinaron primeras nociones de los comportamientos para las acciones mentales donde la entrevista *semiestructurada* las consolida, permitiendo la identificación de los niveles de razonamiento covariacional.

Los resultados muestran que los estudiantes reconocen la construcción de la función seno desde una perspectiva covariacional, mostrando una evolución en la concepción respecto a ella además de alcanzar el **N4** y **N5** del razonamiento covariacional.

Finalmente, cabe precisar que el trabajo se divide en 5 capítulos:

- En el capítulo 1, se aborda cuestiones referentes a los antecedentes, se da cuenta de la revisión de la literatura la cual ayuda a determinar el problema de investigación que permite la consolidación de la pregunta de investigación.
- En el capítulo 2, se explica el marco conceptual que se adopta, se definen el marco conceptual del problema, los niveles de razonamiento covariacional, las acciones mentales y los comportamientos particulares para la construcción guiada.
- En el capítulo 3, se explica la metodología que se utilizó para alcanzar el objetivo trazado en esta investigación, es decir el estudio de casos. También se explica la

determinación de las herramientas para la materialización del objetivo y la manera en la cual se relacionan estos.

- En el capítulo 4 se sintetizan los resultados mostrando un análisis de estos, relacionan los tres estudiantes en cuestión con cada uno de los comportamientos propuestos para las acciones mentales.
- Finalmente, el capítulo 5 está dedicado a la discusión de los resultados, las conclusiones y sugerencias que se determinan del estudio en cuestión.

Capítulo 1

Problema de investigación

1.1 Antecedentes

Las investigaciones concernientes a la enseñanza y aprendizaje de las funciones trigonométricas ha interesado por muchos años a una diversidad de investigadores, en especial los del campo de la Matemática Educativa, quiénes se han centrado en la educación media (Akkoc, 2008; Fi 2003; Webber, 2005, 2008; Moore 2013, 2014, 2015; Yiğit, 2014, 2016.). Es así que en miras del mejoramiento de la enseñanza de la trigonometría, dichos investigadores han observado e identificado una pluralidad de dificultades y con base en ellas se han generado estrategias para brindar tratamientos alternativos. Una de las dificultades reportadas, giran en torno a los procesos de enseñanza de las funciones trigonométricas, en especial los relacionados con la circunferencia unitaria y el triángulo rectángulo.

Entre las investigaciones relevantes que se encontraron en el contexto de la enseñanza de la trigonometría y formación de profesores se halla Yiğit (2016), quien describe la comprensión de estudiantes egresados de un programa de Matemática Educativa acerca de la relación seno y coseno, concretamente la pregunta giró en torno a ¿Cómo entienden los estudiantes (graduados) de Matemática Educativa las relaciones trigonométricas que surgen de dos ángulos que están en la base de un triángulo rectángulo? este estudio contribuye a la literatura que se reporta sobre la comprensión que tiene el estudiante egresado sobre las relaciones trigonométricas en el contexto del triángulo rectángulo. Así mismo Yiğit (2016) se apoya de dos marcos teóricos, el primero se enmarca dentro del Entendimiento Relacional y Entendimiento Instrumental Skemps (1976), y el segundo en el Concepto-Imagen y Concepto-Definición Tall & Vinner (1981).

Por entendimiento relacional y entendimiento instrumental Skemps (1976) entiende:

> El entendimiento relacional está ligado a la idea informal de describir y determinar el qué y por qué de alguna situación que desarrolle entendimiento, es decir tener claridad tanto de las reglas como de las razones. El entendimiento instrumental por su parte describe las reglas sin razones que un individuo puede utilizar en el

> desarrollo de cualquier situación que este produzca, además de la capacidad de emplear dichas reglas en contextos determinados de aprendizaje. (p. 1)

El concepto imagen y concepto definición es determinado a través de Tall & Vinner (1981), estos lo determinan como:

> El Concepto-Imagen involucra una descripción total de la estructura cognitiva que se asocia a un concepto, en este, se incluyen todas las imágenes mentales y la diversidad de procesos asociados. El Concepto-Definición por otra parte explica la manera en que las palabras se utilizan para identificar y/o especificar un concepto. Hay que mencionar, además que a través del uso de las teorías es posible entender y analizar las definiciones e imágenes que presenta el estudiante. (p.156)

La metodología utilizada en Yiğit (2016) es de tipo cualitativo, donde la técnica utilizada es el estudio de casos, así mismo la investigación se desarrolló con la participación de 9 estudiantes (6 mujeres-3 hombres) de quienes se eligieron al azar tres, para la aplicación de una entrevista semiestructurada. El análisis de los datos se realizó, concentrando los mismos en una tabla que permitió categorizar la información respecto a lo enunciado en el marco teórico y tres tareas que propone el investigador, en la tabla se desarrollaron 5 categorías (nombre del estudiante, concepto imagen, concepto definición, entendimiento instrumental y formas en que se relacionan con sus notas). Según los resultados de Yiğit (2016) en la primera tarea observaron que las imágenes que prevalecían en los graduados sobre razones trigonométricas, se relacionaban con la circunferencia unitaria y el triángulo rectángulo. En cuanto a la definición del concepto lo que prevaleció fue la nemotecnia que ellos (estudiantes graduados) tenían de las relaciones trigonométricas. Con base en las diferentes representaciones y evidencias de los estudiantes y con apoyo del marco de referencia, se infirió que los estudiantes tenían conocimiento conceptual pero no comprensión relacional. De la tarea dos se reporta una especie de conflicto entre la imagen del concepto y la comprensión relacional, la imagen del concepto que presenta el estudiante se evidencia de manera estática; esto al determinar un triángulo rectángulo que en primera instancia se presentaba fijo de sus ángulos y después se daba variabilidad a estos, ocasionando dificultad en la manera de concebir las razones trigonométricas. Finalmente la tarea tres estableció la relación que existe entre el seno y el coseno ($\cos A = \sin A \ y \ \cos A = \sin(90 - A)$) al variar los ángulos de la base de un triángulo rectángulo, la tarea evidenció que los egresados poseen conocimientos básicos de las funciones trigonométricas lo que en la teoría se conoce como entendimiento de tipo instrumental sin considerar el entendimiento relacional, en otras palabras, los egresados manejan conceptos básicos que pueden desarrollar en un contexto estático (sin variación de los ángulos) en la trigonometría, pero no en un contexto de variabilidad.

Para concluir Yiğit (2016) señala que el estudio le permitió mirar dificultades referentes a la comprensión de conceptos trigonométricos desde la teoría empleada, por ende, prevalece una especie de comprensión instrumental lo que hace factible que se estudien las imágenes conceptuales y definiciones del concepto en el desarrollo de la comprensión instrumental y relacional en un contexto específico, también enuncia la dificultad que tienen los estudiantes graduados respecto del concepto de ángulo, esto al evidenciar en la variación que se determinaba en la segunda tarea. Además pudo verse como prevalece el método del triángulo rectángulo y su nemotecnia, el autor recomienda fomentar estudios donde se involucre a la circunferencia unitaria y a las relaciones trigonométricas, así como considerar entornos dinámicos.

Moore, Laforest & King (2015) determinan dificultades respecto de los significados de conceptos básicos trigonométricos presentes en un grupo de docentes en formación en relación con el concepto de circulo unitario al desarrollar un experimento de enseñanza. En el estudio puede verse cómo a partir de la experimentación e interacción de un diseño, se desarrollan algunas interpretaciones que tiene el grupo de docentes en formación respecto a dicho concepto.

Los investigadores buscan resignificar en éstos la idea del radio de un círculo unitario como unidad de magnitud, con base en lo anterior se busca un entendimiento de la diversidad de propiedades presentes en el concepto de círculo, en particular del radio que tiene una circunferencia unitaria, visto este como una unidad de magnitud desencadenante de cualquier medida que pudiera realizarse sobre cualquier círculo en general.

En la investigación de Moore et al. (2015) infiere que el círculo unitario es central en el aprendizaje de las funciones trigonométricas, razón que conlleva a determinar que una de las causas que evidencia las posibles dificultades que presentan maestros y estudiantes respecto a la trigonometría radica en la desconexión existente entre dicho par de conceptos. El objetivo principal del estudio fue presentar los significados *diferentes* que tenían un grupo específico de maestros en formación alrededor de la circunferencia unitaria y abrir el debate en torno a cómo está sirve como unidad de medida y representante general de cualquier medida en los círculos en general.

El marco teórico utilizado en Moore et al. (2015) intenta comprender las nociones ligadas al pensamiento de los estudiantes futuros maestros de matemáticas; generando dos perspectivas centrales alrededor del entendimiento y el significado. El entendimiento se define como el estado cognitivo de equilibrio que resulta de la asimilación de un esquema, por su parte el término significado alude a las acciones y esquemas que anticipa un individuo o que promulga en el momento de la comprensión, además de querer entender la manera en como los estudiantes esquematizan lo relacionado al círculo unitario (Thompson, Carlson, Byerley & Hatfield, 2014, p.12).

La metodología empleada por Moore et al. (2015) consistió en dos etapas: con la primera se acercaron a los significados que dos profesores en formación de matemáticas tenían alrededor del círculo unitario y en la segunda se abordó la resignificación de su pensamiento a partir de las actividades propuestas en el experimento de enseñanza, es decir como el pensamiento de los estudiantes evolucionó después de trabajar en ellas. La investigación puso en evidencia dificultades respecto a los significados del círculo unitario, además consideró que una de las estrategias para desarrollar pensamiento trigonométrico en estos, radica en explicar todas las alternativas para los significados que presenta el círculo unitario. De modo que se expresó como necesario reflexionar sobre situaciones que generen en los profesores en formación la significación del circulo unitario y la generalidad del radio como unidad de magnitud, al comprender el circulo unitario como unidad de magnitud se puede observar como los significados de los profesores en formación cambian, resignificandose hacia la hipótesis de los investigadores que buscaban potencializar los esquemas de medición presentes en estos.

Otra investigación que involucró estrategias de enseñanza en el contexto trigonométrico es la de Moore (2014) quien abordó uno de los conceptos clave e importantes para el trabajo de investigación que estamos desarrollando, el Razonamiento Covariacional. De este modo Moore (2014) se enfocó en un experimento de instrucción considerando dos procesos comunes en la enseñanza de las funciones trigonométricas: la circunferencia unitaria y el triángulo trigonométrico.

Así mismo la investigación muestra antecedentes históricos explicitando que el proceso de enseñanza con base en la circunferencia unitaria (trigonometría circunscrita) fue desarrollado por los griegos para el estudio de los cielos, aunque actualmente en la escuela el enfoque que predomina en la enseñanza de las funciones trigonométricas es el uso del triángulo rectángulo. El diseño considera concepciones mezclando conceptos ligados al radio de la circunferencia, la medida del arco y a la medida del ángulo. Moore (2014) resalta que la manera en que los conceptos trigonométricos son presentados; enfatizan una falta de contexto entre los procesos y relaciones que tienen cada uno de ellos, además de la poca concepción de significados que tienen estos respecto a conceptos como ángulo, arco, etc.

En su investigación Moore (2014) se planteó dos preguntas: ¿Qué significados de la función seno desarrolla un estudiante durante una secuencia de instrucción donde se enfatiza el Razonamiento Cuantitativo y Covariacional?, ¿cómo la medida de un ángulo y la relación que este tenga con el radio de una circunferencia, influyen en los significados de la función seno? Tomando como base dichas preguntas el autor hace uso de un marco conceptual para explicar desde su perspectiva los diferentes significados y acciones mentales presentes en los estudiantes.

El Razonamiento Cuantitativo determina las acciones mentales que se involucran al imaginarse una situación de modo en que se puedan determinar atributos medibles, además de las diferentes relaciones que puedan desarrollarse entre dichas concepciones (eg. El observar el paseo que llega a hacer una persona en la rueda de la fortuna y preguntarse por nociones que determinen el ángulo de rotación de la rueda, la altura de esta respecto al piso y la variabilidad de dichas nociones). Una premisa importante del razonamiento cuantitativo es que las cantidades y las relaciones cuantitativas se construyen con el tiempo y de formas únicas para el individuo. El Razonamiento Covariacional por otra parte define a las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atienden las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra.

Se pudo observar que el progreso del estudiante fue adecuado dado que, logró identificar un diverso sistema de significados en lo que implica cantidad y covariación respecto a la medida del ángulo, los procesos ligados a la circunferencia unitaria, el triángulo trigonométrico y con base en la relación de estos tres conceptos se determina la función trigonométrica seno, lo que en conjunto caracterizó el diseño de la investigación en Moore (2014). Referente al Razonamiento Covariacional el autor desarrolla aspectos ligados a las acciones mentales que involucra la teoría, la Covariacionalidad del diseño hace que emerjan en el estudiante significados que se coordinan con las gráficas subyacentes a la tarea y las acciones mentales que de estas derivan, los significados que emergen de la función seno se dan a medida en que el estudiante expresa sus comportamientos al diseño, es decir, a través de las acciones mentales que este manifiesta. (Moore, 2014, p. 131) a modo de conclusión se resalta en el documento la importancia de recalcar en las dos posturas tanto cuantitativa como covariacional, esto debido al papel importante que desempañaron a la hora de concebir la relación de los procesos de enseñanza (circunferencia unitaria y triangulo trigonométrico) el ángulo como concepto inicial y la concepción de la función seno.

Demir & Heck (2013), exponen en su escrito una trayectoria novedosa para el aprendizaje de la trigonometría, en esta se involucra de una manera original funciones que no son rectas (ni algebraicas, ni trigonométricas, ni inversas, ni logarítmicas, ni exponenciales) sobre la circunferencia unitaria la cual relacionan la longitud de arco y el ángulo central para la concepción de las funciones seno y coseno.

En el estudio puede verse cómo los investigadores proponen un modelo de entendimiento en el que relacionan las ideas de los estudiantes a través de un análisis conceptual que involucra la relación de tres procesos determinados en la enseñanza de las funciones trigonométricas: La trigonometría del triángulo, la circunferencia unitaria y las gráficas de las funciones trigonométricas. Los aspectos centrales del modelo determinan 1) la relación funcional entre la longitud del arco y la correspondiente posición vertical o horizontal de un ángulo formado dentro de una circunferencia unitaria y que relaciona directamente valores de las funciones seno y coseno; 2) la concepción de números reales dentro del dominio, esto al determinar la inclusión del ángulo y relacionarlo directamente con la circunferencia unitaria.

Los autores interpelan a través de los antecedentes las diversas maneras de involucrar los conceptos además de evidenciar la forma tradicional y fragmentada en la que son presentados afirmando que los estudios que se han desarrollado intentan determinar cuál de las diferentes vías involucra mejores respuestas por parte de los estudiantes, los resultados infieren que ninguno de los dos métodos es concluyente. El objetivo principal de la investigación es presentar un marco basado en un modelo de entendimiento trigonométrico donde a partir de éste se propone una actividad para determinar la manera en que son enseñadas las funciones seno y coseno. La investigación presenta dos preguntas de investigación las cuales se presentan a continuación:

¿Qué dificultades enfrentan los estudiantes en su desarrollo de conceptos dentro de la secuencia de instrucción diseñada en base a la nueva trayectoria hipotética del aprendizaje de las funciones trigonométricas?, ¿cuáles son las características relativas que se encuentran en la comprensión del seno y el coseno en los datos resultantes de la intervención con el nuevo modelo propuesto bajo el aprendizaje de la trigonometría?

El estudio concluye al considerar que el diseño presentado fue efectivo como tarea instruccional en relación a la comprensión integrada de las funciones trigonométricas, esto en relación con la evidencia de que los estudiantes no mostraron ideas erróneas, ni dificultades como las mostradas en la revisión de la literatura. La propuesta de Demir & Heck (2013) mostró una conexión entre el dominio de las funciones seno y coseno, su relación con los números reales a través de la mediación del concepto de ángulo; los estudiantes lograron desarrollar la comprensión de las gráficas de dicho par de funciones.

Al mismo tiempo Akkoc (2008) explora las diferentes imágenes conceptuales que tienen un grupo de profesores en formación del concepto radian, teniendo como resultado que las imágenes que más dominaban eran las que las correspondían a la noción de grados por encima de la de radian. Para este trabajo se consideró a 42 estudiantes futuros profesores de matemáticas, aunque solo se entrevistó a seis de estos, quienes dejaron entrever que los profesores eran un tanto escépticos al aceptar las entradas de los valores de las funciones trigonométricas con los números reales, más bien usaban valores correspondientes a grados. Lo más interesante que logra arrojar el estudio, es ver las dos diferentes concepciones que estos tienen para una misma noción de Pi: como un ángulo en radianes y como un número irracional.

A raíz de ciertas dificultades que pueden girar en torno a la concepción de radián, Akkoc (2008) muestra una contextualización histórica de donde explica de una manera tenue lo que se ha determinado por la imagen de radián; en un principio vista como herramienta usada por los babilonios, aunque de manera más reciente como unidad de medida del ángulo con base en el radio de la circunferencia.

Referente a lo que puede encontrarse en educación el autor infiere en una revisión de la literatura de cuyo resultado desprende los pocos estudios que existen en educación matemática respecto a la concepciones de los maestros alrededor de los conceptos básicos de la trigonometría. El objetivo principal de la investigación se centra sobre la comprensión que tienen los profesores en formación de un concepto clave en la trigonometría, el radián. Las preguntas de investigación son: ¿Qué tipos de imágenes tiene de los radianes los maestros en formación?, ¿cuáles son los usos que tiene de esas imágenes en los contextos de circunferencia unitaria y triangulo rectángulo? El termino radián es definido en el estudio como la medida de un ángulo que está relacionada con la longitud del arco de un circulo. De otra manera, para el círculo, el angulo central que corresponde a la medida del arco que es igual al radio, es un radian (Akkoc, 2008, p.858).

El marco teórico abordado en el estudio, involucra la perspectiva de Tall & Vinner (1981) para el concepto imagen el cual se define como: “la forma en que son usadas las palabras para especificar un concepto” (p.180). La investigación infiere en afirmar la posibilidad utilizar conceptos matemáticos sin conocerlos, es decir la imagen conceptual (concepto imagen) permite estructurar cognitivamente la totalidad del concepto, en la que se incluyen todas las imágenes mentales, además de las propiedades y procesos asociados a este (Akkoc, 2008, p.859).

La metodología implementada en la investigación fue de carácter cualitativo, donde la técnica utilizada de investigación fue el estudio de casos múltiples. El estudio de caso múltiple permitió en la investigación la cohesión de las diversas perspectivas presentes en el desarrollo del experimento, desde la perspectiva personal de uno de los individuos en el grupo hasta la interacción que se originaba de todos los participantes sobre los que se realizaba la investigación, permitiendo un análisis intensivo de los fenómenos que se producían en el transcurso de la práctica educativa.

Akkoc (2008) en su estudio destaca que una de sus conclusiones más relevantes es la que determina la imagen conceptual de grados como la que domina, incluso para estudiantes que reconocen la imagen conceptual de los radianes, entre las aseveraciones que hace el autor respecto a lo anterior y a destacar es la que determina sobre las dificultades que presentan este tipo de imágenes conceptuales al relacionarse con las funciones trigonométricas. Los maestros son reacios al aceptar valores de entrada reales en las funciones trigonométricas, asignando únicamente valores de entrada referidos a los grados. Los profesores en formación evidencian dos imágenes para el valor de Pi, una como un valor de ángulo y la otra como un número irracional. Las imágenes conceptuales de este término surgen de la poca comprensión referente a los radianes.

1.2 Justificación.

Durante los años de escolaridad media, la mayoría de los estudiantes se enfrentan con dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje, en particular al trabajar con trigonometría, investigadores reportan problemas en los significados durante el uso de contextos de representación geométrica y gráfica, así como en las formas de abordar las funciones trigonométricas con base en el uso de la circunferencia unitaria, el triángulo trigonométrico y la gráficas de las funciones (Moore et al., 2013; Demir & Heck, 2013; Fi, 2006; Brown, 2006).

Un aspecto importante para la enseñanza de las funciones trigonométricas se encuentra del ligado a la circunferencia unitaria en situaciones dinámicas y a la construcción de significados que permitan evidenciar cómo el estudiante se anticipa en sus formas de pensamiento; en este sentido el razonamiento covariacional surge como aquello que permite evidenciar la manera en la que los estudiantes se piensan el cambio y la variación. Thompson, Carlson, Byerley, & Hatfield (2014) puntualizan sobre el pensamiento Covariacional y lo definen como la manera habitual de anticipar el uso específico de significados o la diversidad de pensamientos dentro del razonamiento. Por tanto, en la investigación nuestra, interesa identificar y describir los niveles de razonamiento Covariacional que producen los estudiantes, al realizar una actividad que involucra el uso del software geogebra como herramienta para la construcción de la función trigonométrica seno.

Es en ese sentido Moore (2012, 2013, 2014) y Moore et al (2015) reportan algunos conceptos que entrelazan las funciones trigonométricas y el Razonamiento Covariacional, en estas investigaciones se pueden ver cómo los estudiantes consideran a las funciones trigonométricas a partir de la interacción que puedan generar a través de la variabilidad de la medida de los ángulos. Moore muestra como los estudiantes comprenden las funciones trigonométricas de manera productiva cuando estos logran entender la medida del ángulo como una longitud relativa del arco y la relación Covariacional que pueda hacerse emerger de dicha consideración, con base en esto Moore (2014) señala que las investigaciones futuras deberán considerar la exploración de conceptos trigonométricos básicos como el ángulo, su exploración desde un enfoque Covariacional y la influencia de estos en la construcción de funciones trigonométricas, específicamente las ligadas a la función seno (p.135).

En el presente escrito se aborda el razonamiento Covariacional desde el marco conceptual propuesto Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu (2002), quienes lo definen como aquellas actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían, mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra (p.354); El presente trabajo de investigación indagará sobre los niveles de Razonamiento Covariacional que producen los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, con base en la función trigonométrica seno y su relación con los radianes.

1.3 Formulación del problema

La revisión de la literatura deja al descubierto algunas problemáticas, una relacionada con la enseñanza aprendizaje de las funciones trigonométricas, pues se evidencian al menos dos maneras de abordar a éstas, la primera usando la circunferencia unitaria y la segunda usando el triángulo trigonométrico. Siendo esta última la más usada, mientras que la primera no es comúnmente usada, de ahí el interés nuestro por usar la circunferencia unitaria en la actividad a plantear.

Otro aspecto a destacar es que una buena parte de estudiantes aprenden trigonometría haciendo uso de la nemotécnica, es decir, memorizan las relaciones trigonométricas del triángulo rectángulo, entre otras.

Thompson & Carlson (2016) destacan la importancia de la enseñanza de la trigonometría puesto que esta juega un papel importante en el aprendizaje del cálculo, específicamente el ligado a las aplicaciones en las funciones trigonométricas, destacan además la importancia de comprender la noción del argumento de una función trigonométrica y su cambio continuo. En este sentido Moore (2012, 2013, 2014 & 2015) realiza importantes avances en torno a la variabilidad de la medida del ángulo, como argumento de cualquier función trigonométrica. Así mismo, menciona que los alumnos comprenden de una manera productiva las funciones trigonométricas cuando entienden la medida del ángulo como una longitud relativa del arco, más aún, afirma que para una comprensión productiva también es necesario entender los aspectos ligados a la Covariacionalidad de la medidas del ángulo a través de las imágenes que se ligan de las funciones trigonométricas.

El estudio acerca de los procesos mentales que involucran aspectos de naturaleza Covariacional es uno de los temas centrales en muchas grupos de investigación dentro del campo de la Matemática Educativa; en particular, varios autores (Ferrari, Martínez & Méndez, 2016; Thompson & Carlson, 2016; Moore, 2014; Johnson 2012; Villa-Ochoa 2012) se han preocupado por indagar sobre la manera en que el Razonamiento Covariacional influye en la cognición del estudiante a la hora de apropiarse de un conocimiento matemático. De acuerdo con Carlson et al. (2002) se define razonamiento Covariacional como *"las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra"* (pág. 354). Específicamente se busca que a través de eventos dinámicos se puede establecer enfáticamente la noción de Covariacionalidad, donde los estudiantes pueden considerar cómo una variable cambia mediante la visualización de los cambios en otra variable, es en este punto donde los gráficos de las funciones en situaciones dinámicas juegan un papel importante para representar e interpretar los cambios simultáneos de las variables debido a que proporcionan una gran comodidad para interpretar las características que se perciben de estas (Yemen-Karpuzcu; Ulusoy & Işıksal-Bostan 2015).

El razonamiento Covariacional es importante debido a que es más factible que los estudiantes conceptualicen a través de este, relaciones de funciones en todos los niveles de enseñanza Thompson & Carlson (2016). En perspectiva con lo anterior Moore (2014) sugiere que las futuras investigaciones en el campo de las funciones trigonométricas deberían explorar un enfoque Covariacional, donde se caractericen los diversos significados de la medición del ángulo por parte de los estudiantes y la influencia de dichos significados en las construcciones de las funciones trigonométricas, específicamente en la función seno.

En particular, nuestro diseño involucra un enfoque covariacional además, considera la circunferencia unitaria y el movimiento de un punto sobre la misma; lo que permitirá relacionar la función trigonométrica seno a través de la longitud del arco y la distancia que genera la proyección dirigida en el eje y. El interés del siguiente trabajo es responder la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué niveles de razonamiento Covariacional emergen de estudiantes de licenciatura en matemáticas al enfrentarse a una situación de variación relacionada con la función seno?

1.4 Objetivo

Identificar los niveles de razonamiento Covariacional que emergen en estudiantes de la licenciatura en matemáticas al enfrentarse a una situación de variación que relaciona la función seno.

Capítulo 2

Marco conceptual

El trabajo de investigación que ocupa esta tesis tiene intenciones de intervención en el aula. Como se ha venido mencionando en páginas anteriores, nuestro interés está orientado a identificar y describir los niveles de Razonamiento Covariacional que emergen a través de la construcción de un diseño sobre la función trigonométrica seno. Por tanto, se ha elegido el marco conceptual desarrollado por Carlson et al. (2002) quien expone aspectos del Razonamiento Covariacional, y que permiten realizar una observación directa y un análisis de modo que los estudiantes puedan comprender diversas situaciones en las que se involucran nociones en las que emergen el razonamiento covariacional, esto a través de 5 acciones mentales y cinco niveles de razonamiento que permiten incidir sobre lo desarrollado y presentado por el estudiante.

Por tanto en este capítulo interesa presentar el marco conceptual propuesto por Carlson et al (2002) y un ejemplo del uso de dicho marco en la investigación de Moore (2014), particularmente sobre la función trigonométrica seno. Finalmente se presentará de manera explícita el uso del marco declarado en esta investigación.

2.1 Razonamiento covariacional

Los estudios sobre los diversos problemas de comprensión de las relaciones funcionales dinámicas, han sugerido que el concepto de razón es fundamental debido a tres causas: involucra la construcción de una imagen de cambio de alguna cantidad, la coordinación de cambio de dos cantidades y la formación de una imagen de la covariación simultanea de dos cantidades. A partir de esta última causa Carlson et al. (2002) proponen un marco conceptual para el Razonamiento Covariacional donde a partir de este estudian y analizan la comprensión que tienen los alumnos acerca de situaciones de carácter dinámico que involucran dos cantidades que cambian simultáneamente.

Carlson et al. (2002) define el Razonamiento Covariacional como *"las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atienden a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra"* (p. 354).

Carlson et al. (2002), toman en cuentan algunas definiciones importantes para el desarrollo de su marco conceptual, entre las que se encuentra la noción de evolutivo; esta se concibe desde la perspectiva de Piaget y es tomada para dar significado a las diferentes imágenes de Covariación; el término se entiende como aquella adaptación de la inteligencia en el curso de la construcción de sus propias estructuras, que depende tanto de las progresivas coordinaciones internas como de la información adquirida mediante las experiencias; además se pueden definir por niveles donde emergen como sucesiones ordenadas y evolutivas, es decir de modo secuencial .

De los términos relevantes en la investigación el constructo de imagen, se describe desde Thompson (1994) como: dinámico, que se origina en acciones corporales y movimientos de la atención; además de ser la fuente y el vehículo de operaciones mentales. *Una imagen enuncia un tipo conocimiento de tipo fragmentado por elementos kinestésicos, la propiocepción, el olfato, el tacto, el gusto, la visión o el oído* (p. 22); otro de los términos explicitados por los autores es el relacionado a razón. El cual es utilizado como un significante del término razón de cambio promedio en el caso de imaginar un sub intervalo y razón de cambio instantánea en el caso de imaginar una función sobre todo su dominio.

El marco conceptual que exponen Carlson et al. (2002) involucra 5 acciones mentales del Razonamiento Covariacional y de sus comportamientos asociados que permiten describir la manera en cómo los estudiantes razonan respecto a situaciones de Covariación. Los comportamientos propuestos en la lista se han identificado en Carlson et al. (2002) a través de investigaciones anteriores, estos involucran el desarrollo de tareas por parte de alumnos de pregrado en situaciones de carácter dinámico. Las acciones mentales, descripción y comportamientos de estas se presentan a continuación:

Tabla 1.

Acciones mentales del razonamiento Covariacional.

ACCIÓN MENTAL	DESCRIPCION DE LA ACCION MENTAL	COMPORTAMIENTOS
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (ej. y cambia con cambios en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida

	variable.	mientras se consideran los cambios en el Valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de Concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

Fuente: Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, (p. 357). United States: National Council of Teacher of Mathematics

A través de las acciones mentales se pueden clasificar los comportamientos y observar cuando los estudiantes realizan actividades en torno a la Covariación, aunque hay que destacar que el Razonamiento Covariacional de un individuo respecto a una tarea en particular se puede determinar únicamente examinando el comportamiento y acciones mentales exhibidas durante esa tarea en específico.

En correlación con las acciones mentales propuestas, Carlson et al (2002) involucra cinco niveles de Razonamiento Covariacional fuertemente entrelazados, de ello aseguran: *"decimos que la habilidad de Razonamiento Covariacional de alguien ha alcanzado un nivel dado de desarrollo cuando sustenta a las acciones mentales asociadas con ese nivel y a las acciones asociadas con todos los niveles que están por debajo"* (p.357). Estos niveles los presentan Carlson et al (2002) y son los que se muestran a continuación:

Tabla 2.

Niveles de covariación en el marco conceptual.

Niveles de razonamiento
Nivel (N1). Coordinación: En el nivel de coordinación, las imágenes de la Covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con los cambios en la otra variable (AM1).
Nivel (N2). Dirección: En el nivel de dirección, las imágenes de la Covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentas por imágenes de N2.
Nivel (N3). Coordinación cuantitativa: En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
Nivel (N4). Razón promedio: En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
Nivel (N5). Razón instantánea: En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Fuente: Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, (p. 359). United States: National Council of Teacher of Mathematics

La necesidad de describir el Razonamiento Covariacional, radica en la importancia de concebir por parte del estudiante comportamientos en funciones de carácter dinámico que ayuden a promover el desarrollo del pensamiento variacional en diversidad de contextos donde se evidencien la razón de cambio que implique directamente la covariación; Carlson et al. (2002) afirman que el marco es importante por lo siguiente:

> Proporciona una herramienta analítica con la cual evaluar el pensamiento Covariacional en un grado más fino de lo que ha sido posible en el pasado. Además, de proporcionar una estructura y un lenguaje para clasificar el pensamiento Covariacional en el contexto de la respuesta de un estudiante a un problema específico, y para describir las habilidades generales de razonamiento Covariacional de un estudiante (i.e.; nivel evolutivo en el marco conceptual) (p. 359).

2.1.1 Razonamiento covariacional en la función seno.

Moore (2014) expone un acoplamiento del marco conceptual propuesto por Carlson et al. (2002) para la función trigonométrica seno, en este se puede observar la manera en que el autor desarrolla los comportamientos para las acciones mentales a partir de relacionarlas con la tarea que se propone. Moore (2014) sugiere la siguiente tarea la cual permitió rediseñar el marco conceptual y plantear los comportamientos para las acciones mentales desde el enfoque que percibe para la función seno:

> Imagínese un insecto que reposa en el extremo del aspa de un ventilador que gira en dirección anti horario. El insecto está ubicado exactamente 3.1 pies desde el centro del ventilador (radio) y está en la posición de las tres cuando comienza a girar. Relacione una curva que muestre como la distancia vertical del insecto por encima de la línea del diámetro en las posiciones de 12:00 a 3:00 varía a partir del ángulo que arrastra el insecto alrededor del ventilador (p. 107).

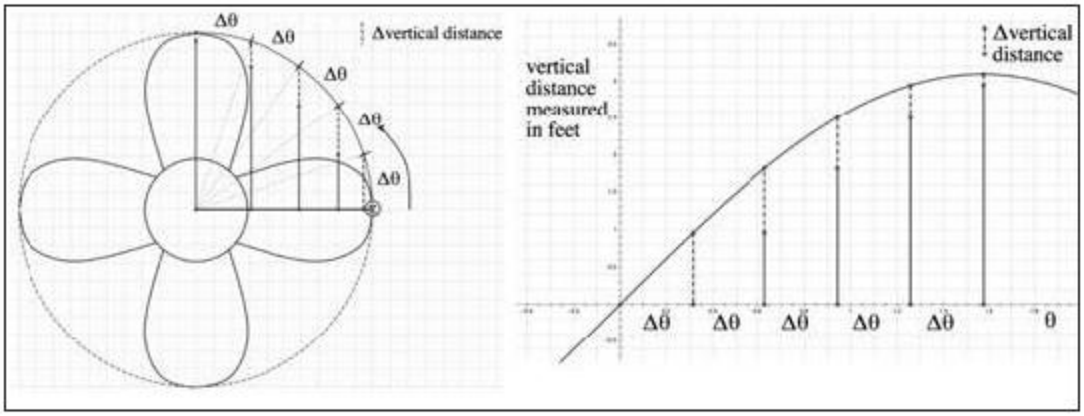


Figura 1. Cambios de la medida del ángulo y la longitud dirigida

Fuente: Moore, K. C. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), (p. 108). United States: National Council of Teacher of Mathematics

En la figura 1 se puede ver el desarrollo gráfico del problema planteado, este implica el modelado del movimiento circular a partir de la relación Covariacional entre el cambio en la longitud dirigida (distancia vertical) y el cambio del ángulo a medida que gira el ventilador. Es a partir de esto que Moore establece las conexiones entre el Razonamiento Covariacional y la función trigonométrica seno, identificando cada una de las acciones mentales propuestas por Carlson, lo primero que pone en consideración son las medidas (cada vez mayores) del ángulo respecto al primer cuarto de revolución a medida que la longitud vertical varia (AM1) y aumenta (AM2). Después se consideran cambios iguales en la medida del ángulo para diferentes intervalos, encontrando que la magnitud del incremento de la distancia vertical decrece (AM3) -ver figura 1-. También pone en consideración que la tasa promedio de cambio de la distancia vertical con respecto a la medida del ángulo disminuye sobre cada incremento sucesivo de igual medida de ángulo (MA4). Por último al imaginar la rotación del bicho de una manera continua se puede concluir que la distancia vertical aumenta a una tasa decreciente con respecto a la medida del ángulo (MA5).

Moore (2014) a través del desarrollo de su propuesta presenta el marco conceptual ligado a la función seno, ver tabla 3.

Tabla 3.

Acciones Mentales y la función seno.

ACCIÓN MENTAL	DESCRIPCION DE LA ACCION MENTAL	COMPORTAMIENTOS
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Verbalizar el cambio en los valores de salida del $\sin\theta$ cuando el ángulo θ varia
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Verbalización de la consciencia del aumento en el valor de salida $\sin\theta$ respecto a los incrementos en los valores de la medida del ángulo θ (θ entre 0 y $\pi/2$ radianes).
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Verbalizar que por sucesivos incrementos en la medida del ángulo de 0 a $\pi/2$ radianes, el valor de salida $\sin\theta$ incrementa y la cantidad total del incremento decrece
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Verbalizar que la tasa promedio de cambio del valor de salida $\sin\theta$ con respecto a la medida del ángulo θ *decrece* para sucesivos incrementos uniformes de la medida del ángulo θ entre 0 y $\pi/2$ Radianes.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Verbalización de la consciencia de la razón de cambio instantánea de los valores de salida de $\sin\theta$ con respecto a la medida del ángulo θ *disminuye* a partir del dominio de 0 a $\pi/2$

Fuente: Moore, K. C. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), (p. 107). United States: National Council of Teacher of Mathematics

Los comportamientos presentados por Moore (2014) describen las acciones mentales de Carlson et al. (2002) para la tarea que se presenta en específico, en esta se involucra un evento dinámico de tipo continuo a una situación discreta que relaciona la función seno y que permite al investigador acoplar la teoría a su práctica en particular.

En esta investigación se difiere un poco de lo establecido por Moore (2014), respecto de la forma en que se concibe la función seno. Mientras que Moore establece la consolidación de dicha función a través de la variación que tiene un ángulo respecto a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, determinando su continuidad y explorando sobre puntos discretos de ella. Nuestra investigación en un sentido diferente refiere el argumento de la función seno a partir de la variación de la longitud de arco en relación con la proyección dirigida de este sobre el eje de las ordenadas, además de consolidar la función a partir de puntos que se construyen de manera discreta llegando a la continuidad de la curva. Es por esto que consideramos determinar comportamientos más acordes a la intencionalidad de la tarea que presentamos, los cuales nos permitieron establecer los niveles de Razonamiento Covariacional) en coherencia con la construcción guiada que se propone:

Tabla 4.

Comportamientos de las acciones mentales en la investigación.

ACCIÓN MENTAL	DESCRIPCION DE LA ACCION MENTAL	COMPORTAMIENTOS
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Verbalizar los cambios de los valores de salida del $sen\, x$ cuando la variable x varia (x como longitud de arco)
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Verbalización de la consciencia del aumento o disminución en los valores de salida del $sen\, x$ considerando cambios en los valores de x
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del $sen\, x$ mientras se consideran cambios en el valor de x
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida $sen\, x$ con respecto a la medida del valor de x aumenta o disminuye dependiendo el valor de x
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio del $sen\, x$ para todo valor de x (consideraciones instantáneas para valores no presentes en la construcción)

Capítulo 3

Metodología de investigación

En los capítulos anteriores se mencionaron aspectos ligados a alcanzar y/o lograr el objetivo de la investigación; entre los que se destacan la revisión de la bibliografía y la explicación del marco conceptual elegido. Las investigaciones referidas anteriormente (Yiggit, 2016; Moore et al., 2015; Moore, 2014; Demir & Heck, 2013; Akkoc, 2008) permitieron que se determinaran diferentes propuestas para el proceso de enseñanza en torno a la trigonometría, lo cual condujo a exponer la problemática, y con ello plantear la pregunta de investigación. El marco conceptual por otra parte, permitió que se visualizara teóricamente el cuerpo del trabajo identificando las acciones mentales clave para la categorización de los niveles del razonamiento Covariacional de acuerdo con lo reportado en Carlson et al. (2002).

En este capítulo se presenta la metodología empleada durante el desarrollo del trabajo la cual consistió en tres momentos. En la primera parte se describen cada uno de los instrumentos utilizados en la investigación, los cuales permitieron recolectar datos y a través del análisis de estos, materializar el objetivo. La segunda parte relaciona la manera en la que cada instrumento fue aplicado; el considerar los tiempos adecuados para cada uno, así como la cantidad necesaria de estudiantes que permitiría el análisis de las acciones mentales y por ende de cada uno de los niveles. El último aspecto implica situaciones relacionadas a los alcances y limitaciones de la investigación; se mencionan aspectos que se determina sobre el diálogo, consideraciones referentes a la particularidad de la investigación así como su carácter general, a continuación se determinan cada uno de estos momentos:

3.1 Instrumentos para la materialización del objetivo

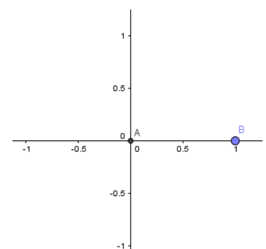
3.1.1 Construcción guiada de la función seno con base en el software geogebra

El primer instrumento se construyó de lo expuesto por Rodríguez y Sarmiento (s/f) en este se pretendía inicialmente que el estudiante consolidara de una manera geométrica las funciones trigonométricas por medio de Cabri II plus. Para propósitos del trabajo se optó por rediseñar dicha tarea en el software geogebra, el cual es un programa de geometría dinámica de libre accesibilidad, se enfatiza la función seno como eje central de dicha reconstrucción sin considerar las demás funciones trigonométricas.

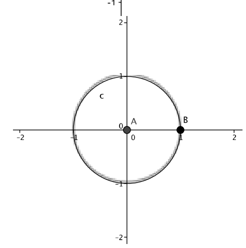
La reestructuración del diseño que en la investigación refiere como construcción guiada fue validada antes de la aplicación final, determinándose sobre esta la totalidad de los aspectos referidos a las acciones mentales, lo que permitió el entendimiento del estudiante y el desarrollo significativo en su pensamiento. En particular la construcción guiada permitió inferir sobre los comportamientos de las acciones mentales que se propusieron, reconociéndose los niveles y logrando acercar más el estudio al objetivo propuesto en esta investigación. A continuación se presenta la construcción guiada propuesta para el desarrollo de la investigación:

Realice la siguiente construcción:

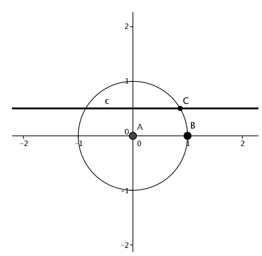
Colocar el punto A en el origen del sistema de coordenadas cartesianas, es decir, A = (0, 0) y el punto B = (1, 0).



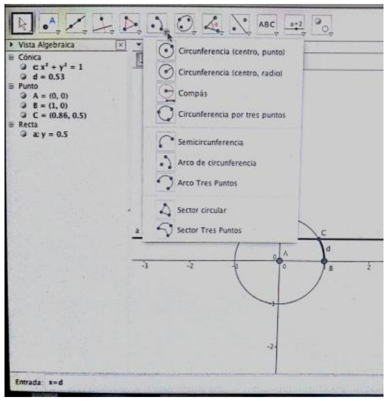
Construir una circunferencia unitaria de centro A y que pase por B. Utilizar para ello la herramienta “circunferencia (centro punto)”.

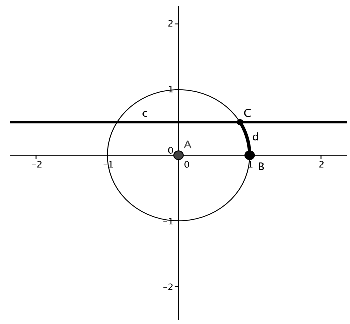


Marcar un punto sobre la circunferencia al que llamamos C y trazar una recta paralela al eje *x* por dicho punto.

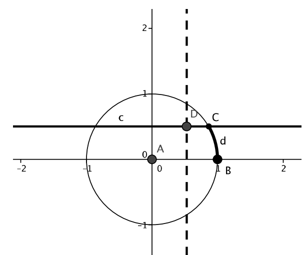


Utilizar la herramienta “**arco de circunferencia**” para trazar el arco $\widehat{BC}$. Hacer click primero en A, luego en B y por último en C. En la vista algebraica aparecerá la medida con una letra (d por ejemplo).

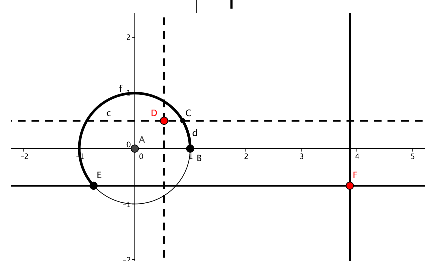




Tomar la medida d que representa la longitud de arco y trasladar esta sobre el eje x, *(partiendo desde el punto A)*. Con esta información trazar una recta perpendicular a la recta horizontal (trazada en el paso 3). En Geogebra, en la ventana inferior **escribir $\boldsymbol{x}$ = d** y así, aparecerá la recta (punteada) vertical correspondiente.



El punto de intersección (D) de las rectas vertical y horizontal, pertenecerá a la nueva curva que se pretende construir.



El objetivo de la construcción buscaba que el estudiante consolidara a través de su experiencia práctica nociones covariacionales que exploraban de manera dinámica a través del software. Asimismo la construcción guiada situaba una relación de coordenadas las cuales construía, exploraba y visualizaba; determinando una curva que correspondía con la gráfica de la función seno.

La construcción geométrica buscaba que los estudiantes tuvieran una mejor adquisición del concepto al hacer comparaciones con lo que ya habían establecido en su experiencia académica y lo que podía emerger de la experiencia establecida. La función seno fue trabajada matemáticamente como $f(x) = \sin x$. Donde la coordenada x era relacionada visualmente como la longitud de arco y el $\sin x$ como la proyección dirigida del arco de circunferencia sobre el eje y.

3.1.2 Sobre las preguntas auxiliares en la construcción

Al final de la construcción que se presentó para la concepción de la función seno se involucró una serie de preguntas para encaminar al estudiante a determinar aspectos ligados a los comportamientos de las acciones mentales y a las nociones que podían emerger de la consideración en este sentido de su perspectiva y de la covariabilidad del cambio. La actividad buscó identificar en las producciones de los estudiantes sus nociones básicas de aspectos relacionados con la función seno, además de la relación Covariacional que pudiera emerger con base en aspectos conocidos por los estudiantes.

Para el planteamiento de las preguntas auxiliares se consideraron situaciones que involucraban específicamente el quehacer del estudiante con el diseño en cuestión respecto de aspectos ligados a la covariación, de modo que las preguntas se relacionaba o apuntaban directamente con las acciones mentales. Estas se presentan a continuación:

A partir de la construcción, responda las siguientes preguntas:

1. ¿Qué comportamiento observas sobre los puntos que has construido? describe lo que observas y esboza la curva que crees que se está construyendo.
2. ¿Qué tipo de bosquejo visualizas?, ¿Consideras que hay alguna variación? Si es así; ¿Cómo describirías la(s) variación(es)?
3. ¿Con qué gráficas conocidas puedes relacionar la curva construida?
4. ¿Por qué es posible la construcción de la gráfica que usted visualizó? Explique ampliamente.
5. ¿Qué papel juegan las coordenadas $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ en la construcción anterior? Explique ampliamente.
6. Determina el dominio y el rango con base en la construcción anterior.
7. Con base en cada uno de los pasos para la construcción de la gráfica (curva) anterior, analiza los valores encontrados para las coordenadas que determinaron dicha gráfica (curva) y que fueron establecidos durante el mismo proceso de construcción. ¿Qué puedes inferir?, ¿Cómo son cada uno de estos valores al compararse entre sí?
8. Observa la gráfica de izquierda a derecha, ¿puedes visualizar donde crece y decrece la misma?, describe los intervalos donde sucede lo anterior.
   a) intervalos cuando la gráfica es creciente.
   b) intervalos cuando la gráfica es decreciente
9. Describe los valores máximos y mínimos de la gráfica, determinados durante la

construcción de la misma.

10. Con base en valores (coordenadas x y y) que determinan la gráfica (curva), construir una tabla y determinar la primera razón de cambio.
11. Co base en la comparación uno a uno los valores de la primera razón de cambio: ¿Puedes relacionar los valores de la tabla con la construcción de la gráfica (curva) inicial? Describe ampliamente. ¿Qué relación identificas entre los valores de la primera razón de cambio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica? Explique detalladamente su respuesta
12. ¿Qué harías para continuar el gráfico sobre la parte negativa del eje x? ¿Es posible graficar la función sobre todo el eje x? Explica ampliamente tu respuesta.

Se aclara que es únicamente a través del diálogo donde es factible que incidan los comportamientos de las acciones mentales, las preguntas de la actividad permiten un primer acercamiento y una consolidación fuerte de la entrevista.

3.1.3 La Entrevista

La entrevista que permitió determinar cada uno de los comportamientos ligados a las acciones mentales fue de tipo semiestructurada. Esta permitió generar un diálogo continuo y fluido; además de generar la información a través de elementos ya considerados, tales como preguntas encaminadas que no eran del todo cerradas, dando la posibilidad de agregar preguntas en el transcurso de la misma. Fue importante considerar los matices de respuestas que se originaban a través del diálogo entre investigador y estudiante, esto con el objetivo de ligar cada una de sus producciones verbales (argumentos) a las acciones mentales que determinada el marco conceptual de Carlson et al. (2002) para el razonamiento covariacional. A continuación se anexan las preguntas de la entrevista:

Preguntas de entrevista (orientadoras)

1. Describa en sus propias palabras la construcción que desarrollo en la sesión anterior
2. ¿Qué grafica logra reconocer del desarrollo de la construcción?, explique detalladamente su respuesta
3. ¿Cómo describiría el movimiento de la gráfica?, ¿Cómo cambia esta?, ¿con respecto a qué cambia?
4. ¿Cómo recuerda haber aprendido las funciones trigonométricas?
5. Al encontrar valores que aumentan y disminuyen (según las preguntas 7 y 8 de la actividad) ¿Qué puede inferir de los cambios que se dan entre las coordenadas x y y?

6. ¿En qué momento de la construcción fue posible visualizar los valores máximos y mínimos?

7. Si se comparará la distancia vertical que genera cada uno de los puntos construidos ¿Qué puede decir de estos valores al considerar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la actividad anterior (preguntas 7 y 8)?

8. Respecto a la tabla que relaciona los valores de x (longitud de arco); los valores de y (valores del $sen\ x$) y la razón media. ¿Cómo son los valores al compararse? ¿aumentan o disminuyen?. Explique detalladamente su respuesta

9. Al observar la tabla que relaciona las tres variables (anteriormente mencionadas). Defina los intervalos de crecimiento y decrecimiento para los valores en la coordenada de Y (la cual define el sen x) y la del valor de la razón de cambio. ¿Qué puede concluir de esto?

10. ¿Cómo encontró la manera de continuar el grafico más allá de lo determinado por la construcción?

11. ¿Existe algún arreglo en la construcción para desarrollar la gráfica en los números negativos?

El objetivo general de la entrevista fue identificar cada uno de los comportamientos ligados a las acciones mentales para así situar al estudiante en el nivel correspondiente de razonamiento Covariacional.

3.1.3 Relación de la entrevista y las preguntas auxiliares para la construcción respecto a las acciones mentales del razonamiento covariacional

A partir de la primera actividad se pudieron determinar los conocimientos que tenían los estudiantes esto hizo posible la confrontación con la entrevista. Con base en esto se estableció la tabla 5 la cual permite observar las relaciones de cada uno de los ítems tanto de las preguntas y de la entrevista con las descripciones de las acciones mentales:

Tabla 5.

Relación de la entrevista y preguntas auxiliares con el razonamiento covariacional.

Acción mental	Descripción de la acción mental	Literales de las actividades (actividad y entrevista) en lo que se espera el comportamiento de la AM
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra	¿Qué tipo de bosquejo visualizas?, ¿Consideras que hay alguna variación? Si es así; ¿Cómo describirías la(s) variación(es)? (**preguntas auxiliar dos**) ¿Cómo describiría el movimiento de la gráfica?, ¿Cómo cambia esta?, ¿con respecto a que cambia? (**pregunta tres de**

		la entrevista)
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable	¿Qué papel juegan las coordenadas x, y en la construcción anterior? Explique ampliamente. (**pregunta auxiliar cinco**) Con base en cada uno de los pasos para la construcción de la gráfica (curva) anterior, analiza los valores encontrados para las coordenadas que determinaron dicha gráfica (curva) y que fueron establecidos durante el mismo proceso de construcción. ¿Qué puedes inferir?, ¿Cómo son cada uno de estos valores al compararse entre sí? (**pregunta auxiliar siete**) Al encontrar valores que aumentan y disminuyen (según las preguntas 7 y 8 de la actividad) ¿Qué puede inferir de los cambios que se dan entre las coordenadas x y y? (**pregunta cinco de la entrevista**) ¿En qué momento de la construcción fue posible visualizar los valores máximos y mínimos? (**pregunta seis de la entrevista**)
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable	Observa la gráfica de izquierda a derecha, ¿puedes visualizar donde crece y donde decrece la misma?, describe los intervalos donde sucede lo anterior. a) intervalos cuando la gráfica es creciente. b) intervalos cuando la gráfica es decreciente (**pregunta auxiliar ocho**) Describe los valores máximos y mínimos de la gráfica, determinados durante la construcción de la misma. (**preguntas auxiliar nueve**) Si se comparara la distancia vertical que genera cada uno de los puntos construidos ¿Qué puede decir de estos valores al considerar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la actividad anterior (preguntas 7 y 8)? (**pregunta siete de la entrevista**)
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada	Con base en valores (coordenadas x y y) que determinan la gráfica (curva), construir una tabla y determinar la primera razón de cambio. (**pregunta auxiliar diez**) Con base en la comparación uno a uno de los valores de la primera razón de cambio: ¿Puedes relacionar los valores de la tabla con la construcción de la gráfica (curva) inicial? Describe ampliamente. ¿Qué relación identificas entre los valores de la primera razón de cambio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica? Explique detalladamente su respuesta. (**pregunta auxiliar once**)
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios	¿Qué harías para continuar el gráfico sobre la parte negativa del eje x? ¿Es posible graficar la función sobre todo el eje x?

	continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función	Explica ampliamente tu respuesta. (**pregunta auxiliar doce**) ¿Cómo encontró la manera de continuar el grafico más allá de lo determinado por la construcción? (**pregunta diez de la entrevista**) ¿Existe algún arreglo en la construcción para desarrollar la gráfica en los números negativos?(**pregunta once de la entrevista**)

La tabla 5 muestra la relación de cada uno de los elementos presentes en los instrumentos de exploración respecto a la descripción de cada una de las acciones mentales, las cuales hacen posible llevar al estudiante a un nivel determinado de razonamiento Covariacional.

Referente al aspecto Covariacional se buscaba que en la construcción y en el diálogo con el estudiante emergieran las siguientes características claves para la identificación de los comportamientos que relacionaban las acciones mentales y los niveles; estos se identifican a continuación:

Acción mental uno (AM1)

La figura 2 muestra una visualización de las variables que se pueden determinar en la construcción guiada con el propósito de identificar el comportamiento que desencadena la **AM1**. Las variables que se logran relacionar en la figura muestran la traslación de la longitud del arco sobre el eje de las abscisas (esté representado de color rojo) y la proyección dirigida de este sobre el eje de las ordenadas (representado en azul). La relación de estas dos variables determina la concepción de una.

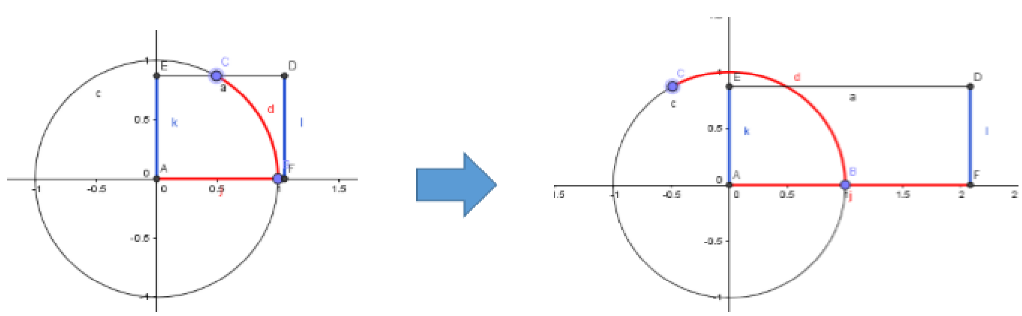


Figura 2. Experiencia visual esperada en la AM1: Verbalización de las variables

*Acción mental dos (**AM2**)*

Para el comportamiento de la **AM2**, se pretende que los estudiantes identifiquen el aumento o disminución en los valores de salida del $sen\ x$ considerando cambios en los valores de x (ver figura 3).

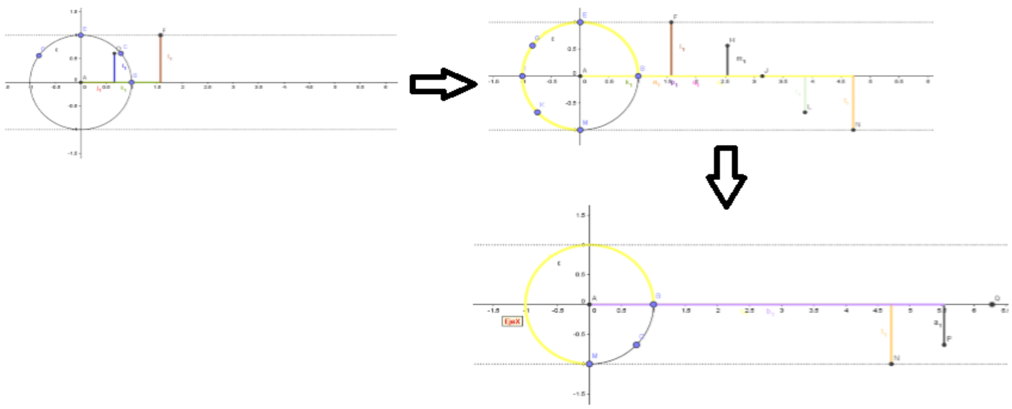


Figura 3 representación visual del comportamiento de la AM2.

La figura 3 permite visualizar una caracterización de la manera en la que se pretende que emerja en los estudiantes el comportamiento de la **AM2**, determinándose en la figura imágenes que permiten determinar algunas nociones como el rango, dominio e intervalos de crecimiento o decrecimiento, en general.

*Acción mental tres (**AM3**)*

La cantidad de cambio que determina el comportamiento de la **AM3** se consolida a través de las acciones mentales antes establecidas y lo expresado por el estudiante hasta este momento. A través de la figura 4 se visualiza la manera de caracterizar la cantidad de cambio de una variable codependiente de otra, por cantidad se entiende al número correspondiente a la altura que proyecta el $sen\ x$ (posición vertical) a medida que se establecen cambios en la longitudes de arco, por ejemplo; que el estudiante logre establecer tamaños máximos para dichos cambios en la longitud de arco e inferir regularidades que permita determinar dichos aspectos.

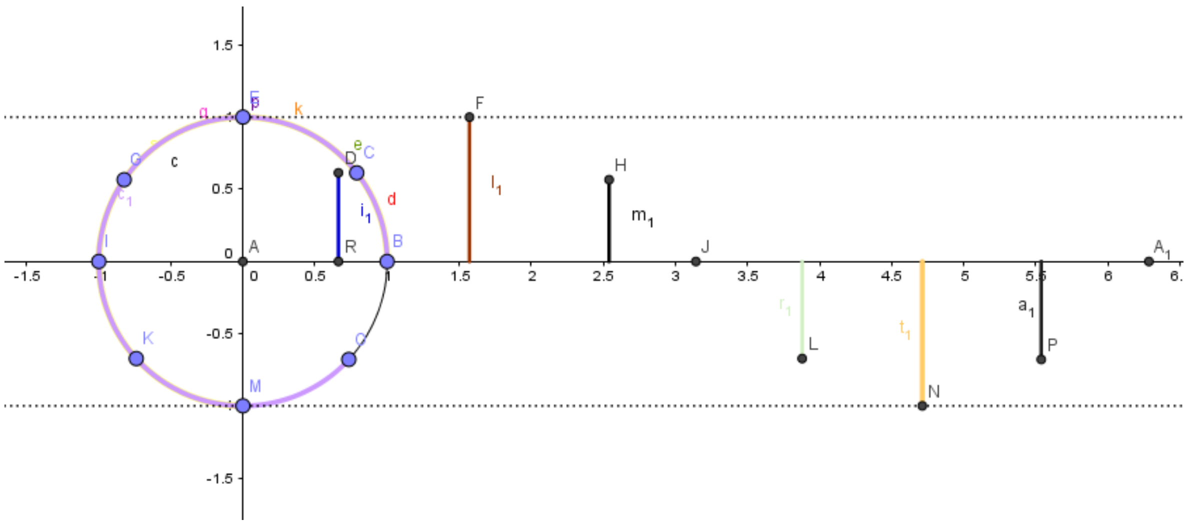


Figura 4. Representación visual de la AM3.

*Acción mental cuatro (**AM4**)*

Del comportamiento de la **AM4** se desprende la figura 5 la cual permite que se visualice la manera en la que el estudiante pudo determinar la razón de cambio. A través de la figura 5 es posible inferir el comportamiento de la **AM4**. En esta se determinan los primero valores para después inferir a partir del algoritmo de la razón promedio dicha razón de cambio determinada en el valor de la longitud del arco y la cantidad de altura que representa el $sen\,x$. Es a partir de esto donde se espera que el estudiante puede representar cognitivamente cantidades de cambio para determinar de manera consciente aumento o disminución en dichas razones, relacionando la columna No. 3 de la tabla con la gráfica de la función seno. Los segmentos verdes indican que existe una relación inversa entre el crecimiento de la función seno y la razón de cambio, ya que a medida que la curva crece su razón de cambio disminuye y viceversa.

Longitud del arco (valores en x)	Altura de la proyección sobre el eje y de la altura que determina con este	Razón de cambio (Uno respecto a otro)
0	0	No aplica
1	0.84	0.84
…	…	…
…	…	…

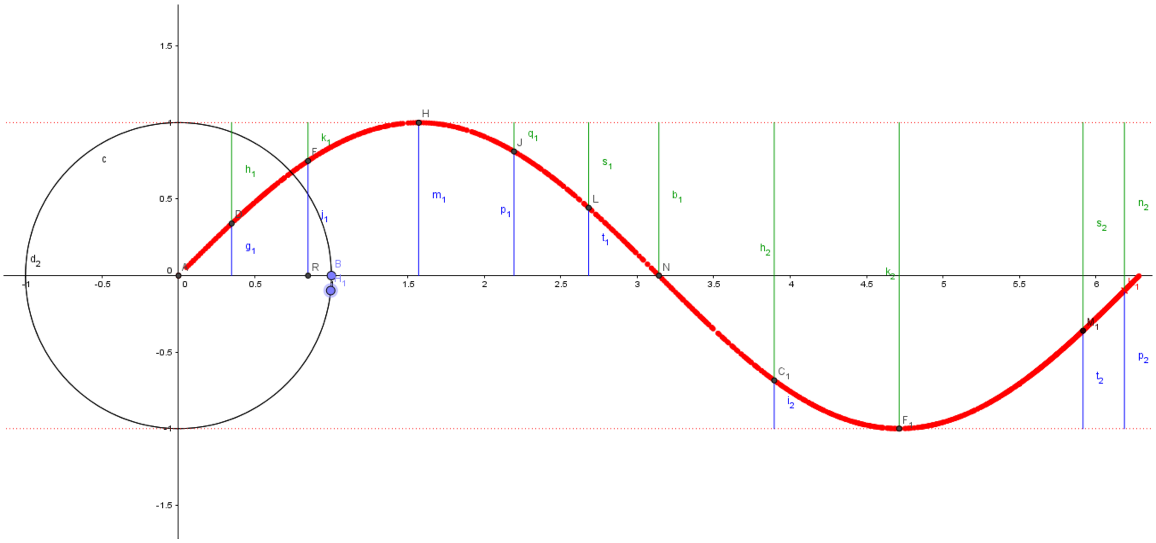


Figura 5 representación visual de la razón de cambio promedio

*Acción mental cinco (**AM5**)*

Por último, la **AM5** representada en la figura 6 permite determinar la función a partir de sus cambios instantáneos, esto visto con el desarrollo de la curva del $sen\ x$.

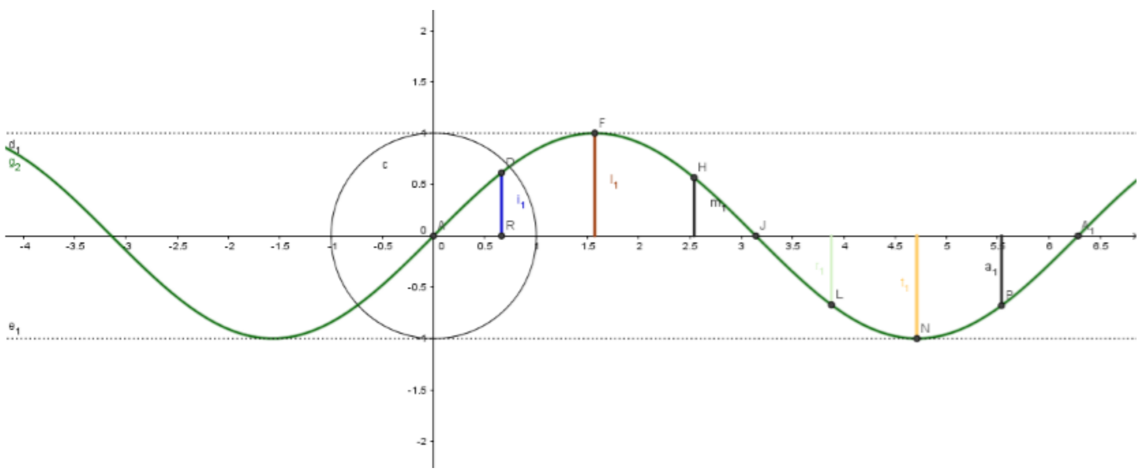


Figura 6 representación visual de la relación del cambio instantáneo en la curva y la continuidad en la curva de la función seno.

En la figura 6 la determinación del comportamiento está condicionado al reconocimiento de la función trigonométrica seno y a su periodicidad de manera que la construcción muestre la Covariabilidad entre la longitud de arco y la altura de proyección sobre el eje y.

3.2 Aplicación de los instrumentos de exploración

3.2.1 Investigación cualitativa: el estudio de casos

La investigación es de carácter cualitativo, el objetivo principal de este tipo de exploraciones cualitativas radica en tratar de comprender desde una percepción definida y un contexto natural la interpretación de personas, esto con el fin de darle sentido a fenómenos que estos desarrollen (Carvajal, 2008); (Rodríguez, 1996).

El método por el cual se desarrolló la investigación se denomina estudio de casos. Este, muy utilizado en investigaciones de tipo cualitativo ya que su principal fortaleza radica en medir y registrar conductas de personas que se involucran con el fenómeno que se estudia. Una de las cualidades del estudio de casos muestra que este tipo de método sirve como herramienta particularista orientada a comprender la realidad singular, es por ello que una de las funciones primordiales de este tipo de técnica investigativa toma casos particulares mas no generales, permitiendo estudiar y profundizar sobre situaciones específicas. Respecto a esto Martínez (2006) afirma:

> Las investigaciones realizadas a través del método de estudio de caso pueden ser: descriptivas, si lo que se pretende es identificar y describir los distintos factores que ejercen influencia en el fenómeno estudiado, y exploratorias, si a través de las mismas se pretende conseguir un acercamiento entre las teorías inscritas en el marco teórico y la realidad objeto de estudio (p.171).

La presente investigación buscó aportar a través de la exploración de un caso particular la generación de conocimiento respecto a la teoría, es decir generar conocimiento en el campo de la educación matemática a través de los estudio particulares de tres casos (específicamente) lo cuales permitieron aportar a problemáticas que involucran las funciones trigonométricas, especialmente la que tiene que ver con la función seno y el marco conceptual que involucra concretamente el razonamiento Covariacional.

3.2.2 Aplicación de la construcción con base en el software geogebra

La aplicación que se hizo de la construcción a través del software geogebra fue hecha sobre un grupo de seis estudiantes de segundo año pertenecientes al programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero en Chilpancingo estado de Guerrero, México. Con dicho grupo se realizó un seguimiento continuo respecto a la construcción, en esta se propuso la función trigonométrica seno a través de aspectos de tipo Covariacional. La experiencia estuvo orientada a través de una base teórica del Razonamiento Covariacional (Carlson et al. 2002 & Moore 2014) enfocada en la manera en como el uso del software dinámico promueve dicho razonamiento.

La tarea se presentó a los estudiantes a través de dos fases, estas consistían primeramente en la construcción de la curva a través de unas instrucciones las cuales iban incorporando los comandos geométricos y las imágenes que se iban generando a medida que se atendían dichos pasos (anexo 3). Entre los elementos que utilizaron los estudiantes destacan el uso de computadores (uno por estudiante) y la construcción guiada. Basta aclarar que antes de la ejecución del diseño se indago respecto al uso del Geogebra a lo cual los estudiantes aseveraron de que no era muy conocido; razón por la cual los investigador abordaron la muestra de los comandos básicos del programa en una sesión de aproximadamente 15 minutos.

La segunda parte involucró preguntas que relacionarían la construcción con las nociones básicas que los estudiantes tenían de las funciones trigonométricas, la sesión duro alrededor de media hora y durante su transcurso fue común el acompañamiento del investigador para resolver las diferentes cuestiones que se iban presentando. Cada uno de los puntos de la segunda sesión abordó las consideraciones básicas y los aspectos covariacionales que se explicitaron anteriormente.

3.2.3 Aplicación de la entrevista

Para la aplicación de la entrevista se consideraron tres estudiantes, para la toma de datos fue necesario el uso de una videograbadora, una computadora y las preguntas iniciales que se abordaron, se resalta además la implementación de preguntas abiertas dado el tipo de entrevista la cual es semiestructurada.

En el momento de la aplicación cada uno de los estudiantes paso de manera individual, el tiempo de la entrevista tardo alrededor de 45 minutos por cada uno y las preguntabas fueron contrastadas con una breve aplicación del diseño a través de la computadora que se disponía, es decir que cada uno de los estudiantes realizo un recordatorio de lo hecho en la primera sesión para después capturar a través de sus argumentos los conocimientos básicos y las nociones que estos podían disponer de los diferentes aspectos Covariacionales.

3.3 Algunos alcances y limitaciones

Aunque la propuesta genera entusiasmo en parte de los estudiantes, el propósito principal fue identificar algunas características que permitieran esquematizar en estos los niveles de su razonamiento Covariacional, al relacionarlo con las habilidades y conocimientos que estos ya tenían para así involucrarlos con los diferentes procesos y formas de trabajar pertenecientes a la Covariación, hay que aclarar que esta experiencia no es una generalización, ni muchos menos aseverar la misma racionalidad para todos los estudiantes.

La muestra aquí descrita, refiere a características específicas dentro de sus procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que estos pertenecen a un cúmulo específico de la comunidad educativa; y aunque las actividades que se presentan generan en ellos inquietudes de características conceptuales y analíticas, es factible afirmar que se promueve en estos desarrollo de razonamiento Covariacional asociado al concepto de función seno, utilizando como medio el software educativo geogebra, el cual les permite visualizar las características intrínsecas de la co-dependencia de las variables así como entender de una manera continua el significado de la función seno en el dominio de los reales.

Capítulo 4

Resultados

A continuación se presentan el análisis y los resultados que se dieron a partir de los instrumentos que condujeron a la materialización del objetivo, el cual implicaba identificar y describir los niveles de razonamiento Covariacional presentados por tres estudiantes de la licenciatura en matemáticas al enfrentarse a situaciones de variación ligadas a la función seno. En el análisis se destacan los comportamientos, las acciones mentales y los niveles de razonamiento covariacional que presentaron dichos alumnos del segundo año de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro). En este capítulo se describen dos momentos; con el primero se determinó el reconocimiento de aspectos relevantes en la función y con el segundo se indagaron sobre los comportamientos propuestos, los cuales permitirán reconocer las acciones mentales y por ende los niveles de razonamiento covariacional.

De las concepciones de los estudiantes que fueron factibles de identificarse respecto a la función seno, se destacan consideraciones nemotécnicas donde abordan el concepto desde lo que retiene su memoria, esto se da al contrastar las respuestas iniciales que dejan ver en el principio de la entrevista. En estas se pueden identificar como se reivindica lo memorístico, por ejemplo al considerar el dominio y el rango o la forma en la que se comporta la curva, sin determinar razones, ni considerar causas de la posible relación de las variables que hacen posible la determinación de la función. Es a partir de esto que el reconocimiento de la curva se determinó sobre estas nociones iniciales que permiten inferir sobre la determinación de la función por parte de tres estudiantes que a lo largo del estudio se reconocerán como **A, B y C,** y el investigador-entrevistador con la letra **S.**

Estudiante A:

El estudiante *A* logra identificar la forma de la curva, además de unas nociones características propias de la función. En la figura 7 se muestran evidencias que respaldan lo descrito.

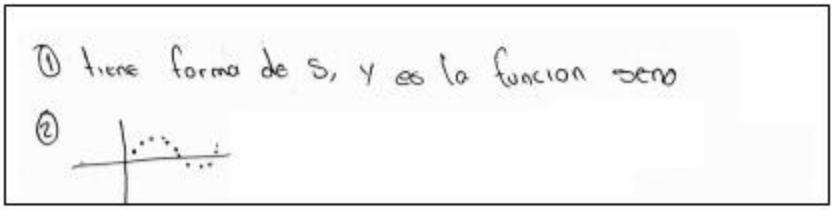


Figura 7. Producción escrita del estudiante A.

En el dibujo que hace el estudiante de la curva (ver figura 7) es posible observar la parte de la gráfica que se construye a partir de seguir la secuencia de instrucción. En el diálogo que expresa el estudiante a través de la entrevista es posible percatarse del reconocimiento de la gráfica de la función seno.

S. Con sus palabras podría describir ¿En qué consistió la construcción que realizó en el software Geogebra?

A. En tener la circunferencia unitaria y en ir trazando arcos de circunferencia, paralelas al punto donde terminaba el arco de circunferencia con la recta x= longitud de la circunferencia, su intersección ir haciendo más puntos hasta ver que función se formaba.

S. ¿logro reconocer la gráfica?

A. Si es el seno.

S. ¿Por qué dices que es la gráfica de la función seno?

A. ***Para empezar porque pasaba por el punto del origen o comienza del origen, además la función seno tiene como forma de gusanito que va haciendo zigzag y así se va describiendo el movimiento de esta función al ir trazando los puntos.***

La entrevista permitió ratificar algunas consideraciones esenciales de las características de la función presentes en el estudiante A, determinadas también a través de aspectos visuales realizados o producidos por el mismo estudiante. Es factible establecer la manera en cómo el estudiante caracteriza la forma (la representación visual de la curva) y algunas nociones relevantes del gráfico construido, un ejemplo de ello es considerar el punto de origen cómo perteneciente a la gráfica de la función e involucrar rasgos observables e intuibles cómo la forma ondulada de la misma.

Estudiante B:

El estudiante *B* logra determinar la relación de la curva con la función seno, estableciendo comparaciones a partir de lo que percibe y reconoce de su experiencia. Considera el patrón que conlleva los puntos y relaciona directamente la pertenencia de estos a la curva determinada en la construcción. En la figura 8 se pueden observar afirmaciones que el estudiante realiza, surgidas estas con apoyo de las preguntas auxiliares.

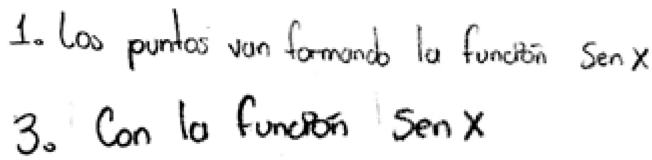


Figura 8. Producción escrita del estudiante B.

En el diálogo que se logra con el estudiante durante la entrevista, fue factible de reconocer y entender el enlace de los puntos determinados con la construcción de la función seno, realizado por el estudiante B.

> S. ¿Cómo es posible la construcción de los puntos sobre la curva?
>
> B. ***Es posible gracias a la longitud del arco, a un punto arbitrario sobre la circunferencia que me determinaría la paralela y su punto de intersección del arco trasladado sobre el eje y, eso me generaría los puntos que van sobre la curva construida.***
>
> S. ¿Qué gráfica logras reconocer del desarrollo de la construcción?
>
> B. ***La función seno de x.***

La conversación muestra como el estudiante afirma y reconoce que los puntos construidos a través del diseño son pertenecientes a la curva. Este reconoce el contexto sobre el que se construyen los puntos de la construcción, el cual precisa a la circunferencia unitaria.

Estudiante C:

Igual que los estudiantes anteriores, el estudiante C reconoce la curva y logra registrar una especie de patrón (según lo enuncia) al considerar la manera en la que se acomodan los puntos, siguiendo la forma de la función seno.

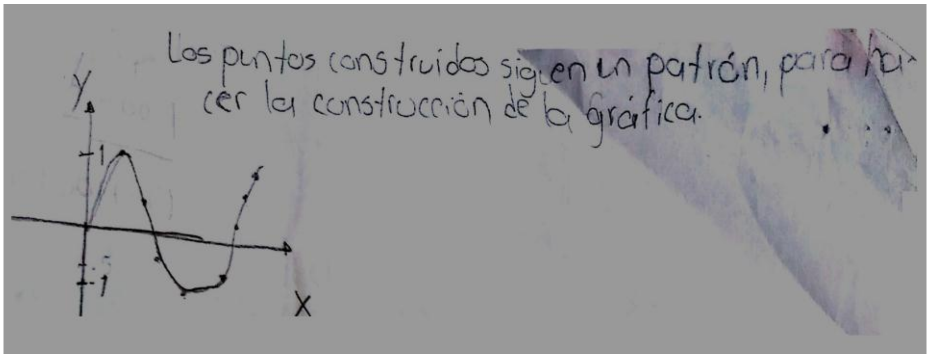


Figura 9. Producción escrita del estudiante C

La figura 9 deja entrever el reconocimiento de la gráfica de la función seno, además de determinarse por lo menos de una manera visual el rango de dicha función a través de los puntos establecidos con base a la construcción y al considerar valores más allá de los establecidos de la tarea. El diálogo con el investigador permite consolidar esta postura.

S. ¿Qué grafica logras reconocer del desarrollo de la construcción?

C. ***la gráfica que identifique dentro del ejercicio fue la que correspondía al seno de x.***

S. ¿Por qué dices que es el seno de x?

C. ***Lo empecé a notar a partir de la construcción de varios puntos… 5 o 7 si fueron varios puntos los que construí. Entonces por su forma y por unos conocimientos que ya he tenido durante el transcurso de los cursos identifique pues de inmediato que era esa función.***

S. ¿Cómo aseveras que es la función seno?

C. ***por intuición más que nada, pero también por la forma en cómo se comporta la función. Por ejemplo toca en pi, que era creciente en pi medios era decreciente en menos pi medios, en fin por la forma en como yo la vi visualizando.***

S. ¿Qué representa el valor de pi en la construcción?

C. π ***para mi representa los puntos donde la gráfica seno de x toca.***

El estudiante logra reconocer la función y la gráfica de esta a través de la construcción guiada afianzándolo a partir de la experiencia ya establecida sobre este, el diálogo con el investigador permite que se identifiquen nociones que se entrelazan con la experiencia que el estudiante parece llevar y la determinación de los puntos que realiza a través de la construcción. La noción de la función seno que se identifica del desarrollo de la actividad deja ver que los valores determinados en las imágenes (según identifica el estudiante) surgen en función de Pi y sus múltiplos como cortes en el eje de las abscisas.

Los resultados de las nociones iniciales establecidas por los estudiantes permiten respaldar la orientación de la construcción, la cual está encaminada directamente sobre el concepto de función seno. Los argumentos que logran afianzar se fundamentan a partir del reconocimiento de los puntos construidos y demás características las cuales se han podido establecer a través de la experiencia que como estudiantes han logrado a lo largo de sus vidas académicas. Dichos resultados involucran contextos comunes, que directamente no se determinan sobre la construcción, pero que de alguna manera logran relacionar un vínculo con esta.

4. 1 Análisis de los resultados.

Para el análisis de los resultados se determinarán en conjunto los diferentes desarrollos que tienen los estudiantes alrededor de las actividades que se ciernen en la investigación, en una fase inicial estos logran evidenciar la curva de la función, además de reconocer algunos aspectos relevantes determinados por la construcción y la relación directa de la experiencia establecida en ellos. A continuación se relacionarán cada uno de los estudiantes a partir de sus nociones iniciales y los comportamientos ligados a las acciones mentales que permitirán identificar los niveles del razonamiento covariacional.

En el siguiente apartado se muestra el análisis de cada uno de los comportamientos propuestos en el marco conceptual para el establecimiento de los niveles del razonamiento covariacional. De manera general se determinaron las diferentes exploraciones y descripciones que tienen los tres estudiantes, comparando dichas situaciones con lo establecido en la tabla 4 (ver cap. 2 página 23); logrando identificar los niveles de razonamiento covariacional en los estudiantes.

4.1.1 AM1: Coordinación del cambio.

Para la **AM1** se concibieron aspectos que relacionaban la identificación de las variables en la construcción. El estudiante mostraba comportamientos donde reconocía geométricamente la longitud de arco y la proyección dirigida sobre el eje *y* los cuales permitían la visualización de la gráfica de la función seno. La figura 10 nos muestra un tanto la relación determinada.

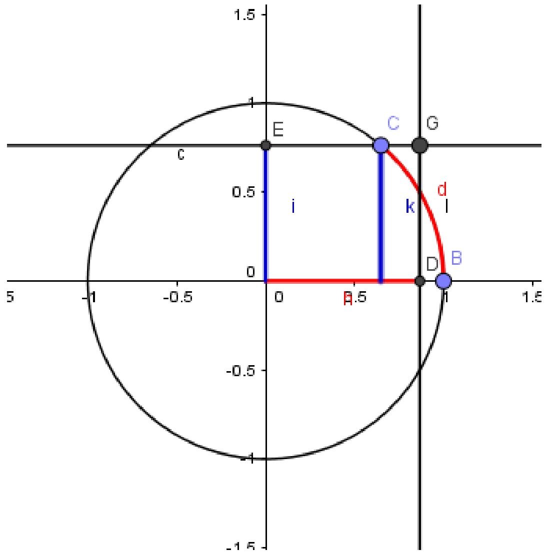


Figura 10. Variables determinadas en la construcción (AM1) La figura 10 permite reconocer las variables que son factibles de identificar, estas determinadas por la manipulación que hace el estudiante en la construcción. El segmento en rojo sobre el eje de las abscisas determina la traslación de la longitud del arco (también en color rojo). El segmento en azul sobre el eje de las ordenadas la longitud dirigida del arco, es decir la proyección del punto donde termina el arco y la medida de este (también representado en color azul). El objetivo de la construcción es determinar el punto G el cual pertenece a la curva de la función seno.

A continuación se establece el reconocimiento de la coordinación de las variables en cada uno de los estudiantes.

Estudiante A:

Para la determinación de la primera de las acciones mentales, el estudiante *A* debía reconocer las variables en la construcción, el diálogo permite que se logren contemplar los cambios de la construcción esto al vincular la curva directamente, lo cual permitió ver un acercamiento de la variabilidad, identificando lo fundamental del cambio en la longitud del arco. Se pueden establecer cada una de las nociones presentes del estudiante referidas a la función seno, esta de una manera cualitativa.

En la construcción el estudiante *A* logra relacionar dichos cambios a la variabilidad del arco y a la altura de la proyección dirigida a partir de la circunscripción de este en la circunferencia, señalando la otra variable de manera cualitativa y mostrando que este se da de manera descriptiva a través de la caracterización de aspectos que conlleva el diseño.

S. ¿Cómo cambian los puntos de la construcción? ¿Con respecto a que cambian?

A. Con respecto a la medida del arco

S. ¿Solamente con respecto a la medida del arco?

A. También con respecto a la medida donde termina el punto del arco con respecto al eje x

S. ¿Eje x? [El entrevistador intercede para que el estudiante aclare su punto]

A. Eje y perdón.

Se puede ver como durante el diálogo el estudiante *A coordina* los cambios de una variable con los cambios en la otra, según Carlson et al. (2002) y el comportamiento que sugerimos para la tarea, es posible ver en el estudiante la **AM1** ya que básicamente responde a identificar el *¿Qué es lo que cambia?* A partir de esto se reconoce el **N1** del razonamiento covariacional en el estudiante

Estudiante B:

Igual que el caso anterior, el estudiante *B* podrá enmarcarse en un **N1** de razonamiento covariacional, si logra registrar las variables consolidadas en el desarrollo de la construcción. Durante el diálogo que este logra tener con el investigador, logra determinar dicho par de variables a partir de la experimentación con el software

S. En la construcción que acabas de hacer [se interactuó con una pequeña parte del diseño al realizarlo sobre una computador que el investigador-entrevistador le disponía para la resolución de las preguntas] como se realizan los puntos negros que son posibles de visualizar [en este momento se refiere a los puntos que están sobre la curva]

B. ***Los hicimos como te digo, tomamos el centro en (0,0) y este punto [se refiere al punto sobre el cual se hizo la construcción de etiqueta B] después tomábamos este punto arbitrario; digamos C [este punto no es uno cualquiera pertenece a la circunferencia unitaria siendo el extremo donde termina el arco] y calculábamos la distancia…este tomábamos la medida del arco trazando una paralela***

S. ¿Paralela a quién? o ¿Con respecto a qué?

B. ***Paralela al eje x pero pasando por ese punto C***

S. ¿Qué representa ese punto C en la construcción?

B. ***¿La medida del arco? La longitud del arco***

S. La longitud del arco es la que tu trasladas sobre el eje x y que trasladas a partir de una recta paralela al eje y ¿cierto?

B. ***Si.***

S. Pero luego me dijiste que haces una paralela al eje x que pase por un punto ¿para qué es necesario hacer esa paralela?

B. ***Para que al usar hagamos un punto de referencia***

S. ¿Qué me representa en la construcción esa paralela?

B. ***El crecimiento o decrecimiento de la curva***

Su conversación con el entrevistador-investigador deja entrever el reconocimiento del par de variables, reconociendo primero la longitud del arco, la cual se establece por la traslación de la medida de este sobre el eje x. Para la segunda de las variables se precisa que el estudiante familiarice la traslación de la magnitud dirigida del arco sobre el eje y, trasladando su medida. La estudiante llama a esta variable punto de referencia y se corresponde directamente con lo establecido en el párrafo anterior, es decir que las variables son consideradas y se reconocen como parte del comportamiento de la **AM1** perteneciente al **N1**

Estudiante C:

El reconocimiento de las variables que el estudiante *C* logra determinar en sus nociones previas hace que en un primer momento este escriba sobre consideraciones estrictamente visuales y exploradas. La figura 11 permite respaldar lo anterior

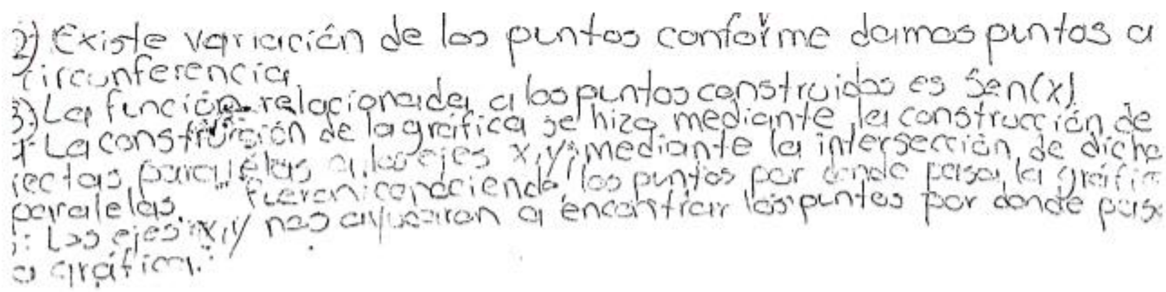

2) Existe variación de los puntos conforme damos puntos a circunferencia.
3) La función relacionada a los puntos construidos es Sen(x)
La construcción de la gráfica se hizo mediante la construcción de
4 La construcción paralelas a los ejes x, y, mediante la intersección de dicha rectas paralelas fueron apareciendo los puntos por donde pasa la gráfica paralelas.
5: Los ejes x, y nos ayudaron a encontrar los puntos por donde pasa la gráfica.

Figura 11. Evidencia del comportamiento de la AM1 en el estudiante *C*.

La imagen permite que se reconozca de una manera visual cada una de las instrucciones de la construcción, determinando la variabilidad en esta (sin saber hasta ese momento que variables se determinan), además de reconocerse algunos conceptos geométricos que se ligan a la variabilidad. En el diálogo puede identificarse como el estudiante establece el par de variables

S. Paremos un momento, se supone que la intersección del par de rectas me da el punto perteneciente a la curva. ¿En la construcción que representa la variable *x* y la variable *y*?

C. ***La variable x este representa nuestro arco de circunferencia, bueno en la variable x se***

traslada la longitud. La variable y podría representar que tanto se corre la curva

S. ¿Qué es la variable *y* en la construcción?

C. ***Es la medida que se traslada del centro de la circunferencia a la proyección del arco sobre el eje y***

S ¿Cuáles son las variables que uno puede visualizar de la construcción?

C. ***las variables a considerar serian primero el arco de la circunferencia y después la distancia que trasladamos del punto de origen al punto que trazamos sobre la circunferencia.***

A través del párrafo anterior, el cual fue sustraído de la entrevista es coherente considerar como llega a la determinación del par de variables por lo que es factible de visualizar el comportamiento de la **AM1**, el estudiante logra examinar de una manera exánime el par de variables asignadas para la construcción de la función. El nivel de razonamiento del estudiante es el de coordinación **N1.**

En general las producciones de los estudiantes ratifican los comportamientos de la **AM1**. Cada uno de ellos logra reconocer las variables así como la relación de estas, determinando los puntos que pertenecen a la curva de la función seno reconociendo causas que lo desprende así como la visualización geométrica de dicho par de variables

4.1.2 AM2: Dirección del cambio.

Para consolidar el comportamiento de la **AM2** en los estudiantes se debe determinar la forma de la curva, direccionar las variables para la posterior manipulación de ellas. En la figura 12, se muestran características que conllevan a identificar el comportamiento de está en el estudiante.

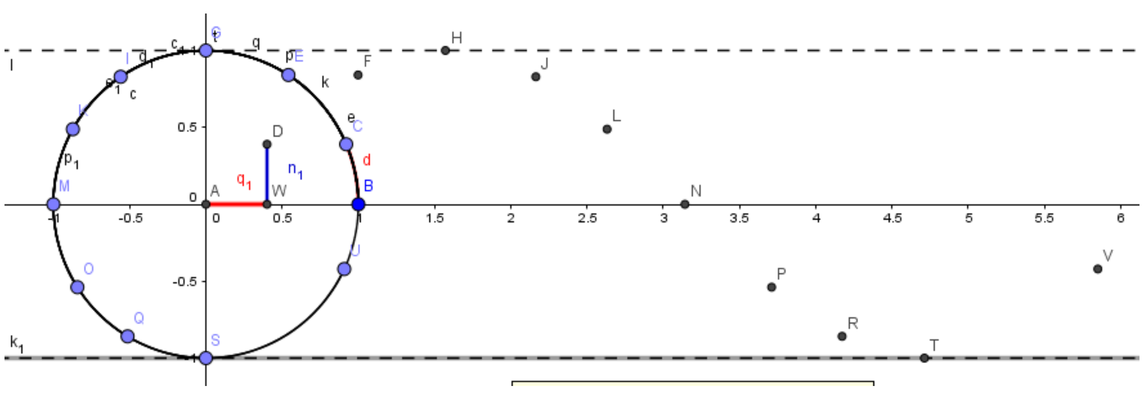


Figura 12. Dirección de las variables (AM2) El comportamiento de la **AM2** lleva a identificar nociones de crecimiento y decrecimiento en la curva, así como consideraciones respecto al rango de la función y su dominio. Las acciones mentales de Carlson et al. (2002) siempre se generan de manera evolutiva razón por la cual el reconocimiento de comportamientos anteriores deberá estar enmarcados de manera implícita.

A continuación se determina la dirección del cambio identificada en cada uno de los estudiantes:

Estudiante A:

Para relacionar la AM2 con el estudiante *A* respecto del trabajo desarrollado por él, es necesario que este identifique la manera de *¿Cómo?* Cambia la curva; por lo cual se considera la descripción cualitativa de la curva que se establece a través de determinar la manera ondulada de ella sin conocer los parámetros numéricos del crecimiento y decrecimiento de la misma. La figura 13 respalda lo anterior y reafirma la consideración del estudiante a partir de descripciones que hace con base en el conocimiento que ya está establecido en él.

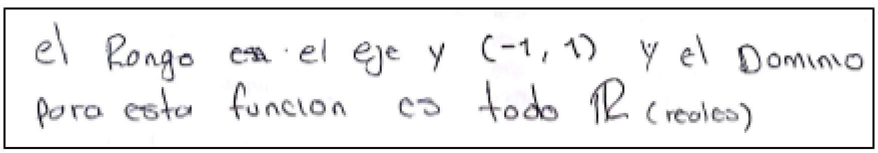

el Rango es el eje y (-1, 1) y el Domino
para esta funcion es todo ℝ (reales)

Figura 13. Evidencia de la dirección del cambio en el estudiante *A*

En la figura 13, se observa como el estudiante describe de manera rápida el rango y el dominio, temas que se abordan desde la perspectiva del cálculo en algunos cursos iniciales en la universidad. Se determina que su comportamiento se aproxime a la **AM2**, esto a partir de la descripción que hace del cómo, considerando aspectos verticales y horizontales en la curva. En el siguiente aparte del diálogo se logra identificar dicho comportamiento de la **AM2**, el cual permite inferir el **N2** de razonamiento covariacional

S. Muy bien ¿Cómo describes el movimiento de la gráfica?

A. En forma de s

S. ¿Cómo así en forma de s?

A. Como un gusanito que va bajando y luego logra subir [en ese momento señala la gráfica y con su dedo describe la trayectoria]

De manera cualitativa él estudiante logra reconocer la *coordinación del cambio de variables*, es decir, la manera en cómo cambia. En un primer instante es posible identificar a partir de la actividad que realiza un encajonamiento de la gráfica de la función, al menos el reconocimiento de ello a través del dominio de la función y su rango. En la entrevista es factible de observar cómo se describe la manera en la que la curva se representa, el estudiante asigna una forma determinada y una cualidad en la descripción del movimiento de ella **AM2**. Es preciso afirmar que se identifica el estudiante en un **N2** de razonamiento covariacional.

Estudiante B:

La dirección del cambio que logra determinar el estudiante, se relaciona directamente de lo que este plantea al considerar el reconocimiento de las variables (coordinación), este logra determinar una dirección para el cambio establecida en el siguiente sustrato del diálogo que tiene con el entrevistador-investigador

S. Ahora ¿Cómo describes el movimiento de la gráfica?

B***. Es continua***

S. ¿Cómo van cambiando los puntos?, ¿Con respecto a que cambian?

B. ***primero son crecientes y luego en un punto empiezan a decrecer, por ejemplo al comparar dos puntos en la construcción de la curva, su diferencia está dada por la longitud de arco. Si tomamos la distancia que hay de uno a otro***

Se puede determinar la manera en la que él estudiante logra direccionar el par de variables, considerando aspectos involucrados en la dirección de su movimiento, al establecer crecimiento o decrecimiento en la curva esto a partir de la correspondencia que hace de la construcción a través de la variabilidad de la longitud del arco. Se reconoce en el estudiante el comportamiento de la **AM2**, lo cual permite relacionar el **N2** del razonamiento covariacional en este.

Estudiante C:

Las nociones que el estudiante logra determinar, permite que se corroboren algunas características de la dirección con la que cada una de las variables va surgiendo, este logra determinar características que afianza a través del diseño que construye y que relaciona con su experiencia. En la figura 14 se puede observar la manera en la que al parecer el dominio de la función se identifica; aunque no es muy claro la asignación que hace del rango, ni de los intervalos de crecimiento y decrecimiento

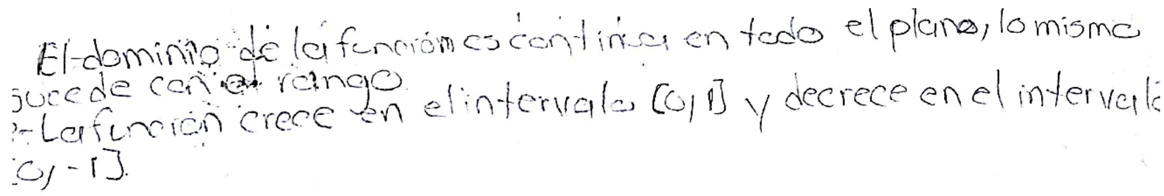

El dominio de la función es continua en todo el plano, lo mismo sucede con el rango.
- La función crece en el intervalo [0,1] y decrece en el intervalo [0, -1].

Figura 14. Evidencia de la AM3 en el estudiante *C*

La figura 14, muestra aspectos evidenciados por el estudiante a través de relacionar la construcción que se estableció para la consolidación de la función seno y la experiencia académica que en este se ha construido. Aunque logra reconocer aspectos en la tarea, esta primera consideración no aporta mucho para la identificación del aspecto que determina la dirección. Para consolidar la **AM2** se aborda el diálogo del estudiante y se le pregunta por la dirección que este signa al cambio de las variables.

> S. ¿Cómo describirías el movimiento de la gráfica?
>
> C. ***ehh la describiría como forma serpenteada, forma curveada. Sigue un mismo patrón por ejemplo [en este momento toma una hoja para representar lo que quiere decir] aquí tenemos nuestro eje coordenado, por ejemplo tenemos el uno y el menos uno. Aquí por ejemplo tenemos a pi, tenemos a pi medios, tenemos tres pi medios, tenemos dos pi (él se refiere a dos ejes que construye; el eje y determina valores entre uno y menos uno y el eje x valores de pi como los menciona), la función toca en pi y en valor dos pi, no hay mucha variación solo que sigue el mismo patrón. Podemos observar que toca en cada valor de pi; bueno en cada k pi, donde k es un entero, es donde la función toca sobre el eje de las x.***

En el aparte de la entrevista es posible identificar como el estudiante asigna dos ejes coordenados. El señalamiento del par de ejes indica una perspectiva en la que su idea del valor de pi es crucial para la relación de la función seno. El señalamiento que este hace con la gráfica de la función seno asigna características que reconoce soluciones para la función (los valores donde la función es cero), visualmente el estudiante determina dichas soluciones a aquellos valores donde la curva toca el eje *x*. La evidencia muestra una situación desligada de la construcción, al menos en la manera de concebir los ejes coordenados, aunque se reconoce la forma en que este entiende la dirección del cambio. En un primer momento su producción escrita encajona la forma en que cada uno de los valores en el eje de las abscisas debe de comportarse; situación que no es muy evidente en el eje de las ordenadas. La figura 14 muestra una afirmación equivocada en la manera de determinarse el rango, aunque en su discurso encajona los valores para el eje de las ordenadas en un intervalo que va de uno hasta menos uno [-1,1]

En otro de los apartados del diálogo de la entrevista, el estudiante reconoce la manera en la que se coordina el cambio, identificando nociones para el comportamiento que se asigna a la **AM2**.

> S. Consideras el arco de la circunferencia ¿Qué haces con ese arco de la circunferencia?
>
> C. ***Bueno el arco de la circunferencia este… buena pregunta damos como una visualización donde puede tocar ese punto más o menos porque aquí podemos visualizar [señala la pantalla del computador] que el punto por donde pasa la función siempre va a estar dentro del arco de la circunferencia es como una visualización, donde puede estar más o menos un punto donde pase esa función***.
>
> S. Visualicemos la construcción de uno de los puntos [en este momento el estudiante realiza en su construcción un punto perteneciente a la curva en el 4 cuadrante del plano y perteneciente a la circunferencia unitaria] te voy a hacer una pregunta mientras hace la construcción ¿Por qué es necesario trazar el arco de la circunferencia? ¿Por qué es importante el arco de circunferencia en la construcción?
>
> C. ***mmmm bueno lo que puedo visualizar es que el arco de la circunferencia también nos podría ayudar para saber cómo la función crece o decrece, por ejemplo aquí podemos ver como el punto de la función hace esto [con su dedo orienta el crecimiento que tendría la función de completarse los puntos] y hace el movimiento de crecer***

En su diálogo logra reconocer aspectos ligados con la construcción, se involucra la relación de las variables con el proceso de enseñanza que enlaza a la circunferencia unitaria con las funciones trigonométricas, además de vincular las características que refieren al crecimiento y decrecimiento de la curva que se asigna a la función seno. El estudiante coordina y direcciona el cambio en el experimento, los comportamientos que se asignan enlazan el **N2** para el razonamiento covariacional. Gradualmente el estudiante ha pasado de reconocer las variables del cambio involucradas en el diseño (*coordinar*) a determinar la manera en cómo cambian (*dirección*).

Se ha establecido hasta el momento aspectos que de alguna manera centran acciones mentales sobre consideraciones cualitativas en la curva, el análisis que se tiene de las producciones y el diálogo con los estudiantes logra que se identifique el nivel de dirección en los tres estudiantes, se precisa además la manera en la que las acciones mentales y los niveles se relacionan, determinando la coordinación (**AM1-N1**) y la dirección (**AM2-N2**) del cambio. Las producciones de los estudiantes permiten identificar la relación de aspectos cualitativos reconocidos a través de la construcción y de su experiencia individual.

4.1.3 AM3: la cuantificación del cambio.

La cuantificación del cambio se identifican dentro del comportamiento asociado a la **AM3**, el estudiante debe de ser capaz de reconocer en esta acción mental números que se determinen directamente sobre aspectos de cambio en la construcción, es decir que el estudiante pueda relacionar cantidades numéricas sobre la construcción que se les presenta. La figura 15 muestra una relación implícita de lo que se espera puedan los estudiantes construir.

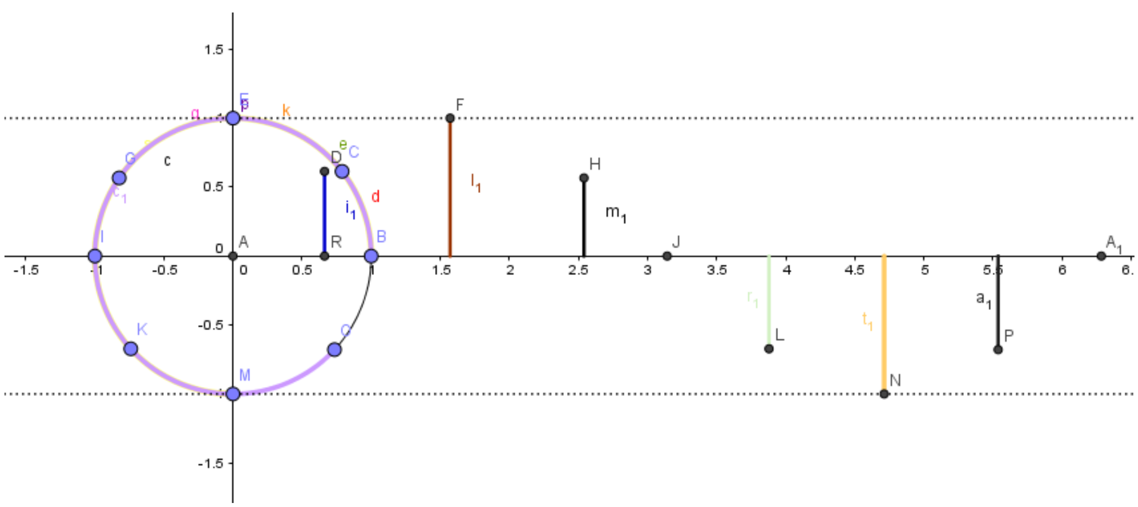


Figura 15. Coordinación cuantitativa de las variables Los aspectos relevantes en el comportamiento de la **AM3** involucra la consecución de intervalos numéricos de crecimiento, así como las variaciones que tiene el seno de la longitud de arco. El estudiante deberá construir una relación donde es factible de identificar el crecimiento o decrecimiento de la curva numéricamente, hay que recordar que los comportamientos de las acciones mentales y los niveles de razonamiento covariacional se ligan y complementan.

La coordinación cuantitativa que alcanzan cada uno de los estudiantes se determinan a continuación:

Estudiante A:

Cuando el investigador solicitó una justificación que trascendiera la evidencia cualitativa y que puntualizara valores numéricos en la construcción que relacionar como la curva sube o baja, se optó por preguntar los intervalos en que ocurrían estos; considerando las descripciones anteriores y revalidando las opiniones que surgieron de realizar las conjeturas correspondientes. En la figura 16, se determina una primera noción referida a la cuantificación de dicha variabilidad

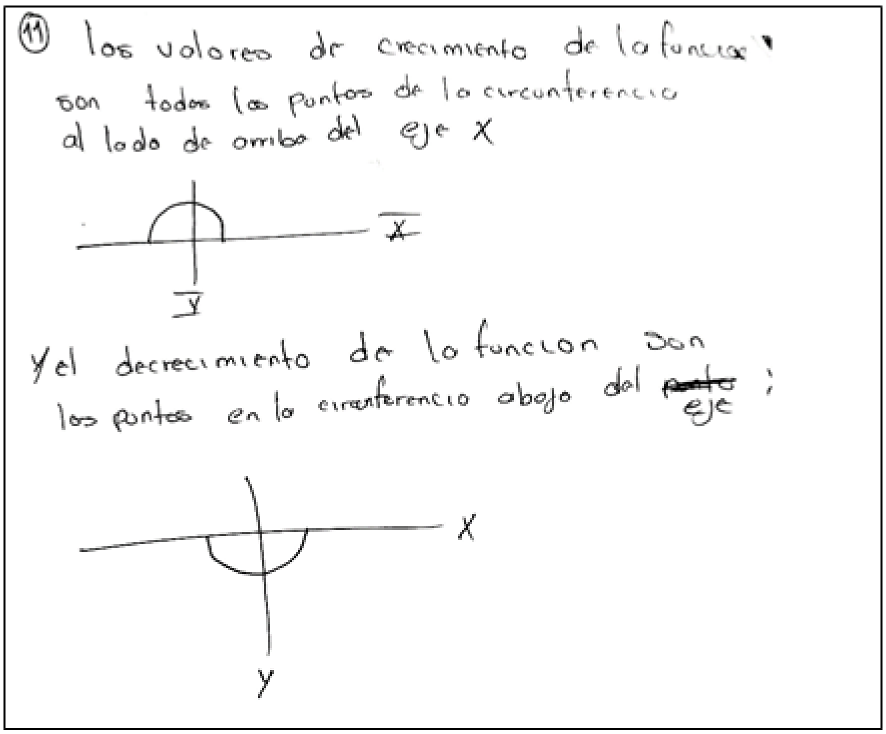


Figura 16. Evidencias de nociones para los comportamientos de la AM3

La producción escrita del estudiante permite evidenciar una relación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento relacionando directamente la circunferencia unitaria. En la figura 16 el estudiante logra percibir la codependencia en la construcción y automáticamente relaciona la curva con cada uno de los cuadrantes que son posibles de identificar para este a través de las nociones ya establecidas en él. Inicialmente se reconoce el crecimiento de los valores al conectar directamente las etapas de la construcción y entender lo que se determina a través de los puntos que se construyen sobre el primer y segundo cuadrante considerando las imágenes que se desarrollan. Para el estudiante es factible responder tomando como respaldo la experiencia que ligo del proceso de construcción propuesto en el cual asigna valores crecientes para los dos primeros cuadrantes mientras que para los últimos relaciona las imágenes de decrecimiento de la curva.

A partir de lo anterior es posible inferir los conocimientos básicos que relaciona el estudiante a la construcción, se observa como el estudiante de pregrado establece un entendimiento diferente al que inicialmente parecía concebir, permitiendo asignar otros tipos de características que surgían al deducir situaciones del cambio de variables y de la relación dacia la **AM3**:

> **S. Cada uno de los puntos describe crecimientos o decrecimientos. ¿En qué valores esta ese crecimiento o ese decrecimiento?**
> ***A. Notamos que la circunferencia de diámetro tiene 2 pi y cada punto que ponemos por arriba del eje x, va ser la parte del crecimiento de la circunferencia.***
> **S. Podrías explicar ¿A qué te refieres con los puntos que estén por encima del eje?**
> ***A. Bueno de donde comienza el círculo, digamos en el punto B hasta este otro extremo digamos hacia la parte de arriba del eje x [el estudiante señala la construcción de los puntos y se refiere a los puntos contenidos en la circunferencia que están en el primer y segundo cuadrante, específicamente a la medida del arco que es pi], para empezar cada parte de la gráfica cada pi tiene crecimiento y después de pi empieza a decrecer.***
> **S. ¿Podrías especificarlo en la construcción que tienes?, ¿Cómo lo podríamos ver?**
> ***A. Poner un punto hasta donde nosotros decimos que crece, en este caso sería en el (0,1) [él se refiere a escoger un punto sobre el primer cuadrante viéndolo desde la circunferencia]***
> **S. Hasta ese punto crecería ¿Y después de ahí?**
> ***A. Empieza a decrecer***

Se puede observar como el estudiante reconoce los intervalos de crecimiento aunque mencionando de una manera no tan precisa el par de números que se relacionaran con este, es factible considerar que existe una correspondencia por parte de este respecto al intervalo de crecimiento ya que menciona que la gráfica crece en el primer cuadrante pero no es posible de reconocer que el intervalo vaya al número pi, como lo especifica en su lenguaje. A continuación se presenta una parte del diálogo que intenta respaldar lo mencionado anteriormente

S. A partir de la construcción ¿Cuál sería el intervalo de crecimiento?

A. De cero a pi

S. ¿Cómo estás viendo a pi?

A. Como un cuarto de la circunferencia

S. ¿Qué te representa ese valor de pi?

A. Pues la relación que tiene la circunferencia con el diámetro, la relación del radio y el arco

S. ¿El decrecimiento que valores tomaría?

A. De pi hasta 3 pi medio

S. ¿Qué sería 3 pi medios en la construcción?

A. Tres cuartos de la circunferencia

A continuación se presenta la figura 17 la cual permite visualizar y entender lo que se establece el apartado de la entrevista anterior

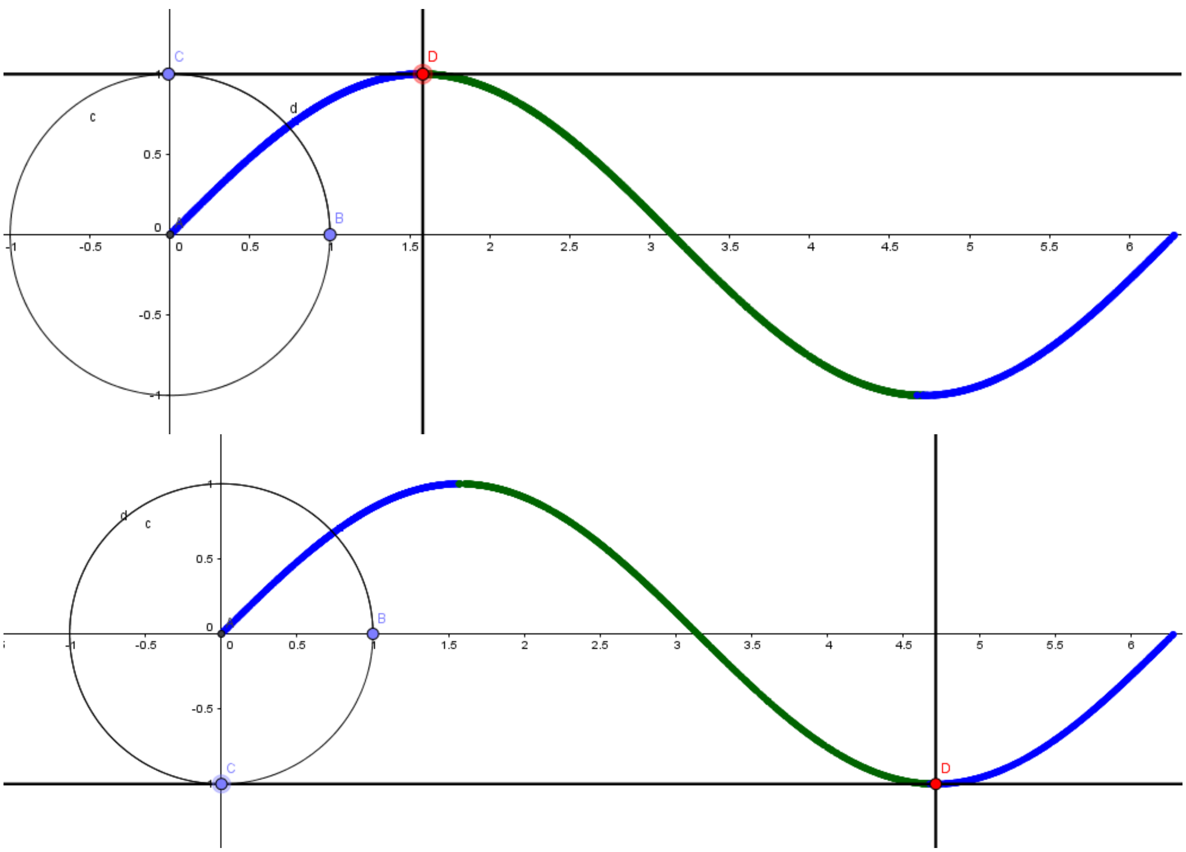


Figura 17. Visualización de la división de los cuadrantes por parte del estudiante

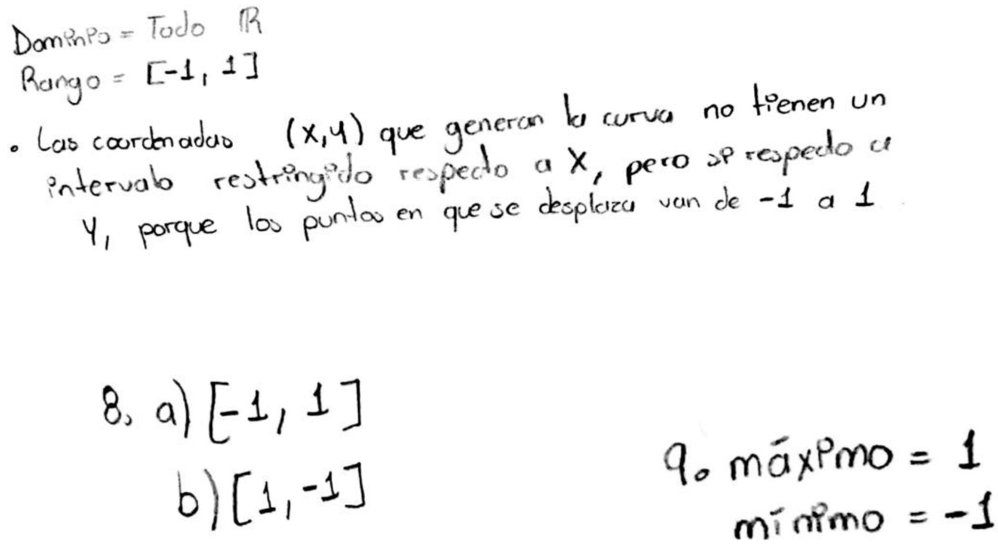
El estudiante cuantifica los cuadrantes de la circunferencia y determina los valores de crecimiento y decrecimiento que visualiza al relacionarlos con la construcción, aunque cualitativamente está bien, se destaca que la relación que intuye del término de pi y las relaciones de los cuadrantes, ya que su etiqueta lo conecta con el primer cuarto de circunferencia. La figura 17 permite que se observe la determinación hecha por el estudiante al dividir los cuadrantes y los intervalos de crecimiento, el estudiante visualiza en el primer cuadrante los valores en los cuales las imágenes de la función son crecientes; sobre el tercer y cuarto cuadrante se relacionan variaciones en las longitudes de arco (cada vez mayores) e imágenes decrecientes, cosa contraria a lo determinado en el cuarto cuadrante donde las imágenes son crecientes nuevamente. Debido a esto el entrevistador-investigador insiste en que el estudiante relaciona directamente los valores a los que muestra el programa y que permite ver números concretos, este se evidencia a continuación:

> **S. ¿Cuál es el valor numérico al compararlo en el programa?**
> ***A. 4.71***
> ***S.* En la construcción se presentan números ¿Cuál sería el valor al tomar esta especificación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento?**
> ***A. Ah ya, el crecimiento va de cero hasta 1.57***
> ***S.* ¿Y el decrecimiento?**
> ***A. 1.57 hasta 4.71***
> ***S.* ¿y no crece más la función?**
> ***A. De 4.71 a 6.2.***

Del diálogo anterior es factible determinar que se identifica en el estudiante el **N3** de razonamiento covariacional; ya que se involucran cada una de las acciones mentales anteriores (**AM1-AM2**) y la que se determina por la cuantificación del cambio, la cual corresponde a la **AM3**.

Estudiante B:

Es importante establecer que los aspectos referidos a números que relacionan el cambio se establecen a través de las acciones mentales siguientes los cuales están vinculados con la coordinación cuantitativa (AM3-N3), Razón promedio (AM4-N4) y Razón instantánea (AM5-N5). La primera de las interpretaciones que se abordaron para la cuantificación del cambio fue la que establecía el vínculo con la coordinación cuantitativa, la cual se determinó al establecer valores numéricos para diferentes cambios que ocurrían en la construcción de la función seno. El estudiante B hace consideraciones previas factibles de determinar en la figura 18.



Dominio = Todo ℝ
Rango = [-1, 1]
• Las coordenadas (x,y) que generan la curva no tienen un intervalo restringido respecto a x, pero si respecto a y, porque los puntos en que se desplaza van de -1 a 1

8. a) [-1, 1]
b) [1, -1]

9. máximo = 1
mínimo = -1

Figura 18. Producción escrita del estudiante B en relación con la AM3.

Las producciones del estudiante permiten evidenciar la caracterización cuantitativa de la curva generando primeras relaciones entre los números que conllevan características cualitativas. La figura 18 muestras rasgos implícitos de las constituciones retribuidas por el estudiante, el primer acercamiento muestra reconocimiento cuantitativo de partes que constituyen la gráfica de la curva. Expresan cualidades como valores máximos y mínimos (De la curva que construyó) y aspectos restringidos para el rango pero no para la variable que determina la longitud de arco.

Estos primeros acercamientos corresponden con el siguiente apartado donde es posible reconocer el **N3** a través del comportamiento de la **AM3**

> S. Ahora si dime el intervalo de crecimiento de la longitud de arco
>
> B. ***el intervalo de crecimiento en el eje x es de cero a 1,57***
>
> S. ¿Y el valor de decrecimiento?
>
> B***. Es 1,57 al otro valor que está aquí [señala el valor de la construcción en el cual es posible construir sobre la circunferencia la longitud de arco que determinaría el punto mínimo de la curva, este punto de la circunferencia es el (0,-1)]***
>
> S. ¿Podrías construir el valor? [en ese momento el investigador-entrevistador sugiere que

construya ese punto que señala anteriormente el estudiante con ayuda del diseño que se le presento]

B***. de 1,57 a 4,71***

S. ¿Qué te llevó a tomar el punto en I de coordenadas (0,-1)?

B. P***ues como dije que iba a decrecer en los múltiplos de pi, ahí es donde empieza a decrecer y en pi la circunferencia empieza a bajar, entonces yo quería un punto que yo viera porque aquí [con su mano realiza la forma de la curva del seno sobre la pantalla del computador] en este punto en uno porque sabemos que empieza a decrecer en el eje y a partir del menos uno y uno quiero un punto que en el eje y me de menos uno por que es hasta donde llega y de ahí en adelante empieza a bajar [señala con su construcción el valor en la curva relacionándolo Indirectamente con el punto I en la circunferencia] y después de este punto sube***

S. Ahora si nómbrame los puntos de crecimiento y decrecimiento de la curva que construiste

B. ***El primer intervalo de crecimiento va de cero a 1,57.***

S. ¿Y el de decrecimiento?

B. ***De 1,57 a 4,71***

S. ¿Y vuelve y crece?

B. ***Si, de 4,71 más 1,57 es decir hasta 6,28. De 4,71 hasta 6,28***

Se puede precisar la asignación por parte del estudiante de consideraciones cuantitativas precisas para ciertas características del cambio, en el apartado se muestra situaciones de variación para el crecimiento y decrecimiento. La estudiante logra relacionar una medida numérica a través de la construcción y asigna intervalos a partir de las escalas numéricas que visualiza, por lo cual se infiere el comportamiento relacionado a la **AM3** y se determina el **N3** del razonamiento covariacional

Estudiante C:

Para la cuantificación del cambio se optó por involucrar al estudiante en el reconocimiento de valores precisos (números) en la caracterización del crecimiento y decrecimiento de la curva. Se le preguntó al estudiante por los valores máximos y mínimos que podía encontrar esto con el propósito de relacionarlo con el comportamiento de la **AM3**.

S. ¿En qué momento fue posible visualizar los puntos máximos y mínimos?

C. ***Fue a partir de la construcción de varios puntos, por ejemplo vi que unos puntos pasaban en uno, otros pasaban en dos, otros crecían en 0.5 y ahí empecé a ver la función seno de x***

S. ¿Cómo explicarías los valores que mencionas respecto a pi, pi medios en la construcción?

C. ***Podemos considerar por ejemplo que uno sea lo que sea pi…etc.***

S. ¿Cómo así? , x igual a pi que determinaría en la construcción

C. ***Creo que noventa grados***

S. Pero no estamos hablando de grados en la construcción

C. ***Estamos hablando en radianes [el estudiante piensa por un momento]***

S. ¿Podrías por favor indicar el valor máximo de la construcción?

C. ***El valor máximo seria uno [a partir de ahí el estudiante construye el punto correspondiente a la curva en dicho punto] trazamos el arco y construimos el punto referido***

S. ¿Cuáles son las coordenadas de ese punto?

C***. El punto H (valor máximo) tiene coordenadas uno punto cincuenta y siete (coordenada x), uno (coordenada en y) [(1.57, 1)]***

En una primera aproximación el estudiante parece asignar valores al eje de las ordenadas relacionándolo al parecer con múltiplos de pi, cuando se le pregunta directamente la relación que este quiere establecer de dichos parámetros asigna valores de pi a valores de ángulos, específicamente al de *noventa grados*. A través de una pregunta hecha por el investigador el estudiante relaciona una unidad de medida determinada en el diseño asignando los radianes, retractándose de lo anterior ya que no estableció una relación con lo que enunciaba. Posteriormente y a través de la construcción se observa como relaciona un valor en la circunferencia unitaria para el cual determina un punto máximo en la curva, asignando un punto concreto en la construcción (1.57, 1). El reconocimiento de este valor permite intuir un reconocimiento numérico del crecimiento confirmándose en el diálogo que se presenta a continuación

S. ¿Cuál son los valores de crecimiento?

M. ***De 0 a 1,5***

S. ¿En qué valores decrece?

M. ***En 1.5 hasta el 4***

S. ¿Porque con base en la construcción no encuentras el valor determinado? [En este momento el entrevistador-investigador sugiere que construya el punto que permitiría determinar el valor numérico en esta]

M. ***Pues el valor máximo es 4,71 y -1***

S. ¿Por qué dices que es el valor máximo?

M. ***Es el valor mínimo empieza de 1.57 hasta 4.71***

S ¿Y vuelve a crecer?

M. ***De 4.71 a más o menos 6.5 [intuye visualmente hasta el punto de corte con el eje de las x]***

S. ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento en la función?

M. ***El intervalo de crecimiento seria del cero al uno punto cinco en unión con el 4.71 con el 6.5 aproximadamente***

S. ¿Cuál es el valor del intervalo de decrecimiento?

M. ***De 1,57 a 4,71***

S. ¿Y sigue creciendo?

M. ***Si, de 4,71 hasta 6.28***

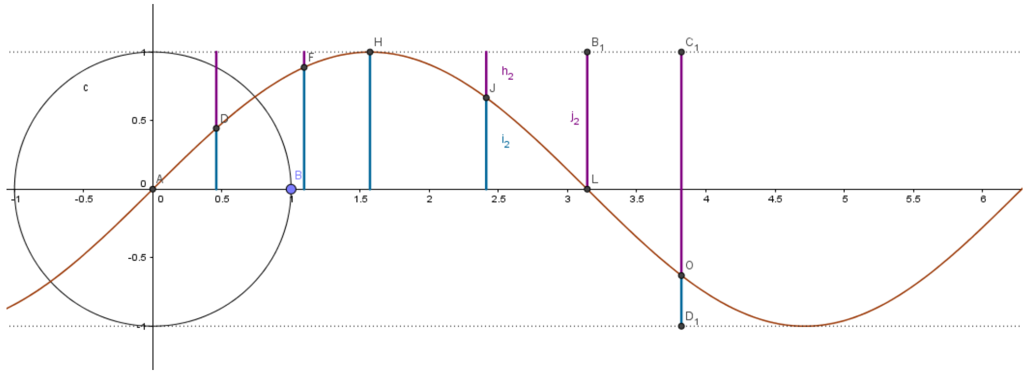
S. ¿Sigue creciendo?

M. ***De 6.28 hasta 7.85***

El comportamiento para la acción mental que proponemos en el trabajo determina que si un estudiante asigna números a las variaciones que se pueden determinar a través de la construcción de la gráfica, la acción mental que repercute seria la asignada a la **AM3**, el **N3** de *coordinación cuantitativa* se anexa a los dos primeros niveles determinados por los estudiantes, mostrando la transformación gradual de la concepción que tiene respecto a la función seno y el diseño presentado.

Los estudiantes logran determinar los aspectos cuantitativos establecidos en la construcción y permite que se consolide en ellos la **AM3** y el nivel de coordinación cuantitativa **N3**. Es preciso establecer la manera en que las acciones mentales anteriores se transforman, evidenciando un proceso escalonado y ligado del razonamiento covariacional, en el que se involucran las acciones mentales anteriores (**AM1-AM2**) y los niveles de dirección y coordinación (**N1-N2**)

4.1.4 AM4: Razón media de cambio.



Hoja de Cálculo

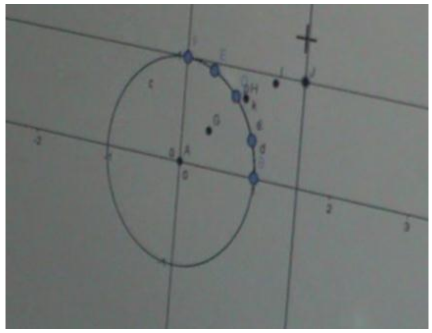
	A	B	C
1	0	0	0.99
2	0.29	0.29	0.89
3	0.63	0.59	0.44
4	1.57	1	-0.22
5	2.02	0.9	-0.73
6	2.82	0.32	-0.98
7	3.14	0	
8			

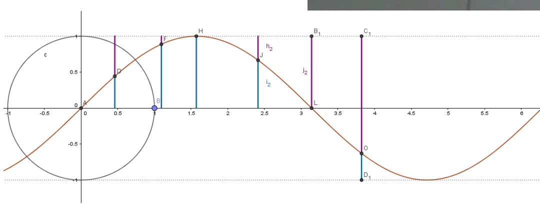
Figura 19. Razón media de cambio El comportamiento de la **AM4** se identifica por determinar la razón de cambio promedio, en la construcción consideramos que se debe de implicar una relación entre los intervalos de crecimiento y dicha razón de cambio, situación por la cual se considera que los estudiantes construyan una tabla que implique los valores de la primera razón de cambio y que visualmente consideren esta relación con los crecimientos y decrecimientos de la curva, estableciendo la relación los estudiantes puede determinarse en el comportamiento de la **AM4.** La columna A hace alusión a las diversas longitudes de arco en el ejercicio y la columna B son las proyecciones dirigidas sobre el eje y de los arcos determinados.

A continuación se determina el comportamiento de la razón media de cambio en los estudiantes:

Estudiante A:

Para la **AM4** el estudiante *A* debe de reconocer la razón de cambio promedio en la construcción que desarrolla, situación por la cual se involucra una tabla donde se contrastan los valores de las coordenadas de los puntos construidos y la primera razón de cambio. En la gráfica de la figura 20, se puede determinar la esquematización de la situación respecto a la razón de cambio y las variables determinadas en el diseño.





x	sen (x)	razon media
0	0	0.97
0.46	0.44	0.7
1.09	0.89	0.24
1.57	1	-0.4
2.41	0.67	-0.91
3.14	0	

Figura 20. Evidencias del comportamiento de la AM4 en el estudiante *A*

El estudiante pudo determinar dicha relación a partir de la construcción que este hace, donde establece la razón de cambio mediada por el software a través de dos representaciones distintas. En la primera representación se involucra una tabla que refleja las coordenadas de los puntos que se construyen con su respectiva razón de cambio. La segunda representación se determina a través de un aspecto visual donde la pendiente entre los dos puntos y su respectiva curva reflejan el descenso o aumento de un segmento en color morado y que permite determinar la razón de cambio respectiva (llamada razón de cambio o velocidad media).

El estudiante lograr relacionar estas dos representaciones determinando una correspondencia inversa entre ellas, esto al visualizar el crecimiento o decrecimiento de la curva y los valores para la razón de cambio. La relación se determina al comparar los valores numéricos en los cuales las imágenes de la función crecen o decrecen y aquellos valores para la razón de cambio en dichos intervalos, cuando el valor del $sen(x)$ es máximo su razón de cambio se hace muy pequeña en número, es decir a medida que la curva crece el número para la razón de cambio será mínimo (en magnitud) y visceversa. El extracto de entrevista que se ve a continuación permite identificar lo anteriormente establecido:

> A. ***La razón de cambio va disminuyendo a medida que la longitud del arco está más próxima al eje y [en este momento el estudiante trata de responder a partir de la visualización en la construcción, es decir el visualiza el punto máximo y dice que la razón de cambio disminuye si pasa eso]***
>
> S. ¿Qué más puede concluir?
>
> A. ***Que entre más crece la gráfica, cada vez es menor la razón de cambio***
>
> S. ¿Y en el caso contrario?
>
> A. ***Al empezar a decrecer la razón de cambio seria mínima, pero entre más vaya decreciendo más grande seria la razón de cambio***

El comportamiento que se determina sobre el estudiante relaciona la **AM4** por lo que el nivel de razonamiento covariacional en el que se puede ubicar al estudiante corresponde al **N4**

Estudiante B:

Para la **AM4** se involucra en las preguntas auxiliares una situación que permite incidir sobre la razón de cambio promedio, en esta se relacionaban los puntos determinados en la construcción guiada, determinándose la razón de cambio entre estos. En la figura 21 es posible observar unas primeras evidencias del estudiante *B* respecto a lo dicho anteriormente

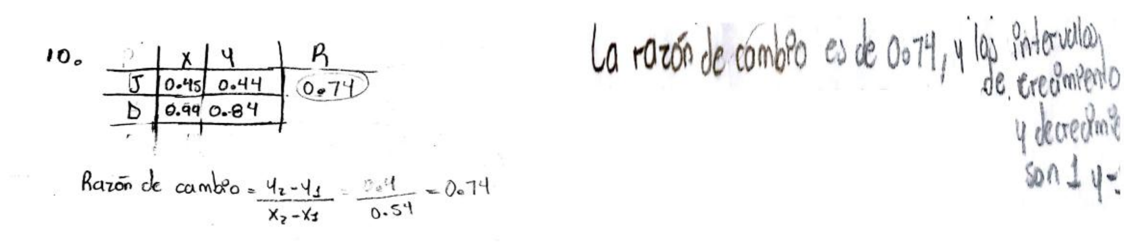


Figura 21. Comportamiento de la AM4 en el estudiante *C*

La figura 21, muestra la constitución del concepto de razón de cambio, el estudiante reconoce el algoritmo por el cual es posible determinar la cantidad de variación entre los valores y logra relacionarlos con los intervalos de crecimiento, aclarando que hasta ese momento no logra considerar una correspondencia con el gráfico visualizado en el software. A través del siguiente diálogo se puede precisar la identificación de la **AM4**, por lo que es preciso ubicar al estudiante en el **N4** de razonamiento covariacional.

S. ¿Al comparar los valores de la tabla que has podido concluir o ver?

B. ***Que el resultado de evaluar la coordenada x en el seno de x es igual a lo corresponde en la coordenada y [esto al evaluar cada uno de los puntos que construye y relacionar con la tabla que se pide inicialmente, hay que aclarar que los puntos de la curva que la estudiante construyo están sobre el primer cuadrante de la circunferencia por lo cual todos los puntos de la misma son crecientes en la curva]***

S. Entonces ¿cuál es la relación que existe en la curva?

B. ***En x la longitud de la curva y en la coordenada y el seno evaluado dicha longitud***

S. ¿Qué es posible concluir de la tercera columna que me relaciona la razón de cambio respecto a la curva de la construcción?

B. ***La razón va disminuyendo a medida que evaluamos en los puntos que tenemos construidos***

S. ¿Qué puedes concluir de los puntos que tienes construidos respecto a la columna razón de cambio?

B. ***A mayor, conforme los puntos van subiendo la razón de cambio es menor, conforme la curva va creciendo la razón de cambio es menor.***

S. ¿Y si decrecen?

B. ***La razón de cambio es menor***

Al determinarse la razón de cambio por parte del estudiante es posible identificar en el diálogo el desarrollo de una concepción para la función seno respecto a la construcción. En un primer momento la verificación de la curva solo es señalada a partir de la relación visual que hace el estudiante considerando aspectos conocidos y corresponderlos. Cuando el estudiante compara las relaciones de las variables respecto a las nociones cualitativas que concebía en una fase previa del análisis, es posible afirmar que la idea que tiene respecto de la variable que representa las imágenes de las longitudes de arco correspondientes es la que se establece por los resultados de evaluar en la función seno.

Estudiante C:

La **AM4** relaciona la comprensión por parte del estudiante de correspondencias consideradas para la razón de cambio. El comportamiento debía asignar verbalizaciones en la que de una manera cualitativa y cuantitativa se refiriera a la medida en la que el cambio se iba modificando al construir el par de variables asignadas en el diseño. En una fase inicial se le preguntó al estudiante acerca de las nociones que refería a la razón de cambio a través de la construcción que se asignaba a una tabla que involucraba estos valores. La figura 22 muestra evidencia de esta primera aproximación determinando la construcción de una tabla en la que se asignaron valores y características de algunos puntos del diseño.

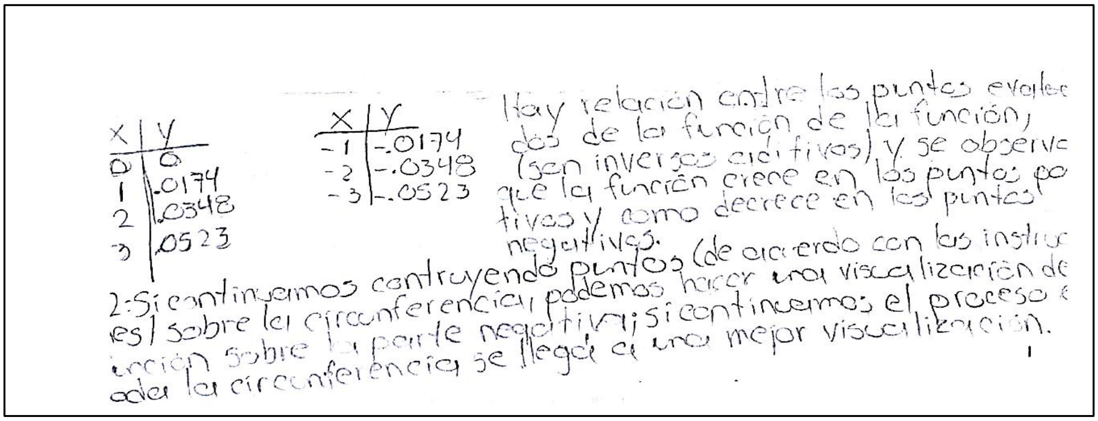


Figura 22. Producción escrita del estudiante C y la AM4

El escrito del estudiante evidencia concepciones no muy claras respecto a la longitud del arco, este insiste en características que logra determinar al relacionar valores numéricos con cualidades de la curva las cuales se desprenden de aspectos visuales. El determinar aspectos de la curva que asemejan situaciones de crecimiento y decrecimiento a valores puntuales solo determina los comportamientos de la **AM3** sin consolidar por ninguna parte características de lo que significa la razón de cambio. Situación por la cual se hace necesario involucrar una tabla que relacione la razón de cambio y aspectos referidos al crecimiento o decrecimiento de la función

En la entrevista, el investigador retoma este aspecto para determinar la evolución del conocimiento que podía consolidar el estudiante a través de la construcción. En una primera instancia se abordaba el software y una tabla que relacionaba valores numéricos a la longitud de arco, después se contrastaba el diálogo del estudiante con los puntos que determinaban la gráfica de la función seno

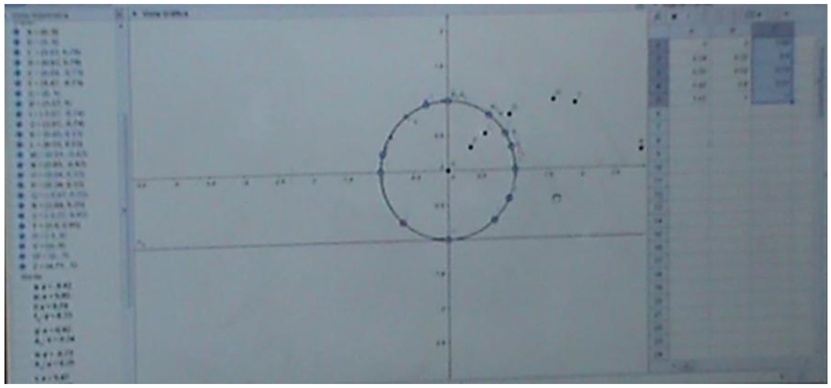


Figura 23. Sobre la razón de cambio promedio en el estudiante C

En la figura 23, se muestra un extracto que se construye en el momento de determinar el diálogo y comparar lo hecho por el estudiante, se buscaba que aflorara en este la razón de cambio a través de los puntos construidos y de la representación que se hacía de estos en una tabla que era posible de construir con una herramienta del programa. La figura 24, muestra una visualización más clara, en una primera fase se le pidió al estudiante reconocer las coordenadas de los puntos que emergían de la propuesta que se les presentó, deduciendo que la correspondiente a las ordenadas determinaban el valor de la función seno para cada una de las longitudes de arco construidas.

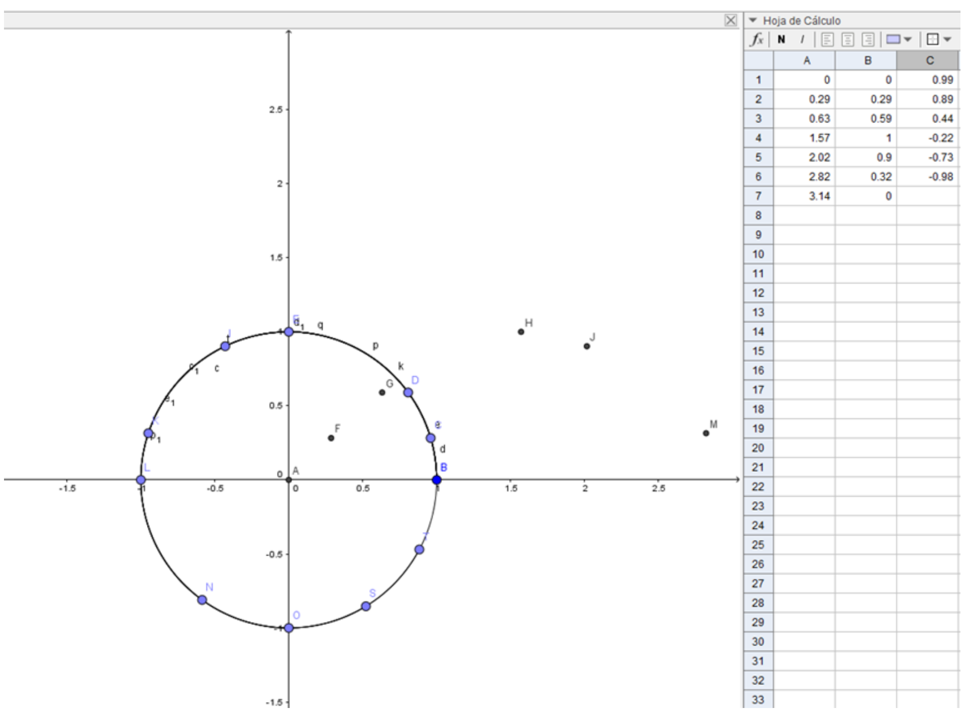


Figura 24. Representación en el software de la figura 23

Despues de determinar las variables que se representaban en el diseño, el estudiante debia reconocer la primera razón de cambio que se asignaba a traves de la herraienta tabla, la cual permitia calcularla de una manera interactiva. A tráves de esta herramienta se podia interactuar sobre valores ya construidos, refiriendose al cambio expresado ademas de calcular y corroborar dicha razón, llegandose a determinar una relación inversa entre los cremientos y decrecimientos que se representaban en la gráfica de la función seno en comparación con cada uno de los valores determinados por la columna razón de cambio. A continuación se muestra un extracto de la entrevista donde se determina lo expresado por el estudiante *C*:

> S. Vamos a analizar la tabla de la primera razón de cambio [el investigador-entrevistador empieza a preguntar al estudiante acerca del punto que desarrollo a través de la tabla que incluyo en las preguntas auxiliares para determinar la razón de cambio] ¿Qué determina la razón de cambio?
>
> C. ***Al buscar la razón de cambio buscaría una sucesión, para ver qué diferencia hay entre ellos con el coeficiente. Tomo las abscisas y le resto las ordenadas***
>
> S. ¿Qué puedo concluir de la razón de cambio?
>
> C. ***Cuando comparo los valores la razón de cambio se va haciendo más pequeña a medida que la función se va evaluando en sus puntos, bueno a medida que los puntos a evaluar vayan decreciendo***
>
> S. ¿Qué pasaría con la razón de cambio cuando decrece la curva?
>
> C. ***Los valores de la razón crecen a medida que la curva va decreciendo y decrecen cuando la curva crece, por lo menos en magnitud***

El diálogo generado en la entrevista verifica el comportamiento para la **AM4**, el estudiante logra identificar la magnitud del cambio para valores establecidos en intervalos de crecimiento y decrecimiento, logrando conjeturar una relación entre la magnitud numérica del cambio con los valores de cada uno de los intervalos mencionados. El estudiante logra reconocer que en los intervalos que determina el crecimiento de la curva la razón de cambio en magnitud disminuye, caso contrario a lo determinado con valores pertenecientes a los intervalos de decrecimiento en los que la razón de cambio en magnitud aumenta.

El comportamiento que muestra el estudiante lo ubica dentro de la **AM4** relacionando aspectos en los que se coordina, direcciona y cuantifica el cambio, ademas de sustentar imágenes en los que la razón de cambio promedio se descompone para coordinar la cantidad de cambio resultante en las variables de entrada; es decir, se reconocen aspectos relacionando los valores de la longitud de arco, la razón de cambio en intervalos determinados y aspectos gráficos dados por la construcción. Es por lo anterior que se afirma que el nivel de razonamiento covariacional en el que es posible ubicar al estudiante es el que determina la razón promedio o **N4.**

4.1.5 AM5: Razón instantánea.

La determinación de la razón instantánea se identifica a partir del reconocimiento de la curva y la construcción de valores más allá de los establecidos en la construcción guiada. Si los estudiantes podían determinar el patrón relacionante establecido a través del cambio de las variables la imagen mental que proyectaban podía encasillarse en la de la razón instantánea (**AM5**)

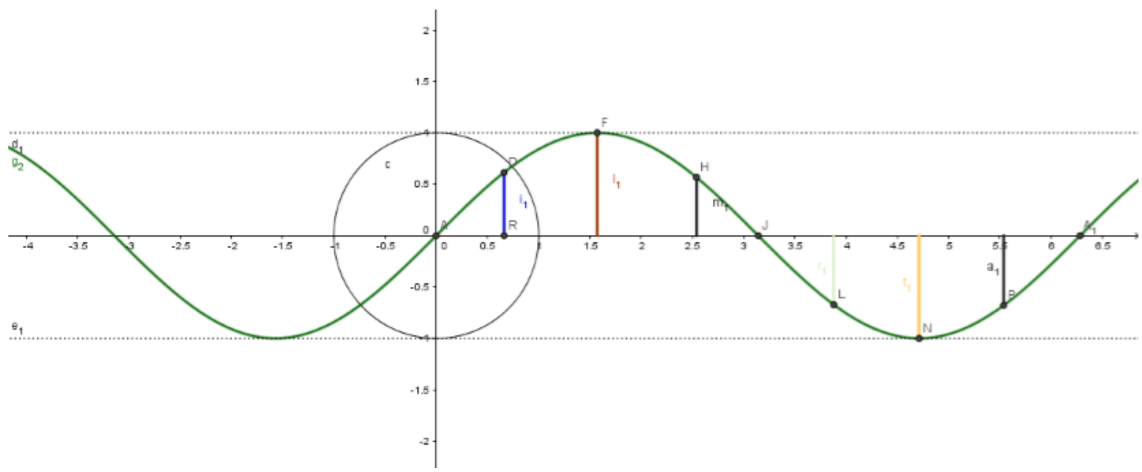


Figura 25. Razón instantánea de cambio Para la determinación del comportamiento de la razón instantánea se consideran puntos más allá de los establecidos. Por medio de la construcción únicamente se determinaban valores de longitud de arco entre 0 y 2 Pi (incluyendo sus recíprocos entre 0 y - 2 Pi), si el estudiante podía consolidar un patrón subsecuente por medio del cual construir valores más allá de los determinados este se reconocía en la **AM5.**

A continuación se presentan los resultados que los estudiantes pudieron determinar al considerar el comportamiento de esta acción mental:

Estudiante A:

Para determinar la razón de cambio instantánea (**N5**) el estudiante debe inferir el comportamiento de la curva para cualquier instante de su construcción, la particularidad radica en evidenciar que la construcción tiene un valor límite para valores de *x* entre

$-2\pi\ y\ 2\pi$, por lo cual se espera que este caracterice valores por fuera de los límites de la construcción.

> S. Ahora ¿Cómo sería para valores mayores a dos Pi en la construcción?
>
> A. ***Mmm…no***
>
> S. Comparemos los siguientes valores, el primer punto tiene coordenada en x de 0,36. Donde en la construcción hace alusión a la medida de la longitud del arco, ahora que pasaría si le sumo una vuelta más a dicha longitud
>
> A. ***El valor de seno seria el mismo.***
>
> S. Compara en la calculadora
>
> A***. El valor es el mismo que es 0,36, entonces si es posible encontrar valores mayores a dos pi, solo a los valores mayores de dos pi se le debe sumar una vuelta que en este caso seria 6,28, para todos los valores es igual***

La ayuda del entrevistador-investigador en el diálogo permite un acercamiento, evidenciando conocimientos previos y la lógica del estudiante. La periodicidad de la función hace que este determine que los valores de las imágenes no cambian para valores mayores a 2π o menores -2π. Durante el diálogo de la entrevista, el estudiante logra relacionar las mismas imágenes para un par de valores de la longitud de arco los cuales determinan la misma posición en el plano, al cuestionarlo a través de esta comparación el responde que para todos los valores que se determinen de esta manera las imágenes se mantendrán. Lo anterior permite demostrar que el estudiante puede evidenciar los valores del seno a través de la construcción y generalizar para puntos que no son posibles de determinar en el diseño (estos referidos a longitudes de arco mayores de 6.28), lo cual determina su nivel de consciencia respecto a los cambios instantáneos para cualquier valor de la longitud del arco ubicando al estudiante en una **AM5** y en el **N5** de razonamiento covariacional.

Estudiante B:

La manera evolutiva del marco conceptual entrelaza las acciones mentales anteriores del estudiante permitiendo consolidar el camino hacia la **AM5**. El siguiente apartado de la conversación permite esclarecer el comportamiento de esta acción mental y el **N5** correspondiente:

S. ¿Y sigue creciendo?

B. ***No va a volver a bajar***

S. ¿Segura?

B. ***No es cierto va seguir creciendo [empíricamente a estudiante dibuja con su mano la trayectoria de la curva y dándose cuenta del crecimiento periódico de esta], como no más tome un pedacito de aquí [señala el primer cuadrante de la circunferencia] va a crecer hasta 7,85***

El apartado permite observar una aproximación del comportamiento al tratar de determinar valores no posibles en la construcción, el estudiante reconoce la determinación de un patrón subsecuente sumando el número correspondiente a la longitud del primer cuarto de circunferencia. Considerando la periodicidad de la función es alcanzable para este reconocer las mismas imágenes para valores en la función $sen\, x$, representando el argumento x como la longitud de un arco construido sobre la circunferencia a través de un punto en la misma. Se observan indicios de la determinación del patrón en la construcción por medio del cual se infiere la generalidad de este para cualquier longitud sobre el arco construido extrapolando información no explicita en el diseño que se le presenta. El estudiante logra encajar todos los aspectos para la **AM5** pero su evidencia no permite consolidarse en fases posteriores. El nivel en el que es posible enmarcar a la estudiante corresponde al **N4** del razonamiento covariacional.

Estudiante C:

La **AM5** se determinaba a traves del comportamiento que mostraría como el estudiante construia valores mas allá de los generados por el software a tráves de la concepción de una regla general, la cual se basaba en el entendimiento de la razón de cambio para cualquier valor. En el transcurso de la entrevista el estudiante no mostró reconocimiento respecto a ello, en el diálogo que sostuvo con el entrevistador-investigador muestra no tener indicios que relacionen su argumento con la manera de construir la gráfica para valores mas alla de los determinados para la construcción los cuales oscilaban entre cero y dos pi $(0, 2\pi)$. El extracto de la entrevista se muestra a continuación:

S. ¿Podrías ver algún arreglo en la construcción para desarrollar los números negativos?

C. M***mmm quise hacerlo para algunos puntos negativos y no lo encontré, bueno no pude pero obvio si se puede en el eje negativo, si es posible. Lo intente pero no supe como***

Aunque al parecer reconoce la continuidad de la curva para valores mas allá de los determinados en la construcción, el estudiante no reconoce la manera de construirlos ni relaciona los aspectos concebidos anteriormente. El diálogo con el estudiante no permite determinar aspectos que coincidan con la continuidad de la curva desde lo propuesto en la investigación, lo cual hace inviable reconocer el comportamiento para la **AM5** y el **N5** de razonamiento covariacional.

Para el quinto nivel de razonamiento covariacional solo uno de los estudiantes presenta evidencias del alcance de este, el estudiante *A* reconoce el patron y determina pruebas concebidas en el diálogo con el investigador, para los otros dos estudiantes no es preciso ratificar el alcance de este nivel covariacional. El estudiante *B* parece determinar un acercamiento al comportamiento de la acción mental pero la evidencia presentada no ratifica las nociones que parecen presentartse, por otra parte el estudiante *C* evidencia la continuidad de la gráfica pero no logra reconocer ni relacionar los aspectos considerados en las fases anteriores.

4.2 Descripción de las acciones mentales observadas en los estudiantes en la experiencia reportada en la investigación

A manera de síntesis, se presenta a continuación un cuadro con las acciones mentales en el que se evidencian los aspectos más relevantes de los comportamientos propuestos en la investigación y que sobresalen en los estudiantes durante la realización de las actividades

Tabla 6

Acciones mentales y comportamientos en la investigación

ACCIÓN MENTAL	DESCRIPCION DE LA ACCION MENTAL	COMPORTAMIENTOS EN GENERAL DE LOS ESTUDIANTES (*A*, *B* y *C*)
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	• Establecimiento del reconocimiento del par de variables determinadas en la construcción (eg. La variable *x* como longitud de arco y la variable y como proyección del arco sobre el eje de las ordenadas) • Se establece la coordinación de un par de variables que se relacionan directamente en la construcción de la función a través de un proceso de enseñanza específico el cual relaciona la circunferencia unitaria • Descripción de los ejes coordenados (no solo haciendo una relación del eje de las abscisas y ordenadas, relacionando

		además una variación para el eje de las abscisas en términos de múltiplos de pi) a través de las variables de la construcción
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	• Existe un reconocimiento de la regulación de las variables, esto al identificar la manera en como se establece la forma de la curva y la relación de cada uno de estos valores • Determinación de la forma de la curva, relacionándose aspectos en los que se reconoce el rango de la función (hasta donde crece y decrece), dominio (recorrido sobre el eje de las abscisas) y su forma (en sentido serpenteado o sinusoidal) • Construcción de una relación en la que se desarrolla el cambio y su la manera en que ocurre con aspectos donde se involucra cantidades discretas hacia la constitución de una continuidad vista en la función seno
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	• Determinación de un valor numérico para aspectos que se consideraban cualitativos hasta el momento • Asignación numérica de los valores que desarrollan el cambio en la constitución de la gráfica de la función • Se observó el establecimiento de patrones numéricos en los que se relacionaban de manera segmentada los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica de la función
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	• Reconocimiento de la relación inversa entre los valores que determinan el crecimiento o decrecimiento de la gráfica y la razón de cambio que se constituye al determinar valores pertenecientes a cualquiera de estos • Visualización de la magnitud del cambio determinada por la razón promedio entre par de valores cualquiera y los puntos construidos entre los intervalos que se asignaron por la experiencia del estudiante al crecimiento y decrecimiento de la función • Coordinación de las variables y sus respectivas razones de cambio, resignificando los valores pertenecientes a la función además de generalizar patrones subsecuentes en la periodicidad de la función
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	• Construcción de una curva suave en la se determina la continuidad de esta para valores más allá de los generados por la construcción • Reconocimiento del patrón subsecuente generado a partir del reconocimiento de la razón de cambio y la periodicidad de la función. • La generación de patrones generalizador a través de la construcción de los puntos determinados por la construcción y la variación de longitudes de arco mayores a dos pi e imágenes periódicas

Capítulo 5

Conclusiones

Después de analizar cada una de las producciones y entrevistas de los estudiantes, estamos en posibilidades de responder la pregunta de investigación de la que partimos: **¿Qué niveles de razonamiento Covariacional emergen de estudiantes de licenciatura en matemáticas al enfrentarse a situaciones de variación ligadas a la función seno?** llegando a establecer varios de los niveles de acuerdo con el marco conceptual para el razonamiento covariacional y por ende el objetivo de la investigación, en el que interesó identificar y describir los niveles de razonamiento Covariacional presentados por estudiantes de la licenciatura en matemáticas al enfrentarse a situaciones de variación ligadas a la función seno. Teóricamente surgen provechosos aportes en relación a los comportamientos que se presentan a través de la consecución de la construcción planteada y que enfáticamente relacionan desarrollos para el razonamiento covariacional en el aprendizaje de las funciones trigonométricas. Por último es posible incidir sobre la determinación covariacional de cada uno de los estudiantes en la construcción guiada de la función seno y en la posible evolución de sus concepciones. A continuación se determinara cada uno de los anteriores aspectos a profundidad consolidando la culminación de la presente investigación.

5.1 Niveles de razonamiento covariacional en los estudiantes de la licenciatura en matemáticas

En la investigación se precisaron los niveles de razonamiento covariacional que se relacionaban en cada uno de los estudiantes objeto de investigación, situaciones que se lograban a través de las características imperantes que se recopilaban a través del diálogo y las producciones escritas generadas en el transcurso del estudio.

5.1.1 Razonamiento covariacional del estudiante A

El estudiante logra reconocer una imagen global de la construcción que realiza, relacionando aspectos que secuencian su razonamiento covariacional, en una primera fase logra considerar las variables que cambian a medida que va construyendo puntos sobre la circunferencia del diseño. Relaciona de una manera verbal el cambio determinado en el eje de las abscisas a partir de la traslación de la medida del arco y en el eje de las ordenadas la traslación de la proyección dirigida de este. En un segundo momento direcciona la manera en la que el cambio ocurre reconociendo la forma en la cual los puntos se superponen en una curva general (la gráfica de la función seno), el estudiante logra determinar características de crecimiento y decrecimiento en la curva mostrando objetivamente la dirección en la que el cambio ocurre, hasta ese momento el alumno de pregrado relaciona las variables y la dirección del cambio, lo cual permite identificar los comportamientos que enlazan las primeras acciones mentales (**AM1** y **AM2**) y los dos niveles iniciales del razonamiento covariacional (**N1 y N2**).

De otra parte, la cuantificación del cambio es posible de determinar a través del reconocimiento cuantitativo que el estudiante *A* logra incidir al nombrar los intervalos numéricos de crecimiento y decrecimiento, aspectos cualitativos reconocidos en una fase anterior. En el capítulo del análisis es posible observar algunas producciones escritas del estudiante y su relación con los comportamientos que se propone en la investigación para cada una de las acciones mentales, tanto en las producciones como en el dialogo se observan nociones preliminares en las que relaciona características de la curva al considerar aspectos relevantes de la circunferencia unitaria, como la división de la circunferencia por cuadrantes y la relación de los puntos que pertenecen a la gráfica de la función seno. A través del diálogo determinado por la entrevista el estudiante A logra describir dichos intervalos en función de los parámetros dados por la construcción y el software Geogebra, permitiéndole describir las imágenes de la función por relaciones directas de la longitud de arco y de números reales. Lo anterior permite que se vincule al estudiante con el comportamiento de la **AM3** y determina el **N3** del razonamiento covariacional, la evolución de su razonamiento corresponde las tres acciones mentales (**AM1-AM2-AM3**) relacionando los tres niveles (**N1-N2-N3**).

Los niveles restantes se determinan por la adaptación de una relación visual entre la razón de cambio de los puntos que se construyen y los valores numéricos que se orientan a través de una tabla que asigna valores de las abscisas, las ordenadas y la razón variable entre ellas. El estudiante visualiza la razón y determina el crecimiento de los valores de la función seno de manera inversa en que la razón de cambio entre ellos disminuye. Es posible inferir el comportamiento para la cuarta de las acciones mentales (**AM4**) y por ende el **N4** de razonamiento covariacional.

La razón instantánea se determina en el estudiante a través de un comportamiento que asigne el reconocimiento de esta a partir del diálogo expresado en la entrevista, en el marco conceptual se considera que el comportamiento que debe presentar el estudiante se ratificará hacia la construcción de puntos pertenecientes a la curva más allá de los establecidos, el diseño que se presenta muestra como el estudiante establece un rango para los valores de la longitud de arco entre 0 y 2π, y en el mejor de los casos valores entre -2π y 2π (los otros valores entre 0 y -2π se generarían al considerar valores reflexivos para los inicialmente establecidos).

El estudiante B logra determinar un patrón que le permite construir los valores de la curva. En un primer instante hace alusión a la periodicidad de la función determinando valores iguales para las imágenes, a partir de eso establece los valores máximos y mínimos, sumando valores generados sobre posiciones en la circunferencia, por ejemplo considera el punto donde la función volvería crecer hasta su máximo; sumando a 6,24 (punto límite de la construcción) a el cuarto de circunferencia restante que inicialmente concibió, es decir el determinado por 1,57 (primer valor donde la imagen de la función es maxima) generando una longitud de arco correspondiente a 7,81, que sería el valor máximo siguiente y cuya imagen es la misma que el anterior. El estudiante concluye que todos los valores generados de ahí en adelante podrán repercutirse de la misma manera.

Puede verse como determina una consolidación con base en lo generado en el diseño, además de determinar un patrón generalizante que logra determinar por su misma experiencia, consolidándose así las ultimas de las acciones mentales (**AM5**) y el último de los niveles de razonamiento covariacional (**N5**) en este estudiante.

5.1.2 Niveles de razonamiento covariacional del estudiante B

El estudiante logra precisar de manera general el propósito encaminado en la construcción, uno de los primeros aspectos que se reconoce son la identificación del par de variables que el estudiante *B* visualiza de la construcción guiada, este relaciona la longitud de arco como variable representada en el eje de las abscisas y sobre el eje de las ordenadas la proyección dirigida del arco construido. El reconocimiento del par de variables se hace después de que este reconozca en la construcción la curva que se asigna a la función seno, además de algunas ideas que ha logrado consolidar a través de su experiencia. Este primer aspecto permite identificar la primera acción mental (**AM1**) y el **N1** de razonamiento covariacional el cual asigna la coordinación.

Para el comportamiento de la acción mental 2 (**AM2**) la estudiante direcciona la curva determinando la forma a través de la construcción guiada, esta logra reconocer diversas características entre las que se destacan el rango y el dominio de la función, los máximos y mínimos, y los intervalos que parecen generar el crecimiento y decrecimiento a lo largo de la curva. El estudiante reconoce aspectos que direccionan la gráfica y que además evidencian la acción mental (**AM2**) establecida en el marco conceptual por lo que se determina que el nivel de razonamiento covariacional en el que evoluciona la estudiante es el **N2**. Respecto a la cuantificación del cambio, esta llega a contemplar lo determinado anteriormente a partir de las variables que se coordinan cuantitativamente dicho en otras palabras; además de reconocer los valores numéricos de entrada y salida de función, esta logra cuantificar aspectos meramente cualitativos hasta el momento. Por ejemplo, llega a relacionar valores numéricos para los crecimientos y decrecimientos de la curva, situaciones que se comprendían anteriormente de forma visual; este tipo de comportamiento determina la acción mental tres (**AM3**). El progreso que tiene la estudiante recopila las acciones mentales (**AM1**)-(**AM2**) y (**AM3**); lo cual lleva a identificar el nivel de tipo tres (**N3**) en el razonamiento covariacional.

En correspondencia a la coordinación de la razón del cambio promedio, el procedimiento incluyo al igual que el estudiante anterior, la comparación de dos situaciones imperantes en las actividades propuestas en el trascurso de la investigación. La primera concebía a la razón de cambio a través de una tabla en la que se involucraba las coordenadas de los puntos construidos, a partir de este primer ejercicio se lograba que el estudiante infiriera sobre el significado de dichas coordenadas intuyendo valores de entrada y correspondientes imágenes de la función seno, la razón de cambio promedio se reconocía al relacionar los puntos construidos y determinar la pendiente entre cualquier par de puntos concurrentes. A partir de ello el estudiante logró inferir sobre la relación inversa, entre la razón de cambio (

promedio entre par de valores) y los intervalos de crecimiento y decrecimiento, comprendidos hasta ese momento de forma gráfica y numérica. La estudiante comparaba dicho par de registros concluyendo que la razón de cambio aumentaba a medida que los valores de las imágenes disminuían y de manera inversa, si los valores de las imágenes aumentaban la razón de cambio se hacía cada vez más pequeña. Este comportamiento se relaciona directamente con la acción mental cuatro (**AM4**), determinando la manera progresiva en la que la estudiante ha llevado su concepción de la función seno. Las acciones mentales determinadas (**AM1-AM2-AM3** y **AM4**) hasta ese momento logran ubicarla en **N4** del nivel de razonamiento covariacional, el quinto nivel de razonamiento covariacional no es determinado ya que no logra identificársele ningún comportamiento de la acción mental cinco.

5.1.3 Niveles de razonamiento covariacional del estudiante C.

El estudiante reconoce de una manera visual la curva que se construye a través de la relación covariacional que interactúa con la variación de la longitud de arco y la variación de la proyección que incide este sobre el eje *y*. A continuación se describirá la manera en la que alcanza dicho nivel de razonamiento covariacional.

En un primer momento puede observarse el reconocimiento de las variables, él logra identificarlas a través de la construcción guiada y su experiencia. Esté hace una descripción de la relación que tienen las variables con los puntos que pertenecen a la curva, el estudiante reconoce el movimiento sobre el eje de las abscisas de los puntos que va construyendo relacionando la variabilidad de la longitud de arco del mismo modo en que relaciona la altura de la curva como proyecciones del arco construido sobre el eje *y*. La consideración anterior permite encasillar al estudiante en el comportamiento adscrito a la primera de las acciones mentales (**AM1**) y por lo tanto corresponderlo al **N1** de razonamiento covariacional. Ya establecida la coordinación de las variables se le pregunta al estudiante por la manera en que estas se direccionan, permitiendo que se digan características sobre la curva que generan un vínculo o nexo con el comportamiento que describe la segunda de las acciones (**AM2**) mentales del razonamiento covariacional.

El estudiante designa características del comportamiento de la curva en general, lo primero que determina es la manera serpenteada que describe la curva, además de un patrón correspondiente que asigna a la periodicidad de la función. El estudiante reconoce y señala el par de variables directamente con el diseño que se presenta dejando entrever la correspondencia entre características de la circunferencia e intervalos que visualmente se vinculan, un ejemplo de esto es la relación directa con intervalos de crecimiento y decrecimiento. La manera en cómo se asignan estas características coinciden con los comportamientos de la acción mental dos (**AM2**) que junto a la acción mental uno (**AM1**) relacionan al estudiante en el **N2** de razonamiento covariacional.

La cuantificación del cambio asigna cantidades numéricas a las relaciones que hace el estudiante a la construcción que se asigna, el vínculo se establece cuando este logra relacionar números que se determinan directamente a considerar el software y que se generan a partir de considerar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. El estudiante logra determinar intervalos numéricos para el eje de las abscisas, en los cuales relaciona directamente los intervalos (crecimiento o decrecimiento) con valores numéricos establecidos en el programa. La anterior asignación vincula las acciones mentales anteriormente establecidas además de un comportamiento que determina la cuantificación del cambio en la construcción presentada, este relacionado con la acción mental tres (**AM3**). Hasta el momento se logra identificar en el estudiante tres acciones mentales que lo vinculan al **N3** de razonamiento covariacional.

Para la acción mental 4 (**AM4**) se relaciona aspectos con la razón de cambio promedio, situación por la cual se le pide al estudiante la construcción de una tabla en la que se relacionen valores para las abscisas, para las ordenadas y para la primera razón de cambio entre ellas. El estudiante logra vincular de una manera visual la primera razón de cambio con los valores de las imágenes, específicamente en el crecimiento y decrecimiento de la curva. Cuando la curva crece y las imágenes de la función aumentan la razón de cambio disminuye, de manera contraria, se determina que la razón de cambio aumenta en magnitud cuando la curva decrece, es decir cuando las imágenes de la función tiene valores que disminuyen. Este comportamiento asigna la cuarta de las acciones mentales y determina la evolución del estudiante en su razonamiento covariacional el cual se asigna al **N4**. El último de los niveles de razonamiento covariacional no se determina, el estudiante no logra generar la concepción de valores más allá de los determinados por el diseño. Lo cual lo catapulta en el nivel cuatro de razonamiento covariacional (**N4**).

La investigación que aquí se refiere deja identificar y describir los niveles de razonamiento covariacional en los estudiantes aquí identificados, correspondiendo el objetivo de este estudio. A continuación se presentan algunas consideraciones extras las cuales concluyen el presente estudio

5.2 Algunas consideraciones del estudio

Para la consecución del objetivo, fue necesario abordar conceptos de la trigonometría y geometría como circunferencia unitaria, traslación de medidas y algunas otras nociones que se relacionaban directamente con la construcción. A continuación se presenta algunas conclusiones relevantes una vez culminado el estudio:

- La revisión de la literatura reconocía una concepción imperante en la comprensión de las funciones trigonométricas, destacando el triángulo trigonométrico y las razones trigonométricas como situaciones favorables en el aprendizaje de las funciones trigonométricas. En esta investigación se abandona un poco esta postura determinando a la circunferencia unitaria como concepto relacionante que vincula este tipo de funciones en particular la que determina la función trigonométrica seno.
- Las actividades planteadas buscaban que los estudiantes se apoyaran de un tipo de herramientas que relacionaban las concepciones previamente desarrollada, esto a través de la manipulación de conceptos como: longitud de arco, proyección dirigida y traslación de medidas. Esto para que a través de su misma experiencia observaran, manipularan y operaran con el fin de construir el concepto de función seno de una manera covariacional.
- De las actividades que materializaban el objetivo de la investigación, es la entrevista la que permite la identificación de los comportamientos para cada una de las acciones mentales. A través de la entrevista y el dialogo con el entrevistador-investigador se encaminaba y promovían en los estudiantes la evolución de su razonamiento permitiendo en estos la evolución de sus

concepciones establecidas para la función seno desde una perspectiva covariacional.

- La propuesta abordada considera la comprensión de la función trigonométrica seno en términos de la longitud del arco y la proyección dirigida de este sobre el eje y, lo cual permitió la construcción covariacional del concepto a partir de su propia experiencia. Entendiendo además lo que significa el argumento de la función "x" al variar el $\operatorname{sen} x$, x en este caso representa la longitud de arco.
- Las nociones matemáticas que se evidencian del desarrollo de la actividad resaltan en la función seno características que se reconocen a partir de la experiencia del estudiante, nociones matemáticas como el cambio y la codependencia de variables adquieren significados por parte de este y se relacionan explícitamente con la función seno, un ejemplo de ello es la concepción del patrón desencadenante de la función. El argumento numérico de la función tenía un significado, es decir; fue posible entender la función seno (en este caso) como aquella relación de números reales con números reales, nociones como el rango y el dominio eran posibles de visualizar y ligar con situaciones de codependencia y cambio
- Finalmente se considera que este tipo de investigaciones y los resultados obtenidos sean de gran utilidad para los maestros en cuanto al diseño de nuevas situaciones para la enseñanza de las funciones trigonométricas en general y en la que se potencialice el razonamiento covariacional.

- Es a partir de los diálogos que se generan en la entrevista y las preguntas formuladas donde los niveles de razonamiento covariacional y las acciones mentales en particular son posibles de identificar. Resaltando de una manera muy coherente como a través de estas situaciones es que los estudiantes plantean, reflexionan y confrontan con las respuestas que se expresan
- Los comportamientos expresados para la determinación de las diferentes acciones mentales se consolidaron a partir de determinar valores discretos y concebir la continuidad en un conjunto de puntos para la consolidación de la función trigonométrica seno.

- Los niveles de razonamiento covariacional alcanzados por los estudiantes permiten que los tres alcancen el nivel relacionado a la razón promedio (**N4**) y sólo uno de ellos se le identifique en el de la razón instantánea (**N5**).
- La propuesta de investigación explora un enfoque covariacional en esta se considera a la circunferencia unitaria, la medida de la longitud de arco y las imágenes que se producen de la traslación de la proyección dirigida del arco sobre el eje de las ordenadas, tomando como conceptos centrales la variación que entre ellos se producen.

Referencias bibliográficas

Akkoc, H. (2008). Pre-service mathematics teachers' concept images of radian. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 39(*7*)*, 857-878.

Brown, S. (2006). *The trigonometric connection: students' understanding of sine and cosine*. Trabajo presentado en: Group for the Psychology of Mathematics Education (PME). Praga, Republica checa. Recuperado de http://www.pmtheta.com/uploads/4/7/7/8/47787337/exemplification_in_mathematics_education_pme_rf_2006_1_125.pdf#page=338

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33(5)* 352-378.

Carvajal, A. (2008). Elementos de investigación social aplicada. *Cuadernos de cooperación para el desarrollo.* Santiago de Cali, Colombia: Editorial Universidad del Valle.

Demir, Ö, & Heck, A. (2013). A new learning trajectory for trigonometric functions. Trabajo presentado en: 11 International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT11). Bari, Italia. Recuperado de http://dare.uva.nl/search?identifier=cad7c83c-e367-4020-91a5-be120d715321

Ferrari-Escolá, M., Martínez-Sierra, G., & Méndez-Guevara, M. E. M. (2016). "Multiply by adding": Development of logarithmic-exponential covariational reasoning in high school students. *The Journal of Mathematical Behavior*. *42*, 92-108.

Fi, C. D. (2003). *Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: Subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy*. (Phd). Universi de Iowa, Ciudad de Iowa, Estados Unidos.

Fi, C. (2006). Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: Cofunctions. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Mérida, México. Recuperado de http://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/34739146/Book_from_conference.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1497036354&Signature=3vPqufsnDL6NflrtzUyaBqnzQKk%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DORAL_RETELLINGS_SOLUTION_STRATEGY_FOR_CO.pdf#page=971

Johnson, H. L. (2012). Reasoning about variation in the intensity of change in covarying quantities involved in rate of change. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 313-330.

Martínez, P. (2006). El método de estudio de casos: Estrategia métodologica de la investigación científica. *Pensamiento y gestión.* (*5*), 165-193

Moore, K. C. (2012). Coherence, quantitative reasoning, and the trigonometry of students. In R. Mayes & L. L. Hatfield (Eds.), *Quantitative reasoning and mathematical modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context* (pp. 75–92). Laramie, WY: University of Wyoming.

Moore, K. C. (2013). Making sense by measuring arcs: A teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics. 83*(2), 225-245.

Moore, K. C. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education. 45*(1), 102-138.

Moore, K. C., La Forest, K. R., & Kim, H. J. (2015). Putting the unit in pre-service secondary teachers' unit circle. *Educational Studies in Mathematics. 92*(2) 1-21.

Rodríguez G. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Granada, España: Aljibe.

Rodriguez, Y. & Sarmiento, B. (s/f). *Construcción geométrica de las funciones trigonométricas*. Universidad Pedagógica Nacional. Disponible en: http://www.matvirtual.com/articulos/Construccion_Trigonometricas.pdf

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*. *77*(1), 20-26.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*. *12*(2), 151-169

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2016). *Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically*. Compendium of Research in Mathematics Education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P. W., Carlson, M. P., Byerley, C., & Hatfield, N. (2014). Schemes for thinking with magnitudes: A hypothesis about foundational reasoning abilities in algebra. In L. P. Steffe, K. C. Moore, L. L. Hatfield, & S. Belbase (Eds.), *Epistemic algebraic students: Emerging models of students' algebraic knowing* (pp. 1–24). Laramie: University of Wyoming

Thompson, P.W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. En E. Dubinsky, A.H. Schoenfeld y J.J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, 1: Issues in Mathematics Education,* (pp. 21- 44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Villa-Ochoa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED,* (31), 9-25.

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20,* 356-366.

Weber, K. (2008). Teaching trigonometric functions: *Lessons learned from research. Mathematics teacher, 102*(2), 144-150.

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, *17*(3), 91-112.

Yemen-Karpuzcu, S., Ulusoy, F., & Işıksal-Bostan, M. (2015). Prospective Middle School Mathematics Teachers' Covariational Reasoning for Interpreting Dynamic Events During Peer Interactions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, (1)13, 1-20.

Yiğit, M. (2014). *Learning of trigonometry: An examination of pre-service secondary mathematics teachers' trigonometric ratios schema*. (Phd thesis). Purdue University, Indiana, Estados unidos.

Yiğit Koyunkaya, M. (2016). Mathematics education graduate students' understanding of trigonometric ratios. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. *47* (7) 1-21.