



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA



**COMPETENCIAS Y MODELOS MATEMÁTICOS PUESTOS EN JUEGO AL
RESOLVER UNA SITUACION ASOCIADA A EXPRESIONES CUADRÁTICAS CON
ESTUDIANTES DE BACHILLERATO**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

PRESENTA:

SALVADOR LÓPEZ LÓPEZ

DIRECTORA DE TESIS

DRA. MARÍA GUADALUPE CABAÑAS-SÁNCHEZ

CHILPANCINGO, GUERRERO.

ENERO, 2017

**COMPETENCIAS Y MODELOS MATEMÁTICOS PUESTOS EN JUEGO AL
RESOLVER UNA SITUACION ASOCIADA A EXPRESIONES CUADRÁTICAS
CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO**

Salvador López López



Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología
por el apoyo financiero otorgado para la realización
de mis estudios de maestría.

Registro No. 630055

Agradecimientos

*A mi esposa **Rosario** y a mis hijos **Alejandro** y **Laura** por su amor y comprensión durante el tiempo dedicado a mis estudios de maestría, ya que si ellos no hubiese logrado concluirlos.*

A mis padres y hermanos.

A la Universidad Autónoma de Guerrero.

*A mi directora de tesis, **Dra. María Guadalupe Cabañas Sánchez**, por dedicarme parte de su valioso tiempo y por compartir sus conocimientos que fueron fundamentales en el desarrollo de este trabajo. Gracias por su apoyo en todo momento.*

A mis sinodales, M.C. Nancy Marquina Molina y M.C. Edilberto Meza Fitz por el tiempo dedicado y las contribuciones en la mejora de este trabajo.

A todos los profesores que fueron parte de mi formación y que me brindaron su amistad.

A mis compañeros de generación, Vicky, Sara, Johnny y a mi gran amigo Francisco por compartir este tiempo que duró nuestros estudios.

Índice

Abreviaturas	i
Introducción	ii
Capítulo 1. Contexto y planteamiento del problema objeto de estudio	1
1.1 Contexto de estudio	1
1.2 Programa de estudios de la unidad de aprendizaje de Matemáticas II	2
1.2.1. Propósitos generales	2
1.2.2. Competencias del programa de estudios de Matemáticas II	3
1.2.3 La secuencia didáctica de la Unidad de Aprendizaje de Matemáticas II	6
1.3 El libro de texto de la Unidad de Aprendizaje de Matemáticas II de la UAGro	9
1.3.1. Las situaciones en el libro de texto	11
1.3.2. Comentarios relacionados con de libro de texto	12
1.4. Antecedentes relacionados con recientes investigaciones en la UAGro sobre modelación matemática y desarrollo de competencias	13
1.5. Perspectivas de modelación matemática	14
1.6. Delimitación del problema que orienta al desarrollo de este trabajo	16
Capítulo 2. Marco conceptual	18
2.1. Introducción	18
2.2. Modelo matemático y modelación matemática	19
2.3. La modelación matemática como proceso	19
2.4. Ciclo de modelación bajo la perspectiva cognitiva	20
2.5. Realidad	22
2.6. Competencia	23
2.6.1. Competencia genérica	23
2.6.2. Competencia disciplinar	23
2.6.3. Competencia disciplinar básica	23
Capítulo 3. Aspectos metodológicos	25
3.1. Participantes y contexto	25
3.2. Conocimientos previos de los estudiantes de segundo semestre de NMS de la UAGro	25
3.3. Situación de modelación asociada a expresiones cuadráticas (SMAEC)	26

3.4 Las actividades de la SMAEC	28
3.4.1 Actividad 1	28
3.4.2 Actividad 2	30
3.5 Unidades de análisis	33
3.6 Proceso de modelación articulado con la situación	34
3.6.1 Descripción de los procesos cognitivos asociados al ciclo de modelación en el marco de la SMAEC y a las UA	35
3.7 Recolección de los datos	37
Capítulo 4. Análisis de las actividades y resultados	38
4.1. Introducción	38
4.2. Análisis de las competencias por actividad	39
4.2.1. Actividad 1	39
4.2.1.1 UA1	39
4.2.1.1.1. Reflexión sobre las competencias en el marco de la UA1	42
4.2.1.2 UA2	43
4.2.1.2.1. Reflexión sobre las competencias en el marco de la UA2	46
4.2.1.3 UA3	48
4.2.1.3.1. Reflexión sobre las competencias en el marco de la UA3	52
4.2.1.4. Reflexión sobre la actividad 1	56
4.2.2. Actividad 2	57
4.2.2.1. UA4	57
4.2.2.1.1. Reflexión sobre las competencias en el marco de la UA4	59
4.2.2.2. UA5	61
4.2.2.2.1. Reflexión sobre las competencias en el marco de la UA5	62
4.2.2.3. UA6	64
4.2.2.3.1. Reflexión sobre las competencias en el marco de la UA6	65
4.2.2.4. UA7	67
4.2.2.4.1. Reflexión sobre las competencias en el marco de la UA7	70
Capítulo 5. Consideraciones finales	75
5.1. Introducción	76
5.2. Competencias a desarrollar en los estudiantes	76
5.3. Situación de modelación asociada a expresiones cuadráticas	78
5.4. Modelo cognitivo	79

5.5. Unidades de análisis de la SMAEC y su correspondencia con el ciclo de modelación	80
5.6. Caracterización de las competencias en la interpretación y explicación de la SMAEC	80
5.6.1 Procesos desarrollados por los estudiantes en la interpretación y explicación de la SMAEC	80
a) Comprensión de la tarea	80
b) Simplificación y estructuración	81
c) Matematización	83
d) Trabajo matemático	84
e) Interpretación	85
f) Validación	86
g) Presentación	86
Referencias bibliográficas	89
Anexos	92
Anexo 1	92
Anexo 2	96
Anexo 3	100

Abreviaturas

ACC	Atributo de competencia conceptual
ACP	Atributo de competencia procedimental
ACA	Atributo de competencia actitudinal
DOF	Diario oficial de la federación
E	Equipo
EMS	Educación Media Superior
F	Fase
ME	Modelo Educativo
M	Momento
NMS	Nivel Medio Superior
P	Proceso
SD	Secuencia Didáctica
SMAEC	Situación de Modelación Asociada a Expresiones Cuadráticas
UA	Unidad de Análisis
UC	Unidades de Competencia
UAp	Unidad de Aprendizaje
UAGro	Universidad Autónoma de Guerrero

Introducción

El presente trabajo reporta un estudio que se interesó por el desarrollo de competencias genéricas y disciplinares en estudiantes matriculados en segundo semestre de la Escuela Preparatoria No. 1 de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro). Se llevó a cabo al momento que los estudiantes interpretaban y explicaban una situación asociada a su entorno inmediato, en el marco de la Unidad de Aprendizaje Matemáticas II.

El trabajo se motiva por el desafío que los profesores de nivel medio superior de la UAGro encaran ante un proceso de reforma educativa basado en un enfoque por competencias. En ese tenor, como parte de su comprensión y ejecución, se plantea el reto de diseñar situaciones que favorezcan el desarrollo de ese tipo de competencias.

En el marco del enfoque por competencias, se plantea el desarrollo de aprendizajes funcionales de tres tipos: Conceptuales (saber), procedimentales (saber hacer) y actitudinales (saber ser), con los cuales se busca contribuir a que los estudiantes afronten desafíos de la realidad en que están inmersos e incidan sobre ella. Así mismo, en la formación de jóvenes reflexivos, propositivos y capaces de aprender de forma autónoma y además, que su nivel de desempeño les permita ubicarse dentro de los estándares establecidos a nivel internacional (UAGro, 2013).

En ese contexto, en este trabajo se consideró una situación de modelación, a la que se denominó Situación de Modelación Asociada a expresiones cuadráticas (SMAEC), que su interpretación y explicación remite al uso de expresiones cuadráticas del tipo $ax^2 + bx + c$ donde a, b, c son números reales y $a \neq 0$. La SMAEC se constituye de actividades que promueven en los estudiantes, su interpretación y explicación con base en tres tipos de modelos: algebraico, tabular y gráfico. Asimismo, que reconozcan dos tipos de soluciones, la relativa a la situación y la correspondiente a los modelos matemáticos. En ese proceso, se reconocen características invariantes de los conceptos de función, ecuación e inecuación de segundo grado.

La SMAC usada en este trabajo, refiere a un fenómeno cercano al entorno (o región) de los estudiantes, tal como lo establece el programa de matemáticas de las escuelas

preparatorias de la UAGro. Su desarrollo en condiciones de enseñanza, tomó como base el ciclo de modelación de Blum & Leiß (2006 en Blum y Borromeo 2009, p. 46), a fin de reconocer en cada fase (según este modelo), las competencias puestas en juego mientras los estudiantes interpretan y explican una situación de modelación asociada a expresiones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c$.

A grandes rasgos el contenido de este documento es el siguiente:

En el **capítulo uno** se enfoca al contexto de estudio, el cual está basado en comentarios relacionados con documentos del NMS de la UAGro, como son el Modelo Educativo 2013, el plan de estudios 2010, programa de estudios de Matemáticas II, la estructura del libro de texto de Matemáticas II y de las situaciones planteadas en el mismo, también se presentan algunos trabajos de investigaciones recientes relacionadas con el tema objeto de estudio. En este mismo capítulo se plantea el problema que se pretende abordar en el desarrollo de este trabajo.

En el **capítulo dos** se presenta el marco conceptual relacionado con los elementos teóricos que sustentan el trabajo como son los conceptos de: modelo matemático, modelación matemática, realidad, competencia, competencia genérica, disciplinar y disciplinar básica, así como el ciclo de modelación.

En el **capítulo tres** se muestra la metodología desarrollada, la población objeto de estudio, el contexto, la situación de modelación y su organización dentro del aula, las unidades de análisis, las fases y procesos desarrollados con la SMAEC en el ciclo de modelación de Blum & Leiß (2006 en Blum y Borromeo 2009, p. 46), y la recolección de los datos.

En el **capítulo cuatro** se presentan los resultados mediante la interpretación de las producciones escritas y las explicaciones de los estudiantes, las notas del profesor y videograbaciones de las actividades.

En el **capítulo cinco** se refiere a las conclusiones relacionadas con las competencias puestas en juego durante los procesos en el ciclo de modelación, los modelos construidos y utilizados para explicar la situación.

Capítulo 1

Contexto y planteamiento del problema objeto de estudio

1.1 Contexto de estudio

El presente trabajo se enmarca en el actual proceso de reforma educativa implementado en las escuelas de Nivel Medio Superior (NMS) de la UAGro, el que se circunscribe en la reforma nacional llamada Reforma Integral de la Educación Media Superior. Uno de los desafíos fundamentales establecidos en esta reforma de la UAGro, es la formación integral del estudiante, a través del desarrollo de competencias genéricas y disciplinares.

El Modelo Educativo (ME) de la universidad (UAGro, 2013) refiere que las competencias se integran con los conocimientos, habilidades, actitudes y valores que posee la persona y que se pone de manifiesto en el desarrollo de una acción individual determinada. Delors, (1996) señala cuatro pilares en la educación como aprendizajes fundamentales: aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir juntos y aprender a ser. Estos cuatro pilares en el ME se relacionan con las competencias que los sujetos deben adquirir para garantizar una formación integral, donde: *Aprender a conocer*: es un proceso cognitivo que involucra el dominio de los instrumentos del saber para vivir con dignidad, y el desarrollo de las capacidades profesionales y comunicación con los demás. *Aprender a hacer*: indisociable del primero, implica poner en práctica los conocimientos. *Aprender a vivir juntos*: es saber actuar bajo un contexto de igualdad con objetivos y proyectos comunes para generar cooperación y amistad). *Aprender a ser*: es saber tomar decisiones de forma autónoma a lo largo de la vida (UAGro, 2013).

En ese marco, en el ME de la UAGro el centro de atención está puesto en el estudiante concibiéndolo como un individuo activo, constructor de un conocimiento con significado y aplicado dentro y fuera de su entorno social. El rol del profesor por su parte, se concibe

como quien contribuye al desarrollo de las competencias que el estudiante debe lograr con base en el perfil de egreso; considerado como facilitador, organizador y creador de situaciones de aprendizaje, promotor de aprendizajes colectivos, y significativos por descubrimiento.

Es en el marco filosófico y pedagógico del ME donde se manifiesta la necesidad de *“Formar y actualizar de manera integral, con elevado compromiso social en sus diversas modalidades educativas a los bachilleres, técnicos, profesionales, postgraduados, profesores universitarios e investigadores; en función de sus necesidades académicas y de los requerimientos de la entidad y la nación”* (UAGro, 2,013 p.26).

Es en los principios generales de este ME donde se enfatiza en la formación de los estudiantes, la cual deberá ser: humana, integral, pertinente, propositiva y contextualizada. La concepción de aprendizaje se establece en el Marco Pedagógico, y es considerado como una forma de conocimiento, como proceso social, autónomo y significativo. El aprendizaje se plantea contextualizado o relacionado con su entorno social, de tal manera que los conocimientos adquiridos puedan ser aplicados a otras situaciones análogas o distintas, poniendo en juego las competencias que el estudiante tiene y las desarrolladas; pretendiendo que en este proceso sean cooperativos, activos, reflexivos, con deseo de aprender, que pongan en funcionamiento los conocimientos previos y los contraste con los nuevos, dando respuesta a las situaciones, con un profesor facilitador y mediador de aprendizajes, con capacidad en el diseño de estrategias y ambientes de aprendizaje, promotor en el desarrollo de las competencias, dentro y fuera del aula, que interactúe con los estudiantes pero que deja, que sean ellos los protagonistas.

1.2. Programa de estudios de la unidad de aprendizaje de Matemáticas II

1.2.1. Propósitos generales

El propósito general de las Unidades de Aprendizaje (UAp) de Matemáticas en el NMS de la UAGro, es que el estudiante desarrolle habilidades del pensamiento, comunicación y transferencia hacia contextos matemáticos y extra matemáticos a través de apropiación y aplicación de contenidos fundamentales de las ecuaciones, funciones e inecuaciones de segundo grado incompletas y completas, que le permitirán usarlas en la resolución de problemas vinculados con su comunidad y su región. A su vez, que valore la importancia

de la persistencia, el razonamiento lógico, la creatividad y la independencia de criterio, cuando el proceso de solución de problemas trabaja en forma colaborativa y fortalece el desarrollo de las habilidades teórico prácticas (UAGro, 2010b).

Es en el programa de estudio (PE) de Matemáticas II del actual Plan de estudios del NMS de la UAGro (UAGro, 2010b) donde ponemos nuestra atención. En este PE se describen las competencias genéricas¹ y disciplinares² de la matemática a desarrollar en los estudiantes, el tipo de habilidad creativa, del razonamiento que le permita argumentar y estructurar las ideas que den respuesta a las inquietudes que le son planteadas día con día, utilizando también el pensamiento lógico y crítico, con estrategias que den paso al proceso de modelación de los fenómenos de la vida cotidiana en diferentes representaciones: lenguaje común, algebraico, gráfico; dando siempre a ellos la estafeta de constructores de su propio conocimiento. Ello plantea la necesidad (e incluso exigencia) de proponer situaciones que promuevan el desarrollo de las competencias, marcadas en cada uno de los programas de estudios de Matemáticas, en el que se presentan además de las competencias, sus atributos: los conceptuales (saber), procedimentales (saber hacer) y actitudinales (saber ser).

1.2.2. Competencias en el programa de estudios de Matemáticas II

El PE de la unidad de aprendizaje (UAp) de Matemáticas II del NMS de la UAGro, está enfocado al desarrollo de competencias con base en el perfil de egreso que los estudiantes deben lograr. Esto plantea la necesidad de trabajar situaciones diseñadas por el profesor, relacionadas con fenómenos de la vida cotidiana, buscando que el curso sea dinámico y como lo menciona una de las competencias a desarrollar en el estudiante que es la *construcción e interpretación de modelos matemáticos*, a través del trabajo individual y colaborativo. El PE está dividido en cuatro unidades (ver anexo 3) llamadas unidades de competencia (UC), son las siguientes:

UC I: Los fenómenos de tu comunidad. Ecuaciones incompletas de 2° grado.

UC II: Los fenómenos de tu comunidad. Ecuaciones completas de 2° grado.

¹ DOF (2009) Competencias Genéricas son las que todos los bachilleres deben estar en capacidad de desempeñar; las que les permiten comprender el mundo e influir en él; les capacitan para continuar aprendiendo de forma autónoma a lo largo de sus vidas, y para desarrollar relaciones armónicas con quienes les rodean, así como participar eficazmente en los ámbitos social, profesional y político.

² DOF (2009) Las competencias disciplinares básicas de matemáticas buscan propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes.

UC III: Los fenómenos de tu región. Inecuaciones incompletas de 2° grado.

UC IV: Los fenómenos de tu región. Inecuaciones completas de 2° grado.

La tabla 1.1 muestra el contenido de la UC II, en la que se establece este trabajo. En ella se evidencian las competencias disciplinares (cinco) y los respectivos atributos de competencia. Estos se articulan a los conceptos matemáticos (saber) a poner en juego por tipo de competencia, así como las habilidades (saber hacer) y actitudes a desarrollar (saber convivir). En la parte conceptual como puede verse, se trabaja con expresiones cuadráticas completas, funciones, ecuaciones de segundo grado, factorización, completar un trinomio cuadrado perfecto, variables, constantes, trabajo con gráficas y tablas de valores.

Tabla 1.1
Unidad II de la unidad de aprendizaje de Matemáticas II

Unidad de competencia	Los fenómenos de tu comunidad. Ecuaciones completas de segundo grado.	Sesiones previstas	12
Propósitos	Se espera que al finalizar la unidad el estudiante sea capaz de: Resolver problemas verbales y algebraicos de diversos tipos, relacionados con expresiones cuadráticas incompletas. Establecer una secuencia lógica en el análisis de los diferentes procesos algebraicos concernientes a las expresiones cuadráticas incompletas		
Competencias disciplinares	Atributos de competencia		
	Conceptuales (saber)	Procedimentales (saber hacer)	Actitudinales (Saber ser, saber convivir)
Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante el lenguaje verbal y matemático.	<input type="checkbox"/> Expresiones cuadráticas. <input type="checkbox"/> Ecuación completa de 2° grado.	Caracteriza expresiones completas de 2° grado. Traduce un problema del lenguaje coloquial al lenguaje algebraico. Construye expresiones completas de 2° grado que representan fenómenos descritos en lenguaje común.	Valora la importancia del lenguaje algebraico en la representación de la realidad. Comunica y comparte de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos.
Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para estimar su comportamiento.	<input type="checkbox"/> Modelo algebraico para expresiones completas de 2° grado. <input type="checkbox"/> Magnitudes: variables y constantes.	Ubica en el modelo algebraico las magnitudes que intervienen en el fenómeno. Distingue las partes de un problema que corresponden a las variables y constantes.	Comunica y comparte de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos.
Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	Reglas de las operaciones algebraicas: <input type="checkbox"/> Factorización. <input type="checkbox"/> Completar el cuadrado perfecto. <input type="checkbox"/> Fórmula general. Análisis del discriminante, escritura de los números complejos.	Transforma las expresiones aplicando las reglas de las operaciones algebraicas. Identifica las expresiones que corresponden a los productos notables. Utiliza el método de completar el cuadrado perfecto cuando el de factorización no es posible. Encuentra y utiliza la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas completas. Plantea la necesidad de ampliar el sistema de los números reales al sistema de números complejos.	Valora de forma crítica su desempeño personal en la interpretación adecuada de situaciones planteadas, reconociendo sus limitaciones y fortalezas.
Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos para	<input type="checkbox"/> Funciones de 2° grado.	Distingue las particularidades de una ecuación, una inecuación y una función de segundo grado.	Valora el lenguaje algebraico como herramienta de síntesis de

Capítulo 1. Contexto y planteamiento del problema objeto de estudio

la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.			información acerca de los fenómenos de su entorno.
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	Registro algebraico <input type="checkbox"/> Gráficas. <input type="checkbox"/> Figuras. <input type="checkbox"/> Tablas de valor.	Representa gráficamente la relación entre las variables y la solución de las inecuaciones. Demuestra la equivalencia entre las expresiones y sus factores.	Confronta sus preconcepciones acerca de las expresiones de 2º grado con el nuevo conocimiento algebraico, mejorando sus argumentos para explicar la realidad.
Situación de aprendizaje:	Trabajo colaborativo. Aprendizaje basado en problemas.	Tema(s) transversal(es):	Educación para la no discriminación. Educación para la convivencia.
Nivel de desempeño esperado	Comprensión: <input type="checkbox"/> Identifica los detalles de la información que son importantes. <input type="checkbox"/> Ubica la información en la categoría apropiada. Análisis: <input type="checkbox"/> Utiliza lo que ha aprendido para crear nuevos conocimientos y aplicarlo en situaciones nuevas.		

Cabe destacar que las competencias disciplinares a desarrollar en los estudiantes mediante las cuatro UC de la UAp Matemáticas II, son las mismas para todas. Se distinguen cambios, únicamente en los atributos (véase Anexo 3).

Las competencias genéricas a desarrollar en los estudiantes durante su etapa de formación en el NMS y que forman parte del Marco Curricular Común pueden verse en el anexo 1. Las que competen al programa de estudios de Matemáticas II y en este trabajo, se describen en la tabla 1.2

Tabla 1.2
Competencias genéricas de la UAp Matemáticas II

Competencia genérica	Atributo
Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados	<ul style="list-style-type: none"> • Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. • Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.
Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	<ul style="list-style-type: none"> • Reconoce los propios prejuicios, modifica sus puntos de vista al conocer nuevas evidencias, e integra nuevos conocimientos y perspectivas al acervo con el que cuenta. • Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sistémica.
Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	<ul style="list-style-type: none"> • Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos. • Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva. • Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

1.2.3. La secuencia didáctica de la UAp Matemáticas II

Como parte de los aspectos pedagógicos a considerar por los profesores de Matemáticas que desarrollarán las UAp en esta área, se plantea el diseño y uso de secuencias didácticas (SD)³. Estas SD comprenden tres momentos (M) en su planificación y desarrollo, atendiendo siempre la formación de competencias en los estudiantes (Ver tabla No. 1.3.).

Tabla No. 1.3. Momentos de las secuencias didácticas

Momentos (M)	Objetivo
M1: Apertura	Pretende la recuperación de conocimientos previos y problematizar.
M2: Desarrollo	El estudiante procesa la nueva información, la aplica y transfiere.
M3: Cierre	El estudiante aplica y transfiere a otras situaciones lo aprendido.

En la UAp Matemáticas II, a modo de ejemplo se muestra una SD (ver tabla 1.4), en la que se sugiere al profesor de matemáticas, la manera de plantear a los estudiantes una situación, de las estrategias a utilizar, los recursos contemplados y la evaluación, entre otros aspectos.

Respecto de la evaluación de los aprendizajes, se consideran tres tipos, según el momento: Diagnóstica, Formativa y Sumativa. Consisten, desde la perspectiva de Orozco-Jutorán, y Mariana (2006), de lo siguiente:

- a) **Evaluación diagnóstica:** Se centra en el tipo y nivel de conocimientos que tienen los alumnos antes de iniciar ese curso o esa asignatura.
- b) **Formativa:** Se basa en el estudiante. Es un seguimiento de carácter informativo y orientador, que permite al profesor y al alumno conocer los progresos de estos últimos.
- c) **Sumativa:** Es un balance que se realiza al final del periodo que dura una asignatura y que tiene por objeto conocer el grado de aprendizaje de los alumnos en ese

³ Son conjuntos articulados de actividades de aprendizaje y evaluación que con la mediación de un docente, buscan el logro de determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos (Tobón, Pimienta y García, (2010, p. 20).

espacio de tiempo concreto. La evaluación sumativa conlleva otorgar una calificación final que es la que consta en el expediente académico.

En la UAp Matemáticas II, se muestran al profesor aspectos a evaluar, procedimientos de y criterios de evaluación, y formas de ponderación por cada tipo de evaluación. La ponderación está prevista solo para las evaluaciones formativa y sumativa, y se plantea en términos de porcentaje cada tipo de atributo: a) Saber (30%); b) Saber hacer (50%), y; c) Saber convivir con los demás y saber ser (20%), tal como se evidencia en la Tabla No. 1.5.

Tabla 1.4
Ejemplo de secuencian didáctica

Secuencia didáctica (ejemplo)			Tiempo aproximado: 20 horas					
Momento	Función	Actividades del alumno (secuencia didáctica)	Estrategias (Situación didáctica)	Recursos	Evaluación			
					Función	Participa	Producto	Instrumento
Apertura	1. Recuperar conocimiento previo. 2. Problematizar	<ol style="list-style-type: none"> 1. Observa el escenario: una imagen de un terreno colindante con un río y escucha la narración del profesor acerca del mismo: "Se desea cercar un terreno de forma rectangular, se dispone de 300 metros lineales de malla ciclónica. Un río corre a lo largo de uno de sus lados, en el que no se pondrá cerca. Se necesita representar el conjunto de condiciones de la situación". 2. En una lluvia de ideas coordinada por el profesor intercambia puntos de vista con la intención aclarar la situación relatada. 3. Individualmente redacta el conjunto de condiciones de la situación, identificando los elementos conocidos y desconocidos. 4. Propone individualmente un modelo de representación de las condiciones de la situación. <ol style="list-style-type: none"> 5. Comparte en binas su representación buscando semejanzas y diferencias para elaborar una sola y, posteriormente, cada pareja comparte su propuesta con otra elaborando una nueva. 6. Analiza atentamente las dimensiones incluidas en una rúbrica proporcionada por el profesor y consulta con éste cualquier duda al respecto. <ul style="list-style-type: none"> * Para el análisis: inferencia y análisis de los datos. * Para la el diseño: efectividad de la propuesta, creatividad y justificación de la misma. * Para el trabajo de colaboración: cooperación, responsabilidad individual y resolución de conflictos. 7. Contesta de su modelo la medida en que cumple con dichas dimensiones. 8. Presenta sus resultados al profesor para su evaluación y redacta sus conclusiones, estableciendo un autocompromiso para superar sus deficiencias 	Escenario. Lluvia de ideas. Trabajo individual. Trabajo Colaborativo.	Imagen del terreno. Texto del problema. Cuaderno de clase.	D	A C H	Participación. Texto de las Condiciones Modelo Reporte de conclusiones.	Registro de participación con escala. Texto escrito Rúbrica.

Capítulo 1. Contexto y planteamiento del problema objeto de estudio

Desarrollo	3. Adquirir y organizar nueva información.	9. Elabora un cuadro comparativo de las representaciones y analiza si alguna contiene todos los elementos de la situación planteada. 10. Propone los elementos que no fueron considerados. 11. Consensa con el grupo una representación que incluya los elementos que faltaron. 12. Analiza atentamente las dimensiones incluidas en una rúbrica proporcionada por el profesor y consulta con éste cualquier duda al respecto. * Para el análisis: inferencia y análisis de los datos. * Para la el diseño: efectividad de la propuesta, creatividad y justificación de la misma. * Para el trabajo de colaboración: cooperación, responsabilidad individual y resolución de conflictos. 13. Contesta de su modelo la medida en que cumple con dichas dimensiones. 14. Presenta sus resultados al profesor para su evaluación.	Trabajo individual. Trabajo Colaborativo.	Cuaderno de clase	F	A C	Cuadro comparativo Modelo	Lista de cotejo Rúbrica
Desarrollo	4. Procesar nueva información.	15. Atiende las orientaciones del profesor y toma notas sobre la necesidad de utilizar el lenguaje y las operaciones algebraicas para elaborar una forma más eficiente de representar las condiciones de la situación planteada. 16. Utiliza el lenguaje y las operaciones algebraicas para proponer una representación simbólica (modelo) de los elementos de la situación planteada. 17. Utilizando las operaciones algebraicas busca todas las formas que puede adoptar la expresión propuesta	Exposición magistral. Trabajo individual.	Cuaderno de clase.	F	A H	Modelo final Transformaciones del modelo	Texto escrito
Cierre	5. Aplicar, transferir información.	18. Expone el proceso que lo llevó al resultado. 19. Contesta las preguntas que hace el profesor respecto a diferentes aspectos del proceso que expuso. 20. Ante nuevas situaciones propuestas por el profesor encuentra el modelo que las representa.	Exposición. Preguntas Orientadoras. Trabajo individual.	Material para Exposición. Escenario de la nueva situación.	F	A H	Exposición. Modelo	Escala Estimativa Texto escrito
Cierre	6. Tomar conciencia (metacognición).	21. Escribe en su bitácora personal las respuestas a los siguientes cuestionamientos. ¿Qué complicaciones tuviste para modelar la nueva situación? ¿Qué fue lo que más se te dificultó representar? ¿Hubo alguien de tus compañeros que explicó cómo resolver el problema? ¿Qué aspectos cambiarías de la forma en que organizaste la actividad? ¿Qué medidas tomarás para evitar dificultades posteriormente?	Exposición magistral. Trabajo individual.	Lista de Preguntas. Cuaderno de clase.	F S	A H	Cuestionario resuelto	Texto escrito

Tabla 1.5
Evaluación de los aprendizajes

Evaluación de los aprendizajes				
Evaluación	Aspectos a evaluar	Procedimiento evaluación	Criterios de evaluación	Ponderación
Diagnóstica	Se evalúan los conocimientos previos al inicio del proceso de enseñanza-aprendizaje (al inicio de cada secuencia didáctica) para identificar fortalezas y debilidades de los estudiantes y replanificar dicho proceso.	Redacción de un texto Construcción de definiciones Análisis de información	Cada técnica y/o instrumento se propone en las secuencias didácticas de acuerdo al tipo de aprendizaje a evaluar.	Ninguna
Formativa	Deben evaluarse los progresos y debilidades detectados durante el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje, para reorientar el mismo y mejorar la formación de los estudiantes. Es una evaluación continua y conforma el portafolio de evidencias	Portafolio de evidencias	Los instrumentos deben ser validados antes de ser aplicados, de tal forma que proporcionen información que realmente evidencien los desempeños logrados.	Saber (30%) Saber hacer (50%) Saber convivir con los demás y saber ser (20%)
Sumativa	Los resultados de la evaluación formativa se utilizan para calificar a los estudiantes al terminar una unidad o el curso.	Calificación de los productos de la evaluación continua	Escolar vigente.	
Total				100%

1.3. El libro de texto de la Unidad de Aprendizaje de Matemáticas II de la UAGro

Con la intención de conocer la estructura del libro de texto de la UAp Matemáticas II (ver Jiménez et al, 2012) y sobretodo las situaciones planteadas hacemos un breve recorrido de él.

Al inicio se describen de forma general las competencias genéricas y disciplinares que un estudiante debe lograr durante los tres años del bachillerato. En la página 14 y 15 destaca las competencias que se desarrollarán a lo largo del curso, sin embargo, en las situaciones no se señalan las competencias que se están poniendo en juego con el fin de desarrollarlas.

En la parte conceptual se trabaja con los mismos contenidos del programa de estudios que contempla cuatro unidades, a diferencia del libro que solo son tres y que se mencionan a continuación:

- Unidad de competencia 1: Función cuadrática.
- Unidad de competencia 2: Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.
- Unidad de competencia 3: Inecuaciones de segundo grado.

En la primera unidad o **unidad de competencia 1** se inicia con el tema de Función Cuadrática, en donde es descrita como un caso particular de la función polinomial y su representación como:

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ con } a \neq 0 \text{ y } a, b \text{ y } c \in \text{ de los } \mathbb{R}$$

Posteriormente, explica los métodos algebraicos basado en procesos algorítmicos, que permiten resolver una ecuación de segundo grado, como: completar el trinomio cuadrado perfecto, fórmula general y factorización de ecuaciones completas e incompletas.

En la **unidad de competencia 2** se describen las ecuaciones de segundo grado con una incógnita, haciendo referencia a la solución de situaciones relacionadas con nuestro entorno, que se modelan y resuelven a través de ecuaciones de segundo grado con una variable, comúnmente descritas por la expresión $0 = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, y mediante el análisis del discriminante $b^2 - 4ac$ se puede saber de qué tipo serán las raíces: reales o complejas. Se amplía la información de la unidad uno, relacionada con los métodos para encontrar las raíces de la ecuación de segundo grado con relación a los procesos algebraicos. Es precisamente con esta unidad donde se trabaja con expresiones cuadráticas completas donde relacionamos la situación de modelación que aplicamos a los estudiantes, con la finalidad de poner en juego las competencias a desarrollar.

En esta unidad y de manera específica en la página 32 (ver Jiménez, A. et al, 2012) se inicia al planteamiento y solución de las llamadas *situaciones* (seis ejemplos) y de las cuales solo mostraremos dos a manera de ejemplo, con la finalidad de comparar la estructura del ambiente de aprendizaje propuesto en el programa de estudios, y la que presentan las situaciones del libro.

1.3.1. Las situaciones en el libro de texto

Situación 1: “Las medidas de la sala de cómputo”

La sala de cómputo de una escuela preparatoria del estado de Guerrero es de forma rectangular, su área es de 120 m^2 y el largo excede en 7 metros al ancho. ¿Cuáles son las medidas de dicha sala?

Seguidamente, se propone analizar la situación de manera individual y posteriormente en equipo, y plantea las siguientes interrogantes: ¿qué símbolo representa el ancho y el largo?, ¿qué expresión algebraica representa el área?, ¿qué expresión algebraica representa la expresión verbal: el largo excede en 7 metros al ancho? Estas preguntas las relacionamos con la recuperación de conocimientos previos.

Posteriormente se muestra la solución en base a las preguntas, proponiendo las representaciones de las variables en forma simbólica, también el modelo algebraico de la situación, así como el proceso de solución utilizando fórmula general, otra solución alternativa por factorización y una más relacionando la ecuación de segundo grado con una función con la intención de representarla mediante una gráfica.

En las tres primeras situaciones de las seis del libro, se intenta relacionarlas con los fenómenos de su comunidad, y las preguntas estructuradas al inicio de las tres primeras situaciones su intención es la recuperación de conocimientos previos relacionando estas con el momento de apertura, pero el trabajo individual y por equipo durante la solución de las situaciones no se ve reflejado, así como el momento del cierre de las mismas. La cuarta, quinta y sexta situación carecen de relación con estos fenómenos. Damos a manera de ejemplo la cuarta, que dice:

La suma de dos números es 10 y la suma de sus cuadrados es 58. Halle ambos números.

1.3.2. Comentarios relacionados con el libro de texto

De lo que observamos ninguna de las seis situaciones del libro corresponden a secuencias didácticas que permitan el desarrollo de competencias, además de no estar relacionadas con el ejemplo de la tabla 1.4 del programa de estudios. No están claramente definidos o no existen los momentos sugeridos en la secuencia con relación al trabajo individual, equipo y grupal; así como, los momentos de: apertura, desarrollo y cierre.

Solo para las primeras tres situaciones el momento de *apertura* lo relacionamos con las preguntas que aparecen al inicio de la solución de la situación, las cuales tienen la intención de recuperar los conocimientos previos, relacionados con el paso de la representación del lenguaje común al algebraico.

Estas preguntas invitan a los estudiantes reflexionar sobre los aspectos importantes de la situación, y posteriormente, es resuelta de una forma tradicional mostrando los procesos algorítmicos que dan solución a la situación y que está muy lejos de pretender que desarrollen sus propias estrategias y modelos, mediante los cuales puedan interpretar la situación.

Con relación a las competencias que se pretenden desarrollar con estos ejemplos, no se mencionan cuáles y en qué momento del proceso de solución de la situación se ponen en juego, dejando al profesor la tarea de determinarlas.

No se aprecia el trabajo colaborativo y la manifestación de sus inquietudes mediante una lluvia de ideas que les permita llegar algún acuerdo en forma grupal sobre dichos planteamientos, tampoco es posible ver el trabajo del docente como un mediador del desarrollo de las competencias señaladas en el programa, pues se supone que el libro tiene ese enfoque. Las demás situaciones propuestas tienen la misma estructura de solución a través de la mera memorización de algoritmos de solución. La unidad termina con la propuesta de resolver varios ejercicios y con la descripción de la rúbrica de evaluación.

1.4 Antecedentes relacionados con estudios recientes en la UAGro sobre modelación matemática y desarrollo de competencias

En Vargas (2015), se reporta un primer acercamiento desde la investigación, al desarrollo por competencias en el contexto del Plan de estudios de NMS de la UAGro. Plantea el desarrollo de competencias, mediante el uso de la modelación matemática, como una estrategia que le permita alcanzar esta meta. En este trabajo, Vargas (2015), aplica una serie de actividades diseñadas el M.C. Edilberto Meza Fitz, en las que utiliza la modelación de una situación asociada a lo lineal. Su estudio se sustenta además, en el ciclo de modelación de Blum y Leiss (2005, en Borromeo, 2006) como proceso que permite la revisión de las actividades. No obstante, se reconoce que el reporte de Vargas (2015), deja ver poca claridad en la relación de las fases del ciclo de modelación con cada una de las etapas de la situación planteada, también se presentan las componentes de competencia puestos en juego con estudiantes de primer grado de NMS que se pretendieron desarrollar.

Esta es una de las investigaciones recientes desarrolladas en la Universidad y otras más en proceso relacionadas con modelación matemática.

De lo anterior podemos decir que existe una necesidad de contar con situaciones que favorezcan el desarrollo de competencias a través de la modelación matemática, en cada una de las Unidades de Aprendizaje de Matemáticas del NMS de la UAGro, que faciliten el trabajo individual y colaborativo con los estudiantes y esto nos lleve a mejorar el perfil de egreso de los estudiantes.

Con relación a la Modelación como método (actualmente bajo el enfoque por competencias en lugar de método que es un poco más rígido se utiliza el término estrategia) de enseñanza y su objetivo bajo la perspectiva de Biembengut, M. y Hein, N. (2006), proporcionar al alumno una mejor aprehensión de los conceptos matemáticos, capacitación para leer, interpretar, formular y resolver situaciones-problemas, así como despertar el sentido crítico y creativo.

Las actividades de modelación matemática bajo la perspectiva de Córdoba (2011), pueden motivar el proceso de aprendizaje, crear raíces cognitivas sólidas para la construcción de

conceptos matemáticos de parte del alumno y ser un modo de desafiar sus conceptualizaciones al ampliar el dominio para las actividades de modelación. Existe un proceso de modelización detrás de todo modelo matemático. Esto significa que alguien de manera implícita o explícita ha recorrido un proceso de establecer una relación entre alguna idea matemática y una situación real.

Y debido a que la construcción de un modelo desde la perspectiva de Villa, J. A. (2007), no se hace de manera automática ni inmediata, por el contrario, requiere de cierto periodo de tiempo en el cual el modelador pone en juego sus conocimientos matemáticos, el conocimiento del contexto y de la situación y sus habilidades para describir, establecer y representar las relaciones existentes entre las “cantidades”, de tal manera que se pueda construir un nuevo objeto matemático.

1.5 Perspectivas de modelación matemática

Desde la literatura especializada se reconocen diferentes perspectivas sobre modelación, que los investigadores pueden adoptar en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas (e.gr., Blomhøj, 2009; Kaiser & Schwarz, 2010; Kaiser & Sriraman, 2006 en Årlebäck & Doerr, 2014). Dentro de estas perspectivas en Kaiser & Schwarz (2010, p.54), destacan siete principales las cuales se muestran en la tabla 2.1. Estas perspectivas no son en absoluto excluyentes entre sí ni cubren la totalidad del área de investigación, (Blomhøj, M., 2009). Una concepción de modelación matemática puede categorizarse en una u otra perspectiva dependiendo de la clasificación que se considere. Además, en una clasificación, puede ubicarse en más de una, pues suelen no ser disyuntas, ya que comparten características en común (Cetina-Vázquez, M., 2015).

En las 3 primeras columnas de izquierda a derecha de la tabla 1.6. se presentan las perspectivas destacadas por Kaiser y Schwarz, (2010, p.54), en la cuarta columna agregamos algunos antecedentes relacionados con investigaciones sobre estas perspectivas. De este breve recorrido por las diferentes perspectivas, enfocamos el estudio en la cognitiva, puesto que para el desarrollo de las actividades propuestas en este trabajo las relacionamos con el ciclo de modelación propuesto por Blum & Leiß (2006 en Blum y Borromeo 2009, p. 46).

Tabla 1.6. *Perspectivas de modelación matemática destacadas en Kaiser y Schwarz, (2010, p.54), ver versión original en inglés.*

Nombre de la perspectiva	Objetivos centrales	Antecedentes	Antecedentes
Modelación realista o aplicada	Objetivos Pragmático-utilitaristas, es decir: solución de problemas del mundo real, comprensión del mundo real, promoción de competencias de modelación	Pragmatismo anglosajón y matemática aplicada	La modelación realista hace referencia a que el modelado y los modelos matemáticos están siendo ampliamente utilizados en diferentes disciplinas científicas y tecnológicas en la resolución de problemas, Blomhoj (2009). En Córdoba (2011) menciona que es el proceso que nos lleva a transformar una situación del mundo real, a través de abstracciones y simplificaciones que se caracterizan en la obtención de un modelo, el cual será validado y reinterpretado en la situación real que le dio origen.
Modelación contextual	Relacionados con contenidos temáticos y objetivos psicológicos, es decir, la resolución de problemas verbales	Debate sobre la resolución de problemas en Norteamérica, así como la práctica escolar diaria y la experimentación en el laboratorio de psicología	Desarrollada principalmente en el suelo americano, y está basado en una amplia investigación sobre la resolución de problemas y el papel que juegan los problemas en su aplicación - denominado modelado contextual en la enseñanza de las matemáticas, Blomhoj (2009).
Model eliciting approach (Situaciones que provocan la obtención del modelo)	Objetivos psicológicos, transferencia de modelos a un nuevo problema	Debate sobre la resolución de problemas en Norteamérica	Las actividades que promueven la obtención de modelos fueron desarrolladas originalmente por investigadores en la educación matemática para la resolución de problemas, animando a los estudiantes a construir modelos matemáticos y determinar un mecanismo que les permita comprender los procesos de pensamiento que intervienen. Pinar, T, et al (2010).
Modelación Educativa Diferenciada en: a) Modelación didáctica b) Modelación conceptual	Objetivos pedagógicos y su relación con contenidos temáticos: a) Estructuración de los procesos de aprendizaje y su promoción b) Introducción y desarrollo de conceptos	Teorías didácticas y teorías del aprendizaje	La idea principal es integrar la modelización matemática en la enseñanza de matemáticas. En ella se plantean las metas y justificaciones relacionadas en la enseñanza de la modelación matemática de los diferentes niveles educativos, la forma de organizar las actividades en los diferentes tipos de planes de estudio de matemáticas, los problemas relacionados con la aplicación del modelado en las prácticas de enseñanza, y la evaluación de estudiantes que modelan las actividades, han sido tratados bajo esta perspectiva de investigación, Blomhoj (2009).
Modelación socio-crítica	Objetivos pedagógicos como la comprensión crítica del mundo que nos rodea	Enfoques socio-críticos en sociología política	Da relevancia a la necesidad de apoyar el pensamiento crítico alrededor del papel que juegan las matemáticas en la sociedad, el rol y la naturaleza de los modelos matemáticos y la función de la modelación matemática en la sociedad. (Kaiser & Sriraman, 2006). La filosofía socio-crítica sostiene que el uso de la modelación matemática puede crear una motivación importante para el aprendizaje de las matemáticas, pero también llevarlos a reflexionar críticamente sobre problemas sociales, Blomhoj (2009).
Modelación epistemológica o teórica	Teoría orientada a objetivos, es decir, la promoción del desarrollo teórico.	Epistemología romana	Bajo el punto de vista epistemológico se subordina la modelización matemática del desarrollo de las teorías más generales sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, Blomhoj (2009). Se presta menor importancia a la parte real

			de los problemas, (Kaiser y Sriraman, 2006)
Modelación cognitiva	<p>Objetivos de investigación</p> <p>a) Análisis de procesos cognitivos que tienen lugar durante los procesos de la modelación y de comprensión.</p> <p>Objetivos psicológicos</p> <p>b) Promoción de procesos de pensamiento matemático a través del uso de modelos como imágenes mentales o representaciones físicas o resaltando la modelación como proceso mental tal como la abstracción o la generalización.</p>	Psicología cognitiva	<p>Blomhøj (2009) menciona que el interés principal es entender que las funciones cognitivas están involucradas en actividades de modelado matemático individuales de los estudiantes. Para tal fin, se analizan los procesos de modelado particulares de ellos realizan y la reconstrucción de sus rutas individuales a través del proceso de modelado de situaciones específicas. El objetivo es identificar (tipos de) las barreras cognitivas individuales en el proceso de modelado.</p> <p>El objetivo de esta perspectiva se refieren Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006), al análisis de diversos procesos de modelado con diferentes tipos de situaciones, que varían en grado de autenticidad o complejidad matemática. Plantea la reconstrucción de las rutas de modelado del estudiante o las barreras individuales y dificultades durante el modelado.</p>

1.6 Delimitación del problema que orienta al desarrollo de este trabajo

El interés por desarrollar este trabajo tiene sus orígenes en el ejercicio de mi práctica profesional, como docente de matemáticas en el NMS de la UAGro. Específicamente en la etapa en que se implementa un plan de estudios bajo el enfoque por competencias a partir de 2010. Esta reforma educativa se constituyó en un desafío no solo para los profesores de NMS en la universidad, también para las autoridades académicas y administrativas a cargo, quienes han diseñado desde entonces, talleres y diplomados para los profesores, a fin de contribuir en su comprensión, y ejecución. Los aspectos considerados en ellos, son los siguientes:

- a) En qué consiste el enfoque por competencias. Sus elementos.
- b) Cómo poner a funcionar un currículum por competencias.
- c) Qué elementos se conciben básicos en el diseño e implementación de situaciones de aprendizaje que favorezcan el desarrollo de competencias en un contexto de modelación matemática.

Sin duda ha sido un gran desafío para los profesores esta reforma educativa, algunos a favor otros en contra, por las complejidades que ha implicado comprender este enfoque y ponerlo a funcionar.

En este contexto, en el presente trabajo nos interesamos en desarrollar competencias en estudiantes de NMS de la UAGro, que cursaban la UAp Matemáticas II, desde el enfoque por competencias en el ciclo escolar 2015-2016. El sustento, es una situación de aprendizaje a la que denominamos SMAEC (adaptada de Farfán, et al., 2014), y se desarrolló en el marco de la modelación matemática, en particular con una situación de modelación asociado a expresiones cuadráticas y a sucesos de su región y estado.

La **pregunta** que guía el estudio es la siguiente:

¿Qué competencias disciplinares y genéricas ponen en juego los estudiantes de segundo semestre de NMS de la UAGro, en la construcción de modelos matemáticos, al interpretar y explicar una situación, asociada a expresiones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c$ y a los fenómenos de su comunidad?

Son dos los objetivos específicos relacionados a este trabajo:

1. Caracterizar los modelos matemáticos que construyen los estudiantes de EMS de la UAGro, al interpretar y explicar una situación asociada a expresiones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c$ relacionada a los fenómenos de su comunidad.
2. Caracterizar las competencias que emergen en la construcción de modelos cuadráticos en las producciones y explicaciones de los estudiantes.

Capítulo 2

Marco Conceptual

2.1. Introducción

El trabajo en general y el diseño de la SMAEC, involucra teóricamente en los conceptos de modelo matemático, modelación matemática, realidad, competencia, competencia genérica, disciplinar y disciplinar básica, así como el ciclo de modelación. Es en el mismo programa de estudios de Matemáticas II donde aparece como una Competencia Disciplinar Básica a desarrollar, que los estudiantes construyan e interpreten modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

En contraste el docente debe planificar los procesos de enseñanza y de aprendizaje atendiendo al enfoque por competencias, y los ubique en contextos disciplinares, curriculares y sociales amplios. Que identifique los conocimientos previos y necesidades de formación de los estudiantes, y desarrolle estrategias para avanzar a partir de ellas; con capacidad de diseño de planes de trabajo basados en proyectos e investigaciones disciplinarios e interdisciplinarios orientados al desarrollo de competencias; que utilice en el salón de clases materiales apropiados para el desarrollo de competencias; que contextualice los contenidos de un plan de estudios en la vida cotidiana de los estudiantes y la realidad social de la comunidad a la que pertenecen buscando la transferencia a contextos matemáticos mediante el trabajo autónomo y colaborativo (UAGro, 2010b).

Siendo una necesidad, que interactúen poniendo en juego sus competencias a través de la construcción y uso de modelos matemáticos, es importante aclarar cómo serán interpretados los conceptos que serán utilizados para analizar los resultados del presente trabajo.

2.2. Modelo matemático y modelación matemática

En este trabajo, tanto el concepto de modelación matemática como el de modelo, se asume desde la postura de Biembengut y Hein (1997). Así visto, un *Modelo Matemático* es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen el fenómeno en cuestión o una situación problema. Este puede ser formulado mediante expresiones numéricas o formulas, diagramas, gráficos o representaciones geométricas, tablas, etc. La *Modelación Matemática* por su parte, se entiende como el proceso involucrado en la obtención de un modelo.

Stillman (2012) distingue entre modelación y aplicación. Con las aplicaciones, de acuerdo con el investigador, la dirección que se sigue es *matemáticas* \rightarrow *realidad* y la pregunta que se hacen quienes siguen esta ruta, es ¿dónde puedo usar esta particular pieza de conocimiento matemático? Desde esta perspectiva, significa que el modelo ya fue aprendido y construido. Con la modelación matemática, sostiene, que la dirección es contraria, es *realidad* \rightarrow *matemáticas*. La pregunta central aquí, es ¿Qué saberes matemáticos puedo usar para resolver este problema? Desde esta postura, el modelo tiene que ser construido a través de la idealización, especificando y matematizando la situación del mundo real. Ambos tipos de tareas, ocupan un lugar importante en el salón de clases. En este trabajo, la ruta que sigue la situación de aprendizaje, es la segunda.

2.3. La modelación matemática como proceso

La modelación matemática desde la perspectiva de Córdoba (2011) puede usarse como *proceso o actividad* para explicar una situación o como *método* de enseñanza:

- a) La modelación entendida como proceso o actividad en la que un problema, situación o fenómeno por fuera de la matemática es traído al dominio matemático para ser resuelto o explicado.
- b) La modelación como un método de enseñanza y aprendizaje que puede ser objeto de enseñanza o un medio para enseñar matemáticas.

Asumimos a la modelación como proceso en el desarrollo de la SMAEC con los estudiantes, desde la postura de Tobón, S. (2006) quien considera a los procesos como acciones que se llevan a cabo con un determinado fin, tienen un inicio y un final identificable. Implican la articulación de diferentes elementos y recursos para poder alcanzar el fin propuesto. Con respecto a las competencias, esto significa que estas no son estáticas, sino dinámicas, y tienen unos determinados fines, aquellos que busque la persona en concordancia con las demandas o requerimientos del contexto. En este trabajo hacemos referencia a las acciones que realizan los estudiantes como: escuchar una narración, leer para interpretar la situación y explicarla, entre otras.

2.4. Ciclo de modelación bajo la perspectiva cognitiva

En la figura 2.1 se muestra el ciclo de modelación bajo la perspectiva cognitiva utilizado en el presente trabajo y propuesto en Blum & Leiß (2006 en Blum y Borromeo 2009, p. 46), el cual se enfoca a las fases y procesos cognitivos por los que transitan los estudiantes. Se representan 6 fases por las cuales los estudiantes transitan durante el ciclo de modelación, ellas son: la situación real, modelo de la situación, modelo real, modelo matemático, resultados matemáticos, resultados reales y así también aparecen los procesos en los que se ven involucrados, se consideran: la comprensión de la tarea, simplificación / estructuración, matematización, trabajo matemático, interpretación, validación y presentación, por los cuales transita el estudiante al dar solución a la situación. Es también el medio que permitirá poner en juego las competencias en cada uno de los procesos que dan solución a la situación, así como la construcción e interpretación de modelos matemáticos.

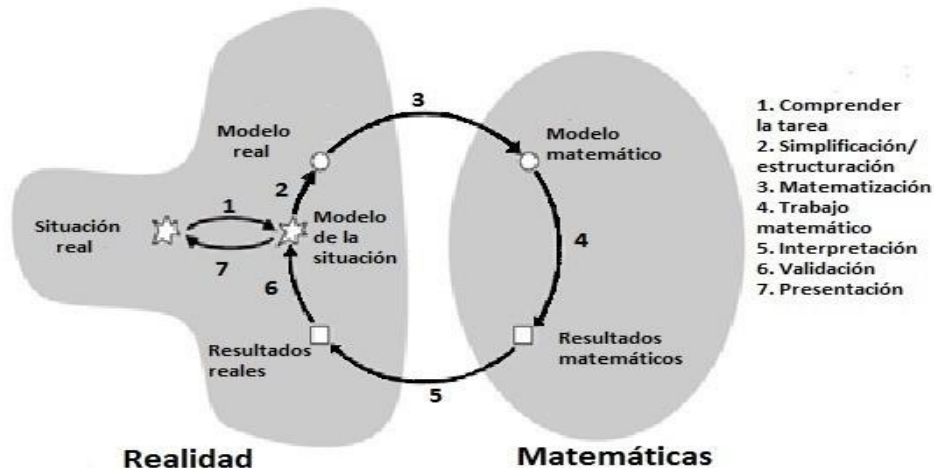


Figura 2.1. Ciclo de Modelado de Blum & Leiß (2006 en Blum y Borromeo 2009, p. 46)

La explicación a las fases y al proceso de modelación que se muestran a continuación son las que plantea Borromeo, R. (2006) y se presentan a continuación:

- *La situación real*
Se presenta la situación, la cual es dada en el problema. Eso puede ser una imagen, un texto o ambos.
Dentro de la transición de la situación real a la representación mental de la situación (MRS) se llevan a cabo reconstrucciones mentales de la situación dada en el problema, en un nivel implícito y en mayor parte desconocido por el individuo. Incluso si el individuo no comprende el problema, lo que puede hacer es seguir trabajando en la tarea.
- *Modelo de la situación o representación mental de la situación (MRS)*
El individuo tiene una representación mental de la situación, que se da en el problema. Está en función de la forma de pensamiento matemático de la persona. La diferencia entre la situación real y MRS tiene dos aspectos principales:
 - 1) Simplificaciones conscientes de las tareas y en la conexión con eso,
 - 2) El individuo preferencia, la forma de abordar el problema en el próximo proceso de modelado.
- *Modelo real*
Tiene fuerte conexión con el MRS, por eso, el modelo real se construye sobre todo en un nivel interno de la persona. Esto también significa que el nivel de

representaciones externas (o bocetos fórmulas) pueden representar un modelo real también. Pero esto realmente depende de las declaraciones verbales del individuo mientras hace una representación externa.

El paso del modelo real al modelo matemático, se caracteriza porque el individuo avanza en la matematización; además, los conocimientos extra-matemáticos (depende de la tarea) es fuertemente demandada por los estudiantes y se utiliza para construir un modelo matemático.

- *Modelo matemático*

En esta fase hacen principalmente representaciones externas en el sentido de bocetos o fórmulas. Ahora, las declaraciones verbales son más en un nivel matemático, menos en un nivel de referencia a la realidad. La transición a la matemática se completada aquí.

Dentro de la transición del modelo matemático a los resultados matemáticos los estudiantes utilizan sus competencias matemáticas.

- *Resultados matemáticos*

Los individuos en su mayoría escriben sus resultados, que se ponen sobre la base del modelo.

La interpretación de los resultados se lleva a cabo en la transición de resultados matemáticos a los resultados reales.

- *Resultados reales*

Los resultados matemáticos son discutidos por las personas en cuanto a su correspondencia con la situación, y determinar si se pueden considerar como resultados verdaderos.

En la validación los individuos piensan acerca de la correspondencia de sus resultados reales y su MRS. Con la posibilidad de iniciar nuevamente el ciclo de modelación de existir diferencias entre la situación real y los resultados obtenidos.

2.5. Realidad

En el sentido de Córdoba (2011, p. 11), entenderemos por *realidad, como todo lo que es y ocurre (interna y externamente al sujeto) y que pueda ser no sólo percibido sino también imaginado o representado por un individuo a partir de sus sentidos y procesos mentales, y*

en cuya interpretación y análisis influye tanto su propia subjetividad como el contexto en el que se encuentra inmerso.

2.6. Competencia

Asumimos el término de competencia tal como se señala en UAGro (2013) donde se reconoce esta, como la capacidad de la persona para movilizar e integrar: recursos cognitivos, metacognitivos, interpersonales e informáticos o tecnológicos para resolver responsablemente situaciones problemáticas que se le presentan cotidianamente. Esta capacidad es el resultado de la conjunción de dominios del saber, saber hacer, saber convivir y saber ser. Se clasifican para este subsistema de NMS en: genéricas, disciplinares básicas, disciplinares extendidas o propedéuticas y profesionales básicas.

2.6.1. Competencia genérica

Son las que todos los bachilleres deben estar en capacidad de desempeñar; las que les permiten comprender el mundo e influir en él; les capacitan para continuar aprendiendo de forma autónoma a lo largo de sus vidas, y para desarrollar relaciones armónicas con quienes les rodean, así como participar eficazmente en los ámbitos social, profesional y político. Dada su importancia, dichas competencias se identifican también como competencias clave y constituyen el perfil del egresado del Sistema Nacional de Bachillerato (DOF, 2009).

2.6.2. Competencia disciplinar

Se entiende como las nociones que expresan conocimientos, habilidades y actitudes que consideran los mínimos necesarios de cada campo disciplinar para que los estudiantes se desarrollen de manera eficaz en diferentes contextos y situaciones a lo largo de la vida (DOF, 2009).

2.6.3. Competencias disciplinar básica

Procuran expresar las capacidades que todos los estudiantes deben adquirir, independientemente del plan y programas de estudio que cursen y la trayectoria académica o laboral que elijan al terminar sus estudios de bachillerato. Las competencias disciplinares

básicas de matemáticas buscan propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes. Un estudiante que cuente con las competencias disciplinares de matemáticas puede argumentar y estructurar mejor sus ideas y razonamientos. Las competencias reconocen que a la solución de cada tipo de problema matemático corresponden diferentes conocimientos y habilidades, y el despliegue de diferentes valores y actitudes. Por ello, los estudiantes deben poder razonar matemáticamente, y no simplemente responder ciertos tipos de problemas mediante la repetición de procedimientos establecidos. Esto implica el que puedan hacer las aplicaciones de esta disciplina más allá del salón de clases (DOF, 2009).

Esta concepción resulta conveniente en nuestro estudio, por la importancia que se le da a que los estudiantes, donde utilizan conceptos, herramientas, hechos y procedimientos matemáticos para describir, explicar y predecir fenómenos. En ese marco, el uso del conocimiento matemático, se articula a la descripción y explicación de una situación específica en el marco de la función cuadrática.

Capítulo 3

Aspectos metodológicos

3.1. Participantes y contexto

Participaron 20 estudiantes (16-17 años) matriculados en el primer grado de EMS de la Escuela Preparatoria No.1 de la UAGro en la ciudad de Chilpancingo, Guerrero. Se involucraron en el estudio en el contexto de un curso curricular de la Unidad de Aprendizaje Matemáticas II (UAp) donde el profesor responsable del desarrollo de la situación (autor de este trabajo) llevó a cabo durante el semestre II, del periodo febrero-julio de 2015. Las actividades que constituyeron la SMAEC se plantearon en el marco de desarrollo de competencias tanto genéricas como disciplinares de la UAp. Los antecedentes académicos básicos de los participantes, considerados para que estuvieran en condiciones de intervenir al menos hipotéticamente en la situación, fueron el concepto de función, ecuación, así como el trabajo con tablas y gráficas. Las interacciones de los estudiantes con la SMAEC en el salón de clases se desarrolló en tres momentos, trabajo individual, en equipo (5 integrantes) y discusión grupal. El propósito de esta última etapa, consistió en la socialización y la institucionalización de los resultados obtenidos en cada una de las actividades por parte de los equipos, así como, la discusión grupal sobre los modelos matemáticos que explican la situación y distinguir entre la solución del modelo y la relativa a la situación. La SMAEC se planteó en un ambiente de lápiz y papel, y se desarrolló en dos sesiones, en un tiempo promedio de 90 minutos cada una.

3.2. Conocimientos previos de los estudiantes de segundo semestre de NMS de la UAGro.

Desde el punto de vista curricular, de la revisión del programa de estudios de Matemáticas III del tercer año de secundaria, se parte de la hipótesis de que los estudiantes han desarrollado ciertos saberes, como: problemas relacionados con situaciones que involucren ecuaciones cuadráticas mediante factorización y uso de la fórmula general, el concepto de

función cuadrática, su representación algebraica, tabular y gráfica; tal como, se evidencia en dicho programa (ver UAGro, 2010b o la tabla del anexo 3).

De igual manera en el programa de estudios de matemáticas I (ver UAGro, 2010c), del primer semestre de EMS de la UAGro, contempla los temas: traducción de situaciones modeladas en lenguaje común transformadas al lenguaje algebraico mediante ecuaciones, inecuaciones, funciones lineales, su representación gráfica, sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Dichos conocimientos aunados a los del nivel secundaria, son los antecedentes que permitieron trabajar con las actividades de la SMAEC durante el curso de Matemáticas II.

Antes de la aplicación de las actividades se trabajó durante 5 sesiones con actividades relacionadas a temas vistos en la UAp de Matemáticas I (ver UAGro, 2010c), dando una estructura similar a las situaciones planteadas con la que nosotros utilizamos, con la finalidad de familiarizarlos en los procesos de modelación y determinar algunas de las competencias que han adquirido y que nos servirán para seguir desarrollándolas si es posible.

3.3. Situación de modelación asociada a expresiones cuadráticas (SMAEC)

Si bien uno de los propósitos de este trabajo consistió en caracterizar las competencias puestas en juego por estudiante de bachillerato, mediante la SMAEC, también se contribuyó en la construcción de conocimiento matemático, mientras se interpretó y explicó la situación. En ese contexto y como se reportó en la tabla No. 1.1, las competencias articuladas a la modelación, se desarrollaron en términos del SABER (de tipo conceptual), el SABER HACER (procedimentales), del SABER SER y SABER CONVIVIR (actitudinales). En el marco de la situación, se buscan competencias asociadas al conocimiento y uso de conceptos como ecuación, ecuación cuadrática, función, así como del manejo de expresiones cuadráticas del tipo $ax^2 + bx + c$, correspondientes a la Unidad de Aprendizaje (UAp) de Matemáticas II.

La situación de modelación asociada a expresiones cuadráticas es una adaptación a la actividad 3 propuesta en Farfán y colaboradores (2014, p. 80). Las adaptaciones fueron las siguientes:

- 1) Se modificaron los datos y la estructura de la situación original.
- 2) Se utilizó el ciclo de modelación propuesto por Blum & Leiß (2006 en Blum y Borromeo 2009, p. 46).
- 3) Se consideraron también los momentos sugeridos en el programa de estudios por los cuales debe transitar el estudiante en el proceso de desarrollo de la situación, estos son: apertura, desarrollo y cierre. El de apertura permitió recuperar conocimientos previos, como la transformación del lenguaje común al algebraico visto en el primer semestre de NMS y problematizar, en el momento correspondiente al desarrollo permitió adquirir y organizar nueva información a través del uso e interpretación de modelos tabulares y gráficos, y por último en el cierre aplicaron y transfirieron la información, socializando los resultados obtenidos en cada uno de los momentos de trabajo individual, equipo y grupal.
- 4) Se planteó a modo de relato por el profesor, en lugar de hacerlo por escrito, con la finalidad de que sean los estudiantes los que construyan la pregunta o preguntas que desean dar respuesta en la situación.

Todas estas adaptaciones surgieron con la intención de propiciar la puesta en juego de las competencias planteadas en el programa de estudios, así como el desarrollo y uso de modelos matemáticos, en la interpretación y explicación de la situación, de esta manera el profesor debe tener la capacidad de anticipar, observar y reflexionar acerca de los aprendizajes de sus alumnos (Bressan, 2011), lo anterior es con la intención de ir adecuando las actividades con la finalidad de lograr mejores resultados en cuanto al desarrollo de competencias.

La situación se sometió a un proceso de validación con estudiantes matriculados en el segundo semestre de EMS y con profesores de bachillerato de la UAGro. La constituyeron dos actividades, que incorporaron el manejo de expresiones algebraicas de segundo grado, tablas y gráficas. Cada una con objetivos específicos y constituidos por tareas.

3.4 Las actividades de la SMAEC

3.4.1 Actividad 1

Se constituye de ocho tareas. El propósito es que el estudiante plantee el modelo matemático mediante el cual se interpreta y explica la situación narrada por el profesor. A continuación se hace una descripción de cada una de las tareas.

Tarea 1.1: Escucha la narración del profesor

La empresa “Super-Clima cobra cada semestre por servicio de mantenimiento de aire acondicionado \$600.00 por equipo. Actualmente da servicio a 10 equipos. Después de realizar un estudio de mercadotecnia, se da cuenta que si disminuye \$60.00 algunas veces el costo de mantenimiento, puede incorporar 5 equipos más en cada descuento (adaptación de la actividad 3, en Farfán, et al, 2014, p. 80).

Después de que escuchan y comprenden la situación narrada, el profesor plantea la cuestión siguiente *¿Qué le interesa al dueño de la empresa?* Esta pregunta se concibe fundamental en el estudio, a fin de que los estudiantes propongan preguntas que les permitan dar solución a la situación.

Tarea 1.2: Usa el espacio siguiente para que redactes la situación narrada por el profesor.

Ubica al estudiante a trabajar de forma individual a fin de que escriba el relato narrado por el profesor, incorporando en esta redacción, la pregunta que relaciona lo que se quiere determinar en ella.

Tarea 1.3: Compara con uno de tus compañeros tu redacción y realicen los ajustes que dejen lo más claro posible la situación y escríbela en el espacio siguiente.

En equipo, comparan sus redacciones sobre la situación y a partir de ello, proponen una sola.

Tarea 1.4: De forma individual haz una lista de los elementos más importantes o relevantes que consideres en la situación y represéntalos en el espacio de abajo.

Lenguaje común	Lenguaje algebraico

Discriminan las partes relevantes de la situación, para luego escribirlas tanto en lenguaje común como en lenguaje algebraico.

Tarea 1.5: En equipo de hasta 5 integrantes analicen las representaciones que hicieron de los elementos relevantes de la situación para que escriban una sola.

Lenguaje común	Lenguaje algebraico

Comparten y comparan las representaciones a las que arribaron en la etapa previa y acuerdan una sola.

Tarea1.6: Individualmente propón una expresión algebraica que incluya todos los elementos relevantes, de tal forma, que represente la situación planteada.

Proponen en forma individual una expresión algebraica que integre todas las partes identificadas en la fase anterior. Este deberá ser el modelo matemático que permita explicar la situación, sin necesidad de que el estudiante lo llegue a reconocer como modelo.

Tarea 1.7: En equipo analicen la expresión y acuerden una sola.

En equipo comparan el (o los) modelo (s) al que arribaron, con la intención de validarlo, y de ser posible, acordar uno solo.

Tarea 1.8: Comparen la expresión obtenida con el resto de los equipos. Anota la expresión que acordaron como grupo.

Exponen el (o los) modelo (s) que planteó cada equipo y lo (s) comparan con el fin de acordar uno solo, la cual permitirá dar continuidad a la situación en la actividad 2.

3.4.2. Actividad 2

La actividad se constituye de nueve tareas. Su solución se articula al uso de los modelos tabular y gráfico, a partir del algebraico. El propósito es que los estudiantes reconozcan que desde el punto de vista de la matemática, todas las soluciones que se analizan en el contexto de esos dos modelos, corresponden al modelo algebraico planteado, y que la solución a la situación, es única. Cada una de las tareas se realizan primeramente de forma individual y posteriormente en equipo, hasta llegar a la discusión grupal. La actividad inicia con la instrucción siguiente:

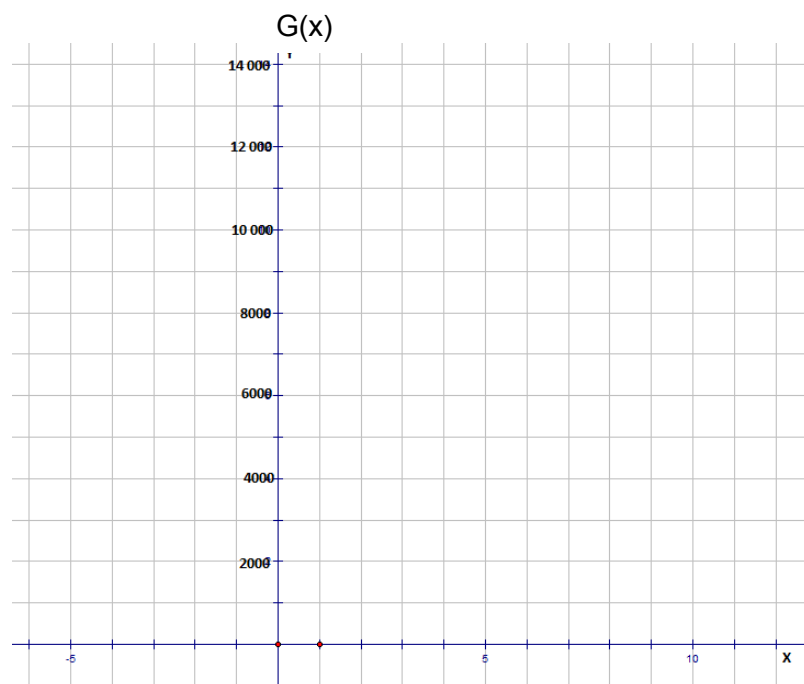
Apóyate de la expresión $G(x) = -300x^2 + 2400x + 600$ de la actividad 1 que se acordó con el grupo, la cual representa la ganancia que la empresa obtiene, al aplicar descuentos al servicio que presta. Con base en ello realiza lo que se te pide:

Tarea 2.1: Completa la tabla y determina la ganancia que se obtiene cada vez que se aplica el descuento al costo por servicio.

Veces que se reduce el costo (x)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
Ganancia G(x)													

Completan una tabla de doble entrada utilizando la expresión algebraica (modelo) obtenida en la actividad 1, en la que relacionan los descuentos aplicados con el costo del servicio para obtener las ganancias, de acuerdo con lo planteado en la situación.

Tarea 2.2: Representa en el plano cartesiano el comportamiento de las ganancias que obtiene la empresa.



Con base en los datos de la tabla, representan en el plano cartesiano las coordenadas de cada punto y obtienen el trazo de la gráfica correspondiente (modelo gráfico).

Tarea 2.3: Analiza los datos de la tabla y el comportamiento de la gráfica. ¿Cuál es la mayor ganancia? Argumenta tu respuesta.

Comparan los resultados de la tabla y de la representación gráfica, con la intención de determinar cuál es la que conviene a la empresa.

Tarea 2.4: ¿Cuántas veces se tiene que reducir el costo del mantenimiento, para obtener la mayor ganancia?

Identifican el número de descuentos que debe aplicar para obtener ganancia máxima.

Tarea 2.5: ¿En qué momento al aplicar los descuentos vuelve la empresa a tener la misma ganancia?

Identifican el o los valores donde se repiten las ganancias y se le solicita también lo marquen con rojo en la gráfica.

Tarea 2.6: ¿Cuál es el monto de la ganancia que obtiene la empresa cuando no aplica descuentos?

Identifican el monto de la ganancia al no aplicar descuento y lo relacionan con el término independiente del modelo algebraico de la situación y la intersección con el eje y .

Tarea 2.7: Si tomas como referencia la ganancia inicial ¿En qué momento el dueño de la empresa no obtiene ganancias? Indícalo también en la gráfica con color rojo.

Analizan el momento en que las ganancias vuelven al estado del cual partió.

Tarea 2.8: ¿Tiene sentido para la empresa continuar aplicando descuentos a partir del momento en que se obtiene cero pesos de ganancias? Argumenta tu respuesta.

Interpretan dentro de la situación los valores correspondientes a las ganancias obtenidas, después del momento en que la ganancia es cero.

Tarea 2.9. Los equipos exponen y explican con base en los modelos tabular y gráfico ¿Cuál es la solución a la situación?

Exponen y explican en grupo, apoyándose en los modelos tabular y gráfico que usaron, cuál es la solución a la situación. Discuten además, que el modelo matemático tiene más de una solución, y que una de ellas, es la que explica dicha situación.

3.5. Unidades de análisis

En el marco del estudio, las unidades de análisis (UA) se usan para reconocer y caracterizar las competencias y componentes de competencia que ponen en juego los estudiantes al interpretar y explicar una SMAEC. En ese contexto, se delimitaron siete UA las cuales se describen en la siguiente tabla. En tendiéndose en el sentido de Cabañas-Sánchez (2011), una unidad de análisis se refiere a una entidad representativa, de lo que va a ser objeto específico de estudio en una medición y se refiere al qué o quién es objeto de interés en una investigación.

Tabla No. 3.1
Unidades de análisis asociadas a la SMC

Actividad	Tarea	Unidades de Análisis (UA)	Producción esperada
1	1.1 1.2 1.3	UA1. Comprensión de la situación narrada y su representación en lenguaje común.	Redacta la situación contemplando los datos relevantes y planteando lo que pretende determinar
	1.4 1.5 1.6	UA2. Representación en lenguaje común y algebraico los datos relevantes de la situación.	Costo del servicio como $600 - 60x$, Cantidad de equipos como $10 + 5x$, No. De descuentos con x , ganancia como $(600-60x)(10+5x)$ o G
	1.7 1.8	UA3. Determinación del modelo matemático que representa la situación.	$G = (600-60x)(10+5x)$ $G = -300x^2 + 2400x + 6000$
2	2.1	UA4. Se apoyan de una tabla, para determinar algunas soluciones del modelo matemático, con base en el análisis del comportamiento de	Evalúan en el modelo matemático los descuentos correspondientes a x , para obtener la ganancia G .

		las variables involucradas en la situación [Ganancia o $G(x)$ y descuentos o x].	
	2.2	UA5. Analizan gráficamente el comportamiento de $G(x)$ mientras se modifica el valor de x en un intervalo de 0 a 11.	Representan y analizan el comportamiento de los valores correspondientes a las variables x y G .
	2.3 2.4	UA6. Analizan los datos y resultados obtenidos en los modelos tabular y gráfico, determinando la solución en términos de la situación.	Comparan los modelos tabular y gráfico para determinar la solución en términos de la situación.
	2.5 2.6 2.7 2.8 2.9	UA7. Validan las soluciones en el marco del modelo matemático y en términos de la situación.	Comparan las diferentes soluciones presentadas a través de los modelos: algebraico, tabular y gráfico que dan respuesta a la situación y al modelo matemático.

Los atributos de competencia en el marco de la SMAEC, que favorecen el desarrollo de competencias disciplinares se organizan en la tabla 3.2.

Tabla No. 3.2

Atributos de competencia en el marco de la SMAEC

Conceptual	Procedimental	Actitudinal
Funciones cuadráticas	-Distingue las partes de un problema que corresponden a las variables y constantes.	-Comunica y comparte de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos.
Ecuaciones de segundo grado	-Ubica en el modelo algebraico las magnitudes que intervienen en el fenómeno. -Traduce al lenguaje algebraico fenómenos de su región descritos en lenguaje común.	-Confronta sus preconcepciones acerca de las expresiones de 2° grado con el nuevo conocimiento algebraico, mejorando sus argumentos para explicar la realidad.
Magnitudes: variables y constantes.	-Construye expresiones completas de 2° grado que representan fenómenos descritos en lenguaje común.	
Gráficas Tablas de valor	-Transforma las expresiones aplicando las reglas de las operaciones algebraicas. -Representa gráficamente las expresiones algebraicas y/o sus soluciones.	-Valora el lenguaje algebraico como herramienta de síntesis de información acerca de los fenómenos de su entorno.

3.6. Proceso de modelación articulado con la situación

El proceso de modelación desarrollado por los estudiantes mientras interpretaban y explicaban la SMAEC, tomó como base las fases del ciclo de modelación propuesto por Blum y Leiß (2006, en Blum y Borromeo, 2009). En el ciclo se reconocen las seis fases siguientes: situación real (F1SR), modelo de la situación(F2MS), modelo real (F3MR),

modelo matemático(F4MM), resultados matemáticos (F5RM) y resultados reales (F6RR). Este ciclo se consideró en el desarrollo de la SMAEC, así como en su análisis.

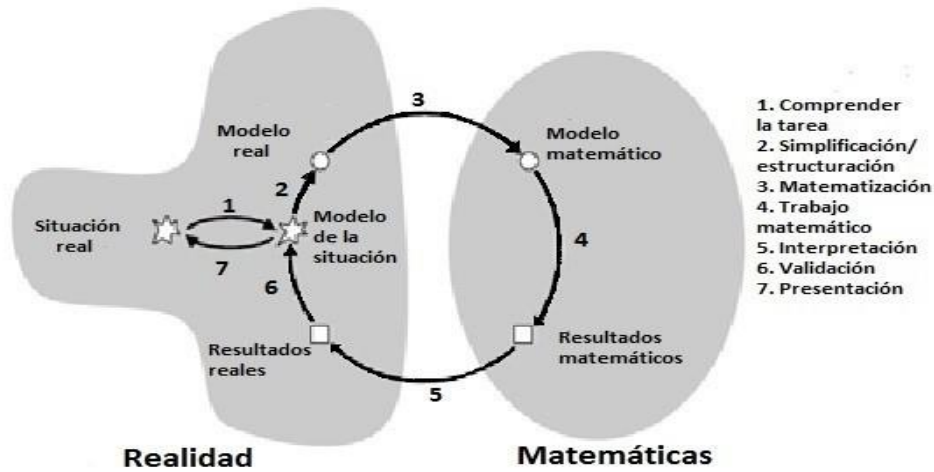


Figura 1. Ciclo de Modelado de Blum & Leiß (2006 en Blum y Borromeo 2009, p. 46)

3.6.1. Descripción de los procesos cognitivos asociados al ciclo de modelación en el marco de la SMAEC y a las UA.

1. *Comprensión de la situación* (considerada real, P1CS). El objetivo es que los estudiantes sean capaces de representar mentalmente, los elementos relevantes de la situación.

Con relación a la UA1, la comprensión de la situación a partir de la narración de la situación por el profesor, la ubicamos entre las F1SR y la F2MS articulada a procesos mentales de los estudiantes y se evidencia mediante el uso del lenguaje común.

2. *Simplificación/estructuración (P2SE)*. Se espera que sean capaces de arribar a un modelo real, que puede ser estructurado de manera interna o mediante la representación escrita, algebraica, dibujos, etc.

La UA2 está articulada con el uso del lenguaje común y algebraico mediante el cual

los estudiantes representan los datos relevantes de la situación. Se ubica entre los procesos de comprensión de la tarea y la matematización de dicha situación.

3. El proceso de *matematización (P3M)* se logra utilizando las representaciones de la etapa previa, mediante el manejo de expresiones algebraicas, dando como resultado el modelo matemático.

La UA3 que está relacionada con la interpretación de la situación a través de un modelo matemático, mediante el cual los estudiantes representan la situación planteada. Está articulada a los P1CS, P2SE y de P3M. Se evidencian mediante el uso de expresiones algebraicas.

4. El *trabajo matemático (P4TM)* está relacionado con la elección de los métodos que les permitirán obtener los resultados matemáticos.

La UA4 y el uso de la representación de la situación del modelo algebraico que interpreta la situación, así como del modelo tabular, se articula al proceso del ciclo de modelación en el trabajo matemático, de manera específica entre las F4MM y F5RM.

5. La *interpretación (P5I)* son analizados o interpretados con base en la situación planteada.

La UA5 se encuentra relacionada con el uso de la representación gráfica de la situación, se articula en el proceso del ciclo de modelación en la interpretación, comprendido dentro de las F5RM y F6RR.

La UA6 está relacionada con el análisis de los modelos algebraico, tabular y gráfico se articula al proceso de interpretación comprendido entre las fases relacionadas a los resultados matemáticos y los resultados reales.

6. La *validación (P6V)* contribuye a determinar cuál o cuáles de las soluciones cumplen con las situaciones planteadas y cuáles al modelo matemático.

En la UA7 se ubican los procesos de validación y presentación de los resultados del modelo de la situación, mediante el análisis de los modelos algebraico, tabular y gráfico.

7. En la *presentación (P7P)*, se analizan los resultados obtenidos por el grupo de estudiantes. Ello, a partir del modelo matemático al que arribaron, con la situación real. De existir discrepancias entre ambos, se repite el proceso, hasta obtener el modelo que represente dicha situación.

Este proceso no se concibe lineal, pues es posible que el estudiante no tenga necesidad de transitar por algunas de las etapas e incluso que deba regresar a una de ellas.

Es importante destacar que el proceso de comprensión desde nuestro punto de vista, se encuentra presente en cada una de las fases del ciclo de modelación, aun cuando en el ciclo de Blum y Leiss lo ubiquen entre las dos primeras fases: situación real (F1SR) y modelo de la situación (F2MS).

3.7. *Recolección de datos*

La actividad matemática del salón de clases en el contexto de la SMAEC se sustenta de diferentes instrumentos y medios: a) Las producciones escritas y; b) Discusiones en equipo y grupales coordinadas por el profesor. Con la finalidad de evidenciar aspectos del desarrollo de las actividades nos apoyamos de fotografías, videograbaciones y notas de campo del investigador.

Capítulo 4

Análisis de las actividades y resultados

4.1. Introducción

El análisis de los datos toma como referencia las explicaciones y justificaciones escritas y verbales presentadas por los estudiantes tanto en la actividad en equipo como en las discusiones grupales, en el marco de las actividades. Ello, con el fin de reconocer las competencias puestas en juego mientras interpretan y explican la situación objeto de estudio. Proceso sustentado en un modelo matemático, así como del uso del lenguaje común, expresiones algebraicas, trabajo sobre gráficos y tablas.

La actividad en el salón de clases se organizó en tres momentos: individual, equipo y grupal. Desde el primer momento, el profesor responsable del desarrollo de la situación (el autor de este trabajo), los reunió con sus respectivos equipos, incorporándose a las etapas del trabajo. Se organizaron cuatro equipos de cinco integrantes, como se muestra en la tabla siguiente:

Tabla 4.1
Organización de los equipos

Equipo	Integrantes
E1	E1A1, E1A2, E1A3, E1A4, E1 A5
E2	E2A6, E2A7, E2A8, E2A9, E2A10
E3	E3A11, E3A12, E3A13, E3A14, E3A15
E4	E4A16, E4A17, E4A18, E4A19, E4A20

El profesor, además de adaptar y aplicar la SMAEC, promovió la participación de los estudiantes, en el interés de favorecer el desarrollo de competencias, posteriormente a la aplicación de la situación y de las actividades que la sustentan, se reconocieron mediante las producciones y explicaciones las competencias puestas en juego.

4.2. Análisis de las competencias por actividad

4.2.1. Actividad 1

En esta actividad es donde se plantea la SMAEC por el profesor, en lenguaje común a modo de narración. Ello da cabida a la interacción entre estudiantes en tres momentos (individual, equipo y grupal) y las participaciones del profesor, a fin de que construyan el modelo matemático mediante el cual se interpreta y explica dicha situación. El análisis de esta actividad se sustenta de tres Unidades Análisis (UA), descritas en la siguiente tabla.

Tabla 4.2
Unidades de Análisis (UA)

Actividad	Unidades de Análisis (UA)	Producción esperada
1	UA1. Comprensión de la situación narrada y su representación en lenguaje común.	Redacta la situación contemplando los datos relevantes y planteando lo que pretende determinar
	UA2. Representación en lenguaje común y algebraico los datos relevantes de la situación.	Costo del servicio como $600 - 60x$, Cantidad de equipos como $10 + 5x$, No. De descuentos con x , ganancia como $(600-60x)(10+5x)$ o G
	UA3. Determinación del modelo matemático que representa la situación.	$G = (600-60x)(10+5x)$ $G = -300x^2 + 2400x + 6000$

4.2.1.1 UA1. *Comprensión de la situación narrada y su representación en lenguaje común.*

En un primer momento el profesor explicó a los estudiantes la dinámica para el desarrollo de las actividades que componen la SMAEC. Una vez hecho esto, planteó la situación a modo de narración:

La situación:

La empresa “Súper-Clima cobra cada semestre por servicio de mantenimiento de aire acondicionado \$600.00 por equipo. Actualmente da servicio a 10 equipos. Después de realizar un estudio de mercadotecnia, se da cuenta que si disminuye \$60.00 algunas veces el costo de mantenimiento, puede incorporar 5 equipos más en cada descuento (adaptación de la actividad 3, en Farfán, et al, 2014, p. 80).

Al concluir la narración, el profesor planteó la cuestión siguiente *¿Qué le interesa al dueño de la empresa?* Esta pregunta se concibió fundamental en el estudio, a fin de que los

estudiantes se plantearan preguntas en el proceso de resolución de la situación.

Como fue requerido, al final de la narración los estudiantes redactaron la situación contemplando datos, así como la (o las) pregunta(s) que deberían plantear.

A partir de la narración escrita de manera individual, se observó, que 17 estudiantes (4 de E1, 5 de E2, 3 de E3 y 5 de E4) omitieron la pregunta. El profesor reconoce este hecho al observarlos trabajar en equipo, y pregunta el porqué de la omisión. Sostienen que la tuvieron presente pero que no la consideraron.

a) Redacción individual de la situación narrada por el profesor

La figura 4.1 evidencia la narración escrita por E1A3, en la etapa del trabajo individual, quien incorporó la pregunta. La plantea como sigue ¿Realmente le conviene el descuento, que propondrías? Otro caso es el de E3A11 (véase Figura 4.2), escribió ¿A cuántos equipos podrá darle mantenimiento, si se disminuye más el precio?, por último E3A13 ¿Cuánto sería la ganancia si con el descuento se incrementa a 5 equipos más?

La empresa superclima ofrece el servicio de aire acondicionado, cada 6 meses cobra \$600. Por ahora da servicio a 10 equipos. Si disminuye \$60 por cada aire acondicionado, podría obtener 5 equipos más. ¿Realmente le conviene el descuento, qué propondrías?

Figura 4.1. Narración de E1A3

En una empresa, cobra \$600 por dar servicio a equipos, lo hace a 10 equipos por cada semestre, si se disminuye \$60 estos podrían dar a servicio a 5 equipos mas. ¿A cuántos equipos podrá darle mantenimiento, si se disminuye mas el precio?

Figura 4.2. Narración de E3A11

b) Redacción por equipo de la situación narrada por el profesor

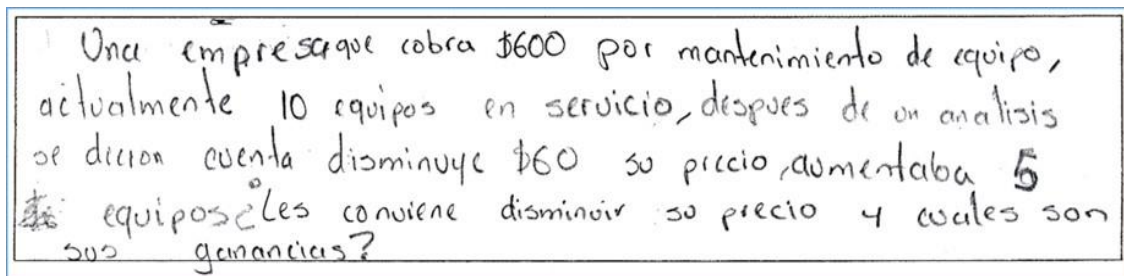
La oportunidad de discutir y analizar en equipo las diferentes redacciones de cada uno de los integrantes, con la finalidad de acordar una sola y considerar la pregunta que debería

acompañar al modelo escrito en lenguaje común de la situación, permitió poner en juego diferentes competencias (ver discusión E3 siguiente y reflexión en esta unidad de análisis).

A continuación se presenta parte de las discusiones realizadas en equipo E3, con la finalidad de plantear la pregunta que debe acompañar a la situación:

- E3A11: *...Deberíamos considerar los equipos a los puede dar mantenimiento al disminuir el precio...*
- E3A12: *...Pienso que es más importante calcular las ganancias que se van a obtener...*
- E3A13: *...Yo creo que las ganancias al aplicar el descuento...*
- E3A11: *...Ustedes que opinan...*
- E3A14: *...Está bien. Calculemos cuánto se ganará, con estos cambios en los descuentos...*
- E3A15: *...Yo creo, que debemos ver si le conviene disminuir su precio...*
- E3A11: *...Que les parece si vemos, si les conviene disminuir el precio y calculamos las ganancias...*
- E3A13: *Está bien así, hay que escribirla...*

En la figura 4.3 se presenta la redacción del E3.



Una empresa que cobra \$600 por mantenimiento de equipo, actualmente 10 equipos en servicio, después de un análisis se dice que cuenta disminuye \$60 su precio, aumentaba 5 equipos. ¿Les conviene disminuir su precio y cuáles son sus ganancias?

Figura 4.3. Redacción de la situación del E3

E1 consideró la pregunta ¿Cuántas veces le convendría aplicar el descuento para obtener la ganancia máxima?, E2 y E4 no la consideraron en su planteamiento. Se les cuestionó ¿por qué la omitieron? Afirmaron: *simplemente no la consideramos, pero teníamos claro lo que debíamos determinar... las ganancias en cada descuento.*

4.2.1.1.1. Reflexión sobre las competencias en el marco de UA1

Desde la perspectiva del ciclo de modelación de Blum y Leiss (2006 en Blum y Borromeo 2009, p. 46) la comprensión de la situación a partir de la narración de la situación por el profesor, se ubica entre las F1SR y la F2MS articulada a procesos mentales de los estudiantes y se evidencia mediante el uso del lenguaje común.

También es importante destacar que el proceso de comprensión desde nuestro punto de vista, se encuentra presente en cada una de las fases del ciclo de modelación, mientras que en el modelo de Blum y Leiss (2006) lo ubican entre las fases: situación real (F1SR) y modelo de la situación (F2MS).

El análisis de las interpretaciones realizadas por los estudiantes de la situación narrada por el profesor, así como de su redacción, permitió reconocer que fueron capaces de:

- Comprender la situación narrada.
- Plantearla por escrito.
- Reconocer que se requería plantear una pregunta (al menos el 50% de los equipos lo hizo) que guiara el proceso de solución de la situación.
- Reconocer que el otro 50% de los equipos que no lo hicieron, pero siempre tuvieron presente lo que pretendían determinar.
- De acuerdo con la UAp Matemáticas II, los atributos de competencia genérica asociadas a esta UA, son:
 - a) *Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.* En particular, la de expresar las ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas.
 - b) *Aportan puntos de vista con apertura y consideran los de otras personas de manera reflexiva (ver discusión E3 en esta UA).*
 - c) Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sistémica.
 - d) Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas (ver anexo 1, atributo 4.3). Este atributo no aparece en el programa pero se consideró necesario tomarlo en cuenta para nuestro análisis.
- De las *competencias disciplinares* puestas en juego:

- a) *Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales*; la competencia anterior se considera debido a que desde el momento en que los estudiantes inician con la redacción de la situación real, también comienza la construcción del modelo de la situación.
 - b) *Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para estimar su comportamiento.*
- Los atributos de competencia actitudinal (**ACA**) asociada a esta UA: *Comunica y comparte de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos (ver discusión E3 en esta UA).*

4.2.1.2. UA2. *Representación en lenguaje común y algebraico de los datos relevantes de la situación.*

El objetivo de esta UA, fue reconocer la forma en que representan en lenguaje común y algebraico los datos relevantes de la situación. En ese proceso, algunos estudiantes representaron incluso, datos irrelevantes que en su momento ocuparon parte del tiempo destinado a esta tarea, pero se decidió dejar para la discusión grupal los comentarios que pudiesen surgir relacionados con esto. Por otra parte, en el trabajo individual resaltamos el hecho de que los estudiantes como estaban ya integrados en equipo, socializaron desde un primer momento y dejan a un lado la etapa del trabajo individual para pasar directamente al trabajo en equipo.

El análisis de las producciones escritas, evidencia que al representar en lenguaje algebraico los datos relevantes de la situación, todos los equipos lo hicieron como sigue:

- a) La variable número *de descuentos* la representaron mediante la letra x .
- b) El *costo del servicio (ver figuras de la 4.5 a la 4.7)*, lo expresaron en términos de la diferencia entre el monto inicial menos el descuento correspondiente, es decir: $(600-60x)$.
- c) La *cantidad de equipos (ver figuras de la 4.5 a la 4.7)* a los que se les presta servicio, como el número de equipos inicial que es 10, más el número de equipos que se incrementa por descuento aplicado, esto es: $(10+5x)$.

- d) La *ganancia* de la empresa por su parte (*ver figuras de la 4.5 a la 4.7*), la expresaron como: G , G_{gral} y *Ganancia*. En la discusión final de los equipos se acordó utilizar G , y para calcular la ganancia mediante el *producto* $(600 - 60x)(10 + 5x)$.

Al cuestionarlos acerca del uso de la variable x usado para indicar el valor que cambia en la situación planteada, el argumento de E1 fue:

E1A5: ...estamos *acostumbrados a representar con x como primer alternativa para los valores que cambian o variables (ver figura 4.5)*...

E1A3: ...Para nosotras x representa el número de descuentos, pues es lo que cambia junto con la ganancia...

Con relación a las representaciones en lenguaje común, dos equipos (E1 y E4) lo hicieron de manera sintética, contrario al resto, que expresaron además, información irrelevante (E2 y E3).

Es importante resaltar algunos estudiantes no arribaron de modo inmediato a la expresión algebraica $(600 - 60x)(10 + 5x)$. De ello nos percatamos en las interacciones en equipo, lo anterior, debido a que algunos realizaron en sus cuadernos operaciones mediante las cuales obtenían la ganancia que correspondía a cada descuento del costo, y su respectivo incremento de equipos.

E3A13: ... *Calculamos la ganancia sin aplicar descuento*

$$G = (600)(10) = 6000$$

Después aplicamos el primer descuento al costo del servicio e incrementamos el número de equipos para determinar la nueva ganancia, de la siguiente forma

$$G = (600 - 60)(10 + 5) = 8100$$

Realizamos el segundo descuento

$$G = (600 - 2(60))(10 + 2(5)) = 9600$$

Seguimos aplicándolos y vimos que esto es lo que variaba, dejando al costo expresado por

$$\text{costo} = 600 - x60$$

Y el número de equipos por

$$\text{equipos} = 10 + 5x \dots$$

Estos cálculos en la determinación de las ganancias, permitieron identificar la variación x correspondiente a los descuentos (ver figura 4.4), y representar en lenguaje algebraico el costo del servicio como $(600 - 60x)$ y la cantidad de equipos por $(10 + 5x)$, concluyendo la representación de las ganancias como el producto de $(600 - 60x)(10 + 5x)$. Nos damos cuenta, que desde este momento presentan un modelo que les permite obtener las ganancias, sin que lo identifiquen propiamente dicho como el modelo de la situación. Ejemplo de las producciones, se muestran en las figuras 4.5., 4.6. y 4.7.

Costo	Cantidad	Ganancia
600	10	6000
1540	15	8100
1480	20	9750
1420	25	11500
1360	30	13500
	35	15750

Figura 4.4. Cálculos relacionados a las ganancias de la empresa.

Lenguaje común	Lenguaje algebraico
Costo del servicio	$600 - 60x$
Cantidad de equipos	$10 + 5x$
Ganancia	$(600 - 60x)(10 + 5x)$
No. de descuentos	x

Figura 4.5. Representación de los datos relevantes de la situación por E1.

Lenguaje común	Lenguaje algebraico
Ganancia original = No. de equipos por costo de servicio del semestre	$G = (10)(600)$
Ganancia con descuento = (costo de servicio - descuento) x (numero de equipos + nuevos equipos)	$G_{nueva} = (600 - 60x)(10 + 5x)$
Ganancia Maxima = [(costo del servicio - veces aplicado el descuento) x (numero de equipos + nuevos equipos)]	$G_{max} = (600 - 60x)(10 + 5x)$

Figura 4.6. Representación irrelevante de la situación, en lenguaje común por E2.

Lenguaje común	Lenguaje algebraico
Ganancia = 6000 Clientes = 10 Costo % = 600	$G = (600)(10)$
Ganancia = 8100 Clientes = 15 Costo % = 540	$G = (540)(15)$
Equipo = Descuento = x	$G = (600 - 60x)(10 + 15x)$
Numero de Descuentos = x	

Figura 4.7. Representación irrelevante de la situación, en lenguaje común por E3.

En relación al uso de la letra G el E2 para referirse a la variable *ganancia* comentaron:

E2A10: *...En el curso anterior de Matemáticas, el profesor nos había acostumbrado a utilizar algunas letras, que relacionaran las variables con lo que se pretende determinar y por eso a G la identificamos como las ganancias...*

E2A7: *...Si, primeramente consideramos a y para representar las ganancias pero después acordamos poner G...*

4.2.1.2.1. Reflexión sobre las competencias en el marco de UA2

Desde la perspectiva del ciclo de modelación de Blum y Leiss (2006 en Blum y Borromeo 2009, p. 46) el uso del lenguaje común y algebraico por los estudiantes mediante la escritura de los datos relevantes de la situación, se ubica entre los procesos de comprensión de la tarea y la matematización de dicha situación. Se evidencian con la representación del lenguaje común y algebraico.

El análisis de las interpretaciones que realizaron de las partes relevantes de la situación, así como, su representación en lenguaje común y algebraico (ver figuras 4.5 a 4.7 y comentarios de los estudiantes), permitió reconocer que fueron capaces de:

- Identificar y representar constantes y variables (ver figuras y comentarios de los estudiantes en esta UA).
- Realizar procedimientos en los que involucra la suma, resta, multiplicación de cantidades positivas y negativas (ver figuras de la 4.4 a la 4.7).
- Representar (los cuatro equipos) en lenguaje algebraico las partes relevantes de la situación como son: el *costo del servicio* mediante la expresión: $600 - 60x$, así

como de la *cantidad de equipos* mediante la expresión $10 + 5x$, el *número de descuentos aplicados* por medio de x , y las *ganancias* (G) con el producto de los binomios $(600 - 60x)(10 + 5x)$. Reconociendo que los alumnos que no lograron completar dicha representación (20%) en la etapa individual, en la discusión por equipo la dejan ya expresada.

Los atributos de competencia genéricas puestas en juego por los estudiantes en el desarrollo de la situación y que están asociadas a esta UA, son:

- *Expresaron ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas* (ver figuras y comentarios de los estudiantes en esta UA).
- *Siguieron instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo* (ver actividad 1 en el anexo 2).
- *Propusieron maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.*
- *Aportaron puntos de vista con apertura y consideraron los de otras personas de manera reflexiva* (ver comentarios de los estudiantes en esta UA).

De las competencias disciplinares (CD) que ponen en juego que se desarrollan (ver los comentarios de esta UA y figuras 4.4 a la 4.7):

- *Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para estimar su comportamiento* (ver figuras y comentarios de los estudiantes en esta UA).
- *Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.*
- *Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.*
- *Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.*

El análisis evidencia atributos asociados a las competencias disciplinares de las cuales, se reconocen los de tipo conceptual, procedimental y actitudinal como se expone en seguida.

De los atributos de competencia conceptuales (ACC) (ver los comentarios y figuras de las 4.4 a la 4.7) que los estudiantes ponen en juego en esta UA:

- Constantes y variables.
- Operaciones algebraicas como: suma, resta, multiplicación de binomios, tablas de valor.

Atributos de competencia procedimental (ACP) puestos en juego en esta UA (ver los comentarios y figuras de las 4.4 a la 4.7).

- Traduce un problema del lenguaje común al lenguaje algebraico. El análisis de las producciones estudiantiles en esta etapa, deja ver que esta competencia, está poco desarrollada, dado que usan datos irrelevantes al interpretar la situación tanto en lenguaje común como en el algebraico. Se observó aquí, que el 50% usa este tipo de datos irrelevantes.
- Ubica en el modelo algebraico las magnitudes que intervienen en el fenómeno.
- Distingue las partes de un problema que corresponden a las variables y constantes.

Atributos de competencia actitudinales (ACA) (ver los comentarios y figuras de las 4.4 a la 4.7) que los estudiantes ponen en juego:

- Comunica y comparte de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos (ver figuras y comentarios de los estudiantes en esta UA).

4.2.1.3. UA3. *Determinan el modelo matemático que representa la situación.*

En esta etapa los estudiantes utilizan las representaciones del lenguaje algebraico que consensaron en los equipos en la UA2, con la intención de construir el modelo que explica la SMAEC. Los equipos arribaron a los modelos siguientes:

Tabla 4.5
Modelos algebraicos de la situación

Equipo	Representación algebraica de la situación
E1	$G = (600 - 60x)(10 + 5x)$ o $G = -300x^2 + 2400x + 6000$
E2	$G_{Gral} = (600 - 60x)(10 + 5x) = -300x^2 + 2400x + 6000$
E3	$G = (600 - 60x)(10 + 5x) = -300x^2 + 2400x + 6000$
E4	$(600 - 60x)(10 + 5x) = G$

Los modelos anteriores los expresaron con algunas variantes pero en la última etapa de la actividad 1, socializaron con el resto de los equipos los procedimientos y procesos que siguieron y que los llevaron a la representación final. Acordaron la siguiente:

$$G = -300x^2 + 2400x + 6000$$

Se evidencia que en la representación del producto

$$(600 - 60x)(10 + 5x)$$

Tienden a desarrollarlo (ver las figuras 4.8 a la 4.11) multiplicando los binomios, obteniendo

$$G = -300x^2 + 2400x + 6000$$

Al preguntarles al respecto, argumentaron:

A3 (E1): ...*Se multiplica $(600 - 60x)(10 + 5x)$ para obtener las ganancias...*

P: ...*¿Tienes que desarrollar la multiplicación de los binomios, para obtener las ganancias?...*

A3 (E1): ...*No, pero en cursos pasados nos pedían desarrollar la multiplicación de los binomios, para ver su equivalencia con otra representación de la misma expresión y además para saber la ganancia hay que multiplicar el costo por la cantidad...*

Las explicaciones de los equipos a través de uno o más integrantes sobre los procesos o etapas que los llevaron a la obtención del modelo algebraico de la situación, son las siguientes:

E1A2: ...*Primeramente entre los datos importantes que sacamos en el caso del lenguaje verbal fue el costo del servicio, y en el caso de su representación*

en lenguaje algebraico dicho costo del servicio es de \$600.00, y si hacemos un determinado número de descuentos de \$60.00 lo que estaría variando es el número de descuentos que representamos con x , y lo que está fijo son los valores de 600 y 60, quedando en lenguaje algebraico como $(600 - 60x)$...luego, el número de equipos a los que presta servicio es 10 y nos dice que por cada descuento aplicado aumentaría 5 equipos, quedando expresado en lenguaje algebraico $(10 + 5x)$... para determinar la ganancia tenemos que multiplicar el costo por el número de equipos...

La figura 4.8, muestra la explicación del E1 sobre la obtención del modelo de la situación.

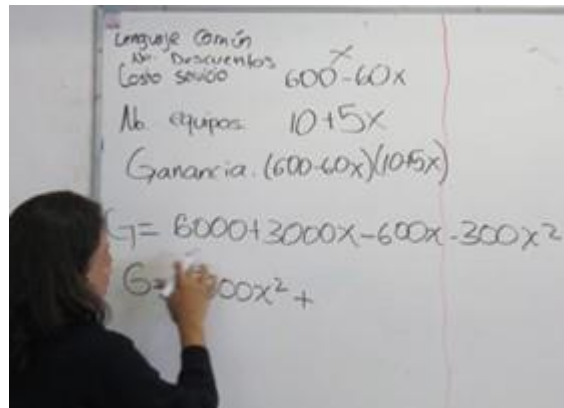


Figura 4.8. Explicación sobre la construcción del modelo de la situación

E2A10: ...Sabemos que el costo por equipo es \$600.00 y aquí en el transcurso de la narración, plantea hacer descuentos de \$60.00 y damos mantenimiento a 10 equipos... aquí puede interesarnos varias cosas, la ganancia en cada momento o la ganancia máxima, por lo tanto como va aumentando los descuentos, también va aumentando el número de equipos... con esta ecuación podemos obtener la ganancia máxima...lo que interesa al dueño de la empresa es cuánto dinero va entrar...

La figura 4.9 exhibe la explicación del E2 del proceso realizado en la obtención del modelo que interpreta la situación.

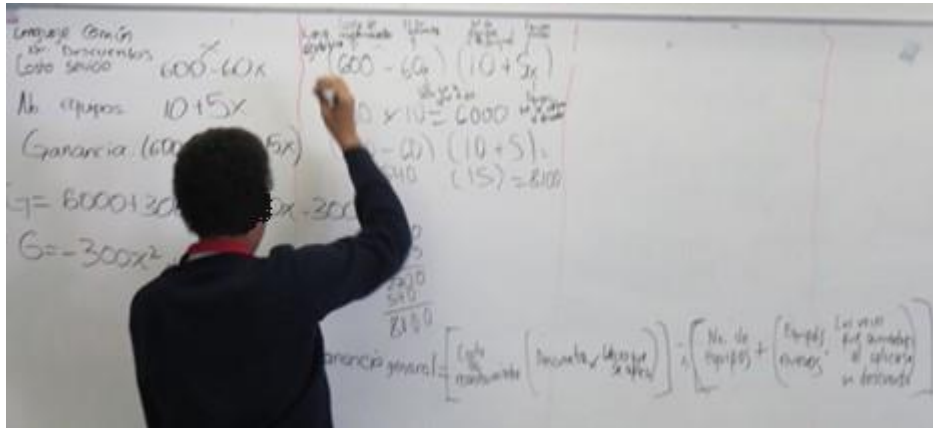


Figura 4.9. Explicación E2 sobre la obtención del modelo

E3A11: ...Como podemos ver lo que se quiere determinar son las ganancias, tenemos el costo del servicio que es de \$600 y el número de equipos que es 10 al principio, y el descuento que es de \$60. La empresa debe considerar si debe seguir bajando el costo aplicando los descuentos, que podemos representar por x . En el lenguaje algebraico el costo del servicio es $600 - 60x$ y el número de equipos a los que presta el servicio es $10 + 5x$ y multiplicándolos tendremos las ganancias y quedan representadas por $G = -300x^2 + 2400x + 6000$...

En la figura 4.10 el E3 explica sobre el proceso para obtener el modelo algebraico de la situación.

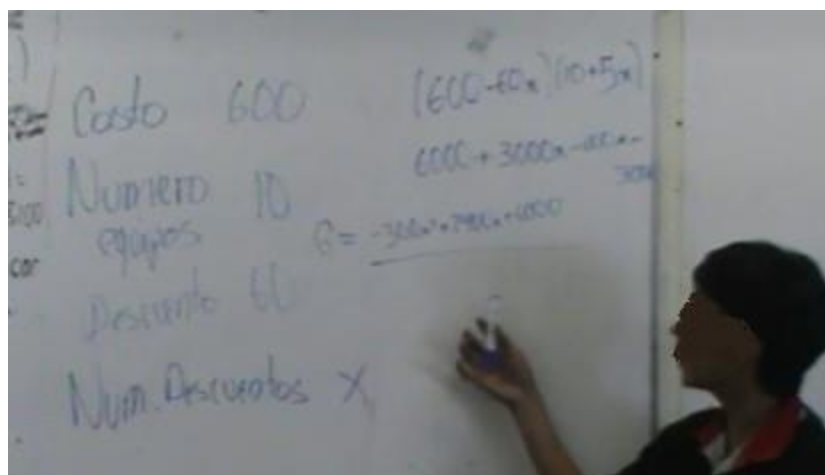


Figura 4.10. Explicación del E3 sobre el proceso para obtener el modelo de la situación

E4A20: ...El proceso es casi lo mismo a lo expuesto por mis compañeros, el costo inicial fue de \$600.00, el número de equipos era 10 y el descuento que tenía que aplicar era de \$60.00 y podías hacer un número x de descuentos... y cada vez que aplicaba un un descuento aumentaba los equipos... para obtener la ganancia multiplicamos el costo por el número de equipos, quedando $(600 - 60x)(10 + 5x)$ y multiplicando tenemos $G = -300x^2 + 2400x + 6000$...

En la figura 4.11 se muestra la participación del E4.

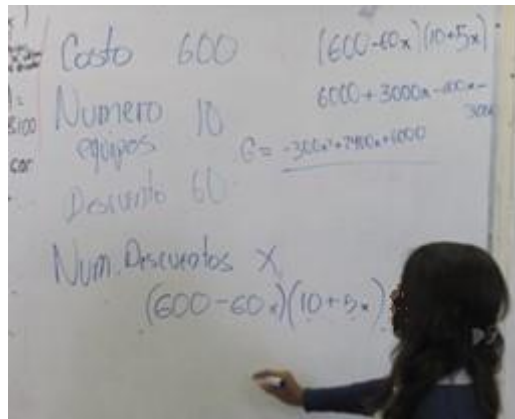


Figura 4.11 Explicación del E4 sobre la obtención del modelo de la situación

4.2.1.3.1. Reflexión sobre las competencias en el marco de UA3 (ver figuras de la 4.8 a la 4.11 y explicaciones de los estudiantes)

Desde la perspectiva del ciclo de modelación de Blum y Leiss (2006 en Blum y Borromeo 2009, p. 46) la interpretación de la situación a través de un modelo matemático, por los estudiantes para representar la situación planteada, se articula a los procesos de comprensión, simplificación/estructuración y de matematización. Se evidencian mediante el uso de expresiones algebraicas.

El análisis de las interpretaciones realizadas por los estudiantes de las partes relevantes de la situación, así como su representación en lenguaje común y algebraico, permitió

reconocer que:

- Representaron con un modelo algebraico la situación planteada por el profesor (ver tabla 4.5 y explicaciones de los estudiantes en esta UA) mediante la expresión que relaciona las ganancias (G) que es el producto de los binomios $(600 - 60x)(10 + 5x)$, o $G = -300x^2 + 2400x + 6000$. Se reconoce que los alumnos que no lograron completar dicha representación (20%) en la etapa individual, en la discusión por equipo la dejan ya expresada.

De acuerdo con la UAp Matemáticas II, los atributos de competencias genéricas puestas en juego por los estudiantes en el desarrollo de la situación, son:

- *Expresaron ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.*
- *Siguieron instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.*
- *Propusieron maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.*
- *Aportaron puntos de vista con apertura y consideraron los de otras personas de manera reflexiva.*

De las *competencias disciplinares* (ver tabla 4.5 y explicaciones de los estudiantes en esta UA) que ponen en juego, consideramos:

- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante el lenguaje verbal y matemático.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para estimar su comportamiento.
- Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

Componentes de competencia (ver tabla 4.5 y explicaciones de los estudiantes en esta UA) que emergen en la interpretación de la situación de modelación:

De los **ACC** que los estudiantes ponen en juego en esta UA son:

- Expresiones completas de segundo grado, variables y constante, reglas de operaciones algebraicas como: suma, resta, multiplicación de binomios.

Los **ACP** puestos en juego en esta UA:

- Construye expresiones completas de segundo grado que representan fenómenos descritos en lenguaje común.
- Traduce un problema del lenguaje común al algebraico.
- Transforma las expresiones aplicando las reglas de las operaciones algebraicas.

Las **ACA** que los estudiantes ponen en juego son:

- Comunica y comparte de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos.

En el proceso de modelación se plantea a través del ciclo propuesto en Blum y Leiss (figura 4.12). Las tres UA se ubican dentro de las fases de la *situación real* y el *Modelo matemático*. Proceso en el que se comprende la tarea, se plantea una estructuración y se matematiza la situación.

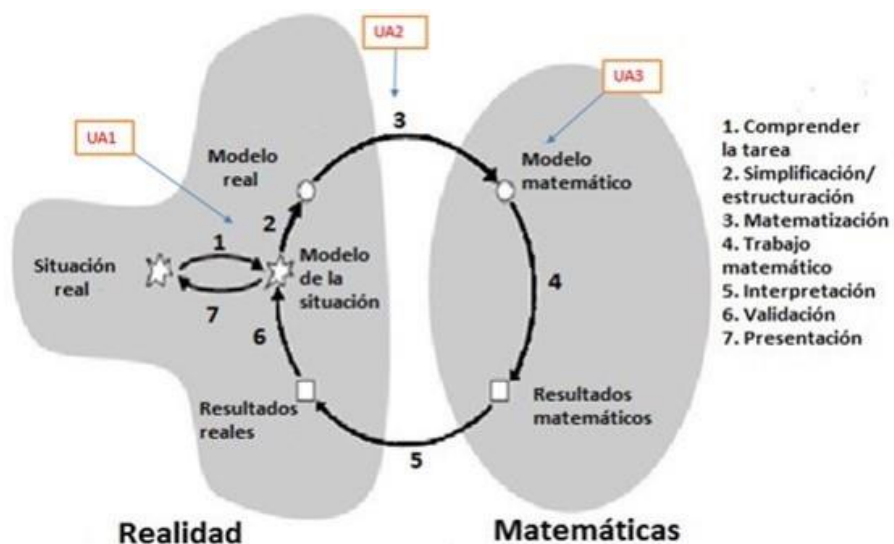


Figura 4.12. Ubicación de las UA de la actividad 1 en el ciclo de modelación de Blum & Leiß (2006 en Blum y Borromeo 2009, p. 46)

En la tabla 4.6 se presenta la relación de las unidades de análisis con las fases y procesos del ciclo de modelación, así como las componentes de competencia puestas en juego durante el proceso de construcción del modelo matemático que permite interpretar la situación.

En esa misma tabla en la columna correspondiente a los procesos que se presentan entre cada una de las fases del ciclo de modelación, podemos observar que está considerado el la comprensión en cada una de las fases, porque desde nuestro punto de vista el ciclo de modelación es dinámico; es decir que el estudiante va y viene dentro de cada una de ellas recuperando conocimientos y aplicándolos, con la finalidad de explicar y dar solución a la situación. Es en esta misma tabla donde se resume de acuerdo a la UA las fases, procesos y competencias puestas en juego en cada momento del desarrollo de la actividad.

Tabla 4.6

Se muestra la relación entre las tres UA, el ciclo de modelación y las competencias puestas en juego por los estudiantes

Unidades de Análisis (UA)	Fases del ciclo de modelación	Proceso del ciclo de modelación	Atributos de las competencias genéricas	Competencias disciplinares	Atributos de las competencias disciplinares
UA1. Comprende la situación narrada y la representa en lenguaje común.	F1SR Situación real. F2MS Modelo de la situación. F3MR Modelo real.	Com- prensión de la tarea. Simplifi- cación /estructu- ración.	-Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. -Aportan puntos de vista con apertura y consideran los de otras personas de manera reflexiva. -Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sistémica. -Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.	Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para estimar su comportamiento. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.	ACA. Comunica y comparte de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos.
UA2. Represen-tan en lenguaje común y algebraico los datos relevantes de la situación.	F1SR F2MS F3MR F4MM Modelo Matemá-	Com- prensión Simplifi- cación /estructu- ración. Matema-	-Expresaron ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. -Siguieron instrucciones y	-Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para estimar su comportamiento. -Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos	ACP. Traduce al lenguaje algebraico fenómenos de su región descritos en lenguaje común. ACP. Ubica en el modelo algebraico las magnitudes que

	tico.	tización	<p>procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.</p> <p>-Propusieron maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.</p> <p>-Aportaron puntos de vista con apertura y consideraron los de otras personas de manera reflexiva.</p>	<p>establecidos o situaciones reales.</p> <p>-Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.</p> <p>-Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos</p>	<p>intervienen en el fenómeno.</p> <p>ACP. Distingue las partes de un problema que corresponden a las variables y constantes.</p> <p>ACA. Comunica y comparte de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos.</p>
<p>UA3. Determinan el modelo matemático que representa la situación.</p>	<p>F1SR F2MS F3MR F4MM</p>	<p>Comprensión</p> <p>Simplificación /estructuración.</p> <p>Matematización</p>	<p>-Expresaron ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.</p> <p>-Siguieron instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.</p> <p>-Propusieron maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.</p> <p>-Aportaron puntos de vista con apertura y consideraron los de otras personas de manera reflexiva</p>	<p>-Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante el lenguaje verbal y matemático.</p> <p>-Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para estimar su comportamiento</p> <p>-Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.</p> <p>-Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.</p>	<p>ACP. Construye expresiones de 2° grado que representan fenómenos distintos en lenguaje común.</p> <p>ACP. Traduce un problema del lenguaje común al lenguaje algebraico.</p> <p>ACP. Transforma las expresiones aplicando las reglas de las operaciones algebraicas.</p> <p>ACC. Expresiones completas de segundo grado, variables y constantes, reglas de operaciones algebraicas como: suma, resta, multiplicación de binomios.</p> <p>ACA. Comunica y comparte de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos.</p>

4.2.1.4. Reflexión sobre la actividad 1

En estas fases del proceso de solución de la SMAEC, permitió a los estudiante construir el modelo matemático, mediante el cual interpretaron las exigencias planteadas en la situación, lo anterior no hubiese sido posible sin el proceso de comprensión, apareciendo en esta etapa competencia genéricas: *identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas*. En el proceso de identificación los datos relevantes

de la situación los cuales los expresaron mediante lenguaje común y algebraico, finalmente consensaron los equipos en la discusión grupal el modelo matemático siguiente:

$$G = -300x^2 + 2400x + 6000.$$

El cual representó la situación planteada y en cuyo proceso de obtención (ver figura 4.4) donde relacionaron: ganancias con cada descuento, cantidad de equipos y costo, identificaron constantes y variables, poniendo en juego las competencias señaladas en las tres UA. Algunas de las producciones escritas en la etapa de obtención del modelo se presentan en las figuras 4.8 a la 4.11.

4.2.2. Actividad 2

El propósito de la actividad es que el estudiante interprete y explique, cuál es la solución a de la situación a través de los modelos algebraico, tabular y gráfico. Y que distinga, que el modelo matemático tiene más de una solución, y que una de ellas es la que explica la situación. El análisis de esta actividad toma como base cuatro UA, descritas en la siguiente tabla.

Tabla 4.7
Unidades de análisis de la actividad 2

Actividad	Unidades de Análisis (UA)	Producción esperada
2	UA4. Se apoyan de una tabla, para determinar algunas soluciones del modelo matemático, con base en el análisis del comportamiento de las variables involucradas en la situación [Ganancia o $G(x)$ y descuentos o x].	Evalúan en el modelo matemático los descuentos correspondientes a x , para obtener la ganancia G .
	UA5. Analizan gráficamente el comportamiento de $G(x)$ mientras se modifica el valor de x en un intervalo de 0 a 11.	Representan y analizan el comportamiento de los valores correspondientes a las variables x y G .
	UA6. Analizan los datos y resultados obtenidos en los modelos tabular y gráfico, determinando la solución en términos de la situación.	Comparan los modelos tabular y gráfico para determinar la solución en términos de la situación.
	UA7. Validan las soluciones en el marco del modelo matemático y en términos de la situación.	Comparan las diferentes soluciones presentadas a través de los modelos algebraico, tabular y gráfico que dan respuesta a la situación y al modelo matemático.

4.2.2.1. UA4. Se apoyan de una tabla, para determinar algunas soluciones del modelo matemático, con base en el análisis del comportamiento de las variables involucradas en la situación [Ganancia o $G(x)$ y descuentos representados por x].

En esta etapa se les pide a los estudiantes apoyarse de la expresión $G(x) = -300x^2 + 2400x + 6000$ de la actividad 1, la cual representa la ganancia que la empresa obtiene, al aplicar descuentos al servicio que presta y con base en ello completar una tabla en la que

se presenta esta relación, mediante la cual obtienen la ganancia cada vez que se aplica el descuento al costo por servicio.

La figura 4.13 muestra una de las producciones de cada equipo sobre el cálculo de la ganancia al aplicar los respectivos descuentos, y el análisis de los resultados nos lleva a determinar que los estudiantes lograron evaluar adecuadamente los valores de los descuentos, en el modelo algebraico $G = -300x^2 + 2400x + 6000$ que obtuvieron en la actividad 1. Cuando el profesor revisa en los cuatro equipos, nota que algunos estudiantes presentaban dudas sobre la manera de elevar al cuadrado, suma y resta de números de igual o diferente signo; fueron resueltas por sus compañeros de equipo, y de esta manera se evitó participaciones que no eran necesarias por parte del profesor.

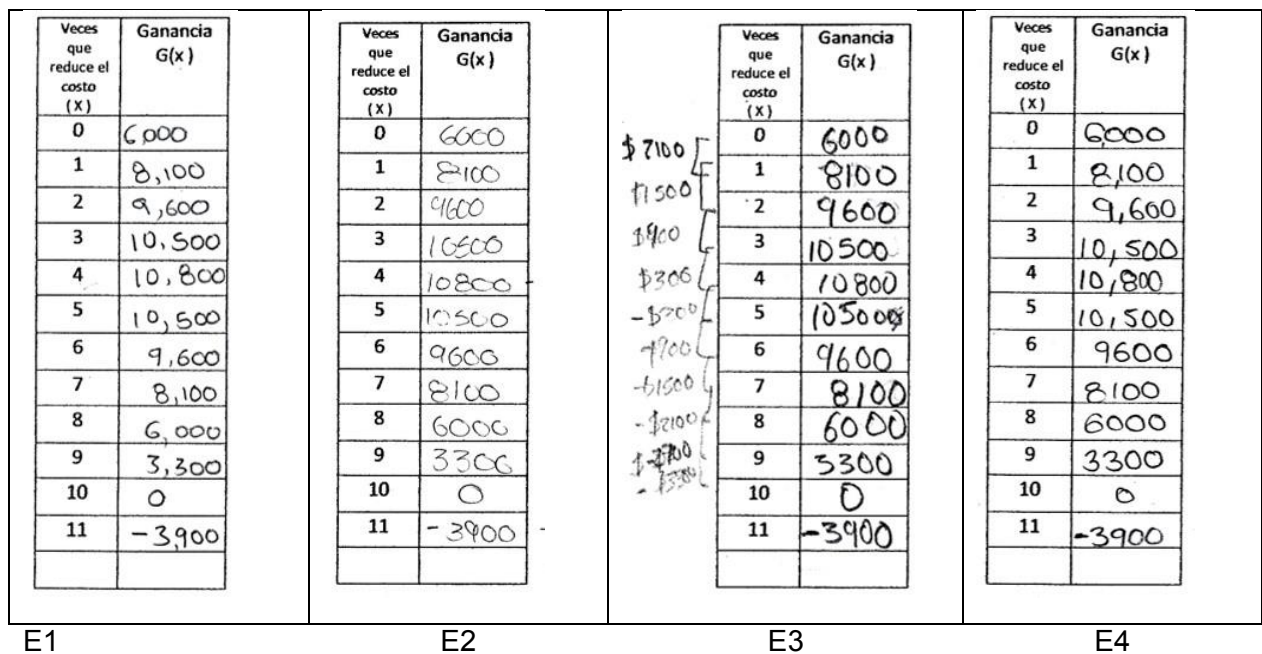


Figura 4.13 Cálculos realizados por los equipos en la representación tabular

En el llenado de los valores de la tabla y en las discusiones que se generaron en cada equipo, los estudiantes al realizar las comparaciones de las ganancias en cada descuento determinaron la ganancia máxima.

En el E1 comentaron:

E1A4: ...al sustituir el valor del descuento en la expresión de las ganancias, aumentan hasta llegar a 10,800...

- E1A2: ...eso fue en el cuarto descuento, pero después disminuyen...
- P: ... ¿Por qué en el descuento 11 les dio negativa la ganancia?...
- E1A1: ... Así sale al sustituir...
- P: ... ¿Cómo lo interpretan este resultado?...
- E1A4: ... Son pérdidas para la empresa, pues ahora pone dinero...
- E1A5: ...En el descuento 10 su ganancia es cero pesos...

Los integrantes del equipo E3 opinaron al preguntar el profesor:

- P: ...Qué significan esos cálculos a un costado de tu tabla E3A11 (ver figura 4.13, tabla del E3)...
- E3A11: ...Para ver que tanto variaban las ganancias entre cada descuento y para comparar que tanto ganaba respecto a la mayor ganancia (ver figura 4.14)...
- P: ...¿Cómo interpretan el resultado de -3900 en las ganancias?...
- E3A12: ...Son pérdidas para la empresa, en lugar de ganar ponen dinero...

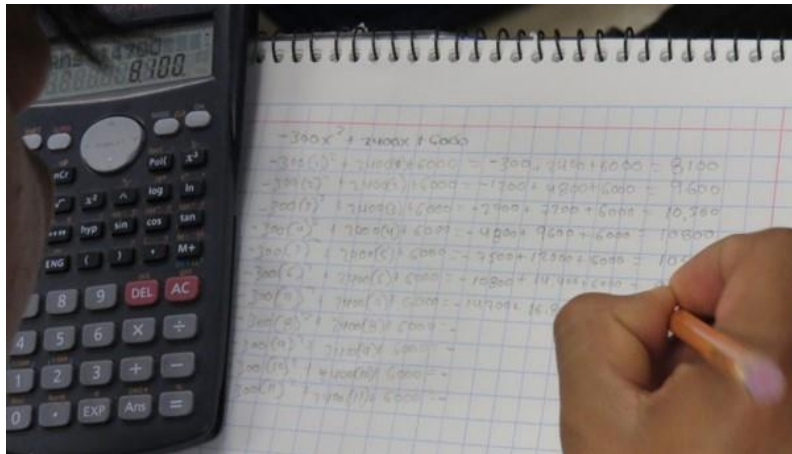


Figura. 4.14 Integrante del E3 relacionando los descuentos con las ganancias.

4.2.2.1.1. Reflexión sobre las competencias en el marco de UA4

Desde la perspectiva del ciclo de modelación de Blum y Leiss (2006 en Blum y Borrromeo 2009, p. 46) el uso de la representación de la situación del modelo algebraico que interpreta la situación, así como del modelo tabular, se articula al proceso del ciclo de modelación en el trabajo matemático, de manera específica entre las fases del modelo matemático y los resultados matemáticos.

El análisis de los resultados representados mediante una tabla de doble entrada, permitió reconocer que fueron capaces de:

- Relacionar las variables a partir de una tabla de valor, reconocen a la ganancia 10,800 como solución de la situación, y la interpretación que dieron al valor de -3,900 en el descuento 11 fue considerado como pérdidas. Se reconoce también que los integrantes de los equipos se apoyan, para resolver las dudas con relación a las operaciones de sustitución y cálculo de las ganancias en el modelo algebraico.
- Realizar (todos los estudiantes) operaciones mediante el uso de expresiones cuadráticas, en las que se involucran procesos relacionados con: suma, resta, multiplicación, elevar al cuadrado (ver figura 4.14).

De acuerdo con la UAp Matemáticas II, los *atributos de competencias genéricas* puestas en juego por los estudiantes en el desarrollo de la situación y que están asociadas a esta UA4 (ver figuras 4.13 y 4.14 y explicaciones en esta UA), son:

- *Expresaron ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.*
- *Siguieron instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.*
- *Aportaron puntos de vista con apertura y consideraron los de otras personas de manera reflexiva.*

De las *competencias disciplinares* que ponen en juego están consideradas (ver comentarios del E1 y E2 y figuras 4.13 y 4.14):

- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante el lenguaje verbal y matemático.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para estimar su comportamiento.
- Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de

situaciones reales o formales.

- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Los ACC que emergen en la interpretación de la situación mediante el modelo tabular son:

- Trabajo con tablas de valor.
- Reglas de operaciones algebraicas como: suma, resta, multiplicación, elevar a una potencia (figura 4.14).

De los ACA puestos en juego en la interpretación de la tabla, se encuentra:

- Comunica y comparte de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos (ver comentarios de los equipos E1 y E3 en esta UA).

4.2.2.2 UA5. Analizan gráficamente el comportamiento de $G(x)$ mientras se modifica el valor de x en un intervalo de 0 a 11.

Con los datos que completaron en la tabla de la primera tarea de la actividad dos, los estudiantes (el 100%) ubicaron en el plano cartesiano las parejas ordenadas. Específicamente en el eje de las abscisas a los descuentos y en el eje de las ordenadas a las ganancias. En esta etapa fue innecesaria la participación del profesor, porque aquellos que presentaron alguna duda sobre la manera de ubicar las coordenadas de un punto, se las resolvieron sus compañeros de equipo. Es importante mencionar que después de ubicar los puntos sobre el plano, tienden a unirlos mediante una línea continua. Al preguntarles su respuesta fue, que lo hicieron porque la forma del trazo de todos los puntos dibujados, lo relacionaron con una curva vista en secundaria llamada parábola. La figura 4.15 muestra algunas de las gráficas realizadas por integrantes de cada equipo.

El análisis de la solución por los estudiantes desde la gráfica es objeto de estudio en las tareas que están comprendidas en la UA6, donde reflexionan sobre la información que obtuvieron en la tabla y la representación gráfica de la situación.

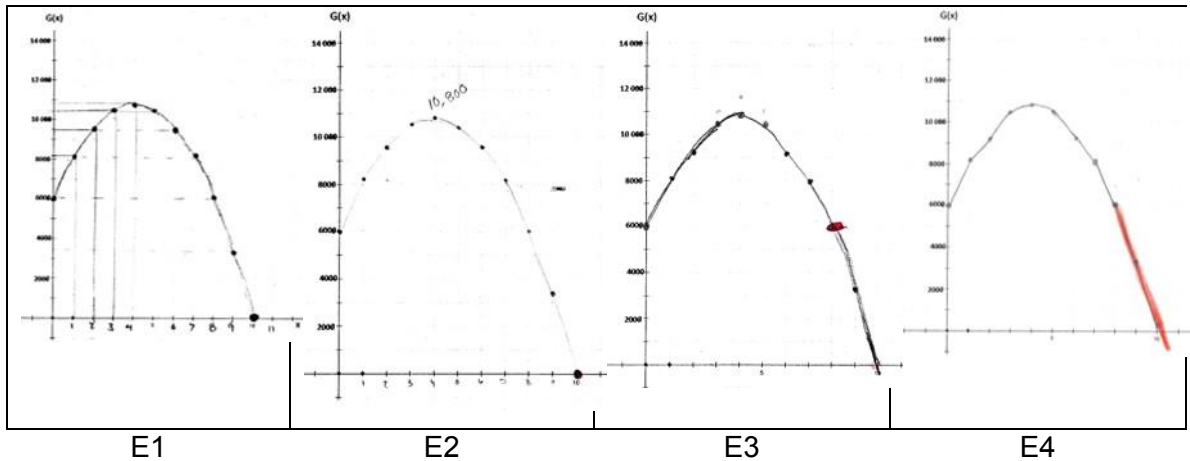


Figura 4.15 Representación gráfica

4.2.2.2.1 Reflexión sobre las competencias en el marco de UA5

Desde la perspectiva del ciclo de modelación de Blum y Leiss (2006 en Blum y Borromeo 2009, p. 46) el uso de la representación gráfica de la situación, se articula en el proceso del ciclo de modelación en la interpretación, comprendido dentro de las fases de los resultados matemáticos y los resultados reales.

La representación de la situación mediante el modelo gráfico sirvió para que los estudiantes:

- a) Reconocieran el valor de la máxima ganancia,
- b) Representaran mediante los resultados del modelo tabular, el modelo gráfico.
- c) Realizaran procedimientos como son la ubicación de las coordenadas de un punto sobre el plano.
- d) Ubicaran puntos sobre la gráfica (ver figura 4.15) y relacionarlos con los momentos en que no se aplican descuentos, con la máxima ganancia, ganancia cero, intervalos donde hay pérdidas.
- e) Relacionar la representación gráfica con una parábola (un equipo lo reporta en las producciones escritas y en la discusión grupal también lo expresan, relacionando finalmente con una parábola todos los estudiantes)

De acuerdo con la UAp Matemáticas II, las competencias genéricas puestas en juego por los estudiantes en el desarrollo de la situación y que están asociadas a esta UA, son:

- Expresaron ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- Siguieron instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- Ordenaron información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
- Aportaron puntos de vista con apertura y consideraron los de otras personas de manera reflexiva.

De las *competencias disciplinares* que ponen en juego están consideradas:

- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante el lenguaje verbal y matemático.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para estimar su comportamiento.
- Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Los ACC que ponen en juego en esta UA :

- Función cuadrática (25% de los estudiantes relaciona la expresión cuadrática y la gráfica con este concepto, aunque no es la intención de las actividades construirlo).
- Trabajo con gráficas y tablas de valor.

Las ACP puestas en juego en esta UA

- Representa gráficamente la relación entre las variables.

Dentro de los ACA se identifica que hicieron uso de:

- Comunica y comparte de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos.

4.2.2.3. UA6. Analizan los datos y resultados obtenidos en los modelos tabular y gráfico, determinando la solución en términos de la situación.

En la tabla 4.7 se resumen explicaciones de los equipos, sobre el análisis que hacen en el proceso de comparación de los resultados de la tabla y lo que muestra la gráfica. Lo anterior con la intención de justificar la respuesta sobre la pregunta de, ¿cuál es la mayor ganancia?

Tabla 4.8

Explicaciones de los estudiantes sobre la solución de la situación

Equipo	Argumento del por qué se considera máxima ganancia
E1	<i>Explican que es \$10,800 porque es el punto máximo de la parábola. La gráfica es una parábola, debido a que es una función cuadrática y como el coeficiente de x es negativo abre hacia abajo y como el término lineal es positivo se desplaza hacia la derecha y corta en 6000 en el eje y. Si aplicara una vez más el descuento, ya no sería conveniente para el dueño, ya que la ganancia decrecería, en lugar de aumentar, puesto que ese es el punto máximo de la ganancia (ver figura 4.13).</i>
E2	<i>Es \$10,800 y para obtenerlo se reduce 4 veces el precio.</i>
E3	<i>La ganancia es de \$10,800, \$4800 más que su primera ganancia.</i>
E4	<i>Es \$10,800 cuando reduce 4 veces el costo de la ganancia.</i>

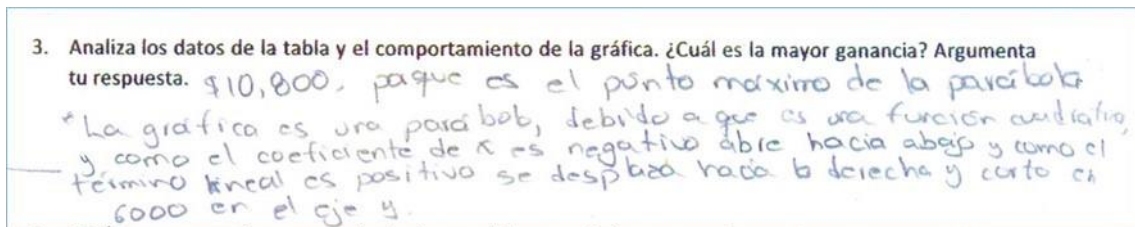


Figura 4.16 *Explicación del E1 sobre la obtención de la ganancia máxima.*

En la discusión final al preguntarles a los equipos por la mayor ganancia. Ellos respondieron:

E1A4: *... la mayor ganancia fue de \$10,800 pesos, y como equipo concluimos que si se aplicara una vez más el descuento ya no sería conveniente para la empresa, ya que la ganancia decrecería en lugar de aumentar, puesto que 10800 es el punto máximo de la gráfica y las ganancias a partir de este punto empiezan a disminuir, los demás puntos corresponden a ganancias que son menores a 10800 y esta sería la solución que buscábamos...*

- P: ...entonces en este punto alcanza la mayor ganancia ¿Y después de este punto si siguen aplicando descuentos, ganas o no?...
- E1A2: ...Si ganas, pero... es menos...
- E2A7: ...viendo todo esto, las veces que se reduzca el costo va tener un aumento pero también va a tener una disminución en la ganancia, tal es el caso que si se aplica diez veces el descuento la ganancia será cero, y si seguimos descontando el jefe de esa empresa va a terminar poniendo dinero para poder completar los gastos de lo que se está haciendo...
- E2A7: ...la mayor ganancia con base en la tabla y gráfica es 10800...
- E3A12: ...a mayor número de descuentos, mayor ganancia; pero llega un momento en que si aplicas un descuento empieza a disminuir esa ganancia. Entonces al reducir el costo cuatro veces es cuando se obtiene la mayor ganancia que es de 10800...
- E4A20: ...digo que la mayor ganancia es 10800, que se obtiene reduciendo el costo cuatro veces solamente, porque si lo reduce cinco veces gana menos y si lo reduce tres veces también gana menos, como se muestra en la tabla y en la gráfica...

De las producciones escritas y discusiones verbales podemos decir que los estudiantes determinan la solución de la situación, debido a que los resultados en la representación tabular y gráfica no aparece ningún otro valor que sea mayor a 10800.

4.2.2.3.1. Reflexión sobre las competencias en el marco de UA6

Desde la perspectiva del ciclo de modelación de Blum y Leiss (2006 en Blum y Borromeo 2009, p. 46) el análisis de los modelos algebraico, tabular y gráfico se articula al proceso de interpretación comprendido entre las fases relacionadas a los resultados matemáticos y los resultados reales.

El análisis de las representaciones e interpretaciones que hacen a partir del uso de la tabla y la gráfica, permitió reconocer que fueron capaces de:

- Identificar y ubicar la solución de la situación, a partir de la interpretación de la tabla y la gráfica (ver tabla 4.8, fig 4.16 y comentarios de los estudiantes y de

E1A4 en esta UA). Donde el valor de 10,800 lo identifican (todos los estudiantes) como el correspondiente a la máxima ganancia, el cual se obtiene al aplicar el cuarto descuento.

- Uno de los cuatro equipos relacionan tanto el modelo algebraico de la situación y el gráfico con una función cuadrática (ver tabla 4.8, explicación E1).

De acuerdo con la UAp Matemáticas II, los atributos de competencias genéricas puestas en juego en el desarrollo de la situación y que están asociadas a esta UA, son:

- Expresaron ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas (ver comentarios de los estudiantes en esta UA).
- Siguieron instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- Propusieron maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- Aportaron puntos de vista con apertura y consideraron los de otras personas de manera reflexiva.

De las competencias disciplinares (ver comentarios, tablas y figuras de esta UA):

- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante el lenguaje verbal y matemático.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para estimar su comportamiento.
- Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Los ACC que ponen en juego en esta UA (ver tabla 4.8, fig 4.15 y comentarios de los estudiantes en esta UA):

- Expresiones cuadráticas, función cuadrática, trabajo con gráficas y tablas de valor.

Los ACA puestos en juego:

- Comunicar y compartir de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos.

4.2.2.4 UA7. Validan las soluciones en el marco del modelo matemático y en términos de la situación.

En la actividad 2 analizan las diferentes soluciones del modelo matemático, y de esta manera generan los argumentos que utilizan en la actividad de cierre.

Tabla 4.9

Explicaciones de los estudiantes en las producciones escritas sobre la tarea

Equipo	En qué momento al aplicar los descuentos vuelve la empresa a tener la misma ganancia.
E1	Al aplicar el quinto descuento, se vuelven a repetir las ganancias y en el octavo se repite la ganancia inicial.
E2	Al aplicar 8 veces.
E3	Ya que se reduzca el precio 8 veces.
E4	Cuando reduce 8 veces.

En la discusión final de los equipos comentaron sobre esta pregunta:

E1A3: ... A partir del quinto descuento se van a repetir las ganancias, porque cuando llegamos a la parte más alta de la parábola a partir de ahí se repiten hasta llegar a cero en el octavo descuento y si seguimos aplicando descuentos la empresa pondrá dinero en lugar de ganar...

E2A9: ...Nosotros encontramos que al aplicar 8 veces el descuento, se vuelve a obtener la ganancia inicial que es de 6,000 y de ahí empieza a de decrecer la ganancia...

E3A14: ...A partir del octavo descuento se obtiene la ganancia inicial...

E4A18: ...Sería cuando reduces 8 veces el precio se tiene nuevamente la ganancia inicial de 6,000...

En la discusión final de los equipos sobre la actividad 2, al exponer cada uno sus conclusiones, mencionan que están de acuerdo con el equipo 1, porque después del cuarto

descuento aplicado los valores de las ganancias se repiten y en el octavo nuevamente tiene la misma ganancia con la que inicio.

Todos los equipos determinan que es el valor de \$6,000.00 el que corresponde al momento en que la empresa no ha aplicado descuentos. La intención de esta tarea es ubicar y relacionar el punto de intersección del trazo de la gráfica con el eje de las ganancias (ver tabla 4.8, explicación E1), y con el término independiente del modelo de la situación $G = -300x^2 + 2400x + 6000$. En esta tarea solo un equipo (25%) de los estudiantes mencionan esta relación. Es hasta la discusión final de los equipos, donde todos relacionan la intersección de la gráfica con el eje de las ganancias y el término independiente del modelo algebraico de la situación.

En la discusión final los representantes de los equipos expresaron:

- E1A1: ...El monto de la ganancia es de \$6000...
- E1A4: ... Y este valor corresponde a la intersección con el eje G y al valor del término independiente de la función cuadrática...
- E2A6: ... Al no aplicar el descuento la ganancia es \$6000...
- E3A15: ...Cuando la empresa no aplica ningún descuento la empresa se queda con \$6000...
- E4A17: ...El monto de la ganancia cuando no se aplica descuento es de \$6000.00...

Tabla 4.10

Explicaciones en las producciones escritas de los estudiantes sobre la pregunta

Equipo	Tomando como referencia la ganancia inicial ¿en qué momento el dueño de la empresa no obtiene ganancias?
E1	En el momento que aplica el décimo descuento
E2	En el 10
E3	Ya que se aplica el descuento 8 veces.
E4	Cuando gana menos que \$6,000.00

En la discusión final los equipos expresaron lo siguiente:

- E1A2: ...Al aplicar el descuento 10 veces. Porque en el décimo descuento la ganancia es cero, y después de ahí empieza a deber...
- E2A10: ... Así como al aplicar el cuarto descuento se obtiene la máxima ganancia, a partir de ahí va decreciendo, en el octavo descuento nuevamente tiene la

ganancia de la que partió y cuando llega a cero es porque ya aplicamos diez veces el descuento y ya no tiene ganancias...

E3A12: ...Como dice que tomemos como referencia la ganancia inicial que es 6000, entonces debe ser en el octavo descuento cuando ya no tiene ganancias...

E4A17: ...Después del octavo descuento, en el noveno es de 3300 ya es menos que la ganancia inicial de 6000. Menos que antes de hacer el descuento y empiezas a perder...

Los equipos coinciden que al ganar menos de \$6,000.00, serían menores las ganancias respecto a la que se inició cuando no aplicó ningún descuento.

Tabla 4.11

Explicaciones en las producciones escritas de los estudiantes sobre la pregunta

Equipo	Tiene sentido seguir aplicando descuentos cuando se obtiene cero pesos en las ganancias
E1	No tiene sentido, porque no solo no tendrá ganancia, si no que perdería también su inversión, y saldría poniendo la empresa.
E2	No tiene ningún sentido, ya que no recibirá ninguna ganancia y al contrario pondrá dinero.
E3	No porque a partir de ahí empieza a perder dinero es recomendable que no aplique mucho el descuento.
E4	No, porque solo perdería dinero.

En esta etapa aparecieron reflexiones sobre el valor negativo de las ganancias, que obtuvieron en la tabla al aplicar el descuento número 11. El resultado lo interpretaron como pérdidas para la empresa o como si la empresa tuviese que invertir en lugar de ganar. La figura 4.17 muestra a los estudiantes exponiendo los argumentos que desarrollaron en cada tarea.

Algunas de las explicaciones en la discusión final de los equipos son:

E1A5: ...No, porque el momento que tienes cero pesos de ganancias ya comienza a tener pérdidas, los resultados empiezan a salir negativos y los reflejamos como pérdidas...

E2A6: ...No tiene ningún sentido seguir aplicando descuentos, porque ya llegó a cero pesos y pondrá de su dinero para seguir trabajando....

E4A20: ...No porque, pondría dinero...

E3A15: ...No porque al dueño no le conviene aplicar descuentos, porque tendría que poner dinero...



Figura 4.17 Explicaciones de los integrantes de los equipos en el cierre de la segunda actividad.

4.2.2.4.1. Reflexión sobre las competencias en el marco de UA7

Desde la perspectiva del ciclo de modelación de Blum y Leiss (2006 en Blum y Borrromeo 2009, p. 46) de esta UA, se ubican los procesos de validación y presentación de los resultados del modelo de la situación, mediante el análisis de los modelos algebraico, tabular y gráfico.

El uso de la tabla (ver figura 4.13) y gráfica (ver figura 4.15) El análisis de las interpretaciones realizadas por los estudiantes de cada una de las tareas relacionadas a esta UA, permitió reconocer que fueron capaces de:

- Identificar los momentos en que se repiten los valores correspondientes a las ganancias, al hacer variar los descuentos.
- Relacionan el término independiente del modelo algebraico con el valor de la ganancia cuando no se aplica descuento y con la intersección de la gráfica con el eje de las ganancias.
- Determinan en qué momento no se generan ganancias respecto al momento en que se dejan de aplicar descuentos.
- Determinan la conveniencia o no, de seguir realizando descuentos cuando la ganancia es cero pesos.

De acuerdo con la UAp Matemáticas II, los atributos de competencias genéricas puestos en juego por los estudiantes en el desarrollo de la situación y que están asociadas a esta UA (ver explicaciones tanto escritas como verbales de esta UA), son:

- *Expresaron ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.*
- *Siguieron instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.*
- Estructuran ideas y argumentos de manera clara, coherente y sistémica
- *Aportaron puntos de vista con apertura y consideraron los de otras personas de manera reflexiva.*

De las competencias disciplinares que ponen en juego están consideradas:

- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante el lenguaje verbal y matemático.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para estimar su comportamiento.
- Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Se reconoce que en la interpretación de las diferentes representaciones de los modelos: algebraico, tabular y gráfico, ponen en juego componentes de competencia, los cuales son:

Los ACC que los estudiantes hacen uso en esta UA son:

- Manejo de expresiones cuadráticas, función cuadrática, representación algebraica, tabular y gráfica.

De los ACP que ponen en juego son:

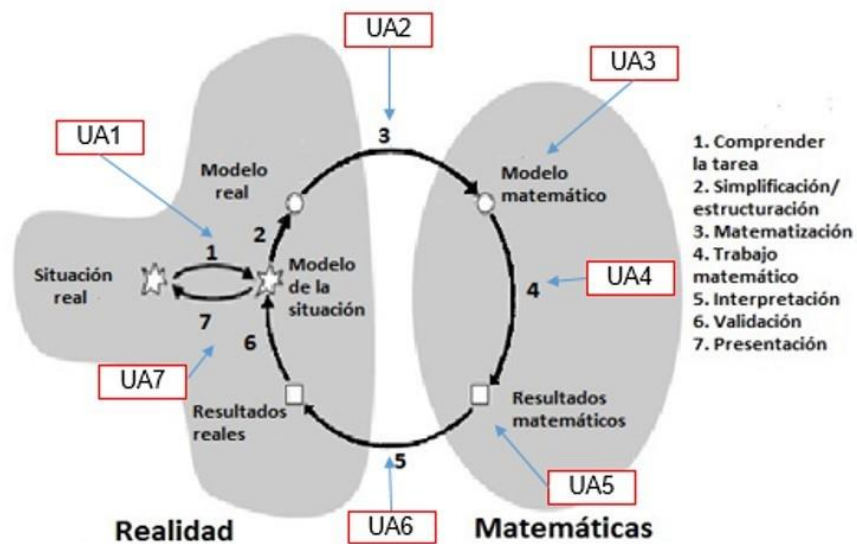
- Traduce un problema del lenguaje coloquial al lenguaje algebraico.
- Construye expresiones completas de 2º grado que representan fenómenos descritos en lenguaje común.

- Ubica en el modelo algebraico las magnitudes que intervienen en el fenómeno.
- Distingue las partes de un problema que corresponden a las variables y constantes.
- Transforma las expresiones aplicando las reglas de las operaciones algebraicas.

De los ACA los estudiantes ponen en juego:

- Comunica y comparte de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos.

En la figura 4.18 están ubicadas las unidades de análisis en el ciclo de modelación.



4.18 Ubicación de las UA de la actividad 2 en el ciclo de modelación de Blum & Leiß (2006 en Blum y Borromeo 2009, p. 46)

De las tablas 4.12 a la 4.15 se presenta un resumen de las cuatro unidades de análisis relacionadas con las fases y procesos del ciclo de modelación, así como las competencias y componentes de competencia puestas en juego durante el proceso de construcción del modelo matemático que permite interpretar la situación, correspondientes a la actividad número dos.

Tabla 4.12

UA4 y su relación con las fases, procesos y competencias puestos en juego

Unidades de Análisis (UA)	Fases del ciclo de modelación	Procesos del ciclo de modelación	Atributos de competencias genéricas	Competencia disciplinar	Atributos de competencias disciplinares
UA4. Se apoyan de una tabla, para determinar algunas soluciones del modelo matemático, con base en el análisis del comportamiento de las variables involucradas en la situación [Ganancia o $G(x)$ y descuentos o x].	F1SR	Comprensión	<ul style="list-style-type: none"> - Expresan ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. - Siguieron instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. - Aportaron puntos de vista con apertura y consideraron los de otras personas de manera reflexiva. 	-Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante el lenguaje verbal y matemático.	ACC. Trabajo con tablas valor. ACC. Reglas de operaciones algebraicas como: suma, resta, multiplicación, elevar a una potencia. ACA. Comunica y comparte de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos.
	F2MS	Trabajo matemático		-Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para estimar su comportamiento.	
	F3MR			-Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	
	F4MM			-Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.	
	F5RM Resultados matemáticos			-Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	

Tabla 4.13

UA5 y su relación con las fases, procesos y competencias puestos en juego

Unidades de Análisis (UA)	Fases del ciclo de modelación	Procesos del ciclo de modelación	Atributos de las competencias genéricas	Competencia disciplinar	Atributos de competencias disciplinares
UA5. Analizan gráficamente el comportamiento de $G(x)$ mientras se modifica el valor de x en un intervalo de 0 a 11.	F1SR	Comprensión	<ul style="list-style-type: none"> a) Expresaron ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. b) Siguieron instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. c) Ordenaron información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones. d) Aportaron puntos de vista con apertura y consideraron los de otras personas de manera reflexiva. 	•Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante el lenguaje verbal y matemático.	ACC. Función cuadrática. ACC. Trabajo con gráficas y tablas de valor. ACP. Representa gráficamente la relación entre las variables. ACA. Comunica y comparte de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos.
	F2MS	Interpretación		•Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para estimar su comportamiento.	
	F3MR			•Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	
	F4MM			•Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.	
	F5RM			•Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	
	F6RR Resultados Reales				

Tabla 4.14
UA6 y su relación con las fases, procesos y competencias puestos en juego

Unidades de Análisis (UA)	Fases del ciclo de modelación	Procesos del ciclo de modelación	Atributos de las competencias genéricas	Competencia disciplinar	Atributos de competencias disciplinares
UA6. Analizan los datos y resultados obtenidos en los modelos tabular y gráfico, determinando la solución en términos de la situación.	F1SR F2MS F3MR F4MM F5RM F6RR FCM5. FCM6. Resultados reales.	Comprensión Interpretación	-Expresaron ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. -Siguieron instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. -Propusieron maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos. -Aportaron puntos de vista con apertura y consideraron los de otras personas de manera reflexiva.	-Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante el lenguaje verbal y matemático. -Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para estimar su comportamiento. -Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. -Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales. -Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	ACC. Expresiones cuadráticas, función cuadrática, trabajo con gráficas y tablas de valor. ACA. Comunica y compare de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos.

Tabla 4.15
UA7 y su relación con las fases, procesos y competencias puestos en juego

Unidades de Análisis (UA)	Fases del ciclo de modelación	Procesos del ciclo de modelación	Atributos de las competencias genéricas	Competencia disciplinar	Atributos de competencias disciplinares
UA7. Validan las soluciones en el marco del modelo matemático y en términos de la situación.	F1SR F2MS F3MR F4MM F5RM F6RR FCM5. FCM6	Comprensión Validación Presentación	-Expresaron ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. -Siguieron instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. -Estructuran ideas y argumentos de manera clara, coherente y sistémica -Aportaron puntos de	-Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante el lenguaje verbal y matemático. -Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para estimar su comportamiento. -Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. -Construye e interpreta modelos matemáticos	ACC. Manejo de expresiones cuadráticas, función cuadrática, representación algebraica, tabular y gráfica. ACP. Traduce un problema del lenguaje coloquial al lenguaje algebraico. ACP. Construye expresiones completas de 2º grado que representan fenómenos descritos en lenguaje común ACP. Ubica en el modelo algebraico

Capítulo 4. Análisis de los resultados

			<p>vista con apertura y consideraron los de otras personas de manera reflexiva.</p>	<p>deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.</p> <p>-Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.</p>	<p>las magnitudes que intervienen en el fenómeno.</p> <p>ACP. Distingue las partes de un problema que corresponden a las variables y constantes.</p> <p>ACP. Transforma las expresiones aplicando las reglas de las operaciones algebraicas.</p> <p>ACA. Comunican y comparten de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos.</p>
--	--	--	---	--	--

Capítulo 5

Consideraciones finales

5.1. Introducción

El presente trabajo caracteriza competencias disciplinares y genéricas a la vez que las desarrolla. Se estudian a través de los atributos de las competencias genéricas, de las competencias disciplinares, que en el marco del Modelo educativo y académico de la UAGro, se establecen las de tipo conceptual (saber), procedimental (saber hacer) y actitudinal (saber ser). Ello, al momento en que estudiantes de bachillerato interpretan y explican una situación de modelación asociada a expresiones cuadráticas del tipo $ax^2 + bx + c$. Para llevar adelante este trabajo, se realizaron las acciones siguientes:

- 1) Se delimitaron las competencias a desarrollar en los estudiantes a través de la SMAEC, de las planteadas en la Unidad de Aprendizaje Matemáticas II, programa de matemáticas de la institución en la que se realizó el estudio.
- 2) Se adaptó una situación de modelación asociada a expresiones cuadráticas, en el marco de las competencias a desarrollar.
- 3) Se adoptó un modelo cognitivo para el análisis del proceso de resolución de la situación de modelación en condiciones de enseñanza, y con base en ello, se reconocieron los modelos que usan los estudiantes en la interpretación y explicación de la situación de modelación.
- 4) Se delimitaron las unidades de análisis por actividad en la SMAEC y se estableció una correspondencia con el ciclo de modelación en el modelo cognitivo adoptado.
- 5) Se caracterizaron las competencias desarrolladas por los estudiantes y sus respectivos componentes, en el marco de las interpretaciones y explicaciones que emergieron en el proceso de solución de la SMAEC.

5.2. Competencias a desarrollar en los estudiantes

La Unidad de Aprendizaje Matemáticas II en la que se contextualiza el estudio, plantea como propósito, el desarrollo de habilidades del pensamiento, comunicación y transferencia hacia

contextos matemáticos y extramatemáticos a través de procesos de apropiación y aplicación de contenidos fundamentales de las ecuaciones, funciones e inecuaciones de segundo grado incompletas y completas para usarlas en la resolución de problemas vinculados con su comunidad y su región. En el marco de las competencias, se establecen las de tipo genéricas (véase anexo 1) que los estudiantes deben adquirir a lo largo del trabajo desarrollado en el bachillerato y las disciplinares.

Es importante señalar que en el programa de estudios de la UAp de Matemáticas II, las competencias genéricas se desarrollan considerando sus atributos y no la competencia genérica en sí, es por eso, que el profesor debe revisar detenidamente los programas y descartar este tipo de errores que aún aparecen en ellos; como es el caso de la competencia supuestamente genérica: *usa los procedimientos propios del álgebra en la solución de situaciones que se relacionan con otras áreas del conocimiento y para esto se apropia de hábitos de estudio que le son útiles a lo largo de la vida*, la cual no corresponde a las competencias genéricas ni a sus atributos, quedando la alternativa de ser ubicada como disciplinar pero también no aparece dentro de esta clasificación dentro del programa.

Los atributos de competencia genérica que se pusieron en juego mediante la SMAEC son:

- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sistémica
- Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- Aporta puntos de vista con apertura y consideran los de otras personas de manera reflexiva.

De las competencias disciplinares

- Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

El desarrollo de ambos tipos de competencias se articula al estudio de fenómenos de su comunidad y de la región de los estudiantes. La interpretación y explicación de la SMAEC está asociada a esta clase de fenómenos y a expresiones cuadráticas.

Los atributos de las competencias disciplinares en el marco de la SMAEC que se ponen en juego se describen en la tabla siguiente:

Tabla 5.1

COMPONENTES DE COMPETENCIA		
CONCEPTUALES (saber)	PROCEDIMENTALES (saber hacer)	ACTITUDINALES (saber ser, saber convivir)
Expresiones cuadráticas completas.	Traduce al lenguaje algebraico fenómenos de su región descritos en lenguaje común.	Comunica y comparte de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos.
Funciones de 2º grado.	Construye expresiones completas de 2º grado que representan fenómenos descritos en lenguaje común.	Valora el lenguaje algebraico como herramienta de síntesis de información acerca de los fenómenos de su entorno.
Magnitudes: variables y constantes.	Ubica en el modelo algebraico las magnitudes que intervienen en el fenómeno.	Confronta sus preconcepciones acerca de las expresiones de 2º grado con el nuevo conocimiento algebraico, mejorando sus argumentos para explicar la realidad.
Registro algebraico	Distingue las partes de un problema que corresponden a las variables y constantes.	
Gráficas.	Transforma las expresiones aplicando las reglas de las operaciones algebraicas.	
Tablas de valor	Representa gráficamente la relación entre las variables	

5.3. Situación de modelación asociada a expresiones cuadráticas

La situación de modelación asociada a expresiones cuadráticas es una adaptación (ver cap. 3.2.2. y anexo 2) a la actividad 3 propuesta en Farfán y colaboradores (2014, p. 80), así como

las actividades de Edilberto Meza Fitz (ver Vargas, A., 2015)

Las adaptaciones fueron las siguientes:

1. Se modificaron los datos y la estructura de la situación original.
2. Se utilizó el ciclo de modelación propuesto por Blum & Leiß (2006 en Blum y Borromeo 2009, p. 46), en esta adaptación.
3. Se consideraron también los momentos sugeridos en el programa de estudios por los cuales debe transitar el estudiante en el proceso de desarrollo de la situación, los cuales son: apertura, desarrollo y cierre. El momento de apertura permitió recuperar conocimientos previos, como la transformación del lenguaje común al algebraico visto en el primer semestre de NMS y problematizar, en el momento correspondiente al desarrollo permitió adquirir y organizar información a través del uso e interpretación de modelos tabulares y gráficos, y por último en el cierre de cada actividad aplicaron y transfirieron la información, socializando los resultados obtenidos en cada uno de los momentos de trabajo individual, equipo y grupal.
4. Se planteó a modo de relato por el profesor en lugar de hacerlo por escrito, con la finalidad de que sean los estudiantes construyan la pregunta o preguntas que deberán acompañar a la situación, la cual redactaron y posteriormente dieron respuesta mediante la construcción del modelo algebraico y mediante la interpretación del modelo tabular y gráfico.

Lo anterior permitió poner en juego y desarrollar competencias (ver tablas 5.2 a la 5.8) propuestas en el plan y programa de estudios, donde se sugiere que el profesor tenga la capacidad de diseño de actividades que promuevan precisamente esas competencias y que además la modelación matemática como alternativa para alcanzar ese fin.

5.4. Modelo cognitivo

El modelo cognitivo propuesto en Blum & Leiß (2006 en Blum y Borromeo 2009, p. 46) se utilizó con la finalidad de dar seguimiento a los procesos cognitivos desarrollados y evidenciados por los estudiantes mientras interpretaban y explicaban la SMAEC, haciendo uso de los modelos: algebraico, tabular y gráfico. Las fases y procesos planteados en el modelo (véase figura 2.1) no necesariamente siguen un desarrollo lineal. Esto es, que una etapa no necesariamente es consecuencia de una previa establecida en el modelo, pues en algunos momentos los estudiantes *regresan* a dos o más etapas previas e incluso puede remitirse al

modelo verbal, a modo de validación o verificación, lo que da lugar a un ir y venir entre las fases.

5.5. Unidades de análisis de la SMAEC y su correspondencia con el ciclo de modelación

Para reconocer y caracterizar las competencias y sus respectivos componentes, se delimitaron unidades de análisis (UA) por actividad/tarea. Cada UA se articuló a los procesos cognitivos en la interpretación y explicación de los estudiantes, a partir del ciclo de modelación. En ese contexto, se delimitaron siete y se describen en la tabla siguiente.

Tabla 5.2

Actividad	Tarea	Unidades de Análisis (UA)
1	1.1, 1.2, 1.3	UA1. Comprensión de la situación narrada y su representación en lenguaje común.
	1.4, 1.5, 1.6	UA2. Representación en lenguaje común y algebraico los datos relevantes de la situación.
	1.7	UA3. Determinación del modelo matemático que representa la situación.
2	2.1	UA4. Se apoyan de una tabla, para determinar algunas soluciones del modelo matemático, con base en el análisis del comportamiento de las variables involucradas en la situación [Ganancia o $G(x)$ y descuentos o x].
	2.2	UA5. Analizan gráficamente el comportamiento de $G(x)$ mientras se modifica el valor de x en un intervalo de 0 a 11.
	2.3, 2.4	UA6. Analizan los datos y resultados obtenidos en los modelos tabular y gráfico, determinando la solución en términos de la situación.
	2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9	UA7. Validan las soluciones en el marco del modelo matemático y en términos de la situación.

5.6. Caracterización de las competencias en la interpretación y explicación de la SMAEC

En el proceso de desarrollo de las competencias genéricas y las disciplinares de la unidad de competencia II del programa de estudios de la UAp de Matemáticas II, se tomó como base los procesos cognitivos puestos en juego por los estudiantes mientras interpretan y explican la SMAEC. Se consideraron para ello, los siete procesos que aparecen en la figura 2.1 del ciclo de modelación propuesto por Blum & Leiß (2006 en Blum y Borromeo 2009, p. 46).

5.6.1. Procesos desarrollados por los estudiantes en la interpretación y explicación de la SMAEC

Las competencias puestas en juego en cada uno de los procesos del ciclo de modelación son:

a) Comprensión de la tarea

Consistió en escuchar la narración del profesor y mediante representaciones mentales que los estudiantes realizaron, posteriormente la redactaron, agregando la o las preguntas que

deberían responder. De este proceso reconocemos que las competencias que se desarrollan y se presentan en la tabla siguiente:

*Tabla 5.3
Competencias puestas en juego en el proceso "comprensión de la tarea"*

Atributos de las competencias genéricas	Competencias disciplinares	Atributos de las competencias disciplinares	Se evidencian mediante
-Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. -Aportan puntos de vista con apertura y consideran los de otras personas de manera reflexiva. -Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sistémica. -Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.	Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para estimar su comportamiento. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.	ACA. Comunica y comparte de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos.	Los estudiantes, aun cuando solo la mitad redacta la o las preguntas, la otra manifestó que sabían lo que debían determinar, evidenciándose mediante las producciones y explicaciones que se trataba las ganancias de la empresa.

En el último atributo de las competencias genéricas de la tabla anterior, no aparece declarado dentro del programa de estudios de Matemáticas II, pero se consideró para nuestro análisis debido a que en el proceso de comprensión en la construcción de la situación a partir de la narración del profesor los estudiantes identificaron las ideas clave que guiaron las preguntas que debían responder.

b) Simplificación y estructuración

Se espera que sean capaces de arribar a un modelo real, que puede ser estructurado de manera interna o mediante la representación escrita, algebraica, dibujos, etc.

Está articulado con el uso del lenguaje común y algebraico mediante el cual los estudiantes representan los datos relevantes de la situación, las competencias relacionadas se presentan en la tabla 5.4.

Es importante señalar que mediante las discusiones desarrolladas en los equipos, permitieron reducir las intervenciones del profesor relacionadas con dudas que presentaron los mismos integrantes.

Tabla 5.4

Competencias puestas en juego en el proceso "simplificación y estructuración"

Atributos de las competencias genéricas	Competencias disciplinares	Atributos de las competencias disciplinares	Se evidencian mediante
<p>-Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas (ver producciones escritas y en las discusiones presentadas en el capítulo cuatro).</p> <p>Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo (ver actividad del anexo 2).</p> <p>Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.</p> <p>-Aportaron puntos de vista con apertura y consideraron los de otras personas de manera reflexiva.</p>	<p>Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para estimar su comportamiento (Esto se evidencia en el capítulo cuatro donde se manifiestan los procesos que los llevaron a determinar la manera en que se relacionaban los descuentos con las ganancias).</p> <p>Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.</p> <p>Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.</p>	<p>ACP. Traduce al lenguaje algebraico fenómenos de su región descritos en lenguaje común (Se determinó que esta competencia está poco desarrollada, dado que usan datos irrelevantes (el 50% de los estudiantes) al interpretar la situación tanto en lenguaje común como en el algebraico)</p> <p>ACP. Ubica en el modelo algebraico las magnitudes que intervienen en el fenómeno (Identificaron y relacionaron el costo del servicio, los descuentos aplicados, el número de equipos a los que se les presta el servicio, así como, las respectivas ganancias)</p> <p>ACP. Distingue las partes de un problema que corresponden a las variables y constantes.</p> <p>ACA. Comunica y comparte de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos (ver comentarios de los estudiantes capítulo cuatro).</p>	<p>Fueron capaces de arribar a un modelo real, el cual fue estructurado mediante la representación escrita de la situación y el uso de lenguaje común y algebraico. Identifican y representan constantes (descuento de \$60 y el incremento en equipos 5) y variables (número de descuentos y ganancias en cada descuento) esto se evidenció mediante las producciones escritas de las actividades y en las discusiones de los equipos y la grupal.</p> <p>Dentro del proceso de construcción de los modelos analíticos de la situación, dos equipos utilizaron dentro de sus representaciones expresiones irrelevantes en el tránsito del lenguaje común al algebraico, pero estas en su momento tomaron relevancia debido a que ocuparon parte del trabajo de los estudiantes. En su momento el profesor consideró dejar para el cierre de cada actividad, que ellos mismos se dieran cuenta de la relevancia o no de sus transformaciones.</p> <p>También es de interés hacer referencia al uso de la variable x como lo manifestó el E1, que la utilizaron por costumbre o de manera automática porque en cursos anteriores así lo hacían.</p>

c) Matemización

Se desarrolla utilizando las representaciones de la etapa previa, mediante el manejo de expresiones algebraicas, dando como resultado el modelo matemático. Las competencias asociadas a este proceso son:

*Tabla 5.5
Competencias puestas en juego en el proceso "Matemización"*

Atributos de las competencias genéricas	Competencias disciplinares	Atributos de las competencias disciplinares	Se evidencian mediante
<p>Expresaron ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.</p> <p>Siguieron instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.</p> <p>Propusieron maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.</p> <p>-Aportaron puntos de vista con apertura y consideraron los de otras personas de manera reflexiva</p>	<p>-Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante el lenguaje verbal y matemático.</p> <p>-Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para estimar su comportamiento</p> <p>-Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.</p> <p>-Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales (Esta competencia es una de las que se logra desarrollar con las actividades, puesto que los estudiantes logran construir el modelo algebraico e interpretar y explicar a través de los modelos tabular y gráfico la situación).</p>	<p>ACP. Construye expresiones de 2° grado que representan fenómenos distintos en lenguaje común.</p> <p>ACP. Traduce un problema del lenguaje común al lenguaje algebraico.</p> <p>ACP. Transforma las expresiones aplicando las reglas de las operaciones algebraicas.</p> <p>ACC. Expresiones completas de segundo grado, variables y constantes, reglas de operaciones algebraicas como: suma, resta, multiplicación de binomios.</p> <p>ACA. Comunica y comparte de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos</p>	<p>En este proceso representaron en lenguaje algebraico las partes relevantes de la situación como son: el costo del servicio mediante la expresión $600-60x$, así como la cantidad de equipos mediante la expresión $10+5x$, el número de descuentos aplicados por medio de x, y las ganancias (G) con el producto de los binomios $(600-60x)(10+5x)$ o $G=-300x^2+2400x+6000$.</p> <p>Reconociendo que los alumnos que no lograron completar dicha representación (20%) en la etapa individual, en la discusión por equipo logran expresarla.</p> <p>En la UA3 el E1A3 hace referencia a que el producto de los binomios $(600-60x)(10+5x)$ lo desarrollan para obtener $-300x^2+2400x+6000$, porque en cursos pasados les pedían realizar el producto con la finalidad de que vieran otra representación de la expresión algebraica, he aquí la presencia del paradigma de la enseñanza y del aprendizaje que estamos promoviendo con las actividades.</p>

d) Trabajo Matemático

El trabajo matemático consistió en el uso del modelo algebraico para determinar los valores de las ganancias correspondientes a cada descuento, valiéndose de operaciones como: sustitución, suma, resta, multiplicación y elevar al cuadrado, así como su representación gráfica, para su posterior interpretación, logrando que los estudiantes pusieran en juego:

Tabla 5.6

Competencias puestas en juego en el proceso "trabajo matemático"

Atributos de las competencias genéricas	Competencias disciplinares	Atributos de las competencias disciplinares	Se evidencian mediante
<p>Expresan ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.</p> <p>- Siguieron instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.</p> <p>- Aportaron puntos de vista con apertura y consideraron los de otras personas de manera reflexiva.</p>	<p>-Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante el lenguaje verbal y matemático.</p> <p>-Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para estimar su comportamiento.</p> <p>-Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.</p> <p>-Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.</p> <p>-Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.</p>	<p>ACC. Trabajo con tablas valor.</p> <p>ACC. Reglas de operaciones algebraicas como: suma, resta, multiplicación, elevar a una potencia (ver figura 5.14).</p> <p>ACA. Comunica y comparte de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos.</p>	<p>Mediante los resultados obtenidos en el llenado del modelo tabular y en la representación gráfica de la situación.</p>

e) Interpretación

En este proceso utilizaron la representación algebraica, tabular y gráfica de la situación con la finalidad de determinar los resultados de la situación y del modelo.

Tabla 5.7
Competencias puestas en juego en el proceso "Interpretación"

Atributos de las competencias genéricas	Competencias disciplinares	Atributos de las competencias disciplinares	Se evidencian mediante
<ul style="list-style-type: none"> - Expresaron ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. - Siguieron instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. - Ordenaron información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones. - Aportaron puntos de vista con apertura y consideraron los de otras personas de manera reflexiva. 	<ul style="list-style-type: none"> -Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante el lenguaje verbal y matemático. -Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para estimar su comportamiento. -Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. -Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales. -Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos. 	<ul style="list-style-type: none"> ACC. Función cuadrática (25% de los estudiantes relaciona la expresión cuadrática y la gráfica con este concepto, aunque no es la intención de las actividades construirlo). ACC. Trabajo con gráficas y tablas de valor. ACP. Representa gráficamente la relación entre las variables. ACA. Comunica y comparte de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos. 	<ul style="list-style-type: none"> -Representaron los resultados del modelo algebraico mediante el tabular y gráfico. El modelo tabular y gráfico permitió que los estudiantes: <ul style="list-style-type: none"> -Determinaran el valor de la máxima ganancia. -Realizaron procedimientos como son la ubicación de las coordenadas de un punto sobre el plano. -Ubicaron puntos sobre la gráfica y los relacionaron con las ganancias cuando no se aplican descuentos, con la máxima ganancia, ganancia cero, intervalos donde ganancias y pérdidas. -Relacionaron la representación gráfica con una parábola (un equipo lo reporta en las producciones escritas y en la discusión grupal coinciden en que la representación gráfica corresponde a una parábola)

f) Validación

Mediante el análisis de los modelos algebraico, tabular y gráfico, determinaron cuál o cuáles de las soluciones cumplen con las situaciones planteadas y las del modelo matemático.

*Tabla 5.8
Competencias puestas en juego en el proceso "validación"*

Atributos de las competencias genéricas	Competencias disciplinares	Atributos de las competencias disciplinares	Se evidencian mediante
<p>Expresaron ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.</p> <p>-Siguieron instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.</p> <p>-Propusieron maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.</p> <p>-Aportaron puntos de vista con apertura y consideraron los de otras personas de manera reflexiva.</p>	<p>-Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante el lenguaje verbal y matemático.</p> <p>-Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para estimar su comportamiento.</p> <p>-Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.</p> <p>-Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.</p> <p>-Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.</p>	<p>ACC. Expresiones cuadráticas, función cuadrática, trabajo con gráficas y tablas de valor.</p> <p>ACA. Comunica y compare de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos.</p>	<p>-Identificaron los momentos en que se repiten los valores correspondientes a las ganancias, al hacer variar los descuentos.</p> <p>-Relacionaron el término independiente del modelo algebraico con el valor de la ganancia cuando no se aplica descuento, y la intersección de la gráfica con el eje G.</p> <p>-Determinaron en qué momento no se generan ganancias respecto al momento en que se dejan de aplicar descuentos.</p> <p>-Determinaron la conveniencia o no, de seguir realizando descuentos cuando la ganancia es cero pesos.</p>

g) Presentación

Los estudiantes analizaron los resultados obtenidos en un primer momento en el equipo y posteriormente en la discusión grupal, a partir de la comparación del modelo matemático al que arribaron, la situación real y determinar las discrepancias entre ambas, con la intención de unificar criterios en cuanto a los resultados y determinar de ser necesario repetir el proceso, hasta obtener el modelo que represente dicha situación.

*Tabla 5.9
Competencias puestas en juego en el proceso "Presentación"*

Atributos de las competencias genéricas	Competencias disciplinares	Atributos de las competencias disciplinares	Se evidencian mediante
<p>Expresaron ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.</p> <p>-Siguieron instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.</p> <p>-Estructuran ideas y argumentos de manera clara, coherente y sistemática</p> <p>-Aportaron puntos de vista con apertura y consideraron los de otras personas de manera reflexiva.</p>	<p>-Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante el lenguaje verbal y matemático.</p> <p>-Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para estimar su comportamiento.</p> <p>-Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.</p> <p>-Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas mediante la aplicación de procedimientos algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.</p> <p>-Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.</p>	<p>ACC. Manejo de expresiones cuadráticas como la función cuadrática, representación algebraica, tabular y gráfica.</p> <p>ACP. Traduce un problema del lenguaje coloquial al lenguaje algebraico.</p> <p>ACP. Construye expresiones completas de 2º grado que representan fenómenos descritos en lenguaje común</p> <p>ACP. Ubica en el modelo algebraico las magnitudes que intervienen en el fenómeno.</p> <p>ACP. Distingue las partes de un problema que corresponden a las variables y constantes.</p> <p>ACP. Transforma las expresiones aplicando las reglas de las operaciones algebraicas.</p> <p>ACA. Comunican y comparten de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos.</p>	<p>Como resultado de la discusión grupal, acordaron utilizar el modelo algebraico que permite interpretar la situación planteada por el profesor, mediante la expresión que relaciona las ganancias (G) con el costo por el número de equipos, esto fue mediante el producto de los binomios $(600-60x)(10+5x)$ o mediante su desarrollo de la siguiente forma: $G = -300x^2 + 2400x + 6000$</p> <p>Mediante esta expresión y haciendo uso del modelo tabular y gráfico y de las tareas que realizaron, con la finalidad de analizar y dar respuesta a la o las preguntas planteadas por los estudiantes es como completan el ciclo de modelación.</p>

De lo anterior podemos decir que la SMAEC contribuye a que los estudiantes reconozcan que desde el punto de vista de la matemática, hay más de una solución al modelo matemático, y que una de ellas es la que satisface la situación planteada. La ruta que se siguió *realidad* → *matemáticas* (mediante la situación de aprendizaje), favorece además, a que se le dé sentido y significado a la matemática, pues los modelos matemáticos tabular y gráfico aparecen a

modo de uso, mientras interpretan y explican una situación de su entorno inmediato. Esta ruta, se sugiere al profesor en la reforma educativa de la UAGro, para el desarrollo de competencias disciplinares y genéricas.

Es evidente que dos actividades resultan insuficientes en el logro de un desarrollo significativo de todas las competencias manifestadas en el programa de estudios, pero es una propuesta que permite poner en juego algunas de ellas, mediante la participación activa de forma individual, equipo y grupal. El comentario anterior es debido a que los grupos de la escuela preparatoria donde me desempeño como profesor (Prepa 1) son en promedio de 60 estudiantes, y mantener la atención e interés de todos ellos requiere de la puesta en juego de las competencias del docente, teniendo a la modelación matemática como una alternativa para el desarrollo de competencias.

Referencias bibliográficas

- Ärlebäck, J. B., y Doerr, H. M. (2014). *At the core of modelling: connecting, coordinating and integrating models*. Descargado de: <http://www.cerme9.org/products/wg6/>
- Biembengut, M., y Hein, N. (1997). *Modelo, modelación y modelaje. Métodos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas*. Recuperado de: matesup.utralca.cl/modelos/articulos/modelacion_mate2.pdf
- Biembengut, M. y Hein, N. (2006). *Modelaje matemático como método de investigación en clase de matemáticas*. V Festival de Internacional de Matemática de Costa a Costa Matemática para interpretar nuestro entorno. Celebrado del 29 al 31 de marzo. Recuperado el 31 de mayo de 2016 de <http://www.cientec.or.cr/matematica/pdf/P-2-Hein.pdf>
- Blomhoj, M. (2009). Different perspectives on Mathematical modelling in educational research. En Blomhoj, et al (eds), *mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics*, ICMI, 1-18. Recuperado de <http://tsg.icme11.org/document/get/812>.
- Blum, W., Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application* 1(1), 45-58.
- Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86–95.
- Bressan, A. (2011). Los principios de la Educación Matemática Realista. Recuperado de <https://lasmatesdeinma.files.wordpress.com/2011/11/principios-de-educacion-matematica-realista.pdf>
- Cabañas-Sánchez, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico (Tesis de doctorado)*. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México, Distrito Federal.
- Cetina-Vázquez, M. (2015). *Proceso de matematización de situaciones de variación en el marco de la función cuadrática. Un estudio de caso en bachillerato (tesis de maestría inédita)*. México: Universidad Autónoma de Guerrero Córdoba, F. (2011). *La modelación en matemática educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería*. (Tesis de maestría). CICATA-IPN, México, D.F.
- Córdoba, F. (2011). *La modelación en matemática educativa: una práctica para el trabajo*

- de aula en ingeniería. (Tesis de maestría). CICATA-IPN, México, D.F.
- Delors, J. (1996). Los cuatro pilares de la educación. En: la educación encierra un tesoro. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el siglo XXI. Santillana/UNESCO. Madrid, España.
- DOF (2009). *Acuerdo 444 por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato*. Recuperado de http://sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/10905/1/images/Acuerdo_444_marco_curricular_comun_SNB.pdf
- Farfán, et. al.(2014). *Matemáticas 3. Serie desarrollo del pensamiento matemático*. México: Mc Graw Hill.
- Jiménez, A. et. al.,(2012). *Matemáticas II. Libro de texto del plan de estudios por competencias, 2010*. Universidad Autónoma de Guerrero. México.
- Kaiser, G y Sriraman, B. (2006). Aglobal survey of international perspectives on modelling in mathematics education. ZDM. The international Journal on Mathematics Education, 38 (3), 302-310.
- Kaiser, G. y Schwarz, B. (2010). Authentic Modelling Problems in Mathematics Education- Examples and Experiences. Journal Fur Mathematik-Didaktik, 31(1), 51-76
- Orozco-Jutorán, Mariana (2006) “La evaluación diagnóstica, formativa y sumativa en la enseñanza de la traducción”, en: Varela, M.J. (ed.) La evaluación en los estudios de traducción e interpretación. Sevilla: Bienza. p. 47-68 ISBN: 978-84-933962-8-2.
- Pinar, T. et. al. (2010). Model- Eliciting Activities: Assessing Engineering Student Problem Solving and Skill Integration Processes. University of Pittsburgh, Pittsburgh. Recuperado de: http://www.modelsandmodeling.pitt.edu/Publications_files/MEA_ljee2332_1.pdf
- Stillman, G. (2012). *Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt?* (pp. 902–921). Presented at the 12th International Congress on Mathematical Education, 8 July – 15 July, 2012, COEX, Seoul, Korea, Seoul, Korea.
- Tobón, S. (2006). Aspectos básicos de la formación basada en competencias. Talca: Proyecto Mesesup.
- Tobón S., Pimienta J. H. y García J. A. (2010). Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias. México: Pearson educación.
- UAGro (2010a). *Plan de estudios por competencias de Educación Media Superior2010*. México: Universidad Autónoma de Guerrero. Recuperado de <http://cgro.uagro.mx/>

- UAGro (2010b). *Plan de estudios por competencias 2010. Programa de estudios de la Unidad de Aprendizaje Matemáticas II*. México: Universidad Autónoma de Guerrero. Recuperado de <http://cgrou.uagro.mx/>
- UAGro (2010c). *Plan de estudios por competencias 2010. Programa de estudio de la Unidad de Aprendizaje Matemáticas I*. México: Universidad Autónoma de Guerrero. Recuperado de <http://cgrou.uagro.mx/>
- UAGro (2013). *Modelo Educativo. Hacia una educación de calidad con inclusión social*. México: Universidad Autónoma de Guerrero.
- Vargas, A. (2015). *La modelación matemática en la interpretación de una situación asociada a lo lineal* (tesis de maestría inédita). México: Universidad Autónoma de Guerrero.
- Villa, J. A. (2007). *La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo*. *Tecno Lógicas* , 63-85.

Anexos

ANEXO 1. De las competencias genéricas de los estudiantes Categorías, competencias y atributos

Se autodetermina y cuida de sí

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.

Atributos:

- 1.1. Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
- 1.2. Identifica sus emociones, las maneja de manera constructiva y reconoce la necesidad de solicitar apoyo ante una situación que lo rebase.
- 1.3. Elige alternativas y cursos de acción con base en criterios sustentados y en el marco de un proyecto de vida.
- 1.4. Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.
- 1.5. Asume las consecuencias de sus comportamientos y decisiones.
- 1.6. Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas.

2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.

Atributos:

- 2.1 Valora el arte como manifestación de la belleza y expresión de ideas, sensaciones y emociones.
- 2.2 Experimenta el arte como un hecho histórico compartido que permite la comunicación entre individuos y culturas, en el tiempo y el espacio, a la vez que desarrolla un sentido de identidad.
- 2.3 Participa en prácticas relacionadas con el arte.

3. Elige y practica estilos de vida saludables.

Atributos:

- 3.1. Reconoce la actividad física como un medio para su desarrollo físico, mental y social.
- 3.2. Toma decisiones a partir de la valoración de las consecuencias de distintos hábitos de consumo y conductas de riesgo.

- 3.3. Cultiva relaciones interpersonales que contribuyen a su desarrollo humano y el de quienes lo rodean.

Se expresa y comunica.

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, de códigos y herramientas apropiados.

Atributos:

- 4.1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- 4.2. Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.
- 4.3. Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.
- 4.4. Se comunica en una segunda lengua en situaciones cotidianas.
- 4.5. Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.

Piensa crítica y reflexivamente

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

Atributos:

- 5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- 5.2. Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
- 5.3. Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.
- 5.4. Construye hipótesis, diseña y aplica modelos para probar su validez.
- 5.5. Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.
- 5.6. Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.

6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.

Atributos:

- 6.1. Elige fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.

- 6.2. Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.
- 6.3. Reconoce los propios prejuicios, modifica sus puntos de vista al conocer nuevas evidencias, e integra nuevos conocimientos y perspectivas al acervo con el que cuenta.
- 6.4. Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.

Aprende de forma autónoma

7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.

Atributos:

- 7.1. Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción del conocimiento.
- 7.2. Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.
- 7.3. Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.

Trabaja en forma colaborativa

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

Atributos:

- 8.1. Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- 8.2. Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- 8.3. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Participa con responsabilidad en la sociedad

9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.

Atributos:

- 9.1. Privilegia el diálogo como mecanismo para la solución de conflictos.
- 9.2. Toma decisiones a fin de contribuir a la equidad, bienestar y desarrollo democrático de la sociedad.
- 9.3. Conoce sus derechos y obligaciones como mexicano y miembro de distintas comunidades e instituciones y reconoce el valor de la participación como herramienta para ejercerlos.

- 9.4. Contribuye a alcanzar un equilibrio entre el interés y bienestar individual y el interés general de la sociedad.
- 9.5. Actúa de manera propositiva frente a fenómenos de la sociedad y se mantiene informado.
- 9.6. Advierte que los fenómenos que se desarrollan en los ámbitos local, nacional e internacional ocurren dentro de un contexto global interdependiente.

10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.

Atributos:

- 10.1. Reconoce que la diversidad tiene lugar en un espacio democrático de igualdad, dignidad, y derechos de todas las personas y rechaza toda forma de discriminación.
- 10.2. Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.
- 10.3. Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.

11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

Atributos:

- 11.1 Asume una actitud que favorece la solución de problemas ambientales en los ámbitos local, nacional e internacional.
- 11.2 Reconoce y comprende las implicaciones biológicas, económicas, políticas y sociales del daño ambiental en un contexto global Interdependiente.
- 11.3 Contribuye al alcance de un equilibrio entre los intereses de corto y largo plazo con relación al ambiente.

ANEXO 2. Las dos actividades de la situación de modelación

Actividad 1		
Alumno(a): _____		
Grupo: _____	Equipo: _____	Edad: _____

1. Escucha la narración del profesor

2. Usa el espacio siguiente para que redactes la situación narrada por el profesor

--

3. Compara con uno de tus compañeros tu redacción y realicen los ajustes que dejen lo más claro posible la situación y escríbela en el espacio siguiente.

--

4. De forma individual haz una lista de los elementos más importantes o relevantes que consideres en la situación y represéntalos en el espacio de abajo.

Lenguaje común	Lenguaje algebraico

5. En equipo de hasta 5 integrantes analicen las representaciones que hicieron de los elementos relevantes de la situación para que escriban una sola.

Lenguaje común	Lenguaje algebraico

6. Individualmente propón una **expresión algebraica que incluya todos los elementos relevantes**, de tal forma, que represente la situación planteada.

7. En equipo analicen la expresión y acuerden una sola.

8. Comparen la expresión obtenida con el resto de los equipos. Anota la expresión que acordaron como grupo.

Actividad 2

Alumno(a): _____

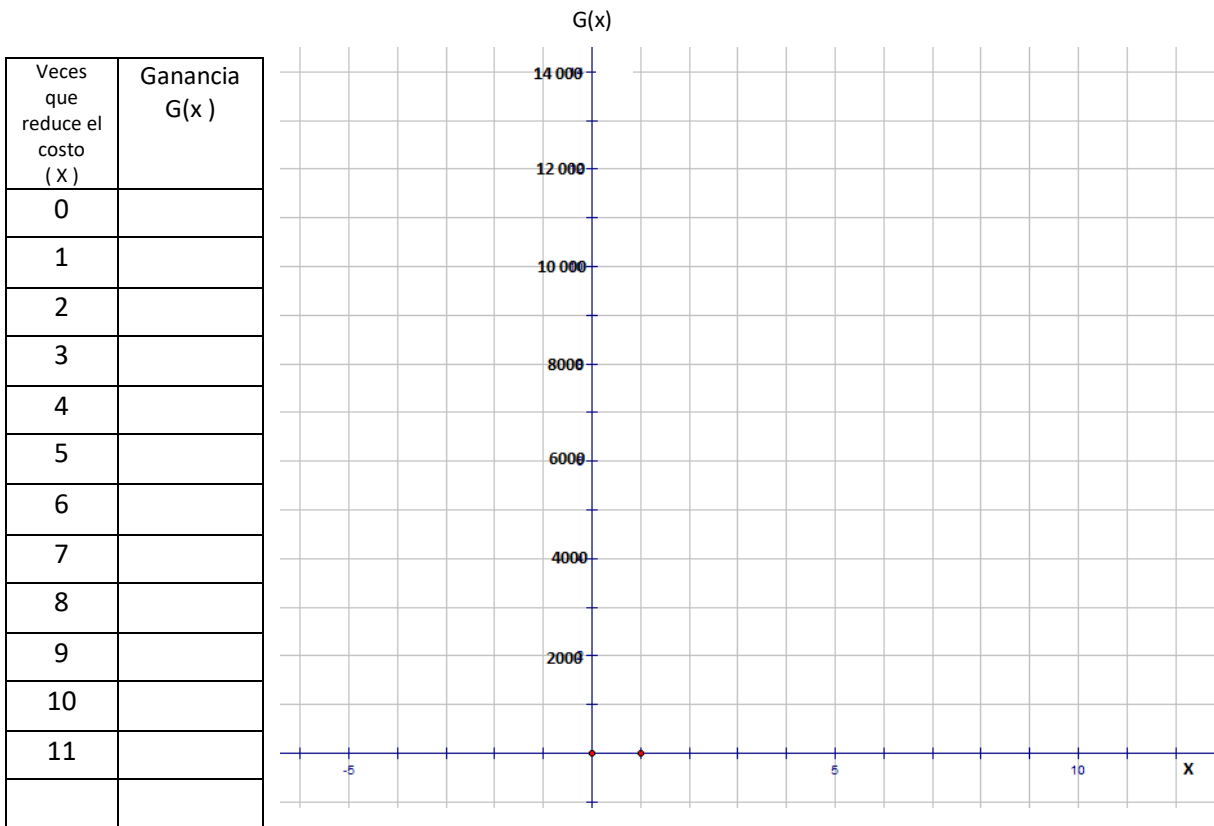
Grupo: _____

Equipo: _____

Edad: _____

Apóyate de la expresión $G(x) = -300x^2 + 2400x + 6000$ de la actividad 1 que se acordó con el grupo, la cual representa la ganancia que la empresa obtiene, al aplicar descuentos al servicio que presta. Con base en ello realiza lo que se te pide:

1. Completa la tabla y determina la ganancia que se obtiene cada vez que se aplica el descuento al costo por servicio.
2. Representa en el plano cartesiano el comportamiento de las ganancias que obtiene la empresa.



3. Analiza los datos de la tabla y el comportamiento de la gráfica. ¿Cuál es la mayor ganancia? Argumenta tu respuesta.
4. ¿Cuántas veces se tiene que reducir el costo del mantenimiento, para obtener la mayor ganancia?

5. ¿En qué momento al aplicar los descuentos vuelve la empresa a tener la misma ganancia?
6. ¿Cuál es el monto de la ganancia que obtiene la empresa cuando no aplica descuentos?
7. Si tomas como referencia la ganancia inicial ¿En qué momento el dueño de la empresa no obtiene ganancias? Indícalo también en la gráfica con color rojo.
8. ¿Tiene sentido para la empresa continuar aplicando descuentos a partir del momento en que se obtiene cero pesos de ganancias? Argumenta tu respuesta.
9. Los equipos exponen y explican con base en los modelos tabular y gráfico ¿Cuál es la solución a la situación?

ANEXO 3. Estructura de la Unidad de Aprendizaje: Matemáticas II. Interpretando la Realidad. Segunda Parte

Competencias	Proceso de construcción de aprendizaje	Interpretando los fenómenos de tu comunidad		Interpretando los fenómenos de tu región	
		Unidad I Ecuaciones incompletas de 2° grado	Unidad II Ecuaciones completas de 2° grado	Unidad III Inecuaciones incompletas de 2° grado	Unidad IV Inecuaciones completas de 2° grado
Expresa ideas y conceptos mediante representaciones matemáticas y gráficas.	Traducción del lenguaje coloquial al lenguaje algebraico.	Expresiones cuadráticas. Ecuación incompleta de 2° grado.	Expresiones cuadráticas. Ecuación completa de 2° grado.	Expresiones cuadráticas. Inecuaciones incompletas de 2° grado.	Expresiones cuadráticas. Inecuaciones completas de 2° grado.
Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para estimar su comportamiento.	Identificación y análisis de datos del problema, (magnitudes variables y constantes) y implícitos y explícitos y su relación mediante una función, una ecuación o inecuación de 2° grado.	Modelo algebraico para expresiones incompletas de 2° grado. Magnitudes: variables y constantes.	Modelo algebraico para expresiones completas de 2° grado. Magnitudes: variables y constantes.	Modelo algebraico para expresiones incompletas de 2° grado. Magnitudes: variables y constantes.	Modelo algebraico para expresiones completas de 2° grado. Magnitudes: variables y constantes.
Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	Procedimientos y reglas para transformar expresiones algebraicas y explicar los resultados.	Reglas de las operaciones algebraicas: Factorización.	Reglas de las operaciones algebraicas: - Factorización. - Completar el cuadrado perfecto. - Fórmula general. Análisis del discriminante. Escritura de los números complejos.	Reglas de las operaciones algebraicas: - Factorización. - Propiedades de las inecuaciones. - Desigualdad cuadrática simple.	Reglas de las operaciones algebraicas: - Factorización. - Propiedades de las inecuaciones. - Reducción del caso general a la cuadrática simple.
Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	Construcción de modelos para predecir comportamientos de las magnitudes.	Funciones de segundo grado.	Funciones de segundo grado.	Funciones de segundo grado.	Funciones de segundo grado.
Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante el lenguaje verbal y matemático. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.	Operación sobre magnitudes (variables y constantes). Representación de la solución del problema.	Registro algebraico Gráficas. Figuras. Tablas de valor.	Registro algebraico. Gráficas. Figuras. Tablas de valor.	Registro algebraico. Gráficas. Figuras. Tablas de valor.	Registro algebraico. Gráficas. Figuras. Tablas de valor.