



Universidad Autónoma de Guerrero

Facultad de Matemáticas

---

---

Maestría en Matemáticas Aplicadas

**Ecuación de difusión anómala  
con derivada de Riesz en el  
primer cuadrante**

**T E S I S**

PARA OBTENER EL GRADO DE:

**Maestro en Matemáticas Aplicadas**

PRESENTA:

**Eduard Armando García Murcia**

DIRECTOR DE TESIS:

Martín P. Arciga Alejandre

Jorge Sánchez Ortiz

Noviembre de 2018

---

## Dedicatoria

---

*Dedico ésta tesis inicialmente a Dios por la fortaleza que siempre me ha brindado.  
A mis padres y hermanos, por hacer parte de la travesía desde la distancia, por transmitir amor de familia, comprensión e incondicionalidad. A mi abuelita Elena García Q.E.P.D. ya son casi 10 años sin su presencia en la tierra, pero mi forma de ser y de no desfallecer en los proyectos son gracias a sus consejos; lo más importante  
...disfrutar y reír cada jodido segundo de nuestra existencia.*

---

## Agradecimientos

---

A mis padres Jesús García y Miryam Murcia, por todas sus enseñanzas.

A mis padrinos y demás familia, por su incondicionalidad en todo momento.

A mi asesor de Licenciatura, el Magister Nestor Orlando Forero Díaz, la travesía en México inicia por sus buenos consejos.

A mis compañeros, por la enorme ayuda que recibí por parte de ellos durante mi estancia.

A mis asesores de Maestría, por creer en mis capacidades y orientarme en todo momento; decirles gracias, es decirles poco por todo lo que me apoyaron.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por haberme brindado el apoyo económico necesario para realizar mis estudios de Maestría.

---

## Resumen

---

En esta tesis se estudia un problema con condición de frontera de Neumann, para la ecuación de difusión anómala sobre el primer cuadrante del plano. Se adaptan las ideas principales del método de Fokas para construir una representación integral de la solución y se presentan ejemplos numéricos que muestran el comportamiento de algunas soluciones particulares.

---

# Índice general

---

<b>Introducción</b>	<b>I</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Ecuación diferencial parcial . . . . .	1
1.2. Operador integro-diferencial . . . . .	2
1.3. Espacios de funciones integrables . . . . .	3
1.4. Funciones especiales . . . . .	6
1.5. Operadores fraccionarios de Riemann-Liouville . . . . .	7
1.6. Derivada fraccionaria de Caputo . . . . .	9
<b>2. Método unificado de Fokas</b>	<b>11</b>
2.1. Ecuaciones de evolución sobre la semirrecta [10] . . . . .	11
2.2. Integrales fraccionales del Tipo Potencial . . . . .	13
2.2.1. Potencial de Riesz en el eje real . . . . .	14
2.2.2. Potencial de Riesz en la semirrecta positiva ( $x > 0$ ) . . . . .	14
2.3. Derivada fraccionaria tipo Riesz . . . . .	15
2.4. Ecuación de difusión anómala en la semirrecta positiva ( $x > 0$ ) . . . . .	15
2.5. Evaluación numérica . . . . .	17
2.5.1. Ejemplo 1 . . . . .	17
2.5.2. Ejemplo 2 . . . . .	18
<b>3. Planteamiento del problema</b>	<b>21</b>
3.1. Representación integral de la ecuación de difusión anómala . . . . .	24
3.2. Evaluación numérica . . . . .	24



---

## Índice de figuras

---

2.1.	Representación integral asociada a $u(x, t)$ para diferentes tiempos y $\alpha = 2$ . . . . .	17
2.2.	Representaciones integrales asociadas a las soluciones $v(x, t)$ y $u(x, t)$ de las ecuaciones de difusión y difusión anómala, respectivamente. Para el caso anómalo con $\alpha = 2$ . . . . .	17
2.3.	Representaciones integrales asociadas a la solución de la ecuación de difusión anómala $u(x, t)$ en el tiempo $t = 1$ , para diferentes valores de $\alpha$ . . . . .	18
2.4.	Variación de $u(x, t)$ para $\alpha = 2$ , en $x \in [0, 10]$ y $t \in [0, 10]$ . . . . .	18
2.5.	Representación integral asociada a $u(x, t)$ para diferentes tiempos y $\alpha = 2$ . . . . .	19
2.6.	Representaciones integrales asociadas a las soluciones $v(x, t)$ y $u(x, t)$ de las ecuaciones de difusión y difusión anómala, respectivamente. Para el caso anómalo con $\alpha = 2$ . . . . .	19
2.7.	Representaciones integrales asociadas a la solución de la ecuación de difusión anómala $u(x, t)$ en el tiempo $t = 1$ , para diferentes valores de $\alpha$ . . . . .	19
2.8.	Variación de $u(x, t)$ para $\alpha = 2.5$ , en $x \in [0, 10]$ y $t \in [0, 10]$ . . . . .	20
3.1.	Representación integral asociada a $u(x_1, x_2, t)$ para diferentes tiempos y $\alpha = 2.1$ . . . . .	25
3.2.	Representaciones integrales asociadas a la solución de la ecuación de difusión anómala $u(x_1, x_2, t)$ , en el tiempo $t = 1$ . Para $\alpha = 2.1, 2.5, 2.9$ . . . . .	25
3.3.	Curvas de nivel asociadas a la ecuación de difusión clásica en el tiempo $t = 1$	25
3.4.	Curvas de nivel asociadas a la ecuación de difusión anómala $u(x_1, x_2, t)$ , en el tiempo $t = 1$ y $\alpha = 2$ . . . . .	26

---

# Introducción

---

La difusión es un fenómeno común en la naturaleza, y es fundamentalmente, un mecanismo que transporta materia o alguna otra cantidad física de un lugar a otro en un espacio determinado. Las características de dicho mecanismo dependen tanto de las propiedades físicas del medio, e.g. la temperatura y la estructura geométrica del espacio dentro del cuál se lleva a cabo este fenómeno, como de la interacción entre la sustancia que se difunde y la sustancia en la cual ocurre la difusión, e.g. la difusión de una gota de tinta en agua [1].

En cambio, la difusión anómala aparece en sistemas desordenados o en sistemas que se encuentran lejos del equilibrio termodinámico [2], donde las heterogeneidades del sistema, inducen un comportamiento anómalo en el desplazamiento cuadrado promedio recorrido por la sustancia que se difunde y crece con el tiempo de la siguiente forma:  $\langle r^2(t) \rangle \propto t^\gamma$ , donde el valor del exponente divide de manera natural a los procesos difusivos en dos regímenes distintos: superdifusión para  $\gamma > 1$  y subdifusión para  $\gamma < 1$  [3].

Una forma de modelar la difusión anómala de un fenómeno es mediante las ecuaciones diferenciales fraccionarias que involucran derivadas espaciales fraccionarias, dichas derivadas son operadores integro-diferenciales y no locales. En las últimas décadas se ha demostrado que las ecuaciones diferenciales fraccionarias son la base de modelos muy eficientes en una amplia gama de fenómenos; en ciencia e ingeniería, e.g. ha sido útil en el estudio de la estructura interna de células vivas, la caracterización de la manera en la que distintas especies de animales encuentran alimento y en la descripción del movimiento del agua o petróleo en reservorios o yacimientos altamente desordenados (ver [3–6]).

Por otro lado, el problema del valor inicial y de frontera bidimensional se ha abordado

para modelos basados en ecuaciones diferenciales parciales, en [7] los autores encuentran una solución analítica usando una transformada unificada, propuesta por Fokas, para la ecuación de calor bidimensional en el primer cuadrante con condiciones de frontera Neumann no separables, también en [8] los autores encuentran una solución analítica para una ecuación generalizada de Korteweg-de Vries en un cuarto de plano. En [9] la existencia y unicidad de soluciones suaves se ha demostrado para el problema de Cauchy de una ecuación de calor fraccionaria estocástica, donde está involucrado el Laplaciano fraccionario.

En este documento; nos centraremos en problemas de valor inicial y de frontera, con condiciones de Neumann; para  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ ,  $t \in [0, T]$  y  $\alpha \in (2, 3)$ ,

$$\begin{cases} u_t &= \mathcal{D}_{x_1}^\alpha u + \mathcal{D}_{x_2}^\alpha u, \\ u(x_1, x_2, 0) &= u_0(x_1, x_2), \\ u_{x_1}(0, x_2, t) &= h_1(x_2, t), \\ u_{x_2}(x_1, 0, t) &= h_2(x_1, t), \end{cases} \quad (1)$$

con la condición de compatibilidad  $h_1(0, t) = h_2(0, t)$ . Donde, la derivada espacial de orden fraccionario es definida via potencial de Riesz

$$\mathcal{D}_{x_j}^\alpha u = -\frac{1}{\Gamma(3-\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)} \int_0^\infty \frac{\text{sgn}(x_j - y_j)}{|x_j - y_j|^{\alpha-2}} \partial_{y_j}^3 u(y_1, y_2, t) dy_j, \quad j = 1, 2.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, nuestro objetivo general es determinar una representación integral asociada a la solución de la ecuación de difusión anómala (1) en el primer cuadrante del plano. Además, presentar evaluaciones numéricas para condiciones iniciales y de frontera específicas; por otro lado, comparar representaciones integrales obtenidas por el método unificado de Fokas (ver [7], [10]) asociadas a la ecuación de calor bidimensional con respecto a la ecuación (1) para  $\alpha = 2$ .

El contenido de esta tesis se divide en tres capítulos de la siguiente manera: En el capítulo **uno** daremos los preliminares básicos necesarios para el desarrollo del trabajo, referentes a conceptos de variable compleja, ecuaciones diferenciales parciales y derivadas de orden fraccionario, entre otros. En el capítulo **dos** nos enfocaremos en explicar el método para obtener

las representaciones integrales para la ecuación de difusión anómala en la semirrecta positiva. Por otro lado, presentaremos una solución a nuestro problema planteado (1) en el capítulo **tres**, incluyendo ejemplos de evaluaciones numéricas para condiciones iniciales y de frontera específicas.

## Preliminares

---

En este primer capítulo presentamos una noción de ecuación diferencial parcial de orden fraccionario; posterior a esto, definimos de manera muy general operadores integro-diferenciales, espacios de funciones  $L^p$  y algunas funciones especiales de interés para sumergirnos en parte de la teoría del cálculo fraccionario.

### 1.1. Ecuación diferencial parcial

Una ecuación diferencial parcial [11], es una ecuación que involucra una función desconocida de dos o más variables y algunas de sus derivadas parciales. Fijemos un entero  $k \geq 1$  y sea  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.1.1.** *Una expresión de la forma*

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0, \quad x \in U$$

*es llamada ecuación diferencial parcial de  $k$ -ésimo orden, donde*

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$$

*es dada, y*

$$u : U \rightarrow \mathbb{R}$$

*es la función desconocida.*

De la misma forma que el Cálculo ordinario, las ideas de derivación fraccionarias conducen al concepto más avanzado de ecuación diferencial. Una relación involucrando uno o más operadores fraccionarios aplicados a una función desconocida  $u$  se conoce como una **ecuación diferencial fraccionaria** [12].

**Ejemplo 1.1.1.** *Observemos la siguiente ecuación diferencial parcial de segundo orden*

$$u_t(x) = u_{x_1x_1}(x) + u_{x_2x_2}(x), \quad x \in U, \quad (1.1)$$

donde  $x = (x_1, x_2, t)$ . Si consideramos

$$u_{x_jx_j} = \mathcal{D}_{x_j}^\alpha u, \quad j = 1, 2, \quad (1.2)$$

en el que  $2 < \alpha < 3$ ,  $\mathcal{D}_{x_j}^\alpha u$  (Derivada de Riesz), reemplazando (1.2) en (1.1), obtenemos

$$u_t = \mathcal{D}_{x_1}^\alpha u + \mathcal{D}_{x_2}^\alpha u.$$

La anterior ecuación es un caso particular de las llamadas **ecuaciones diferenciales parciales de orden fraccionario**, dado que involucra derivadas espaciales de orden fraccionario.

Por otro lado; continuando con nuestro proceso de facilitar algunos conceptos previos, definimos **operador integro-diferencial**.

## 1.2. Operador integro-diferencial

Sean  $\Xi$  un espacio de funciones,  $k \in \mathbb{Z}$  y  $\mathcal{D} : \Xi \times \mathbb{Z} \mapsto \Omega$  un operador.

**Definición 1.2.1.** *Decimos que  $\mathcal{D}$  es un operador integro-diferencial [13], si*

$$\mathcal{D}^{(k)} f(x) = \begin{cases} \frac{d^k}{dx^k} f(x) & \text{si } k > 0 \\ \underbrace{\int \int \dots \int}_{k \text{ veces}} f(x) dx \dots dx & \text{si } k < 0 \\ f(x) & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

para  $f(x) \in \Xi$ . Además,  $\mathcal{D}$  es un operador lineal (dado que derivar e integrar son lineales) y se cumple que

$$\mathcal{D}^k[\mathcal{D}^j f(x)] = \mathcal{D}^{k+j} f(x).$$

Si consideramos  $\alpha \in \mathbb{R}$ , obtenemos el operador fraccionario

$$\mathcal{D}^\alpha f(x). \quad (1.3)$$

Buscamos que (1.3) cumpla ciertos requisitos para que tenga sentido llamarlo operador integro-diferencial de orden fraccionario [13]. Estos requisitos serán:

- Si  $\alpha = n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\mathcal{D}^n f(x) = \frac{d^n}{dt^n} f(x),$$

es decir, que coincida con la derivada usual.

- Si  $\alpha = -n$ , entonces

$$\mathcal{D}^{-n} f(x) = \underbrace{\int \int \dots \int}_{n \text{ veces}} f(x) dx dx \dots dx,$$

es decir, que si es  $\alpha$  es un entero negativo sea la  $n$ -ésima integral iterada de la función.

- Si  $\alpha = 0$ , entonces:  $\mathcal{D}^0 f(x) = f(x)$ .
- Que cumpla de alguna manera la propiedad de semigrupo, es decir, que si tenemos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces:  $\mathcal{D}^\alpha [\mathcal{D}^\beta f(x)] = \mathcal{D}^{\alpha+\beta} f(x)$ .

A continuación, nos enfocaremos en proporcionar una definición y algunas propiedades de los espacios de funciones que ocuparemos en nuestro escrito.

### 1.3. Espacios de funciones integrables

Sea  $\Omega$  un subconjunto medible de  $\mathbb{R}^n$  con medida (de Lebesgue) positiva y denotemos  $L(\Omega)$  el espacio vectorial formado por tales funciones.

**Definición 1.3.1.** Sea  $1 \leq p < \infty$ , llamamos espacio  $L^p(\Omega)$  [14] al siguiente conjunto de funciones medibles  $f \in L(\Omega)$  :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f \in L(\Omega) : \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

y definiendo

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad f \in L^p(\Omega)$$

se obtiene una norma en  $L^p(\Omega)$ .

Adicionalmente; para  $p = \infty$ , necesitamos dar una noción de las funciones esencialmente acotadas.

**Definición 1.3.2.** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  medible con medida positiva. Decimos que una función  $f : \Omega \rightarrow K$  está **esencialmente acotada** [14] cuando existe una constante  $M \geq 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para casi todo  $x \in \Omega$ .

Considerando lo anterior, definiremos al espacio  $L^\infty(\Omega)$ .

**Definición 1.3.3.** Llamamos  $L^\infty(\Omega)$  al espacio vectorial formado por todas las funciones medibles  $f \in L(\Omega)$  y esencialmente acotadas de  $\Omega$  en  $K$ , donde

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \min\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M\}, \quad f \in L^\infty(\Omega).$$

Ahora, enunciaremos algunos teoremas referentes a los espacios  $L^p(\Omega)$  (encontraremos las demostraciones en el libro **Sobolev Spaces** [15]).

**Teorema 1.3.1. (Desigualdad de Hölder)** Si  $1 < p < \infty$  y  $f \in L^p(\Omega)$ ,  $g \in L^q(\Omega)$ , entonces  $fg \in L^1(\Omega)$  y

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

**Observación 1.3.1.** La desigualdad anterior, claramente se cumple en los casos  $p = 1$ ,  $q = \infty$  y  $p = \infty$ ,  $q = 1$ .

**Teorema 1.3.2. (Desigualdad de Minkowski)** Si  $1 \leq p < \infty$ . Entonces

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Por otra parte, obtenemos la completitud de  $L^p(\Omega)$ :

**Teorema 1.3.3. (Teorema de Riesz-Fisher).** Para cualquier conjunto medible  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  de medida positiva y  $1 \leq p < \infty$ ,  $L^p(\Omega)$  es un espacio de Banach [14].

**Corolario 1.3.1.**  $L^2(\Omega)$  es un espacio de Hilbert con respecto al producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx$$

**Observación 1.3.2.** *La desigualdad de Hölder en realidad es la conocida desigualdad de Schwarz*

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

**Teorema 1.3.4.**  $C_0^\infty(\Omega)$  es denso en  $L^p(\Omega)$  si  $1 \leq p < \infty$ .

Seguidamente, definimos algunos subespacios importantes de los espacios  $L^p(\Omega)$ .

**Definición 1.3.4.** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , decimos que  $W^{m,p}(\Omega)$  es un **espacio de Sobolev** [15] si

$$W^{m,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\} \subseteq L^p(\Omega)$$

donde  $D^\alpha f$  es la notación multi-índice de las derivadas parciales. La noción de norma de los espacios de Sobolev se obtienen a partir de la norma de los espacios  $L^p(\Omega)$ , como sigue:

$$\|f\|_{m,p} = \left[ \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_p^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad \text{si } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty$$

**Observación 1.3.3.** El espacio de Sobolev  $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ .

**Definición 1.3.5.** Los espacios  $H^m(\Omega)$  son espacios de Sobolev con  $p = 2$ , dichos espacios están dotados de manera natural de la estructura de espacio de Hilbert. Donde el producto interno se define a partir del producto interno de  $L^2$

$$\langle f, g \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha f, D^\alpha g \rangle_2$$

Para finalizar esta sección; incluiremos el concepto de convolución, que nos ayudará a simplificar algunos cálculos de nuestro problema a tratar.

**Definición 1.3.6.** Dadas dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  con medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , tal que  $f(\cdot)g(x-\cdot)$  es Lebesgue-integrable en  $\mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , la convolución  $f * g$  de  $f$  y  $g$  en el punto  $x$  es definida por [16]

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t)dt.$$

Uno de los resultados útiles para estudiar la convolución es la desigualdad de Young dada en el siguiente teorema:

**Teorema 1.3.5. (Desigualdad de Young).** Sean  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ , donde  $n \geq 1$ ,  $1/p + 1/q \geq 1$ , y sea  $1/r = 1/p + 1/q - 1$ . Entonces  $(f * g) \in L^r(\mathbb{R}^n)$ , y

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Además; la convolución posee la propiedad de conmutatividad, es decir,  $f * g = g * f$ .

## 1.4. Funciones especiales

En la teoría del cálculo fraccionario, se utilizan dos funciones matemáticas muy conocidas. A continuación, daremos una noción de dichas funciones.

**Definición 1.4.1.** La integral de Euler de segundo orden

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx, \quad \Re(z) > 0,$$

es llamada la **función gamma** [17]. Es convergente para todo  $z \in \mathbb{C}$ , para el cual  $\Re(z) > 0$ . La función gamma se extiende al semiplano  $\Re(z) \leq 0$ ,  $z \neq 0, -1, -2, \dots$ , por la continuación analítica de esta integral. Donde

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Re(z) > 0.$$

**Definición 1.4.2.** La integral de Euler de primer orden

$$B(z, w) = \int_0^1 x^{z-1} (1-x)^{w-1} dx, \quad \Re(z) > 0, \quad \Re(w) > 0,$$

es llamada la **función beta** [17]. Además;  $B(z, w)$  está relacionada con la función Gamma, como sigue:

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

Ahora; nos enfocamos en profundizar un poco en la teoría del cálculo fraccionario, principalmente en los operadores fraccionarios de interés para el desarrollo de nuestro escrito.

## 1.5. Operadores fraccionarios de Riemann-Liouville

En esta sección daremos las definiciones de operadores fraccionarios de integración y derivación de Riemann-Liouville [18]. Debe señalarse que el operador fraccionario será una generalización del operador integral  $\int_{a+}^x$  aplicado  $n$  veces

$$\int_a^x dt \int_a^t dt_1 \dots \int_a^{t_{n-2}} y(t_{n-1}) dt_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} y(t) dt.$$

**Definición 1.5.1.** Sea  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $\Re(\alpha) > 0$ ),  $n = -[-\Re(\alpha)]$ ,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  y  $f \in L^1(a, b)$ . Las integrales

$$\begin{aligned} (I_{a+}^\alpha f)(x) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad (x > a), \\ (I_{b-}^\alpha f)(x) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad (x < b), \end{aligned} \quad (1.4)$$

son conocidas como integrales fraccionarias de Riemann-Liouville de orden  $\alpha$ , por la izquierda y por la derecha, respectivamente.

Las derivadas fraccionarias asociadas a estos operadores integrales vienen dadas por

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{a+}^\alpha f)(x) &:= [\mathcal{D}^n I_{a+}^{n-\alpha} f](x), \\ (\mathcal{D}_{b-}^\alpha f)(x) &:= [(-\mathcal{D})^n I_{b-}^{n-\alpha} f](x), \end{aligned}$$

respectivamente.

Las definiciones de integrales fraccionarias de Riemann-Liouville dadas en (1.4), pueden ser extendidas de manera natural a los semiejes  $(-\infty, b]$  y  $[a, \infty)$ , respectivamente, a través de las siguientes

$$\begin{aligned} (I_+^\alpha f)(x) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \\ (I_-^\alpha f)(x) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Las correspondientes fórmulas de derivación son

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_+^\alpha f)(x) &:= (\mathcal{D}^n I_+^{n-\alpha} f)(x), \\ (\mathcal{D}_-^\alpha f)(x) &:= (-1)^n (\mathcal{D}^n I_-^{n-\alpha} f)(x). \end{aligned}$$

Los operadores fraccionarios definidos anteriormente, poseen algunas propiedades que mostraremos a continuación.

**Propiedades 1.5.1.** Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  ( $\Re(\alpha) > 0, \Re(\beta) > 0$ ) y  $x > a$  [18]:

- $I_{a^+}^{-\alpha} = \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}$ .
- La integral y derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, son operadores lineales.
- Se verifica que

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha-1}, \\ \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

En particular, si  $\beta = 1$

$$\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}(1) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}. \quad (1.6)$$

- Sea  $f \in L^1(a, b)$ , entonces se verifica que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (I_{a^+}^{\alpha} f)(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f)(x) = f(x),$$

casi para todo, (c.p.t), en  $[a, b]$ .

- Sea  $f \in L^1(a, b)$ , entonces se verifica que

$$(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha} f)(x) = f(x),$$

c.p.t., en  $[a, b]$

- Propiedad de semigrupo  $(I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} f)(x) = (I_{a^+}^{\alpha+\beta} f)(x)$ .
- $I_{a^+}^{\alpha}$  es un operador acotado en  $L^1(a, b)$

$$\|I_{a^+}^{\alpha} f\|_1 \leq \frac{(b-a)^{\Re(\alpha)}}{\Re(\alpha)|\Gamma(\alpha)|} \|f\|_1$$

- La integral fraccionaria dada en (1.4), se puede expresar como una convolución de dos funciones, es decir

$$(I_{a^+}^{\alpha} f)(x) = (\Phi_{\alpha} * f)(x),$$

donde

$$\Phi_{\alpha}(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > a.$$

- *Transformadas de Laplace de la integral y derivada fraccionarias de Riemann-Liouville*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(I_{a^+}^\alpha f)(x)\} &= s^{-\alpha}\mathcal{L}\{f(x)\} \\ \mathcal{L}\{(\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(x)\} &= s^\alpha\mathcal{L}\{f(x)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(\alpha-k-1)}(0), \quad n = -[-\Re(\alpha)].\end{aligned}$$

Dada la definición anterior de integral fraccionaria de Riemann-Liouville, damos paso a otro concepto de derivada fraccionaria.

## 1.6. Derivada fraccionaria de Caputo

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville jugó un papel determinante en el desarrollo del cuerpo teórico del Cálculo fraccionario, y se utilizó con éxito en aplicaciones estrictamente matemáticas. Pero al tratar de realizar modelaciones matemáticas de fenómenos físicos reales por medio de ecuaciones diferenciales fraccionarias, surgió el problema de las condiciones iniciales también de orden fraccional. Este tipo de condiciones no son físicamente interpretables y presentan un obstáculo considerable a la hora de hacer uso práctico del Cálculo fraccionario. El operador diferencial de Caputo, en contraste con el de Riemann-Liouville, emplea como condiciones iniciales derivadas de orden entero, es decir, valores iniciales que son físicamente interpretables a manera tradicional [12].

**Definición 1.6.1.** *Sea  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $\Re(\alpha) > 0$ ) y  $f \in C^n[a, b]$ , con  $n = -[-\Re(\alpha)]$ . La **derivada fraccionaria de Caputo** de orden  $\alpha$  de  $f$  se define por*

$$\begin{aligned}({}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(x) &:= (I_{a^+}^{n-\alpha} f^{(n)})(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad x > a\end{aligned}$$

donde  $f^{(n)}$  es la  $n$ -ésima derivada usual de  $f$ .

**Observación 1.6.1.** *Las derivadas fraccionarias de Caputo y de Riemann-Liouville son buenas generalizaciones de la derivada ordinaria, en el sentido de que respetan los valores de las derivadas enteras usuales, concordando así entre ellas. Pero en el caso no entero no coinciden, como se pone de manifiesto en el siguiente resultado*

**Proposición 1.6.1.** *Sea  $\alpha \neq \mathbb{N}$  ( $\Re(\alpha) > 0$ ),  $n = -[-\Re(\alpha)]$  y  $f \in L^1[a, b]$  una función para la que existen las derivadas fraccionarias de Caputo y Riemann-Liouville. Entonces se*

verifica la siguiente relación:

$$({}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(x) = (\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha}, \quad x > a.$$

**Observación 1.6.2.** Por lo tanto, para órdenes de derivación no enteros, las derivadas de Caputo y Riemann-Liouville coincidirán cuando se cumpla

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0.$$

A continuación, mostraremos algunas propiedades de la derivada de Caputo

**Propiedades 1.6.1.** Sea  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $\Re(\alpha) > 0$ ),  $n = -[-\Re(\alpha)]$ :

- Si  $f \in L^1(a, b)$ , entonces

$$\lim_{\alpha \rightarrow m} ({}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(x) = f^{(m)}(x), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

- Se verifica que

$${}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha (x-a)^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Esta propiedad, evidencia que el valor de la derivada fraccionaria de Caputo de una constante es cero; mientras que, utilizando la derivada de Riemann-Liouville no se cumple, como se observa en la ecuación (1.6).

- Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{({}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(x)\} = s^\alpha \mathcal{L}\{f(x)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad n = -[-\Re(\alpha)].$$

---

### Método unificado de Fokas

---

En este capítulo, haremos hincapié en el método que utilizamos para resolver una ecuación diferencial parcial sobre la semirrecta [10], explicamos de manera muy general dicho método y lo adaptamos a una ecuación diferencial que involucra derivadas de orden fraccionario.

#### 2.1. Ecuaciones de evolución sobre la semirrecta [10]

Nos centraremos en ecuaciones diferenciales parciales (EDP) lineales de evolución, es decir,

$$q_t + w(-i\partial_x)q = 0 \quad (2.1)$$

donde

$$w(k) \text{ es un polinomio de grado } n \text{ y } \Re w(k) \geq 0. \quad (2.2)$$

La restricción anterior en  $w(k)$  asegura que el problema de valor inicial de (2.1) en el eje real está bien planteado.

Sea  $\alpha_n$  el coeficiente de  $k^n$ , es decir,

$$w(k) = \alpha_n k^n + \alpha_{n-1} k^{n-1} + \cdots + \alpha_0, \quad \alpha_n \neq 0.$$

La forma más simple de determinar la función  $w(k)$  correspondiente a una EDP lineal de evolución dada, es sustituir la siguiente exponencial que es una solución exacta de (2.1):

$$e^{ikx - w(k)t}, \quad k \in \mathbb{C}$$

Primero introducimos algunas notaciones útiles:

- Se verá que un problema de valor inicial y de frontera para (2.1) en la semirrecta requiere  $N$  condiciones de frontera, donde

$$N = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ es par} \\ \frac{n+1}{2}, & n \text{ es impar, } \alpha_n = i \\ \frac{n-1}{2}, & n \text{ es impar, } \alpha_n = -i \end{cases}$$

y  $\alpha_n$  es el coeficiente de  $k^n$  en  $w(k)$ .

- La condición inicial dada se denotará por  $q_0(x)$  y su transformada de Fourier por  $\widehat{q}_0(k)$ ,

$$q(x, 0) = q_0(x), \quad 0 < x < \infty; \quad \widehat{q}_0(k) = \int_0^\infty e^{-ikx} q_0(x) dx, \quad \Im m k \geq 0. \quad (2.3)$$

- Las  $t$ -transformadas de los valores de frontera se denotarán por  $\widetilde{g}_j(k)$ ,

$$\widetilde{g}_j(k) = \int_0^T e^{ks} \partial_x^j q(0, s) ds, \quad k \in \mathbb{C}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

- Si la función  $q$  o una de sus derivadas se especifica como una condición de frontera, esta función se denotará por  $g_j(t)$  y su  $t$ -transformada por  $G_j(k)$ ,

$$\partial_x^j q(0, t) = g_j(t), \quad 0 < t < T; \quad G_j(k) = \int_0^T e^{ks} g_j(s) ds, \quad k \in \mathbb{C}. \quad (2.4)$$

- Resultará que la representación integral que se derivará para  $q$  también es válida si  $T$  se reemplaza por  $t$  en (2.4); la integral pertinente se denotará por  $G_j(k, t)$ , es decir,

$$G_j(k, t) = \int_0^t e^{ks} g_j(s) ds, \quad k \in \mathbb{C}, \quad 0 < t < T.$$

- $\mathbb{C}^+$  y  $\mathbb{C}^-$  indicarán la mitad superior ( $\Im m k > 0$ ) y la mitad inferior ( $\Im m k < 0$ ) del  $k$ -plano complejo. El dominio  $D$  está definido por

$$D = \{k \in \mathbb{C}, \Re e w(k) < 0\}.$$

$D^+$  y  $D^-$  denotarán la parte de  $D$  en  $\mathbb{C}^+$  y  $\mathbb{C}^-$ ,

$$D^+ = D \cap \mathbb{C}^+, \quad D^- = D \cap \mathbb{C}^-. \quad (2.5)$$

**Proposición 2.1.1.** (Una representación general integral). Sea  $q(x, t)$  que satisface la EDP lineal de evolución (2.1) en el dominio

$$\Omega = \{0 < x < \infty, 0 < t < T\},$$

donde  $w(k)$  satisface la restricción dada en (2.2). Definimos los polinomios  $c_j(k)$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ , por la identidad

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_j(k) \partial_x^j = i \frac{w(k) - w(l)}{k - l} \Big|_{i=-i\partial_x}.$$

Supongamos que  $q(x, t)$  es una solución suficientemente suave (hasta el límite de  $\Omega$ ) de (2.1), que tiene suficiente decaimiento, cuando  $x \rightarrow \infty$ , uniformemente en  $0 \leq t \leq T$ . Entonces,  $q(x, t)$  es dado por

$$q(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx-w(k)t} \widehat{q}_0(k) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{ikx-w(k)t} \widetilde{g}(k) dk,$$

donde  $\partial D^+$  es la frontera del dominio  $D^+$  definido en (2.5),  $\widehat{q}_0(k)$  es definido por (2.3), y la función  $\widetilde{g}(k)$  es definida en términos de la  $t$ -transformada de los valores de frontera (2.4) por la formula

$$\widetilde{g}(k) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j(k) \widetilde{g}_j(w(k)), \quad k \in \mathbb{C}$$

Además, la siguiente relación global es válida:

$$\widehat{q}_0(k) - \widetilde{g}(k) = e^{w(k)T} \int_0^{\infty} e^{-ikx} q(x, T) dx, \quad \Im m k \leq 0.$$

Ahora, continuando con nuestro trabajo, definiremos Integrales fraccionarias del Tipo Potencial .

## 2.2. Integrales fraccionales del Tipo Potencial

En muchos campos del análisis matemático ocurren con frecuencia operadores de integración fraccionaria con “límites constantes de integración” (admiten una extensión natural del caso de muchas variables) [17], dichos operadores se denominaron operadores de tipo potencial. Comenzamos a considerar los potenciales estudiando primero el caso de las funciones dadas en todo el eje  $\mathbb{R}^1$ .

### 2.2.1. Potencial de Riesz en el eje real

Consideremos la integral

$$I^\alpha \varphi := \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \cos(\alpha\pi/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{|x-t|^{1-\alpha}} dt, \quad \Re(\alpha), \alpha \neq 1, 3, 5, \dots \quad (2.6)$$

donde  $0 < \Re(\alpha) < 1$ . La integral  $I^\alpha \varphi$  es llamada el potencial de Riesz [17]. Consideraremos a la ecuación (2.6) la siguiente modificación

$$H^\alpha \varphi := \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \sin(\alpha\pi/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t) dt, \quad \Re(\alpha), \alpha \neq 2, 4, 6, \dots \quad (2.7)$$

Podemos observar que

$$\begin{aligned} I^\alpha &= [2 \cos(\alpha\pi/2)]^{-1} (I_+^\alpha + I_-^\alpha), \\ H^\alpha &= [2 \sin(\alpha\pi/2)]^{-1} (I_+^\alpha - I_-^\alpha), \end{aligned}$$

donde  $I_\pm^\alpha$  son los operadores definidos en (1.5). Así los operadores  $I^\alpha$  y  $H^\alpha$  con  $0 < \Re(\alpha) < 1$  son definidos en funciones  $\varphi(t) \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p < 1/\Re(\alpha)$ .

**Teorema 2.2.1.** *Sea  $0 < \Re(\alpha) < 1$  y  $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ . Entonces*

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}I^\alpha \varphi)(x) &= |x|^{-\alpha} (\mathcal{F}\varphi)(x), \\ (\mathcal{F}H^\alpha \varphi)(x) &= i \operatorname{sgn}(x) |x|^{-\alpha} (\mathcal{F}\varphi)(x), \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{F}$  es la Transformada de Fourier.

### 2.2.2. Potencial de Riesz en la semirrecta positiva ( $x > 0$ )

Los potenciales (2.6) y (2.7) también se pueden considerar en la semirrecta:

$$\begin{aligned} I_0^\alpha \varphi &:= \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \cos(\alpha\pi/2)} \int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{|x-t|^{1-\alpha}} dt, \quad x > 0, \\ H_0^\alpha \varphi &:= \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \sin(\alpha\pi/2)} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sgn}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t) dt, \quad x > 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, claramente

$$\begin{aligned} I_0^\alpha &= [2 \cos(\alpha\pi/2)]^{-1} (I_{0+}^\alpha + I_-^\alpha), \\ H_0^\alpha &= [2 \sin(\alpha\pi/2)]^{-1} (I_{0+}^\alpha - I_-^\alpha). \end{aligned}$$

Notemos, finalmente que se obtienen las Transformadas de Fourier en Senos y Cosenos:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c(I_0^\alpha \varphi) &= x^{-\alpha} \mathcal{F}_c \varphi, \\ \mathcal{F}_s(H_0^\alpha \varphi) &= x^{-\alpha} \mathcal{F}_s \varphi.\end{aligned}$$

### 2.3. Derivada fraccionaria tipo Riesz

Para nuestro interés, consideraremos  $2 < \alpha < 3$ . Por lo tanto, la derivada fraccionaria de tipo Riesz estará dada por el siguiente operador [19]:

$$\mathcal{D}_x^\alpha u := -\frac{1}{\Gamma(3-\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{|x-y|^{\alpha-2}} \partial_y^3 u(y,t) dy \quad (2.8)$$

A modo de ejemplo, adaptaremos el método de Fokas a un problema de Neumann para la ecuación de difusión anómala en la semirrecta positiva  $x > 0$  como sigue [19]:

$$\begin{cases} u_t &= \mathcal{D}_x^\alpha u, & t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \\ u_x(0, t) &= h(t) \end{cases} \quad (2.9)$$

donde  $\mathcal{D}_x^\alpha u$  está definida en (2.8).

### 2.4. Ecuación de difusión anómala en la semirrecta positiva ( $x > 0$ )

Sea  $\hat{u}(k, t)$  la transformada de Fourier con respecto a  $x$  en la semirrecta [10]

$$\hat{u}(k, t) = \int_0^\infty e^{-ikx} u(x, t) dx, \quad \Im m(k) < 0. \quad (2.10)$$

La transformada inversa es dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} \hat{u}(k, t) dk, \quad x > 0.$$

Derivando (2.10) con respecto a  $t$ , reemplazando  $u_t$  por  $\mathcal{D}_x^\alpha u$ , aplicando el teorema de convolución e integrando por partes, encontramos que  $\hat{u}(k, t)$  satisface la ecuación

$$\hat{u}_t(k, t) + |k|^\alpha \hat{u}(k, t) = |k|^\alpha \sum_{j=0}^2 \frac{\partial_x^j u(0, t)}{(ik)^{j+1}}.$$

Entonces, multiplicando la anterior ecuación por  $e^{|k|^{\alpha}t}$  e integrando con respecto a la variable tiempo, tenemos:

$$e^{|k|^{\alpha}t}\widehat{u}(k, t) = \widehat{u}_0(k) + |k|^{\alpha} \sum_{j=0}^2 \frac{g_j(|k|^{\alpha}, t)}{(ik)^{j+1}}, \quad (2.11)$$

donde [20]:

$$g_j(\sigma, t) = \int_0^t e^{\sigma s} \partial_x^j u(0, s) ds.$$

Aplicando la transformada inversa a (2.11), tenemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx - |k|^{\alpha}t} \widehat{u}_0(k) dk + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \left[ |k|^{\alpha} \sum_{j=0}^2 \frac{g_j(|k|^{\alpha}, t)}{(ik)^{j+1}} \right] dk, \quad (2.12)$$

con  $D^+ = \{k \in \mathbb{C} : 0 \leq \Im m(k) \leq \frac{\pi}{2\alpha} |\Re e(k)|\}$ . Notemos que las funciones  $g_j(|k|^{\alpha}, t)$  de la ecuación (2.11) permanecen invariantes si  $k$  se reemplaza por  $-k$ ; por lo tanto, complementamos (2.11) con la ecuación

$$e^{|k|^{\alpha}t}\widehat{u}(-k, t) = \widehat{u}_0(-k) + |k|^{\alpha} \sum_{j=0}^2 \frac{g_j(|k|^{\alpha}, t)}{(-ik)^{j+1}}, \quad (2.13)$$

para  $\Im m(k) > 0$ . Usando el hecho que:

$$\int_{\partial D^+} e^{ikx} \widehat{u}(-k, t) dk = 0.$$

Al determinar  $g_2(|k|^{\alpha}, t)$  en (2.13) y reemplazar en (2.12), obtenemos una representación integral para  $u(x, t)$  de la siguiente manera:

**Proposición 2.4.1.** *La ecuación (2.9) formulada en la semirrecta  $x > 0$  con valor inicial  $u_0(x)$  admite la representación integral*

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{ikx - |k|^{\alpha}t} [\widehat{u}_0(-k) - 2k^{-2} |k|^{\alpha} g_1(|k|^{\alpha}, t)] dk + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx - |k|^{\alpha}t} \widehat{u}_0(k) dk,$$

donde  $D^+ = \{k \in \mathbb{C} : 0 \leq \Im m(k) \leq \frac{\pi}{2\alpha} |\Re e(k)|\}$ .

Dada la proposición anterior, tenemos que [19]:

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} G^{(I)}(x, y, t) u_0(y) dy + \int_0^t G^{(B)}(x, t-s) h(s) ds,$$

donde

$$\begin{aligned} G^{(I)}(x, y, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y) - |k|^{\alpha}\tau} dk + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{ik(x+y) - |k|^{\alpha}\tau} dk, \\ G^{(B)}(x, \tau) &= -\frac{1}{\pi} \int_{\partial D^+} e^{ikx - |k|^{\alpha}\tau} k^{-2} |k|^{\alpha} dk. \end{aligned}$$

## 2.5. Evaluación numérica

### 2.5.1. Ejemplo 1

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t &= \mathcal{D}_x^\alpha u, \\ u_0(x) &= (x+1)e^{-x}, \\ u_x(0, t) &= 0, \end{cases}$$

para  $x > 0, t > 0$ . Es decir:

$$u(x, t) = \int_0^\infty G^{(I)}(x, y, t)(y+1)e^{-y} dy.$$

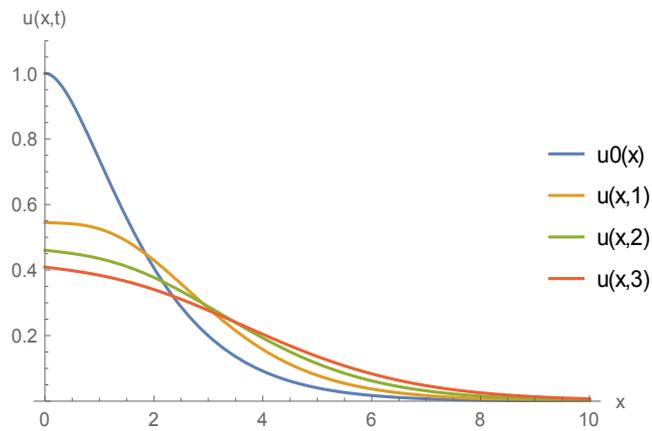


Figura 2.1: Representación integral asociada a  $u(x, t)$  para diferentes tiempos y  $\alpha = 2$ .

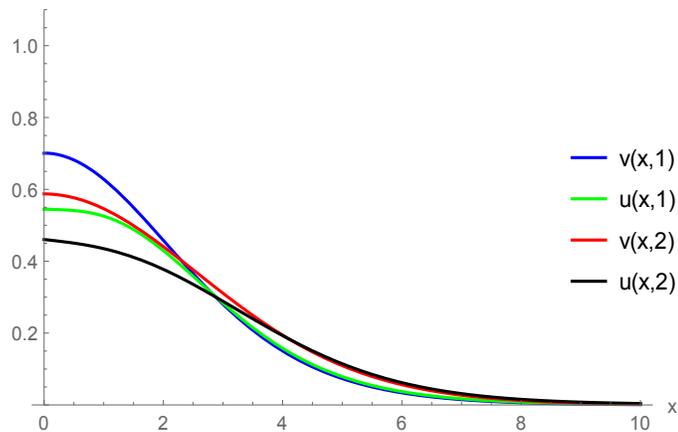


Figura 2.2: Representaciones integrales asociadas a las soluciones  $v(x, t)$  y  $u(x, t)$  de las ecuaciones de difusión y difusión anómala, respectivamente. Para el caso anómalo con  $\alpha = 2$ .

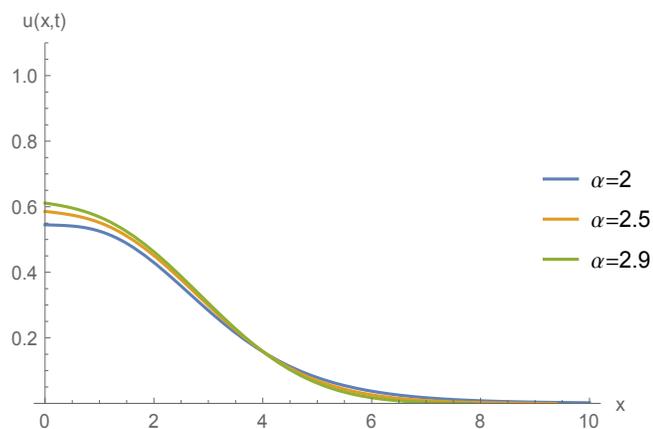


Figura 2.3: Representaciones integrales asociadas a la solución de la ecuación de difusión anómala  $u(x, t)$  en el tiempo  $t = 1$ , para diferentes valores de  $\alpha$ .

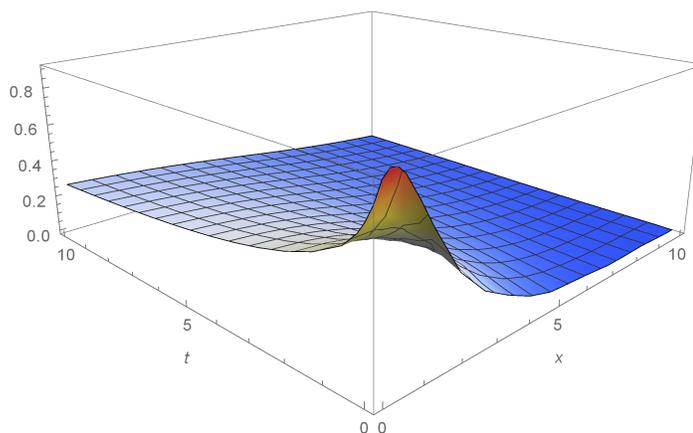


Figura 2.4: Variación de  $u(x, t)$  para  $\alpha = 2$ , en  $x \in [0, 10]$  y  $t \in [0, 10]$ .

## 2.5.2. Ejemplo 2

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} u_t &= \mathcal{D}_x^\alpha u, \\ u_0(x) &= (x+1)e^{-x}, \\ u_x(0, t) &= \sin(t), \end{aligned}$$

para  $x > 0$ ,  $t > 0$ . Es decir:

$$u(x, t) = \int_0^\infty G^{(I)}(x, y, t)(y+1)e^{-y}dy + \int_0^t G^{(B)}(x, t-s)\sin(s)ds.$$

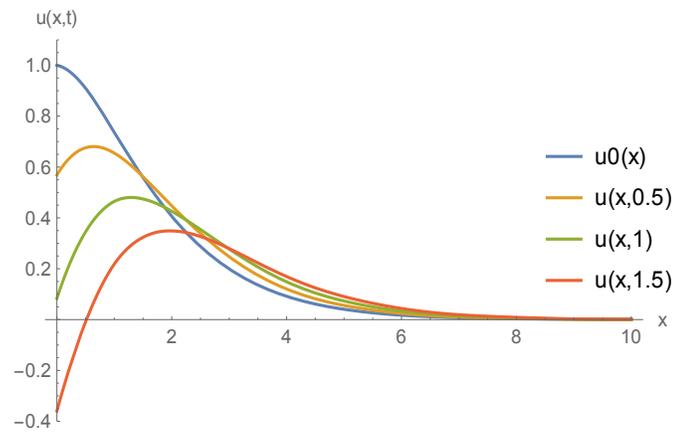


Figura 2.5: Representación integral asociada a  $u(x, t)$  para diferentes tiempos y  $\alpha = 2$ .

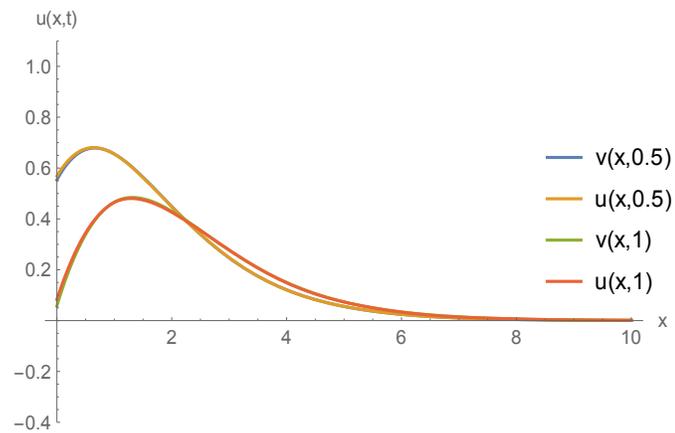


Figura 2.6: Representaciones integrales asociadas a las soluciones  $v(x, t)$  y  $u(x, t)$  de las ecuaciones de difusión y difusión anómala, respectivamente. Para el caso anómalo con  $\alpha = 2$ .

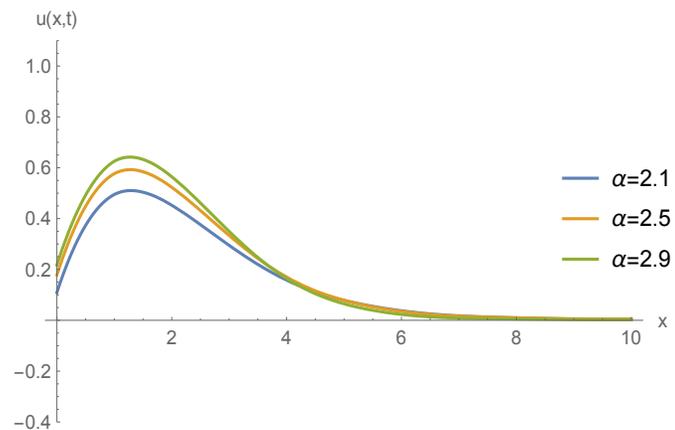


Figura 2.7: Representaciones integrales asociadas a la solución de la ecuación de difusión anómala  $u(x, t)$  en el tiempo  $t = 1$ , para diferentes valores de  $\alpha$ .

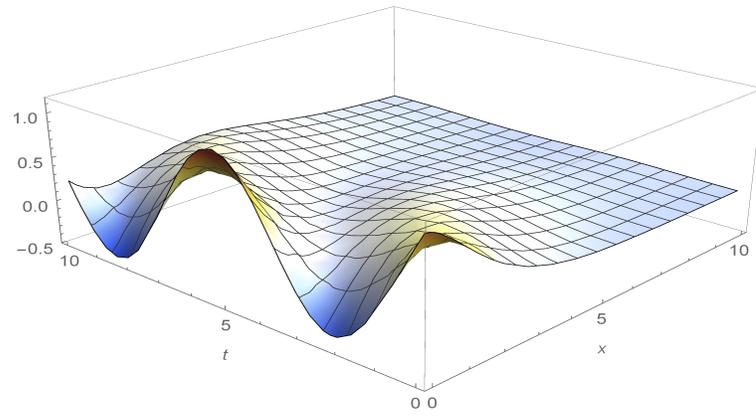


Figura 2.8: Variación de  $u(x, t)$  para  $\alpha = 2.5$ , en  $x \in [0, 10]$  y  $t \in [0, 10]$ .

## Planteamiento del problema

Consideremos el siguiente problema lineal:

$$\begin{cases} u_t &= \mathcal{D}_{x_1}^\alpha u + \mathcal{D}_{x_2}^\alpha u, \\ u(x_1, x_2, 0) &= u_0(x_1, x_2), \\ u_{x_1}(0, x_2, t) &= h_1(x_2, t), \\ u_{x_2}(x_1, 0, t) &= h_2(x_1, t), \end{cases} \quad (3.1)$$

para  $x_1, x_2 > 0$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $\alpha \in (2, 3)$ , con la condición de compatibilidad  $h_1(0, t) = h_2(0, t)$ .

Donde la derivada de Riesz es una modificación de (2.8) y es definida por la siguiente integral,

para  $j = 1, 2$

$$\mathcal{D}_{x_j}^\alpha u = -\frac{1}{\Gamma(3-\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)} \int_0^\infty \frac{\text{sgn}(x_j - y_j)}{|x_j - y_j|^{\alpha-2}} \partial_{y_j}^3 u(y_1, y_2, t) dy_j,$$

Definimos la transformada de Fourier

$$\hat{u}(k_1, k_2, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ik \cdot x} u(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2,$$

donde  $\Im m(k_1), \Im m(k_2) \leq 0$ ,  $k \cdot x$  es el producto interno para  $k = (k_1, k_2)$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ; y la

transformada inversa dada por

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{ik \cdot x} \hat{u}(k_1, k_2, t) dk_1 dk_2.$$

Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación (3.9), obtenemos

$$\hat{u}_t(k_1, k_2, t) + k_0 \hat{u}(k_1, k_2, t) = |k_1|^\alpha \sum_{j=0}^2 \frac{\partial_{x_1}^j \hat{u}(0, k_2, t)}{(ik_1)^{j+1}} + |k_2|^\alpha \sum_{j=0}^2 \frac{\partial_{x_2}^j \hat{u}(k_1, 0, t)}{(ik_2)^{j+1}},$$

con  $k_0 = |k_1|^\alpha + |k_2|^\alpha$ .

Entonces, multiplicando la anterior ecuación por  $e^{k_0 t}$  e integrando con respecto a la variable tiempo, obtenemos

$$e^{k_0 t} \widehat{u}(k_1, k_2, t) - \widehat{u}_0(k_1, k_2) = |k_1|^\alpha \sum_{j=0}^2 \frac{g_j^1(k_0, k_2, t)}{(ik_1)^{j+1}} + |k_2|^\alpha \sum_{j=0}^2 \frac{g_j^2(k_0, k_1, t)}{(ik_2)^{j+1}}, \quad (3.2)$$

donde

$$\begin{aligned} g_j^1(\sigma, k_2, t) &= \int_0^t e^{\sigma s} \partial_{x_1}^j \widehat{u}(0, k_2, s) ds, \\ g_j^2(\sigma, k_1, t) &= \int_0^t e^{\sigma s} \partial_{x_2}^j \widehat{u}(k_1, 0, s) ds. \end{aligned}$$

Aplicando transformada inversa en (3.2) con respecto a  $k_1$ , y moviendo el contorno de integración de los términos que contienen a  $g_j^1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} e^{|k_2|^\alpha t} \widehat{u}(x_1, k_2, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1 x_1 - |k_1|^\alpha t} \left[ \widehat{u}_0(k_1, k_2) + |k_2|^\alpha \sum_{j=0}^2 \frac{g_j^2(k_0, k_1, t)}{(ik_2)^{j+1}} \right] dk_1 \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_1^+} e^{ik_1 x_1 - |k_1|^\alpha t} |k_1|^\alpha \sum_{j=0}^2 \frac{g_j^1(k_0, k_2, t)}{(ik_1)^{j+1}} dk_1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

con  $D_1^+ = \{k_1 \in \mathbb{C} : 0 \leq \Im m(k_1) \leq \frac{\pi}{2\alpha} |\Re e(k_1)|\}$ . Notemos que las funciones  $g_j^1$  de la ecuación (3.2) permanecen invariantes si  $k_1$  se reemplaza por  $-k_1$ ; así complementamos (3.2) con la ecuación

$$e^{k_0 t} \widehat{u}(-k_1, k_2, t) = \widehat{u}_0(-k_1, k_2) + |k_1|^\alpha \sum_{j=0}^2 \frac{g_j^1(k_0, k_2, t)}{(-ik_1)^{j+1}} + |k_2|^\alpha \sum_{j=0}^2 \frac{g_j^2(k_0, -k_1, t)}{(ik_2)^{j+1}}, \quad (3.4)$$

para  $\Im m(-k_1), \Im m(k_2) \leq 0$ . Sustituyendo  $g_j^1$  de la ecuación (3.4) en (3.3) y usando el hecho que

$$\int_{\partial D_1^+} e^{ik_1 x_1} \widehat{u}(-k_1, k_2, t) dk_1 = 0,$$

por teorema de Cauchy, obtenemos una representación integral para  $\widehat{u}(x_1, k_2, t)$ .

$$\begin{aligned} e^{|k_2|^\alpha t} \widehat{u}(x_1, k_2, t) &= \mathcal{G}_0(t) q_0(x_1, k_2) + \mathcal{G}_1(t) q_1(x_1, k_2) \\ &+ |k_2|^\alpha \sum_{j=2}^4 \frac{i^{5-j}}{k_2^{j-1}} \mathcal{G}_j(t) q_j(x_1, |k_2|^\alpha) \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde los operadores  $\mathcal{G}_j(t)q_j(x_1, \sigma)$ , son dados por

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_0(t)q_0(x_1, \sigma) &= \int_0^\infty \int_0^\infty u_0(y_1, y_2) e^{-i\sigma y_2} H^{(I)}(x_1, y_1, t) dy_1 dy_2 \\ \mathcal{G}_1(t)q_1(x_1, \sigma) &= \int_0^t \int_0^\infty u_{y_1}(0, y_2, s) e^{-i\sigma y_2 + |\sigma|^\alpha s} H^{(B)}(x_1, t-s) dy_2 ds \\ \mathcal{G}_j(t)q_j(x_1, \sigma) &= \int_0^t \int_0^\infty \partial_{y_2}^{j-2} u(y_1, 0, s) e^{\sigma s} H^{(I)}(x_1, y_1, t-s) dy_1 ds, \quad j = 2, 3, 4\end{aligned}$$

y

$$H^{(I)}(x_1, y_1, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ik_1(x_1-y_1)-|k_1|^\alpha \tau} dk_1 + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_1^+} e^{ik_1(x_1+y_1)-|k_1|^\alpha \tau} dk_1$$

$$H^{(B)}(x_1, \tau) = -\frac{1}{\pi} \int_{\partial D_1^+} \frac{|k_1|^\alpha}{k_1^2} e^{ik_1 x_1 - |k_1|^\alpha \tau} dk_1$$

Aplicando la transformada inversa en (3.5) con respecto a  $k_2$ , tenemos:

$$\begin{aligned}u(x_1, x_2, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ik_2 x_2 - |k_2|^\alpha t} \left[ \mathcal{G}_0(t)q_0(x_1, k_2) + \mathcal{G}_1(t)q_1(x_1, k_2) \right] dk_2 \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_2^+} e^{ik_2 x_2 - |k_2|^\alpha t} \left[ |k_2|^\alpha \sum_{j=2}^4 \frac{i^{5-j}}{k_2^{j-1}} \mathcal{G}_j(t)q_j(x_1, |k_2|^\alpha) \right] dk_2\end{aligned}\quad (3.6)$$

con  $D_2^+ = \{k_2 \in \mathbb{C} : 0 \leq \Im m(k_2) \leq \frac{\pi}{2\alpha} |\Re e(k_2)|\}$ . Notemos que las funciones  $\mathcal{G}_j(t)q_j(x_1, |k_2|^\alpha)$  para  $j = 2, 3, 4$ , de la ecuación (3.5) permanecen invariantes si  $k_2$  se reemplaza por  $-k_2$ ; así complementamos (3.5) con la ecuación

$$e^{|k_2|^\alpha t} \widehat{u}(x_1, -k_2, t) = \mathcal{G}_0(t)q_0(x_1, -k_2) + \mathcal{G}_1(t)q_1(x_1, -k_2) + |k_2|^\alpha \sum_{j=2}^4 \frac{i^{j-1}}{k_2^{j-1}} \mathcal{G}_j(t)q_j(x_1, |k_2|^\alpha)\quad (3.7)$$

para  $\Im m(k_2) > 0$ . Usando el hecho que

$$\int_{\partial D_2^+} e^{ik_2 x_2} \widehat{u}(x_1, -k_2, t) dk_2 = 0$$

obtenemos sustituyendo  $\mathcal{G}_4(t)q_4(x_1, |k_2|^\alpha)$  en (3.6)

$$\begin{aligned}u(x_1, x_2, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ik_2 x_2 - |k_2|^\alpha t} \mathcal{G}_0(t)q_0(x_1, k_2) dk_2 + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_2^+} e^{ik_2 x_2 - |k_2|^\alpha t} \mathcal{G}_0(t)q_0(x_1, -k_2) dk_2 \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ik_2 x_2 - |k_2|^\alpha t} \mathcal{G}_1(t)q_1(x_1, k_2) dk_2 + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_2^+} e^{ik_2 x_2 - |k_2|^\alpha t} \mathcal{G}_1(t)q_1(x_1, -k_2) dk_2 \\ &- \frac{1}{\pi} \int_{\partial D_2^+} e^{ik_2 x_2 - |k_2|^\alpha t} \frac{|k_2|^\alpha}{k_2^2} \mathcal{G}_3(t)q_3(x_1, |k_2|^\alpha) dk_2\end{aligned}$$

### 3.1. Representación integral de la ecuación de difusión anómala

Podemos reescribir la anterior

$$\begin{aligned}
u(x_1, x_2, t) &= \int_0^\infty \int_0^\infty G^{(I)}(x_1, x_2, y_1, y_2, t) u_0(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \\
&+ \int_0^t \int_0^\infty G^{(B_2)}(x_1, x_2, y_2, t-s) h_1(y_2, s) dy_2 ds \\
&+ \int_0^t \int_0^\infty G^{(B_1)}(x_1, x_2, y_1, t-s) h_2(y_1, s) dy_1 ds
\end{aligned} \tag{3.8}$$

donde

$$\begin{aligned}
4\pi^2 G^{(I)}(x_1, x_2, y_1, y_2, \tau) &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{ik(x-y)-k_0\tau} dk_1 dk_2 + \int_{-\infty}^\infty \int_{\partial D_1^+} e^{i(kx+k_1y_1-k_2y_2)-k_0\tau} dk_1 dk_2 \\
&+ \int_{\partial D_2^+} \int_{-\infty}^\infty e^{i(kx-k_1y_1+k_2y_2)-k_0\tau} dk_1 dk_2 + \int_{\partial D_2^+} \int_{\partial D_1^+} e^{ik(x+y)-k_0\tau} dk_1 dk_2 \\
-2\pi^2 G^{(B_2)}(x_1, x_2, y_2, \tau) &= \int_{-\infty}^\infty \int_{\partial D_1^+} \frac{|k_1|^\alpha}{k_1^2} e^{i(kx-k_2y_2)-k_0\tau} dk_1 dk_2 \\
&+ \int_{\partial D_2^+} \int_{\partial D_1^+} \frac{|k_1|^\alpha}{k_1^2} e^{i(kx+k_2y_2)-k_0\tau} dk_1 dk_2 \\
-2\pi^2 G^{(B_1)}(x_1, x_2, y_1, \tau) &= \int_{\partial D_2^+} \int_{-\infty}^\infty \frac{|k_2|^\alpha}{k_2^2} e^{i(kx-k_1y_1)-k_0\tau} dk_1 dk_2 \\
&+ \int_{\partial D_2^+} \int_{\partial D_1^+} \frac{|k_2|^\alpha}{k_2^2} e^{i(kx+k_1y_1)-k_0\tau} dk_1 dk_2
\end{aligned}$$

### 3.2. Evaluación numérica

Sea

$$\begin{cases}
u_t &= \mathcal{D}_{x_1}^\alpha u + \mathcal{D}_{x_2}^\alpha u, \\
u(x_1, x_2, 0) &= 30(x_1 + 1)(x_2 + 1)e^{-(x_1+x_2)}, \\
u_{x_1}(0, x_2, t) &= 0, \\
u_{x_2}(x_1, 0, t) &= 0,
\end{cases}$$

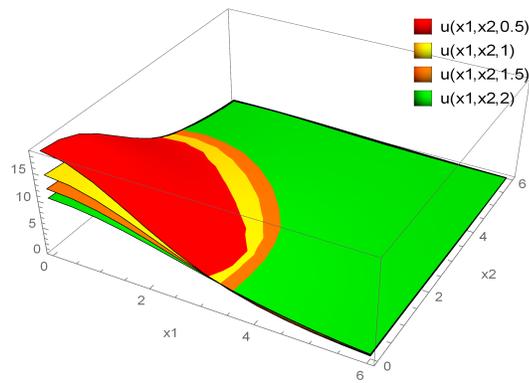


Figura 3.1: Representación integral asociada a  $u(x_1, x_2, t)$  para diferentes tiempos y  $\alpha = 2.1$ .

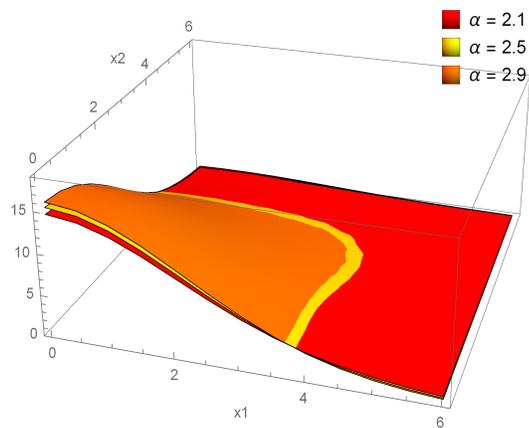


Figura 3.2: Representaciones integrales asociadas a la solución de la ecuación de difusión anómala  $u(x_1, x_2, t)$ , en el tiempo  $t = 1$ . Para  $\alpha = 2.1, 2.5, 2.9$ .

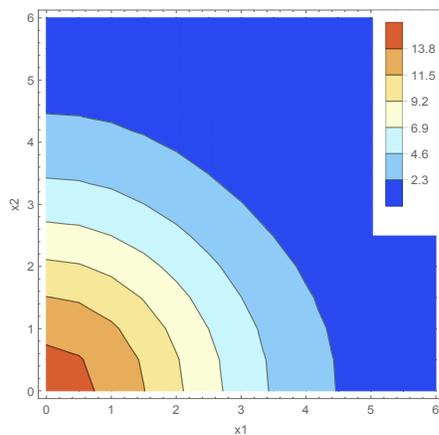


Figura 3.3: Curvas de nivel asociadas a la ecuación de difusión clásica en el tiempo  $t = 1$

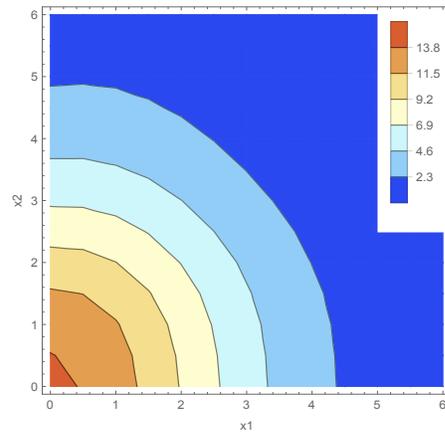


Figura 3.4: Curvas de nivel asociadas a la ecuación de difusión anómala  $u(x_1, x_2, t)$ , en el tiempo  $t = 1$  y  $\alpha = 2$ .

---

## Referencias

---

- [1] Weiss, M & Nilsson, T. *In a mirror dimly: Tracing the movement of molecules in a living cell*. Trends in Cell Biology. (2004). 267-273.
- [2] Bouchaud, J & Georges, A. *Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanisms, models and physical applications*, Physics Reports, vol. 195. (1990). 127-293.
- [3] Hernandez, D. *Difusión anómala: fundamentos y aplicaciones*. Disponible en: <http://www.miscelaneamatematica.org/Misc58.1/58103.pdf>. (2014).
- [4] Debnath, L. *Recent applications of fractional calculus to science and engineering*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 54. (2003). 3413-3442.
- [5] Kilbas, A., Srivastava, H., & Trujillo, J. *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier 2006.
- [6] Monje, C., Chen, Y., Vinagre, M., Xue, D., & Feliu-Batlle, V. *Fractional-order Systems and Controls*, Springer-Verlag London 2010.
- [7] Mantzavinos, D & Fokas, A. *The unified transform for the heat equation: II. Non-separable boundary conditions in two dimensions*, European Journal of Applied and Mathematics 26. (2015). 887-916.
- [8] Bona, J & Luo, L. *Generalized Korteweg-de Vries equation in a quarter plane*, Contemporary Mathematics 221. (1999). 59-125.
- [9] Liu, J & Tudor, C. *Stochastic heat equation with fractional Laplacian and fractional noise: Existence of the solution and analysis of its density*, Acta Mathematica Scientia 37. (2017). 1545-1566.

- [10] Fokas, A. *A Unified Approach to Boundary Value Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics. (2008). p.p 352.
- [11] Evans, L. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society. (1998). p.p 662.
- [12] Lombardero, A. *Fractional Calculus and newtonian dynamics*. Revista de Investigación “Pensamiento Matemático”. (2014). p.p 30.
- [13] Prieto, R. *El cálculo generalizado y las funciones fraccionarias*. (2009). p.p 78.
- [14] Payá, R. *Apuntes de análisis funcional*. p.p 94.
- [15] Adams, R. *Sobolev Spaces*. Academic Press. (New York, San Francisco & London). (1975). p.p 278.
- [16] Okikiulo, G. *Aspects of the Theory of Bounded Integral Operators in  $L^p$ -Spaces*. Academic Press Inc. (London) Ltd. (1971). p.p 522.
- [17] Samko, S., Kilbas, A., & Marichev, O. *Fractional Integrals and Derivates-Theory and Applications*. Ed. Gordon and Breach Science Publishers. (1993). p.p 1016.
- [18] Trujillo, J., Bonilla, B., & Kilbas, A. *Cálculo fraccionario y ecuaciones diferenciales fraccionarias*. Librería UNED. (2003). p.p 212.
- [19] Arciga, M., Ariza, F., & Sanchez, J. *Stochastic evolution equation with Riesz fractional derivative and white noise on the half line*. Applied Numerical Mathematics.(2016). 103-109.
- [20] Mantzavinos, D & Fokas, A. *The unified method for the heat equation: I. Non-separable boundary conditions and non-local constraints in one dimension*.(2012). p.p 29.