Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

CONEXIÓN ENTRE DERIVADA E INTEGRAL EN EL REGISTRO ALGEBRAICO EN BACHILLERATO

Javier García-García
Universidad Autónoma de Guerrero, libra_r75@hotmail.com

Crisólogo Dolores Flores
Universidad Autónoma de Guerrero, cdolores2@gmail.com

Resumen

El trabajo que se presenta responde a la pregunta ¿Qué conexiones establecen los estudiantes de bachillerato entre la derivada y la integral? Utilizamos un marco conceptual y el análisis temático Braun & Clarke para analizar los datos que se obtuvieron mediante entrevistas basadas en tareas. Los resultados que se presentan corresponden a las producciones de ocho estudiantes de bachillerato en el registro algebraico, aunque el proyecto general del cual se desprende este trabajo abarca los registros gráfico y verbal (problemas en contexto) y una población más amplia. Las producciones de los estudiantes permiten establecer siete temas que agrupan a 30 códigos que se construyeron a partir de las narrativas de los estudiantes. Estos códigos se corresponden con 94 conexiones que los bachilleres establecen. Entre éstas, las de mayor frecuencia son: la derivada de una función polinomial de la forma $f(x) = au^n$ se obtiene aplicando la fórmula $f'(x) = anu^{n-1}$, la integral y la derivada son operaciones inversas, la derivada de la integral de una función (polinomial) $f(x)$ es igual a la misma función $f(x)$ y, la integral de una función $f(x)$ es el área bajo la curva $f(x)$.

Palabras clave: conexión, derivada, integral, bachillerato, reversibilidad.

1. INTRODUCCIÓN

Las conexiones matemáticas implican una relación entre distintos objetos matemáticos, lo cual debiera permitir que las matemáticas sean vistas como un campo integrado y no como una colección de partes separadas, que es como la ven los estudiantes (Evitts, 2004; Mwakapenda, 2008; Jaijan y Loipha, 2012) y como es presentada cuando es objeto de enseñanza. También pueden darse entre contenidos matemáticos y otras disciplinas o con la resolución de problemas planteados en diversos contextos. Las conexiones deben ser desarrolladas en los estudiantes porque les permitiría mejorar su compresión matemática (Mhlolo, 2012; Eli, Mohr-Schroeder y Lee, 2011). Por ello, asumimos que el aprendizaje de las matemáticas está fuertemente ligado con las conexiones que los alumnos logren establecer.

El estudio de las conexiones matemáticas tuvo un auge en la investigación desde que la *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1991) las incorporó como parte de los estándares curriculares. Desde entonces se han estudiado desde diversas perspectivas, así como en diferentes áreas de la Matemática (Yoon, Dreyfus & Thomas, 2010; Lockwood, 2011; Mhlolo, Venkat & Schäfer, 2012;

ISSN: 2594-1046

Jaijan & Loipha, 2012; Eli *et al*., 2011, 2013; Park, Park, Park, Cho & Lee, 2013; Özgen, 2013). Por ejemplo, Yoon *et al*. (2010) por medio del modelado promueven la conexión de la matemática entre la integral y las situaciones de vida real. Ellos plantean que las conexiones se construyen a partir de conocimientos previos y del tratamiento que se le da al contenido, además refieren que tratar sólo el contexto físico limita el significado, así como la modelación en otros contextos. Por su parte, Park *et al*. (2013) señalan que la conceptualización en Cálculo permite la construcción de varias representaciones e interpretaciones. Sin embargo, si no se tiene desarrollada la habilidad para construir modelos matemáticos se pueden presentar dificultades en cuanto a la comprensión del problema (lenguaje, uso de la información dada, identificación de las variables, etc.), con la identificación y uso de fórmulas (Klymchuk, Zverkova, Gruenwald & Sauerbier, 2010).

Hoy día, las conexiones matemáticas siguen siendo un estándar importante en el currículo norteamericano (NCTM, 2014); pero además juegan un papel importante en planes de estudio de otros países, por ejemplo en Sudáfrica (Mwakapenda, 2008). Asimismo, en los programas de bachillerato mexicano correspondientes a Matemáticas, también se promueve el uso y desarrollo de las conexiones matemáticas en los estudiantes, aunque reciben el nombre de "relaciones" (DGB, 2013a, 2013b). Por tanto, las conexiones son una demanda actual del currículo tanto mexicano, como de otros países. Por otra parte, dos conceptos claves del Cálculo son: la derivada y la integral, que desde el punto de vista histórico se desarrollaron de manera separada. El primero tuvo su origen en el problema de las tangentes y, la integral en el cálculo de áreas de superficies con lados curvos. La conexión entre estos problemas como procesos inversos la descubrió Isaac Barrow (1630-1677) (Stewart, 2010) y, en el plano matemático la relación entre ambos está cifrada por el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Sin embargo, cuando la derivada y la integral son objeto de enseñanza-aprendizaje asumimos que esta conexión no se hace evidente, entre otras razones porque el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral se estudian de manera separada en bachillerato, incluso en el nivel superior (en algunos programas educativos).

En la literatura, los estudios en educación matemática sobre la derivada e integral se realizan generalmente centrando la atención en sólo uno de ellos, y sus objetivos se enfocan principalmente en la mejoría de su comprensión. En este sentido, Berry & Neyman (2003) y Haciomeroglu, Aspinwall & Presmeg (2010), interesados en la comprensión de la gráfica de la derivada, estudian la conexión entre la gráfica de una función derivada y las propiedades de la función primitiva. Berry & Neyman encontraron que los estudiantes establecen conexiones muy elementales a pesar de que usan calculadoras graficadoras, pues sólo se quedan con la idea de cómo influye el signo de las pendientes respecto de la función original. Asimismo, Hong & Thomas (2015) promueven la vinculación de la representación numérica y simbólica a la representación gráfica de manera que permita una exploración epistémica de la relación entre la gráfica, la pendiente de la recta tangente y la derivada. Como resultado encuentran una fuerte insistencia al uso de la representación algebraica; mismo resultado encuentran Dawkins & Mendoza (2014) cuando los estudiantes resuelven problemas presentados en diversos registros. A pesar de que en el estudiante predomine el registro algebraico en la resolución de problemas, según Mamolo & Zazkis (2012), éste no es comprendido en su totalidad, pues existe una falta de apreciación en la estructura matemática de las fórmulas o algoritmos. En las investigaciones sobre la derivada y la integral, si bien se preocupan por la comprensión de estos conceptos y reconocen la relación que los une, no es objetivo de ninguna de ellas estudiar esa conexión.

Nuestro aporte contribuirá a cubrir este hueco relativo a la ausencia de investigaciones que estudien las conexiones entre la derivada y la integral. Asimismo otras justificaciones, por lo cual elegimos nuestro tema de investigación son: las conexiones matemáticas permiten mejorar la compresión matemática (Mhlolo, 2012; Eli *et al*., 2011; Godino, Batanero y Font, 2003), la literatura internacional apunta que es importante estudiarlas y, tercero, el currículum actual lo demanda. Enfocarnos en el campo del cálculo es porque se observa una desatención en esta área en cuanto a conexiones se refiere. Los resultados pueden plantear nuevas interrogantes sobre las conexiones en este campo, se puede plantear un marco teórico para caracterizar las conexiones porque no existen categorías predefinidas para estudiarlas y finalmente, porque podríamos obtener datos que nos ayuden a diseñar una intervención docente que permita desarrollar en los estudiantes la habilidad de trabajar las conexiones en situación escolar.

Por lo expuesto anteriormente, identificamos la importancia de estudiar las conexiones matemáticas, por un lado, y los dos conceptos clave del Cálculo, por el otro. En particular, la pregunta de investigación a la cual damos respuesta en este escrito es: ¿Qué conexiones establecen los estudiantes de bachillerato entre la derivada y la integral en el registro algebraico? Y como objetivo, caracterizar esas conexiones que establecen. La razón de elegir al registro algebraico obedece a que, en situación escolar, en su mayoría es en donde descansa la enseñanza dirigida por los profesores; sin embargo, en un proyecto más general (actualmente en curso) exploramos lo que hacen los estudiantes en otros registros.

2. MARCO CONCEPTUAL

Businskas (2008) concibe a las conexiones matemáticas en dos sentidos, por un lado, como aquellas relaciones sobre la base de las cuales está estructurada la matemática y son independientes del estudiante, por otro lado, como las relaciones a través de las cuales los procesos del pensamiento construyen la matemática. Evitts (2004) es coincidente con esta última idea; plantea que el conocimiento conectado se puede describir en términos de su construcción personal y significado, la multiplicidad de vínculos entre los conceptos y procedimientos, y el poder derivado de conocer las conexiones. De este modo, los conceptos quedan constituidos por una red de definiciones y de propiedades que los relacionan (De Gamboa y Figueiras, 2014), que pueden utilizarse para vincular los temas matemáticos o bien como una relación causal o lógica o de interdependencia entre dos entidades matemáticas.

Se pueden hacer conexiones con el mundo cotidiano, con los conocimientos previos, con los contextos familiares dentro y fuera de la escuela, con diversos temas matemáticos, con otras disciplinas, con el pasado y el futuro (Begg, 2001; Presmeg, 2006; NTCM, 2014). O, como lo sugiere Garbín (2005), las conexiones matemáticas permiten identificar y establecer relaciones entre los problemas, en cuanto a lenguaje matemático y registro de representación semiótica se refiere, y reconocer los contextos (conceptual y global) de los problemas, de manera que permita una influencia mutua dando lugar a respuestas coherentes asociadas a los problemas.

En particular en este trabajo entendemos a las conexiones matemáticas como un proceso cognitivo mediante el cual una persona relaciona o asocia dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas y con la vida real. Éstas son funcionales en el momento de resolver situaciones intramatemáticas y extramatemáticas; la forma de identificar su presencia es mediante la verbalización que utiliza al estudiante al explicar las acciones que realiza frente a actividades concretas.

Para estudiar las conexiones matemáticas, elaboramos un marco preliminar (Fig. 1) para caracterizarlas guiados por las ideas propuestas en Businskas (2008), Evitts (2004) y de la NCTM (2014). Este marco reconoce dos grandes tipos de conexiones: extramatemáticas e intramatemáticas. Las extramatemáticas establecen una relación (de un concepto o modelo matemático) con un problema en contexto (es decir, no matemático) o viceversa; mientras que las intramatemáticas son aquellas que se producen en la vertiente interna de las matemáticas. Según la tipología, a su vez se pueden subclasificar (Figura 1).

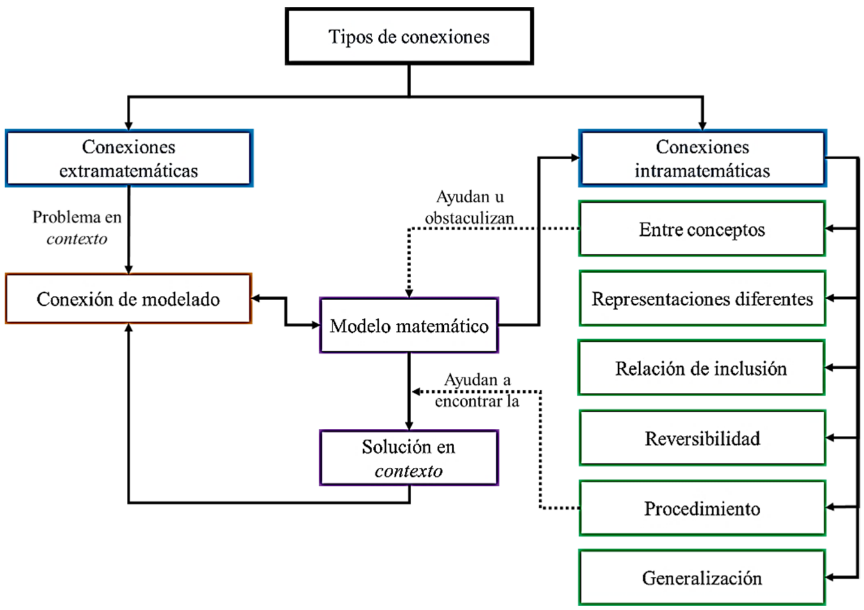

Figura 1. Categorías para estudiar las conexiones matemáticas.

Las conexiones propuestas en la Figura 1 se describen enseguida:

- *Conexión de modelado*: puede ser caracterizado por la interacción de la información del mundo real con una representación matemática apropiada (Evitts, 2004). Se presenta cuando el estudiante, partiendo de un problema en contexto, construye un modelo matemático para darle solución.
- *Conexión entre conceptos matemáticos*: contribuyen a la concepción de las matemáticas como un todo integrado (Evitts, 2004). Se identifica cuando un estudiante relaciona un concepto A con uno B, ya sea para argumentar su repuesta ante un problema dado, o bien, para explicar un concepto C. Por ejemplo, al trabajar el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), los conceptos que se pueden conectar son: la noción de área, función, límites, derivadas y antiderivadas.
- *Representaciones diferentes*: pueden ser de dos tipos: representaciones alternas o equivalentes. A es una representación alterna de B, si ambas están expresadas en dos formas

diferentes (verbal-algebraica, algebraica-geométrica, verbal-geométrica, etc.). En cambio, A es una representación equivalente de B cuando ambas están expresadas en dos formas diferentes, pero dentro de una misma representación (algebraica-algebraica, verbal-verbal, etc.). Por ejemplo, $f(x) = x^2 + 2x + 1$ es una función y una representación equivalente de ella es $f(x) = (x + 1)^2$, mientras que una representación alterna de esta función es cuando se construye una parábola en el plano cartesiano con vértice en $(-1,0)$.

- *Conexión de inclusión*: A es incluido en (es un componente de) B; B incluye (contiene) a. Esta es una relación jerárquica entre dos conceptos. Por ejemplo, un punto es parte de una recta o una recta se compone de una infinidad de puntos.
- *Conexión de reversibilidad*: Haciomeroglu *et al*. (2009) indica que la reversibilidad se refiere a la capacidad de establecer relaciones bidireccionales en oposición a las relaciones de un solo sentido que funcionan sólo en una dirección. Por tanto, para nuestros propósitos diremos que el estudiante realiza la conexión de reversibilidad si es capaz de reconocer y utilizar el hecho de que $f(x)$ y $f'(x)$ son procesos inversos.
- *Conexión procedimental*: A es un procedimiento usado cuando trabajamos con un objeto B. Por ejemplo, utilizar la fórmula $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ como vía para encontrar la pendiente de una recta. Asimismo, una gráfica puede servir para identificar algunos elementos de una función, es decir, puede ser utilizada como procedimiento para identificar puntos máximos, mínimos, concavidades, punto de inflexión, etc.
- *Conexión de generalización*: A es una generalización de B; B es un caso específico (ejemplo) de A. Ésta es otro tipo de relación jerárquica. Por ejemplo, $ax^2 + bx + c = 0$ es una generalización de $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Como se aprecia en el marco preliminar, las representaciones asociadas a los conceptos (Businskas, 2008; Koestler, Felton, Bieda & Otten 2013; NCTM, 2014) y sus relaciones son un aspecto importante de las conexiones matemáticas. Aceptamos que las representaciones semióticas son un medio de exteriorización de las representaciones mentales para fines de comunicación; es decir, para volverlas visibles o accesibles a otros. Así, se pueden tener representaciones radicalmente diferentes del mismo objeto. Esto debe ser percibido por el alumno, al hacerlo estará estableciendo un tipo de conexión que nosotros denominamos representaciones diferentes.

3. METODOLOGÍA

La presente investigación es de tipo cualitativa y empleó como método para la colecta de datos a las entrevistas basada en tareas (*Task-based interviews*). De acuerdo con Goldin (2000):

> La entrevista basada en tareas para el estudio del comportamiento matemático involucra mínimamente un sujeto (el solucionador del problema) y un entrevistador (el clínico), interactuando en relación con una o más tareas (preguntas, problemas o actividades) presentado al sujeto por el clínico en una forma pre planeada (p. 519).

En ese mismo sentido, Goldin afirma que, analizando el comportamiento verbal y no verbal o interacciones, el investigador espera hacer inferencias acerca del pensamiento matemático, aprendizaje y/o resolución de problemas del sujeto. Por su parte, Assad (2015) señala que las entrevistas basadas en tareas proporcionan oportunidades para evaluar el conocimiento conceptual de los estudiantes, pero también para extender esa comprensión. Según Assad, el protocolo de la entrevista puede estar estructurado con indicaciones y las respuestas previstas de antemano por el entrevistador, o puede ser semiestructurada, lo que permite que el entrevistador juzgue la respuesta adecuada al razonamiento matemático de los estudiantes. En algunos casos, las entrevistas pueden incluir pequeños grupos de estudiantes o los problemas pueden ser abiertos. A través de las preguntas, el entrevistador puede motivar a los estudiantes a autocorregirse cuando cometen errores o para ampliar o generalizar un problema. A través de la entrevista, se anima a los estudiantes a examinar sus propias estrategias y su propio pensamiento matemático, extendiendo así su comprensión conceptual de la situación (Assad, 2015).

Las entrevistas basadas en tareas permiten a los investigadores observar, registrar e interpretar comportamientos complejos y patrones en el comportamiento, incluyendo las palabras dichas por los sujetos, voces (interjections), movimientos, escritura, dibujos, acciones en y con materiales externos, gestos, expresiones faciales, etc. (Goldin, 2000).

3.1. Diseño de entrevistas basadas en tareas

Nosotros utilizamos como protocolo un cuestionario semiestructurado (previamente validado) que incorporó actividades planteadas en el registro algebraico, gráfico y verbal; pero aquí sólo damos cuenta de las producciones para el primero. A los participantes se les proporcionaron hojas con las operaciones a realizar, mientras el investigador hacía preguntas auxiliares para identificar en qué estaba pensando el estudiante para hacer lo que hacía, el procedimiento que seguía, así como el significado de sus resultados. La actividad fue video y audio grabada para su posterior análisis. Las entrevistas fueron transcritas totalmente para tener las narrativas de los estudiantes y que serían objeto de análisis.

3.2.Participantes

Los resultados que se reportan corresponden a las producciones de ocho estudiantes (que participaron voluntariamente) de un bachillerato ubicado en la región Centro del Estado de Guerrero, cuyas edades oscilaban entre 17 y 18 años. Todos ya habían cursado y aprobado Cálculo Diferencial e Integral. Las entrevistas se realizaron en un día hábil del mes de mayo de 2016. Cada entrevista duró entre 60 y 120 minutos.

4. ANÁLISIS DE LOS DATOS

Para analizar los datos utilizamos el análisis temático (Braun & Clarke, 2006, 2012). El objetivo de un análisis temático es identificar patrones de significados (temas) a través de un conjunto de datos proporcionados por las respuestas a la pregunta de investigación planteada. Según Braun y Clarke (2006) "un tema capta algo importante acerca de los datos en relación a la pregunta de investigación y representa cierto nivel de patrón respuesta o significado dentro del conjunto de datos (p. 86)". Los patrones se identifican a través de un proceso riguroso de familiarización de datos, codificación de datos, el desarrollo del tema y revisión.

Entre las ventajas del análisis temático destaca que es un método flexible, es decir, que puede ser utilizado para una amplia gama de marcos teóricos e incluso para diversas preguntas de investigación. Otras ventajas son que puede ser utilizado para analizar diferentes tipos de datos, es decir, permite el trabajo con grandes o pequeños conjuntos de datos; y finalmente, puede ser aplicado para producir análisis basado en datos (data-driven) o dirigido por la teoría (theory-driven) (Clarke & Braun, 2012). Este método se estructura en seis fases (Braun & Clarke, 2006) que son las siguientes:

- Fase 1. *Familiarizarse con los datos*. Para esto se hizo una lectura general de las narrativas de todos los estudiantes. Esto fue importante porque nos dio ideas de posibles códigos iniciales.
- Fase 2. *Generar códigos iniciales*. Con base en la lectura previa de las narrativas y la definición de conexiones que estamos adoptando en este trabajo, establecimos códigos

iniciales para hacer una primera clasificación. Buscamos en las narrativas frases o palabras donde se infirieron conexiones que los alumnos establecieron.

- Fase 3. *Buscar temas*. Creamos, asignamos y modificamos códigos para comprender sus relaciones y establecer familia de códigos (temas potenciales). Una vez establecidos los códigos iniciales, contrastamos los extractos asociados a cada uno de ellos para buscar temas entre los códigos. Un tema está formado por más de un código o bien por sólo uno, según las evidencias que aportaron los datos.
- Fase 4. *Revisión de los temas*. Los temas fueron discutidos y se hizo la triangulación de datos (desde la fase 1) con profesionales de la Matemática Educativa con experiencia en la investigación. Algunos temas iniciales sufrieron algunas modificaciones en el título o descripción. Asimismo, establecimos agrupaciones de temas iniciales y eliminamos temas que no tenían suficiente evidencia para englobar las ideas de los estudiantes, y en su caso, generamos nuevos temas.
- Fase 5. *Definición y nombre de los temas*. En sesiones de trabajo se hizo la triangulación de los resultados y la redacción de la descripción de cada tipo de conexión que identificamos a partir de los datos. Definimos los títulos que englobaron las ideas principales de cada una y agrupamos según tipología.
- Fase 6. *Elaboración del informe*. Finalmente, se hizo el reporte final del estudio.

Para llevar a cabo el análisis de datos, consideraremos el tiempo suficiente para hacer la triangulación de datos y así obtener los temas que realmente capturen los patrones que los datos ofrezcan.

5. PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

Los resultados que se detallan enseguida corresponden a ocho estudiantes (E1, E2,…, E8). Identificamos 94 conexiones en las producciones de los participantes, éstas las agrupamos en siete grupos: las asociadas con la naturaleza de una función, de una derivada, de una derivada puntual, de la integral, acerca de la constante de integración y diferencial, sobre el TFC y, finalmente las conexiones existentes entre la derivada y la integral (Tabla 1) que constituyen nuestros temas.

ISSN: 2594-1046

Temas:	Conexiones	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	*F*	
La naturaleza de una función	Una función polinomial se asocia con coeficientes, variables y exponentes.		•	•	•				•	4	16
	Una función cuadrática representa gráficamente una parábola.		•		•	•		•		4	
	La f precedida de un paréntesis y una variable dentro de ella significan función.	•		•			•			3	
	Una $f(x)$ igualada con una expresión algebraica es una función.		•	•		•				3	
	Una función $f(x)$ es una regla de correspondencia.				•				•	2	
Al significado y operatividad de la derivada	La derivada de una función polinomial de la forma $f(x) = au^n$ se obtiene aplicando la fórmula $f'(x) = anu^{n-1}$.	•	•	•	•	•	•	•	•	8	18
	La derivada de $f(x)$ es la pendiente de la recta tangente a ella.	•			•		•	•		4	
	La derivada de una función (polinomial) $f(x)$ es disminuir su grado en una unidad.		•	•	•					3	
	La derivada de $f(x)$ es el límite de la recta secante L a un punto $x = a$ (punto de tangencia).					•				1	
	La derivada de una función se aplica en física (por ejemplo, para calcular la aceleración).		•							1	
	La derivada de una función $f(x)$ de segundo grado es una recta que describe todas las pendientes de la curva $f(x)$.						•			1	
Al significado de una derivada	La derivada de una función polinomial $f(x)$ en $x = a$ significa un punto en una gráfica o se asocia con pares ordenados.		•			•				2	4
	La derivada de una función polinomial $f(x)$ en $x = a$ representa un punto de tangencia.				•			•		2	
Al significado y operatividad de la integral	La integral de una función $f(x)$ es el área bajo la curva $f(x)$.	•	•		•	•	•	•		6	16
	La integral de una función polinomial de la forma $f'(x) = au^n$ se obtiene aplicando la fórmula $f(x) = \frac{au^{n+1}}{n+1} + C$.	•		•		•	•		•	5	
	La integral es una aproximación al área mediante rectángulos inscritos (acumulación de áreas).					•		•		2	
	La integral de una función derivada $f'(x)$ es la función $f(x)$.				•			•		2	

	La integral permite resolver problemas en contexto.			•						1	
Al significado de la constante de integración y de la diferencial	La constante de integración significa una familia de primitivas.	•					•			2	7
	La diferencial dx en una integral indica en base a qué variable se debe integrar.					•	•			2	
	Al resultado de una derivada se le añade dx que indica que el resultado es producto de una derivada.	•	•							2	
	La constante de integración significa áreas faltantes cuando se obtiene el área bajo una curva $f(x)$ por acumulación.					•				1	
Al uso del TFC	En una integral definida al límite superior evaluado en la antiderivada de $f'(x)$ se le resta el límite inferior evaluado en la misma antiderivada.		•				•		•	3	3
A la conexión entre la derivada y la integral	La integral y la derivada son operaciones inversas.		•	•	•	•	•	•	•	7	30
	La derivada de la integral de una función (polinomial) $f(x)$ es igual a la misma función $f(x)$.	•	•	•		•	•	•	•	7	
	La derivada de la integral de una función (o viceversa) se obtiene siguiendo la jerarquía de las operaciones según lo indiquen los paréntesis o corchetes.		•	•		•	•		•	5	
	La integral de la derivada de una función (polinomial) $f(x)$ es la misma función $f(x)$.			•			•	•	•	4	
	La integral de la derivada de una función (polinomial) $f(x)$ es la misma función más una constante $f(x) + C$.	•	•			•				3	
	La diferencia entre la derivada de la integral de una función (polinomial) $f(x)$ y la integral de la derivada de la misma función (polinomial) es una constante C.	•	•			•				3	
	La derivada de la integral de una función (polinomial) $f(x)$ es igual a la integral de la derivada de esa misma función.			•						1	
	F	10	15	12	10	15	13	10	9	94	

Tabla 1: Temas y códigos asociados a las conexiones identificadas (Nota: F significa frecuencia).

En la Tabla 1 se aprecia que para el tema *La naturaleza de una función* identificamos cinco códigos (con una frecuencia de 16 repeticiones), el referente: al significado y operatividad de la derivada fueron seis códigos (con 18 repeticiones), el asociado: al significado de una derivada puntual se

ISSN: 2594-1046

establecieron dos (con una frecuencia de 4), el relativo: al significado y operatividad de la integral fueron cinco códigos (con una frecuencia de 16), el asociado: al significado de la constante de integración y de la diferencial fueron cuatro códigos (con una frecuencia de 7), se identificó un código asociado al uso del TFC (con una frecuencia de 3) y, finalmente el tema: conexión entre la derivada y la integral agrupó a siete códigos (su frecuencia fue de 30). Enseguida se definen brevemente los temas y se clasifican los códigos según la tipología de conexiones que engloban de acuerdo a nuestro marco preliminar indicado en la Figura 1, sin embargo, por cuestiones de espacio sólo presentaremos algunas evidencias que soportan nuestros resultados.

5.1.La naturaleza de una función

Este tema agrupa ideas que los estudiantes presentan en relación con una función. Esto fue posible porque se les planteó una actividad concreta, se les dio la expresión $f(x) = 3x^2$ y se les pidió que dijeran qué representaba y qué elementos constituían a esa expresión. Los estudiantes le asignaron significados, características generales y su representación gráfica. Con ello, identificamos cinco códigos: la *f* precedida de un paréntesis y una variable dentro de ella significa función, matemáticamente es incorrecta porque si carece de la regla de correspondencia que permita identificar qué operación se debe realizar con la variable independiente entonces no es función. Esta idea limitada permea en 3 estudiantes y en cursos sucesivos les puede generar confusiones al momento de abordar temas que se asocien con la idea de función. Esta es una conexión inesperada que establecen los estudiantes. Los códigos: una función polinomial se asocia con coeficientes, variables y exponentes (ver extracto de la entrevista a E2) y, una función $f(x)$ es una regla de correspondencia se pueden categorizar como *conexión entre conceptos matemáticos*. Una función cuadrática representa gráficamente una parábola y, una $f(x)$ igualada con una expresión algebraica es una función, son conexiones de tipo *representaciones diferentes.*

Entrevistador: Ahí tú puedes ver una expresión f de *x* igual a algo. ¿Para ti qué representa esa expresión y cuáles son los elementos que la componen?

E2: es una función. Tiene una variable elevada al cuadrado y un coeficiente (señala los elementos que identifica)

5.2.Significado y operatividad de la derivada

Se agrupan las ideas que los estudiantes asocian con la derivada que incluyen su significado, la derivada vista como un operador, procedimiento para obtener la derivada de una función polinomial y el

ISSN: 2594-1046

uso que tiene. Los seis códigos identificados en este grupo son correctos, por ejemplo, la derivada de una función se aplica en física (para calcular la aceleración) es una *conexión entre conceptos*, aunque no necesariamente entre conceptos matemáticos, porque el estudiante que lo declaró asoció la idea de derivada con la aceleración (concepto físico). Los códigos: la derivada de una función polinomial de la forma $f(x) = au^n$ se obtiene aplicando la fórmula $f'(x) = anU^{n-1}$ (ver entrevista a E5) y, la derivada de una función (polinomial) $f(x)$ es restar una unidad son *conexiones de tipo procedimental*. Los tres códigos restantes corresponden a conexiones de tipo entre *representaciones diferentes*.

Entrevistador: ¿Qué hiciste para obtener la derivada [de $f(x) = 3x^2$]?

E5: mmm… multipliqué el 3 por 2 y resulta 6 como coeficiente y… al cuadrado de la *x* se le resta la unidad; nos queda *x* a la uno.

5.3.Significado de una derivada puntual

Este tema agrupa aquellos significados que los estudiantes le asocian a la derivada en un punto $x = a$. Aquí, las evidencias permiten establecer dos códigos, donde aquél que señala: la derivada de una función polinomial $f(x)$ en $x = a$ representa un punto de tangencia (ver extracto de la entrevista a E4) es una conexión del tipo entre *representaciones diferentes,* puesto que los estudiantes que la declaran asocian el significado de la derivada en un punto con su consecuente representación gráfica. Mientras que el código: la derivada de una función polinomial $f(x)$ en $x = a$ significa un punto en una gráfica o es asociada con pares ordenados, es una idea incompleta y por ende una conexión inesperada porque estos estudiantes parecen no tener claro que el punto al que hacen referencia es el punto de tangencia. La idea de estos más bien es asociado con la idea de tabulación, es decir, para cada valor de *x* se encuentra el respectivo valor en *y*.

Entrevistador: ¿Podrías calcular la derivada en $x = 1$ [para $f(x) = 3x^2$]?

E4: Listo.

Entrevistador:¿Tu resultado qué significa?

E4: Se supone que cuando yo le agregue el valor a *x* [a la derivada de $f(x)$], nos va a dar un punto en el que la función [derivada] va a tocar a la función original. [...] será el lugar en donde toque [la tangente].

5.4.Significado y operatividad con la integral

Las ideas que agrupa este tema están referidas al significado de integral (como área bajo la curva o la idea de acumulación) y los procedimientos para calcular integrales (con fórmula o usando su

ISSN: 2594-1046

significado). En ese sentido, el código: la integral permite resolver problemas en contexto, es una conexión *entre conceptos matemáticos,* en particular se asocia el concepto de integral con el concepto de problema, mediado por el de aplicación o uso. Mientras que los códigos: la integral de una función $f(x)$ es el área bajo la curva $f(x)$ y, la integral es una aproximación al área mediante rectángulos inscritos (acumulación de áreas) [ver extracto de la entrevista a E7], corresponden a la conexión del tipo *representaciones diferentes,* ambos casos asocian el concepto de integral con la idea de área vista en el registro gráfico. Por su parte, el código: la integral de una función polinomial de la forma $f'(x) = au^n$ se obtiene aplicando la fórmula $f(x) = \frac{au^{n+1}}{n+1} + C$, es de tipo *procedimental*, en particular quienes establecen esta conexión utilizan una fórmula como vía para obtener una integral específica. Finalmente, la integral de una función derivada $f'(x)$ es la función $f(x)$, corresponde a una *conexión de reversibilidad* entre los dos conceptos clave, objeto de estudio de nuestra investigación.

Entrevistador: para ti ¿qué es la integral?

E7: el área bajo la curva.

Entrevistador: ¿tiene algún otro significado?

E7: pues, entiendo que se calcula sumando las áreas de los rectángulos que se forman debajo de la curva.

Entrevistador: ¿podrías explicar un poquito más?

E7: por ejemplo, si tengo una función, [...] debajo de esta función se van formando los rectángulos y la suma de todos estos rectángulos es la integral.

5.5.Significado de la constante de integración y de la diferencial

Este grupo incluye las ideas que los estudiantes manifiestan en cuanto a dos componentes de la integral, a saber, la constante de integración y la diferencial que acompaña al integrando. Las evidencias permiten establecer cuatro códigos, donde el que señala: la constante de integración significa una familia de primitivas, es una conexión de tipo *representaciones diferentes* porque asocian un signo (C) con su representación en el registro gráfico, pero también se asocia con la *conexión de generalización* porque la C indica una infinidad de primitivas. Por su parte: la diferencial d*x* en una integral indica con base en qué variable se debe integrar (ver extracto de la entrevista a E6), también puede ser caracterizada como una conexión *entre representaciones diferentes*, porque los estudiantes que la establecen asocian una representación algebraica con una verbal (la idea de integrar). Los dos códigos restantes obtenidos en este grupo corresponden a conexiones inesperadas y matemáticamente incorrectas.

Entrevistador: ¿Sabes qué significa la constante (se le señala la constante de integración que él añade al resultado que obtiene para una integral indefinida)?

E6: El valor que puede tomar [la primitiva] porque no es definido.

Entrevistador: ¿Sabes qué significa esa d*x* que la agregaste?

E6: Diferencial de *x*.

Entrevistador: Pero ¿tiene algún otro significado o por qué se le agrega?

E6: Porque es en lo que tienes que valorar en *x*, por ejemplo, si tuvieras otra variable podría ser diferencial de *t*, diferencial de *k*, siempre va a estar referida al valor de la variable. Si tuviera otra constante sólo se evaluaría (se integraría con respecto a) *x*.

5.6. Uso del Teorema Fundamental del Cálculo

Este tema incluye a un solo código que está referido al uso práctico del TFC cuando se resuelve una integral definida. El código se asocia con la conexión de tipo *procedimental*, y tal como emplean los estudiantes al TFC matemáticamente es correcto (por ejemplo, ver extracto de E6) aunque en ningún momento nombran al citado teorema. Es destacable el hecho de que, de los ocho estudiantes, solamente en 3 de ellos se identifica su correcto uso. No obstante, E8 no asocia a la integral con el área bajo una curva. En este caso, el estudiante establece correctamente la conexión procedimental, pero no asocia significado a su resultado.

Entrevistador: ¿Puedes obtener el resultado de la operación indicada (la integral definida de 6*x* desde *x* = 1 hasta para un valor *x* cualquiera)?

E6: sí (realiza la operación indicada. Obtiene como resultado $3x^2 - 3$).

Entrevistador: Me puedes indicar ¿Qué hiciste para obtener el resultado?

E6: Sí, ésta es una integral definida porque tiene dos valores (límites de integración). Igual que como el mismo procedimiento de arriba, el 6 es una constante se tiene que sacar (del signo integral) y se integra la variable (*x*) que se le suma 1, quedaría *x* cuadrada sobre dos. El 6 es divisible entre 2 y quedaría 3 equis cuadrada. Como tiene los valores de arriba (límites de integración), se pone primero el valor de arriba en lugar de la *x* y después se le resta el valor de abajo [evaluado en la antiderivada].

5.7. Conexión entre la derivada y la integral

Nuestros datos permiten establecer este tema que agrupa siete códigos. Todos ellos hacen referencia a la relación que los estudiantes declaran existir entre la derivada y la integral. En su mayoría corresponden a la *conexión de reversibilidad* (ver extracto de E2). Sin embargo, hay estudiantes que consideran que: la diferencia entre la derivada de la integral de una función (polinomial) $f(x)$ y la integral de la derivada de la misma función (polinomial) es una constante C; esto se debe a que ellos establecen previamente la conexión: la integral de la derivada de una función (polinomial) $f(x)$ es la misma función más una constante $f(x)+C$ (Tabla 1). Estas conexiones, a su vez, se explican en parte porque ellos consideran que: la derivada de la integral de una función (o viceversa) se obtiene siguiendo la jerarquía de las operaciones según lo indiquen los paréntesis o corchetes. Ésta última es una conexión que los alumnos establecen como resultado de la enseñanza que recibieron. Ellos saben que cuando existen simultáneamente dos o más operaciones (como la derivada y la integral), se debe seguir la jerarquía de éstas para obtener un resultado matemático correcto. No obstante, pese a que algunos establecen esta conexión también reconocen la reversibilidad entre la derivada e integral y en sus resultados consideran que $\int\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]dx=\frac{d}{dx}[\int f(x)dx]=f(x)$, aunque tres consideren que esta relación no es totalmente cierta porque hay una constante que hace que sean diferentes.

Entrevistador: ¿conoces otra vía para llegar a ese mismo resultado (se le señala a $3x^2$ que obtuvo al calcular $\frac{d}{dx}[\int 3x^2\,dx]$) sin necesidad de hacer esos cálculos?

E2: ¡ah, ya! Pues es que aquí está derivando y ésta es una integral (señala los componentes que menciona); por lo tanto, por así decirlo, se anularían y entonces quedaría lo mismo.

Entrevistador: entonces ¿cuál sería tu resultado?

E2: lo mismo (indica su respuesta $3x^2$), porque este resultado que está aquí es lo mismo que esta acá (la función original dada).

Entrevistador: y ¿cuál es la explicación?

E2: que una derivada y una integral son operaciones opuestas, por ejemplo, si tienes un número que está de un lado multiplicando pasa al otro lado dividiendo… lo interpreto como algo así. Se anulan. ¡Ah, ya! Por ejemplo, es como si tuvieras una equis cuadrada y una raíz, se cancelan y queda sólo la equis.

6. DISCUSIÓN

Los resultados observados en las producciones de los estudiantes permiten plantear algunas reflexiones. Las conexiones más comunes que emergen son las de representaciones diferentes, la procedimental (utilizando principalmente fórmulas aprendidas en cálculo diferencial o integral), entre conceptos matemáticos (esta conexión también se da entre conceptos matemáticos y no matemáticos) y, la conexión de reversibilidad. Estos datos son consistentes con lo reportado por Mhlolo *et al*. (2012) en el sentido de que se hace uso de diferentes representaciones en diferentes categorías. En cambio, la conexión que se presenta con menor frecuencia es la de generalización y la única que no identificamos fue la de inclusión. Los resultados también indican que hay persistencia en el uso del símbolo algebraico

ISSN: 2594-1046

(Hong & Thomas, 2015), pero en ocasiones los estudiantes no le asocian significado a sus cálculos, por ejemplo, al resultado de calcular la derivada en un punto o el de una integral definida.

La conexión de reversibilidad se identifica en las producciones de siete estudiantes, sin embargo, en uno de ellos parece ser que es un conocimiento sin uso, porque en sus cálculos da cuenta de que la diferencia entre la derivada de la integral de una función (polinomial) $f(x)$ y la integral de la derivada de la misma función (polinomial) es una constante C. Es decir, este estudiante como producto de la enseñanza recibida indica verbalmente que en efecto la derivada y la integral son operaciones inversas, sin embargo, al momento de hacer cálculos no sabe cómo utilizar esta conexión (que en teoría sí establece). Esto también se debe en parte a la práctica de los profesores que provoca en los estudiantes la creencia de que en las clases de Cálculo diferencial e integral se debe aprender a calcular derivadas e integrales, aunque no tengan significado alguno. El fin último es llegar a un resultado algebraico correcto, aplicando fórmulas y jerarquía de las operaciones, sin buscar desarrollar en el estudiante el pensamiento y lenguaje variacional.

Por otra parte, nuestros resultados son consistentes con las conexiones previstas en el marco teórico preliminar (Figura 1), a excepción de la conexión de inclusión que no fue posible identificarla. Asimismo, identificamos que los estudiantes de bachillerato hacen conexiones inesperadas (Lockwood, 2011), que pueden provocarles significados incorrectos para ciertos objetos matemáticos, por ejemplo, las conexiones: una $f(x)$ igualada con una expresión algebraica es una función, la derivada de una función polinomial $f(x)$ en $x = a$ significa un punto en una gráfica o se asociada con pares ordenados, al resultado de una derivada se le añade dx que indica que el resultado es producto de una derivada y, la constante de integración significa áreas faltantes cuando se obtiene el área bajo una curva $f(x)$ por acumulación. Los orígenes de éstas son diversos: como producto de la enseñanza recibida, de sus conocimientos previos y algunas parecen ser deducidas por los propios estudiantes.

7. CONCLUSIÓN

Si bien en este estudio sólo se hizo el análisis de las producciones de los estudiantes en el registro algebraico es posible identificar algunas relaciones entre las conexiones que establecen (Figura 2). En el tránsito entre las representaciones diferentes y la conexión procedimental emerge el uso de otras, tales

ISSN: 2594-1046

como: la de reversibilidad y la de generalización. En conjunto, las diversas conexiones permiten al estudiante llegar a la solución de la actividad propuesta.

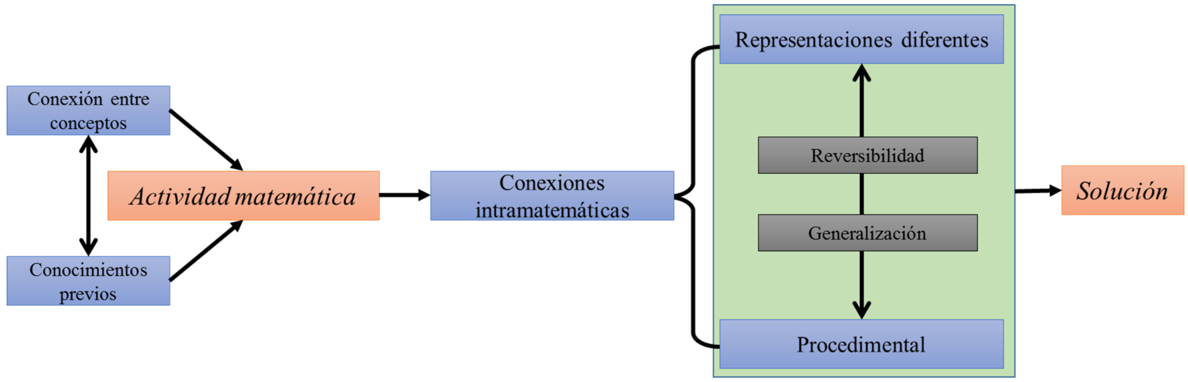

Figura 2. Relación (aparente) entre las conexiones que se identificaron.

También observamos que las conexiones que los estudiantes establecen no siempre son correctas. Esto es preocupante y motiva a desarrollar estudios que profundicen en las conexiones que establecen en los demás registros (gráfico y verbal), para tener un panorama más amplio e identificar con mayor profundidad la relación entra las conexiones que sí establecen. En este estudio incluimos los códigos que sólo tienen una mención porque es probable que al analizar las producciones de los estudiantes en otros registros esos códigos adquieran más fuerza o en su defecto se transformen. Sin embargo, eso será objeto de un estudio más amplio, actualmente en curso.

Finalmente, el estudio de las conexiones entre los dos conceptos claves del Cálculo promete resultados interesantes y que podrían ser usados para realizar una propuesta encaminada a desarrollar en los alumnos la posibilidad de trabajar con ellas en situación escolar. Nuestros datos están aportando información acerca del origen de las conexiones que los estudiantes establecen y, pero también generan una nueva pregunta: ¿Qué conexiones establecen los profesores de bachillerato entre la derivada y la integral? Responder esta pregunta permitirá correlacionar las conexiones que establecen ambos actores educativos y que en su conjunto darán pautas para una mayor comprensión acerca de este tema objeto de nuestro proyecto.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Assad, D. A. (2015). Task-Based Interviews in Mathematics: Understanding Student Strategies and Representations through Problem Solving. *International Journal of Education and Social Science, 2*(1), 17-26.

Begg, A. (2001). Ethnomathematics: Why, and What Else? *ZDM, 33* (3), 71-74.

Berry, J., & Nyman, M. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(4), 479-495.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*, 77–101. http://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Braun, V., & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. In H. Cooper (Ed.), *APA Handbook of Research Methods in Psychology* (Vol. 2, pp. 57–71). American Psychological Association. http://doi.org/10.1037/13620-004

Businskas, A. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections*. (Unpublished doctoral dissertation). Faculty of Education-Simon Fraser University. Canada.

Dawkins, P., & Mendoza, J. (2014). The development and nature of problem-solving among first-semester calculus students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45*(6), 839-862.

De Gamboa, G., y Figueiras, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 337-344). Salamanca: SEIEM.

DGB. (2013a). *Cálculo diferencial*. Recuperado el 10 de junio de 2015 de http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/cfp_5sem/calculo-diferencial.pdf

DGB. (2013b). *Cálculo Integral.* Recuperado el 10 de junio de 2015 de http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/cfp_6sem/CALCULO_INTEGRAL.pdf

Eli, J., Mohr-Schroeder, M., & Lee, C. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal, 23*(3), 297-319.

Eli, J., Mohr-Schroeder, M., & Lee, C. (2013). Mathematical connections and their relationship to mathematics knowledge for teaching geometry. *School Science and Mathematics, 113*(3), 120-134.

Evitts, T. (2004). *Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula*. (Unpublished doctoral dissertation). Pennsylvania State University College of education.

Garbín, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(2), 169-193.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Granada: Universidad de Granada.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. pp. 517-545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Haciomeroglu, E., Aspinwall, L., & Presmeg, N. (2010). Contrasting cases of calculus students' understanding of derivative graphs. *Mathematical thinking and learning, 12*(2), 152-176.

Hong, Y., & Thomas, M. (2015). Graphical construction of a local perspective on differentiation and integration. *Mathematics Education Research Journal, 27*(2), 183-200.

Jaijan, W., & Loipha, S. (2012). Making Mathematical Connections with Transformations Using Open Approach. *HRD Journal, 3*(1), 91-100.

Klymchuk, S., Zverkova, T., Gruenwald, N., & Sauerbier, G. (2010). University students' difficulties in solving application problems in calculus: Student perspectives. *Mathematics Education Research Journal, 22*(2), 81-91.

Koestler, C., Felton, M. D., Bieda, K. N. & Otten, S. (2013). *Connecting the NCTM Process Standards and the CCSSM Practices.* United States of America: National Council of Teachers of Mathematics.

Lockwood, E. (2011). Student connections among counting problems: an exploration using actor-oriented transfer. *Educational Studies in Mathematics, 78*, 307–322.

Mamolo, A., & Zazkis, R. (2012). Stuck on convention: a story of derivative relationships. *Educational Studies in Mathematics, 81*(2), 161-177.

Mhlolo, M. (2012). Mathematical connections of a higher cognitive level: A tool we may use to identify these in practice. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 16*(2), 176-191.

Mhlolo, M., Venkat, H., y Schäfer, M. (2012). The nature and quality of the mathematical connections teachers make. *Pythagoras, 33*(1), 1-9. Recuperado de http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v33i1.22

Mwakapenda, W. (2008). Understanding connections in the school mathematics curriculum. *South African Journal of Education, 28*, 189–202.

NCTM. (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics.* Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (2014). *Principles to action: Ensuring mathematical success for all*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Özgen, K. (2013). Problem çözme bağlaminda matematiksel ilişkilendirme becerisi: öğretmen adaylari örneği. *NWSA-Education Sciences, 8*(3), 323-345.

Park, J., Park, M. S., Park, M., Cho, J., & Lee, K. (2013). Mathematical modelling as a facilitator to conceptualization of the derivative and the integral in a spreadsheet environment. *Teaching mathematics and its applications, 32*, 123-139.

Presmeg, N. (2006). Semiotics and the "connections" standard: significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61,* 163–182.

Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable: Conceptos y Contextos*. México: CENGAGE Learning.

Yoon, C., Dreyfus, T., & Thomas, M. (2010). How high is the tramping track? Mathematising and applying in a calculus model-eliciting activity. *Mathematics Education Research Journal, 22*(2), 141-157.