

CAPÍTULO 8

Diseño de actividades para iniciar el estudio de las fracciones en educación primaria

Carlos Valenzuela García

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, IPN y Universidad de Londres (México).

María S. García González

Universidad Autónoma de Guerrero (México).

Alicia Nájera Leyva

Escuela Primaria “Pedro Ascencio Alquisiras”, Chilpancingo, Guerrero, Universidad autónoma de Guerrero (México).

Resumen

En este escrito se proponen actividades diseñadas para la enseñanza de las fracciones en tercer grado de primaria. Para su diseño, en primer lugar, se realizó una caracterización de los usos y aspectos de la fracción que se encuentran presentes en los libros de texto mexicanos desde preescolar hasta tercer año de educación primaria; tomando como marco interpretativo el resultado de una investigación que proporciona un espécimen de fenomenología didáctica para ese concepto y su enseñanza. Como resultado de la caracterización se obtuvo que el uso más priorizado es la fracción como fracturador, en sus aspectos operador fracturante y relación de fractura. Esto condujo, en un segundo momento, al diseño de actividades que promueven otros usos, tales como, comparador, medida, operador y número.

Palabras clave: fracciones, fenomenología didáctica, primaria.

Motivación para el Diseño de las Actividades

Desde un punto de vista matemático, hacemos la precisión de que las fracciones pueden ser vistas como elementos de las clases de equivalencia del conjunto cociente que define a los números racionales. Pero en la didáctica, compartimos la idea de que las fracciones son el recurso fenomenológico para introducir los números racionales (Freudenthal, 1983), y que éstas pueden ser usadas en diversas situaciones y con diferentes significados.

Siendo esta una de las razones por la que centramos la atención en el estudio de las fracciones en la educación básica.

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de las fracciones, y más precisamente los números racionales, como problemática en el ámbito de la Matemática Educativa han sido estudiados desde diferentes enfoques por muchos investigadores. Algunas contribuciones en diferentes países, son por ejemplo los trabajos de Kieren (1976; 1988; 1992; 1993), Usiskin (1979), Behr, Lesh, Post y Silver (1983), Figueras (1988; 1996), Streefland (1991), Llinares (2012), Steffe y Olive (2010), Fandiño (2009), Quispe, Gallardo y González (2010) y otros.

Los resultados de las investigaciones antes referenciadas y otras han permitido identificar principalmente: (1) modelos para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones y números racionales; (2) marcos explicativos sobre la estructura que tienen las fracciones y los números racionales y su relación con otros objetos matemáticos; así como (3) algunas tendencias cognitivas que los alumnos tienen respecto a los mencionados conceptos.

Como producto de esos resultados se ha favorecido la reestructuración de la enseñanza de las fracciones en la educación obligatoria en muchos países. En el currículum mexicano, y más precisamente en los libros de texto se han identificado diferentes modelos para su enseñanza (por ejemplo, modelo de áreas, modelo discreto, modelo de la recta numérica) que buscan promover un conocimiento más amplio sobre este tema. Sin embargo, en investigaciones recientes se muestra evidencia de que las fracciones siguen siendo uno de los conceptos más complejos para tratar en clase, cuyo aprendizaje enfrenta grandes dificultades para la mayoría de los alumnos (véase ejemplos en Siegler, Fazio, Bailey y Zhou, 2013, y Petit, Laird y Marsden, 2010).

En México, las pruebas nacionales e internacionales que evalúan el rendimiento de los estudiantes en cuanto a matemáticas ponen de manifiesto la afirmación anterior. Como ejemplo se pueden consultar los resultados de las pruebas Excale (2009) y Planea (2015) que se aplicaron a través del Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación a los alumnos de sexto grado de primaria. En el primer caso, se encontró que a nivel nacional el porcentaje de aciertos correctos correspondientes a la mayoría de los contenidos evaluados sobre las fracciones están por debajo de 50%.

Estos resultados son evidencia de que la problemática relacionada con la enseñanza y aprendizaje de las fracciones desde edades tempranas aún persiste. Al respecto, se tiene la hipótesis de que una de las razones podría estar vinculada con el hecho de que la enseñanza de las fracciones se sigue haciendo desde un mismo enfoque, empleando principalmente el modelo de áreas, dejando de lado las potencialidades que tienen otros modelos que sirven para enseñar otros usos de las fracciones.

Por otra parte, en un gran número de investigaciones se destaca la importancia del estudio del conocimiento que tienen los alumnos sobre las fracciones desde la educación básica. Autores como Siegler *et al.* (2012) señalan que un buen conocimiento de las fracciones es predictor de un buen desempeño de la matemática desde primaria hasta niveles más altos. Así mismo, Usiskin (1997) y Kieren (1992) afirman que el conocimiento de las fracciones y los números racionales se relaciona con muchos otros conceptos de la matemática y sus aplicaciones, su conocimiento se extiende más allá de la aritmética, como por ejemplo al álgebra, cálculo y geometría.

Lo señalado en este apartado nos ha motivado a diseñar actividades que se pueden emplear para el estudio de las fracciones en educación básica. El diseño se basa en el resultado de una fenomenología didáctica para las fracciones, el cual se concreta como un marco interpretativo que sirve para estructurar una enseñanza (Valenzuela, Figueras, Arnau y Gutiérrez-Soto, 2017). Este resultado está fundamentado en las ideas de Freudenthal (1983) y se detalla a continuación como parte de los fundamentos teóricos.

Fundamentos Teóricos

Como ya se ha mencionado, el prototipo de fenomenología didáctica de las fracciones reinterpretado por Valenzuela *et al.* (2017) se constituye como un marco interpretativo, y de acuerdo con los autores, sirve para caracterizar los modelos de enseñanza existentes, los que se diseñen y los objetos mentales fracción que tienen los alumnos en un determinado nivel educativo.

En palabras de Freudenthal la fenomenología de un concepto matemático, una estructura matemática o una idea matemática se define como:

La descripción de un noumenon en su relación con los phainomena para los cuales es el medio de organización, indicando cuáles son los phainomena para cuya organización fue creado y a cuáles puede ser extendido, de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre esos fenómenos (1983, p. 27).

En otros términos, de la cita anterior se entiende que al hacer una fenomenología didáctica se pretende describir aquellos fenómenos que son organizados por medio de unos determinados conceptos, que de acuerdo con Puig (1997) pueden ser llamados medios de organización (véase Figura 1). Tales fenómenos se pueden encontrar ya sea dentro o fuera del ámbito matemático y, además, como menciona el autor antes citado, están presentes en el mundo de los alumnos y se proponen en la enseñanza. La relación “fenómenos - medios de organización” marca el uso que posteriormente se empleará cuando el análisis fenomenológico se lleve a la enseñanza: se plantearán los fenómenos que deben ser organizados con la intención de que los estudiantes vayan elaborando objetos mentales lo más rico posible de estos medios de organización (conceptos).

Desde un punto de vista didáctico, Freudenthal (1983) menciona que el objetivo en el sistema escolar es básicamente la constitución de objetos mentales y en segundo lugar la adquisición de conceptos. La constitución de objetos mentales de los alumnos se entiende como el conjunto de ideas que ellos han elaborado sobre un concepto matemático (el objeto pensado) y su relación con los fenómenos que este organiza. El objeto mental de un alumno sobre un concepto matemático mejora cuando él logra resolver una gama amplia de problemas que se relacionan con los distintos fenómenos que organiza el concepto en un determinado nivel, y así, se dice que su objeto mental está más próximo a la adquisición del concepto.

Con respecto al análisis fenomenológico, vale la pena aclarar que, en un determinado nivel, de acuerdo con las interpretaciones de Puig (1997), el medio de organización que organiza ciertos fenómenos puede llegar a ser un fenómeno que es organizado por otro medio de organización, formando así una cadena de fenómenos-medios de organización (véase Figura 2). Por ejemplo, el concepto número organiza el fenómeno de la cantidad, pero, en otro nivel, el número es un fenómeno organizado por el sistema decimal de numeración. Así mismo, los números naturales, los enteros y los racionales, son

medios de organización de determinados fenómenos, pero también, en un nivel más avanzado, serán fenómenos organizados por el concepto número.

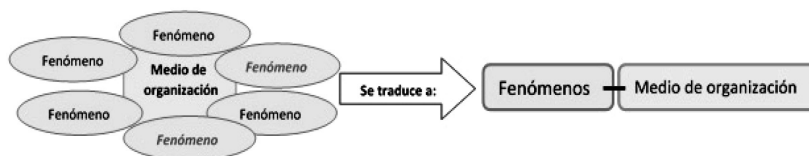


Figura 1. Esquematización sobre el proceso de elaborar una fenomenología didáctica.

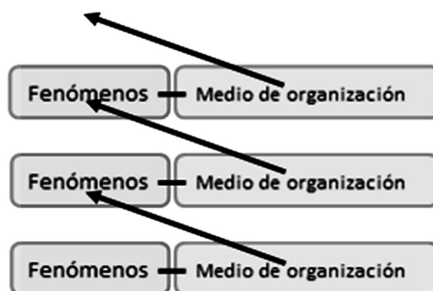


Figura 2. Cadena de fenómenos-medios de organización.

Teniendo en cuenta este marco, y en términos generales se entiende que, para la constitución y mejoramiento de objetos mentales, los alumnos deben experimentar fenómenos que se relacionan con un concepto o estructura matemática, de manera que este sea su medio de organización. En este caso, se proponen situaciones que promuevan una experimentación donde se usen las fracciones, pero para ello, es necesario realizar una fenomenología didáctica del concepto fracción.

El ejemplo de fenomenología didáctica de las fracciones hecha por Valenzuela *et al.* (2017) a partir de las ideas de Freudenthal (1983) y otros investigadores como Kieren (1988), parte desde los usos de las fracciones en el lenguaje cotidiano, hasta la descripción de los usos y aspectos de las fracciones que se emplean en la enseñanza, así como su construcción formal desde la matemática. Además de este marco interpretativo, para el diseño e implementación de las actividades, recurrimos también al enfoque didáctico conocido como desafíos matemáticos, que se sugiere para el estudio de las matemáticas en el Programa de Estudios de la Secretaría de

Educación Pública en México, (SEP, 2011c). En seguida detallamos cada uno de estos fundamentos teóricos.

Usos y aspectos de las fracciones

De la fenomenología didáctica para las fracciones hecha por Valenzuela *et al.* (2017), distinguimos principalmente siete usos de ese concepto, dos que se emplean particularmente en el lenguaje cotidiano: descriptor y comparador, y cinco usos en un nivel más abstracto: fracturador, comparador, operador, medida y número, tal como se muestra en la Figura 3.

Distinguimos el uso de las fracciones en el lenguaje cotidiano, porque se asume el hecho de que este no necesariamente resulta de un conocimiento escolarizado. Es decir, algunas expresiones se usan consciente o inconscientemente, y no precisamente se conoce su origen epistemológico como parte de una intención didáctica. Tampoco se puede generalizar el conocimiento de las fracciones a partir del uso que se les da en ciertas expresiones. Aunque cabe resaltar que las ideas que se puedan tener sobre las fracciones que se emplean en el lenguaje cotidiano pueden ser un punto de partida para estructurar una enseñanza.

Para tratar de esclarecer la idea del párrafo anterior se proponen dos ejemplos, el primero enfatiza sobre la falta de significado de la fracción en cierta expresión y el segundo deja ver que se puede conocer el significado de la fracción en una expresión empleada en el lenguaje cotidiano, pero no necesariamente se puede generalizar el conocimiento.

1. En ocasiones, los niños usan expresiones como: “la mitad de pan”, “la mitad de una naranja” o “la otra mitad”. En algunas comunidades zacatecanas la venta de leche se hace aún con garrafas de diferentes medidas (cuartos, medios, tres cuartos y litros), por lo que es común escuchar las expresiones: “me da media.../me da una media...”, “me da cuarta.../me da una cuarta...”, y completan con la oración “jarra de leche”. En estos ejemplos hay niños o adultos que no conocen la relación entre la capacidad de la jarra y la parte que se les da, o la relación entre el tamaño de la naranja o pan y la parte que se les da. Las fracciones solo las usan para describir la cantidad de leche que contiene un recipiente, o la cantidad de naranja o pan que quiere un niño.

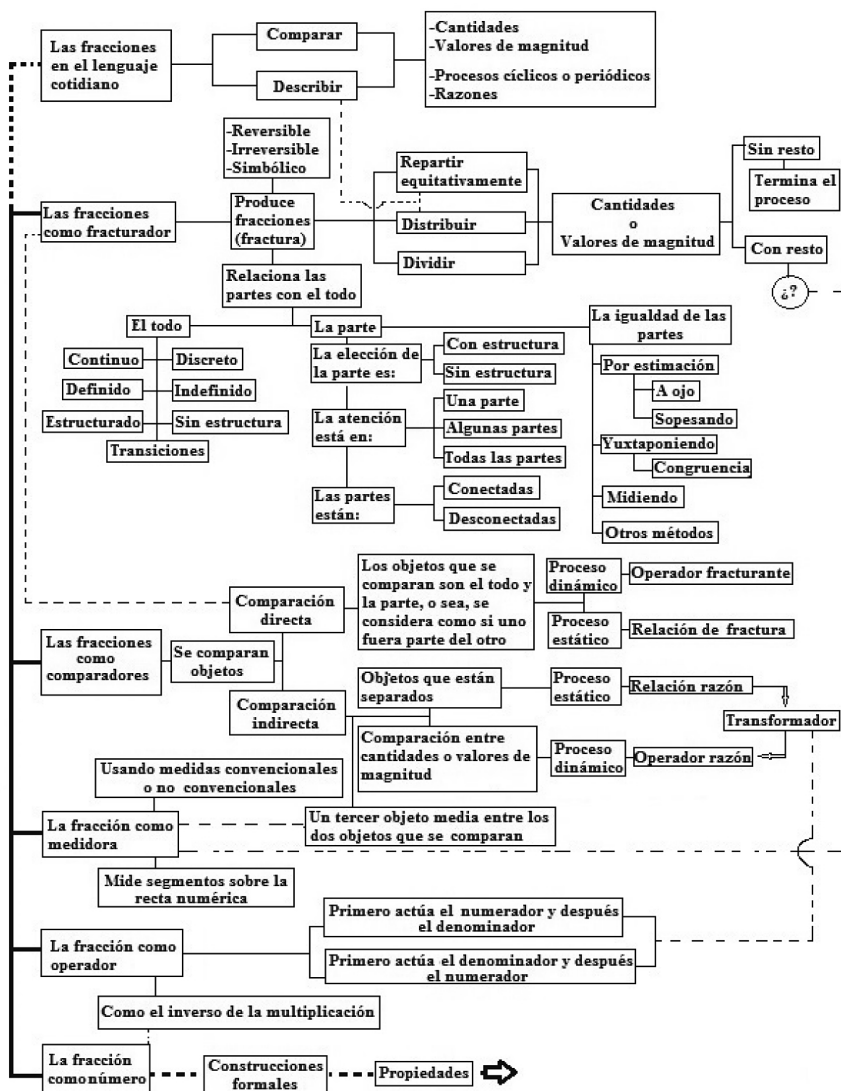


Figura 3. Usos y aspectos de las fracciones (tomado de Valenzuela, Figueras, Arnau, & Gutiérrez-Soto, 2017, p. 229).

2. En España es usual llegar a un bar y pedir “un quinto o un tercio de cerveza”, al igual que en el ejemplo anterior hay quienes sólo usan las fracciones como una etiqueta que describe al recipiente que

contiene el líquido. Ahora supóngase que en este caso las personas conocen la relación donde subyace la fracción, es decir, que $1/3$ son 33 centilitros (cl) de un litro de cerveza, y $1/5$ son 20 cl de un litro, supongamos además que pueden comparar y saben que un tercio es mayor que un quinto, ya que lo asocian al tamaño del recipiente y a su capacidad de volumen, y por supuesto, a la cantidad de cerveza que se pueden tomar. Sin embargo, cuando se comparan otras fracciones, como un séptimo y un octavo, no necesariamente las personas logran comparar y distinguir con éxito cuál es mayor o menor.

Una actividad con fines educativos puede considerar estos y otros ejemplos de situaciones que se viven a diario para propiciar un conocimiento más general y significativo de las fracciones. En el ejemplo de las cervezas se pueden estudiar las características de las fracciones $1/3$ y $1/5$, ambas fracciones unitarias, donde se puede establecer la relación general (mientras mayor el denominador, menor es la fracción). Otras expresiones empleadas en el lenguaje cotidiano son:

- Quiero solo la mitad de tu sándwich: aquí la fracción se está usando para describir una magnitud; mientras que si se dice quiero un pedacito de sándwich, pero que sea la mitad de lo que tú te comiste, entonces la fracción se está usando para comparar una magnitud.
- Quiero la mitad de la naranja, hasta aquí hemos recorrido la mitad de la pista, falta media hora, me da un cuarto de tortillas: estas son otras oraciones comunes en donde la fracción se usa para describir una magnitud.
- Me toca un tercio de la herencia, más de la mitad del grupo son niños: aquí la fracción se usa para describir una cantidad.
- Tú tienes la mitad de dinero del que tengo yo, te dieron un cuarto de chocolate más que a mí: en estos ejemplos la fracción se usa para comparar magnitudes.
- Hay más de la mitad de hombres que mujeres, tu mamá es la mitad de grande que la mía: estas son oraciones donde la fracción se usa para comparar cantidades.

Otros usos más elaborados de las fracciones en el lenguaje aparecen en las expresiones: rodar $3\frac{1}{2}$ veces una llanta, girar $2\frac{1}{2}$ veces más la llave en

la cerradura. En este caso se están describiendo o comparando procesos cíclicos o periódicos cuya última fase se ha realizado parcialmente. O por medio de las expresiones siguientes se están describiendo fracciones como razón: ocho de cada diez gatos prefieren whiskas, tres de cinco partes están dañadas, dos tazas de harina por una taza de leche, por cada niño habrá dos galletas.

En el lenguaje cotidiano se usan las fracciones principalmente para describir o comparar cantidades, valores de magnitud, procesos cíclicos o periódicos y razones.

Los otros usos de las fracciones son: fracturador, comparador, medida, operador y número (ver Figura 3), éstos ya han sido informados en Valenzuela, Figueras, Arnau y Gutiérrez-Soto (2016), pero para precisar en este documento se retoman a continuación de manera general esas ideas, las cuales se precisan en el diseño de las actividades, propuesta que interesa en este documento y que se exponen más adelante.

La fracción como fracturador se usa para producir fracciones (fracturar), por medio de las cuales se relacionan las partes con un todo continuo o discreto. Esto podría surgir a partir de dejar expresada una división, realizar un reparto equitativo o una distribución. La fracción que surge de los procesos anteriores describe la cantidad o magnitud que toca a cada objeto o individuo entre los que se hace la distribución o reparto. Los procesos de causar fracciones pueden ser dinámicos o estáticos. En los procesos dinámicos se dice que la fracción se usa como fracturador en su aspecto operador fracturante, mientras que, en los procesos estáticos, se usa la fracción en su aspecto relación de fractura.

Para comparar cantidades, magnitudes u objetos que se separan unos de otros, ya sea por experimentación o de forma imaginaria, también se usan las fracciones. Dicha comparación se puede hacer de manera directa o indirecta. Cuando se hace una comparación directa, la fracción se usa como fracturador. Para hacer una comparación indirecta se emplea un tercer objeto que media entre los objetos que se comparan. En los procesos de comparación dinámicos se usa la fracción como comparador en su aspecto operador razón, mientras que, en los procesos estáticos, en su aspecto relación razón.

El uso de la fracción como medidora se emplea para medir segmentos sobre la recta numérica, o cuando la fracción precede a una magnitud, por

ejemplo, $\frac{1}{2}$ kg. La fracción como operador se acerca cada vez más al campo de los números, puede ser vista como el inverso de la multiplicación, o como un transformador, que transforma una cantidad en otra. Finalmente, la fracción como número es cuando se le da un tratamiento meramente numérico y se reconocen algunas de sus propiedades como, por ejemplo, la equivalencia, el orden y la densidad de las fracciones.

Los desafíos matemáticos

Un desafío matemático consiste en secuencias de situaciones matemáticas que tienen como objetivo despertar el interés de los alumnos e invitarlos a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados que emiten (SEP, 2011a).

El planteamiento teórico-metodológico de los desafíos matemáticos es acorde a las nuevas exigencias que el Sistema Educativo Mexicano plantea para el docente como profesional de la enseñanza de las matemáticas, pues reclama un conocimiento profundo del contenido matemático y didáctico de esta asignatura en aras de transformar a la clase en un espacio social de construcción de conocimientos donde los alumnos aprenden a enfrentar diferentes tipos de problemas, de formular argumentos, de emplear distintas técnicas en la resolución de problemas, y de usar el lenguaje matemático para comunicar o interpretar sus ideas. Por esta razón, hemos decidido adoptar a los desafíos matemáticos como referente conceptual y metodológico para el diseño de las actividades propuestas.

Las actividades que presentamos, basadas en los desafíos matemáticos exhiben las siguientes características para ser resueltas:

- Involucran diversas estrategias de solución.
- El alumno debe usar sus conocimientos previos, el desafío consiste en reestructurar lo que ya sabe, para modificarlo, ampliarlo, rechazarlo o volver a aplicarlo.
- El conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos lo puedan usar hábilmente para solucionar problemas y lo puedan reconstruir en caso de olvido.
- La actividad intelectual fundamental en estos procesos de estudio se apoya más en el razonamiento que en la memorización.

Con el diseño de las actividades se espera que tanto alumnos como docentes se enfrenten a retos matemáticos, en donde apliquen técnicas eficaces y argumenten sus razonamientos.

Caracterización del Modelo de Enseñanza de las Fracciones en Preescolar y Primeros Tres Años de Primaria

Para llevar a cabo la caracterización del modelo de enseñanza de las fracciones se realizó un análisis de los tres libros de texto de preescolar y los libros de primero, segundo y tercero de primaria, así como del plan de estudios de este nivel escolar (SEP, 2016a; 2016b; 2016c; 2016d; 2016e). Este análisis consistió en identificar en estas fuentes los usos de la fracción y sus diferentes aspectos. Como resultado se encontró que, en preescolar, primero y segundo de primaria, las fracciones se presentan de manera implícita al fraccionar un entero, a la mitad o en diversas partes iguales, siendo tercer año de primaria donde ya se hacen explícitas.

Enseguida se muestra, a modo de ejemplo, el caso del análisis de una lección del libro de texto desafíos matemáticos de tercer año de primaria, en donde se identificaron 3 usos de la fracción: fracturador, medida y número.

Frakturador. La fracción en el uso fracturador se presenta en los ejercicios 1 y 2 de la lección 32. Este aspecto se caracteriza porque la unidad o el todo se fractura, esto es, se obtienen tantas partes iguales como se deseen. En ambos ejercicios el todo es continuo, por tratarse de un solo elemento. En el ejercicio 1 los alumnos son quienes deben hacer la partición, por eso se habla de la fracción como fracturador en su aspecto operador fracturante. En el ejercicio 2 ya está hecha la partición, los alumnos deben establecer la relación de fractura, aunque en el caso del círculo deben reconocer que hay dos unidades fraccionarias y que una es la mitad de la otra (véase Figura 4).

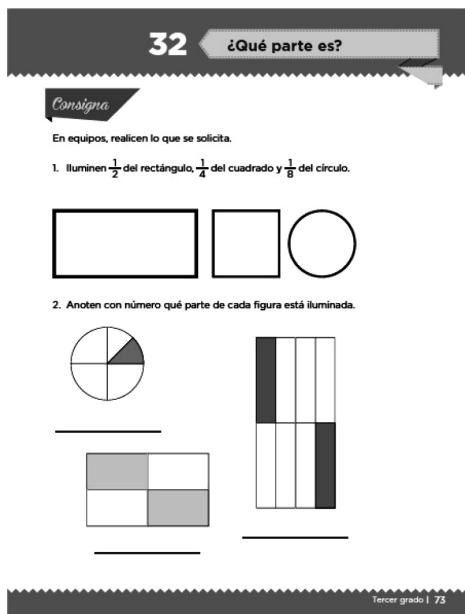


Figura 4. Ejercicios donde aparece la fracción como fracturador en el libro de texto (SEP, 2016d).

Medida: Este se refiere a la asignación de un número a una región o a una magnitud de una, dos o tres dimensiones, producto de la partición equitativa de la unidad. En el ejercicio 3 de la lección 32 (Figura 5), el segmento de recta mide dos unidades, los alumnos representarán fracciones a partir de identificar en cuantas partes será fraccionada la unidad. Las unidades de medida serán $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$, las cuales servirán para establecer la medida de los otros segmentos que van de 0 a los puntos E, C, A, D y B.

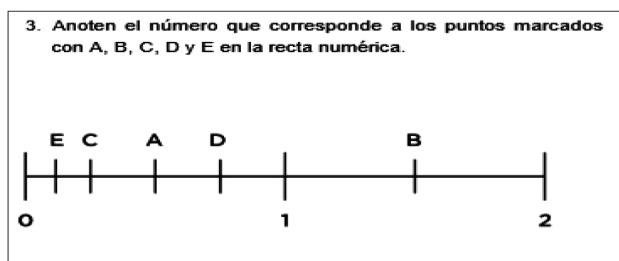


Figura 5. Ejercicio donde aparece el uso medida.

Número: La fracción es vista como un número. En el ejercicio 4, de la lección 32 (Figura 6) al observar cada par de fracciones los alumnos anotarán los símbolos > (mayor que), < (menor que) o = (igual) según corresponda, es decir, establecerán un orden entre ellos.

4. Anoten en los cuadrados el símbolo > (mayor que), < (menor que) o = (igual), según corresponda.

$\frac{1}{2}$ <input type="text"/>	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$ <input type="text"/>	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ <input type="text"/>	$\frac{2}{4}$
$\frac{1}{4}$ <input type="text"/>	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$ <input type="text"/>	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{4}$ <input type="text"/>	$\frac{3}{8}$
$\frac{2}{2}$ <input type="text"/>	1	1 <input type="text"/>	$\frac{4}{4}$	$\frac{8}{8}$ <input type="text"/>	1

Figura 6. Ejercicio donde aparece la fracción como número.

Como resultado del análisis se encontró que los usos que más se priorizan en la Educación Básica Preescolar son el de descriptor y fracturador (Tabla 1). La fracción como fracturador se empieza a usar de manera implícita en segundo y tercer año de Educación Preescolar. Específicamente en una actividad de cada libro, y en ambos casos se usa la fracción en el lenguaje cotidiano, y describe el resultado de un reparto equitativo.

Tabla 1. Usos de la fracción en los libros de texto para preescolar.

Usos	PREESCOLAR		
	1°	2°	3°
Frakturador		1	1
Comparador			
Medida			
Operador			
Número racional			
En el lenguaje cotidiano			Descriptor (Reparto equitativo)

En primaria el uso más priorizado es el de fracturador (Tabla 2). Este aparece con más frecuencia en tercer año de educación primaria. En el primer año de primaria la fracción se presenta en dos actividades como comparador y como operador, en segundo año no se presenta la fracción, y en tercer año de primaria es cuando aparecen las fracciones en los cinco usos, pero tiene más frecuencia el uso de fracturador, ya que aparece en 14 actividades.

En la educación primaria las lecciones que se proponen expresan, de manera explícita, relación con las actividades de la vida diaria del alumno.

Tabla 2. Usos de la fracción en el libro de texto de primaria (1-3 grado).

Usos	PRIMARIA		
	1°	2°	3°
Frakturador			14
Comparador	1		1
Medida			7
Operador	1		1
Número racional			2
En el lenguaje cotidiano	Descriptor (Reparto equitativo)		Descriptor (Reparto equitativo)

Con base en esta revisión nos percatamos de que los usos de la fracción (frakturador, comparador, medida, operador y número) caracterizan la enseñanza de este concepto en tercer año de primaria, poniendo mayor énfasis en el uso de la fracción como frakturador. Este resultado influyó en nuestro diseño de las actividades de intervención para la enseñanza de las fracciones en tercer año de primaria, pues los problemas que lo forman consideran cada uno de estos usos.

Actividades de Intervención

Se han diseñado 5 actividades donde se emplean las fracciones, cada una de ellas implica una situación con un contexto cercano al estudiante, como las fiestas de cumpleaños, el recreo, los paseos en bicicleta y las carreras,

éstas implican el trabajo con algún uso particular de las fracciones, aunque eventualmente se pueden emplear más de un uso. En cada actividad se plantean preguntas desafiantes que pretenden que los estudiantes razonen y argumenten sus respuestas, de acuerdo con los planteamientos teóricos y metodológicos de los desafíos matemáticos. Las actividades están redactadas en enunciados que los estudiantes tienen que leer y analizar para poder dar respuesta.

Actividad 1

Esta actividad demanda los usos de la fracción como fracturador y comparador para un todo continuo y definido (ver Figura 7). En el inciso a, el estudiante debe establecer una relación de fractura a partir de fracturar el pastel (esto lo puede hacer de manera simbólica, dejando expresada una partición en la imagen que se propone o recurrir a otras representaciones y usar la fracción en su aspecto operador fracturante), esto para identificar la parte que le toca a cada uno de los invitados, o sea, .

En las preguntas de los incisos (b) y (c), se requiere que el estudiante establezca una relación de fractura. En (b), es necesario establecer la relación , que corresponde a la fracción del pastel que Raúl repartió a sus amigos. En (a), se debe establecer la relación , que corresponde a la cantidad de pastel que Raúl le dio a sus hermanos. En ambos casos, la relación que resulta describe la cantidad de pastel que le toca a cada grupo (amigos y hermanos).

Hoy es el cumpleaños de Raúl y va a repartir su pastel en partes iguales entre él, su mamá, su papá, 3 hermanos y sus 6 amigos.

¿Qué fracción del pastel debe comer cada uno para que no sobre pastel?

¿Qué fracción del pastel le repartió Raúl en total a todos sus amigos?

¿Qué fracción del pastel le repartió Raúl en total a todos sus hermanos?

¿A quién le repartió más pastel Raúl, al grupo de sus amigos o al de sus hermanos?, ¿Por qué?




Figura 7. Actividad 1 para el estudio de las fracciones en primaria.

Los resultados de los incisos (b) y (c) deben ser comparados, para que se pueda dar respuesta al inciso (d) satisfactoriamente, identificando que el grupo de los amigos de Raúl es quien ha recibido mayor cantidad de pastel. En este último inciso se usa la fracción como comparador, e incluso se pueden comparar esas cantidades y establecer una relación razón, ya que la cantidad de pastel que se les repartió a los hermanos, es la mitad de la que se les repartió a los amigos.

Actividad 2

Esta actividad (ver Figura 8), también demanda el uso de la fracción como fracturador, aquí, la exigencia recae en el aspecto operador fracturante para establecer una relación de fractura como resultado de una distribución del total de profesores (un todo discreto y definido) que estará en cada uno de los tres grupos que se formarán.



En la explanada de la escuela se reunieron 12 profesores porque van a formar 3 equipos con la misma cantidad de integrantes, para vigilar a los niños durante el recreo, ¿cuántos profesores estarán en cada equipo?

Escribe tu respuesta: _____

Figura 8. Actividad 2 para el estudio de las fracciones en primaria.

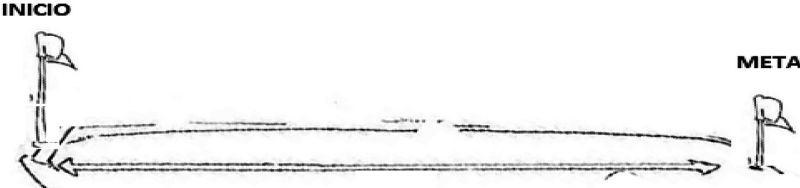
En este caso, el resultado de la distribución describe la cantidad de profesores que habrá por cada uno de los grupos para cuidar a los niños durante el recreo.

Actividad 3

Esta actividad (véase Figura 9) exige principalmente el uso de la fracción como medida, para medir segmentos sobre la recta numérica. Para dar respuesta en (a), el estudiante puede fracturar la distancia del inicio a la meta, o bien, solo comparar las partes que cada competidor ha recorrido,

por lo que aparece la fracción como fracturador en su aspecto operador fracturante.

En una carrera compiten tres personas, en el momento que Jaime observa la carrera los competidores se encuentran a diferente distancia de la meta: El competidor uno se encuentra a $\frac{1}{2}$ de la meta, el segundo competidor a $\frac{1}{4}$, y el tercero se encuentra a $\frac{1}{8}$. Representa en la imagen las posiciones de los competidores.




a) ¿Cuál de los competidores ha recorrido más? ¿Por qué?
b) Si en total la carrera es de 6 km, ¿cuántos kilómetros ha recorrido cada competidor?

Figura 9. Actividad 3 para el estudio de las fracciones en primaria.

Para responder el inciso (b), es necesario que el estudiante opere utilizando la fracción para transformar la cantidad 6 km, según la fracción de la carrera que ha recorrido cada uno de los competidores. Esto es $\frac{1}{2}(6)=3$, $\frac{1}{4}(6)=1.5$, $\frac{1}{8}(6)=0.75$. En este caso la fracción se usa como operador, que transforma una cantidad en otra.

Actividad 4

Esta actividad (véase Figura 10), al igual que en la actividad 3, pone énfasis en el uso de la fracción como medida, pero a diferencia de la anterior, no se presenta un gráfico que ayude al estudiante a modelar el planteamiento del problema. Para dar respuesta en el inciso (a), se presentan al estudiante dos estrategias, la comparación de los recorridos de Ana y Paty, y la fractura del kilómetro recorrido.

A black and white line drawing of two children, a girl and a boy, riding bicycles side-by-side. The girl is on the left, wearing a headband and a short-sleeved shirt. The boy is on the right, wearing a short-sleeved shirt. They are both looking forward. There are some decorative lines above the boy's head.

Ana y Paty hacen diariamente un recorrido de 1 km en bicicleta por varias calles como entrenamiento para un maratón. Un día que estaban cansadas, Ana solo recorrió $\frac{5}{8}$ de la ruta habitual, mientras que Paty recorrió $\frac{3}{4}$ de la ruta.

a) ¿Quién de las dos recorrió más?
b) ¿Cuánto más recorrió una que la otra?

Figura 10. Actividad 4 para el estudio de las fracciones en primaria.

Para dar respuesta al inciso (b), el estudiante puede hacer una comparación entre las fracciones que Ana y Paty recorrieron y establecer un orden, esto es $\frac{3}{4} > \frac{5}{8}$ en este caso se usa la fracción como número, pero también puede recurrir al aspecto fracturador en el caso que dejen expresadas las particiones e indicadas las fracciones del camino que recorrieron Ana y Paty. El uso de la fracción como operador también se usa para calcular la distancia que cada niña ha recorrido. En este caso, Paty recorrió $\frac{3}{4}$ de un kilómetro, o sea, 0.75 km, mientras que Ana recorrió $\frac{5}{8}$ de un kilómetro, o sea, 0.625 km. Es verdad que las operaciones que aquí se sugieren no son habituales para los alumnos, pero esto puede ser una oportunidad para introducir los números decimales a partir de algo tan familiar para ellos, como es el metro.

Actividad 5

Esta actividad (ver Figura 11), se centra en el uso medida, pero a diferencia de las anteriores, la intención es completar el entero, con el conocimiento de la parte; así, se sabe que 2 km representan $\frac{1}{4}$ del recorrido de Pedro, lo que lleva a identificar que las $\frac{3}{4}$ partes que faltan corresponden a 6 km, por lo que el recorrido total es de 8 km.

Pedro ha recorrido en bici 2 km, que representan $\frac{1}{4}$ del total que debe recorrer.

¿Cuántos kilómetros debe recorrer Pedro en total?

R: _____




Figura 11. Actividad 5 para el estudio de las fracciones en primaria.

Discusión

Es altamente probable que los lectores identifiquen algunas de las actividades propuestas como de muy alta dificultad para el nivel que las estamos proponiendo, y quizá abandonen la idea de emplearlas para sus lecciones. Sin embargo, antes de detenerse y rehusarse a trabajar con los alumnos, les invitamos a reflexionar sobre la pregunta: ¿Qué pueden hacer mis alumnos? Seguramente cuando trabajen con los niños se sorprenderán de las actuaciones que pueden llegar a realizar.

Como experiencia, durante la validación de las situaciones con profesores, tuvimos un comentario del tipo: “los niños no podrán realizar la actividad 5 porque le falta información”. Este hecho nos dejó ver que el profesor no tenía las competencias necesarias para responder este tipo de problemas, pero eso no significa que los niños tampoco las tengan. Al momento de aplicar estas situaciones con niños de 8 años, a manera de cuestionario, pudimos ver respuestas como la que se muestra en la Figura 12, que deja ver las actuaciones de una alumna competente.

Pedro ha recorrido en bici 2 km, que representan $\frac{1}{4}$ del total que debe recorrer.

¿Cuántos kilómetros debe recorrer Pedro en total?

$2 \text{ Km} = \frac{1}{4}$ $4 \text{ Km} = \frac{1}{2}$ $6 \text{ Km} = \frac{3}{4}$
 $8 \text{ Km} = 1 \text{ entero}$




Figura 12. Actuación de una alumna de tercer año de primaria durante el proceso de validación de la actividad 5.

Con lo anterior no pretendemos evidenciar o demeritar el conocimiento o práctica del profesor, solo hacer la reflexión de que, a veces, somos nosotros mismos quienes limitamos la enseñanza por diversas razones. Una de ellas puede ser porque no se tienen actividades que nos guíen para llevar a cabo nuestras clases. En este sentido, se proponen las actividades presentadas como un recurso que ayude a los profesores a enseñar fracciones. Traemos esto a colación porque como lo mencionamos antes, persiste la idea de que las fracciones se siguen enseñando a través de un solo enfoque, particularmente el modelo del pastel, que si bien, con ese enfoque se desarrollan ciertas habilidades, también se dejan de lado otras que se potencian con el empleo de otros modelos.

La enseñanza con el modelo del pastel limita al conocimiento de fracciones propias (Freudenthal, 1983), y también potencia el uso de la fracción como fracturador y más específicamente para establecer una relación de fractura, pero recordemos que hay muchos otros fenómenos que son organizados por las fracciones, así que mientras más se empleen en situaciones de enseñanza, se tendrá un mejor objeto mental sobre ese concepto. Invitamos al lector a que ponga a prueba las actividades aquí presentadas, guiando a sus alumnos tal como se propone en los desafíos matemáticos para poder constituir un mejor objeto mental sobre las fracciones.

Referencias

- Behr, M., Lesh, R., Post, T. y Silver, E. (1983). Rational Number Concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, 91-125. New York: Academic Press.
- Fandiño, M.I. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos*: Bogotá: Magisterio.
- Figueras, O. (1988). Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales (Tesis de Doctorado). Cinvestav, México.
- Figueras, O. (1996). Juntando partes. Hacia un modelo cognitivo y de competencia en la resolución de problemas de reparto. En F. Hitt (Ed.), *Didáctica, investigaciones en Matemática Educativa*, 173-196. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Holland: D. Reide Publishing Company.

- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) (2009). Explorador Excale. Resultados de la evaluación de matemáticas de alumnos de sexto año de primaria en México [consultado 20 de julio de 2015].
- Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundation of rational numbers. En R. A. Lesh, y D.A. Bradbar (Eds.), *Number and measurement, Papers from a Reseach Workshop*, 101-144. Columbus, OH: ERIC/SMEAC.
- _____ (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, 162-181. Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.
- _____ (1993). Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. En T. P. Carpenter, E. Fennema, y Romberg T. A (Eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research*, 49-84. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- _____ (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. En R. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hatstrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teachin*, 323-371. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Petit, M., Laird, R., y Marsden, E. (2010). *A Focus on Fractions: Bringing Research to the Classroom*. New York: Routledge-Taylor Francis Group.
- PLANEA (2015). *Plan de Estudios Nacional de Educación Básica*. Recuperado de <http://planea.sep.gob.mx/ba/>
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Ed.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (págs.61-94). Barcelona: Horsori/ICE.
- Quispe, W., Gallardo, J. y González, J. L. (2010). ¿Qué comprensión de la fracción fomentan los libros de texto de matemáticas peruanos? *PNA*, 4(3), 111-131.
- SEP (2011a). *Guía para la Educadora. Educación Básica*. Dirección General de Desarrollo Curricular (DGDC) y Dirección General de Formación Continua de Maestros en Servicio (DGFCEM). México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.
- _____ (2011b). *Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Primer grado*. Dirección General de Desarrollo Curricular (DGDC) y Dirección

- General de Formación Continua de Maestros en Servicio (DGFCMS). México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.
- _____ (2011c). *Guía para el Maestro. Educación Básica. Primaria. Tercer grado*. Dirección General de Desarrollo Curricular (DGDC) y de la Dirección General de Formación Continua de Maestros en Servicio (DGFCMS). México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.
- _____ (2016a). *Mi álbum. Preescolar. Tercer grado*. México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.
- _____ (2016b). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Primer grado*. México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.
- _____ (2016c). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Segundo grado*. México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.
- _____ (2016d). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Tercer grado*. México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.
- _____ (2016e). *Mi álbum. Preescolar. Segundo*. México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.
- _____ (2016e). *Mi álbum. Preescolar. Primer grado*. México: Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública.
- Siegler, R., Fazio, L., Bailey, D. y Zhou, X. (2013). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences*, 17(1), 151–152.
- Siegler, S., Duncan, J., Davis-Kean, E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., *et al.* (2012) Early predictors of high school mathematics achievement. *Journal of the Association for Psychological Science*, 23(7), 691-697.
- Steffe, L. y Olive, J. (2010). *Children's Fractional Knowledge*. Dordrecht Heidelberg London: Springer New York. DOI: 10.1007/978-1-4419-0591-8.
- Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education. A paradigm of development research*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

- Usiskin, Z. (1979). The Future of Fractions. *Arithmetic Teacher*, 26, 18-20.
- Valenzuela, C., Figueras, O., Arnau, D. y Gutiérrez-Soto, J. (2016). Hacia un modelo de enseñanza para las fracciones basado en el uso de applets. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 5(2), 1-20.
- Valenzuela, C., Figueras, O., Arnau, D. y Gutiérrez-Soto, J. (2017). Mental object for fractions of middle school students with truancy problems. En Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Correo-e: carvaga86@hotmail.com / mgargonza@gmail.com /
anlnala33kd6@hotmail.com