UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN MÉTODOS ESTADÍSTICOS APLICADOS
GENERACIÓN 2019-2021

TEMA

UNA PROPUESTA INTUITIVA VISUAL (EXPERIMENTAL) PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRÍA EN MÉTODOS ESTADÍSTICOS APLICADOS

PRESENTA

DANIEL MEZA BENÍTEZ

DIRECTOR DE TESIS: M. C. MIGUEL APOLONIO HERRERA MIRANDA.

CODIRECTOR: DR. JUAN VILLAGÓMEZ MÉNDEZ.

ASESOR: DR. OCTAVIANO JUÁREZ ROMERO.

ASESOR: DR. SANTIAGO MARQUINA BENÍTEZ

ASESOR: DR. ISRAEL HERRERA MIRANDA.

Acapulco Gro. a 21 de Febrero del 2022

"Conseguimos obtener así la fórmula estadística para conocer aproximadamente la posición de un electrón en un instante determinado. Pero, personalmente, no creo que dios juegue a los dados."

Albert Einstein

"No existe la suerte. Sólo hay preparación adecuada o inadecuada para hacer frente a una estadística."

Robert Heinlein

“En la vida y en la educación nos fijamos metas que nos cuestan esfuerzo y sobre todo dedicación”

Yo

Dedicatoria

La presente tesis está dedicada a mi querida esposa a mis hijas, pero sobre todo a esa personita muy especial que ha llegado a alegrarnos la vida mi nieta Emma, a mis padres, y a todas aquellas personas que me apoyaron en esta etapa, de perseverancia y de superación, gracias.

AGRADECIMIENTOS

Primero que nada, me gustaría agradecer sinceramente la labor incesante de mi director de tesis, el Dr. Miguel Apolonio Herrera Miranda, su esfuerzo, su dedicación, y más que nada su paciencia para llevar a buen fin este trabajo.

Sus conocimientos, sus ideas, su buen humor hacia la forma de trabajar, su perseverancia, su paciencia que han sido un aliciente fundamental para lograr aún más mi formación.

Del Dr. Polo como le decimos me queda el alto grado de responsabilidad, y de perseverancia, en cuanto al sentido académico ya que sin ellos no tendría una formación en el área estadística.

A la Facultad de Matemáticas extensión Acapulco de la cual yo egrese hace tiempo, por abrirme las puertas de nueva cuenta y por todo el conocimiento que me llevo de esta gran institución.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por haberme dado todo el apoyo que necesite durante mi estadía en el posgrado.

También me gustaría agradecer a el cuerpo académico de la maestría y todos los profesores, El Dr. Juan Villagómez Méndez, el Dr. Miguel Apolonio Herrera Miranda, el Dr. Octaviano Juárez Romero, el Dr. Santiago Marquina Benítez, el Dr. Israel Herrera Miranda y el Dr. Lucio Díaz González, les agradezco de antemano su profunda colaboración y el apoyo que he recibido, durante el tiempo que duro la maestría y también por darme la seguridad necesaria para salir adelante en la vida y poder transmitir los conocimientos adquiridos.

Muchas gracias.

Resumen

La presente propuesta tiene como objetivo primordial implementar una forma alterna para la enseñanza de la probabilidad condicional a través de la forma visual. Para poder lograr la presente propuesta se hizo una revisión de la literatura para poder identificar los por menores de la resolución de problemas de parte de los alumnos. Para así poder plantear una propuesta diferente y más eficiente que sirva para que los alumnos desarrollen sus capacidades cognitivas e intuitivas.

Palabras clave: enseñanza, probabilidad condicional, propuesta, intuitiva, cognitiva.

Abstract

The main objective of this proposal is to implement an alternative way to teach conditional probability through the visual form. In order to achieve this proposal, a review of the literature was made in order to identify minors in problem solving by students. In order to propose a different and more efficient proposal that helps students develop their cognitive and intuitive abilities.

Keywords: teaching, conditional probability, proposal, intuitive, cognitive.

ÍNDICE

Contenido

1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación denominado “Una Propuesta Intuitiva Visual (Experimental) Para la Resolución de Problemas de Probabilidad Condicional” es una propuesta que pretende cambiar la manera de abordar los problemas relacionados con la probabilidad condicional, de modo que el estudiante pueda poner en práctica su conocimiento cognitivo e intuitivo y así darle otra forma a la resolución de los problemas.

La probabilidad condicional se considera un factor primordial en la teoría subjetiva de la probabilidad; aun así, desempeña un rol muy importante en los inicios de la probabilidad, donde la parte contraria, y nos referimos a la independencia, es de sumo interés e importancia. Estas definiciones vistas de otro ángulo nos dan claridad y un diferente enfoque. Ya que podemos incluirlas en las diferentes perspectivas matemáticas, filosóficas y educativas. Se contempla y analiza la probabilidad condicional desde otros enfoques, y de las ideas que pueden competir con ella y las diferentes maneras de resolución de problemas. Para poder entender el concepto de probabilidad condicional se requiere de una profunda y muy amplia experiencia para la resolución de los problemas, se necesita conocer bien el concepto, que apenas parecen afectados por la enseñanza.

En lo referente a la didáctica de la probabilidad y estadística, la forma de aprendizaje intuitiva se da a través de explicaciones gráficas visuales, así mismo la forma intuitiva es característica y también se da a través de una serie de explicaciones gráficas visuales incluso aquellos aspectos considerados importantes como son: Bosquejos, dibujos, colores, tablas, codificaciones que permitan una exposición clara y comprensible del problema.

En la revisión de algunas propuestas didácticas, los problemas de probabilidad se presentan de manera textual sin considerar la parte gráfica visual que puede ser de gran ayuda para, la buena comprensión y el buen entendimiento del problema como tal.

A lo largo del tiempo, la probabilidad y la estadística, por la naturaleza de las cosas y los resultados obtenidos en diferentes trabajos de investigación, han atraído fuertemente la atención de matemáticos, investigadores y expertos en los campos de la enseñanza, la enseñanza y el aprendizaje. Por tanto, la práctica docente actual requiere de un método de enseñanza diferente que permita a los estudiantes pensar y aprender de una manera no tradicional; para ello, es necesario dar ejemplos de conceptos y procedimientos que ayuden a profesores y alumnos a establecer una mejor conexión.

Actualmente se identifica que la formación en probabilidad y estadística es muy importante para formar alumnos y ciudadanos que puedan estar posicionados en un entorno de fuerte interdependencia social, política y económica. En este caso, es necesario interpretar gráficos de datos, y la gran mayoría de la toma de decisiones esta generalmente basado en investigación estadística. Las capacidades estadísticas nos proporcionan recursos para analizar datos de manera crítica y formar conocimientos de forma clara sobre la toma de decisiones de las autoridades, empresas y diferentes grupos que impacten con sus decisiones en forma directa a la sociedad. Desde otro punto de vista, la probabilidad y la estadística nos impulsan a ofrecer una imagen más concreta de lo que es la ciencia en este aspecto, que normalmente se ha mostrado a los estudiantes una certeza clara, en la que todo se puede explicar en causalidad.

Sin embargo, la investigación docente ha demostrado que es difícil para los estudiantes aprender en el proceso de comprensión de los conceptos y procedimientos formales relacionados con el azar.

En la actualidad el proceso de Enseñanza-Aprendizaje, el docente se enfrenta al desafío de presentar conceptos de probabilidad condicional en forma clara y objetiva, de manera que los estudiantes puedan comprender y fijar sus conocimientos.

“Los procesos de enseñanza y aprendizaje tienen lugar en diversas instituciones en las cuales el conocimiento matemático adopta significados específicos que condicionan dichos procesos. Sin duda existen procesos mentales que condicionan el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, el centro de atención de la investigación didáctica no debería ser sólo las mentes de los estudiantes, sino también los contextos culturales e institucionales en que tiene lugar la enseñanza. (2003, P 103,104).

La forma en la que se enseña probabilidad, es y sigue siendo de los temas fundamentales en los cuales se llega a presentar con frecuencia un obstáculo al quererlo entender y al mismo tiempo puedan retener los conceptos por parte de los alumnos, es el tema de la probabilidad condicional.

Esto es consecuencia de los siguientes factores: El evento que se presenta en los problemas depende del evento que ha ocurrido, y por lo tanto el algoritmo utilizado se aplica de esta manera. En muchas ocasiones, el resultado de calcular la probabilidad condicional es muy abstracto y es muy difícil de entender, en su gran mayoría los casos se vuelven más difíciles, se aplica sin una comprensión real de los conceptos que se tratan allí. En específico para la probabilidad condicional, se utiliza comúnmente la reducción del espacio muestral en una y dos variables, para lo cual el docente se apoya en la tabla de doble entrada para el caso bivariado para así poder encontrar las probabilidades conjuntas y marginales y desde ahí poder justificar la metodología aplicada para tal propuesta. Hacer que se comprenda y se consolide el conocimiento de este concepto de una forma diferente, fácil, y clara es de suma importancia, ya que obtendríamos una herramienta primordial para el cálculo de la probabilidad, y que a su vez cuando se nos presente la ocasión de aplicar el teorema de Bayes de la probabilidad para eventos independientes y de la probabilidad total que es consecuencia para el tema que se está poniendo en práctica.

La problemática que se da con frecuencia en la enseñanza de Probabilidad Condicional es reconocible y no se puede dejar que el problema siga avanzando, en tanto que en estudios anteriores se nos dice que "es razonable pensar que la malinterpretación o confusión de la probabilidad condicional con otras probabilidades se produzca cuando la tarea o problema se presente a los estudiantes verbalmente. Esto puede afectar a los resultados de investigación; como ya señaló Shaughnessy (1992), las confusiones:" "seems to occur primarily with students' translation of conditional probability tasks, which then affects their understanding of the problem " (p. 473)., (*parece ocurrir principalmente con la traducción de los estudiantes de tareas de probabilidad condicional, lo que luego afecta la comprensión del problema*) nos demuestran la dificultad que tiene una explicación teórica, misma que es un obstáculo para la comprensión, por lo que se propone que para la resolución de problemas de probabilidad condicional se necesita que el alumno profundice en conceptos fundamentales para entender los procedimientos probabilístico que pone en juego un proceso algo más difícil de lo que comprendemos, ya que algunos de los estudiantes deben recordar y aplicar varios conceptos y procedimientos probabilísticos.

La presente Tesis está dividida en 5 capítulos en donde se plantea el problema de la investigación, la problemática específica educativa del aprendizaje de la probabilidad condicional en el nivel universitario de la Universidad Autónoma de Guerrero, la formulación del problema, la justificación, y sus objetivos. Se realizo una investigación de campo en la que se investigó sobre los factores que afectan el aprendizaje de la probabilidad condicional contrastando los objetivos de enseñanza establecidos en los planes y programas de estudio de la materia de probabilidad así como sus respectivas justificaciones para con la raíz del problema, también se buscaron planes de estudio para comprobar que la materia no se imparte como tal, por distintos problemas entre los que destacan que los profesores no estén altamente preparados en esta rama para impartir la clase, o que en muchas ocasiones la pasaban por alto y se enfocaban más en lo primordial para el alumno aunque no se profundizara en esta parte de las estadísticas, las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje no son únicamente de naturaleza cognitiva ya que es necesario utilizar otras estrategias que nos permitan darles seguridad y confianza al alumno para poder poner en práctica lo que se pretende con esta propuesta y de esta manera se pretende con base a objetivos definidos de modo concreto y preciso lograr la presente implementación de la forma intuitiva y visual para abordar problemas de Probabilidad Condicional

CAPÍTULO I

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

¿El objetivo de esta investigación es determinar si la estrategia de enseñanza aprendizaje con carácter intuitivo es una opción para resolver problemas de probabilidad condicional en los alumnos de nivel superior?

El aprendizaje es una herramienta personalizada que se debe de poner en práctica por cada uno de nosotros, y para eso necesitamos valernos de todas nuestras capacidades, dentro de las cuales están la cognitiva, la intuitiva, la heurística, y las empíricas, que son aquellas de las cuales nos vamos a valer para poder desarrollar nuestros conocimientos y habilidades.

Por siglos hemos estado aprendiendo de la manera tradicional tanto en escuelas públicas como en las instituciones privadas, se sigue un mismo patrón de aprendizaje y no trascendemos a otro nivel y tipo de aprendizaje, dichos aprendizajes se contemplan que pueden ser más prácticos cuando tenemos o contamos con técnicas que nos permitan comprender y asimilar mejor el conocimiento, y aquello que se nos enseña en las aulas por parte de los docentes, es por eso que se está proponiendo una forma distinta de aprendizaje que va dirigido hacia los estudiantes, para así lograr los aprendizajes esperados y poder lograr un avance significativo en las capacidades de los jóvenes estudiantes.

No hay un lenguaje apropiado que se considere el correcto para lograr que los alumnos comprendan de manera correcta lo que el docente está transmitiendo en sus sesiones de clase con los alumnos, es por eso que consideramos la propuesta gráfica y visual para la comprensión de los problemas.

Para poder llevar a cabo esta implementación es necesario, darle al alumno la oportunidad para que tenga un adecuado desarrollo que lo lleve a descubrir, conocer, y desarrollar sus capacidades y al mismo tiempo sus habilidades en lo que concierne a la resolución de problemas en el ámbito de estadísticas y específicamente en la probabilidad condicional que es el tema de interés.

La característica principal es centrar al alumno en el proceso de aprendizaje que lo empuje a pensar, sentir y actuar al momento de que se le presente la oportunidad de resolver los problemas, y así enfrentar los desafíos que la experiencia del aprendizaje nos brinda.

2.1. LOS APRENDIZAJES ESPERADOS

En el proceso de Enseñanza-Aprendizaje resulta complejo; como un punto fundamental, resulta importante el interés, y la motivación por parte del alumno. Además de lo anterior influye mucho el contexto social y cultural por parte del alumno, ya que puede ejercer una influencia positiva o negativa para el aprendizaje en el área de matemáticas y particularmente, sobre las nociones de probabilidad condicional.

En términos de profesores, la práctica docente requiere diferentes métodos de enseñanza, hay que dejar que los estudiantes piensen y aprendan de una manera no tradicional. En el proceso de enseñanza se debe buscar el interés de los estudiantes para tener éxito, por lo tanto, es necesario ilustrar conceptos y procedimientos de forma visual que sean útiles para profesores y estudiantes.

Los estudiantes hacen mejores conexiones; el ejercicio y la resolución de problemas no son suficientes en el aula, pero también requiere que los estudiantes se comprometan a invertir tiempo Después de la hora de clase, puede resolver los mismos problemas o problemas más complejos, estableciendo así que generen más conexiones a los conceptos que ya se han visto, para lograr el aprendizaje esperado.

Una experiencia de aprendizaje es aquella que nos lleva a profundizar en los procesos que se van enriqueciendo con el tiempo, esto nos permite abordar de manera sistemática la práctica de un aprendizaje esperado, este aprendizaje se puede realizar y a su vez extenderse no solo en una, sino en varias clases ya que se desarrolla en fases sucesivas, lo cual significa un reto para los alumnos y las alumnas.

El aprendizaje esperado es el conocimiento, las habilidades y las actitudes de la materia que los estudiantes necesitan adquirir o desarrollar para alcanzar las metas específicas.

Para identificarlos, puede hacerse una pregunta: ¿Qué deben saber? ¿Cómo hacerlo y qué actitud deben usar para lograr el desempeño especificado en el propósito específico?

Si es necesario, el aprendizaje esperado se puede introducir para ser desarrollado en forma secuencial.

Las actividades a seguir se definen implementando un conjunto de rutinas de aprendizaje con lineamientos internos entre sí, y cuando los estudiantes logran interactuar con los docentes y / u otros estudiantes para así obtener el aprendizaje deseado.

Esta secuencia requiere que los estudiantes actúen por sí mismos, vinculen sus conocimientos y experiencias previas y hagan algunas preguntas y verifiquen la información del mundo real sobre objetos del conocimiento, en lugar de ejercicios rutinarios o monótonos.

En estos momentos en el que el sistema educativo enfrenta cambios en los estilos de aprendizaje, se necesita que los Docentes sean poseedores de una amplia experiencia en los conocimientos que les permita desenvolverse de acuerdo al cambio que está sufriendo la educación actual, de manera que garanticen en los alumnos aprendizajes realmente significativos que motiven la evolución de las estructuras cognitivas.

Lo expuesto anteriormente indica que “la tarea del educador o maestro no es rápida ni fácil, pero sí imprescindible si se desea lograr un aprendizaje significativo en sus alumnos. Requiere incluso de toda una serie de condiciones objetivas en las escuelas (menos alumnos para cada profesor, etcétera) y aulas. Y de capacidades y condiciones internas de los educadores (psicopedagógicas, diagnósticas, conocimientos y entrenamiento en este tipo de aprendizaje) que, si bien lleva tiempo desarrollarlas, lo más que se necesita es disposición y conciencia de la importancia del mismo” Viera Torres, Trilce (2003).

2.2. ¿QUE SE ESPERA DEL APRENDIZAJE?

Esperamos que el alumno a través de la propuesta sea capaz de valerse de las habilidades que adquirió, y pueda enfrentar la resolución de problemas de una forma distinta a la tradicional y a su vez que estas habilidades lo hagan trascender, que pueda aplicar esta nueva forma a otros ámbitos en la educación.

Para este trabajo, nos apoyamos en la teoría del aprendizaje y bajo situaciones didácticas y el enfoque Ontológico - Semiótico. (Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014)).

Ontológico – La naturaleza del ser, y Semiótico – Como lo transmites o como son los modos en que lo comunicas, en palabras más simples cual es la manera natural de la persona para poder transmitir los conocimientos que has adquirido.

“Este trabajo describe una técnica de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que permite determinar los significados institucionales y personales puestos en juego e identificar posibles conflictos semióticos en la interacción didáctica. La técnica se basa en un modelo ontológico y semiótico para la cognición matemática" (Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014))

En este primer capítulo presentamos un análisis de la realidad del problema que existe entre los alumnos de nivel superior, para abordar los problemas que se les plantean en el aula, y cuál es la forma de resolverlos, lo más sencillo y práctico para los estudiantes es resolverlos de manera matematizada, sin poner en práctica la intuición, como ya es común esta técnica se viene arrastrando de tiempo atrás, esa idea de resolución de problemas de niveles anteriores (nivel medio superior y nivel superior), por lo tanto dejan de lado la forma intuitiva, básica y cognitiva para resolverlos, esta forma puede ser una alternativa más practica para llegar a resultados acertados y concretos para después desarrollarlos en sus diferentes formas, ya que todos tienen formas diferentes de resolver los problemas, se puede resolver a través de imágenes, de cuadros de textos, gráficos, bosquejos, dibujos, tablas de doble entrada, etc.

2.3. LA INTUICION

"Más allá de su comprensión intuitiva, la probabilidad puede contemplarse como razón de posibilidades a favor y en contra, evidencia proporcionada por los datos, grado de creencia lógico o personal, propensión y modelo matemático que nos ayuda a comprender la realidad. El análisis de los diferentes significados históricos de la probabilidad: intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo, lógico, propensión y axiomático (Batanero, 2005; Batanero, Henry y Parzysz, 2005; Batanero y Díaz, en prensa) sugiere que su enseñanza no puede limitarse a una de estas diferentes perspectivas, ya que están ligadas dialécticamente".

2.4. ¿SE PUEDE SER MÁS INTUITIVO?

La intuición resulta ser un atributo sofisticado con demasiada antigüedad, la cual resulta importante para las personas que desean conocer más, de una manera empírica y que no se tengan que esforzar por utilizar otra técnica que les ayude a encontrar el resultado más fácil y más ágil.

Esto es lo que algunas personas llaman una corazonada o instinto místico, y generalmente se demuestra que es correcto. Por eso, las personas que opinan sobre este tema piden tomarlos en cuenta y aconsejan hacerles caso y aprender a utilizarlos, para ayudar a encontrar la solución de un problema de manera diferente.

Al presentar los objetivos del aprendizaje con expresiones matemáticas, y los ejemplos resueltos a los alumnos, estos temas llegan a carecer de una explicación amplia y detallada para que el alumno pueda comprender y resolverlos. La intuición suele fallar poco, en ocasiones un método sencillo y a la vez practico, y si se produce una disonancia, según la psicóloga clínica Mila Cahue (2015, P 53,54,55) “hay que analizar más detenidamente el contexto en el que nos encontramos (cosas, personas, eventos), y el ‘filtro’ (nuestras opiniones, creencias y juicios previos) desde el que estamos analizando esa situación, lo cual requiere tiempo, pero sería lo más correcto”. Por otra parte, afirma que “la intuición sólida es más intensa que un pensamiento pasajero, y va a estar ‘saltando’ mientras no demos una respuesta adecuada a lo que nos está indicando”

Se puede seleccionar una forma de exponer los conceptos apoyados en un entorno grafico-visual, que pueden ir desde ejemplos básicos, intermedios hasta complejos.

3. FORMULACION DEL PROBLEMA

¿Es posible que una propuesta didáctica intuitiva grafica visual pueda mejorar el Aprendizaje de los alumnos sobre probabilidad condicional?

Determinar el grado de aprendizaje de los alumnos, aplicando la propuesta intuitiva grafica-visual para la resolución de problemas de Probabilidad Condicional en los alumnos de nivel superior en contraste con la forma tradicional de la enseñanza, es una tarea algo complicada para determinar ya que los estudiantes tienen distintas formas de absorber el conocimiento y el aprendizaje, por lo cual es necesario esta propuesta practica para impulsar el talento natural de cada uno de ellos.

La forma tradicional de la enseñanza de la probabilidad condicional no ha cambiado a través del tiempo se sigue impartiendo de la manera clásica, cuando ya es importante y razonable realizar un cambio en la enseñanza para lograr que los alumnos consoliden sus conocimientos en esta área.

Dentro de esa misma etapa se requiere que los alumnos adquieran nuevas habilidades intuitivas y cognitivas para que puedan plantear un problema, resolver e interpretar problemas de probabilidad condicional, se necesita que a través de sus talentos ellos mismos puedan realizar las distintas tareas que se les presentan y lo puedan resolver de manera natural.

4. OBJETIVOS

4.1. OBJETIVO GENERAL

- Diseñar una Propuesta Intuitiva Grafico-Visual para la enseñanza de la Probabilidad Condicional en la resolución de problemas para los alumnos de nivel Superior.

4.2. OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Analizar la problemática en el proceso Enseñanza-Aprendizaje de la probabilidad Condicional con el fin de diseñar una propuesta intuitiva para los alumnos del nivel superior.
- Explorar y Aplicar la estrategia de enseñanza intuitiva grafica-visual aplicada a la probabilidad condicional.
- Evaluar si los alumnos del nivel superior mejoran el nivel de comprensión y análisis para resolver problemas de probabilidad Condicional.

5. JUSTIFICACIÓN

La implementación de la forma intuitiva para resolver problemas de probabilidad condicional resulta justificable ya que por parte de los alumnos podría ser una alternativa de aprendizaje que adopten y así pasen a resolver problemas un poco más ágiles, tomando en cuenta su percepción, dejando de utilizar solamente la forma matematizada, misma que es la más utilizada en este campo de la estadística.

Ante esta situación que se presenta y la problemática del alumno con la dificultad para la comprensión y fijación de los conceptos y fundamentos de la probabilidad, así como los escasos textos escritos bajo nuestro entorno cultural y a la deficiente traducción de los mismos que hacen más difícil la comprensión por parte de los alumnos, dificultando el entendimiento de los conceptos matemáticos. Por lo que proponemos esta estrategia esquemática, gráfica y visual que, sin recurrir en primera instancia a las definiciones formales, si no que ir paso a paso asimilando, construyendo y fijando los conceptos de interés. Por lo que presentamos esta propuesta alternativa para la resolución de problemas

La importancia que tiene la probabilidad en la formación académica del estudiante, ha sido planteada por varios autores, como como Gal (2005), quien hacen mención del concepto de la alfabetización probabilística de los estudiantes, esto se refiere, a que tan desarrollado tienen sus conocimientos en esta área, así como sus competencias y actitudes para desenvolverse frente a la comprensión de los eventos aleatorios o azarosos.

Actualmente el Azar es un factor preponderante en la toma de decisiones, “no son pocas las situaciones de la vida cotidiana en que encontramos fenómenos aleatorios o debemos tomar decisiones en las que hay presente incertidumbre, y con frecuencia se toman decisiones aleatorias, sin haber razonado y calculado probabilidades antes, para poder decidir la mejor opción (Batanero, Contreras y Díaz, 2012). También en los periódicos, Internet u otros medios de comunicación aparecen noticias sobre encuestas y otras informaciones de probabilidad, donde un estudiante que no tenga conocimientos de probabilidad difícilmente comprenderá”.

Derivado de lo anterior se tiene contemplado implementar una estrategia de enseñanza gráfico visual para poder facilitar la resolución de problemas de Probabilidad Condicional para que los alumnos de nivel superior sean capaces de consolidar sus conocimientos y así poder analizar, comprender y resolver problemas de Probabilidad Condicional.

5.1. MÉTODOS

La metodología consiste en una prueba de este enfoque de enseñanza en comparación con la forma tradicional. En primer lugar, se hará una prueba diagnóstica a dos grupos de alumnos de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Posteriormente, se enseñarán los mismos contenidos de la probabilidad condicional después a ambos grupos con los diferentes enfoques y al último se hará una prueba final para evaluar los conocimientos adquiridos. Los grupos serán de 15 alumnos cada uno.

Para lo cual se pretende aplicar el método estadístico t de student para la comparación de dos medias.

5.2. DIAGNOSTICAR LAS DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LOS ALUMNOS

Como docentes se puede indicar que lo ideal debería ser que se evaluara la capacidad del alumno para desarrollar lo aprendido en clases poniéndolo en práctica o llevándolo a cabo en situaciones prácticas. Para que esta tarea sea de aplicación se contempla que debe estar diseñada de tal forma que el estudiante use sus propios conocimientos en una situación que resulte diferente para él. Dado que no hubo demasiada profundización con respecto al término que se puso en práctica, suponiendo que los docentes se refieren a situaciones de la vida cotidianas o que están relacionadas con el futuro en el ámbito laboral de los estudiantes. Este último aspecto tiene relación con la Evaluación real, cuya función principal es que nos permite examinar el grado de desempeño que tienen los estudiantes en forma directa y por lo tanto hay la posibilidad de realizar inferencias válidas acerca de cómo se desenvuelven los estudiantes en el mundo adulto o profesional (Wiggins, 1990).

Una vez que identificamos estos aprendizajes, los docentes que participan deberían de establecer un grado de comprensión con los aprendizajes asignados en los programas, pero se tuvieron dificultades debido a que, los aprendizajes en los programas son demasiado amplios, otros muy obsoletos, y en los demás casos de plan no estaban presentes

En la actualidad la manera en la que se emprende la instrucción de estos conceptos continúa siendo de manera tradicional: pizarrón, profesor, alumno, siendo estos tres elementos que la componen. Se llenan los pizarrones con teoría y se complementa con un discurso en la que los alumnos se adormecen al no interesarle la presencia significativa de los conocimientos de probabilidad y el papel del estudiante se centra en copiarlos y memorizarlos, quedando sin ninguna duda en el olvido de estos tanto a corto como a mediano plazo para los alumnos.

La enseñanza tradicional que aun en la actualidad algunos docentes siguen utilizando es vista por algunos alumnos como rutinario, como repetitivo, y para lo cual se pretende con esta propuesta dar un giro a la educación de los alumnos, dejar que el alumno sea protagonista y que interactúen con el docente para así lograr que se interesen en la materia y se pueda lograr un aprendizaje significativo.

5.3. ¿CUALES SON LAS DIFICULTADES EN LOS ALUMNOS?

Para poder saber cuáles son las dificultades de los alumnos se propone el diseño de un cuestionario dirigido a los alumnos para detectar las principales dificultades en el aprendizaje de la probabilidad condicional por parte de los alumnos para:

- La comprensión de problemas
- Identificación de datos (eventos probabilísticos)
- Aplicar definiciones y axiomas de Probabilidad de forma correcta
- Interpretación de resultados
- Comprobación

De manera intuitiva: aplicando la intuición, la capacidad de comprender y percibir algo de forma inmediata e íntima, sin tener que razonar demasiado sobre ello.

Cuando se procede de manera natural, la gran mayoría de las personas utilizan la intuición para poder decidir en cualquier momento en el que se presenta. Muchos “builders” (constructor de diseño) atraen a sus clientes con este tipo de recurso que les da presencia y confianza para poder resolver las situaciones de una manera diferente. En la actualidad a esta cualidad se le denomina "conocimiento", y sigue siendo aceptando por ser una característica personal de la información intuitiva. Si aprendemos a confiar en la intuición la consideramos como esencial, y como tal, su utilidad se vuelve más práctica, cuando más la utilizamos nos ayuda de una manera practica y nos da la pauta para saber cómo y que debemos hacer en las diferentes situaciones en las que se nos presente la ocasión de aplicarla en un case particular.

Otra de las situaciones a las que se enfrentan los alumnos es cuando el texto de un libro está en otro idioma, al hacer la traducción se pierde la esencia de lo que en realidad quiere transmitir el autor, se enfrenta al problema de confundir los conceptos y los enunciados ya sea de problemas o teoremas, un ejemplo puede ser que la redacción los confunda en la aplicación del resultado de un problema, también al momento de visualizar un problema no puedan identificar la forma de codificación de los casos, los bosquejos o imágenes también resultan confusas para los alumnos,

5.4. PROPUESTA

La propuesta nos muestra que las matemáticas no son suficientes para enseñar probabilidades de manera eficaz. Específicamente, el conocimiento de la definición correcta del concepto de probabilidad que evaluamos en este trabajo es parte de la experiencia del contenido, como el conocimiento general básico. Por lo tanto, considero que la aplicación de esta técnica nos sirve para la correcta interpretación y asimilación del concepto de Probabilidad Condicional.

En la propuesta del análisis se describe el diseño y el contenido como la forma, la aplicación y la valoración de un proceso de enseñanza dirigida y enfocada a la comprensión de los medios probabilísticos básicos en la enseñanza técnica a nivel superior. La proposición que hacemos está sustentada en los resultados de algunas tareas de investigación en el tema de las dificultades de enseñanza-aprendizaje, visto desde otro panorama y del punto de vista constructivista del aprendizaje de los alumnos del área de matemáticas y estadísticas para la concepción y correcta comprensión del aprendizaje. Para lo cual facilitamos y justificamos por medio de pruebas de que esta secuencia de enseñanza, junto con su metodología de aplicación en el aula, puede lograr que los estudiantes adquieran una mayor capacidad de razonamiento probabilístico.

“Actualmente se acepta que la formación probabilística y estadística es importante para la formación de ciudadanos adultos capaces de orientarse en un entorno de fuertes interdependencias sociales, políticas y económicas, donde se precisa interpretar gráficos de datos y donde con frecuencia las decisiones se toman sobre la base de estudios estadísticos. La competencia estadística proporciona recursos para analizar datos críticamente y para formarse una opinión fundamentada acerca de las decisiones que toman las administraciones, las empresas y otros colectivos, así como acerca de la marcha general de la sociedad. Además, la probabilidad y la estadística contribuyen a aportar una imagen mucho más equilibrada de la ciencia, que tradicionalmente ha presentado ante el alumno un carácter marcadamente determinista en el que todo es explicable en términos de causas y efectos. Razones como las apuntadas indican la importancia de que los estudiantes fortalezcan sus competencias matemáticas generales mediante competencias específicas en probabilidad y estadística. (Batanero et al., 1997; Sáenz, 1998; Scholz, 1991; Serrano et al., 1996; Borovcnick et al., 1991; Borovcnick y Peard, 1996). Sin embargo, la investigación didáctica viene señalando que los estudiantes tienen dificultades para lograr un aprendizaje con comprensión de los conceptos y procedimientos formales relacionados con el azar”

(Batanero et al., 1997; Sáenz, 1998; Scholz, 1991; Serrano et al., 1996; Borovcnick et al., 1991; Borovcnick y Peard, 1996).

5.5. RESUMEN

Los resultados obtenidos nos sugieren que "la estadística debiera enseñarse en conjunción con material sobre estrategias intuitivas y errores inferenciales de razonamiento" (Diaz; De la Fuente, 2007, p. 281). Dada la importancia de entender y utilizar correctamente la probabilidad condicional en un diagnóstico clínico, por ejemplo, y así hacer una evaluación concreta y una toma de decisiones adecuada, así también como en la comprensión de la inferencia para la deducción de resultados.

"Totohashina (1992) analizo las estrategias intuitivas de 67 estudiantes de secundaria al enfrentarse a un problema bayesiano, la más frecuente de las cuáles fue cambiar el espacio muestral de referencia y a continuación aplicar la regla de Laplace, lo que implica, en la práctica la fórmula de Bayes. Sin embargo, sólo el 25% de alumnos fue capaz de dar una respuesta correcta".

Para acordar y demostrar las dificultades en este tipo de dilemas en los ejercicios, Totohashina observo los métodos y elegio la forma correcta para resolver el problema. Observó que, al disponer de una tabla de doble entrada (tabla de contingencia), se les complica la concepción de la esencia y posterior secuencia de algunos problemas, porque lo que queda en primer orden es la intersección de los dos eventos y eso puede llevar a los alumnos a malinterpretar la probabilidad condicional y la conjunta.

Sin embargo, la Psicología del razonamiento, así como algunas investigaciones recientes en aprendizaje pedagógico de la probabilidad presentan la existencia de intuiciones equivocadas, una desviación del razonamiento y errores de interpretación así mismo también en la aplicación de este concepto. (Tarr y Lennin, 2005). Varios de ellos están bastante amplios y una responsable enseñanza de la probabilidad resulta escaso para superarlos.

6. HIPÓTESIS

Bajo esta estrategia de enseñanza los alumnos mejoran en la resolución de problemas de probabilidad condicional y problemas que incluyen al teorema de bayes.

7. ALCANCES Y LIMITACIONES

Esta investigación es un estudio de caso por lo tanto no se pueden hacer generalizaciones estadísticas lo cual es una limitante sin embargo se sugiere llevar a cabo un estudio bajo el rigor estadístico.

8. ORGANIZACIÓN DE LA INVESTIGACION

Primera etapa: Presentación de conceptos, definiciones y fundamentos de la probabilidad condicional y teorema de Bayes bajo el principio de esta propuesta didáctica.

Segunda etapa: Presentar ejemplos de planteamiento y resolución de problemas de probabilidad condicional y aplicación del teorema de Bayes, resaltando los fundamentos de la propuesta grafico visual, aplicados a los problemas.

Tercera etapa: Aplicar reactivos de problemas donde los estudiantes de forma individual, autónoma y de grupo planteen y resuelvan problemas de probabilidad condicional, lo que permitirá visualizar con los resultados el grado de comprensión de esta propuesta.

Cuarta etapa: Evaluar los resultados para saber si la propuesta es favorable y a su vez trae beneficios en los estudiantes de nivel superior.

CAPITULO II

9. MARCO CONCEPTUAL

DEFINICIONES BASICAS

9.1. DEFINICIONES FORMALES DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

La probabilidad es considerada como una magnitud numérica de la eventualidad de que ocurra un suceso. Por tanto, las probabilidades son en consecuencia el tamaño del grado de incertidumbre asociado con cada uno de los sucesos primeramente enunciados. Si cuenta con las probabilidades, tiene la capacidad de determinar la posibilidad de ocurrencia que tiene cada evento. La probabilidad considera los valores que se consideran en una escala de 0 a 1. Los valores aproximados o cercanos a cero nos muestran que las posibilidades de que pueda pasar un evento son muy escasas. En tanto los valores que se encuentran aproximados a 1 nos muestran que es casi evidente que el suceso vaya a ocurrir. Algunas probabilidades entre cero y uno nos indican diferentes grados de posibilidad de que suceda un evento.

"La frecuencia relativa de A condicionada a la ocurrencia de B se define considerando únicamente los casos en los que aparece B, y viendo en cuántos de estos casos ocurre el suceso A; es, por tanto, igual a la frecuencia de ocurrencia conjunta de A y B, partida por el número de veces que ha ocurrido B". (Daniel Peña, Fundamentos de Estadística, P.128)

Cuando hablamos de los fundamentos de la teoría de probabilidad tenemos que hacer mención de las técnicas de conteo.

Principio aditivo: Es un método de conteo que nos concede hacer mediciones de cuántas formas podemos desarrollar una actividad que, a su vez, tiene diferentes opciones para llevarla a cabo, de las cuales podemos seleccionar solo una a la vez. El principio aditivo explica lo siguiente: Si A es un suceso que tiene "a" formas de ser consumado, y B es otro suceso que tiene "b" formas de llevarlas a cabo, y C es otro evento que tiene "c" formas de llevarlas a cabo, entonces la solución estará dada por:

a + b + ……. c maneras o formas de ser realizado

El principio aditivo también se puede explicar en términos de probabilidad de la siguiente forma: la probabilidad de que ocurra un suceso A o un suceso B, lo cual se expresa por $P(A \cup B)$, aseverando que no puede ocurrir A al mismo tiempo que B, viene dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Principio multiplicativo: Si se desea llevar a cabo una tarea que consta de “r” pasos, en donde el primer paso de la tarea a realizar puede ser llevado a cabo de N_1 maneras o formas, el segundo paso de N_2 maneras o formas y el r-ésimo paso de Nr maneras o formas, entonces la solución estará dada por:

N_1 x N_2 x ....x Nr maneras o formas

El principio multiplicativo es una destreza que se utiliza para descifrar problemas de conteo para hallar la solución sin que sea necesario contar sus elementos. Es conocido también como el principio fundamental del análisis combinatorio; se basa en la multiplicación continua para determinar la forma en la que puede acontecer un evento.

Este principio establece que, si una decisión (d1) puede ser tomada de n maneras y otra decisión (d2) puede tomarse de m maneras, el número total de maneras en las que pueden ser tomadas las decisiones d1 y d2 será igual a multiplicar de n * m. Según el principio, cada decisión se realiza una tras otra: número de maneras = N_1 * N_2… * Nx maneras.

Notación Factorial: La Notación factorial está representada por el signo de exclamación “!” que se coloca detrás de un número. Este símbolo quiere decir que hay que multiplicar todos los números enteros positivos que hay entre ese número y el 1.

Los números factoriales se utilizan sobre todo en combinatoria, para calcular combinaciones y permutaciones. A través de la combinatoria, las factoriales también se suelen utilizar para calcular probabilidades. Ejemplo:

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Permutaciones: Son eventos de tipo multiplicativo, donde la cantidad de posibilidades va siendo cada vez menos y si interesa el orden de una permutación, y a su vez es un arreglo de un grupo de objetos en un orden concreto. Se calcula con la siguiente formula:

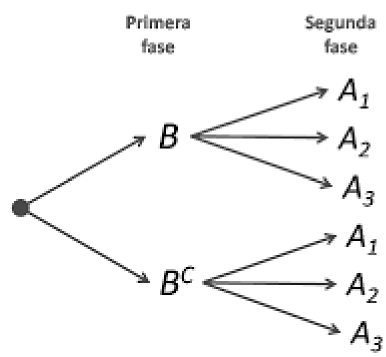
$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Donde:
n = número de elementos diferentes disponibles.
r = número de elementos seleccionados para cada posición.
n! = factorial del número de elementos diferentes disponibles

Combinaciones: Una combinación, es un orden de elementos en donde no nos interesa el lugar o posición que ocupan los mismos dentro del orden. En una combinación nos importa formar grupos y el contenido de los mismos.
La fórmula para conocer el número de combinaciones es:

$$nCr = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Diagrama de árbol: Un diagrama de árbol es una representación gráfica de un experimento que consta de n pasos, donde cada uno de los pasos tiene un número finito de maneras de ser llevado a cabo.



9.2. LA PROBABILIDAD CONDICIONAL

"La probabilidad condicional puede definirse con diversos grados de formalización. Intuitivamente podemos decir que la probabilidad condicional P(A/B) de un suceso A dado otro suceso B es simplemente la probabilidad de que ocurra A sabiendo que B ha sucedido. Desde un punto de vista más formal se define mediante la expresión". (Maury, 1986)
(1)

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B), \text{ siempre que } P(B) > 0.$$

Un concepto relacionado con esta definición es el de independencia. Matemáticamente se puede inferir de la regla del producto de probabilidades, mediante la definición (2).

(2)

A y B son independientes si y sólo si P (A $\cap$ B) =P (A) x P(B), Intuitivamente también se relaciona con el de probabilidad condicional, ya que dos sucesos son independientes si la probabilidad de uno de ellos no cambia al condicionarlo por el otro (definición intuitiva, “a priori” de independencia, según Maury, 1986).

Estas definiciones no tienen dificultad de comprensión, desde el punto de vista matemático, ya que no requieren cálculos complejos. Pero, desde un punto de vista psicológico y didáctico son difíciles, especialmente al aplicarlas en la resolución de problemas y toma de decisiones.

En muchos problemas, especialmente en fenómenos aleatorios que tienen lugar con el tiempo, estamos interesados en calcular las probabilidades de eventos utilizando el conocimiento parcial de que algún otro evento ya ha ocurrido. Este tipo de probabilidades se llaman probabilidades condicionales, y los definiremos y estudiaremos sus propiedades y aplicaciones en esta sección.

“Una forma simple e intuitiva de comenzar es con el siguiente ejemplo. Por unos cuantos años, el estado de Illinois ha estado involucrado en una batalla a veces amarga por una propuesta de tercer aeropuerto en el área metropolitana de Chicago. El objetivo es ayudar a aliviar la carga sobre Aeropuertos de O ‘Hare y Midway. Peotona en el área suburbana sur a menudo se menciona como un posible sitio para el nuevo aeropuerto. Suponga que una encuesta obtuvo respuestas a la propuesta de cuatro regiones: norte y noroeste de los suburbios de Chicago, la ciudad misma, suburbana sur y suroeste Chicago e Illinois "del estado" (un uso extraño del término pretende significar algo fuera del área de Chicago). El número de personas conjuntamente en cada región y opinión La categoría se encuentra en la tabla a continuación y los totales se calculan para cada fila y columna”. (Kevin J. Hastings, Introduction to Probability with Mathematica, Second Edition (2010)).

	A favor	**Opuesto**	**No le importa**	**Total**
Suburbios del Norte	85	34	20	139
Chicago	126	28	64	218
Suburbios del Sur	12	49	5	66
Estados Bajos	43	72	25	140
Total	266	183	114	563

Se toma una muestra aleatoria de un individuo del grupo de 563 encuestados.

Debido a que hay 183 que se oponen a la propuesta del aeropuerto de Peotona, la probabilidad de que la muestra individual se opone al nuevo aeropuerto es de $183/563 \approx .33$. Pero supongamos que se sabe que el individuo muestreado es de los suburbios del sur. Entonces solo las 66 personas en la línea 3 de la mesa es elegible, entre los cuales 49 se oponen a la propuesta. Por lo tanto, la condicional probabilidad de que el individuo muestreado se oponga al aeropuerto de Peotona dado que él o ella vive en los suburbios del sur es de $49/66 \approx .74$, que es mucho mayor que la probabilidad incondicional.

La definición de probabilidad condicional se puede reescribir como:

$$P[A \cap B] = P[A] \,.\, P[B \mid A]$$

que se puede utilizar para calcular probabilidades de intersección. Uno piensa en una cadena de eventos en cuál A sucede primero; la probabilidad de que también ocurra B es la probabilidad de A multiplicada por probabilidad de B dada A". (Kevin J. Hastings, Introduction to Probability with Mathematica, Second Edition (2010))

La primera evidencia sobre cómo se relacionan las ideas con la percepción de probabilidad condicional, sugerida por (Pollatsek et al. (1987)), cuando a los alumnos se les pide resolver problemas, es informada en Arnau (2012) y Edo (2014). Otros estudios nos indican también que la resolución de problemas en los que están implicadas a la vez las probabilidades simple, conjunta y condicional, cualquiera que sea el nivel académico de los estudiantes, es una tarea difícil (Carles et. al, 2009; Díaz & Batanero, 2009; Edo, 2014), incluyendo entre ellos a futuros profesores de matemáticas con una alta formación (Contreras, 2011; Huerta et al. 2011). Además, estudiantes que pertenecen a dichas muestras malinterpretan por igual cantidades conocidos como desconocidas, así como las relaciones entre ellas (Huerta, 2014). Edo (2014) ya establece que estudiantes de 15 años no parecen ser conscientes de que la probabilidad condicional y la probabilidad conjunta son dos conceptos diferentes puesto que, por ejemplo, son capaces de dar respuestas numéricas correctas a probabilidades condicionales, pero describiéndola como si fueran probabilidades conjuntas.

9.3. LOS AXIOMAS DE PROBABILIDAD

Según Kolmogórov (Definición axiomática de probabilidad) “Las situaciones que hemos discutido dentro de este tema ilustran tres postulados básicos de la probabilidad, a los que se conoce como *axiomas de probabilidad*, lo que en lenguaje matemático significa que son proposiciones que por su carácter evidente no requieren demostración. Constituyen, por decirlo de alguna manera, “las reglas del juego”, sin importar si estamos trabajando una probabilidad subjetiva o empírica, o si seguimos los postulados de la probabilidad clásica”. (1933). “Estos axiomas, que constituyen el cimiento de la teoría moderna de probabilidades, fueron propuestos por el matemático ruso Kolmogorov y se expresan de manera formal en los siguientes términos” (Definición axiomática de Probabilidad, Kolmogórov,1933).

1) Para todo evento A, $P(A) \geq 0$

2) Si Ω representa el evento universo, entonces $P(\Omega) = 1$

3) Dados dos eventos, A y B, ocurre que $P (A \cup B) = P(A) + P(B) - P (A \cap B)$

Claramente, el *primer axioma* nos indica que no hay probabilidades negativas; el segundo, que ningún evento tiene una probabilidad mayor a uno.
A partir de ellos, se tienen otros resultados importantes, tales como:

a) $P(\phi) = 0$, donde ϕ representa el conjunto vacío.
b) $P(Ac) = 1 - P(A)$

“En el segundo de estos resultados estamos haciendo referencia a eventos complementarios”. Si Ω es el evento universo, entonces, para todo evento A existe un evento complemento constituido por todos aquellos resultados del espacio muestral que no están en A, con la propiedad de que $A \cup A^c = \Omega$, por lo que $P (A \cup A^c) = P(\Omega)$, de modo que $P (A \cup A^c) = 1$.” (Definición axiomática de Probabilidad, Kolmogórov,1933).

En consecuencia, de acuerdo con el axioma (3)

$$P (A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) – P (A \cap A^c),$$

$$\rightarrow 1 = P(A) + P(A^c) - P(A \cap A^c)$$

Sin embargo, $P(A \cap A^c) = P(\phi)$ y de acuerdo con el resultado (a), esta probabilidad es cero. Por lo tanto.

$$1 = P(A) + P(A^c)$$

De donde, al despejar, queda:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Andrei Kolmogorov

• Un axioma de probabilidad es el componente principal de un sistema de condiciones que deben cumplirse y junto con las pautas de inferencia especifican un sistema deductivo, para que una función determinada sobre un conjunto de eventos determine sus probabilidades.

• Los siguientes axiomas fueron formulados por el matemático ruso Kolmogórov. Por lo que se los denomina axiomas de Kolmogórov.

- Axioma 1.- $Para\ todo\ evento\ S$, $0 \leq (S) \leq 1$
- Axioma 2.- $(S) = 1$
- Axioma 3.- Si $A1\ y\ A2$ son eventos mutuamente exclusivos, entonces:

"Supongamos que S es un espacio muestral y P una función de valores reales definida en ε. Entonces P se la denomina función de probabilidad, y (A) es la probabilidad del evento A." (Santalo, 2013).

"Los axiomas de probabilidad son las condiciones mínimas que deben verificarse para que una función que definimos sobre unos sucesos determine consistentemente valores de probabilidad sobre dichos sucesos." (Reitsch, 2014)

Pierre Simón Laplace

Regla de Laplace: en el caso de que todos los resultados de un experimento aleatorio sean de igual probabilidad, Laplace define la probabilidad del evento A como el cociente del número de resultados favorables y el número de resultados del evento A en el experimento. posibilidad.

Por tanto, podemos resumirlo utilizando la siguiente fórmula:

$$P(A) = \frac{Casos\ favorables\ a\ A}{Total\ casos\ posibles}$$

Si lanzamos un dado y consideramos el suceso **A="obtener un 3"**, tenemos que:

Casos favorables a **A**= $\{3\}$

Total, de casos posibles= $\{1,2,3,4,5,6\}$

Por tanto, la probabilidad del suceso **A** sería:

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

Experimento aleatorio: es un experimento en el que no se puede predecir previamente el resultado. Por ejemplo, el lanzamiento de un dado.

Espacio muestral: son todos los posibles resultados del experimento. En nuestro ejemplo, el espacio muestral estaría compuesto por estos resultados: "obtener un 1", "obtener un 2", "obtener un 3", "obtener un 4", "obtener un 5" y "obtener un 6".

Suceso: es cualquier parte del espacio muestral. Algunos sucesos podrían ser: "obtener un 3", "obtener un número par", ...

Dentro de los sucesos destacamos:

- **Suceso seguro**: Es el que siempre se verifica. Por ejemplo, un suceso seguro sería "obtener un número menor que 7".

- **Suceso imposible**: Es el suceso que no se puede obtener. Por ejemplo, un suceso imposible sería "obtener un número mayor que 10".

- **Suceso contrario:** El suceso contrario a un suceso **A** es el que se verifica cuando no se verifica **A**. Por ejemplo, si A="Obtener un 4", el suceso contrario de A se escribe $\overline{A}$. Así, en este ejemplo y $A = \{4\} \quad \overline{A} = \{1,2,3,5,6\}$

- **Suceso unión**: Es el suceso que se obtiene por unión de otros. Por ejemplo, un suceso unión sería "obtener un 1 o un 2".

- **Suceso intersección**: Es el suceso que se obtiene cuando se verifican otros dos. Por ejemplo, el suceso intersección de: "obtener un número par" y "obtener un número mayor que 3" sería el suceso "obtener 4 o 6".

9.4. INTUICIÓN

Es la facultad de comprender las cosas al instante, sin necesidad de realizar complejos razonamiento. El término también se utiliza para hacer referencia al resultado de intuir: “En realidad no sabía que ibas a estar allí; fue pura intuición”, “Nunca supe cuál era la fórmula química; simplemente mezclé los ingredientes por intuición”. (Julián Pérez Porto y Ana Gardey. Publicado: 2009. Actualizado: 2012)

9.5. ¿LA INTUICIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS?

Cuando reconocemos que la intuición está basada en las propias creencias epistemológicas, permite que los estudiantes acepten o no la incertidumbre (Fulmer, 2014), es muy poca la atención sobre qué papel juega la intuición en el saber de la probabilidad en los estudiantes de nivel superior. Esta negligencia contradice el impacto potencial del significado intuitivo de probabilidad en la construcción del conocimiento probabilístico.

9.6.LA INTUICIÓN: INFERENCIA ESTADÍSTICA O «ATAJO» HEURÍSTICO

Desde tiempo atrás el concepto de INTUICION comenzó a tomar otro rumbo con respecto a las interpretaciones filosóficas, ya que se consideraba como una interpretación inmediata de las verdades universales, que resultan ser una inspiración de la creatividad, de una forma rápida de como representar coordenada en un mapa, etc., Actualmente se relaciona la intuición con el pensamiento cognitivo de pensamiento rápidos, discrecionales y a veces dictadas por el subconsciente, Esto puede explicarse por una "generalización" llamada heurística (un método fácil de entender para aprender, descubrir y resolver problemas, aunque puede ser incorrecto, puede ser apropiado en determinadas circunstancias inciertas).

La construcción de este concepto se atribuye en gran medida al influyente psicólogo de la Universidad de Princeton y ganador del Premio Nobel Daniel Kahneman (Daniel Kahneman) en su exitoso libro "Pensar rápido, pensar despacio". (2011) difunden el argumento de que los sistemas (o modelos) de pensamiento se caracterizan todos en términos evolutivos. Aunque la naturaleza analítica y racional del Sistema 2 es poco frecuente y se basa en reglas, tiene un desarrollo evolutivo relativamente reciente, mientras que la naturaleza evolutiva del Sistema 1 es más básica y se considera esencial para la supervivencia y la adaptabilidad, y tiene la capacidad de responder automáticamente. Efectivo casi de inmediato y estereotipado. Es este sistema el que está conectado con la intuición.

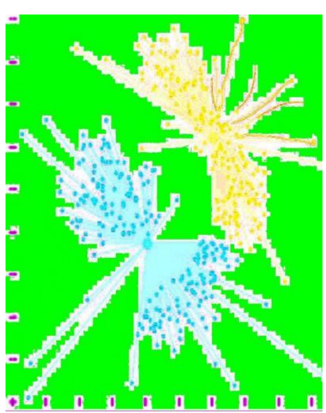
Sin embargo, el juicio intuitivo también está relacionado con el razonamiento inductivo. En este caso, se caracteriza por una serie de "inferencias flexibles basadas en información estadística", que pueden ir de la generalidad a la particularidad y viceversa. En cualquier caso, se cree que este tipo de razonamiento estadístico intuitivo se desarrolla a través de los aportes de la experiencia, la formación o la orientación formal, y con la ayuda de avances en el lenguaje y el conocimiento.

Sin embargo, algunos estudios recientes han demostrado que incluso la forma más básica de intuición estadística puede ser que los humanos no sean la única característica evolutiva.

Por ejemplo, en 2007, el equipo de Vittorio Girotto, un experto cognitivo de la Universidad IUAV en Venecia, Italia, trabajó con bebés y niños y descubrió que, aunque los niños tienen cierta intuición. En uno de los experimentos, permitieron que un bebé de 12 meses observara a uno de los investigadores y pusieran tres bolas amarillas y una azul en un recipiente. Luego sacó una pelota y el bebé expresó su sorpresa de que era azul (no amarilla). Sin embargo, cuando se modifica el experimento para niños de tres y cuatro años, se les puede preguntar de antemano de qué color creen que saldrá la pelota del recipiente, por lo que la mayoría de las respuestas son aleatorias. Además, aunque los niños mayores pasan la prueba, no pueden resolver con éxito la prueba más compleja del razonamiento probabilístico.

Por supuesto, Kahneman no está del todo de acuerdo con que la intuición sea probabilística. Desde la década de 1970, Kahneman ha estado trabajando con el psicólogo ahora perdido Amos Tversky para estudiar la psicología del juicio y la toma de decisiones. Comenzó a estudiar la base cognitiva del error humano. Este punto de vista muy común. Los dos científicos concluyeron que, por lo general, los humanos no emiten juicios ni toman decisiones de manera coherente con los requisitos de la lógica formal, la teoría de la probabilidad y la estadística, sino que utilizan algún tipo de "heurística", aunque ayuda Hacer juicios y decisiones eficaces también puede conducir a errores, que se denominan "falacias", "prejuicios" o "ilusiones cognitivas".

Por ejemplo, en un estudio de 1972, estos investigadores encontraron que incluso los adultos con educación formal no podían calcular correctamente una secuencia de pliegue determinada (similar a un alfiler) [cabeza-cabeza-cabeza-cola-cola -cola] Cuando estas dos posibilidades aparecen por igual, puede aparecer en otra forma de "cabeza-cola-cabeza-cola-cola-cabeza". Según Kahneman y Tversky, esta "ilusión cognitiva" se debe a la función heurística. Aunque la función heurística es beneficiosa, es bastante rígida y puede que no refleje con precisión la verdadera probabilidad de los hechos en la vida real.



Asimismo, el filósofo Thomas Sturm de la Universidad Autónoma de Barcelona señaló que Kahneman y Tversky creían que “la gente tiene intuiciones erróneas sobre las leyes de la probabilidad”. Sin embargo, el filósofo añade: “Aprenden de Realmente no explicó su concepto de intuición, más allá de las "tres intuiciones diferentes"; de manera sucinta: juicios hechos a través de razonamientos informales y no estructurados; relacionados con nuestro modelo del mundo y en nuestro comportamiento normal Reglas formales o hechos naturales compatibles con las reglas o procedimientos aplicados en nuestra conducta normal.

A pesar de esto, Sturm planteó una pregunta sobre la inclusión de la heurística de Kahneman, en lugar de usar reglas formales en el Sistema 1, mientras cita la investigación de Girotto (Girotto) antes mencionada y otras sugerencias. “De los bebés e incluso de los gorilas son estadísticos intuitivos. "

Uno de los estudios se publicó en 2013, con la participación de Hannes Rakoczy de la Universidad de Göttingen y Josep Call del Instituto Max Planck de Antropología Evolutiva, verificando que chimpancés, gorilas y otros gorilas obtienen sus favoritos a través de compensaciones. Las probabilidades de alimentos (como plátanos) en lugar de alimentos menos populares (como zanahorias) toman la decisión. En una serie de siete experimentos, descubrimos además que estos simios pueden hacer inferencias estadísticas flexibles de situaciones generales a situaciones especiales.

Rakoczy *et al*. enfatizaron en su artículo que estas inferencias se basan en información estadística real, basada en la distribución de frecuencias relativas en la población, en lugar de frecuencias absolutas. Esto sugiere que los primates estudiados pueden hacer inferencias estadísticas para generalizar.

Otro estudio que puede apoyar la posibilidad de que ciertos juicios intuitivos directos se basen en ciertas reglas de probabilidad innata es un estudio reciente realizado entre adultos mayas en Guatemala, aunque la persona aún no ha recibido instrucción formal en matemáticas. Aún no han aprendido a leer, por lo que son tan exitosos como los adultos italianos en predecir la probabilidad de eventos aleatorios y han recibido educación maya formal para niños.

Esta investigación también fue dirigida por Laura Fontanari de la Universidad de la Unión Internacional para la Conservación de la Naturaleza en Venecia y estuvo dirigida a adultos de las tribus mayas k'iche y kaqchikel que no habían recibido ningún idioma ni matemáticas. Educación formal. La prueba consiste en predecir el color de una pieza de madera extraída al azar del contenedor. Por ejemplo, si el recipiente contiene tres fragmentos azules y un fragmento amarillo, la mayoría de los participantes creen que el fragmento extraído al azar debe ser azul.

Sin embargo, además, los adultos mayas también pueden actualizar sus predicciones cuando reciben nueva información, lo que demuestra que tienen una forma flexible de pensar. En uno de los experimentos, una olla contenía cuatro piezas de madera cuadradas que eran todas rojas y cuatro piezas redondas de madera, una de las cuales era roja y las otras tres eran verdes. Los participantes calcularon que la aparición de rojo es más probable, independientemente de su forma. Y, cuando se enteraron de que el objeto redondo había sido sacado de la olla, estos voluntarios actualizaron su decisión para predecir la apariencia del objeto verde.

Como señaló Girotto en la revista Nature, los resultados de estos experimentos pueden estar relacionados con la forma en que se expresa la tarea. En otras palabras, la prueba de Kahneman y Tversky alguna vez implicó una comprensión formal de los porcentajes, por el contrario, la prueba que se informa aquí se basa más en la percepción visual. Sin embargo, Sturm señaló otra posibilidad, es decir, "Algunos juicios intuitivos son en realidad guiados por ciertas reglas lógicas (leyes de 'no contradicción', métodos consuetudinarios, etc.), en lugar de simplemente seguirlas".

9.7. ¿PERO QUE ES HEURISTICA?

Heurística:

El conjunto de técnicas o métodos para resolver el problema se llama heurística. La palabra heurística se originó en el griego *ὑύρίσκειν*, que significa "encontrar, inventar".

La heurística se considera un arte inventado por los seres humanos, cuyo propósito es encontrar estrategias, métodos y estándares que puedan resolver problemas a través de la creatividad, el desacuerdo o el pensamiento lateral.

De igual forma, es cierto que el método heurístico se basa en la propia experiencia del individuo y en la experiencia de otros para encontrar la solución más factible.

Por ejemplo, la heurística puede verse como una teoría que estimula el pensamiento de los individuos responsables de analizar todos los materiales recopilados durante la investigación.

En este sentido, es cierto que se relaciona con la toma de decisiones para solucionar el problema sin asegurar que las opciones utilizadas sean las más adecuadas.

Ahora, como disciplina científica, la heurística se puede aplicar a cualquier ciencia en el sentido más amplio para desarrollar métodos, principios, reglas o estrategias que ayuden a encontrar las soluciones más efectivas y efectivas a los problemas de análisis individuales.

Hay varios tipos de heurísticas:

Los principios heurísticos son aquellos principios que construyen recomendaciones para encontrar soluciones ideales a los problemas.

Las reglas heurísticas son reglas que indican la forma de resolver un problema.

Las estrategias heurísticas son aquellas estrategias que pueden organizar materiales o recursos compilados que ayudan a resolver problemas.

Por tanto, la palabra heurística se puede utilizar tanto como sustantivo como como adjetivo. Como sustantivo, se refiere a la ciencia o arte del descubrimiento, que se considera un tema de investigación.

Ahora, cuando se usa como adjetivo, señala los principios, reglas y estrategias ideales para encontrar soluciones a los problemas.

Heurística es un término utilizado por Albert Einstein en la publicación del efecto fotoeléctrico. El título del artículo es en español, "Visiones heurísticas sobre la producción y conversión de la luz", traducido al idioma español. En 1921 ganó el Premio Nobel de Física.

9.8.MÉTODO HEURÍSTICO

Cuando sea difícil encontrar la solución mejor o satisfactoria, utilice este conjunto de métodos y técnicas para encontrar y resolver el problema.

Por tanto, en las disciplinas científicas se suelen utilizar métodos heurísticos para obtener los mejores resultados en un problema específico.

El método heurístico existe desde la antigua Grecia, pero el matemático George Pólya promovió el término en su libro "Cómo resolver", en el que lo explicaba a los estudiantes de matemáticas y a todo aquel que quiera aprender de la asignatura. Métodos heurísticos, dé cuatro ejemplos:

- Si no puede comprender el problema, dibuje el contorno.
- Si no puede encontrar una solución, finja que ya tiene una solución y vea qué puede inferir de ella (y viceversa).
- Si el problema es abstracto, prueba examinar un ejemplo concreto.
- Intenta abordar primero un problema más general y revisar.

El filósofo y matemático Lakato cree que las heurísticas son un conjunto de métodos o reglas que pueden ser positivas o negativas, y que indican cuáles son las medidas ideales para resolver problemas.

En su trabajo sobre proyectos de investigación científica, Lakato señaló que todo proyecto tiene una estructura que puede servir de guía de manera positiva o negativa.

9.9.INFORMACIÓN GRAFICA-VISUAL

La información de texto se basa en información visual y viceversa. En cada vez menos casos, los gráficos y las imágenes que no admiten texto pueden ayudar a los estudiantes a almacenar, recuperar, identificar, comprender, organizar y absorber el hecho de que la información recibida es cada vez más fácil. Esto es especialmente cierto en el campo de la educación.

En la actualidad disponemos de una gran cantidad de Redes Sociales y medios de comunicación que nos permiten incluir o insertar contenido gráfico y visual de forma general o individual que nos permiten que nuestros textos reflejen más lo que queremos trasmitir, por ejemplo: fotografías, gráficos, infografías, videos y animaciones interactivos, e-books, etc.

Se puede decir que, en el actual marco para la creación y difusión de contenidos, los textos sin el apoyo de las imágenes pierden o merman su capacidad de transmitir, y más en el actual escenario tecnológico online ávido de información, en el que el principal problema del público está en situarse en el contexto o temática de forma visual, para interesarse en la posterior lectura del artículo o publicación.

Por estos motivos insertar gráficos e imágenes, se ha convertido en una práctica habitual a la hora de mostrar o dar a conocer nuestras opiniones, proyectos, productos, servicios o información de cualquier índole que trata de ser relevante entre las demás.

9.10. ESTRATEGIAS PARA EL APRENDIZAJE VISUAL

El aprendizaje visual se define como un método de enseñanza / aprendizaje que utiliza un conjunto de organizadores gráficos (métodos visuales para ordenar información) para ayudar a los estudiantes a pensar y aprender de manera más efectiva con la ayuda de ideas y conceptos. Además, estos también pueden identificar ideas erróneas, visualizar patrones e interrelaciones en la información y comprender y profundizar los factores necesarios para la correcta comprensión de los conceptos. Ejemplos de estos Organizadores son: Mapas conceptuales, Diagramas Causa-Efecto y Líneas de tiempo, entre otros.

Por otro lado, el desarrollo de diagramas visuales puede ayudar a los estudiantes a procesar, organizar, priorizar, retener y recordar nueva información para que puedan integrarla de manera significativa en la base previa del conocimiento. Los organizadores gráficos utilizan diferentes formas físicas, cada una de las cuales es adecuada para representar un tipo específico de información que puede servir para la interpretación de problemas a través de ellos.

Las estrategias de aprendizaje se refieren a los conocimientos y procedimientos que los estudiantes han dominado a lo largo de las actividades y la historia escolar que pueden permitirles afrontar el aprendizaje de manera eficaz. Los profesores deben estimular particularmente el desarrollo y uso de estrategias cognitivas basadas en la organización para los estudiantes, de modo que tengan una comprensión profunda de los materiales que han aprendido. Las estrategias organizativas pueden promover cambios cognitivos, promoviendo así una comprensión profunda de la información. Permiten a los sujetos seleccionar la información adecuada y establecer las conexiones necesarias entre los elementos de información a aprender. Asimismo, ayudan a los estudiantes a utilizar el contenido para inferir y generar nueva información.

9.11. LOS PAISAJES DE APRENDIZAJE: UNA HERRAMIENTA DIDÁCTICA PERSONALIZADA

Hay dos líneas en las cuales nos podemos apoyar, las Inteligencias Múltiples y la Taxonomía de Bloom las cuales forman parte de esta herramienta pedagógica de aprendizaje con la que los docentes facilitan una visión más amplia y pueden crear un itinerario digital con actividades y enigmas que resolver por parte de los estudiantes.

¿Cómo se puede personalizar el aprendizaje del alumnado de tal modo que se fomente su autonomía y se adapte a las necesidades de cada estudiante? Una opción interesante es hacer uso de los paisajes de aprendizaje, una herramienta pedagógica con la que se puede representar de forma visual una asignatura o parte de ella y que se puede crear con plataformas digitales de contenidos.

En los paisajes de aprendizaje, el docente puede añadir distintas actividades combinando las Inteligencias Múltiples y la Taxonomía de Bloom, ("*Desde 1948 un grupo de Educadores asumieron la tarea de Clasificar los Objetivos Educativos, propusieron desarrollar un sistema de clasificación en tres aspectos: el cognitivo, el afectivo y el psicomotor. El trabajo del apartado cognitivo se terminó en 1956y normalmente se le llama: Taxonomía de Bloom"*) además de otras metodologías como la gamificación (*La Gamificación es una técnica de aprendizaje que traslada la mecánica de los juegos al ámbito educativo-profesional con el fin de conseguir mejores resultados, ya sea para absorber mejor algunos conocimientos, mejorar alguna habilidad, o bien recompensar acciones concretas, entre otros muchos* *objetivos*) , el Visual Thinking (El pensamiento visual o Visual Thinking (en Inglés) es algo innato a la condición humana. Desde que el hombre es hombre ha realizado representaciones visuales, para expresar ideas, contar historias, afrontar y solucionar problemas), el Design Thinking (Pensamiento del Diseño) o el aprendizaje cooperativo, entre otros.

9.12. TEOREMA DE BAYES

La probabilidad condicional nos seguirá acompañando al igual que la fórmula de Bayes, que nos servirá como criterio para la correcta concepción acerca de la probabilidad.

El Teorema de Bayes

En el año 1763, dos años después de la muerte de *Thomas Bayes* (1702-1761), se publicó una memoria en la que aparece, por vez primera, la determinación de la probabilidad de las causas a partir de los efectos que han podido ser observados. El cálculo de dichas probabilidades recibe el nombre de Teorema de Bayes.

En la teoría de la probabilidad el *Teorema de Bayes* es un resultado enunciado por Thomas Bayes en el que expresa la probabilidad condicional de un evento aleatorio *A* dado *B* en términos de la distribución de probabilidad condicional del evento *B* dado *A* y la distribución de probabilidad marginal de sólo *A*.5

El origen del concepto de la obtención de probabilidades posteriores con información limitada se atribute al respetable Thomas Bayes. La fórmula básica para la probabilidad condicional en circunstancias de dependencia se conoce como Teorema de Bayes.

$P\ (A|B) = P\ (B \cap A)\ /P(A)$

En términos más generales y menos matemáticos, el Teorema de Bayes es de enorme relevancia puesto que vincula la probabilidad de **A** dado **B** con la probabilidad de **B** dado **A**.

Este teorema es conocido también como el teorema de las causas, este método es utilizado para obtener diversos resultados relacionados con probabilidad condicional.

Este trabajo utiliza las herramientas que proporciona este enfoque para valorar un proceso de instrucción diseñado para que los alumnos aprendan a resolver problemas bayesianos. La valoración de este proceso de instrucción se efectúa a través de algunos de los criterios de idoneidad didáctica, entendida como el criterio sistémico de pertinencia o adecuación de un proceso de instrucción al proyecto educativo (Godino; Batanero; Font, 2009).

Para la introducción al tema, se propone que la estrategia didáctica incluya la participación y el acuerdo entre los alumnos y el profesor como elemento clave para la representación simbólica y gráfica de los sucesos intervinientes y de sus probabilidades asociadas. La aplicación del Teorema de Bayes surge como una necesidad para abordar una situación problema planteada por el profesor. Luego se efectúa la presentación formal del teorema, desarrollando su demostración con la participación de los alumnos.

(Laboratorio de Modelación y Simulación, Universidad del Rosario, Colombia, Edición No. 2, febrero de 2011)

Cuando se habla de las aplicaciones de la teoría de la probabilidad es válido hacer mención sobre el Teorema de Bayes como expresión de probabilidad condicional ya que demuestra los beneficios obtenidos en las estimaciones basadas en los conocimientos. La metodología bayesiana específica un modelo de probabilidad que contiene algún tipo conocimiento previo acerca de un parámetro investigativo, de este modo se acondiciona al modelo de probabilidad para realizar el ajuste de los supuestos.

La presente publicación considera la toma de decisiones como una función basada en el ejercicio del análisis de hechos concretos y en la capacidad de hacer inferencias sobre la ocurrencia de eventos futuros y la relación con el teorema de Bayes y la inferencia dentro de las redes bayesianas como modelo probabilístico que relaciona las variables aleatorias mediante un grafo dirigido.

Adicionalmente se expone la importancia que tienen los modelos bayesianos y su relación con los procesos de toma de decisiones, el cual es fundamental para el desarrollo de aplicaciones empresariales en proporción de los costos reales y las oportunidades en que las decisiones a menudo deben hacerse en condiciones de incertidumbre.

La aparición de la inferencia bayesiana dio inicio a una revolución estadística que involucra el resurgimiento de la teoría bayesiana. Es así como el uso de la metodología bayesiana es de progresivo interés, y aceptación en distintas áreas, son numerosas las aplicaciones que de la estadística bayesiana que se están realizando. Por ejemplo, en el área financiera, la Salud, en el campo ingenieril.

Los métodos bayesianos se han generalizado particularmente porque es útil para la solución de problemas en la toma de decisiones. La utilidad de estos métodos consiste básicamente en el uso de situaciones en las que existe información limitada acerca de un gran número de variables o cuando la información proviene de diferentes fuentes.

Los modelos bayesianos primordialmente incorporan conocimiento previo para poder estimar modelos útiles dentro de un espacio muestral y de este modo poder estimar parámetros que provengan de la experiencia o de una teoría probabilística.

CAPITULO III

10. MARCO TEORICO

MARCO TEÓRICO.

Para este marco teórico el Enfoque Onto - Semiótico es un marco teórico amplio que a su vez se utiliza para organizar, unificar y aclarar nociones sobre otras teorías, enfoques y modelos y que define el modo de describir e investigar, de una forma diferente, de forma holística, los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Se ha ido construyendo desde los años de 1980 bajo el liderato del Dr. Juan D. Godino, en la Universidad de Granada, y aquí en México bajo el liderazgo del Dr. Ernesto Sánchez del CINVESTAV, el cual ha sido aplicado para investigar los procesos didácticos en diversos temas de matemáticas.

10.1. ENFOQUE ONTOLÓGICO SEMIÓTICO

Del Dr. Juan Diaz Godino de la Universidad de Granada en España.

En el trabajo matemático, los símbolos (significantes) remiten o están en lugar de las entidades conceptuales (significados). El punto crucial en los procesos de instrucción matemática no está, sin embargo, en el dominio de la sintaxis del lenguaje simbólico matemático, incluso aunque ésta sea también importante, sino en la comprensión de su semántica, es decir, en la naturaleza de los propios conceptos y proposiciones matemáticas y su relación con los contextos y situaciones-problemas de cuya resolución provienen.

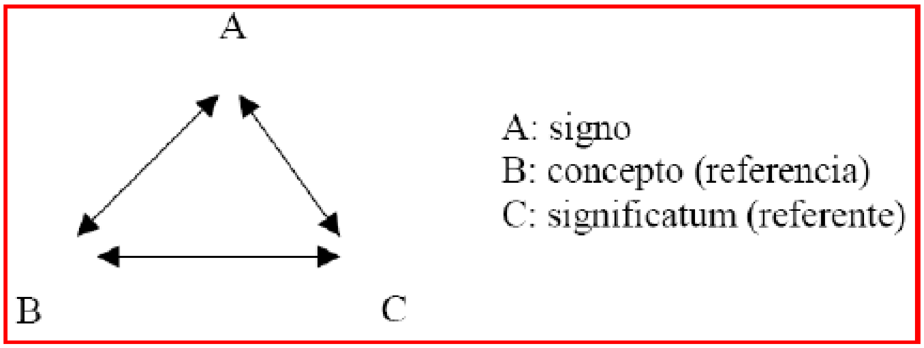
“Además, es necesario elaborar modelos teóricos que traten de articular las dimensiones semióticas (en sus aspectos sintácticos, semánticos y pragmáticos), epistemológica, psicológica y sociocultural en educación matemática. Esta modelización requiere tener en cuenta, entre otros:

– Diversidad de objetos puestos en juego en la actividad matemática, tanto en el plano de la expresión como en el del contenido.

– Diversidad de actos y procesos de semiosis (interpretación) entre los distintos tipos de objetos y de los modos de producción de signos.

– Diversidad de contextos y circunstancias espacio-temporales y psicosociales que determinan y relativizan los procesos de semiosis.” (Godino J.D. y Batanero C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques.)

“El análisis del significado de los objetos matemáticos está estrechamente relacionado con la representación externa e interna de estos objetos. La importancia de la relación suele describirse como una relación ternaria, que a su vez puede analizarse según las tres relaciones binarias propuestas en el llamado "triángulo básico" por Ogden y Richards (1923), a saber, dos relaciones directas y una relación indirecta.” (Godino J.D. y Batanero C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques.)



Tomando a consideración el cuadro anterior en el que definimos, a la letra A que el autor la define como la palabra 'mesa', a la letra C es una mesa particular como yo la considero y la visualizo y a la letra B la relacionamos con el concepto de mesa, algo existente en mi mente. La relación entre A y C es indirecta por medio del concepto de mesa. Si se considera que hay un concepto matemático C en la vida real, el concepto de la letra C sería el referente, la letra A el significante matemático (palabra o símbolo) y la letra B el concepto matemático al cual hacemos mención.

Este trabajo de investigación está sustentado en una amplia búsqueda y selección de material bibliográfico, como son Libros que tratan sobre el tema, tesis, revistas científicas y educativas, páginas web, memorias, opiniones de maestros. Este material se buscó principalmente en internet.

10.2. ANTECEDENTES

Restrepo B, Luis F; González L, Julián

La Historia de la Probabilidad

Revista Colombiana de Ciencias Pecuarias, vol. 16, núm. 1, marzo, 2003, pp. 83-87 Universidad de Antioquia Medellín, Colombia

La Edad media termina históricamente en el año 1453 con la caída de Constantinopla por parte de los otomanes, dando paso a la etapa conocida como renacimiento, la cual se destacó por haber tenido la actividad mercantil, industrial, artística, arquitectónica, intelectual y científica, entre otras. A partir de esta etapa con el avance en las matemáticas y la filosofía, se empieza a dar una explicación coherente a muchos fenómenos que no seguían un patrón determinístico, sino aleatorio.

Cierto día del año 1654, ***Blaise Pascal*** (1623 - 1662) matemático francés, hacía un viaje en compañía de un jugador más o menos profesional conocido como el caballero Meré, quien era una persona apasionada por el juego de los dados y las cartas, siendo además un hombre ilustrado. Este caballero creyó que había encontrado una "falsedad" en los números al analizar el juego de los dados, observando que el comportamiento de los dados era diferente cuando se utilizaba un dado que cuando se empleaban dos dados. La "falsedad" partía simplemente de una comparación errónea entre las probabilidades de sacar un seis con un solo dado o de sacar un seis con dos dados. Para este caballero debería existir una relación proporcional entre el número de jugadas necesarias para conseguir el efecto deseado en uno y otro caso. El problema radicó en que el citado caballero no tuvo en cuenta que en el segundo caso estaba analizando una probabilidad compuesta en donde las probabilidades se deben calcular multiplicativamente. En una carta de Pascal a Fermat en la que narraba esta anécdota concluía que "el caballero Meré tiene mucho talento, pero no es geómetra; esto es, como sabéis un gran defecto" (carta del 29 de julio de 1654)

A partir del anterior problema y en especial con base en los siguientes planteamientos: en ocho lanzamientos consecutivos de un dado se intenta obtener un uno, donde el juego se suspende después de tres intentos fallidos, ¿en qué proporción ha de ser compensado el jugador?

En una partida de dados intervienen dos jugadores y apuestan 32 doblones de oro cada uno, eligiendo un número diferente, gana el juego el primero que obtenga tres veces el número que eligió. Después de un rato de juego, el número elegido por el primer apostador ha salido dos veces mientras el otro jugador sólo una vez ha acertado, en este instante la partida debe suspenderse. ¿Cómo dividir los 64 doblones de oro apostados? En la correspondencia que siguió a este problema, tanto Pascal como Fermat estuvieron de acuerdo en que el primer jugador tiene derecho a 48 doblones de oro.

Con base en los anteriores interrogantes efectuados por el caballero Meré, Pascal se comunica de nuevo con ***Pierre Fermat*** (1601 - 1665), francés, abogado de profesión, pero gran amante de las matemáticas; con el cual compartió los problemas propuestos por el citado caballero, siendo considerada esta correspondencia como el punto de partida de la teoría de la probabilidad. Aunque algunos afirman que fue en el año de 1563 cuando apareció el primer libro de probabilidad llamado "Liber de Lulo Alae", libro sobre el juego de los dados, escrito y publicado por el italiano Girdamo Cardano (1501 - 1576).

Sin embargo, fueron Pascal y Fermat los que empezaron a formalizar la teoría de las probabilidades, probando el desacuerdo con el caballero de Meré, este se debía a que era erróneo el cálculo que había efectuado, ya que se equivocó en considerar equiprobables sucesos que no lo eran, y sólo cuando los casos posibles son equiprobables tiene sentido aplicar la definición dada por Meré de probabilidad. Aunque Pascal y Fermat no expusieron sus resultados por escrito, **Christian Huygens**, físico matemático holandés (1629 -1695), publicó en 1657 un breve tratado titulado "De Ratiocinnis in ludo aleae" (sobre los razonamientos relativos a los juegos de los dados), inspirado en la correspondencia sostenida entre Pascal y Fermat. Poco a poco otros matemáticos fueron interesándose por esta clase de propuestas. El suizo **Jacob Bernoulli** (1654 - 1705) obtuvo el teorema que se conoce con su nombre y que para algunos permitió estructurar el cálculo de probabilidades como disciplina orgánica. **Abraham de Moivre** (1667 - 1754) efectúo un vital aporte al observar que cuando se medía una distancia astronómica, siempre se cometían errores por exceso y por defecto, por más perfecto que fuera el instrumento de medición. Al graficar estos errores se distribuían en forma de campana, ideando a partir de la distribución de los errores la función probabilística normal, que injustamente se conoce como distribución gaussiana, ya que debería llevar su nombre. Abraham de Moivre nació en Vitry Francia y falleció en Londres, estudió lógica en Shumur, París entre 1682 y 1684, fue miembro de la Royal Society en 1697, siendo el primero en desarrollar la geometría analítica y la teoría de probabilidades en forma estructurada. Publicó en 1718 "The Doctrine of Chance", trabajo que fue considerado por algunas autoridades como la clave para el principio de la historia de la probabilidad. De Moivre además encontró que estaba durmiendo 15 minutos más cada noche, y sumando la progresión aritmética, calculó que podría morir el día que durmiera 24 horas; estaba en lo cierto. El hugonote (relativo a los calvinistas franceses y al movimiento iniciado en 1559), tuvo que huir de Francia por motivos religiosos, refugiándose en Inglaterra donde vivió resolviendo problemas de juegos de azar. En la obra "The Doctrine of Chance" aparecen las primeras indicaciones sobre la distribución normal, en 1730 efectuó la demostración del teorema del límite central. **Johann Bernoulli** (1667 - 1748), suizo, hermano de Jacob, tuvo tres hijos célebres por su conocimiento matemático, **Nicolás** (1695 - 1726), **Daniel** (1700 - 1782) y **Johann** (1710 - 1790). El primero de ellos se dedicó a laborar en parte en el área de las probabilidades, motivado por la obra de su tío Jacob "Ars Conjectandi" (el arte de la conjetura), publicada en 1713, donde se estudió la distribución binomial y la teoría que da para esta distribución la expresión matemática de la probabilidad de las frecuencias relativas (2). El inglés **Thomas Bayes** (1702 - 1761), el cual era reverendo, también contribuyó con el teorema para probabilidades condicionales. El trabajo de Bayes fue publicado en el año de 1764 en la Philosophical Transactions of the Royal Society de Londres, y titulado, "Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chance". Donde el reverendo abordó el problema de las causas a través de los efectos observados. El italiano **Joseph Lagrange** (1736 - 1813), unificó en unión con Thomas Bayes todas las ideas que sobre probabilidad existían, compilando la primera teoría general de las probabilidades. Langrage murió en París el 10 de abril de 1813 dejando múltiples trabajos en el área de la matemática.

Pierre Simon Laplace (1749 - 1827), francés, recopiló las ideas de Jacob Bernoulli, Abraham de Moivre, Thomas Bayes y Joseph Lagrange. Este desde 1774 escribió muchos artículos sobre el tema de la probabilidad. En 1812, Laplace publicó en París su Théorie Analytique des Probabilités, donde hace un desarrollo riguroso de la teoría de probabilidad con aplicación a problemas demográficos, jurídicos, sociales y además astronómicos. Esta obra al igual que su ensayo filosófico sobre la probabilidad en la que escribió: "en el fondo de la teoría de las probabilidades es sólo sentido común expresado en números" publicado en 1814, permite considerar el cálculo de las probabilidades como una parte autónoma de las matemáticas, permitiendo tomar el impulso teórico que habría de llevarla al extraordinario desarrollo y perfeccionamiento que actualmente posee (1,3). A partir de Laplace, las dos disciplinas, cálculo de las probabilidades y estadística, que había hasta entonces permanecido separadas, se fusionan de manera que el cálculo de las probabilidades se constituye en el andamiaje matemático de la estadística. Toda la base matemática que permitió desarrollar la teoría de probabilidades está extraída del análisis combinatorio, disciplina iniciada por Leibniz y Jacob Bernoulli. Posteriormente se introdujo la teoría de límites disminuyendo el peso que tenía el análisis combinatorio. El alemán **Carl Friedrich Gauss** (1777 - 1855), es considerado como el más grande matemático del siglo XIX y junto con Arquímedes y Newton, forma parte de los tres más grandes matemáticos de todos los tiempos. Gauss desarrolló la teoría de los errores; conjuntamente con Bessel y Laplace, llegaron a establecer el método de los mínimos cuadrados, como procedimiento matemático para resolver el problema fundamental de la teoría de los errores. Gauss y Laplace, independientemente aplicaron conceptos probabilísticos al análisis de los errores de medida de las observaciones físicas y astronómicas. Maxwell, Boltzmann y Gibbs aplicaron la probabilidad en su obra "Mecánica Estadística". La teoría de los errores constituye la primera rama de la estadística que puede constituirse como una estructuración teórico - matemática.

El francés **Simeón Denis Poisson** (1781 - 1840), ideó la distribución probabilística que lleva su nombre y que es aplicable a fenómenos poco comunes o extraños. En 1837 publica su trabajo en Recherches sur la Probabilité des Jugements. Poisson originalmente estudió Medicina, en 1789 se dedicó al campo matemático en la Escuela Politécnica. Fue muy amigo de Laplace y de Lagrange. Poisson publicó alrededor de 400 artículos en matemática y estadística. Pese al éxito de las aplicaciones se oyeron voces de inconformidad a la definición clásica de probabilidades, que exigía "a priori" saber que todos los eventos eran igualmente posibles. Además, en ciertos casos era imposible aplicar la definición clásica de la probabilidad, como puede suceder en aplicaciones de cálculo actuarial. El primer año del nuevo siglo veinte, anunciaba aplicaciones de la teoría de la probabilidad en los campos de la física y la genética. En 1901 se publicó la obra "Gibbs Elementary Principles in Statistical Mechanics", y el mismo año se funda la revista "Biometrika" por el inglés **Karl Pearson** (1857 - 1936). El año anterior Pearson trabajando en la Universidad de Londres popularizó la distribución Chi - Cuadrado a partir de la Gamma (6). En Rusia se inició el estudio de las cadenas de sucesos eslabonados (1906 - 1907) por obra de **Andrei Andreyevich Markov** (1856 - 1922), discípulo de **Chebishev** y coeditor de las oeuvres (2ud, 1899 - 1904) de su maestro. En muchos fenómenos la probabilidad de un suceso depende frecuentemente de los resultados anteriores, especialmente cuando **Laurent Schuwartz** (1915) de la Universidad de París, generalizó el concepto de diferenciación mediante su teoría de distribuciones, expuesta en el año de 1951. Hoy no es posible dar una explicación rigurosa de la teoría de probabilidades sin utilizar conceptos de función medible y de las teorías de integración modernas. Los notables avances que en el área del análisis matemático se dieron durante la primera década del siglo anterior con la creación de la teoría de la medida. Borel en 1909 contribuyó en forma significativa a la probabilidad mediante su obra "Elements de la Theorie des Probabilités". La demostración de Borel de la ley fuerte de los grandes números, en donde este maneja la noción de probabilidad con las propiedades aditivas que tiene una medida.

El norteamericano **Norbert Wiener** (1894 - 1964), desarrolló una medida de las probabilidades para conjuntos de trayectorias que no son diferenciables en ningún punto, asociando una probabilidad a cada conjunto de trayectorias. Construyó así una probabilidad que permitía describir el fenómeno en términos matemáticos en lo que se refería a la trayectoria y posición de las partículas a través del tiempo. Aportó ejemplos de cómo aplicar el estudio de las probabilidades al desarrollo y progresos de la ciencia. En sus trabajos de los años veinte logró resolver un problema de fenómeno aleatorio, "el Movimiento Browniano", el cual debe su nombre al Botánico Robert Brown, quien lo observó por primera vez en el año de 1828. **Andrei Nicolaevich Kolmogorov** (1903 - 1987), ruso, nacido un 25 de abril en Tambow, muriendo su madre en el parto. Su padre era un calificado agrónomo y estadístico. Realizó su primer trabajo evaluando los estudios sobre probabilidades efectuados entre los siglos XV y XVI, apoyándose en los trabajos de Bayes. En 1924 comenzó su interés en la teoría de la probabilidad, la cual lo consagró. Su primer artículo fue "Uber konbergenz Von Reiher, deren Glieder durch den Zufall Bestimmt Weerden". En 1927 había completado sus investigaciones sobre suficiencia y condiciones necesarias de la ley débil de los grandes números, comenzada por J. Bernoulli. En 1930 obtiene la ley fuerte de los grandes números. El año anterior había publicado "La Teoría General de la Medida y el Cálculo de Probabilidades". En 1950 completó uno de los trabajos más importantes en Estadística "Estimadores Insesgados". Kolmogorov dio solución a una parte del sexto problema de Hilbert, en el que se pedía un fundamento axiomático de la teoría de probabilidades, utilizando la medida de Lebesgue. También efectúo importantes aportes a la teoría de procesos de Markov. Kolmogorov estableció con sus axiomas para el cálculo de las probabilidades las bases matemáticas para asentar la teoría con lo cual, además se aclaran las aparentes paradojas existentes. Todo se relata en su obra monográfica "Grundbegriffe der Wahrscheinlichkcits rechnung" del año 1933. Durante el período de 1923 a 1950 se formaron varias escuelas, destacándose:

1. La rusa dirigida principalmente por Kolmogorov y Khintchin.

2. La estadounidense creada por Feller y Doob.

3. La francesa donde se resalta la figura de Paul Levy, quien influirá de manera decisiva en las dos escuelas anteriores.

La escuela francesa se formó con P. A. Meyer y su grupo de Estrasburgo, así como Nevev y Fortret en París. La probabilidad se aplica cotidianamente en las ciencias pecuarias para establecer diferencias estadísticas entre tratamientos, en la optimización de dosificaciones de alimentos para animales. Mediante el empleo de superficies de respuesta, donde la probabilidad es vital en la toma de decisiones referente a la mejor combinación de componentes de mezcla. También se emplea en la clasificación de especies animales y en la evaluación de la taxonomía animal. En piscicultura es de gran ayuda para establecer la dinámica de los peces; también en la estimación de la población presente en un determinado ecosistema, en hallar la probabilidad de fecundación. La modelación animal permite predecir el comportamiento de una o más variables denominadas como dependientes en función de un conjunto de variables exploratorias o controladas. Por ejemplo: se puede predecir la producción de leche en función de la edad de la vaca, la raza, el consumo de alimento, el tipo de pasto, el número de partos, entre otras variables. La probabilidad evalúa el tipo de relación existente entre variables, así: podemos evaluar la asociación entre la calidad de la leche, la altitud sobre el nivel del mar, la cantidad de pasto consumido, la cantidad de células somáticas, la ceniza, la grasa, etc. Mediante el empleo de arreglos factoriales se mide la interacción entre factores. Los cuales pueden relacionarse en forma dependiente o independiente con el comportamiento del animal. La probabilidad permite definir el tipo de patrón o modelo de comportamiento animal, con el cual se establece si sigue una dinámica de agregación, uniformidad o aleatoriedad. En genética animal se puede caracterizar la variabilidad de los factores, donde los marcadores genéticos se emplean para reflejar la variabilidad debida principalmente a los genes. La probabilidad permite evaluar y clasificar las similitudes y no similitudes entre individuos, asociados con la variabilidad genética. Para establecer el tamaño de la muestra requerida en estudios biológicos se hace necesario el empleo de la probabilidad.

10.3. ¿DONDE SE APLICA LA PROBABILIDAD?

La probabilidad se aplica cotidianamente en las ciencias pecuarias para establecer diferencias estadísticas entre tratamientos, en la optimización de dosificaciones de alimentos para animales. Mediante el empleo de superficies de respuesta, donde la probabilidad es vital en la toma de decisiones referente a la mejor combinación de componentes de mezcla.

También se emplea en la clasificación de especies animales y en la evaluación de la taxonomía animal.
En piscicultura es de gran ayuda para establecer la dinámica de los peces; también en la estimación de la población presente en un determinado ecosistema, en hallar la probabilidad de fecundación.
La modelación animal permite predecir el comportamiento de una o más variables denominadas como dependientes en función de un conjunto de variables explicatorias o controladas. Por ejemplo: se puede predecir la producción de leche en función de la edad de la vaca, la raza, el consumo de alimento, el tipo de pasto, el número de partos, entre otras variables.

La probabilidad evalúa el tipo de relación existente entre variables, así: podemos evaluar la asociación entre la calidad de la leche, la altitud sobre el nivel del mar, la cantidad de pasto consumido, la cantidad de células somáticas, la ceniza, la grasa, etc. Mediante el empleo de arreglos factoriales se mide la interacción entre factores. Los cuales pueden relacionarse en forma dependiente o independiente con el comportamiento del animal.

La probabilidad permite definir el tipo de patrón o modelo de comportamiento animal, con el cual se establece si sigue una dinámica de agregación, uniformidad o aleatoriedad.

En genética animal se puede caracterizar la variabilidad de los factores, donde los marcadores genéticos se emplean para reflejar la variabilidad debida principalmente a los genes. La probabilidad permite evaluar y clasificar las similitudes y no similitudes entre individuos, asociados con la variabilidad genética.

Para establecer el tamaño de la muestra requerida en estudios biológicos se hace necesario el empleo de la probabilidad.

Se consultaron diferentes libros de diferentes autores para ver la forma en la cual consideran la probabilidad condicional y cuál es el enfoque que cada uno de ellos le da a este concepto, así como su interpretación, cabe mencionar que cada uno de los autores le da su propio enfoque y lo visualizan de diferente manera, lo cual no quiere decir que cambie la esencia de la probabilidad condicional, solo cambia la manera en la que lo abordan.

10.4. LA PROBABILIDAD CONDICIONAL COMO HERRAMIENTA PARA LA TOMA DE DECISIONES

Actualmente se reconoce la necesidad de un actuar en situaciones de incertidumbre, cada vez más incorporadas a distintos entornos laborales y de vida. Al decir de Morin: “lo nuevo brota sin cesar; nunca podemos predecir cómo se presentará, pero debemos contar con su llegada” (Morin, 1999, p.11), ante lo cual precisa que “importa (…) comprender la incertidumbre de lo real, saber que hay un posible aún invisible en lo real”. De este modo, el estudio de la probabilidad se constituye en una herramienta para enfrentar situaciones reales. Ignorar esta incertidumbre o intentar minimizarla nos puede llevar a tomar decisiones frágiles, que pueden generar un impacto negativo apenas el escenario cambie (Taleb, 2012).
Sin embargo, es un área del saber matemático que muestra, en Latinoamérica, bajos resultados.

Más del 80% de los estudiantes no supera el segundo nivel de logro en el área de datos y azar (OECD, 2014), es decir, en el mejor de los casos entienden y usan conceptos de probabilidad básicos en situaciones como lanzamientos de dados o monedas, sin evidenciar la capacidad de realizar razonamientos en contextos simples. Esto supone la necesidad de innovar en situaciones de enseñanza y aprendizaje que permitan a los estudiantes constituir a las nociones de la probabilidad en una herramienta matemática para su actividad.

En este contexto, a medida que se adquiere nueva información sobre la situación en que se requiere tomar decisiones en escenarios inciertos, la noción de probabilidad condicional permite incorporar cambios en los grados de creencia sobre los posibles resultados, mejorando la toma de decisiones basadas en predicciones. Esto amplía el rango de experimentos a considerar en el aula, dando oportunidades para una mayor comprensión y razonamiento sobre las nociones involucradas en la inferencia estadística, asociación entre variables, regresión y modelos lineales (Batanero y Díaz, 2007).

El objetivo general de esta investigación es constituir la probabilidad condicional como herramienta para la toma de decisiones. El presente reporte se enmarca en el diseño, implementación y validación de una situación de enseñanza de la probabilidad condicional que recurre al juego de Monty Hall como escenario de toma de decisiones. En particular, en el marco de la ingeniería didáctica, se exponen los elementos cognitivos, epistemológicos y didácticos del análisis preliminar.

Es razonable pensar que la malinterpretación o confusión de la probabilidad condicional con otras probabilidades se produzca cuando la tarea o problema se presente a los estudiantes verbalmente.

La probabilidad condicional nos permite agregar más cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios cuando adquirimos nueva información. Por consiguiente, también un concepto requerido en la construcción de la probabilidad producto, la inferencia estadística, clásica y bayesiana, asociación entre variables, regresión, modelos lineales y toma de decisiones bajo incertidumbre.

En lo que sigue analizamos el tratamiento de la probabilidad condicional en una muestra de libros de texto de estadística usados en psicología. Este estudio es una de las fases en la construcción de un cuestionario de evaluación de la comprensión de la probabilidad condicional (Díaz, 2004).

La definición de probabilidad condicional se encuentra en la mayor parte de los libros analizados. Por ejemplo, Peña (1986) define la frecuencia relativa de *A* condicionada a la ocurrencia de *B* (p. 71) y de esta definición deduce el concepto de probabilidad condicional, indicando "donde A∩B representa el suceso ocurrencia conjunta de A y B y suponemos P(B)>0" (Peña, 1986, p. 76). En esta definición está implícita la restricción del espacio muestral. Peña hace hincapié en las siguientes propiedades:

• Es importante diferenciar entre *P(A∩B)* y *P(A/B)*

• Una probabilidad conjunta *P(A∩B)* es siempre menor que las probabilidades simples *P(A)* y *P(B).*

• Una probabilidad condicionada *P(A/B)* puede ser mayor, menor o igual que *P(A).*

El espacio muestral en la probabilidad condicional *P(A/B)* queda restringido a *B.*

Nortes (1993) demuestra que una probabilidad condicional cumple los axiomas de probabilidad. Cuadras y cols. (1984) también resaltan que la probabilidad condicional implica una reducción del espacio muestral. Sacerdote y Balima (en preparación) recuerdan que nunca podría aparecer en una fórmula una suma o diferencia de probabilidades condicionadas a diferentes sucesos, dado que las probabilidades estarían definidas sobre distintos espacios muestrales.

LA FORMA EN LA QUE DEFINEN LA PROBABILIDA CONDICIONAL ALGUNOS AUTORES.

De la información recogida de diferentes autores que dan una definición de Probabilidad Condicional, tales como:

Luis Rincón (Una introducción a la PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA, Departamento de Matemáticas Facultad de Ciencias UNAM, agosto de 2006.)

En esta sección se estudian los conceptos importantes de probabilidad condicional e independencia. Estos conceptos surgieron de manera natural en el proceso de encontrar solución a algunos problemas provenientes de situaciones reales. Se demuestran además dos resultados de amplia aplicación: el teorema de probabilidad total y el teorema de Bayes.

Probabilidad condicional Sean A y B dos eventos en donde P(B) > 0. La probabilidad condicional del evento A dado el evento B, denotada por P(A|B), se define como sigue:

$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$

La expresión P(A|B) se lee entonces "probabilidad condicional del evento A dado el evento B" o simplemente "probabilidad de A dado B". *Para que la definición tenga sentido se necesita suponer que P(B) > 0. No se define P(A|B) cuando P(B) = 0.* El evento B representa información adicional acerca del experimento aleatorio. Mediante un ejemplo sencillo se ilustra a continuación el uso y significado de la probabilidad condicional.

Ejemplo. Considere el experimento de lanzar un dado equilibrado. Claramente el espacio muestral es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ el cual es equiprobable. Sean los eventos A = {2} y B = {2, 4, 6} = "Cae par". Entonces P(A) = 1/6 mientras que P(A|B) = 1/3. Observe que conocer la información de la ocurrencia del evento B, ha afectado la probabilidad del evento A. ◦ Proposición (Regla del producto). Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos tales que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. Entonces $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$. La demostración de esta fórmula es sencilla pues simplemente se escribe la definición de cada probabilidad condicional en el lado derecho, se cancelan términos y lo que resulta es el lado izquierdo.

PROBABILIDAD CON APLICACIONES (**MICHAEL WOODROOFE** *Profesor de Matemáticas y Estadística Universidad de Michigan*)

Sea $(S, \mathfrak{I}, P)$ un espacio de probabilidad, y sea *B* un evento con probabilidad positiva. Así, $(S, \mathfrak{I}, P)$ puede ser pensado como un modelo para algún experimento o juego de azar y *B* como un evento con una posibilidad positiva de ocurrir. Ahora suponer que sabemos que *B* ha de hecho ocurrido. Entonces nuestra asignación original de probabilidades, representada en el modelo por *P*, puede no ser ya apropiada. Indudablemente, puesto que ahora sabemos que *B* ha ocurrido, sabemos que es imposible para B' ocurrir, aunque pudimos haber asignado originalmente probabilidad positiva a B'. La cuestión que proponemos responder en esta sección es por lo tanto: ¿Cómo deben nuestras probabilidades cambiar a la luz de la nueva información?

Desde el punto de vista frecuentista, la respuesta es completamente simple. *Nuestras nuevas probabilidades deben representar frecuencias relativas límites de eventos entre exactamente aquellos* *ensayos sobre los cuales B ocurra*. Eso es, si el juego o experimento bajo consideración es repetido *n* veces, como en la Sección 2.1, y si *nA* denota el número de veces que *A* ocurre durante la *n* repeticiones del juego o experimento, entonces la frecuencia relativa de *A* entre aquellos ensayos sobre los cuales *B* ocurre es:

$$\frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{n_{AB}/n}{n_B/n}$$

En la interpretación frecuentista de probabilidad, la última cantidad es (para *n* grande) aproximadamente *P*(*AB*)/*P*(*B*), que por lo tanto parece ser un candidato razonable para nuestra nueva probabilidad.

También somos conducidos al cociente *P*(*AB*)/*P*(*B*) desde el punto de vista subjetivo. Así, considere el siguiente juego: si *B* ocurre, entonces:

1.- Uno paga *q* unidades para jugar.

2.- Uno recibe 1 unidad si *A* ocurre y nada si *A* no ocurre.

Si *B* no ocurre, ninguna apuesta es ubicada. ¿Cómo puede *q* ser seleccionada de tal manera que la anterior apuesta sea justa? Si uno antes ha asignado probabilidades subjetivas a los eventos *A*, *B*, *AB*, y *A'B* de una manera consistente, esta cuestión tiene una respuesta fácil.

$$P(AB) = q\left[P(AB) + P(A'B)\right] = qP(B)$$

Puesto que uno gana 1 - *q* unidades con probabilidad *P*(*AB*) y pierde *q* unidades con probabilidad *P*(*A'B*), la noción intuitiva de justicia requiere que (1 - *q*) *P*(*AB*) = *qP* (*A'B*). Esto también puede ser escrito:

$$P(AB) = q\left[P(AB) + P(A'B)\right] = qP(B)$$

donde hemos usado la consistencia en el paso final. Resolviendo para q ahora produce $q = P(AB)/P(B)$, que por lo tanto parece ser un candidato razonable para nuestra nueva probabilidad para A desde el punto de vista subjetivo también.

Hemos motivado la siguiente definición: si A y B son eventos para los cuales $P(B) > 0$, entonces definimos la *probabilidad condicional de A dado B* para ser:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Antes que procedamos a ejemplos, observemos que nuestras probabilidades originales $P(A)$ pueden también ser consideradas como probabilidades condicionales dado el espacio muestral S. Indudablemente, tomando $B = S$ en la Ecuación (1.1) produce $AS = A$ y $P(S) = 1$, así que $P(A \mid S) = P(A)$. Esta observación admite la siguiente interpretación: nuestras probabilidades originales son probabilidades condicionales dado nuestro almacén inicial de información acerca del problema en mano; nuestras nuevas probabilidades $P(A \mid B)$, donde B □ S, son condicionales dada alguna información adicional.

10.5. ¿QUÉ IMPORTANCIA TIENE BAYES SOBRE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL?

La importancia del teorema de Bayes el cual nos sirve para calcular las probabilidades de un evento que está dado o no por otro evento anterior, para lo cual es consiente evaluar de qué manera se llegan a transformar las probabilidades subjetivas, mientras más información nueva se posee de un hecho.

Este Teorema además de ser aplicable a la mayoría de los modelos basados en el conocimiento subjetivo y la evidencia empírica. Se puede aplicar también a otros modelos que se apoyan en este teorema, por ejemplo, en la fusión de datos de un sistema.

¿Cómo efectúa nuestra mente previsiones sobre el mundo del que no capta más que fragmentos? Parece que se sirve de métodos Estadísticos refinados. Pero el mecanismo que se usa para lograrlo constituye todavía un misterio.

DOMINIK R. BACH.

10.6. PROBABILIDAD CONDICIONAL

En esta sección preguntamos y respondemos la siguiente pregunta. Supongamos que asignamos una función de distribución a un espacio muestral y luego aprende que ha ocurrido un evento E.

¿Cómo debemos cambiar las probabilidades de los eventos restantes? Llamaremos a la nueva probabilidad para un evento F la probabilidad condicional de F dada E y denotar por P (F | E).

10.7. PROBABILIDADES DE BAYES

Nuestra medida de árbol original nos dio las probabilidades de sacar una bola de un dado color, dada la urna elegida. Acabamos de calcular la probabilidad inversa de que se eligió una urna en particular, dado el color de la pelota. Tal probabilidad inversa es llamada probabilidad de Bayes y puede obtenerse mediante una fórmula que desarrollaremos luego. Las probabilidades de Bayes también se pueden obtener simplemente construyendo el árbol medida para el experimento de dos etapas realizado en orden inverso.

Los caminos a través del árbol inverso están en correspondencia uno a uno con aquellos en el árbol hacia adelante, ya que corresponden a resultados individuales del experimento, y entonces se les asignan las mismas probabilidades. Desde el árbol delantero, encontramos que la probabilidad de una bola negra es:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{20}$$

Thomas Bayes hace una aproximación a la realidad en la que las probabilidades son el eje central que nos permiten conocer el mundo.

De acuerdo a su perspectiva, los seres humanos estamos en una constante integración de información matemática y estadística, pese a que muchos expresen que no sienten amor por las matemáticas.

Pero, lo cierto es que nuestro cerebro siempre recurre a ellas, ya que en la vida cotidiana es fácil calcular las probabilidades de las cosas, y no solo cuando se trata de recibir un cambio tras una compra. Al contrario, el cerebro hace uso constante de las matemáticas, sobre todo cuando se trata de hacer cálculos basados en probabilidades.

Es tan fuerte esta habilidad que posee nuestro cerebro, que algunos estudios han llegado a concluir que el cálculo de probabilidades es el que guía gran parte de nuestros comportamientos cada día. Las matemáticas no son solo una asignatura en el colegio, sino que recurrimos a ellas cada vez que vamos a tomar decisiones o a realizar tareas más sencillas.

10.8. EL TEOREMA DE BAYES Y SUS IMPLICACIONES

Cuando en 1761, el reverendo Thomas Bayes moría en Tunbrigde Wells, una ciudad del sur de Inglaterra, nadie sospechaba que algún día un famoso método matemático llevaría su nombre. Tres años después de su fallecimiento se publicó el ensayo decisivo con el que Bayes había solucionado un problema de la teoría de la probabilidad. Doscientos años más tarde se desarrolló lo que hoy conocemos por estadística bayesiana, en la que se basa la teoría del cerebro bayesiano.

10.9. ¿CÓMO TRABAJA EL CEREBRO BAYESIANO?

De acuerdo a esta teoría, nuestro cerebro nos permite comprender cómo funciona el mundo, y esto involucra los diferentes escenarios en los que podamos encontrarnos inmersos.

Todo este trabajo aparentemente se lleva a cabo en la corteza orbifrontal. De modo que, no percibimos el mundo como es en realidad, sino como nuestro cerebro lo supone. Esta labor se agudiza con ayuda de los impulsos sensoriales que recibimos del mundo externo.
La importancia de Thomas Bayes y la teoría del cerebro bayesiano es que -según las indagaciones al respecto- nuestro cerebro se guía por la teoría de probabilidad, o regla de Bayes.
¿Qué alcance tiene nuestro cerebro?

Nuestro cerebro es un órgano tan potente que nadie le puede llevar la delantera haciendo predicciones. En efecto, se suele decir que, antes que algo ocurra, nuestro cerebro ya es capaz de predecirlo.

Anteriormente se creía que nuestro cerebro solo recibía señales de nuestros sentidos, pero la verdad es que este maravilloso órgano tiene una capacidad predictiva asombrosa. Solo que esto no es nada nuevo, la mente de Thomas Bayes ya lo había predicho en la época de 1700.

Este autor consideraba que nuestro cerebro hacía procesos de predicción y actualizaba sus creencias. Esto explicaría porqué al ver un perro el cerebro es capaz de predecir que el animal atacará, y esta creencia se actualiza e incrementa el temor si llegamos a observar que se trata de un dóberman sin bozal. Pero, ¿qué ocurre cuando pensamos en nuestra propia muerte? En un estudio reciente, los científicos reunieron a varias personas y procedieron a llevar los registros para llegar a una conclusión.

10.10. ¿PROBABILIDAD CONDICIONAL Y BAYES?

La probabilidad condicional relaciona eventos que no son mutuamente excluyentes. Es decir, uno depende de otro para suceder. Mientras que el Teorema de Bayes relaciona una probabilidad condicional teniendo presente los efectos observados.

Dentro de las aplicaciones de la teoría de la probabilidad es válido enunciar el Teorema de Bayes como expresión de probabilidad condicional que demuestra los beneficios obtenidos en las estimaciones basadas en conocimientos intrínsecos. La metodología bayesiana específica un modelo de probabilidad que contiene algún tipo conocimiento previo acerca de un parámetro investigativo, de este modo se acondiciona al modelo de probabilidad para realizar el ajuste de los supuestos. El fin de la estadística, específicamente de la estadística Bayesiana, es suministrar una metodología para estudiar adecuadamente la información mediante análisis de datos y decidir de manera acertada sobre la mejor forma de actuar. Los modelos bayesianos primordialmente incorporan conocimiento previo para poder estimar modelos útiles dentro de un espacio muestral y de este modo poder estimar parámetros que provengan de la experiencia o de una teoría probabilística. La estadística bayesiana provee cantidades tanto conocidas como desconocidas lo que permite incorporar los datos conocidos dentro de la estimación de los parámetros dados inicialmente, logrando así un proceso de estimación más rico en información haciendo inferencias sobre las cantidades

10.11. ¿COMO EL CEREBRO TRABAJA DE FORMA INTUITIVA?

¿Intuitivo o analítico?: descubre qué hemisferio predomina en tu personalidad

Es bien sabido que el cerebro consta de dos mitades o hemisferios conectadas entre sí por un extenso haz de fibras nerviosas llamado cuerpo calloso. El hemisferio izquierdo gestiona el pensamiento analítico mientras que el lado derecho se inclina más por la intuición. El predominio de uno sobre otro influye en nuestra personalidad y nuestra forma de actuar.

La lateralidad cerebral se refiere al diferente funcionamiento que tiene cada uno de los hemisferios del cerebro humano. Pero esa lateralidad no es total y ambas partes se reparten muchas funciones y colaboran y se comunican entre ellas para desempeñar bien cada tarea concreta. ¿Qué hace exactamente cada hemisferio? ¿El predominio de uno u otro es una constante en la personalidad o existen circunstancias que pueden hacer que varíe?

Lo que sí se sabe es que la personalidad viene muy condicionada por hemisferio cerebral dominante. Así, por ejemplo, en las personas diestras –factor también a tener en cuenta- el sector izquierdo es el que se ocupa del lenguaje y es, por tanto, un cerebro racional y lógico que piensa en serie, reduciendo todo a números, palabras y letras. Por el contrario, si alguien está dominado por el hemisferio derecho se mostrará más intuitivo y no tan verbal, capaz de recurrir a pensamientos en patrones e imágenes y más proclive a centrarse en lo general que en lo particular.

Otras funciones, como el cálculo matemático o el análisis, están asignadas al hemisferio izquierdo, que también está especializado en el manejo de la lógica, el procesamiento de la información, el pensamiento proporcional, la organización de la sintaxis, el control del tiempo, la toma de decisiones y la memoria a largo plazo.

Para averiguar dónde y cómo el cerebro llevaba a cabo el cálculo de estas probabilidades, el equipo tuvo que convencer a los participantes en el estudio para hicieran sus deducciones sin pensar en números. Kenneth Norman, otro de los investigadores, estaba convencido de que, si los participantes se enredaban en cálculos, fallarían. Pero señala que nuestro cerebro es mucho más eficaz en "los cálculos implícitos que en los cálculos explícitos".

Para estudiar estos cálculos implícitos, el equipo siguió la actividad cerebral de los participantes a medida que exploraban un "safari park" dividido en cuatro zonas virtuales: azul, verde, rosa y amarilla. Cada zona contenía diferentes animales: elefantes, jirafas, hipopótamos, leones y cebras. La tarea consistía en obligar al cerebro a utilizar las observaciones anteriores para decidir en cuál de las cuatro zonas coloreadas sería más fácil encontrar una combinación de esos animales. Por ejemplo, a un participante le mostraban dos leones y una cebra, y le preguntaban si era más probable encontrar esa combinación en la zona verde o en la azul. Al obligar a los participantes a elegir entre dos zonas que no eran los más propicias para encontrar a cada uno de los animales, los investigadores pudieron medir cómo rastrea el cerebro las probabilidades relativas de las cuatro zonas.

Debido a que cada animal aparecía de vez en cuando en todas las zonas, los participantes no podían señalar inequívocamente una sola zona, ni eliminar otra. Un grupo de dos cebras y un león podrían sugerir la zona verde, donde ambos animales son los más comunes, pero esos tres animales podían aparecer en cualquier zona y la adición de un hipopótamo al grupo podían hacer que la zona verde fuera la localización más probable.

Si a estas alturas se ha perdido.... No desespere. La buena noticia es que el cerebro de forma intuitiva puede dar con la solución. Al menos, eso es lo que ocurrió en la prueba a la que fueron sometidos los participantes, que fueron capaces de elegir correctamente de forma consistente la zona en la que con más probabilidad podría encontrarse un grupo concreto de animales. Es más, aseguran los investigadores que "la precisión de los participantes no disminuyó a la hora de elegir entre dos zonas que no eran los más probables, lo que indica que podían realizar un seguimiento de la probabilidad relativa de las cuatro zonas".

Para localizar dónde el cerebro lleva a cabo "esta hazaña", los investigadores hicieron que los participantes realizan la tarea mientras se sometían a una resonancia magnética funcional, que revela las regiones del cerebro más activas en un momento dado. Y encontraron que era precisamente la corteza orbitofrontal la que aparecían más activa, una región del cerebro implicada en la realización de planes complejos, advertir si un entorno o situación ha cambiado desde la última vez, y la elaboración del pensamiento de orden superior. Los hallazgos apoyan las hipótesis anteriores de que esta región del cerebro está implicada en flexibilidad intelectual.

"Tener un cerebro capaz de entender que el mundo funciona de forma diferente en diferentes situaciones, debió suponer una ventaja adaptativa para nuestros antepasados. Y eso es lo que la corteza orbitofrontal parece hacer", señalan. Por lo visto, nuestro cerebro lee a la perfección el lenguaje matemático en el que, en palabras de Galileo, está escrita la naturaleza.

11. METODOLOGÍA

11.1. BIBLIOGRAFICA

Para esta sección utilizamos un amplio marco bibliográfico referente al proceso de enseñanza y aprendizaje de la forma intuitiva para el área de Estadísticas, a efecto de abordar el problema desde una perspectiva objetiva, práctica y actualizada, cuyos datos, teorías y conceptualizaciones se obtuvieron mediante un manejo adecuado de libros, revistas, datos estadísticos, tesis, artículos y entrevistas a personas especializadas.

Se pudo constatar que la bibliografía fue la correcta debido a que con base en la información recabada fue posible detectar que los problemas por parte de los docentes como de los alumnos tenemos para enfrentar los problemas de probabilidad condicional y no solo es en este tema, sino que es una dificultad que hay que resolver para dar un giro a la enseñanza de la forma visual e intuitiva.

11.2. DE CAMPO

Porque realizamos una investigación en el lugar de los hechos, es decir, en contacto directo con los actores del problema que se investiga, a fin de conocer con objetividad la situación del problema y profundizar en la realidad de la situación.

Debido a la situación que se atraviesa por la pandemia me vi en la necesidad de llevar a cabo mi propuesta de manera virtual lo cual fue complicado para los alumnos y para el docente en este caso, pero con la ayuda de software y aplicaciones se llevo acabo la propuesta.

11.3. RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

Los datos o información que obtuvimos fueron en el sentido de el avance que se tenia por parte de los alumnos a los que se les fue aplicada la propuesta, con el fin de tener un diagnostico veraz de lo que en realidad los alumnos saben sobre el tema de probabilidad condicional y su enseñanza de forma visual. Ya que de esta manera podemos describir los hechos que están detrás de los datos o información.

CAPITULO IV

12. RESULTADOS Y ANÁLISIS

12.1. UNIDAD DIDÁCTICA: APRENDIENDO PROBABILIDAD.

Las actividades sugeridas en este trabajo se describen en esta unidad didáctica, que tiene como destino adquirir y mejorar la comprensión básica de la probabilidad. La forma en que se plantea el contenido de esta unidad es que se pueda lograr un aprendizaje significativo del tema para potenciar su capacidad cognitiva.

Como objetivos para este aprendizaje se plantean los siguientes puntos

a) Reconocer los conceptos de Probabilidad, espacio muestral y experimento aleatorio y poder explicarlos en forma clara y concreta, a su vez identificarlos en sus diferentes maneras en que son planteadas.

b) Reconocer los diferentes tipos de sucesos con los cuales está conformado el espacio muestral y saber cómo se clasifican de acuerdo a cada una de sus características.

c) Realizar operaciones entre sucesos que son posibles y en los que no se puedan.

d) Aplicar las técnicas de conteo para la resolución de problemas planteados.

e) Ya identificados los problemas aplicar la regla de Laplace en los de ejercicios.

f) Identificar cuáles son las propiedades de probabilidad. Aplicar de manera correcta los teoremas básicos de probabilidad.

Los contenidos que se plantean son:

Conceptos básicos: Espacio muestral y experimentos aleatorios

Sucesos aleatorios, clases y operaciones entre sucesos

Técnicas de conteo

Regla de Laplace

Propiedades de probabilidad

La unidad didáctica empezaría con el acercamiento al contenido de la temática dando una explicación clara y realizando ejemplos de las aplicaciones en el diario vivir del concepto de probabilidad y azar desde los diferentes enfoques profesionales y personales, señalando también la importancia de su aprendizaje y comprensión como inicio en la implementación de nuevos conocimientos, al final de esta parte se pregunta acerca de las aplicaciones observadas por parte de cada uno de los estudiantes en distintos sectores y como descubren su importancia desde su punto de vista, argumentando el porqué de cada una de las respuestas que cada uno aportó.

A continuación, se da inicio a la explicación de los diferentes conceptos referentes a los contenidos ya estipulados con antelación de acuerdo al plan de aula y el texto guía, relacionándolo con el contexto en el que se encuentran y por medio de la estructura tradicionalista de las clases, se dan las explicaciones de algunos ejercicios del tema adaptados al contexto y la realización de actividades dinámicas para mejorar la comprensión (juegos, actividades lúdicas, mesas redondas, entre otras).

El desarrollo de los ejercicios se realiza de forma verbal y escrita tanto individual como grupalmente, a partir de las actividades descritas en el texto guía adaptadas a la terminología adecuada y el contexto en que se desenvuelven los estudiantes. Enfatizando en el planteamiento de situaciones hipotéticas referentes al tema tratado en el momento usando el lenguaje adecuado.

Como complemento y retroalimentación de los temas vistos en las clases y como refuerzo al conocimiento adquirido, se aplica el OVA (Objetivo Virtual de Aprendizaje) el cual nos sirve para generar y promover un pensamiento estadístico y probabilístico en los estudiantes el cual está diseñado y distribuido dentro de cada una de las clases dependiendo de la temática desarrollada dentro de la misma.

Como fase final de la unidad didáctica se realiza la valoración por parte de los estudiantes y docente en donde se expresaban sus opiniones sobre la actividad desarrollada.

Se impartió unas clases del tema de probabilidad condicional a los alumnos de nivel licenciatura de la facultad de matemáticas, a los cuales se les explico el tema de involucra la probabilidad, los axiomas, también se hizo hincapié en la forma correcta de resolución de problemas ya que se podía elegir entre la forma tradicional y la forma visual, para que a través de ellos se resolvieran los problemas. Se les fue guiando para que en base a una secuencia pudieran resolver de forma adecuada los problemas, para posteriormente se les aplicaran algunos ejercicios donde eligieran la forma que más les pareciera correcta para la resolución de problemas. Y donde fuera posible observar la forma que eligieron para la resolución de problemas por parte de ellos.

De las actividades que se tomaron en cuenta fueron el hacer un pequeño examen, para el cual los alumnos resolvieron los ejercicios, y ya con los resultados de los mismos se dio por hecho que la presente propuesta dio resultado, ya que en la revisión de los trabajos y tareas los alumnos se apoyaron de las formas visuales para la resolución de problemas de probabilidad condicional.

También como parte del tema y de la propuesta se impartió una introducción al teorema de Bayes, ya que la probabilidad condicional involucra dicho teorema. Que en este caso es de gran importancia para la formación académica de los alumnos.

Se les pidió que resolvieran ejercicios de probabilidad condicional y del teorema de Bayes que consistieron en los siguientes ejercicios:

Problema 1

Investigadores encuestaron a 100 estudiantes sobre cual superpoder preferirían tener. En la siguiente tabla de contingencia están los datos de la muestra de estudiantes que respondieron la encuesta.

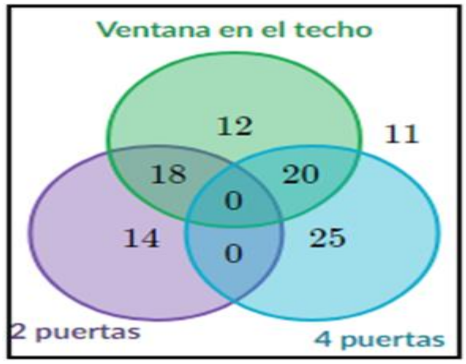
Superpoder	Hombre	Mujer	TOTAL
Volar	30	10	40
Invisibilidad	12	32	44
Otro	10	6	16
TOTAL	52	48	100

- Encuentra la probabilidad de que el estudiante fuera hombre, dado que eligió volar como su superpoder.
- Con la definición de Probabilidad condicional encuentre la probabilidad de que el estudiante es hombre, dado que eligió como superpoder poder volar.

Solución: $P(H|V) = \frac{P(H \cap V)}{P(V)} = \frac{30/100}{40/100} = \frac{30}{40} = 0.75$

Problema 2

En un estacionamiento están 100 autos con las siguientes características:



50 tienen quemacocos.

45 tiene 4 puertas.

32 tienen 2 puertas.

20 tienen quemacocos y 4 puertas.

18 tienen quemacocos y 2 puertas.

11 tienen más de 4 puertas.

Haga un diagrama y obtenga la probabilidad condicional siguiente:

a) La probabilidad de que un auto tenga 4 puertas, dado que tiene quemacocos

b) La probabilidad de que un auto tenga 2 puertas, dado que tiene quemacocos

SOLUCIÓN

$$P(4P|Q) = \frac{P(4P \cap Q)}{P(Q)} = \frac{20/100}{50/100} = \frac{20}{50} = 0.4$$

$$P(2P|Q) = \frac{P(2P \cap Q)}{P(Q)} = \frac{18/100}{50/100} = \frac{18}{50} = 0.36$$

Problema 3

En el departamento de enfermería de una universidad encuestaron a 200 egresados de sus programas sobre su trabajo actual. Hay diferentes niveles de estudios en enfermería disponibles en esa universidad. Encontraron las siguientes probabilidades:

P (licenciado) = 0.45

P (trabaja en enfermería) = 0.85

P (en enfermería y licenciado) = 0.4

- En base a la definición de probabilidad Condicional encuentre la probabilidad de que un egresado trabaje de enfermería dado que es licenciado.

Solución:

$P(TE|L) = \frac{P(TE\cap L)}{P(L)} = \frac{0.4/200}{4.5/200} = \frac{0.4}{0.45} = 0.888$

<u>Problema 4</u>

En la tabla de contingencia que esta abajo se dan los miles de viajeros en Massachusetts en 2015 de acuerdo al método de transporte solo de ida y el tiempo del trayecto.

	Menos de 15 minutos	15-29 minutos	30-44 minutos	45-59 minutos	60 minutos o mas	Total
Vehículo privado	636	908	590	257	256	2647
Transporte publico	9	54	96	62	108	329
Otro	115	70	23	7	7	222
Total	760	1032	709	326	371	3198

Con base en la definición de probabilidad condicional encuentre las siguientes probabilidades

- La probabilidad de la intersección de que el viaje sea de 30-44 minutos y sea en transporte publico
- La probabilidad de que haya viajado en vehículo privado dado que su viaje dura más de 30 minutos.
- Dado que utilizo otro medio de transporte y que su viaje haya sido de 45-59 minutos

$\mathrm{P}(30+|\mathrm{TP}) = \frac{96}{3198} = 0.030$

$\mathrm{P}(\mathrm{VPr}|30+) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{VPr}\cap 30,45,60)}{\mathrm{P}(30,45,60)} = \frac{1103/3198}{1406/3198} = \frac{1103}{1406} = 0.784$

$\mathrm{P}(45|\mathrm{OMT}) = \frac{\mathrm{P}(45\cap \mathrm{OMT})}{\mathrm{P}(\mathrm{OMT})} = \frac{7/3198}{222/3198} = \frac{7}{222} = 0.031$

<u>Problema 5</u>

Shreya hizo la siguiente tabla donde clasifico algunos países de acuerdo a la región y los costos de inicio de negocio promedio, como porcentaje del producto interno bruto per cápita (PIB) para un cierto año. Ella decidió que un costo alto significa mayor o igual a 8% pero menor que 70% del PIB y que muy alto significa mayor o igual a 70% del PIB.

Región	Muy alto	Alto	Bajo	Total
Este Asiatico & Pacifico	3	13	8	24
Europa & Asia Central	0	8	17	25
Latinoamérica & el Caribe	4	23	5	32
Oriente Próximo & África del Norte	4	9	7	20
OECD	0	5	27	32
Asia Meridional	0	7	1	8
África Subsahariana	21	22	4	47
Total	32	87	69	188

Encontrar la probabilidad de que el país esté en la región de África Subsahariana, dado que Shreya clasifica el costo de inicio de negocio del país como Muy alto

Solución:

$$P(AM|Al) = \frac{P(AM \cap Al)}{P(Al)} = \frac{7/188}{87/188} = \frac{7}{87} = 0.080$$

$$P(AS|MAl) = \frac{P(AS \cap MAl)}{P(MAl)} = \frac{21/188}{32/188} = \frac{21}{32} = 0.656$$

Problema 6

Para ir a clase, un estudiante utiliza su coche el 70 % de los días, mientras que va en autobús el resto de los días. Cuando utiliza su coche, llega tarde el 20 % de los días, mientras que si va en autobús llega a tiempo el 10 % de los días. Elegido un día al azar:

a) Calcular la probabilidad de que el estudiante llegue tarde.

b) Sabiendo que ha llegado a tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que haya venido en autobús?

c) Sabiendo que ha llegado tarde ¿cuál es la probabilidad de que haya venido en coche?

SOLUCIÓN:

a) $P(T) = P(C \cap T) + P(A \cap T) = (0.7 * 0.2) + (0.3 * 0.9) = 0.41$ ó 41%

b) $P(A|AT) = \frac{P(A \cap AT)}{P(AT)} = \frac{P(A \cap AT)}{P(A \cap AT) + P(C \cap AT)} = \frac{(0.3*0.1)}{(0.3*0.1)+(0.7*0.8)} = 0.05$

c) $P(C|T) = \frac{P(C \cap T)}{P(T)} = \frac{P(C \cap T)}{P(C \cap T) + P(A \cap T)} = \frac{(0.7*0.2)}{(0.7*0.2)+(0.3*0.9)} = \frac{0.14}{0.41} = 0.341$

Problema 7

En la sala de pediatría de un hospital, el 60% de los pacientes son niñas. De los niños el 35% son menores de 24 meses. El 20% de las niñas tienen menos de 24 meses. Un pediatra que ingresa a la sala selecciona un infante al azar.

a. Determine el valor de la probabilidad de que sea menor de 24 meses.

b. Si el infante resulta ser menor de 24 meses. Determine la probabilidad que sea una niña.

SOLUCIÓN:

Se definen los sucesos:

Suceso H: seleccionar una niña.

Suceso V: seleccionar un niño.

Suceso M: infante menor de 24 meses.

En los ejercicios de probabilidad total y teorema de bayes, es importante identificar los sucesos que forman la población y cuál es la característica que tienen en común dichos sucesos. Estos serán los sucesos condicionados.

a. En este caso, la población es de los infantes. Y la característica en común es que sean menores de 24 meses. Por lo tanto, la probabilidad de seleccionar un infante menor de 24 meses es un ejemplo de probabilidad total. Su probabilidad será:

$P(M) = P(H) * P(M|H) + P(V) * P(M|V) = (0.6 * 0.2) + (0.4 * 0.35) = 0.26$ ó 26%

b. Para identificar cuando en un ejercicio se hace referencia al teorema de Bayes, hay que partir de reconocer, esta es una probabilidad condicionada y que la característica común de los sucesos condicionantes ya ha ocurrido. Entonces, la probabilidad de que sea niña un infante menor de 24 meses será:

$$P(H|M) = \frac{P(H)*P(M|H)}{P(H)*P(M|H)+P(V)*P(M|V)} = \frac{(0.6*0.2)}{(0.6*0.2)+(0.4*0.35)} = \frac{0.12}{0.26} = 0.46 \text{ ó } 46\%$$

Problema 8

Un médico cirujano se especializa en cirugías estéticas. Entre sus pacientes, el 20% se realizan correcciones faciales, un 35% implantes mamarios y el restante en otras cirugías correctivas. Se sabe, además, que son de género masculino el 25% de los que se realizan correcciones faciales, 15% implantes mamarios y 40% otras cirugías correctivas. Si se selecciona un paciente al azar, determine:

a. Determine la probabilidad de que sea de género masculino

b. Si resulta que es de género masculino, determine la probabilidad que se haya realizado una cirugía de implantes mamarios.

SOLUCIÓN:

Se definen los sucesos:

Suceso F: pacientes que se realizan cirugías faciales

Suceso M: pacientes que se realizan implantes mamarios

Suceso O: pacientes que se realizan otras cirugías correctivas

Suceso H: pacientes de género masculino

a. La probabilidad de que sea de género masculino se refiere a un problema de probabilidad total, ya que es el suceso condicionado y las cirugías los condicionantes. Dicho valor será:

$$P(H) = P(F) * P(H|F) + P(M) * P(H|M) + P(O) * P(H|O)$$

$$P(H) = (0.2 * 0.25) + (0.35 * 0.15) + (0.45 * 0.40) = 0.28 \text{ ó } 28\,\%$$

b. Como el suceso condicionado ha ocurrido entonces se aplica el teorema de bayes, luego, el valor de la probabilidad será:

$$P(M|H) = \frac{P(M) * P(H|M)}{P(F) * P(H|F) + P(M) * P(H|M) + P(O) * P(H|O)}$$

$$P(M|H) = \frac{0.35 * 0.15}{(0.2 * 0.25) + (0.35 * 0.15) + 0.45 * 0.40)} = \frac{0.052}{0.282} = 0.19 \text{ ó } 19\%$$

<u>Problema 9</u>

Un Doctor dispone de tres equipos electrónicos para realizar ultrasonidos. El uso que le da a cada equipo es de 25% al primero, 35% el segundo en y 40% el tercero. Se sabe que los aparatos tienen probabilidades de error de 1%, 2% y 3% respectivamente. Un paciente busca el resultado de una ecografía y observa que tiene un error. Determine la probabilidad de que se ha usado el primer aparato.

SOLUCIÓN:

Se definen los sucesos:

Suceso P: seleccionar el primer aparato

Suceso S: seleccionar el segundo aparato

Suceso T: seleccionar el tercer aparato

Suceso E: seleccionar un resultado con error

Se puede observar que la pregunta es sobre determinar la probabilidad de que un examen errado sea del primer aparato, es decir, ya ha ocurrido el error. Por lo tanto, debemos recurrir al teorema de bayes. Claro está, que es necesario de igual forma obtener la probabilidad de que los aparatos produzcan un resultado erróneo, por lo tanto:

$$P(P|E) = \frac{P(P) * P(E|P)}{P(P) * P(E|P) + P(S) * P(E|S) + P(T) * P(E|T)}$$

$$P(P|E) = \frac{0.25*0.01}{(0.25*0.01)+(0.35*0.02)+(0.4*0.03)} \frac{0.0025}{0.0215} = 0.116 \text{ ó } 11.6\%$$

De los ejercicios los alumnos resolvieron algunos, del 1 al 5 solo resolvieron 3 y del 6 al 9 también resolvieron 3, y algunos resultados fueron los siguientes (véase anexos)

CONCLUSION

Debido a que la pandemia fue un impedimento para llevar a cabo la presente propuesta la cual se tenía contemplada para implementarse en dos grupos de estudiantes de nivel superior, para los cuales a uno se la aplicaría la presente propuesta visual e intuitiva, y al otro se le pretendía dar el mismo contenido que al primer grupo, pero de la manera tradicional, para al final hacer una prueba no paramétrica y comparar los resultados de las medias y verificar si la propuesta es buena o no.

13. BIBLIOGRAFIA

Anderson, D., Sweeney, D. y Williams, T. (2005). Estadística para administración y economía (8.ª ed.). México: Thomson.

Anderson D., Sweeney D., Williams T. (2008) Estadística para la administración y economía. Décima edición. Cengage Learning.

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas. Estadística y azar. Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemátic1as Thales.

Batanero, Carmen. (2001). Didáctica de la Estadística: Granada. GEEUG.

Berenson, M., Levine, D. y Krehbiel, T. (2001), Estadística para administración (2.ª ed.). México: Prentice Hall.

Camargo, A., García, J., Minjares, M., Rodríguez, A. y Serrano, R. (2010). Espacio muestral y eventos y los axiomas de la Probabilidad. En Estadística I. Licenciatura en Contaduría (pp. 129-165). México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Conceptos Básicos de Estadística. (S.F.) Texto completo en: http://personal.redestb.es/ztt/tem/t11_estadistica_introduccion.htm

Conceptos Básicos de Estadística (S.F). Texto completo en: http://www.gestiopolis.com/recursos/experto/catsexp/pagans/eco/44/estadistica.htm

Daniel Peña Sánchez de Rivera. Fundamentos de estadística. Madrid: Alianza Editorial, [2008. ISBN 978-84-206-8380-5.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D. Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135.

Godino J.D. (1996), Mathematical concepts, their meaning, and understanding. En L. Puig y A. Gutiérrez (eds.) Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 417-424). Valencia: Universidad de Valencia.

Godino J.D. (2001), Confrontación de herramientas teóricas para el análisis cognitivo en didáctica de las matemáticas. XVI Reunión del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (Huesca, 31 marzo 2001) http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm/siidm/ Huesca/Confrontación.pdf

Godino J.D. y Batanero C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques. 14(3) 325-355.

Godino J.D. y Batanero C. (1998), Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (eds.) Mathematics Education as a research domain: A search for identity (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

Godino J.D. y Recio A.M. (1998), A semiotic model for analyzing the relationships between thought, language and context in mathematics education. En A. Olivier y K. Newstead (eds.) Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 1-8). South Africa: University of Stellenbosch.

Hill, H., Ball, D., & Schilling, S. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400. Retrieved November 30, 2020, from http://www.jstor.org/stable/40539304

Introduction to Probability Charles M. Grinstead Swarthmore College, J. Laurie Snell Dartmouth College

Levin, R. y Rubin, D. (2004). Estadística para administración y economía (7.ª ed.). México: Pearson Educación.

Lind D., Marchal, W. y Wathen, S. (2008), Estadística aplicada a los negocios y la economía (13.ª ed.). México: McGraw-Hill.

Mendenhall, William. Wackerly, Dennos D. and Scheaffer Richard L. (1994). Estadística Matemática con Aplicaciones. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Mendenhall, William and Reinmuth, James E. (1978). Estadística para Administración y Economía: México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Viera Torres, Trilce (2003). El aprendizaje verbal significativo de Ausubel. Algunas consideraciones desde el enfoque histórico cultural. Universidades, (26), 37-43. [Fecha de Consulta 12 de abril de 2021]. ISSN: 0041-8935. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=37302605

Walpole R., Myers R., Myers S., Ye K. Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias. Octava Edición. Pearson, Prentice Hall. 2007

https://programas.cuaed.unam.mx/repositorio/moodle/pluginfile.php/905/mod_resource/content/1/contenido/index.html

https://revistascientificas.cuc.edu.co/culturaeducacionysociedad/article/view/2141/2558

https://www.eltiempo.com/archivo/documento/CMS-16471600 https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/epsilon_condicional.pdf

http://dspace.utb.edu.ec/bitstream/handle/49000/253/T-UTB-FAFI-SIT00033.04.pdf;jsessionid=EDE2F2FF75FD2D0E47E160E9B58A3720?sequence=3

https://www.redalyc.org/jatsRepo/4759/475958170006/html/index.html

BÚSQUEDA BIBLIOGRÁFICA Y ANÁLISIS DE PUBLICACIONES

UNIVERSIDAD DE GRANADA (CARMEN BATANERO)

https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/didacticaestadistica.pdf

https://iase-web.org/ IASE, the International Association for Statistical Education

https://masteres.ugr.es/didacticamatematica/Máster en Didáctica de la Matemática, adaptado a la normativa del Espacio Europeo de Educación Superior.

https://www.redalyc.org/ Sistema de Información Científica Redalyc Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe

https://www.cinvestav.mx/ CINVESTAV El Centro de Investigación y de Estudios Avanzados

https://dialnet.unirioja.es/ la mayor hemeroteca de artículos científicos hispanos en Internet.

http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262009000300006

https://plato.stanford.edu/archives/fall2014/entries/intuition/

https://www.universidadviu.com/que-se-entiende-por-inteligencia-intuitiva/

https://plato.stanford.edu/archives/fall2014/entries/intuition/

http://ocs.editorial.upv.es/index.php/INRED/INRED2017/paper/viewFile/6725/2555

https://www.redalyc.org/pdf/140/14030110004.pdf

http://riem.facmed.unam.mx/node/89

https://www.fcfm.buap.mx/EIEPE2017/memorias-EIEPE2017/extenso/P23.pdf

http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v21n3/v21n3a6.pdf

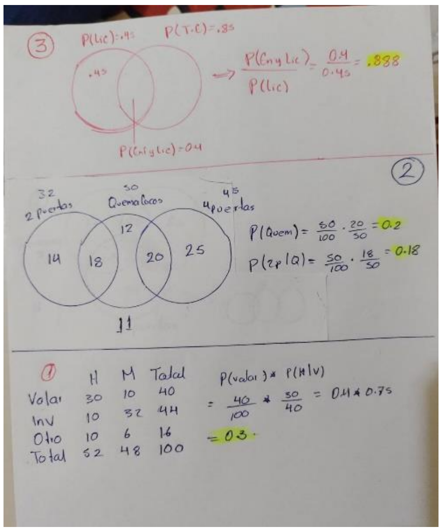
https://www.elperiodico.com/es/port/vida/20190715/hemisferio-cerebral-personalidad-lateralidad-piscologia

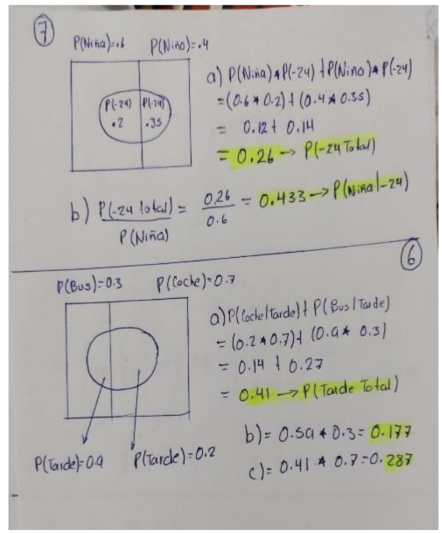
http://fs.unm.edu/TeoriaConjuntosProbabilidades.pdf Asociación Latinoamericana de Ciencias Neutrosóficas Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas Universidad de Guayaquil 2018

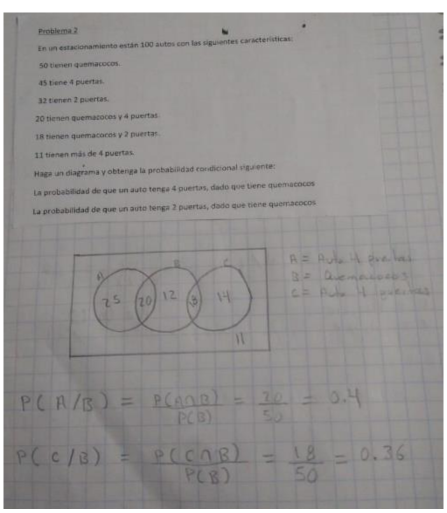
https://www.orientacionandujar.es/wp-content/uploads/2017/09/TAXONOMIA-DE-BLOOM-PDF.pdf Taxonomía de Bloom

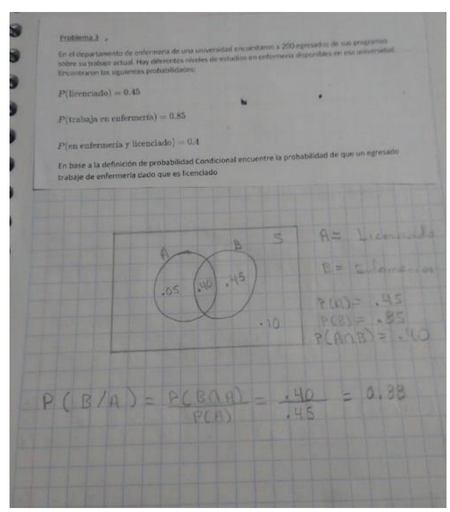
https://www.educaciontrespuntocero.com/noticias/paisajes-de-aprendizaje/ Los paisajes de aprendizaje: una herramienta didáctica personalizada.

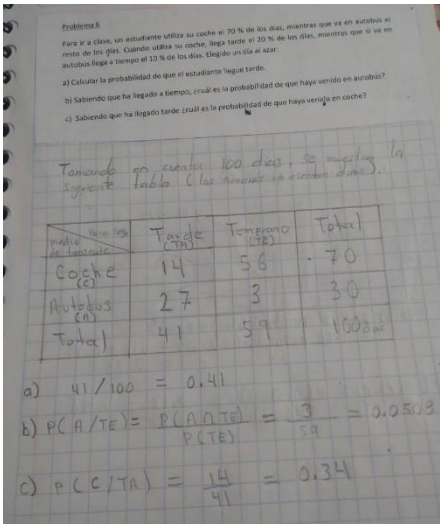
14. ANEXOS



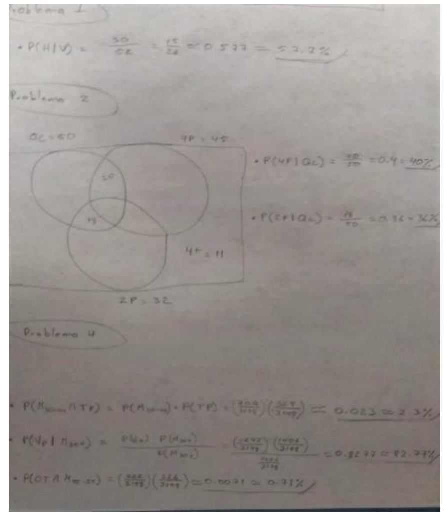




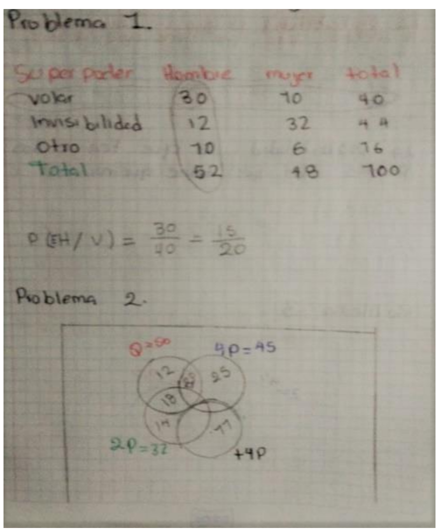




Problema 6
Para ir a clase, un estudiante utiliza su coche el 70 % de los días, mientras que va en autobús el resto de los días. Cuando utiliza su coche, llega tarde el 20 % de los días, mientras que si va en autobús llega a tiempo el 10 % de los días. Elegido un día al azar:
a) Calcular la probabilidad de que el estudiante llegue tarde.
b) Sabiendo que ha llegado a tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que haya venido en autobús?
c) Sabiendo que ha llegado tarde ¿cuál es la probabilidad de que haya venido en coche?
Tomando en cuenta 100 días, se muestra la siguiente tabla
Tarde (TA)
Temprano (TE)
Total
Coche (C) 14 56 70
Autobus (A) 27 3 30
Total 41 59 100
a) 41 / 100 = 0.41
b) P(A / TE) = P(A ∩ TE) / P(TE) = 3 / 59 = 0.0508
c) P(C / TA) = 14 / 41 = 0.34



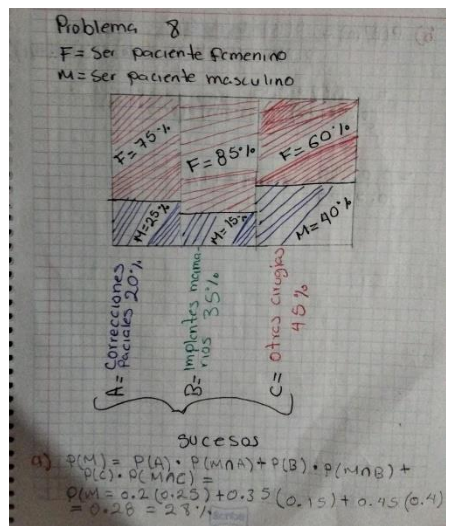
Problema 1
• P(H|V) = 30/52 = 15/26 ≈ 0.577 = 57.7%
Problema 2
QC = 50
4P = 45
20
14
4P = 11
2P = 32
• P(4P|QC) = 20/50 = 0.4 = 40%
• P(2P|QC) = 18/50 = 0.36 = 36%
Problema 4
• P(M ∩ TP) = P(M) • P(TP) ≈ 0.023 ≈ 2.3%
≈ 0.8277 ≈ 82.77%
≈ 0.0071 ≈ 0.71%



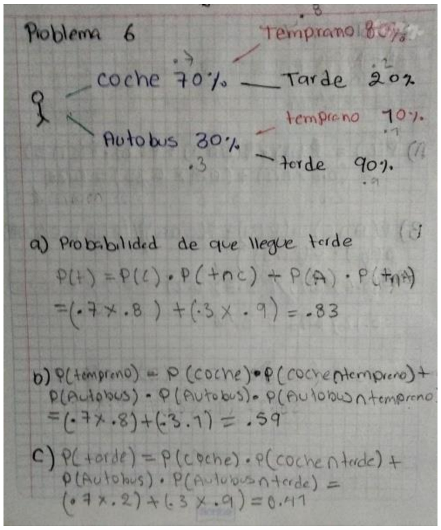
Problema 1.

Super poder	Hombre	mujer	total
volar	30	10	40
invisibilidad	12	32	44
Otro	10	6	16
Total	52	48	100

P (H / V) = 30/40 = 15/20
Problema 2.
Q=50
4P=45
12
10
35
18
14
11
2P=32
+4P



Problema 8.
F = Ser paciente femenino
M = Ser paciente masculino
F = 75%
F = 85%
F = 60%
M = 25%
M = 15%
M = 40%
A = Correcciones Faciales 20%
B = Implantes mamarios 35%
C = Otras cirugías 45%
Sucesos
a) P(M) = P(A) • P(M∩A) + P(B) • P(M∩B) + P(C) • P(M∩C) =
P(M) = 0.2 (0.25) + 0.35 (0.15) + 0.45 (0.4)
= 0.28 = 28%



Problema 6

coche 70% — Tarde 20%

Temprano 80%

Autobus 30% — tarde 90%

temprano 10%

a) Probabilidad de que llegue tarde

$P(t) = P(C) \cdot P(t \cap C) + P(A) \cdot P(t \cap A)$

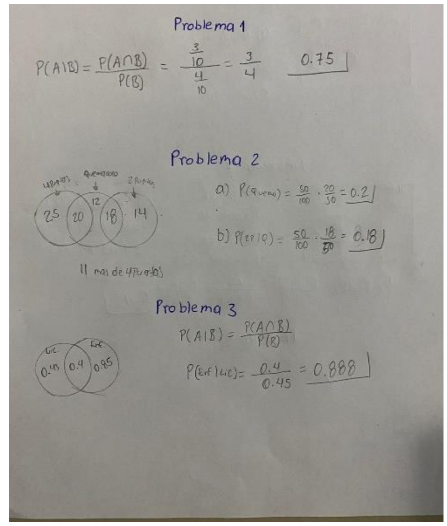
$= (.7 \times .8) + (.3 \times .9) = .83$

b) $P(\text{temprano}) = P(\text{coche}) \cdot P(\text{coche} \cap \text{temprano}) + P(\text{Autobus}) \cdot P(\text{Autobus}) \cdot P(\text{Autobus} \cap \text{temprano})$

$= (.7 \times .8) + (.3 . .1) = .59$

c) $P(\text{tarde}) = P(\text{coche}) \cdot P(\text{coche} \cap \text{tarde}) + P(\text{Autobus}) \cdot P(\text{Autobus} \cap \text{tarde}) =$

$(.7 \times .2) + (.3 \times .9) = 0.41$



Problema 1

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{3}{4}$ $\quad 0.75$

Problema 2

a) $P(\text{Queso}) = \frac{50}{100} \cdot \frac{20}{50} = 0.2$

b) $P(\text{Ep}|Q) = \frac{50}{100} \cdot \frac{18}{50} = 0.18$

11 mas de 4 pupitos

Problema 3

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(\text{Enf}|\text{Lic}) = \frac{0.4}{0.45} = 0.888$