UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

CONVERSACIÓN REFLEXIVA COMO MEDIO PARA DESARROLLAR CONOCIMIENTO PROFESIONAL EN FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA:

EDDIE DE JESÚS APARICIO LANDA

DIRECTOR DE TESIS:

DRA. MARÍA GUADALUPE CABAÑAS SÁNCHEZ

Chilpancingo de los Bravo, Guerrero

Enero de 2021

Agradecimientos

En este espacio expreso mi más profundo agradecimiento y reconocimiento a todos quienes en más de una forma fueron y me dieron la motivación suficiente para emprender y concluir esta experiencia formativa y de desarrollo personal-profesional. A todos ustedes: Familia, Amigos, Compañeros e Instituciones, ***¡gracias!***

Gracias al PRODEP por la beca otorgada para la realización de mis estudios doctorales y a la Universidad Autónoma de Yucatán por las facilidades dadas para conseguir la habilitación académica necesaria para fortalecer mi trabajo profesional.

Muy en especial, gracias Landy Sosa por acompañarme con tus siempre palabras de aliento, motivación y empuje. Cada opinión y sugerencia tuya fueron y serán invaluables.

También agradezco a la Dra. Guadalupe Cabañas, por todas sus consideraciones, confianza, apoyo y facilidades otorgadas hacia mi persona en la realización de esta investigación.

A todos y cada uno de los revisores de mi trabajo les agradezco su tiempo y trabajo puesto en la lectura del documento, pues con sus observaciones y sugerencias no solo hicieron posible una mejor versión de éste, sino que también me ayudaron a crecer significativamente en lo académico. Así que por y en razón de todo ello, les reitero mi agradecimiento eterno.

Finalmente, pero no por ello menos importante, doy gracias a la vida por haberme dado la oportunidad de seguir experimentando nuevas experiencias de aprendizaje en compañía de mis seres más queridos.

Resumen

El objetivo de esta investigación consistió en analizar cómo un proceso de conversación reflexiva (CR) promueve el desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza en futuros profesores de matemáticas y caracterizar tal conocimiento. Esto último con base en los dos dominios del conocimiento matemático para la enseñanza declarados en Ball, Thames y Phelps (2008) y Hill, Ball y Schilling (2008).

Para lo anterior, se configuró un esquema teórico de CR a partir de las ideas de aprendizaje conversacional de Pask (1976) y de Kolb y Kolb (2017). Este esquema fue usado para guiar las conversaciones al interior del aula por parte del profesor formador del grupo participante, así como para recolectar los respectivos datos. El procesamiento y análisis de los datos se hizo con base en el esquema de CR y la metodología cualitativa del Análisis de Conversación. Los datos atañen a las conversaciones sostenidas por 11 participantes a lo largo de 2 sesiones de trabajo de 90 minutos cada una.

Se observó que la CR favoreció el diálogo abierto, colaborativo y flexible entre los participantes, permitiéndoles compartir y desarrollar conocimiento profesional. Los resultados muestran que hubo un desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza en torno al tema de paridad de números enteros y el de generalización matemática, ésta última en un sentido de proceso-producto. Respecto a las características de dicho conocimiento, se encontró que si bien éstas tienen relación con las dadas por Ball *et al* (2008), ello no sucede en su totalidad, por ejemplo, no se identificaron características relativas a los subdominios "conocimiento del horizonte matemático" y "conocimiento del currículo".

Se concluye que, de acuerdo con el tipo de conocimiento desarrollado por los participantes, la CR puede promover un desarrollo más integral de tal conocimiento si se robustece una discusión abierta y genuina entre los interlocutores de modo que se ayude a reflexionar más profunda y sistemáticamente sobre la práctica de enseñanza profesional.

Palabras Clave: Conversación Reflexiva, Futuros Profesores, Conocimiento Matemático para la Enseñanza, Paridad de Números, Generalización Matemática.

Abstract

The objective of this research was to analyze how a reflective conversation (RC) process promotes the development of mathematical knowledge for teaching in future mathematics teachers and to characterize such knowledge. The latter based on the two domains of mathematical knowledge for teaching declared in Ball, Thames, and Phelps (2008) and Hill, Ball and Schilling (2008).

For the above, a theoretical RC scheme was configured based on the conversational learning ideas of Pask (1976) and Kolb and Kolb (2017). This scheme was used to guide the conversations inside the classroom by the teacher of the participating group, as well as to collect the respective data. The data processing and analysis was made based on the RC scheme and the qualitative methodology of Conversation Analysis. The data refer to the conversations held by 11 participants during 2 work sessions of 90 minutes each.

It was observed that RC favored open, collaborative, and flexible dialogue among participants, allowing them to share and develop professional knowledge. The results show that there was a development of mathematical knowledge for teaching around the issue of parity of integers and that of mathematical generalization, the latter in a process-product sense. Regarding the characteristics of said knowledge, it was found that although these are related to those given by Ball *et al*. (2008), this does not happen in their entirety, for example, no relationship was identified with the subdomains "knowledge of the mathematical horizon" and “knowledge of the curriculum”.

It is concluded that, according to the type of knowledge developed by the participants, RC can contribute to a more comprehensive development of such knowledge if an open and genuine discussion between the interlocutors is strengthened in such a way that it helps to reflect more deeply and systematically on professional teaching practice.

Key Words: Reflective Conversation, Future Teachers, Mathematical Knowledge for Teaching, Parity of Numbers, Mathematical Generalization.

Índice de Contenido

Introducción general *1*

CAPÍTULO 1. PRESENTACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN *5*

1.1. Antecedentes de la investigación........ 5

1.2. Pregunta de investigación 20

1.3. Objetivo de Investigación 22

1.4. Justificación de la Investigación........ 23

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO........ *25*

2.1. Aprendizaje del Profesor: Perspectiva Constructivista........ 25

2.2. Aprendizaje del Profesor: Perspectiva Socioconstructivista........ 28

2.3. Conocimiento del Profesor de Matemáticas 37

2.4. Conocimiento Matemático para la Enseñanza 39

2.5. Conversación y Construcción de Conocimiento 47

2.6. Aprendizaje Conversacional 56

2.7. Conversación Reflexiva 61

2.8. Conversación Reflexiva y Conocimiento del Futuro Profesor de Matemáticas 62

CAPÍTULO 3. MARCO METODOLÓGICO........ *69*

3.1. Tipo y Enfoque de la Investigación........ 69

3.2. Población y Contexto de la Investigación........ 71

3.3. Variables en la Investigación 72

3.4. Recolección de Datos........ 75

3.5. Procesamiento y Análisis de Datos 78

CAPÍTULO 4. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN *96*

4.1.Turnos de Habla 96

4.2. Organización Secuencial........ 106

4.3. Nivel Procedimental en la Conversación Reflexiva 110

4.4. Nivel Conceptual en la Conversación Reflexiva........ 113

4.5. Tránsito entre Modos de Aprendizaje en la Conversación Reflexiva 117

4.6. Conocimiento Matemático para la Enseñanza Desarrollado en CR........ 127

4.7. Resumen del Capítulo 134
CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS 136
5.1. Conversación Reflexiva y Desarrollo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza 136
5.2. Conversación reflexiva y Aprendizaje del Futuro Profesor de Matemáticas.......... 138
5.3. Discusión General del Conocimiento Matemático para la Enseñanza Desarrollado ……………………………………………………………………………..141
5.4. Resumen del Capítulo 143
CAPÍTULO 6. CONCLUSIÓN DE LA INVESTIGACIÓN.. 145
6.1. Síntesis de los Hallazgos.. 145
6.2. Implicaciones de los Resultados... 146
6.3 Limitaciones de la Investigación 150
6.4. Conclusiones de la Investigación 151
6.5. Aportes al Campo de Estudio 152
REFERENCIAS.. 154

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1. Conocimiento matemático para la enseñanza (Hill *et al.*, 2008)

Figura 2.2. Interacción entre profesores, estudiantes y matemáticas (Huinker y Freckmanne, 2004)

Figura 2.3. Modelo de una conversación según Pask (1976). Fuente: Scott (2001).

Figura 2.4. Ciclo de Aprendizaje Experiencial (Kolb y Kolb, 2017).

Figura 2.5. Ciclo de aprendizaje conversacional (Kolb y Kolb, 2017).

Figura 2.6. CR y Aprendizaje, basado en Pask (1976) y Kolb y Kolb (2017)

Figura 4.1. Proceso de aprendizaje y conocimiento matemático para la enseñanza desarrollado en CR por los profesores en formación.

LISTA DE TABLAS

Tabla 3.1. Clasificación y análisis de los datos en el nivel de turnos de habla

Tabla.3.2. Clasificación y análisis de los datos en el nivel de secuencia organizacional

Tabla 3.3. Clasificación y análisis de los datos en el nivel procedimental

Tabla 3.4. Clasificación y análisis de los datos en el nivel conceptual

Tabla 4.1. Episodios temáticos identificados en los turnos de habla

Tabla 4.2. Roles asumidos en los turnos de habla

Tabla 4.3. Organización secuencial: Acciones coordinadas, actividades y contenidos

Tabla 4.4. Nivel Procedimental: Procesos y Conocimientos Procedimentales

Tabla 4.5. Nivel Conceptual: Conceptos y Conocimientos Conceptuales

LISTA DE IMÁGENES

Imagen 4.1. Procedimiento aritmético dado por M1 y M2 al inicio de la tarea en el modo CE.

Imagen 4.2. Procedimiento algebraico dado por M3 y H1 al inicio de la tarea en el modo CE.

Imagen 4.3. Representación geométrica de números pares como medidas de áreas de rectángulos, dado por M5.

Imagen 4.4. Idea compartida por H1 sobre la idea de M5.

Imagen 4.5. Propuesta geométrica dada por M4, sobre el cuadrado de un impar y de su doble.

Imagen 4.6. Representación geométrica general dada por H1 de la multiplicación de impares con pares consecutivos.

Imagen 4.7. Representación geométrica del cuadrado de un número impar reducido en una unidad, dado por M5.

Imagen 4.8. Desarrollo numérico dado por H2 sobre el proceso de elevar un impar al cuadrado y restarle una unidad al resultado.

Imagen 4.9. Desarrollo algebraico dado por H3 sobre el proceso de elevar un impar al cuadrado y restarle una unidad al resultado.

Introducción general

En los recientes años el estudio del aprendizaje y conocimiento profesional del profesor de matemáticas se ha ido posicionando como uno de los temas centrales en las investigaciones reportadas en el campo de la Matemática Educativa, Educación Matemática o Didáctica de las Matemáticas, según sea la latitud desde la cual se cultive dicho campo disciplinar (Chapman, 2013; Ponte y Chapman, 2016; Sánchez, 2011). Ello tiene su base en la idea de que la calidad de la práctica de enseñanza de los profesores tiene relación con su conocimiento profesional.

Actualmente existen varias propuestas teóricas sobre el tipo de conocimientos profesionales que deben o deberían tener los profesores para enseñar matemáticas de manera eficiente (Carrillo-Yañez *et al*., 2018; Godino, Batanero y Font 2007; Llinares, Ivars, Buforn y Groenwald, 2019; Ponte y Chapman, 2016; Rowland y Ruthven, 2011; Schoenfeld, 2010), en particular, con aquel que es específico de dicha práctica y se puede identificar bajo el término genérico de "conocimiento matemático para la enseñanza" (Ball, Thames y Phelps, 2008), que a su vez se basa en las ideas propuestas por Shulman (1986) quien sugirió que los profesores requieren conocimientos que van más allá de una pedagogía general, requieren de una pedagogía relacionada con la especificidad del contenido a enseñar.

Sin embargo, aun cuando se ha avanzado en la problematización y tipificación del conocimiento matemático para la enseñanza, investigadores como Silverman y Thompson (2008) dicen que "existe una comprensión limitada de qué es, cómo se puede reconocer y cómo se puede desarrollar en la mente de los profesores" (p.2). Además, algunos otros refieren que la enseñanza de las matemáticas demanda varios aspectos relacionados con la práctica que no se pueden resolver sólo con dotar de conocimientos al profesorado (Ponte, 2012).

Una consideración común en la comunidad investigativa en el campo, es que aún se está lejos de un consenso sobre un posicionamiento teórico que describa el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas (Rowland y Ruthven, 2011). De hecho, Thanheiser *et al*. (2014), sostienen que se sabe muy poco sobre cómo aprenden los profesores y futuros profesores, mientras que Potari y Ponte (2017) afirman que pocos estudios se han interesado por el proceso de aprendizaje y desarrollo del conocimiento profesional del futuro profesor de matemáticas, por ejemplo, analizando las interacciones que puedan llevar a ello desde los programas de formación inicial del profesorado.

En el sentido anterior, el interés de esta investigación fue aportar información que atienda esta problemática a partir de explorar y analizar cómo un proceso de conversación reflexiva en un contexto de interacción social (como es el aula) promueve el desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza en futuros profesores, pues se asume que el aula representa un espacio de aprendizaje para aprender a enseñar, y se ha documentado que tanto la conversación como la reflexión pueden potenciar las oportunidades para ello (Arcavi, 2016; Brodie y Shalem, 2011; Chamoso, Cáceres y Azcárate, 2012; Horn y Little, 2010; Jaworski, 2006; Krainer y Llinares, 2010; Ponte y Chapman, 2016; Preciado-Babb *et al*., 2015; Rasmussen, 2016; Saylor y Johnson, 2014; Toom, Husu y Patrikainen, 2015).

Dicho así, el contenido de la investigación que a continuación se presenta está organizado en seis capítulos. En el capítulo 1 se expone y fundamenta como problema de estudio, la necesidad de analizar y aportar evidencia sobre el tipo de procesos que pueden llevar a desarrollar aprendizajes y conocimientos profesionales en futuros profesores de matemáticas. En particular, se fundamenta la pertinencia de considerar a la conversación reflexiva como un medio para promover el desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza.

En el capítulo 2 se enmarca a la conversación reflexiva desde una perspectiva social del aprendizaje, toda vez que la conversación implica un proceso (sociocognitivo) de habla en interacción (Mazeland, 2006), además, existe una clara tendencia a considerar tal perspectiva en estudios sobre el aprendizaje de profesores y futuros profesores (Krainer y Llinares, 2010; Lerman, 2006; Ponte y Chapman, 2016). No obstante, también se recurre a teorías del aprendizaje conversacional desarrolladas en la cibernética (Pask, 1976) y psicología educativa (Kolb y Kolb, 2017), para su descripción. De este modo, la conversación reflexiva es descrita como un proceso comunicativo-reflexivo entre dos o más personas cuya implicación va más allá de compartir información o experiencias, implica hablar y escuchar reflexivamente (Shön, 1992), de modo que puede conducir al aprendizaje y desarrollo de conocimiento.

En el capítulo 3 se describe el uso del *análisis de conversación* (Mazeland, 2006; Wooffitt, 2005), como metodología empleada en el procesamiento y análisis de los datos cualitativos obtenidos mediante videograbaciones de las conversaciones de los participantes en la investigación. Así, se identificaron episodios temáticos y secuencias organizacionales del habla en interacción a partir de los cuales se obtuvo información sobre los aprendizajes conceptuales y procedimentales matemáticos generados en relación con la futura práctica de enseñanza durante la conversación reflexiva.

En el capítulo 4 se presentan los resultados derivados del análisis conversacional. Se muestra que la conversación reflexiva apoyó el desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza, concretamente, en torno a la *paridad de números enteros* y la *generalización matemática* en educación básica. Asimismo, se reporta que los participantes reconocieron la importancia de usar diversas representaciones (aritméticas, algebraicas y geométricas) como recursos auxiliares en la enseñanza de las matemáticas, siendo esto parte de su conocimiento desarrollado. Se evidencia que la conversación reflexiva favoreció tres tipos de reflexiones (anticipadas, actuales y retrospectivas) en relación con el conocimiento matemático de los futuros profesores y la práctica de enseñanza futura. Se cierra indicando que, si bien el conocimiento desarrollado posee características referidas en los dominios y subdominios que caracterizan al conocimiento matemático para la enseñanza según la tipificación dada por Ball *et al*. (2008) y Hill *et al*. (2008), no se encontró relación con las características de los subdominios: "conocimiento del horizonte matemático" y "conocimiento del currículo".

En el capítulo 5 se discute que la conversación reflexiva puede ser un medio para promover el aprendizaje y desarrollo de conocimiento profesional en futuros profesores de matemáticas a la luz de los resultados obtenidos y de lo reportado en estudios sobre el tema. Por ejemplo, se discute cómo la CR favoreció la reflexión y el cuestionamiento de los conocimientos matemáticos de los participantes, dando pie al análisis de tales conocimientos (Ponte y Chapman, 2016). Asimismo, se discute que la CR favoreció el reconocimiento de aspectos importantes de la enseñanza y aprendizaje tales como la pertinencia de presentar de una u otra forma un contenido matemático a los estudiantes (Llinares, Ivars, Buforn y

Groenwald, 2019) y propició una conexión entre lo matemático y lo pedagógico del contenido a enseñar (Masingila, Olanoff y Kimani, 2017).

Por último, en el capítulo 6 se recogen algunas implicaciones de esta investigación para con futuras investigaciones sobre el tema tratado. Por ejemplo, la posibilidad de su reproducción con profesores en ejercicio a fin de analizar los alcances de la conversación reflexiva en el desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza en otros contextos. También, se discute el tipo de limitaciones y alcances de la investigación así como la conclusión de la misma. Entre lo que se concluye está el que la conversación reflexiva bien podría ser considerada como uno de los andamiajes reportados como necesarios para favorecer reflexiones significativas en profesores y futuros profesores (Roberts, 2016; Saylor y Johnson, 2014).

CAPÍTULO 1

PRESENTACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación exploró y analizó cómo la conversación reflexiva al interior del aula promueve el desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza en futuros profesores de matemáticas y las características de tal conocimiento. Es así como en este capítulo se presentan los antecedentes, el problema, la pregunta, el objetivo y la justificación de la investigación.

1.1. Antecedentes de la investigación

En esta sección se describe de manera breve cómo en el campo del aprendizaje profesional del profesor en general y de matemáticas en particular, hay una tendencia hacia su análisis desde una perspectiva social del aprendizaje, en dónde los énfasis se ponen entre otros aspectos, en el conocimiento matemático considerado necesario para la práctica de enseñanza (Chapman, 2013), en el papel de lo colectivo (Potari, Sakonidis, Chatzigoula y Manaridis, 2010), de la reflexión (Rassmusen, 2016) y la conversación (Arcavi, 2016).

Profesionalización del Profesorado

Desde hace más de tres décadas, bajo la premisa de que si se desea mejorar la "calidad" de la enseñanza y los aprendizajes de los estudiantes, habría que conocer más sobre las necesidades de formación de los futuros profesores y de desarrollo profesional de los profesores en el ejercicio de su práctica de enseñanza, se han venido realizando importantes esfuerzos por reflexionar e indagar respecto a los diversos aspectos que tienen influencia en la forma en que futuros profesores y profesores en ejercicio aprenden y construyen conocimiento para o en relación con la práctica docente (Perrenoud, 2004; Shön, 1983; Shulman, 1986).

En el campo específico de la Matemática Educativa, Artigue (2004) menciona que el profesor es un actor esencial de la relación didáctica que debe ser problematizado si se desea mejorar las prácticas de enseñanza y, por ende, los aprendizajes de los estudiantes.

> Ya nadie duda, hoy día, de que los profesores son el eslabón clave de cualquier evolución de la enseñanza de la matemática. Pero considerar al profesor como un elemento clave del sistema no es suficiente si ese profesor no es problematizado como verdadero actor, si no se intenta comprender sus prácticas y aquello que las determinan, las restricciones a las que está sujeto y sus márgenes de maniobra, los conocimientos disciplinares y otros que hacen su competencia profesional y el modo en que se construyen (Artigue, 2004, p. 25).

Ejemplo de lo anterior es el crecimiento de publicaciones internacionales tales como los "Handbooks" de Educación Matemática, principalmente a partir de que apareciera su primera edición en el año de mil novecientos noventa y seis (Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick y Laborde, 1996), de Formación del Profesor de Matemáticas (Wood, Jaworski, Krainer, Tirosh y Sullivan, 2008), así como de diversas revistas orientadas a este asunto, tal como la "Journal of Mathematics Teacher Education", que iniciara en el año de mil novecientos noventa y ocho.

A lo anterior se le suman las diversas discusiones y presentaciones que sobre el tema del conocimiento y oportunidades de aprendizaje del profesor de matemáticas han realizado diversos grupos y comisiones en sus reuniones y congresos internacionales. Se destaca aquí lo realizado por el Grupo de Psicología en Educación Matemática, quienes mayormente se habían centrado en el estudiante y empezaron a considerar al profesor (Gutiérrez y Boero, 2006), y la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI, por sus siglas en inglés), que como parte de sus programas en el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), ha tocado el tema a partir de su décima edición y que continúa hasta la edición decimocuarta del año 2020. Más recientemente, también se ha sumado a estos esfuerzos el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C., que a través de su Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa y sus respectivas publicaciones de actas, se han presentado y publicado diversos trabajos relacionados con la profesionalización del profesorado o más concretamente, con la profesionalización de los procesos implicados en el aprender a enseñar matemáticas, con mayor fuerza a partir del año dos mil quince.

Paralelamente al interés por ahondar sobre el problema que representa la profesionalización, se han realizado esfuerzos importantes por precisar qué ha de entenderse por ejemplo, por desarrollo profesional del profesor o futuro profesor de matemáticas (DPPM), pues si bien las propuestas son muchas y diversas, poco se ha logrado consensuar sobre qué es y cómo pudiera favorecerse. Algunos investigadores han planteado que dicho desarrollo es un crecimiento continuo a lo largo del tiempo (Sowder, 2007), que puede variar dependiendo de aspectos tales como la personalidad del profesor (Pehkonen, 2006). Algunos otros como Eraut, lo entienden como un "proceso de crecimiento continuo y natural en el que se van adquiriendo gradualmente confianza, nuevas perspectivas, incremento en los conocimientos, descubriendo nuevos métodos y asumiendo nuevos roles" (como se citó en Ramos - Rodríguez, Flores, Ponte y Moreno, 2015, p. 390).

En este orden de ideas, se ha ido reconociendo que el DPPM es un proceso complejo de aprendizaje del profesor o futuro profesor que se nutre de las experiencias acumuladas durante la práctica de enseñanza o durante el proceso de formación inicial (Day y Sachs, 2004; Llinares y Krainer, 2006; Ponte, 2012) y, de manera general, se puede decir que ha estado ligado a cuestiones relacionadas con el conocimiento, la práctica y el aprendizaje del profesor, mayormente, en el contexto de su ejercicio docente (Schoenfeld, 2010). De ahí que, uno de los entendimientos que sobre el DPPDM se ha reportado es el de ser una gama de actividades – formales e informales-, orientadas a satisfacer cuestiones de conocimientos, pensamientos, afectividades, y comportamientos de los profesores en la práctica de su profesión, y ser un proceso de mejora personal al seno del sistema escolar y social (Guskey, 2004; Sowder, 2007).

Los esfuerzos por conceptualizar el DPPM y generar propuestas al respecto han sido muy diversas, que van desde los entendidos ya mencionados, hasta propuestas de modelos para ello. Algunos ejemplos de estos esfuerzos pueden verse en Sztajn, Campbell y Yoon (2011), en donde a partir de una revisión de la literatura en el campo, se hace referencia a cuatro elementos: metas, teorías, contextos y estructura, como partes de un modelo para el desarrollo profesional en matemáticas y el trabajo editorial de Roesken (2011) en el que también, a partir de una revisión de la literatura, se presentan algunas de las dimensiones implícitas relacionadas con el DPPM.

Los temas en los que se han centrado las investigaciones sobre el DPPM son tan diversos como las perspectivas bajo las cuales se han realizado, aunque cabe decir, en todas ellas, el profesor y su conocimiento ha sido lo principal. Al respecto, Sánchez (2011) reporta que las creencias, los puntos de vista, concepciones, prácticas, conocimientos, habilidades, praxis y práctica reflexiva, son algunos de los temas que más atención han recibido en el campo. También reporta que algunos de los conceptos teóricos en los cuales más se han enmarcado las investigaciones son: El conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, Thames y Phelps, 2008), el cual guarda relación con el concepto de conocimiento pedagógico del contenido propuesto por Shulman (1986); Reflexión para la acción (Jaworski, 1998; Scherer y Steinbring, 2007) en relación con la Reflexión-en-acción y reflexión-sobre-la acción, propuestos por Shön (1983); Comunidad de aprendizaje y comunidad de indagación (Jaworski, 2006), que tiene relación con el concepto de comunidad de práctica impulsado por Wenger (1998) y el diseño de tareas (Ramos - Rodríguez, Flores, Ponte y Moreno, 2015; Tirosh y Wood, 2008).

De este modo, el DPPM se ha constituido como un campo investigativo en donde la figura principal es el profesor y todo aquello que tenga relación con su aprendizaje para llevar a cabo la práctica de enseñanza, es decir, analizar el qué y el cómo de su aprendizaje profesional para la enseñanza de las matemáticas. Precisamente, la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, por sus siglas en inglés) en el año dos mil, señaló que los profesores debieran ser profesionales bien preparados para atender las demandas de su práctica, así como de su propio desarrollo, por ejemplo, debieran poder llevar a los estudiantes a “valorar las matemáticas y participar activamente en su aprendizaje” (p.3).

Dicho de otro modo, se plantea la importancia de la profesionalización del futuro profesor y del profesor en ejercicio como una forma de soportar un perfil profesional acorde a las exigencias y la transformación continua de la profesión de enseñar matemáticas. Particularmente, realizar prácticas de enseñanza orientadas a fomentar el desarrollo del razonamiento y la comunicación de ideas matemáticas en los estudiantes, desarrollar sus niveles de pensamiento matemático de manera tal que sirvan de fundamento en su vida cotidiana, ya sea para resolver problemas relacionados con su ámbito laboral o para tomar decisiones (Llinares, 2016; Ponte y Chapman, 2008).

Desde la perspectiva anterior, para que los futuros profesores de matemáticas estén en posibilidades de hacer frente a la compleja actividad de enseñar matemáticas y que tenga como fin último, el desarrollo del pensamiento y aprendizaje matemático de los estudiantes, por encima de una mera acumulación de conocimientos disciplinares, se precisaría de procesos de formación inicial y desarrollo profesional que les otorgue las oportunidades de aprendizaje para ello. Esto está ligado con el sentido que la NCTM da a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en relación con el profesor. Respecto a la enseñanza se dice que "la enseñanza efectiva de las matemáticas requiere comprender lo que los estudiantes saben y necesitan aprender y, entonces, retarles y apoyarles para que aprendan mejor" (p.11). Respecto al aprendizaje se declara que "los estudiantes deben aprender matemáticas, comprendiéndolas, construyendo activamente nuevo conocimiento desde la experiencia y el conocimiento previo" (p. 11).

De esta manera, en los últimos años se han experimentado cambios respecto a lo que se entiende por enseñar y aprender matemáticas en y desde la escuela. Hoy día, a diferencia de hace unas pocas décadas, los fines de la escuela se sitúan más allá de solo ser un medio o espacio para brindar conocimientos formales de distintas materias y preparar a las nuevas generaciones para su incorporación a distintas áreas profesionales, se entiende que sus fines son el de proveer una educación para la vida en sociedad. Esto ha implicado también una discusión de los entendimientos y procesos asociados al aprendizaje tanto del futuro profesor como del profesor en ejercicio (Buforn et al., 2020; Potari y Ponte, 2017; Sullivan, 2008).

Formación y Aprendizaje del Futuro Profesor de Matemáticas

Se ha dicho que el DPPM se ha conceptualizado en diversas formas y estudiado desde distintas perspectivas teóricas. En general, se refirió que las primeras aproximaciones se centraron en considerar al profesor como una figura central del sistema didáctico, pero no al profesor en cualquier situación, sino aquel que se encuentra en ejercicio. En ese sentido, durante mucho tiempo hablar de desarrollo profesional era equivalente a hablar de un aprendizaje a lo largo de la vida profesional, de desarrollo o formación continua del profesor, más que hablar o centrarse en los aspectos relacionados con su formación inicial.

Lo anterior ha sido en el entendido de que, durante el ejercicio de la profesión, los profesores producen conocimiento profesional en relación con la experiencia que da la práctica profesional (Ponte, 2012) y que adquiere especial valor por conformar un proceso natural de aprendizaje frente a los procesos académicos de formación inicial. Esto significa que en el desarrollo profesional:

> Al profesor se le ve con necesidades y potencialidades que deben ser descubiertas, valoradas y apoyadas para su desarrollo, pues bajo esta concepción, la figura central es el profesor más que los cursos o las oportunidades académicas de formación que se le ofrecen. (Ponte, 2012, p. 89)

En los recientes años se ha venido discutiendo y planteando la posibilidad de articular los procesos de desarrollo profesional del profesor en ejercicio con los de formación inicial del futuro profesor (Llinares y Krainer 2006; Llinares, 2012; Ponte, 2012). En Ponte (2012) se dice que: "la formación puede ser concebida para promover el desarrollo profesional del profesorado, es decir, es posible que el desarrollo profesional se beneficie de las oportunidades de una formación que atienda a las necesidades y objetivos de realización del profesorado" (p. 90).

Es así como la formación del futuro profesor de matemáticas no se entiende como algo separado de un proceso de desarrollo profesional, sino más bien, inmerso en dicho proceso, pues se pretende favorecer en ellos las competencias profesionales necesarias para ejercer adecuadamente su profesión, esto, a partir de situar dichas competencias más allá de una mera dimensión teórica y académica de los saberes implicados en la profesión, pues como es sabido, ésta tiene una naturaleza eminentemente práctica. Por otro lado, cabe decir que la formación del futuro profesor también es un asunto de desarrollo personal en el que intervienen modos de pensar, condiciones y experiencias de quienes se están formando (Day y Sachs, 2004; Ponte, 2012).

En el sentido anterior, las propuestas de desarrollo y formación inicial del profesor se han centrado en la idea de aprendizaje a lo largo de la vida profesional, es decir, el aprender a enseñar que inicia con la formación inicial y que ha de continuar y permanecer en el ejercicio de la profesión. La idea de aprendizaje en la formación inicial del futuro profesor de matemáticas consiste en esencia, en analizar el tipo de actividad profesional para la cual se forma, en este caso, “enseñar matemáticas”. Esto ha implicado abrir los debates sobre qué se entiende por aprender a enseñar matemáticas y cómo conseguirlo, en donde los énfasis se han puesto, por ejemplo, en los tipos de conocimientos que dan fundamento a dicha actividad y *el cómo construirlos o desarrollarlos*.

Llinares y Krainer (2006) consideran al aprendizaje del profesor de matemáticas como uno de los aspectos centrales al momento de hablar de su desarrollo profesional, situándole en una especie de interconexiones entre lo individual, lo social y el contexto escolar. Estos autores mencionan:

> El análisis del desarrollo profesional de los profesores debe tener en cuenta una amplia gama de variables que incluye a los profesores mismos, sus relaciones con pares y el contexto en el que operan y, por supuesto, el contenido a enseñar. (Llinares y Krainer, 2006, p.445)

Así, en el caso de la formación de futuros profesores de matemáticas en relación con la forma en que aprenden a enseñar, algunas propuestas se han ocupado por estudiar el uso de videos como una forma de promover el aprendizaje reflexivo, conjuntando por decirlo de algún modo, un conocimiento profesional práctico con un conocimiento profesional teórico, es decir, articulando aspectos de la formación inicial con el de desarrollo profesional (Alsina, 2010; Arcavi, 2016; Santagata y Guarino, 2011; Rasmussen, 2016), y el uso de entornos “colectivos” como una forma de promover la competencia de “mirar con sentido” la enseñanza de las matemáticas en los futuros profesores (Llinares, 2012; Llinares *et al*., 2019).

Las diversas experiencias empíricas y aproximaciones teóricas en el campo de estudio han ido dando fuerza a la idea de que la formación de futuros profesores de matemáticas sea a partir de favorecer en ellos su capacidad para un aprendizaje permanente (aprender a lo largo de la vida profesional), a fin de que puedan cumplir con su función y las demandas de su profesión (Day y Sachs, 2004; Llinares, 2007; Schoenfeld, 2006; Tenorth, 2006).

En la dirección anterior, Llinares (2007) ha propuesto la idea de entornos de aprendizaje como una forma de que los futuros profesores se apropien y desarrollen los conocimientos y competencias para aprender a enseñar matemáticas. Tal propuesta tiene su base en una perspectiva sociocultural en la que el aula o espacios para el aprendizaje se conciben como una comunidad con cultura e historia, en donde los grupos de personas interactúan con y aprenden del otro, así como del uso de artefactos relevantes y de representaciones (Cazden, 1986; Lampert, 2010). Por tanto, el aprendizaje del futuro profesor puede ser entendido como cambios en su participación dentro de una comunidad específica de prácticas, en este caso particular, "la práctica de enseñar matemáticas que se caracteriza por: i) realización de tareas para un fin específico; ii) usar unos instrumentos y iii) poder justificar su uso" (Llinares, 2012, p. 55).

Por su parte, Ponte (2012) afirma:

> Si asumimos que aprendemos a partir de nuestra actividad y de la reflexión sobre ella, participando en prácticas sociales y de formas más o menos profundas en función del grado de desarrollo personal y del apoyo colectivo, podemos construir contextos formativos adecuados a una gran variedad de necesidades y situaciones. En estos contextos es necesaria una fuerte presencia de la práctica, pero también una significativa retroalimentación procedente de la teoría. En síntesis, es necesario un encuadre colectivo, pero también la apropiación de un proyecto personal por parte del profesorado. (p. 92)

Es de notar que, las ideas de experiencia, reflexión, colaboración y conversación, entre algunos otros aspectos, han ido ganando atención en lo relacionado con el aprendizaje del futuro profesor y su actividad futura de enseñar matemáticas de manera profesional, aunado a los diversos tipos de conocimientos considerados necesarios e indispensables para ello, al igual que las competencias precisas para favorecer el aprendizaje en los estudiantes. De hecho, existen algunas propuestas de modelos formativos que incluyen algunos elementos socioculturales en su configuración (Cooney y Wiegel, 2003; Zaslavsky, 2008).

Las ideas anteriores han implicado examinar, experimentar y teorizar sobre procesos de aprendizaje de futuros profesores de matemáticas, y al respecto, según se menciona en Gellert (2008), la perspectiva social del aprendizaje es la que más ha sido acogida para ello, pues se ha visto que algunas directrices colectivas que los profesores logran establecer, conforman una base de conocimientos socialmente compartidos para su desarrollo; sin embargo, este mismo autor señala que se precisa de la auto-reflexión para que estos realmente resulten favorables.

Dicho así, se reconoce que el aprendizaje y desarrollo de conocimiento profesional de los futuros profesores de matemáticas supone un proceso colaborativo a partir del cual se de una transformación en las formas de pensar y hacer matemáticas en relación con la práctica profesional futura (Jaworski, 2006; Krainer 2003; Llinares, 2007; Potari, Sakonidis, Chatzigoula, y Manaridis, 2010).

Reflexión, Colectividad y Conversación

Los hallazgos de los primeros estudios relacionados con las creencias y concepciones de los profesores de matemáticas fueron clave para reconocerles como profesionales (reflexivos) que tenían o debían tomar decisiones en escenarios muy complejos e inciertos y, por tanto, entender el tipo de conocimientos necesarios para ello, más aún, entender cómo se aprenden tales conocimientos. Incluso, entender qué y cómo aprenden los profesores en relación con su práctica de enseñanza fue sentando las bases para que lejos de atender al profesor en forma aislada a sus conocimientos y procesos de aprendizaje, se hiciera en relación con éstos.

Shön (1983) fue uno de los primeros en plantear una relación entre lo que piensa y hace un profesor como parte de su práctica y de su propio aprendizaje. Él lo hizo a partir de hacer referencia al profesional como un profesional reflexivo, planteando tres formas en la que el pensamiento se relaciona con la acción –práctica– docente, a saber: reflexión en la acción, reflexión para la acción y reflexión sobre la acción. Shön (1983) afirmaba que un profesor se hace más habilidoso en su práctica en la medida que reflexione sobre lo que piensa y hace. Estas ideas están en consonancia con las de Dewey (1938) al declarar que las personas no aprenden de la experiencia (entendida en los mismos términos del autor), sino de las reflexiones sobre estas. Y también son coherentes con el hecho de que, desde la psicología educativa, pensamiento y acción son vistos como procesos complementarios del aprendizaje, particularmente, en la vida adulta (Kolb y Kolb, 2017).

Por otra parte, Schoenfeld (1998) menciona que es en la interacción con los propios contenidos que el pensamiento del profesor se actualiza, llevándolo a modificar sus pensamientos acerca de sus expectativas y metas. En el trabajo de Parada y Pluvinage (2014) sobre la relación entre reflexiones y pensamiento didáctico del profesor de matemáticas se muestra la importancia de confrontar los pensamientos de los profesores respecto a sus conocimientos y formas de enseñar, a fin de observar algún cambio en su estructura, siendo la reflexión individual y colectiva lo que podría favorecerlo. Justamente Dewey (2007) decía que la reflexión de las personas sobre diferentes aspectos de su vida surge del pensamiento individual y social.

Por tanto, ha sido fundamental entender las condiciones bajo las cuales se favorece y emerge el aprendizaje profesional de los profesores. Al respecto, Jaworski (2006) ha planteado que los pensamientos y aprendizaje de los profesores de matemáticas pueden ser estudiados y favorecidos por medio del concepto de comunidades de aprendizaje y el uso del cuestionamiento e indagación sobre la práctica de enseñanza. En este sentido, el aprendizaje profesional del profesor adquiere una connotación de ser un proceso inmerso en la práctica de indagación colectiva.

El planteamiento de Jaworski (2006) es similar al de otros investigadores que se rigen bajo la idea de que a medida que los profesores comparten sus reflexiones, amplían gradualmente sus visiones sobre las complejidades de la enseñanza y de ellos mismos como profesores de matemáticas (Ditchburn, 2015; Potari *et al*., 2010). Dicho en palabras distintas, los profesores deben aprender a pensar reflexivamente, que en el caso de la formación de futuros profesores se traduciría en poder llevarlos a aprender de sus propios pensamientos y de los de otros para en consecuencia, construyan sus conocimientos profesionales necesarios para una práctica de enseñanza mejor.

Algunos estudios han mostrado que la reflexión ayuda a transformar la práctica del futuro profesor y del profesor cuando se incorpora en programas de formación o de desarrollo profesional (Saylor y Johnson, 2014). Por otra parte, algunos otros (Llinares y Krainer, 2006; Potari *et al*., 2010) han documentado que cuando los futuros profesores o en servicio participan colaborativamente en la reflexión de múltiples aspectos de la enseñanza, les ayuda a integrar sus conocimientos, a tener una visión más amplia de su complejidad y a explicitar su conocimiento tácito. De este modo, ellos junto con sus colegas toman conciencia de los principios que guían su práctica, de cómo enseñan y de cómo aprenden los estudiantes (Katz, Earl, y Ben Jaafar, 2009; Preciado-Babb *et al*., 2015). Es así como la reflexión y colaboración son particularmente importantes como parte de un proceso de formación inicial y de desarrollo profesional del profesor (Krainer y Llinares, 2010).

En este contexto, la reflexión no podría ser considerada meramente como un medio, sino como uno de los fines del aprendizaje profesional del futuro profesor. Sin embargo, aún hay poca información sobre cómo favorecer reflexiones significativas entre los profesores (Saylor y Johnson, 2014), aunque también cabe decir que algunos autores como Arcavi (2016) y Rassmusen (2016), han empezado a indagar sobre cómo podría favorecerse las reflexiones entre profesores sobre cuestiones pedagógicas a partir de promover conversaciones sobre clases filmadas de matemáticas, en donde la atención esté puesta en las ideas matemáticas y metamatemáticas de estas.

Como se ha referido hasta el momento, el aprendizaje y conocimiento profesional del profesor de matemáticas se han establecido como aspectos centrales tanto para la mejora de su práctica de enseñanza como para su formación profesional. Asimismo, diversos estudios han indagado y documentado la importancia de la colectividad (o colaboración) y la reflexión para conseguir ambos aspectos en el profesorado (Arcavi, 2016; Chamoso, Cáceres y Azcárate, 2012; Jaworski, 2006; Krainer y Llinares, 2010; Ponte y Chapman, 2016; Preciado -Babb *et al*., 2015; Rasmussen, 2016; Rowland y Ruthven 2011; Santagata y Guarino, 2011; Thanheiser, Browning, Edson, Lo, Whitacre, Olanoff, Morton, 2014; Zaslavsky, 2008). En particular, se ha reconocido que aprender a enseñar requiere que los futuros profesores desarrollen diferentes tipos de conocimientos, esto bajo la idea de que ellos deben comprender en profundidad las ideas que se pretenden enseñar y comprenderlas de diferentes formas (Shulman, 2005).

Conocimiento y Conversación

Precisamente respecto a las competencias y conocimientos de los profesores para la enseñanza de las matemáticas, las investigaciones que han versado sobre el conocimiento matemático del profesor de educación básica han reportado deficiencias conceptuales en ellos (Darling-Hammond, 2000; Grossman, Hammerness y McDonald, 2009; Hill, Rowan y Ball, 2005; Ma, 1999; Silverman y Thompson, 2008; Tirosh, 2000). Por ejemplo, Ball, Thames y Phelps (2008), argumentan mediante el uso de tareas relacionadas con el algoritmo de la adición, que solo el conocimiento procedimental por parte de los profesores resulta insuficiente para generar mejores explicaciones sobre los posibles y diversos errores que puedan cometer los estudiantes.

En Ma (1999) se reporta que aun cuando los profesores de educación básica en Estados Unidos de América (EUA), cuentan con estudios universitarios e incluso muchos de ellos con estudios de posgrado, al momento de ser medidos en términos del dominio de las matemáticas de educación primaria, salieron con menor dominio que los profesores chinos, quienes se señala, tienen nueve años de escolaridad regular y luego tres años de escuela normal para profesores, lo que en México equivale a tener estudios de bachillerato. Particularmente, en ese estudio se indica que ante ciertos problemas de aritmética básica como la sustracción y la multiplicación de cantidades enteras, si bien los profesores de EUA pueden realizar los cálculos y describirlos correctamente, menos del 20% tienen una comprensión conceptual del proceso de reagrupación, es decir, de la descomposición de una decena en diez unidades, en contraposición con el 86% de los profesores chinos quienes entienden y pueden explicar el procedimiento de descomposición.

En relación con lo anterior, Blömeke y Delaney (2012) señalan que existen señales de advertencia sobre los bajos niveles de competencia de los profesores de matemáticas en países occidentales, este señalamiento deviene de una encuesta sobre el estado de la investigación en evaluación del conocimiento profesional de los profesores en varios países.

Existen diversas propuestas teóricas sobre el tipo de conocimientos profesionales que deben tener los profesores para enseñar matemáticas de manera eficiente. Estas propuestas se basan en el trabajo de Shulman (1986), quien sugiere que los profesores requieren conocimientos que van más allá de una pedagogía general para enseñar matemáticas, es decir, se necesita una pedagogía relacionada con la especificidad del contenido a enseñar. A este respecto, la caracterización del conocimiento matemático del profesor ha estado en el centro de las propuestas de aprendizaje y desarrollo profesional; algunas de estas propuestas son "Conocimiento matemático para la enseñanza" (Ball, Thames y Phelps, 2008), "Competencia en la enseñanza de las matemáticas" (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008; Schoenfeld, 2011), "Conocimiento matemático didáctico" (Pino-Fan, Godino y Font, 2018), "Proyecto de activación cognitiva en el aula" -COACTIV- (Krauss, Neubrand, Blum y Baumert, 2008; Kunter *et al*., 2013), "Conocimiento didáctico de los profesores de matemáticas" (Ponte y Chapman, 2008; Llinares, 2012) y "Conocimientos matemáticos especializados del docente" (Carrillo-Yañez *et al*., 2018).

Si bien se ha avanzado en tipificar el conocimiento profesional considerado necesario para o en los profesores de matemáticas, "existe una comprensión limitada de qué es, cómo se puede reconocer y cómo se puede desarrollar en la mente de los profesores" (Silverman y Thompson, 2008, p. 2). Además, se ha apuntado que la práctica de enseñanza de las matemáticas demanda de varios aspectos que no se pueden resolver solo dotando de conocimiento al profesorado (Ponte, 2012). De hecho, un asunto central en este tema es "si el conocimiento matemático en la enseñanza se sitúa en la cabeza del profesor individual o es de alguna manera un activo social, significativo solo en el contexto de su aplicación" (Rowland y Ruthven, 2011, p.3). En opinión de Rowland y Ruthven (2011), aún se está lejos de llegar a un consenso sobre un posicionamiento teórico que describa el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas.

La mayoría de las propuestas sobre los conocimientos del profesor para la enseñanza de las matemáticas destacan el tipo de conocimientos que requiere o requeriría el profesor; sin embargo, poco se ha investigado y por ende documentado, sobre cómo se adquiere este tipo de conocimientos. Thanheiser *et al*. (2014) sostienen que se sabe muy poco sobre cómo aprenden los futuros profesores. Y si bien hay considerables avances sobre el aprendizaje del profesor, a juicio de investigadores como Opfer y Pedder (2011), es necesario continuar ampliando las investigaciones sobre cómo aprenden los profesores y futuros profesores, y las condiciones que soportan y promueven sus aprendizajes, pues los resultados obtenidos no han sido lo suficientemente satisfactorios (Artigue, 2004; Hopwood, 2016).

Ahora bien, como se mostró anteriormente, en la literatura respecto al aprendizaje profesional de los profesores se sugiere la participación de éste en colectividad, con énfasis en actividades orientadas a favorecer el intercambio de ideas, conocimientos, experiencias, y en general, de todo aquello que implique una comprensión mejor de ellos mismos como profesores de matemáticas, de su práctica y de los resultados de ésta en sus estudiantes. Es decir, una participación en un proceso en el que se desafíen los conocimientos, pensamientos y acciones de los colegas, tanto igual que los propios, al tiempo que haya disposición a buscar y ofrecer apoyo para transformar lo que haya que transformar con el único fin de mejorarlo.

La participación colectiva entonces, se insiste, ha sido ampliamente considerada para los análisis de los aprendizajes y desarrollo de los profesores de matemáticas, pues entre otras cosas, posibilita la toma de conciencia y responsabilidad compartida de los profesores en relación con su quehacer profesional, como puede ser el disentir de las ideas propias y de las de otros, pasando así de un asunto meramente cognitivo a uno metacognitivo en la forma de producir y profundizar sobre los conocimientos y comprensión de las demandas de la profesión.

Según Horn (2005), Horn y Little (2010), el aprendizaje colectivo es apoyado por la intersubjetividad, es decir, la construcción de significados compartidos, la confianza y la conversación en torno al trabajo. Thompson, Philipp, Thompson y Boyd (1994), Cobb, Boufi, McClain y Whitenack (1997), argumentan que la participación de estudiantes en conversaciones sobre su actividad matemática (incluido el razonamiento, la interpretación y significado), es esencial para desarrollar entendimientos matemáticos ricos y conectados. De ahí desprenden que el desarrollo de los profesores es más probable que acontezca en el contexto de una instrucción mediada por lo conversacional. Aunado a ello, Raelin (2007) señala que la reflexión es mayormente interactiva, de modo que las conversaciones entre colegas la favorecen, e incluso, permite negociar y desarrollar una comprensión compartida de la práctica docente y de cómo comprometerse con ella (Preciado-Babb *et al.*, 2015).

Así, se reconoce que la conversación tiene un rol importante en las auto-reflexiones y reflexiones colectivas debido a que puede conducir a una comprensión mejor y compartida del contenido matemático, de su enseñanza y aprendizaje por parte de los profesores (Zaslavsky y Leikin, 2004). En resumen, hablar del aprendizaje y desarrollo de conocimiento del futuro profesor de matemáticas, es hablar de un aprendizaje y pensamiento complejo de la relación persona-profesional, pues implica cuestiones relacionadas con lo cognitivo, pero también con lo social.

Con esta revisión se muestra que los investigadores reconocen al conocimiento profesional del profesor y futuro profesor, en específico, al conocimiento matemático para la enseñanza, como algo complejo, razón por la que su desarrollo o aprendizaje sigue siendo un desafío para la comunidad investigadora. También se muestra que la conversación y colectividad son medios que permiten promover la reflexión en torno a la experiencia, lo que, a su vez, propicia aprendizajes y construcción de conocimientos.

Se ha documentado que la "calidad" de enseñanza de las matemáticas está en relación con el conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores (Beswick y Goos, 2012; Chapman, 2012; Schmidt, Cogan y Houang, 2011; Potari y Ponte, 2017). Esto implica que los futuros profesores necesitan desarrollar dicho conocimiento como una forma de mejorar su práctica de enseñanza futura (Buforn et al., 2020), sin embargo, si bien las investigaciones han proporcionado argumentos para llevar a cabo tal desarrollo, lo cierto es que aún se precisa de conocer cómo hacerlo, más aun, qué tipo de conocimiento es el que se puede desarrollar por medio de la conversación y reflexión conjuntamente.

Es en la dirección anterior que en esta investigación se sostuvo la idea de que situar a futuros profesores de matemáticas en conversación reflexiva podría dar luz sobre cómo aprenden y desarrollan conocimiento matemático para la enseñanza y cuáles son las características de tal conocimiento. Asimismo, se buscó aportar información y evidencia empírica al respecto.

1.2. Pregunta de investigación

El conocimiento matemático para la enseñanza y su desarrollo, particularmente en el caso de los futuros profesores, ha ido tomando fuerza en los últimos diez años (Ponte y Chapman, 2016; Charalambous y Pitta-Pantazi, 2016). Algunos estudios han mostrado que el uso de actividades de clase que involucren a los futuros profesores en la resolución de problemas como un medio para dar sentido al contenido que luego enseñarán, es útil para el desarrollo de dicho conocimiento (Kuennen y Beam, 2020). En Turner y Rowland (2011), se propone a partir de la investigación empírica sobre el conocimiento del contenido matemático de futuros profesores de educación básica, el modelo denominado "Cuarteto del Conocimiento" (KQ por sus siglas en inglés), como un medio para desarrollar dicho conocimiento con base en la reflexión sobre las cuatro dimensiones que le componen, a saber: Fundamento, Transformación, Conexión y Contingencia.

Otros investigadores sugieren que el desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza puede estar fuertemente vinculado con el desarrollo de una forma de "mirar profesionalmente" la enseñanza de las matemáticas (Buforn et al., 2020; Llinares, Ivars, Buforn y Groenwald, 2019). Por otra parte, estudios como el de Koponen, Asikainen, Viholainen y Hirvonen (2017) reportan que aun cuando en los programas de formación inicial se percibe un cierto equilibrio entre el conocimiento matemático del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido, existen ciertos aspectos del conocimiento del profesor, como es el caso del conocimiento común del contenido, que reciben un énfasis mayor que otros.

Particularmente y en lo que respecta al conocimiento matemático para la enseñanza y su desarrollo desde un enfoque centrado en las interacciones de habla (conversaciones), a parte de lo ya referido en la sección anterior, se ha documentado que las interacciones entre futuros profesores y profesores en ejercicio, genera oportunidades para dicho desarrollo toda vez que se comparte y reflexiona sobre este conocimiento. Sin embargo, se advierte que la atención dada al conocimiento matemático del contenido y al pedagógico no suele ser en la misma proporción (Leatham y Peterson, 2010).

También es sabido que las conversaciones en colegiado fomentan el aprendizaje y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza, como ejemplo están los estudios basados en el modelo de comunidades de aprendizaje profesional, en donde se dice que el facilitador y la colaboración entre los interlocutores son esenciales para ello (Chauraya y Brodie, 2018; Horn, 2012; Louie, 2015). No obstante, se reconoce que aún es necesario especificar la operatividad de estos modelos y la medición de sus resultados (Campbell y Stohl, 2017). Smith (2015) incluso, destaca que la reflexión colectiva no es tan común como debería esperarse en estas comunidades. Se tiene además que este tipo de estudios son en su mayoría con profesores en ejercicio y no con futuros profesores.

Figueras y Sáiz (2019), consideran que los esfuerzos por caracterizar y estudiar el conocimiento matemático para la enseñanza y su desarrollo ha sido una temática de interés en cuya comprensión y diseño de soluciones se ha comprometido un gran número de investigadores y profesores, pero todavía falta mucho por hacer. Lin y Rowland (2016) dicen que este interés no muestra signos de agotamiento. Cochran-Smith y Villegas (2015), Potari y Ponte (2017) señalan que pocos estudios se han interesado por el proceso de desarrollo del conocimiento profesional del futuro profesor de matemáticas, por ejemplo, analizando las interacciones que puedan llevar a generarlo desde los programas de formación inicial.

Considerando que la conversación y reflexión son esenciales para el aprendizaje y desarrollo del conocimiento profesional, el problema abordado en esta investigación consistió en dar cuenta de cómo un proceso de conversación reflexiva promueve el desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza en futuros profesores de matemáticas. Por consiguiente, se planteó y usó como pregunta guía de investigación la siguiente:

¿Cómo a partir de un proceso de conversación reflexiva se desarrolla conocimiento matemático para la enseñanza en futuros profesores de matemáticas?

1.3. Objetivo de Investigación

El interés con esta investigación fue aportar información empírica sobre la forma en que un proceso de conversación reflexiva, en el contexto de un curso formal de didáctica de las matemáticas perteneciente a un programa institucional de formación inicial de profesores, favorece el desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza en futuros profesores.

Dicho lo anterior, el objetivo de esta investigación consistió en analizar cómo la conversación reflexiva promueve el desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza en futuros profesores de matemáticas y caracterizar tal conocimiento. Esto último con base en la tipificación dada por Ball *et al.* (2008) y Hill *et al.* (2008), sobre el tipo de dominios y sudominios que configuran dicho conocimiento.

Desde la perspectiva de Ponte (2012), el conocimiento matemático para la enseñanza es quizá el más importante que compone o da forma al conocimiento profesional del profesor, pues se trata de las transformaciones que, de la matemática como ciencia, deben hacer los profesores para su adaptación a las condiciones del sistema escolar. Se trata de la forma en que los profesores interpretan la matemática en tanto disciplina escolar, es decir, tiene que ver con cómo se conoce e interpreta a la matemática escolar.

En palabras de Ponte (2012):

> El conocimiento que el profesorado tiene de la matemática y de la matemática escolar, es el rasgo más distintivo en relación con el conocimiento del profesorado de otras disciplinas, ya que aquí es donde interviene más directamente la especificidad de la materia de enseñanza. (p. 87)

El objetivo planteado es coherente con los planteamientos reportados en la literatura y de los cuales en este capítulo se han expuesto algunos respecto a la necesidad de ampliar las formas en que se explora, teoriza y se comprenden los fenómenos que rodean el aprendizaje profesional de los profesores de matemáticas, lo que a su vez implica desarrollar nuevos conceptos y teorías del aprendizaje (Hopwood, 2016; Riscanevo Espitia y Jiménez Espinosa, 2017).

1.4. Justificación de la Investigación

Como se ha dicho, una de las tendencias en el campo del aprendizaje de los profesores de matemáticas es hacia la posibilidad de que ellos desarrollen conocimiento, competencia y hábitos de aprendizaje permanente en torno a su práctica de enseñanza. Según Llinares (2007), una posible aproximación al problema de la formación del futuro profesorado de matemáticas es la importancia de desarrollar sus conocimientos y destrezas para analizar o interpretar la práctica de enseñanza futura (Buforn et al., 2020).

Por lo anterior, es de amplio interés entender más sobre cómo los futuros profesores llegan o pueden llegar a constituir sus propios entendimientos y conocimiento profesional sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esto es, ampliar lo que se sabe respecto a la manera en que pueden llegar a co-construir su propio conocimiento profesional sobre su práctica, implica preguntarse qué y cómo aprenden o desarrollan su conocimiento matemático para la enseñanza en su contexto formativo, cuáles son sus pensamientos durante su proceso formativo y cómo estos pueden transformarse y vincularse coherentemente con sus acciones futuras, entre otras relacionadas con la práctica de enseñar matemáticas.

En el campo de estudio se considera que "es importante caracterizar la naturaleza del conocimiento profesional del profesorado, pero más importante es estudiar sus procesos de desarrollo" (Ponte, 2012, p. 89). Este asunto ha sido planteado de manera más reciente por Cochran-Smith y Villegas (2015), y Potari y Ponte (2017).

Indagar entonces respecto a cómo un proceso de conversación reflexiva promueve el desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza en futuros profesores, resulta particularmente importante en el campo de estudio toda vez que permite atender la necesidad de disponer de más información sobre el tipo de procesos que llevan al desarrollo de tal tipo de conocimiento profesional al tiempo que permite ampliar los conocimientos teóricos sobre el aprendizaje y desarrollo de conocimiento profesional en futuros profesores de matemáticas y aportar evidencia empírica de que la conversación reflexiva es un medio para promover el desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza. Además de ofrecer una tipificación del conocimiento que se desarrolla a partir de dicho medio.

Es así como consideramos que la pertinencia de esta investigación se nutre además de lo planteado líneas antes, de reportes más generales sobre la importancia de usar a la conversación (en un sentido profesional) como una forma mejorar las prácticas pedagógicas de los profesores (Needham, 2016; Timperley, 2015).

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presenta una discusión del enfoque teórico empleado para enmarcar el concepto de conversación reflexiva en relación con los de aprendizaje y conocimiento profesional del profesor de matemáticas en la investigación. Tal discusión incluye una discusión general de las perspectivas constructivista y socioconstructivista del aprendizaje, así como de algunas aproximaciones tales como el coaching, psicología social y la cibernética.

2.1. Aprendizaje del Profesor: Perspectiva Constructivista

Desde una mirada constructivista en el marco de la psicología piagetiana, los procesos de significación o construcción de significados se entienden en un plano individualista, es decir, tienen lugar en la mente de los individuos y, por tanto, su desarrollo o aprendizaje dependerá del desarrollo cognitivo que se alcance (alcanzar niveles superiores de entendimiento o estructuras mentales de orden superior).

Para la teoría piagetiana, el desarrollo cognitivo (también el aprendizaje) tiene lugar a partir de dos procesos distintos, pero inseparables, que forman parte del proceso de adaptación de los individuos a su entorno: proceso de asimilación y el proceso de acomodación. El primero sucede cuando una nueva experiencia es incorporada a un conocimiento preexistente, mientras que el segundo ocurre cuando un individuo se ajusta estructuralmente a la información recién adquirida. La relación entre estos dos procesos es una relación dialéctica, favoreciendo o manteniendo así un equilibrio cognitivo. De esta manera, se puede decir que el aprendizaje desde esta perspectiva teórica se constituye a partir de la experiencia, experiencia en el entendido de Dewey (1938).

En lo que respecta a los estudios sobre formación y desarrollo del profesor de matemáticas, desde la perspectiva constructivista, el interés ha estado en estudiar el aprendizaje del profesor bajo el entendido de que éste ocurre en la mente de él y para ello, se analizan cambios en su conocimiento. Con esto último se quiere decir que, en dicha perspectiva se asume una condición individualista e interna del aprendizaje en el profesor.

Bajo esta perspectiva teórica y con la premisa de que las estructuras mentales incluyen conocimiento, al igual que concepciones, creencias y actitudes preexistentes en los profesores, y que pueden ser activamente reconstruidas mediante una reestructuración de sus mapas cognitivos, ha interesado describir las estructuras mentales del profesor. Por ejemplo, a partir de ambientes o situaciones conflictivas (cognitivamente hablando).

Dicho de otro modo, desde la perspectiva constructivista el conocimiento forma parte de estructuras mentales, que a su vez se constituyen de representaciones mentales y de procesos que actúan sobre éstas. Así, en el caso particular del profesor, aprender a enseñar presupone un proceso de adquisición de conocimientos, de sus posibles relaciones y de ciertas habilidades cognitivas. De ahí que la atención sea puesta en los factores que permiten su construcción o desarrollo, y en sus posibles cambios.

Como parte de esta perspectiva constructivista del aprendizaje se pueden situar los primeros estudios relacionados con el profesor de matemáticas centrados en aspectos tales como sus creencias y concepciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas (Carrillo y Contreras 1995; Ernest, 1989; Llinares, 1991; Pajares, 1992, Ponte,1999; Raths, 2001; Thompson, 1992). Esto, bajo la consideración de que las creencias y concepciones tanto de las matemáticas como de su enseñanza por parte de los profesores, conforman estructuras mentales que pueden modificarse y moverse en la práctica de enseñanza. De ahí el interés por analizar los tipos de creencias, sus posibles cambios y relaciones causales con la práctica docente, principalmente al interior de las aulas, con el argumento de que se requiere cambiar las creencias y concepciones de los profesores para cambiar su práctica (Lerman, 2001).

Tales estudios de poco en poco fueron coincidiendo en que las creencias y concepciones de los profesores conforman un modelo pedagógico muy difícil de modificar en ellos (Carter y Norwood, 1997; Murphy y Mason, 2006; Pehkonen, 2006; Schraw y Olafson, 2002), pero no imposible, aunque tampoco es del todo claro cómo dichas creencias o concepciones pueden ser modificadas. Se ha considerado que las experiencias son un elemento clave para ello (Muhtarom, Juniati y Siswono, 2019), no obstante, se requiere "más investigación sobre el desarrollo, la maleabilidad y las implicaciones de las diversas creencias dentro del sistema de creencias de un profesor" (Voss, Kleickmann, Kunter y Hachfeld, 2013, p. 267).

Por ejemplo, en Handal (2003) se menciona que las creencias matemáticas de los profesores participantes en su estudio se originaron en sus experiencias de aprendizaje en las escuelas y se reprodujeron en la enseñanza en el aula. Además, se dice que dichas creencias pueden "actuar como un filtro a través del cual los profesores toman sus decisiones en lugar de depender únicamente de su conocimiento pedagógico o lineamientos curriculares" (Handal, 2003, p. 47). Así, la investigación sobre los procesos de aprendizaje del profesor de matemáticas, orientada por o desde una perspectiva constructivista, se caracteriza por asumir al aprendizaje y, por ende, al conocimiento del profesor, como un proceso individual en el que él crea, desarrolla y modifica sus estructuras mentales, a partir de desequilibrios cognitivos que devienen de su propia experiencia. En opinión de Llinares (1998), "se asume la implicación mutua entre los elementos cognitivos del profesor y su actuación, caracterizado por el proceso de dotar de significado a su mundo experiencial" (p.169).

Aunque los resultados de las investigaciones conducidas bajo la perspectiva constructivista han sido de importancia para conformar programas de desarrollo profesional del profesor de matemáticas (mayormente profesores en servicio), con miras a "modificar" su sistema de creencias, concepciones y conocimientos, una de sus principales críticas es la poca o nula atención que se le ha dado a los aspectos sociales implicados en el aprendizaje, como por ejemplo, la importancia que tienen las relaciones e interacciones entre las personas, y éstas con el conocimiento.

En relación con lo anterior, si bien como se menciona en Contreras (2009), el cambio en las concepciones no es un fin en sí mismo, sino su toma de conciencia por parte de los formadores y profesores, algunos estudios situados en una perspectiva socioconstructivista, han mostrado la posibilidad de que factores de índole sociológico produzcan cambios, no necesariamente en las creencias y concepciones, sino en la práctica educativa del profesor (Bohórquez y D' Amore, 2018). Uno de los factores asociados a dichos cambios en los profesores (incluidas sus concepciones), es la interacción entre pares o su participación en comunidades conformadas por profesores e investigadores en Matemática Educativa, pues la reflexión y confrontación de las creencias se ven favorecidas por el trabajo colectivo, derivando en la mayoría de los casos, en posicionamientos más abiertos y flexibles por parte de los profesores respecto de sus creencias y concepciones (Chamizo y Garcia-Franco, 2013).

Entre quienes realizan estudios centrados en las creencias y concepciones de los profesores en relación con su crecimiento profesional asociado a su práctica educativa, hoy día es ampliamente compartida la idea de situar a los profesores en espacios donde sus creencias puedan ser confrontadas, como una forma de ganar conciencia sobre éstas y de su impacto en la toma de decisiones educacionales. Tal como menciona Skott (2015), las creencias son construcciones mentales (individuales) cargadas de valores y subjetivamente verdaderas, producto (relativamente estable) de algunas experiencias sociales significantes, que muchas veces tienen un alto impacto sobre las interpretaciones y contribuciones de los profesores en su contexto educativo.

2.2. Aprendizaje del Profesor: Perspectiva Socioconstructivista

A diferencia de la perspectiva constructivista en la que el aprendizaje y conocimiento se conciben como un producto mental e individual, en la perspectiva socioconstructivista se asume que éste es el resultado de un proceso social y cultural. De este modo, según la psicología vygotskyana, lo social y cultural tienen un papel determinante tanto en la construcción como en la apropiación del conocimiento. Desde esta perspectiva, el conocimiento, en un sentido de signos y símbolos (sociales y culturales), se desarrolla a partir de su ingreso a una situación de aprendizaje como herramientas dentro de la interacción social y afecta el desarrollo o el aprendizaje a través de la actividad que realizan las personas. Es decir, el conocimiento se constituye social y culturalmente. De hecho, Vygotsky (1986) propuso que el desarrollo cognitivo se fomenta mediante procesos que primero se aprenden mediante la interacción social (como puede ser el caso de la conversación), para luego ser internalizados (constituirse en conocimiento) de manera individual.

Existen dos formas de entender este proceso social de construcción de conocimiento desde la perspectiva socioconstructivista, una de ellas es la cognición social o también conocida como cognición situada y la otra, es la llamada aproximación sociocultural del aprendizaje. En la primera, se considera que el conocimiento es construido por la persona en transacción con el ambiente, tal consideración guarda correspondencia con la filosofía educativa de Dewey (1938), quien decía que el desarrollo o aprendizaje de una persona puede asociarse al desarrollo de su experiencia, que en términos Deweyrianos, ésta siempre es un proceso bidireccional y dinámico, es decir, "la transacción que tiene lugar entre el individuo y lo que en ese momento constituye su ambiente" (Dewey, 1938, p. 43).

Así, desde la cognición situada, se entiende que tanto la persona como el ambiente cambian como resultado de un proceso de aprendizaje. Se considera que el entorno es un medio social que afecta las acciones tomadas por las personas y consecuentemente, el aprendizaje se ve afectado por esas acciones. De esta manera, el conocimiento se construye socialmente y los significados son construidos mediante el uso del lenguaje en contextos específicos (Dewey, 1998; Vygotsky, 1986).

Por lo dicho en el párrafo anterior, el aprendizaje en esta visión de la cognición situada no puede ser separado de la acción, o equivalentemente, la percepción y la acción se relacionan de manera dialéctica. De este modo, el conocimiento no se considera como algo recibido y estático, separado de la persona, tampoco se considera como separado de las actividades dentro de las cuales se construyó dicho conocimiento, ni de la comunidad en la que se comunicaron tales o cuales ideas.

La forma de entender la construcción y el desarrollo cognitivo desde la perspectiva de la cognición situada, tiene sus bases en la teoría sociocultural del aprendizaje desarrollada por Vygotsky (1986), en la que se reconoce como premisa fundamental que el desarrollo de una persona depende de las interacciones sociales. Según esta teoría, es precisamente en la interacción social que se comparten los significados culturales entre los miembros de un grupo social, para posteriormente ser internalizados de manera individual.

En la perspectiva sociocultural, el aprendizaje resulta esencialmente del uso de "herramientas culturales" tales como la lectura, escritura, o en general, modos de discurso como parte de la actividad que constituye la vida de un grupo social específico, por ejemplo, una escuela e incluso el aula (Davydov, 1995). Por ende, las investigaciones en el campo enmarcadas en este tipo de perspectiva se han interesado por el aprendizaje del profesor en términos de la dimensión social y cultural en el que se sitúa, particularmente, su práctica profesional.

De poco en poco la perspectiva socioconstructivista no sólo ha ido ganando mayor aceptación para estudiar y explicar los procesos de aprendizaje del profesor de matemáticas (Lerman, 2006), sino que ha dado lugar al surgimiento y a la adopción (y en ocasiones, a la adaptación) de diversos enfoques teóricos sobre la construcción social del conocimiento o también llamadas, teorías del aprendizaje social (Riscanevo Espitia y Jiménez Espinosa, 2017).

En mayor o menor medida, las propuestas de estas teorizaciones consisten en asumir algunos supuestos centrales en relación con el aprendizaje y las acciones de las personas, tales como las ideas de interacción recíproca y de ambiente, dando especial énfasis a las formas en que socialmente tiene lugar el aprendizaje profesional del profesor. Dicho aprendizaje es considerado como un fenómeno de naturaleza social, por ejemplo, de participación y colaboración, dando especial importancia e interés, incluso entendimientos propios, a diversos aspectos conceptuales tales como significado, práctica y comunidad, por mencionar algunos, y no solo a los aspectos netamente cognitivos.

Sería muy extenso y fuera de los fines de esta sección, hacer una presentación de los diversos enfoques del aprendizaje social y formas en que se han empleado para estudiar los procesos de aprendizaje profesional del profesor de matemáticas. No obstante, en las subsecciones siguientes se discuten aquellas que tienen relación con los conceptos de colectividad, conversación y reflexión, que son los aspectos centrales de esta investigación.

Comunidad de Práctica

El aprendizaje en el marco de la teoría situada parte de la premisa de que el pensamiento y la actividad están estrechamente ligados a los contextos específicos en los que ocurren. Así, la forma de conocer y ser de un profesor en algún contexto, puede ser relativamente diferente de sus formas de conocer y estar en otro (Hoyles *et al*., 2010). Se puede decir entonces que, la perspectiva situada estudia las interacciones de los profesores con otros y su mundo inmediato y ambiente (temporal y físicamente) en el momento (en el acto).

La teoría de comunidad de prácticas impulsada por Wenger (1998), toma como argumento central que el aprendizaje es un proceso social situado en contextos culturales e históricos. Entre sus premisas esenciales está el hecho de asumir que el aprendizaje se lleva a partir de la participación en diversas prácticas sociales, que se van formando con el tiempo en la búsqueda de cualquier tipo de "sociedad".

Wenger (como se citó en Farnsworth, Kleanthous y Wenger-Trayner, 2016), menciona que:

> El propósito de la teoría de comunidad de prácticas es dar cuenta del aprendizaje como una experiencia socialmente constituida de creación de significados. La postura es ubicar esta experiencia en la relación entre la persona y el mundo social, a medida que se constituyen. Los términos técnicos de la teoría incluyen la negociación de significados, práctica, comunidad, identidad y competencia, entre otros. (p. 5)

Wenger (como se citó en Farnsworth *et al*., 2016) también menciona que el concepto de "comunidad de prácticas no hace referencia a un grupo de personas *per se*, sino más bien, refiere a un proceso social de negociación de competencia en un dominio a lo largo del tiempo". (p. 6)

La teoría de comunidad de prácticas se ha usado para analizar el proceso de socialización y colaboración entre profesores de matemáticas, centrando la atención en la negociación de significados y la formación de objetivos comunes (Goos y Bennison, 2008; Chávez y Llinares, 2012). Por ejemplo, se ha investigado el cómo una comunidad aprende y transforma sus prácticas, discursos y saberes, en contextos de desarrollo profesional (Gresalfi y Cobb, 2011).

También, en relación con el concepto de comunidad de prácticas, se han desarrollado investigaciones centradas en la idea de comunidades de indagación para estudiar el desarrollo profesional del profesor de matemáticas (Jaworski, 2006). El esfuerzo se ha puesto en analizar cómo la conformación de comunidades de aprendizaje e indagación puede favorecer el crecimiento profesional de los profesores de matemáticas. Esto derivado de reconocer al profesor como un profesional reflexivo (Shön, 1987), capaz de aprender por él mismo y en relación con sus pares, a partir de la práctica de indagación colectiva como una forma de aprender en y desde la práctica de enseñanza.

El propósito de las comunidades de indagación es llevar al profesor a hacerse preguntas sobre cómo mejorar su práctica y así, contribuir al aprendizaje de sus estudiantes. Por consiguiente, la atención está en el proceso de una práctica docente reflexiva (Jaworski, 1998). De esta manera, el aprendizaje y desarrollo profesional del profesor de matemáticas se asocia con procesos en los que él y sus pares crecen en el contexto de las prácticas en las que participan (Jaworski, 2006). El aprendizaje del profesor desde esta mirada en particular se ve como cambios en la participación de éste en una comunidad de práctica en relación con la transformación de su acción docente (Akkerman y Bakker, 2011).

En resumen, el aprendizaje según la teoría de comunidad de prácticas consiste en una participación social en la que se comparten, construyen y negocian significados como un elemento clave para que éste ocurra e implica por supuesto, compromiso mutuo de los participantes. Este tipo de consideraciones, entre otras que se discuten más adelante, es lo que permitió en la presente investigación situar a la conversación reflexiva como una forma de explorar y analizar el desarrollo de conocimiento profesional en futuros profesores de matemáticas.

Estudio de Clase

Anteriormente se indicó que algunos estudios han mostrado la posibilidad de que factores de índole sociológico produzcan cambios no necesariamente en las creencias y concepciones de los profesores, sino en su práctica docente (Bohórquez y D' Amore, 2018). Uno de los factores asociados a los cambios en las prácticas de los profesores (incluidas sus concepciones), es la interacción entre pares o su participación en comunidades (Chamizo y Garcia-Franco, 2013).

En consonancia con el resumen de la teoría de prácticas, la colaboración es un aspecto central del estudio de clase (más conocido como lesson study en la comunidad) como una forma de favorecer el aprendizaje y desarrollo profesional de los profesores. De hecho, puede decirse que lo colectivo se inserta bajo una connotación de colaboración centrada en los profesores con fines de mejorar sus propios conocimientos y prácticas, a fin de alcanzar mejores aprendizajes en los estudiantes.

El estudio de clase se basa en la idea de una práctica compartida o colaborativa y altamente estructurada (Chen y Yang, 2013; Lewis y Tsuchida, 1999), y aun cuando el estudio de clase no es en sí misma una teoría social del aprendizaje, sino más bien un enfoque o si se prefiere el término, una metodología para mejorar la enseñanza y aprendizaje (en este caso particular, de las matemáticas), se reconoce en él una connotación del aprendizaje profesional del profesor desde una mirada social, caracterizada por una apertura de los profesores a ser observados en sus prácticas de aulas y a colaborar para conformar una cultura de mejora compartida de los procesos de enseñanza (incluso, de ellos mismos como profesionales y de su escuela).

> El estudio de clase involucra a profesores trabajando juntos para diseñar, probar y mejorar secuencias de clases que es probable que mejoren el aprendizaje y sean utilizables por otros profesores. El profesor que enseñará la clase, generalmente en colaboración con otros, tomará un tema matemático, pensará en cómo construir las nuevas ideas basadas en las experiencias previas de los estudiantes, diseñará un problema que pueda ser utilizado para ilustrar los principios involucrados y reflexionará sobre las varias formas en que los niños pueden reaccionar ante la nueva experiencia. Esto implica escribir un plan que encaje con el desarrollo general del programa de estudios, especificando los objetivos principales de las clases y el desarrollo detallado de su secuencia, incluyendo

> una predicción de las diferentes ideas que los estudiantes pueden ofrecer para que puedan ser tomados en cuenta durante la clase en sí. (Tall, 2008, p. 45)

Por lo anterior, el estudio de clase se considera como una oportunidad de aprendizaje profesional colaborativo, en donde el profesor aprende al estudiar la materia, las formas en que piensan y aprenden los estudiantes y al discutir sobre cómo cambiar (en el sentido de hacer cambios de mejora), la práctica de enseñanza a partir de dicha información y colaboración entre pares.

Si bien algunos estudios desarrollados con este enfoque han identificado cambios en las creencias o disposición de los profesores para trabajar y aprender, así como en sus conocimientos matemáticos para la enseñanza (Huang y Shimizu, 2016; Xu y Pedder, 2015), para esta investigación solo se consideró la participación colaborativa como un aspecto clave que ayudó a fortalecer la idea de que a través de la CR podría promoverse el aprendizaje y desarrollo de conocimiento profesional en futuros profesores.

Tendencias en el Aprendizaje del Profesor de Matemáticas

Según Krainer y Llinares (2010), es posible identificar tres tendencias en la literatura sobre el aprendizaje profesional de profesores de matemáticas. La primera tendencia es la atención puesta cada vez más en la dimensión social del aprendizaje por parte de los profesores e investigadores. La segunda, es la atención puesta en la reflexión por parte de los profesores y la tercera, es:

> La creciente atención sobre las condiciones generales de la formación del profesorado (por ejemplo, tiempo, estructura, entornos institucionales y recursos humanos), la cual es más reciente y puede verse como una influencia del trabajo realizado en la práctica e investigación en el desarrollo profesional de profesores en otros campos tales como el desarrollo organizacional. (Krainer y Llinares, 2010, p.702)

La primera tendencia, como se ha mencionado en este capítulo, incluye las propuestas basadas en el aprendizaje colaborativo, grupos de profesores para la indagación docente y comunidades de práctica, entre otras, que se apoyan en teorías socioculturales (Krainer y Llinares, 2010). La segunda tendencia básicamente se apoya en las ideas de Dewey y Shön, sobre la práctica profesional reflexiva o el profesional reflexivo, es decir, la capacidad del profesor para observar y aprender desde su propia práctica, esto, a partir de un proceso reflexivo.

Precisamente en esta misma línea del aprendizaje del profesor se han desarrollado algunas propuestas sobre el binomio reflexión-acción (práctica reflexiva), impulsado por Shön (1983; 1987) con su idea de un profesional reflexivo, en dichas propuestas se ubica al profesor como un aprendiz (ya sea individual o colaborativamente) o un investigador de su propia acción (Altrichter *et al*., 2008). La premisa fundamental de este tipo de propuestas es la posibilidad de "aprender haciendo", de ahí que se requiera generar, al tiempo que analizar, oportunidades en las que los profesores puedan desarrollar sus propios conocimientos y comprensión de su práctica (antes, durante y posterior a su actividad en el aula).

Aun con la importancia del binomio reflexión-acción, según Krainer (2002), hay una falta de reflexión y trabajo en red que favorezca un diálogo crítico sobre la enseñanza de un profesor con sus colegas y con formadores de profesores. Así, el sentido que más se le ha dado al binomio reflexión-acción en la investigación es el de generar cambios orientados a mejorar la práctica del profesor, entendida ésta como lo que él hace al enseñar en el aula y en menor medida, para desarrollar un mayor conocimiento y comprensión de la práctica. Por tanto, las investigaciones en este tema se han interesado en analizar los procesos de toma de decisiones y razonamiento que siguen los profesores al momento de desarrollar su práctica docente.

Lo anterior ha implicado una conceptualización de la profesión de enseñar en términos de la autonomía del profesor, reconociéndole como un profesional capaz de tomar decisiones adecuadas sobre los problemas propios de su quehacer, y no solo como un aplicador o reproductor de conocimientos en las aulas. De hecho, Krainer (2002) refiere a "la autonomía del profesor como una actitud y competencia para el trabajo autoiniciado, autoorganizado y autodeterminado" (p. 282).

La reflexión entonces, es pieza fundamental en el aprendizaje y, por ende, en el desarrollo de conocimiento profesional del profesor. Sin embargo, las investigaciones revelan, por una parte, la complejidad de hacer que los profesores reflexionen (Smith, 2015; Saylor y Johnson, 2014), en particular, los profesores que se encuentran en ejercicio y, sobre todo, los profesores de educación básica, quienes por factores tales como la falta de tiempo, espacios físicos, recursos, entre otros, tienen pocas oportunidades de reflexionar sobre su práctica. Por otra parte, cuando los profesores dan muestra de reflexionar sobre su práctica, lo hacen centrando su atención en la enseñanza más que en el aprendizaje, incluido su propio aprendizaje (Chamoso, Cáceres y Azcárate, 2012). Esto hace aún más apremiante poner especial atención a los futuros profesores y a sus procesos de aprendizaje profesional.

Existen otros enfoques sobre el aprendizaje del profesor, que aun cuando tienen un punto de partida diferente a las mencionadas, se puede decir que los temas y preguntas se superponen con los identificados en la perspectiva socioconstructivista, por ejemplo, aquellos que se cuestionan la naturaleza de una comunidad profesional, pues como se ha dicho, en la perspectiva situacional, tanto el aprendizaje como el conocimiento se sitúan en contextos físicos y socioculturales específicos, tienen una naturaleza social, y se distribuye entre el individuo, otras personas y diversas herramientas (Anderson, Greeno, Reder y Simon, 2000).

Las propuestas sobre el aprendizaje profesional del profesor que se basan en la perspectiva sociocultural (incluida la cognición situada), tienden a considerar al aula como una comunidad con cultura e historia, en la que los grupos de personas interactúan con y aprenden del otro, del uso de artefactos relevantes y representaciones (Cazden, 1986; Lampert, 2010). Por tanto, estudiar cómo interactúan, aprenden y desarrollan conocimiento los futuros profesores de matemáticas cuando conversan reflexivamente en el aula, puede plantearse desde una mirada social del aprendizaje.

En resumen, el trabajo colaborativo o la colaboración entre y con pares, constituye una de las variables principales entorno al aprendizaje profesional del profesor y futuro profesor de matemáticas, es decir, se reconoce que ellos pueden aprender a partir de la colaboración. No obstante, indagar y dar cuenta de los procesos por medio de los cuales sucede tal o cual aprendizaje, aun precisa de mucha más investigación (Hopwood, 2016).

2.3. Conocimiento del Profesor de Matemáticas

Como se ha venido refiriendo en la sección anterior, considerar al profesor como profesional reflexivo, participativo de la vida colegiada y tomador de decisiones relacionadas con su profesión, es uno de los mayores consensos en el tema del aprendizaje de dicho profesional. En este sentido, se puede hablar de una tendencia que incorpora a lo colectivo en el entendido de una colaboración entre y con pares, como parte del proceso de aprendizaje que ha de vivir en y para su profesión.

También se ha dicho que un aspecto central en el aprendizaje profesional del profesor de matemáticas es su conocimiento. De hecho, a partir de que Shulman (1987) impulsara la idea de que los profesores requerían un conocimiento más allá de una pedagogía general para enseñar su materia, él llamó a ese tipo de conocimiento: "Pedagogical Content Knowledge – PCK –" (Conocimiento Pedagógico del Contenido) del profesor, la investigación en el campo ha referido que el conocimiento profesional del profesor se organiza por varios tipos de conocimientos, entre ellos: el conocimiento del contenido; conocimiento del currículo y el conocimiento pedagógico general (Shulman, 1986).

Shulman (1986) afirmaba que un conocimiento pedagógico muy general por parte del profesor resultaba insuficiente para alcanzar los fines pretendidos en su enseñanza, se requería pues, de una pedagogía que estuviera en relación con la especificidad de la materia (contenido disciplinar a enseñar). En cierta forma, su planteamiento consiste en otorgar al conocimiento para la enseñanza un carácter especializado y que podría considerarse como las "formas en que el profesor formula y representa la materia para hacerla comprensible a otros" (Shulman, 1986, p. 9).

Rico (2015) plantea que la formación inicial del profesor de matemáticas debe proveer los medios necesarios para que los futuros profesores construyan el conocimiento profesional que los capacite para intervenir ética y racionalmente en la formación de sus estudiantes, aunque también, debe procurar el desarrollo de competencias generales que posibiliten su adecuado uso en la práctica de enseñanza.

Así, desde esta perspectiva, el aprender a enseñar, entendiendo por aprender a enseñar, el que la enseñanza se realice de una manera que resulte eficiente y eficaz en términos de sus fines y objetivos, precisa de construir o desarrollar diferentes tipos de conocimientos en el profesor, pues él debe comprender profundamente las ideas que pretende enseñar y entenderlas de distintas maneras (Shulman, 2005).

De hecho, y aunque el mismo Shulman (1987) enuncia siete aspectos básicos con los cuales el conocimiento "profesional" del profesor debe estar relacionado, entre ellos, el conocimiento de los estudiantes, él considera que el PCK constituye el principal conocimiento en el profesor para enseñar, pues éste demanda no sólo de amalgamar contenido y pedagogía, sino de interrelacionarse con los otros tipos de conocimiento para hacer que las formulaciones y representaciones hagan posible la comprensión de la materia a los demás. Para Shulman (1987), el carácter profesional del conocimiento de un profesor debería verse como una combinación de conocimiento del contenido con el conocimiento pedagógico.

Por su parte y posterior a Shulman (1987), Grossman (1990) plantea que el conocimiento del profesor incluye cuatro componentes esenciales:

1. Conocimiento pedagógico general. "Consiste en conocimientos generales, creencias y habilidades relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes, tiempos instruccionales para el aprendizaje académico, manejo de pequeños grupos y procesos de gestión en el aula, conocimientos y creencias sobre los fines y objetivos de la educación en general" (p. 6).
2. Conocimiento del contenido. "Consiste en el conocimiento de conceptos y hechos principales dentro de un campo y de las relaciones entre estos" (p. 6).
3. Conocimiento pedagógico del contenido. "Consiste en el conocimiento que se conforma a partir de las concepciones sobre propuestas de enseñanza de un contenido, del conocimiento sobre los entendimientos de los estudiantes, conocimiento del currículo y de estrategias instruccionales" (p. 8).
4. Conocimiento del contexto. "Consiste en que los profesores basen su entendimiento del contexto específico en el que enseñan para adaptar su conocimiento general a las necesidades propias de la escuela y los estudiantes, lo cual incluye, conocer su región

escolar, las condiciones de su propia escuela, la de sus estudiantes e incluso, la de sus familiares, incluidas sus fortalezas y debilidades" (p. 9).

Si bien Grossman (1990) describe un poco más los tipos o componentes de conocimientos que considera necesarios en el profesor, se observa que en esencia los aspectos referenciados son equivalentes a los referidos por Shulman (1987): Contenido, pedagogía general y específica, procesos de aprendizaje de los estudiantes, currículo y contexto escolar, aunque no se menciona la forma en que se relacionan e incluso, se integran en un conocimiento profesional específico. De hecho, Kraine y Llinares (2010) consideran que aún es un desafío la creación de modelos sobre las competencias de profesores en formación y profesores en ejercicio que incorporen los diferentes tipos de conocimientos referenciados.

2.4. Conocimiento Matemático para la Enseñanza

El conocimiento matemático es como se ha venido mostrando, un componente importante, central en el conocimiento profesional del profesor de matemáticas para llevar a cabo su enseñanza. Una peculiaridad respecto a este tipo de conocimiento es el hecho de que, por un lado, tiene que ver con la apropiación de unas matemáticas en un sentido de conocimiento científico, y por otro, con su apropiación como objetos de enseñanza y aprendizaje dentro de un sistema escolar. Dicho de otro modo, el conocimiento matemático para la enseñanza precisa de una "confrontación" entre la matemática *per se* y su adaptación al sistema escolar. En tal sentido, este tipo de conocimiento se puede decir, ha de configurarse en la medida que dicha confrontación tenga lugar a lo largo del proceso formativo.

Otra de las problemáticas relacionadas con el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas, en particular, con el conocimiento del contenido matemático, es como se ha mencionado con anterioridad, no solo el hecho de que se ha evidenciado muy poco sobre cómo se relaciona este tipo de conocimiento con los demás en el profesor, sino que, además, no hay consenso en la investigación empírica sobre los aspectos de este tipo de conocimiento.

Modelo MKT

Existen diferentes propuestas teóricas relacionadas con el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas. Una de tales propuestas en el campo de estudio es la conocida como "Mathematical Knowledge for Teaching –MKT–" (Conocimiento Matemático para la Enseñanza), que toma como base la propuesta de PCK de Shulman (1986, 1987) y ha sido desarrollada por Ball y Bass (2003) y sus colaboradores (Ball *et al*., 2008; Even y Ball, 2009), con el fin de dar cuenta sobre el papel de esta relación entre contenido y pedagogía en el conocimiento del profesor de matemáticas.

Hill *et al*. (2008) puntualizan que el MKT es "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno" (p. 374). Los investigadores del MKT consideran que "el conocimiento matemático para la enseñanza debe elaborarse para temas matemáticos específicos y tareas de enseñanza en todos los niveles educativos" (Hoover, Mosvold, Ball y Lai, 2016, p. 17).

También en Hill *et al*. (2008), se ofrece una caracterización del MKT organizado por dos tipos de conocimiento. El primer tipo de conocimiento es el conocimiento del contenido matemático, que a su vez se organiza a partir de tres tipos de conocimientos:

i. conocimiento común del contenido;
ii. conocimiento especializado del contenido y;
iii. conocimiento en el horizonte matemático.

El segundo tipo de conocimiento es el conocimiento pedagógico del contenido (matemático) que también se organiza a partir de tres tipos de conocimientos:

i. conocimiento del contenido y de los estudiantes;
ii. conocimiento del contenido y la enseñanza y;
iii. conocimiento del currículo.

En la Figura 2.1 se representa el modelo MKT con los componentes referidos:

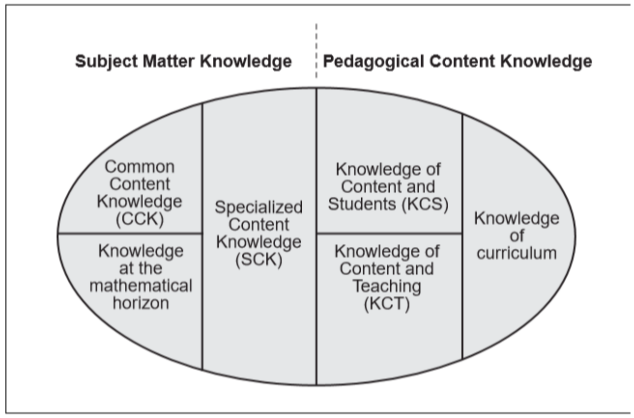

*Figura 2.1***.** Conocimiento matemático para la enseñanza (Hill *et al*., 2008, p. 377)

Aun cuando se ofrece una caracterización de los componentes del supuesto MKT que los profesores deben poseer para la enseñanza de su materia, poco o nada se dice de cómo lograr la articulación o transición entre tales tipos de conocimientos o más aun, de cómo lograr construirlos o desarrollarlos en los profesores. Por consiguiente, algunos autores han planteado la necesidad de continuar trabajando en la dirección de explorar e informar sobre el tipo de procesos que podrían promover su desarrollo y reconocimiento (Silverman y Thompson, 2008).

Planteamientos como el anterior adquieren mayor relevancia y sentido al considerarse que desde la literatura en el campo se ha documentado que profesores en servicio y en formación inicial presentan deficiencias en sus conocimientos matemáticos, por ejemplo, evidencian conceptos matemáticos erróneos en prácticamente todas las áreas de las matemáticas curriculares, además, es muy poco lo que se sabe sobre sus procesos de aprendizaje (Thanheiser *et al*., 2014).

En opinión de Godino (2009), los modelos sobre el conocimiento matemático para la enseñanza tienen el inconveniente de que, por una parte, contienen categorías de los diversos tipos de conocimiento de manera muy global, y por otro, dichas categorías se muestran de manera disjunta.

Coactiv

Otra de las propuestas sobre el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas es el proyecto denominado "Cognitive Activation in the Classroom Project – COACTIV –" (Activación Cognitiva en el Proyecto de Aula), desarrollada por Krauss, Neubrand, Blum y Baumert, (2008) y Kunter *et al*. (2013), que también tiene sus bases en la propuesta de Shulman (1986). Esta propuesta en particular se centra en las diferentes componentes del conocimiento profesional de los profesores en relación con la especificidad del contenido (matemático) propuestos por Shulman (1986) con el fin de hacer valoraciones (mediciones comparativas y cuantitativas) sobre dicho conocimiento. Por ejemplo, conocimientos sobre diversas formas de resolver tareas matemáticas, conocimientos sobre los conceptos erróneos y dificultades de los estudiantes y conocimiento de estrategias educativas específicas de las matemáticas. Al igual que el modelo MKT, el COACTIV vincula el conocimiento del profesor con el logro de aprendizaje de los estudiantes.

Es así como con base en la propuesta de Shulman (1987), se ha ido aceptando la idea de que, en términos generales, el conocimiento profesional para la enseñanza se apoya de dos tipos de conocimientos: 1) conocimiento del contenido y, 2) conocimiento pedagógico del contenido, tal cual lo dejan ver las dos propuestas antes referidas. De aquí que, particularmente en el campo de la Educación Matemática, en los años recientes se estén realizando esfuerzos por desarrollar algunos marcos que permitan "evaluar" el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas (Senk, Peck, Bankov y Tatto, 2008; Senk, Tatto, Reckase, Rowley, Peck y Bankov, 2012).

Tales esfuerzos por estudiar la formación y desarrollo del profesor de matemáticas, particularmente en primaria y secundaria, desde una mirada centrada en su conocimiento matemático para la enseñanza, lo hacen incorporando en sus instrumentos dos constructos: 1) Conocimiento del contenido matemático, organizado en cuatro áreas matemáticas: i) Aritmética, ii) Álgebra, iii) Geometría, iv) Probabilidad y Estadística, y con énfasis en dos subdominios cognitivos: a) conocer y b) aplicar o razonar. 2) Conocimiento pedagógico del contenido matemático, organizado en tres subdominios: i) conocimiento del currículo de matemáticas, ii) conocimiento de planificación para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, iii) conocimiento para promover la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Tatto, 2013).

Proficiency

Otros investigadores que también se han interesado por estudiar el conocimiento profesional que deben tener los profesores para enseñar matemáticas, como por ejemplo Schoenfeld y Kilpatrick (2008) y Schoenfeld (2010), proponen una idea de ir hacia una teoría de la "proficiency" (proficiencia) en la enseñanza de las matemáticas, en donde conocimientos y competencias adquieren un papel central tanto en los profesores como en los estudiantes para que la enseñanza sea considerada de "calidad". La idea de proficiencia matemática consiste en poder establecer "lo que alguien sabe, puede hacer y está dispuesto a hacer matemáticamente" (Schoenfeld, 2010, p. 71).

Al respecto, Schoenfeld (2010) propone considerar cuatro aspectos para la proficiencia matemática: 1) Conocimiento base; 2) estrategias de resolución de problemas; 3) Acciones metacognitivas y 4) creencias y prácticas que sirven de base para caracterizar la proficiencia en la enseñanza de las matemáticas, en siete dimensiones (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008, pp. 322 – 348):

1. Conocer la matemática escolar con amplitud y profundidad. Es amplio en el sentido de que los profesores tienen múltiples formas de conceptualizar el contenido según el nivel educativo, pueden representarlo de varias maneras, comprender los aspectos clave de cada tema y ver conexiones con otros temas en el mismo nivel. Es profundo en el sentido de que los profesores conocen los orígenes curriculares y las direcciones del contenido (dónde las matemáticas deben ser enseñadas y hacia dónde conducen), y entienden cómo crecen conceptualmente las ideas matemáticas.
2. Conocer a los estudiantes como pensadores. Consiste en que los profesores muestren disposición a escuchar y observar la manera en que los estudiantes hablan y piensan al resolver tareas matemáticas, pues ello puede sugerir formas de cómo orientar su proceso de aprendizaje.

3. Conocer a los estudiantes como aprendices. Consiste en que los profesores sean conscientes de la teoría del aprendizaje empleada y su papel en las actividades e interacciones en el aula.
4. Crear y gestionar entornos de aprendizaje. Consiste en que los profesores elaboren tareas para el aprendizaje, pero también, las posibilidades de conformar una comunidad en el aula dispuesta a aprender colaborativamente.
5. Desarrollar normas y apoyar el discurso en el aula, como parte de una enseñanza para la comprensión. Los profesores deben procurar que el aula funcione como una comunidad de aprendizaje y para ello, se deben adoptar normas sociales orientadas a la explicación y argumentación de soluciones, comprender el razonamiento de otros estudiantes, hacer preguntas si no entienden y desafiar argumentos con los que no están de acuerdo.
6. Establecer relaciones que soporten el aprendizaje. Los profesores organizan el contenido de tal manera que la matemática es tratada como una actividad en la que se establecen relaciones entre los conceptos, sus representaciones y con los estudiantes, como aprendices.
7. Reflexionar sobre la práctica de enseñanza. Los profesores deben desarrollar el hábito de la reflexión para poder reconocer y atender un problema de su práctica de enseñanza. La reflexión es propia del proceso de planeación de la enseñanza y, por tanto, ser la base para analizar el contenido de la asignatura y la práctica pedagógica asociada.

Los autores reconocen que si bien los profesores encargados de formar profesores para la enseñanza de las matemáticas pueden emplear su propuesta como una guía para orientar la enseñanza de las matemáticas, se requiere un refinamiento y nuevas elaboraciones a fin de mejorar su propuesta, aspecto con el cual en esta investigación se está de acuerdo, pues aun cuando se proporcionan varios ejemplos y fundamentos sobre cada uno de los aspectos implicados en la propuesta, muchos de ellos carecen de una descripción del cómo lograr desarrollar tales conocimientos y competencias en los profesores, más aun, de cómo entenderlo de modo sistémico. Máxime cuando Schoenfeld (2011) reconoce que la enseñanza de las matemáticas es un dominio intensivo de conocimiento con diferentes tipos de conocimientos y facetas afectivo-motivacionales.

Enfoque Ontosemiótico

Una propuesta teórica más sobre el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas es el llamado "Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática", impulsada por Godino (2009) y colaboradores (Godino y Batanero, 1998; Godino, Batanero y Roa, 2005; Godino, Batanero y Font 2007). Dicha propuesta consiste en retomar algunas categorías del conocimiento para la enseñanza en el profesor, por ejemplo, el conocimiento pedagógico (PK por su abreviación en inglés), el conocimiento del contenido (CK, por su abreviación en inglés), el conocimiento pedagógico del contenido (PCK, por su abreviatura en inglés) y el conocimiento matemático para la enseñanza de las matemáticas (MKT, abreviatura en inglés) y a partir de ellas, se configura un sistema de categorías para el análisis de los conocimientos didácticos y matemáticos que se consideran, debe o debiera tener el futuro profesor de matemáticas y el que se encuentra en ejercicio de su profesión.

La propuesta anterior lleva por nombre "Conocimiento didáctico-matemático" para la enseñanza de las matemáticas que, a decir de los autores mencionados, busca integrar la formación didáctica con la formación matemática. Tal propuesta se compone de seis aspectos relacionados con los conocimientos didácticos-matemáticos que el profesor debe poseer o mostrar para alcanzar una supuesta "idoneidad didáctica" de un proceso de enseñanza, a saber:

1. Epistémico: Representatividad de los significados institucionales implementados o pretendidos, respecto de un significado de referencia;
2. Cognitivo: Desarrollo de los significados implementados/pretendidos, y el grado en el que están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos;
3. Afectivo: Implicación, interés y motivación de los estudiantes respecto a los objetos matemáticos;
4. Interaccional: Interacción entre profesor y estudiantes para identificar y resolver conflictos de significado y favorecer la autonomía en el aprendizaje;
5. Mediacional: Disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de la enseñanza aprendizaje;

6. Ecológico: Adaptación curricular, socio-profesional y conexiones intra e interdisciplinares.

Como puede verse con los seis aspectos anteriores, se describe una manera de entender la relación entre dos tipos de conocimiento, el matemático y el didáctico, para llevar a cabo la actividad de enseñanza de las matemáticas. Según los impulsores de dicha propuesta, con ello se pretende que los profesores y futuros profesores lleguen a ser matemáticamente "proficientes", prácticamente en el mismo sentido referido por Schoenfeld (2010) y que, a su vez, logren que sus estudiantes también lo sean.

Si bien y a juicio de los autores de la propuesta anterior se puede considerar que con ello se tiene una guía para que los profesores en formación inicial o en ejercicio puedan (bajo el supuesto de una idoneidad de proceso educativo) analizar sus conocimientos didácticos-matemáticos para la enseñanza de las matemáticas, queda muy general e incluso hasta implícito, las características de los medios para lograrlo, pues como lo han dejado ver las perspectivas teóricas del aprendizaje social, los contextos socioculturales tienen un papel importante en la construcción de los significados y por ende, de los conocimientos.

En resumen, existen diversas propuestas teóricas con las cuales se intenta dar cuenta de los aspectos que constituyen o debieran constituir el conocimiento profesional de los profesores para enseñar matemáticas "eficientemente". No obstante, se coincide con Ponte (2012) cuando señala que enseñar matemáticas demanda cierta sensibilidad en los profesores respecto a los diversos aspectos relacionados con su quehacer, que no se resuelven con dotarlos solamente de conocimientos. Por tanto, es preciso continuar realizando estudios que den cuenta de cómo se puede favorecer el aprendizaje y desarrollo del conocimiento en el profesorado.

Respecto a lo anterior, Dewey (1933) mencionaba que el aprendizaje y conocimiento son adquiridos activamente a través de las interacciones y transacciones de los individuos con su entorno y muchas de tales acciones e interacciones pueden ser muy repetitivas, es decir, el aprendizaje es un asunto experiencial. Luego entonces, es viable pensar en el desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza desde un enfoque centrado en lo conversacional-reflexivo, pues se ha referido que la conversación y reflexión son valiosos para transformar experiencias en conocimiento (Kolb y Kolb, 2017).

2.5. Conversación y Construcción de Conocimiento

El discurso en general y la conversación en particular, son elementos que se han considerado clave para el aprendizaje y conocimiento profesional del profesor. De hecho, a ambos se les ha concebido tanto como medios como herramientas para crear oportunidades de aprendizaje profesional. Un ejemplo del discurso como medio para el aprendizaje profesional de los profesores es el hecho de que posibilita a los participantes desarrollar una "nueva" comprensión de las condiciones cambiantes de su práctica y del papel que la experiencia profesional puede desempeñar para alcanzar los fines de dicha práctica. Algunos autores como Goodwin (1994), conceptualizan al discurso como "hablar en interacción" para resaltar la naturaleza cultural y constantemente negociada del discurso profesional.

De lo anterior se puede decir que, cuando los profesores o futuros profesores conversan (hablan interactivamente), se establece un espacio (en un sentido simbólico) en el que se participa de un proceso para explicitar ideas y conocimientos relativos a un tema o situación e incluso, sobre la práctica de enseñanza. Por tanto, aprender en un contexto o espacio de conversación tiene varias implicaciones, entre ellas, disposición al diálogo en un sentido de apertura al cuestionamiento y al ofrecimiento de razones sobre los aspectos relacionados con las ideas y conocimientos que se comparten.

Pensar en la conversación como parte de un proceso de aprendizaje y desarrollo de conocimiento profesional se basa en la idea de que las conexiones, las interacciones, las reflexiones y el "nuevo" pensamiento que evolucionan a partir del diálogo, de algún modo determinan lo que se sabe (Routman, 1999). En tal entendido, se han desarrollado diversas investigaciones respecto al papel que las conversaciones tienen en el aprendizaje profesional de los profesores, centrándose mayormente en analizar la relación entre éstas y su impacto en las prácticas pedagógicas. En Timperley (2015) se muestra una revisión de la literatura sobre el tema de conversación profesional como una forma de mejorar las prácticas de los profesores.

Needham (2016) presenta cinco diferentes formas en que la conversación ha sido asociada al aprendizaje y desarrollo profesional, a saber:

1. *Conversaciones profesionales*. Cubren la mayoría de las conversaciones en el lugar de trabajo sobre la enseñanza y el aprendizaje. El diálogo formal e informal que se produce entre profesionales de la educación, incluidos maestros, mentores, entrenadores y líderes escolares, se centra en asuntos educativos.
2. *Conversaciones de aprendizaje.* Son aquellas en las que se generan nuevos conocimientos o entendimientos que luego se traducen en la práctica docente. Este término tiene más uso en el Reino Unido. Un enfoque planificado y sistemático para el diálogo profesional que ayuda a los maestros a reflexionar sobre su práctica. Como resultado, el profesor adquiere nuevos conocimientos y los utiliza para mejorar su enseñanza (General Teaching Council).

Se consideran una forma de aprendizaje profesional en la medida que los educadores logren significar juntos y aportar nuevas ideas y conocimientos. Estas conversaciones conducen a un cambio intencional para mejorar la práctica y el aprendizaje de los estudiantes (Stoll, 2014). Para participar en estas conversaciones, la mentalidad de indagación es importante, y el desafío respetuoso del pensamiento que sustenta la conversación es una característica fundamental (Needham, 2016).

3. *Conversaciones de aprendizaje profesional.* Son una forma particular de conversación basada en la evidencia, incluye más que conversaciones con cierta atención a la evidencia. Es un proceso iterativo de hacer preguntas, examinar la evidencia y pensar qué significa la evidencia en el contexto particular (Earl y Timperley, 2008). Tres cualidades son requeridas para este tipo de conversaciones: tener un hábito mental de indagación, usar datos relevantes y relaciones de respeto y desafío. El concepto de diálogo implica el entendimiento mutuo de la afirmación de cada contribuyente, del valor que tienen, así como del razonamiento y los datos en los que se basan.
4. *Conversaciones de retroalimentación.* Es un proceso usado para afirmar o modificar los pensamientos o comportamientos. La retroalimentación puede ser interna o

externa: cuando es externa, se entrega a otros, generalmente es en forma de una conversación.

5. *Conversaciones de Coaching.* Es una conversación individual enfocada en la mejora del aprendizaje y el desarrollo a través de un incremento de la autoconciencia y un sentido personal de la responsabilidad, donde el coach facilita el aprendizaje autodirigido del "coacheado" a través del cuestionamiento (preguntas), de un escuchar activamente y un apropiado desafío, en un clima propicio y alentador.

Hay varias características presentes en esto. Primero, existe la intención y el propósito de que el resultado sea aprender. También se presta atención a la forma en que se produce este aprendizaje, que puede ser a través de alguna reflexión y asumiendo la responsabilidad. El énfasis en el aprendizaje auto dirigido, en donde el entrenador es un facilitador pues no lo dice. También se enfatiza la naturaleza de la conversación, por ejemplo, el tipo de preguntas y respuestas que se hacen. Finalmente, "debe haber una relación particular, una relación de confianza, que fomente este aprendizaje y permita que el desafío apropiado sea parte del mecanismo de aprendizaje" (Van Nieuwerburgh, 2012, p.17).

Se puede ver que todos estos términos relacionados con la conversación y el desarrollo profesional tienen algunas superposiciones, así como diferencias sutiles, pero significativas y no se excluyen mutuamente (Needham, 2016). Asimismo, es posible reconocer diferentes acepciones de la conversación en relación con el aprendizaje y desarrollo profesional, por ejemplo, la conversación como un recurso en forma de herramienta para promover el desarrollo personal-profesional a partir de la experiencia y el uso de evidencia relevante; y como un medio para construir y difundir una cultura.

Horn (2005), Horn y Little (2010) señalan que el aprendizaje colectivo es apoyado por la intersubjetividad, es decir, la construcción de significados compartidos, la confianza y la conversación en torno al trabajo. De este modo, las conversaciones de aprendizaje en combinación con la observación entre pares tienen un valor importante para el aprendizaje profesional de los profesores, sobre todo si se parte de la experiencia en un contexto de confianza y de una relación profesional respetuosa para la discusión de sus percepciones sobre el proceso de enseñanza aprendizaje (Schuck, Aubusson y Buchanan, 2008).

En las comunidades de aprendizaje profesional (PCLs, por sus siglas en inglés), definidas en términos generales como “profesionales que se reúnen en un grupo - una comunidad - para aprender” (Hord, 2008, p. 10), la conversación ha sido considerada como una forma de generar oportunidades en donde los profesores puedan aprender, conocer y desarrollar habilidades orientadas a mejorar los resultados de aprendizaje de los estudiantes a través de mejoras continuas en la práctica de enseñanza (Darling-Hammond *et al*., 2009).

Particularmente y en lo relativo al aprendizaje del profesorado de matemáticas desde un enfoque basado en la idea de comunidad se ubica el trabajo desarrollado por Jaworski (2006), sobre comunidad de aprendizaje e indagación, mostrando que el sostener un proceso de indagación por parte de los profesores puede apoyar y facilitar su aprendizaje profesional, por ejemplo, a partir de iniciar conversaciones sobre los aprendizajes de los estudiantes que, paulatinamente pueden llevar a discutir también los propios.

Si bien las PLCs han ganado atención en el campo de estudio, también se ha advertido que el éxito de éstas depende de cómo los miembros del grupo trabajen y aprendan colectivamente hacia objetivos compartidos para mejorar la enseñanza y aprendizaje, es decir, se precisa de alcanzar interacciones significativas y productivas (Shuck, Aubusson y Buchanan, 2008). Otros autores como Campbell y Stohl (2017) reconocen que falta especificidad sobre la operatividad de las PLCs y la medición de sus resultados.

De los estudios centrados en la idea de PLCs se desprende que lo colectivo y conversacional son aspectos centrales para promover el aprendizaje y mejora de la práctica profesional de los futuros profesores, pues se facilita compartir ideas, experiencias y conocimientos de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje (Earles, Parrott y Knight, 2016). Por tanto, considerar a la CR como un medio para desarrollar conocimiento profesional en futuros profesores de matemáticas, también halló cobijo a la luz de tales estudios.

Coaching y Mentoring

El uso de conversaciones grupales en un formato de mentoría es una de las herramientas que también se han empleado para apoyar el desarrollo profesional de los profesores en formación y en ejercicio. Sin embargo, todavía hay una falta de investigación que muestre cómo se usan las conversaciones para desarrollar, por ejemplo, conocimiento profesional.

En el sentido anterior, han empezado a notarse algunas propuestas de explorar y repensar el asunto del aprendizaje y desarrollo profesional del profesor de matemáticas en la dirección de los principios del Coaching y Mentoring (Alice, Heaton y Williams, 2017), en los cuáles, la conversación es una de las principales herramientas empleadas para favorecer el desarrollo de competencias profesionales, sin embargo, como ya se ha dicho, estos trabajos no sólo son pocos, sino que aún están en proceso emergente.

Lozano (2008) define al coaching como:

> Un proceso o medio que facilita (…) avanzar en la comprensión de nosotros mismos y de cómo respondemos a nuestro entorno. Cuanta más conciencia se tenga, más capacidad se tiene para entender a los demás y de interactuar mejor con ellos. Al conocernos mejor, somos más realistas de los cambios que requerimos y de poder equilibrar nuestros diferentes roles en diversos contextos, y así iniciamos el desarrollo de nuestras competencias del ser a partir de patrones de conducta como la introspección mediante una reflexión interna. (p.130)

Las aproximaciones respecto al desarrollado del profesor desde un enfoque centrado en el coaching han tomado algunas técnicas y estrategias derivadas específicamente del coaching empresarial (Obara, 2010; Bennet, Amador y Avila, 2015), de modo que el énfasis se ha puesto en analizar cómo las competencias de un "coach docente", pueden ayudar a desarrollar competencias consideradas necesarias en directores de escuelas, supervisores de profesores y de los profesores mismos, para el adiestramiento de sus funciones, a partir de conversaciones grupales, pero sin la suficiente claridad sobre la naturaleza específica de éstas en ello.

En algunos trabajos como el desarrollado por Eriksson (2017), se muestra que los futuros profesores que participan en conversaciones grupales de mentoría usan las conversaciones como un "escenario" en su búsqueda de conocimiento profesional, centrándose particularmente en tres aspectos: i) el papel de los profesores y la práctica de enseñanza; ii) las condiciones para el desarrollo profesional y; iii) las condiciones relacionadas con la profesión. A decir de esta autora, las conversaciones sirven de base para cuestionar, debatir, compartir y reflexionar sobre dilemas pedagógicos relacionados con las actividades de enseñanza en el aula, entre otros aspectos, el comportamiento de los estudiantes y los propios ante diversas situaciones.

Eriksson (2017) señala la importancia de reflexionar respecto al tipo de conocimiento profesional que los futuros profesores buscan y que pueda ser apoyado o no mediante conversaciones grupales de mentoría. Pues parece haber beneficios relacionados con los modelos de mentoría grupal para aprender y desarrollarse profesionalmente que, en términos de conocimiento profesional, el beneficio más importante es el hecho de que las conversaciones se utilizan como un tipo de actividad complementaria de dos maneras. En primer lugar, para profundizar o ampliar el conocimiento y/o experiencia previa en relación con la tarea del profesor, al tener la posibilidad de debatir y obtener comentarios sobre las opiniones, dilemas, creencias y expectativas (Eriksson 2013; Storrs, Putsche y Taylor, 2008). En segundo lugar, para obtener apoyo y conocimiento sobre las partes de la profesión docente que no se abordan usualmente como contenido durante un programa de formación inicial.

Respecto al uso de la conversación en el formato de coaching y mentoría para el aprendizaje profesional de profesores de matemáticas, Huinker y Freckmanne (2004) consideran que aún falta por precisar sobre cómo enmarcar las conversaciones para pensar juntos, profesores y coach o mentor, y cómo apoyar a los profesores para iniciar una “investigación” constante sobre sus propias prácticas de enseñanza, así como qué preguntas deberían hacerse para motivarlos a pensar más profundamente sobre sus interacciones conversacionales.

Las autoras anteriores proponen que las conversaciones para el desarrollo profesional debieran centrarse en un triángulo instruccional, entendido éste como una interacción entre profesores, estudiantes y matemáticas. Así, ellas proponen iniciar la conversación sobre el cómo los profesores articulan el contenido matemático que los estudiantes aprenderán e identificar los aspectos de la tarea matemática que los ayudarán a aprender tal contenido. De esta manera, sugieren realizar preguntas “bien” estructuradas para promover el pensamiento de los profesores que incluyan tres partes esenciales:

i. una invitación a pensar;
ii. un proceso cognitivo y;
iii. un tópico específico.

En la Figura 2.2, se muestra la propuesta de Huinker y Freckmanne (2004) para promover el pensamiento de los profesores sobre las relaciones entre lo que ellos hacen, lo que los estudiantes aprenden y el contenido matemático.

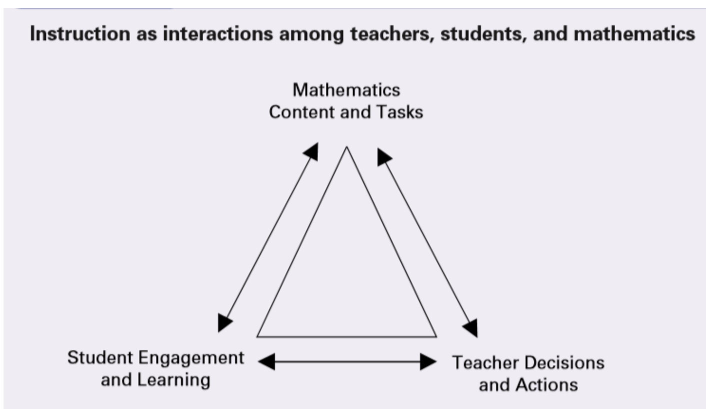

Figura 2.2. Interacción entre profesores, estudiantes y matemáticas (Huinker y Freckmanne, 2004, p. 353).

En relación con el modelo propuesto por las autoras anteriores, Feiman-Nemser y Parker (1990), reportan en su estudio realizado entre Mentores (profesores experimentados) y profesores principiantes, que las conversaciones entre ambas poblaciones tuvieron como principal característica el intercambio de inquietudes sobre el tema (contenido académico) de enseñanza, en particular, en lo relativo al pensamiento y comprensión de los estudiantes, y con la organización y gestión del aula. Dicen que, al aprender a enseñar contenido académico, los profesores principiantes deben aprender a pensar sobre el tema desde la perspectiva de los estudiantes. Ello implica "descubrir" lo que se debe aprender y prestar atención al pensamiento y comprensión de los estudiantes. Y es ahí que los profesores-mentores pueden ayudar a los principiantes a desarrollar las comprensiones y disposiciones necesarias si se enfocan en las intersecciones entre la materia y el pensamiento de los estudiantes.

Es así como en esta investigación se consideraron estas ideas en donde una conversación que enfatiza el intercambio de preguntas y respuestas en torno al contenido matemático, su enseñanza y aprendizaje entre futuros profesores y su profesor formador, podría coadyuvar en el desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza, en la dirección que se indica en el párrafo precedente.

Conversación y Colaboración

Como se ha venido mostrando en las subsecciones anteriores, las conversaciones representan una oportunidad para el aprendizaje profesional de futuros profesores en forma colaborativa. Horn (2012) examinó y reportó cuatro facetas de las conversaciones colegiadas que dan soporte al refinamiento del razonamiento pedagógico colectivo de profesores de matemáticas en educación básica. Tales facetas son: i) organización interactiva; ii) participación de profesores en un grupo; iii) postura epistémica sobre la enseñanza de las matemáticas y; iv) estándares negociados localmente de adecuación representacional. Los cuales, según la autora, pueden ordenarse de manera diferente para proporcionar oportunidades para los tipos de aprendizaje requeridos en una enseñanza matemática.

Las cuatro facetas de las conversaciones arriba referidas, según Horn (2012), apoyan oportunidades de aprendizaje profesional para los profesores, pues encontró que las conversaciones acumulan representaciones complejas de la práctica vinculadas a ciertos principios, los cuales sirven como lente para interpretar instancias de enseñanza, incorporando posturas epistémicas sobre lo que se puede saber en la enseñanza y cómo se debe aprender sobre ello. Reportó que las rutinas de interacción le permitieron la descripción y elaboración de planeaciones de prácticas en el aula con base en la comunicación de los estándares locales para una adecuada implementación.

Lo anterior, refuerza las ideas y los resultados de diversas investigaciones sobre el papel de lo colectivo en el aprendizaje profesional del profesor de matemáticas, al tiempo que enfatiza la importancia, por una parte, de continuar indagando sobre el tipo de espacios, contextos o en general, el tipo de ambientes de aprendizaje que se pueden generar o se generan en comunidades de profesores a través de la conversación. Por otra parte, la importancia de promover una cultura conversacional entre y con profesores (en ejercicio o en formación inicial), como una forma de aprendizaje profesional en relación con los conocimientos y prácticas asociadas a la profesión (Alles, Seidel y Gröschner, 2019).

Otra forma en la que se ha tratado la relación entre colaboración y conversación para el aprendizaje profesional de profesores de matemáticas es mediante la idea de "conversaciones de solidaridad" propuesta por Brodie y Shalem (2011), estas autoras plantean que el aprendizaje de los profesores de matemáticas puede favorecerse a través de conversaciones de responsabilidad basadas en el desafío y la solidaridad. Dicen que el desafío, la solidaridad y la responsabilidad, son tres constructos que describen con "éxito" la forma de aprendizaje que las comunidades profesionales de aprendizaje pueden apoyar.

> Al crear condiciones propicias para las conversaciones de responsabilidad, los profesores comienzan a imaginar nuevas posibilidades y, a su vez, desarrollan nuevos conocimientos profesionales y responsabilidad ante ese conocimiento. En el proceso, sus propios criterios se convierten en objetos de conversación y reflexión para ellos y para los demás, abriendo así nuevas condiciones de posibilidad para la acción. (Brodie y Shalem, 2011, p. 422)

Otro dato dado por las autoras anteriores es que la combinación de tales constructos apoyó la responsabilidad de los profesores entre sí, al igual que las prácticas de enseñanza de las matemáticas. Consideran que los vínculos entre la práctica y teoría también fueron evidentes en las conversaciones; pues observaron que los profesores pudieron usar los errores reales de sus alumnos para pensar sobre la naturaleza de tales errores y conceptos erróneos de manera más general y el papel de ellos para abordarlos.

Con la información expuesta a lo largo de toda esta sección, puede decirse que la conversación y la colaboración son medios o herramientas que, en efecto, apoyan el aprendizaje profesional de los profesores. Los aspectos que subyacen en los diversos tipos de conversaciones (profesionales) encontrados en la literatura tienen que ver con la reflexión como una manera de mediar el aprendizaje, la estructuración de preguntas orientadoras para favorecer conversaciones centradas en la relación didáctica, capacidad o apertura para negociar significados sobre lo que se conoce y se hace en la práctica de enseñanza, compartir responsabilidades, enfrentar conjuntamente desafíos y disposición para aprender de la experiencia de los demás, entre otros, como conversar sobre incidentes críticos detectados entre pares sobre el proceso de enseñanza aprendizaje en las aulas y habilidades de coaching por parte de profesores experimentados para favorecer que las conversaciones se centren en el "cómo enseñar" y en la comprensión del papel del conocimiento y autoconocimiento en ello (Harrison y Lee, 2011).

En la siguiente sección se sintetizan todos estos aportes sobre la importancia de la conversación para el aprendizaje al tiempo que se articulan con los planteamientos hechos desde algunas teorías tales como piscología educativa y cibernética para situar el concepto de conversación reflexiva en relación con el aprendizaje y desarrollo de conocimiento profesional del futuro profesor de matemáticas.

2.6. Aprendizaje Conversacional

Ernest (1994) señala que, en diversas teorías en el campo de la Matemática Educativa, subyacen metáforas asociadas a la mente y a sus procesos, por ejemplo, él argumenta que la metáfora de la mente para el constructivismo del procesamiento de la información es la de una computadora (una máquina de pensamiento insensible). En el caso del constructivismo radical, es un organismo evolutivo y adaptable, pero aislado, un ente cognitivo en un entorno desconocido u "hostil". Y en el caso del constructivismo social, es el de personas en conversación.

La conversación se origina en un nivel interpersonal donde las personas en una forma de vida compartida participan en conversaciones directas, basadas en "juegos de lenguaje" comunes, se basa en experiencias compartidas, entendimientos, valores y respeto mutuo (Ernest, 1994). Además, se considera que "la conversación es uno de los modos básicos de interacción humana interpersonal" (Ernest, 1994, p.58).

Dado que el aprendizaje y por ende el conocimiento, es primero un proceso social y luego individual, mediante los signos en general y el lenguaje en particular (Vygotsky, 1986), tiene sentido considerar a la conversación como una herramienta social que permite compartir pensamientos con otros de manera abierta y al hacerlo se da paso a un proceso reflexivo que influye en los significados, pensamientos y acciones tanto individuales como colectivos. Es decir, de cierta manera promueve el aprendizaje y desarrollo de conocimiento de los interlocutores.

Aprendizaje Conversacional desde la Cibernética

Un ejemplo de equiparar metafóricamente a la mente con una computadora es la propuesta conceptual de comunicación, en particular, la teoría de la conversación (aprendizaje basado en la conversación) desarrollada por Pask (1976). Él derivó sus ideas desde la cibernética con el estudio de la comunicación y el control en sistemas naturales y artificiales para dar cuenta de los mecanismos por los cuales un sistema puede comprenderse a sí mismo.

La propuesta de Pask (1976) se basa en la idea de que, en lugar de entender a la comunicación como el intercambio de mensajes a través de un medio inerte y transparente, la percibió como un intercambio de programas y una interacción lingüística dentro de un medio computacional generalizado. En tal sentido, los medios son sistemas informáticos activos dentro de los cuales conversan individuos dotados de mente (personas y sistemas inteligentes). Visto así, la retroalimentación adquiere un valor inherente en tal teorización.

En este orden de ideas y desde el punto de vista de la teoría cibernética de la conversación, ésta viene a ser un proceso de negociación de entendimientos compartidos entre dos o más participantes, que conduce a la formación de nuevos conceptos compartidos y eventualmente, al aprendizaje y construcción de un conocimiento. En esta concepción, los participantes en la conversación pueden estar de acuerdo o en desacuerdo, sin embargo, siempre reconocerán un nuevo pensamiento sobre lo que se está considerando conjuntamente (Scott, 2001).

Es así como desde esta teoría, el aprendizaje conversacional resulta de una interacción entre dos o más participantes que buscan (intencionalmente) un entendimiento común. En otras palabras, el aprendizaje es un proceso que consiste en sostener un diálogo entre los interlocutores quienes construirán su comprensión mediante el intercambio de sus ideas, entendimientos y respectiva retroalimentación. En la Figura 2.3, se muestra el modelo de conversación esbozado por Pask (1976).

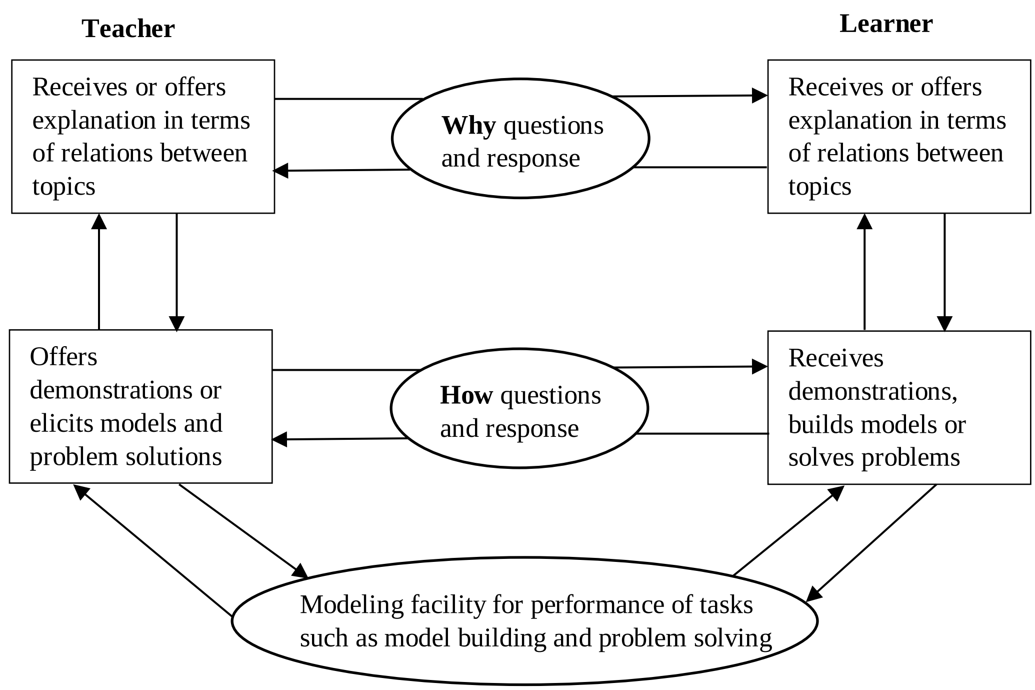

Figura 2.3. Modelo de una conversación según Pask (1976). Fuente: Scott (2001, p. 352).

En el modelo anterior, las conexiones horizontales representan intercambios verbales que pueden darse en al menos dos niveles, el nivel “how” (cómo) y el nivel “why” (por qué) relativos al conocimiento procedimental y conceptual, respectivamente. Las conexiones verticales representan relaciones causales con retroalimentación, una jerarquía de procesos que controlan o producen otros procesos. En el nivel más bajo de la jerarquía de control hay un mundo canónico en donde el profesor puede inducir o ejemplificar el tema mediante demostraciones no verbales (Scott, 2001).

Con base en lo planteado por Pask (1976) se tiene que, aun cuando las respuestas a determinadas preguntas sobre algún tema son individuales, el significado se producirá por acuerdos con base en la conversación. Dicho de otro modo, la comprensión se construirá individualmente (Glanville, 2008), y el aprendizaje consistirá en cambios en la estructura del conocimiento individual.

En resumen y desde esta visión teórica cibernética, el aprendizaje es un proceso por el cual se llega a conocer a partir de que los interlocutores (estudiantes y profesores), construyen interpretaciones temporalmente estables de su mundo (Ernest, 1994). Tal entendimiento del aprendizaje como un proceso que culmina con un conocimiento producto de la participación colaborativa es coherente con los planteamientos realizados a lo largo de este capítulo, en particular, con la visión social del aprendizaje. Además, se retroalimenta la idea de que la CR puede ser un proceso que lo promueva.

Aprendizaje Conversacional desde la Psicología Educativa

Otra forma de entender al aprendizaje en relación con la conversación es la que proponen Kolb y Kolb (2017) desde la psicología social educativa. Estos autores entienden que el aprendizaje por conversación es el proceso mediante el cual las personas construyen nuevos significados y transforman sus experiencias colectivas en conocimiento a través de sus conversaciones. Para ello se valen de un modelo cíclico de aprendizaje experiencial compuesto por cuatro modos de aprendizaje: Experiencia Concreta (CE, por su abreviatura en idioma inglés); Observación reflexiva (RO), Conceptualización abstracta (AC) y; Experimentación activa (AE), dicho modelo se ilustra en la Figura 2.4.

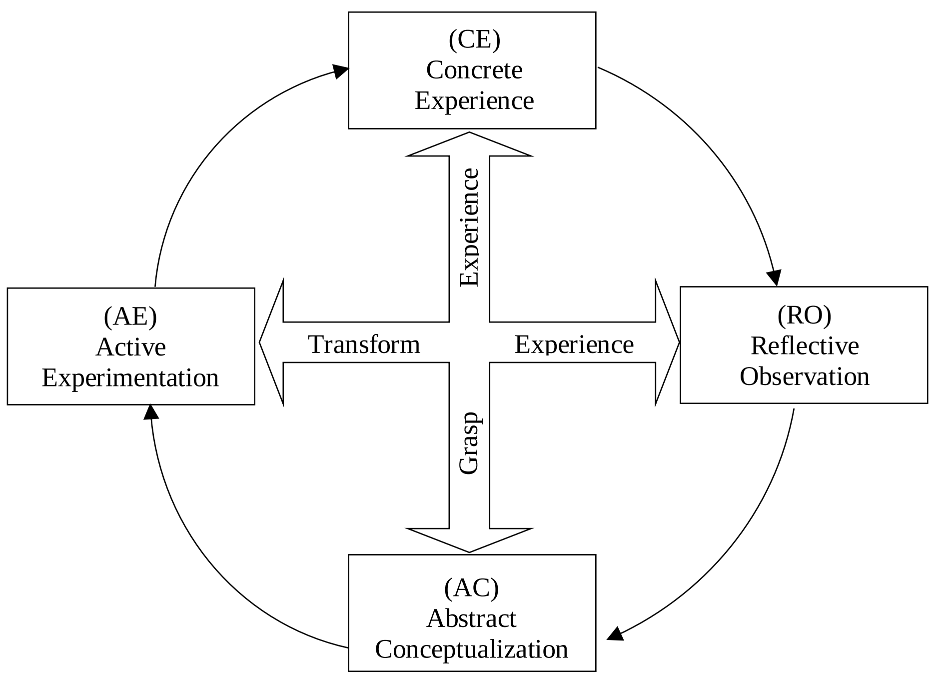

Figura 2.4. Ciclo de Aprendizaje Experiencial (Kolb y Kolb, 2017, p. 32).

En el modelo (Figura 2.4.), los cuatro modos de aprendizaje se caracterizan como sigue:

1. **CE** consiste en aprender experimentando/sintiendo;
2. **RO** está en relación con observar y reflexionar sobre lo realizado/experimentado en CE (aprender procesando);
3. **AC** está en relación con teorizar o generalizar la experiencia a partir de la RO (aprender generalizando) y;
4. **AE** está en relación con aplicar o probar una teoría para una próxima experiencia (aprender haciendo).

Las flechas centrales en el modelo representado en la Figura 2.4 indican las relaciones dialécticas entre los modos de aprendizaje en el ciclo experiencial. Por una parte, está la relación (CE – AC) mediante la cual se capta la experiencia y, por otra parte, está la relación (RO – AE), mediante la cual se transforma la experiencia.

Desde la teoría de Kolb y Kolb (2017), aprender en una conversación implica un proceso cíclico, dialéctico y holístico de adaptación al mundo en el que se dan transacciones entre la persona y el entorno (Dewey, 1938). Baker, Jensen y Kolb (2005) afirman que lo experiencial es fuente principal del aprendizaje y éste se va fortaleciendo en la medida que las personas transiten a través del ciclo de experimentar, reflexionar, abstraer y actuar, construyendo así, significados de sus experiencias en la conversación. A decir de los autores, es a través de conversaciones que las personas construyen significados compartidos con base en sus experiencias y mejoran sus entendimientos en la medida en que estén abiertos al diálogo.

En la Figura 2.5 se muestra este proceso de aprendizaje conversacional. En ella se representa que cuando una persona está recibiendo retroalimentación (CE) y formulando percepciones (RO), la otra está creando intenciones basadas en estas percepciones (AC) y actuando sobre ellas (AE).

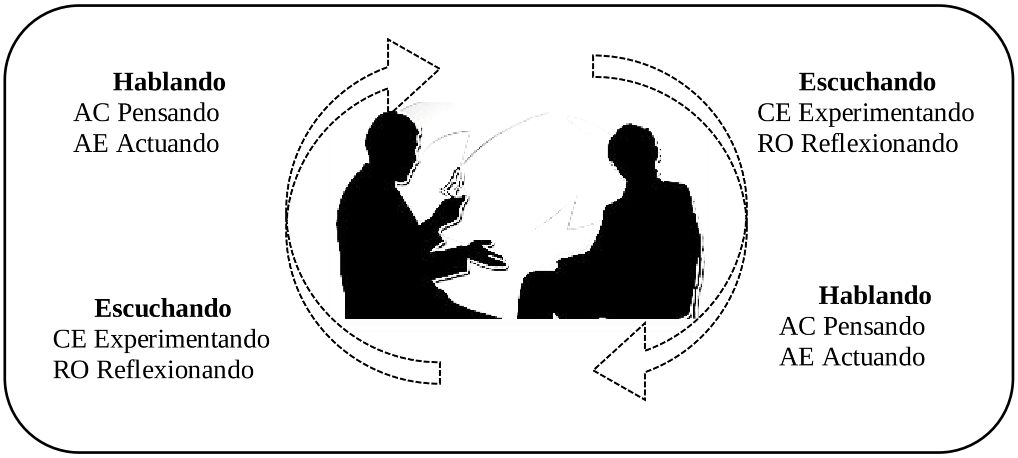

Figura 2.5. Ciclo de aprendizaje conversacional (Kolb y Kolb, 2017, p.191)

Así, las ideas presentes en esta teoría no solo refuerzan la relación entre conversación y aprendizaje discutidas previamente en este capítulo, sino que, además, proporciona una forma en que la experiencia en el mismo sentido de Dewey (1938), participa en el aprendizaje a partir de un proceso conversacional cíclico y dialéctico, en el que la reflexión es parte esencial.

2.7. Conversación Reflexiva

De lo dicho en la sección anterior, se desprende que los modelos conversacionales de Pask (1976) y de Kolb y Kolb (2017), son complementarios. El modelo de aprendizaje conversacional del primer autor consiste en interacciones dialógicas que toman como base el intercambio de ideas relativas a un tópico y es mediante el cuestionamiento (preguntas y respuestas), que se produce el aprendizaje. El modelo de aprendizaje conversacional de los segundos autores consiste en interacciones dialécticas que toman como base los opuestos y las contradicciones dentro de un tema de discusión para lograr el aprendizaje.

Cabe decir que en el modelo de Pask (1976), el aprendizaje no es solo un asunto de evolución de esquemas como en el modelo de Kolb y Kolb (2017), sino también, de la relación con el contenido, y en ambos modelos se reconoce que el diálogo tiene el rol de potencializar el aprendizaje, ya sea mediante un proceso de preguntas y respuestas o, mediante la discusión para la aceptación de diferencias, contradicciones y conflictos que hacen concurrir a la discusión, emergiendo con ello los significados (Bakhtin, 1986).

Ahora bien, en ambos modelos la reflexión es importante como parte del aprendizaje conversacional, pues a decir de Dewey (1938), no se aprende desde las experiencias, sino de la reflexión sobre ellas. Dicho así, la reflexión es un elemento fundamental en el proceso de aprendizaje, pues se entiende que ésta tiene que ver con la acción mental de reflejar las acciones ante el individuo y con el proceso de construcción de objetos (cosas con significado), sin embargo, cabe decir que en ambos modelos tal elemento queda sobreentendido.

Por lo anterior y con base en la revisión de la literatura en el campo expuesta a lo largo de este capítulo sobre la importancia de la reflexión, conversación y colaboración para el aprendizaje y desarrollo de conocimiento profesional del profesor en general y de matemáticas en particular, en esta investigación se consideró fundamental extender las ideas de conversación y aprendizaje expuestos en los modelos de Pask (1976) y Kolb y Kolb (2017), a la idea de conversación reflexiva con el propósito investigativo de tener un entendimiento más profundo y completo sobre la manera en que ésta promueve el desarrollo de conocimiento profesional en futuros profesores de matemáticas.

De este modo y en el marco de las visiones teóricas antes descritas, conversación reflexiva es un proceso comunicativo-reflexivo a partir del cual los interlocutores van adquiriendo mayores niveles de conciencia sobre sus significados (individuales o colectivos), pensamientos y acciones relativas al tema de conversación, valiéndose para ello (implícita o explícitamente) del cuestionamiento y de la interacción de opuestos y contradicciones, que lleva al desarrollo de un conocimiento socialmente compartido.

2.8. Conversación Reflexiva y Conocimiento del Futuro Profesor de Matemáticas

En el sentido anterior, el conocimiento del futuro profesor de matemáticas se describe en términos de una fusión de éste con su contexto conversacional, de manera tal que, a través de su participación comunicativa posibilita la emergencia de relaciones significativas para él en dicho contexto. Así, la conversación solo es un medio para que los interactuantes expresen su propio pensamiento de manera abierta a los demás y al hacerlo, se considera, se abre paso a un proceso reflexivo que de alguna manera influye en los significados, pensamientos y acciones. Es decir, influye en el aprendizaje y el desarrollo de conocimiento.

Esquema de Conversación Reflexiva

Se ha dicho que el aprendizaje conversacional es, en esencia, un proceso de construcción de (nuevos) significados y la comprensión de algún tópico en forma compartida, que se constituye en conocimiento (Pask, 1976; Kolb y Kolb, 2017). Así, un aprendizaje y por tanto, un conocimiento en el marco de una CR se entiende como una transformación en el conocimiento individual o en su estructura, producto de la negociación de significados y a partir de los cuales los interlocutores adquieren mayores niveles de conciencia sobre la naturaleza de sus saberes (profesionales), de sus pensamientos y acciones relativas al tópico de conversación, soportado por un diálogo que se basa en el cuestionamiento, la interacción de opuestos y contradicciones.

Para examinar cómo la CR promueve el desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza en futuros profesores de matemáticas, se configuró una integración de los dos modelos conversacionales descritos en la sección 2.6., como se muestra en la Figura 2.6.

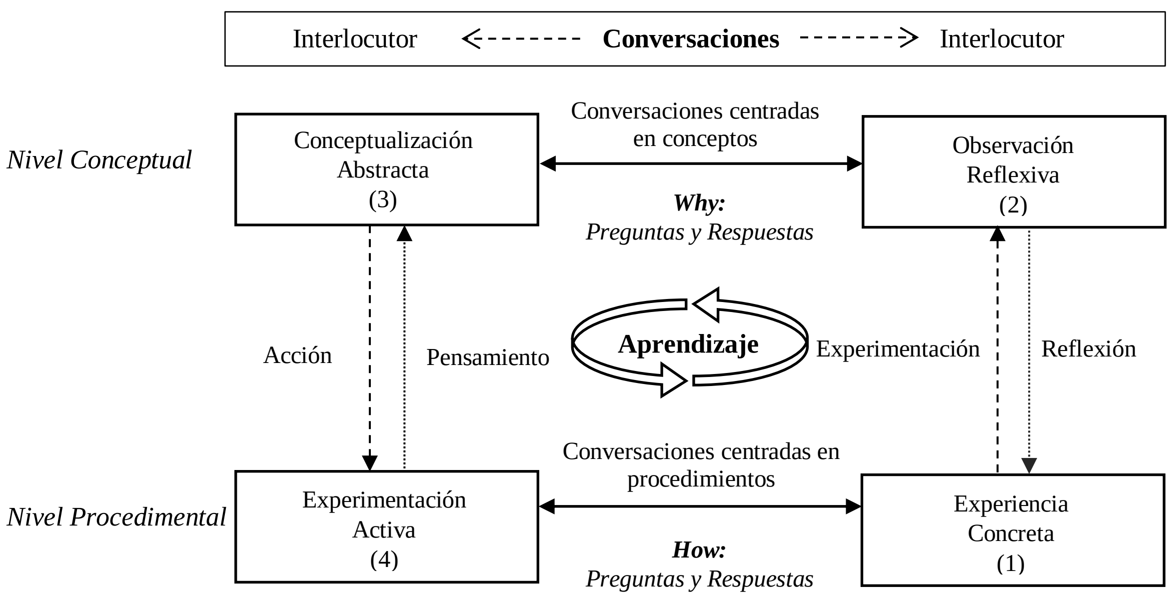

Figura 2.6. CR y Aprendizaje, basado en Pask (1976) y Kolb y Kolb (2017)

Haciendo una lectura de abajo hacia arriba en la Figura 2.6., en el primer nivel (how), se tiene un aprendizaje por percepción, mientras que en el segundo (why), por procesamiento de información. Aunque se considera que el segundo nivel es más demandante cognitivamente hablando, ambos se complementan para generar aprendizajes más profundos. Los dos niveles conversacionales se conectan mediante procesos causales tales como la experimentación, la reflexión, el pensamiento y la acción. Ahora bien, respecto al tipo de aprendizaje y conocimiento que, matemáticamente hablando, se promueve en la CR, éstos se ven reflejados y están en relación con las interacciones conversacionales, ya sea en aquellas centradas en los conceptos o en los procedimientos matemáticos.

En este planteamiento de conversación reflexiva se asume que el aprendizaje es sobre la experiencia, el pensamiento y la acción (Dewey, 1938; Shön, 1983; Kolb y Kolb, 2017), apoyado por la participación colaborativa que favorecen los cuatro procesos causales referidos en ella y que, a su vez, fungen como retroalimentación de lo discutido y en general, de lo aprendido colectivamente. Visto así, se reconoce que el conocimiento matemático para la enseñanza del futuro profesor tiene un carácter personal asociado al proceso de conversación reflexiva sobre la experiencia.

Conversación Reflexiva y Conocimiento Matemático para la Enseñanza

Es sabido que la matemática en tanto ciencia o área de conocimiento científico, es distinta a la matemática en tanto que materia de enseñanza y aprendizaje, es decir, distinta a una matemática escolar. Por tanto, el conocimiento de la matemática para su enseñanza es un conocimiento que ha de emerger o configurarse en primera instancia, como resultado de las posibles relaciones entre los objetos matemáticos *per se* (conceptos, procedimientos, etc.,) y sus diversas formas de representación, tanto internas como externas a la matemática misma. Visto así, se puede decir que la naturaleza de dicho conocimiento está en relación no solo con el tipo de visión o entendimientos que los futuros profesores tengan o se formen de la matemática y de lo que valoren más de ésta (conceptos, procedimientos, aplicaciones, etc.), ya sea de modo sistémico o fragmentado, sino también de las interpretaciones que de ésta se hagan para su enseñanza (Ponte, 2012).

Si bien el proceso de constitución del conocimiento matemático para la enseñanza inicia como se acaba de mencionar, cabe decir que éste no ha de considerarse de naturaleza estática y acabada, por el contrario, se considera que está en constante desarrollo y en función de las experiencias y reflexiones que sobre éstas realicen los profesores, ambas en un contexto que indudablemente, en el caso de la formación inicial de profesores, han de estar enmarcadas en el contexto mismo de discusiones centradas en la práctica profesional, y por tanto, dicho conocimiento y su desarrollo se encuentra vinculado también a otros tipos de conocimientos tales como el conocimiento del currículo, de los estudiantes y de su aprendizaje, que a decir de Ponte (2012), en conjunto configuran el conocimiento didáctico del profesorado de matemáticas.

Siguiendo el orden de ideas expuesto, se consideró que los cursos impartidos como parte de la formación académica universitaria de futuros profesores de matemáticas, en particular, aquellos cuyos contenidos y objetivos tienen una naturaleza formativa didáctica-matemática, representan contextos y oportunidades para indagar sobre cómo ellos aprenden a enseñar su materia, presuponiendo que las interacciones conversacionales al seno de las aulas en los que se desarrollan dichos cursos, tienen un papel fundamental debido a que favorecen una “alineación” interactiva de las representaciones lingüísticas, que a decir de Garrod y Pickering (2004), “tiene el efecto de distribuir la carga de procesamiento entre los interlocutores porque cada uno reutiliza la información procesada por el otro” (p. 11). Luego, la conversación en un sentido de diálogo es esencial en el proceso de aprendizaje de las personas; de hecho, se reconoce que es así como los humanos aprenden a hablar en primera instancia.

Por lo anterior, se consideró que la propuesta de CR incorpora aspectos clave sobre el aprendizaje y desarrollo de conocimiento a través de la conversación y reflexión. Por ejemplo, se reconoce que el aprendizaje tiene lugar debido a las interacciones de un individuo dentro de un grupo, por tanto, la naturaleza del conocimiento co-construido quedará determinada por el contexto de dichas interacciones, lo cual es coherente con algunas perspectivas socioculturales del aprendizaje como la Vygotskyana. Por otra parte, se apoya la idea de que la comprensión puede ser alcanzada por consenso y colaborativamente, lo cual es coherente con la idea de comunidad de aprendizaje.

Así, y dado que en dicho planteamiento de CR también se reconoce la naturaleza conceptual y procedimental del conocimiento, por ejemplo, reconociendo que cada uno de ellos tiene un leguaje asociado que los hace distinguirse uno del otro, pero al mismo tiempo, entender su complementariedad, se destaca que las conversaciones y reflexiones pueden darse en al menos dos niveles interactivos, uno en el que se abordan preguntas sobre "por qué el mundo es o funciona como lo hace" y otro en el que se abordan preguntas sobre "cómo el mundo funciona", aspectos que se dice, se encuentran inherentes en la naturaleza del conocimiento matemático y de su enseñanza. Por ello, se pensó que la idea de CR representa una forma alternativa para indagar sobre el aprendizaje y desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza en futuros profesores.

Resumen de constructos: CR y Conocimiento Matemático para la Enseñanza

Garrod y Pickering (2004) mencionan que una conversación es una actividad conjunta en donde los interlocutores trabajan juntos para establecer una comprensión conjunta de lo que están hablando. El entendimiento común se logra en la medida que los interlocutores alineen sus modelos de situación, es decir, sus representaciones multidimensionales que contienen información, sobre el espacio, tiempo, causalidad, intencionalidad y los individuos relevantes en el momento.

La alineación de los modelos a la que hacen referencia Garrod y Pickering (2004) se da por medio de un proceso inconsciente de "alineación interactiva", es decir, una alineación de las representaciones en diferentes niveles lingüísticos al mismo tiempo, en donde los significados, la elección de las palabras, los sonidos y las formas gramaticales son usadas para ello. Así, la alineación en un nivel conduce a una alineación mayor en otros niveles de interacción conversacional, de este modo, se entiende que el éxito de las conversaciones no es un asunto exclusivo de razonamiento complejo, sino más bien, por la alineación en niveles lingüísticos aparentemente dispares.

Por su parte, Pask (1976) considera a la conversación como algo más que una plática entre dos o más personas. Para él, es un proceso interactivo por medio del cual los interlocutores intercambian y a menudo, comparten conceptos, enriqueciendo así, nuevos significados de los términos comunes y conduciendo a la comprensión mutua y a la generación de acuerdos. En este sentido, los acuerdos sobre la comprensión de algún concepto se pueden obtener al examinar las respuestas dadas al "cómo" y al "por qué" relativos a un tema de conversación. Cualquier acuerdo se producirá por el refinamiento iterativo del significado para los participantes (Pask, 1987).

Por otra parte, Kolb y Kolb (2017) consideran que la conversación es la forma más común y ubicua de aprendizaje experiencial. Conversar entonces consiste en experimentar la situación o el contexto, el problema o tema en cuestión. En ese sentido, "la conversación abarca la autocomprensión y comprensión de la situación a medida que las ideas dan paso a lo que debe entenderse y se hacen evidentes en ese proceso" (Kolb y Kolb, 2017, p. 192).

En lo que respecta a la reflexión, Dewey (1938) hizo ver la importancia de ésta para desarrollar una forma de pensar que fuera más allá de lo ordinario, se refirió a esta forma de pensar como "pensamiento reflexivo" y a su juicio, favorecer este tipo de pensamiento debía ser el propósito de la educación, pues las personas no aprenden de las experiencias, sino al reflexionar sobre ellas. Él dijo que la reflexión involucra no una secuencia simple de ideas, sino una consecuencia de estas (Dewey, 2007).

En otras palabras, la reflexión es un proceso mental que posee un carácter intencional o deliberativo para producir algún tipo de resultado. Así, es por la reflexión de ideas y experiencias que es posible construir o dar significados a éstas y expresar esos significados en pensamiento, habla y acción (Kolb, 1984), dicho de otro modo, producir un aprendizaje y conocimiento.

Es así como en esta investigación se planteó que, si bien es la conversación lo que hace posible expresar las ideas, pensamientos, conocimientos y significados, la reflexión es lo que hace posible tomar conciencia de ellos y construir nuevos significados. Es decir, la reflexión posibilita la construcción de un conocimiento que se comparte socialmente y como se indica en Raelin (2007), la reflexión es mayormente interactiva, de modo que las conversaciones entre colegas la favorecen.

Con base en las enunciaciones anteriores se tiene que una CR es un proceso comunicativo-reflexivo entre dos o más personas cuya implicación va más allá de compartir información o experiencias y en donde los participantes pueden estar o no de acuerdo (Scott, 2001), implica hablar y escuchar reflexivamente (Shön, 1992). Es decir, la voluntad de entablar un diálogo en el que se intercambien, amplíe e integren ideas, pensamientos y acciones a través de la negociación de significados, la aceptación de cuestionamientos y la argumentación de éstas de modo que y eventualmente, podrían conducir a una comprensión nueva del tema de conversación, en este caso, al aprendizaje y conocimiento profesional asociado a la práctica de enseñanza futura.

Conocimiento Matemático para la Enseñanza

Ponte (2012) refiere al conocimiento de la matemática para su enseñanza como aquel que es específico del profesorado de matemáticas, aun cuando se apoye de otros tipos de conocimientos de naturaleza teórica, social y experiencial, orientado esencialmente a la actividad práctica de enseñar matemáticas. Para él, la calidad de dicho conocimiento queda establecida por su eficacia en la resolución de problemas prácticos y por su adecuación a los recursos existentes. Se apoya en la experiencia discutida, sistematizada y validada por los mismos profesores, de modo que tiene como base fundamental la experiencia y la reflexión sobre la experiencia, no solo individual, sino de todo el cuerpo profesional.

Si bien el conocimiento profesional del profesor de matemáticas queda configurado por un conjunto de conocimientos matemáticos, curriculares, pedagógicos y de aprendizaje de los estudiantes, y que indudablemente se interconectan en o para la práctica docente de aula, en este trabajo nos enfocamos en el llamado conocimiento matemático para la enseñanza, como parte de ese conocimiento profesional del profesor, considerando la caracterización dada por Ball *et al*. (2008), en términos de los dominios y subdominios asociados al conocimiento del contenido matemático y al conocimiento pedagógico del contenido, pero considerando el sentido de Ponte (2012), esto es, como esa interpretación que el profesor o futuro profesor hace de las matemáticas en tanto disciplina escolar.

CAPÍTULO 3

MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo se expone el marco metodológico empleado para la recolección, procesamiento y análisis de los datos de la investigación cuyo propósito fue analizar cómo la conversación reflexiva promueve el desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza en futuros profesores de matemáticas y caracterizar tal conocimiento. La exposición incluye una descripción del tipo y diseño de la investigación, de la población participante, de las técnicas e instrumentos para la recolección y el análisis de los datos.

3.1. Tipo y Enfoque de la Investigación

La investigación es cualitativa circunscrita en el análisis del discurso (Heritage 1984), más concretamente, en el análisis conversacional (Mazeland, 2006). Se eligió este tipo de investigación toda vez que el objetivo de explorar y analizar cómo la conversación reflexiva promueve el desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza en futuros profesores, implica un proceso de recolección y análisis de conversaciones. Las conversaciones son consideradas en si mismas, datos cualitativos (Gee, 2011; Wooffitt, 2005).

En una investigación cualitativa los investigadores se interesan en cómo las personas dan sentido a su mundo, lo interpretan y cómo experimentan diferentes eventos (Creesswell, 2009). Es decir, el interés está puesto en los significados que las personas construyen. En Robson (2011) y Bryman (2008), se mencionan algunos aspectos característicos de la investigación cualitativa.

- Se hace hincapié en las palabras e imágenes más que en los números en la recolección y análisis de los datos;

- Se usan lógicas inductivas para generar teorías o hipótesis;
- Se enfatiza la interpretación de los individuos del mundo social;
- Se recopilan y analizan datos de muestras muy pequeñas mediante observación o entrevistas principalmente no estructuradas o semiestructuradas;
- Los detalles de los procedimientos no son fijados de antemano, el diseño es flexible.

Visto así, los cincos aspectos señalados se corresponden con las características y necesidades de esta investigación. En efecto, las palabras o conversaciones son los datos centrales de los análisis para establecer inferencias sobre aquello que los interlocutores logran darle un sentido y la forma en que lo hacen en el contexto mismo de sus interacciones conversacionales, reconociendo que sus pensamientos y acciones, incluso significados, están en relación con tal o cual contexto.

Por otra parte, la investigación se encuadró en un enfoque interpretativo dado que en dicho enfoque lo que se conoce se negocia en lo social y cultural. Es decir, las personas construyen significados de la realidad a partir de y en relación con su entorno social. Cohen, Manion y Morrison (2007) indican que en el enfoque interpretativo se busca interpretar y comprender el mundo en términos de sus actores. Y de acuerdo con Kilpatrick (1998), se orienta entre otros aspectos, a la búsqueda del significado personal de los sucesos, al estudio de las interacciones entre personas y el entorno, así como al estudio de pensamientos, actitudes y percepciones de los participantes. Por ello los esfuerzos importantes por entrar y comprender desde el contexto mismo de la interacción.

En términos conceptuales, el enfoque interpretativo se caracteriza esencialmente por considerar que:

- existen múltiples realidades (sociales) que son construidas a partir del contexto de sus actores y en relación con los diversos significados que las personas otorgan a las situaciones en las cuales se sitúan;
- el conocimiento resulta de la interacción sujeto-objeto y;
- los resultados de la investigación son individualizados, es decir, no se pretende hacer generalizaciones, aunque si es posible realizar inferencias.

Dicho así, en una investigación con enfoque interpretativo no se pretende generar explicaciones y mucho menos establecer relaciones de causa-efecto, más bien se busca ofrecer interpretaciones sobre el objeto de estudio (Corbin y Strauss, 2008). Esto aplica en la presente investigación porque el interés fue analizar cómo la CR promueve el desarrollo de conocimiento y no buscar una explicación de relación casusa-efecto. Lo cual se pensó, podría lograrse mediante inferencias con base en los datos.

3.2. Población y Contexto de la Investigación

La investigación se realizó con estudiantes universitarios del sureste mexicano, quienes al momento se encontraban formándose profesionalmente para desempeñarse en un futuro inmediato como profesores de matemáticas, principalmente en secundaria y bachillerato.

Los estudiantes estaban formalmente inscritos y cursando su último año de la licenciatura “Enseñanza de las Matemáticas” de la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY, 2013), en la ciudad de Mérida, Yucatán, México, en modalidad presencial. Dicha licenciatura tiene una duración de cuatro años y está regido por el “Modelo Educativo para la Formación Integral”, basado en el desarrollo de competencias profesionales y compuesto por cursos obligatorios, optativos y libres que comprenden contenidos matemáticos, didácticos, docentes, tecnológicos con orientación educativa y cursos de formación libre.

Los contenidos matemáticos que abarca el plan de estudios de la licenciatura referida están relacionados con el álgebra (incluye el álgebra superior y lineal), geometría euclidiana y analítica, cálculo diferencial e integral (incluido ecuaciones diferenciales), probabilidad y estadística. Entre los contenidos didácticos están las didácticas del álgebra, de la geometría, del cálculo, de la probabilidad y de la estadística. Y entre los contenidos docentes se ubican los relacionados con el diseño, ejecución y valoración de diseños de enseñanza y aprendizaje. Finalmente, entre los contenidos tecnológicos con orientación educativa se ubican los relacionados con el uso de software, programación computacional básica y el uso de algunas plataformas digitales.

La población participante estuvo conformada por un grupo de 11 estudiantes (8 mujeres y 3 hombres) que al momento ya habían cubierto la totalidad de las asignaturas relacionadas con el contenido matemático y didáctico, y estaban por cursar la asignatura optativa “Reconceptualización Matemática” cuyo propósito es que los futuros profesores integren lo aprendido en dichas asignaturas. La asignatura tiene una duración de 48 horas distribuidas en 16 semanas. 3 horas por semana, las cuales se cubren con 2 sesiones de 90 minutos de trabajo presencial en el aula. Durante ese tiempo se abordan aspectos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos de educación básica y media.

Concretamente la asignatura optativa se compone de 4 unidades. La primera unidad está orientada al estudio de la aritmética como materia de enseñanza. La segunda al estudio del álgebra, también como materia de enseñanza. Y las unidades 3 y 4 al estudio de la geometría y probabilidad, respectivamente, como materia de enseñanza. En promedio son 12 horas de estudio por unidad. El trabajo fue esencialmente participativo y el profesor fungió en su papel habitual de guía.

La participación de los futuros profesores y la de su profesor fue voluntaria, sin algún tipo de compensación o sanción. En el caso de los estudiantes, con sus calificaciones y en el caso del profesor, con su situación laboral. El profesor contaba con estudios de doctorado en el área de la Matemática Educativa y con una experiencia laboral ininterrumpida en educación superior de cinco años. Además, se le proporcionó información necesaria y suficiente del objetivo y características de este estudio a fin de ganar claridad sobre los alcances y limitaciones de su participación y la de sus estudiantes. Aquí cabe decir que, si bien el profesor formador participó en la interacción conversacional, él no fue considerado en el análisis del posible conocimiento que pudo haber desarrollado, pues su función fue esencialmente promover la CR entre los futuros profesores.

3.3. Variables en la Investigación

En la investigación se consideró como variable cualitativa de estudio el desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza de futuros profesores de matemáticas a partir de un proceso de conversación reflexiva al interior de su aula. El modelo adoptado para tipificar tal conocimiento es el dado por Ball *et al*. (2008) y el sentido dado es el señalado en (Ponte, 2012), esto es, que conceptual y particularmente en esta investigación el conocimiento matemático para la enseñanza es aquel que resulta de un proceso en el que se reúne, analiza e integra información relacionada con la práctica de enseñar matemáticas e implica acción y reflexión sobre la experiencia.

Visto de este modo, el conocimiento matemático para la enseñanza en un contexto de conversación reflexiva implica transformación y crecimiento del conocimiento matemático de los interlocutores, toda vez que ellos han de interpretar a la matemática en tanto que disciplina escolar, es decir, conocer formas de representar y enunciar el contenido matemático (conceptos y procedimientos) para hacerlo comprensible a los demás en situación escolar (Shulman, 1987) y, que dicho conocimiento sea compartido entre los demás.

Para los datos de esta investigación se operacionaliza al conocimiento matemático para la enseñanza (desarrollado) a partir de buscar qué aspectos relacionados con: (i) el conocimiento del contenido de las matemáticas y; (ii) el conocimiento del contenido pedagógico (Ball *et al*., 2008; Hill, *et al*., 2008), son los que se comunican y constituyen en conocimiento "consensuado". Es decir, se buscó qué conceptos y procedimientos tanto matemáticos como pedagógicos se comunican y afianzan durante la CR.

Para lo anterior se emplearon como indicadores a los aspectos que, de acuerdo con Ball *et al*. (2008) y Hill *et al*. (2008), caracterizan al conocimiento del contenido de las matemáticas y al conocimiento pedagógico del contenido, en términos de tres subdominios para cada uno, tal como se describen a continuación.

i. Conocimiento del Contenido de las Matemáticas.

a) *Conocimiento Común del Contenido* (CCK por sus siglas en inglés): Conocimiento y habilidades matemáticas que se emplean en actividades que no son exclusivas de enseñanza. Abarca el conocimiento que el profesor o futuro profesor usa al resolver problemas matemáticos, realizar operaciones de manera correcta y aplicar definiciones y propiedades.

b) *Conocimiento Especializado del Contenido* (SCK por sus siglas en inglés): Conocimiento y habilidades matemáticas exclusivas para la enseñanza, por ejemplo, representar las ideas matemáticas de manera clara a los estudiantes, proporcionar explicaciones matemáticas adecuadas y examinar o comprender métodos distintos de resolución de problemas.

c) *Conocimiento del Horizonte Matemático* (HCK por sus siglas en inglés): "Conocimiento que tiene el profesor de cómo están relacionados los tópicos matemáticos incluidos en el currículo.

ii. Conocimiento Pedagógico del Contenido.

a) *Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes* (KCS por sus siglas en inglés): Conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben o aprenden un contenido particular. Conocimiento que implica atender a la enseñanza de un contenido matemático específico y los aspectos particulares de los estudiantes, como puede ser, dificultades o errores más comunes en las tareas de enseñanza.

b) *Conocimiento del Contenido y la Enseñanza* (KCT por sus siglas en inglés): Conocimiento que combina el conocimiento sobre la enseñanza con el matemático. Es un conocimiento que implica poder construir procesos pertinentes para tratar dificultades o errores de los estudiantes a partir de sus razonamientos y estrategias.

c) *Conocimiento del Currículo:* Conocimiento de los objetivos, contenidos, fines, orientaciones curriculares, materiales y recursos disponibles para la enseñanza, que permiten al profesor guiar su práctica y seleccionar las tareas adecuadas para el aprendizaje de sus estudiantes.

3.4. Recolección de Datos

El objetivo de la recolección de los datos fue respaldar los análisis relativos a la pregunta de cómo a partir de un proceso de conversación reflexiva se desarrolla conocimiento matemático para la enseñanza en futuros profesores de matemáticas. Para el cumplimiento de este objetivo se mantuvieron lo más natural posible las condiciones en las que habría de darse y registrarse las interacciones conversacionales. Esto se logró mediante el uso de una cámara filmadora de posición fija en la parte posterior del aula y de frente al profesor, con el fin de captar con mayor detalle las interacciones y no causar tanta distracción en los participantes con la presencia del dispositivo.

Respecto al uso de la cámara en el aula cabe decir que, si bien los participantes estaban acostumbrados a la presencia de tales dispositivos, pues son usadas en otros cursos de su formación para retroalimentar sus planeaciones y ejecuciones de clases, el profesor les hizo saber al inicio del curso el uso de tal dispositivo como parte de una investigación empírica asociada al contenido y dinámica de la asignatura, sin que esto tuviera algún peso en sus calificaciones, además de conservar su total anonimato en la investigación. De este modo, el espacio de interacción no se vio alterado sustancialmente más allá de la disposición de tal dispositivo. Se realizaron videograbaciones de las interacciones conversacionales sostenidas al interior del aula de dos sesiones consecutivas, con una duración aproximada de 90 minutos cada una.

Sobre el tema de Conversación: Paridad de Números y Generalización Matemática

Paridad de Números

En la matemática básica y en particular la que se enseña y aprende en la educación primaria y secundaria, *paridad* es la propiedad de que tiene un número entero de ser par o impar. Por tanto, un número entero será par o impar, dependiendo de si dicho número es divisible por 2 o no lo es. Es decir, si al dividirlo por 2 su residuo es 0 o 1, respectivamente.

Esta propiedad es particularmente importante pues no sólo forma parte medular de la aritmética de los números enteros, sino que también, implica una forma de razonamiento matemático con alta demanda conceptual y procedimental en la educación básica. No obstante, como se ha indicado en el capítulo 1, si bien los futuros profesores y en ejercicio suelen conocer los procedimientos y algoritmos de las matemáticas elementales que enseñan, también es cierto que muchas veces no comprenden las matemáticas conceptualmente, en particular, los números enteros (Reeder y Bateiha, 2018). Por ejemplo, Zazkis (1998) reporta que futuros profesores de educación básica perciben a la paridad como una función del último dígito del número, de modo que la equivalencia de las propiedades numéricas de ser par y ser divisible por dos no se da por sentada.

Generalización Matemática

La generalización es un tipo de conocimiento matemático considerado importante para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Demonty, Vlassis y Fagnant, 2018). Su importancia radica principalmente en dos sentidos: como ruta de enseñanza para desarrollar conceptos matemáticos (Davydov, 1990; Dörfler, 1991) y como actividad para apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico y el estudio de patrones en álgebra (Radford, 2014; Warren, Trigueros, & Ursini, 2016; Zazkis & Liljedahl; 2002) y geometría (Moss & London, 2011). En el primer sentido, Davydov (1990) sostiene que la aparición de un concepto supone que "se necesita un conjunto de objetos particulares o una colección de impresiones concretas. Sirven como materia prima para hacer una comparación, a través de la cual se detectan las cualidades comunes, similares y conjuntas de los objetos" (p. 6). Las cualidades abstraídas como resultado de este proceso de generalización forman la definición del concepto.

En el segundo sentido, Radford (2010) reconoce a la generalización de patrones como el proceso que consiste en "captar una comunalidad notada en algunos elementos de una secuencia S, siendo consciente de que esta comunalidad se aplica a todos los términos de S y poder utilizarla para proporcionar una expresión de cualquier término de S" (p. 42). De este proceso se obtiene la regla general (generalización vista como un resultado) para cualquier término de la secuencia; por tanto, la generalización también se considera un producto. Este tipo de generalización ha sido identificado como un proceso importante para apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico relacionado con el estudio de patrones, relaciones y estructuras matemáticas (Kaput, 2008; Kieran, 2007; Kieran, Pang, Schifter, &

Fong, 2016), que a su vez promueve la transición de la aritmética al álgebra. Es por ello que en la NCTM (2000) se señala que los profesores de matemáticas deben fomentar el análisis y generalización de diferentes tipos de patrones en términos numéricos, gráficos, verbales y algebraicos, según el nivel educativo que atiendan.

La generalización matemática entonces, es una forma de razonamiento útil para identificar propiedades, patrones y en general, determinar reglas que no son del todo explícitas, por ejemplo, en una secuencia de números enteros o comportamiento de estos. En tal sentido, fue viable pensar en al aprendizaje y conocimiento relacionado con la paridad de números enteros a partir de planteamientos que exigieran un razonamiento tal el de la generalización. Con esto en mente, es que se consideró abordar como contenido matemático de la investigación, los números enteros, en específico, el conocimiento sobre la paridad.

Dicho lo anterior, la preparación del tema de conversación se realizó tomando como referencia el marco teórico de la investigación con el fin atender los elementos centrales para que pueda iniciarse una conversación. Particularmente, se consideró el hecho de que el aprendizaje basado en conversaciones puede iniciarse interactuando con preguntas relativas a un tópico (Pask, 1976), y que las exigencias de solución a un problema es lo que principalmente guían la reflexión (Dewey, 1938). Por tanto, fue posible pensar en iniciar la conversación a partir del planteamiento de un problema en forma de pregunta abierta a los participantes, de modo que, tanto la generalización como la paridad estuvieran presentes, pero al mismo tiempo, fueran implícitos al contenido matemático.

Es así como en apego al modelo explicativo de la CR y al contenido matemático de la asignatura en la que se llevó a cabo la interacción conversacional, y del no interferir sustancialmente en la lógica y dinámica de la misma, se elaboró una pregunta relacionada con el conocimiento de los futuros profesores sobre las propiedades de los números enteros que implicara razonar más que operar y de tal manera que pudiera ser respondida por ellos usando sus conocimientos matemáticos relacionados con la aritmética y el álgebra elemental. La pregunta planteada fue *¿hasta qué punto es posible inferir que un número par es el resultado de multiplicar dos enteros consecutivos?*

El planteamiento de la pregunta se hizo así, toda vez que como se ha indicado, se quería dar oportunidad a una conversación y al mismo tiempo, atender los elementos que configuran una conversación reflexiva, en particular, lo relativo al nivel conceptual y procedimental del aprendizaje. Por otra parte, la forma en que está redactada la pregunta induce al análisis y reflexión de los conceptos y procedimientos matemáticos involucrados para su respuesta, por ejemplo, las palabras "hasta qué punto" e "inferir" plantean el "recurrir" más que a una respuesta concreta e inmediata, a un proceso de razonamiento como es el de generalización. También precisa de movilizar o generar ciertos argumentos aritméticos, como es la propiedad de paridad de números enteros, a fin de soportar la posible respuesta. Esto se pensó, daría oportunidad a un proceso de conversación reflexiva entre los futuros profesores al solicitarles compartir sus pensamientos y acciones.

3.5. Procesamiento y Análisis de Datos

Como se mencionó antes, al profesor se le proporcionó información necesaria y suficiente del objetivo y características de este estudio. Por su parte, los estudiantes no dispusieron de información técnica del estudio, más bien, se les solicitó su consentimiento para registrar las conversaciones y usar la información de manera confidencial y con fines exclusivamente investigativos orientados a obtener información sobre procesos de aprendizaje y desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza en futuros profesores.

Dado el interés por entender cómo la conversación reflexiva promueve el desarrollo de conocimiento profesional en futuros profesores de matemáticas, lo que a su vez implica atender la forma en que las ideas, significados y en general el conocimiento se comparte y desarrolla entre los interlocutores a partir de su interacción conversacional, se optó por usar los principios y fases del Análisis Conversacional (AC), el cual en esencia es un método inductivo, microanalítico y predominantemente cualitativo basado en el uso de videograbaciones de conversaciones para analizar y dar cuenta de la acción social (acciones del habla en este caso), a partir de la participación de los interlocutores mediante un proceso de recopilación de la información de lo conversacional, su respectivo análisis y descripción de su funcionamiento. Y si bien se hubiera podido optar por un análisis del discurso para ello, se consideró que el análisis conversacional es más adecuado por sus características y las de esta investigación.

Análisis del Discurso como Herramienta de Indagación

Por discurso se entiende tanto al lenguaje hablado como al escrito, y teóricamente refiere a "las formas de combinar e integrar el lenguaje, acciones, interacciones, formas de pensar, creer, valorar y usar varios símbolos, herramientas y objetos para representar un tipo particular de identidad socialmente reconocible" (Gee, 2008, p. 29). Por tanto, incluye el decir, hacer y ser de las personas y, en tal sentido, el quién y el qué no son del todo separables, pues de algún modo se es quien es, en parte, por lo que se hace y esto a su vez, es parcialmente reconocido por quien -también- lo hace. De ahí que se considere que los enunciados refieren a una persona haciendo algo integralmente (Gee, 2008, p.30).

Para Gee (2011) el "quién" es una entidad socialmente situada, el tipo de persona que alguien busca ser y representar en el aquí y ahora. Por su parte, el "qué" lo entiende como una práctica o actividad también socialmente situada que el enunciado ayuda a constituir.

En el sentido anterior, el discurso no solo brinda a quienes participan en él, las oportunidades de conocer, sino también de reconocer a partir de lo que se dice y hace en la interacción. De ahí que el discurso constituye una herramienta para analizar entre otras cosas, el cómo las personas construyen conocimiento, identidad y prácticas, a partir del proceso interactivo del habla. De este modo, el análisis del discurso (AD) sirve como una herramienta analítica de las interacciones conversacionales.

Lo central del AD es la indagación de la forma en que las declaraciones y formulaciones muestran una orientación de la acción, "ocupándose principalmente de un conjunto más amplio de prácticas lingüísticas: relatos en conversaciones o textos" (Wooffitt, 2005, p. 79). El análisis empírico de la organización del habla y de textos es lo esencial en el AD, pues dan cuenta de las funciones interpersonales o sociales en un sentido más amplio.

Un AD se basa en los detalles del habla, incluidos la mirada, el gesto y la acción o la escritura que se considere relevante en el contexto del análisis, sin embargo, cabe decir que un AD no se basa en todas las características físicas presentes, de modo que:

> En los juicios de relevancia (lo que entra en una transcripción y lo que no) son, en última instancia, juicios teóricos, es decir, se basan en las teorías del analista sobre cómo funcionan el lenguaje, los contextos y las interacciones en general y en el contexto específico que se analiza. En este sentido, una transcripción es una entidad teórica. No se encuentra fuera de un análisis, sino que es parte de él (Gee, 2011, p.117).

De lo antes dicho, la principal herramienta conceptual del AD es el repertorio lingüístico, con una gama amplia de materiales empíricos como fuentes de datos o datos en sí mismos, por ejemplo, artículos de periódicos, declaraciones o discursos políticos, relatos basados en entrevistas informales, entre muchos otros, dándose mayor importancia a las disputas o eventos controvertidos. Por repertorio lingüístico se entiende a los "términos relacionados o temáticos tales como metáforas o figuras retóricas que se utilizan de formas particulares" (Wooffitt, 2005, p. 80).

Finalmente, y a modo de síntesis, un AD implica hacer preguntas sobre cómo el lenguaje, en un momento y lugar determinado se utiliza para favorecer o desfavorecer un sistema de signos específicos relacionados con el habla, por ejemplo, lenguaje cotidiano versus lenguaje técnico, o diferentes formas de conocer o creer (Gee, 2011).

Análisis de Conversación como Herramienta de Indagación

Gee (2011) refiere a la conversación como las pláticas o escritos que tienen o han tenido lugar ya sea en la sociedad en general o grupos específicos en torno a un tema central, debate o simplemente un motivo. Es decir, el término conversación adquiere un sentido metafórico. De esta manera, lo conversacional es una herramienta para analizar la manera en que el lenguaje se relaciona o incide en los actos del habla o más precisamente, en eventos interactivos que tienen lugar entre personas específicas en momentos y lugares específicos, por ejemplo, analizar la forma en que los interlocutores dan forma, comparten y construyen sus significados respecto a un tópico o situación y de algún modo también implica un auto-reconocimiento.

El que la conversación consista mayormente en una interacción verbal, ha conducido al desarrollo del AC para dar cuenta precisamente de dicha interacción, por ejemplo, sobre cómo las personas interactúan juntas cuando hablan.

Para algunos teóricos del análisis conversacional (Mazeland, 2006; Wooffitt, 2005), la interacción verbal tiene una estructura: la forma y el modo en que las contribuciones a la interacción forman una serie de acciones conectadas. Es así como Wooffitt (2005) identifica al estudio de la acción social a través del lenguaje como la preocupación analítica central del AC, o lo que para Mazeland (2006) es, el estudio de las prácticas y estructuras del uso del lenguaje en la interacción del habla como formas de acción social humana:

> El AC estudia los métodos a los que se orientan los participantes cuando organizan la acción social a través del habla. Investiga las reglas y prácticas desde una perspectiva interaccional y las estudia examinando grabaciones de interacciones de la vida real. (Mazeland, 2006, p.153)

Para clarificar el sentido dado al término acción social, cabe señalar que para autores tales como Bernstein (1990), esta representa la dimensión tangible de los aspectos culturales con los que las personas interpretan, estructuran y transforman la realidad construida con otros, tomando como base al lenguaje. Por tanto, la acción social es la acción que tiene un sentido para quienes la comparten o realizan. De este modo, una acción social refiere a lo que logra una conversación, es decir, denota el actuar (conducta o comportamiento) de una persona en el contexto de un entendimiento u orientación de y con otros.

Método del Análisis Conversacional

En el entendido de que hablar en interacción es equivalente a tener una conversación, el AC consiste en analizar la organización social de las actividades realizadas a través de la conversación, por ejemplo, analizar "patrones secuenciales de interacción y explicar la red de expectativas y suposiciones normativas que informan y sustentan la producción de esas secuencias" (Wooffitt, 2005, p.79).

> El análisis de cualquier enunciado particular procede al examinar su ubicación (posición) en el desarrollo de la interacción, turno por turno. Esto se debe a que el objetivo del análisis es examinar las secuencias de interacción, no los enunciados aislados; pero también, porque el análisis empírico ha revelado que los turnos en la conversación están diseñados de varias maneras para mostrar su relación con la actividad realizada por turnos anteriores. Los turnos en la conversación se crean para mostrar cómo se ajustan con los turnos anteriores. Y, por supuesto, cada turno establece un rango de posibles acciones siguientes, y el turno posterior se construirá para mostrar su ajuste a ese entorno secuencial. Así es como se desarrolla la interacción: cada turno sucesivo se basa en el turno anterior y establece un entorno para un tipo particular de actividades siguientes. (Wooffitt, 2005, p.79)

Es así como metodológicamente, en el AC la conversación se organiza en dos niveles para su respectivo análisis cualitativo: 1) Turnos de habla y, 2) Organización secuencial (Mazeland, 2006). Los turnos de habla quedan determinados por el momento en que los interlocutores cambian de roles hablante-oyente, permitiendo detectar episodios temáticos los cuales conforman secuencias organizacionales, esto es, secuencias coherentes de oraciones o, mejor dicho, acciones coordinadas en series de turnos. En este orden de ideas, el AC:

> Examina cómo los participantes manejan la interacción a medida que avanza: cómo dan sentido al desarrollo de la interacción momento a momento; describe las estructuras secuenciales altamente modeladas a través de las cuales se realizan actividades particulares; y descubre los métodos utilizados para efectuar la transferencia por turnos, o para identificar y abordar problemas, como malentendidos, errores y correcciones, etc. (Wooffitt, 2005, p.79)

Turnos de Habla

Como se ha mencionado, los turnos de habla quedan determinados por el momento en que los interlocutores cambian de roles hablante-oyente durante la interacción conversacional, pudiendo con ello detectar episodios temáticos durante la misma. Tal cambio de roles es natural e inherente al proceso conversacional, vale decir, los interlocutores saben dónde y cómo cambiar de rol, de modo que se establece una organización implícita en la toma de turnos, lo que, a su vez, connota un intercambio interactivamente coherente de acciones comunicativas. Dicho así, un episodio puede iniciar con una pregunta y terminar con un reconocimiento de una respuesta a dicha pregunta.

Según Mazeland (2006), un problema organizacional que los participantes deben resolver para cada nuevo turno es determinar cuándo el orador completará el turno actual. Al respecto menciona lo siguiente:

> El receptor no solo está averiguando de qué se trata el turno y qué está haciendo el hablante en él, también debe estar alerta por el momento en que podría ser su turno para hablar. Los receptores anticipan esos momentos organizacionalmente relevantes al construir expectativas sobre cómo se verá el enunciado en curso. Los turnos se producen linealmente en tiempo real, pero en el transcurso de la producción de un turno, un receptor puede hacer una suposición informada sobre la estructura de toda la unidad por inspección (…) de la parte que ya está allí. El turno entonces proporciona pistas sobre cómo la unidad subyacente es construida y cuándo posiblemente se completará. (Mazeland, 2006, p.155).

Es en este entendido que los turnos se componen de Unidades Construccionales de Turnos (TCUs, por sus siglas en inglés), las cuales consisten en unidades lingüísticas: palabras, frases, oraciones, clausulas, interjecciones, etc., que forman una expresión o enunciado completamente reconocible en un contexto específico. Conforme un turno avanza en ser adecuadamente completado, surge la posibilidad de su transferencia, es decir, se establece un lugar relevante de transición de turno en la conversación, esto es, un lugar donde la interacción es relevante para los interlocutores y se refleja en la toma de turnos. Precisamente los participantes de la conversación negocian la transición de roles en torno a dicho lugares y dependiendo del tipo de unidad construccional que el hablante esté usando de manera reconocible, el receptor hará diferentes predicciones sobre cuándo se puede completar el turno en curso (Mazeland, 2006; Wooffitt, 2005).

En términos de Hoey (2014), la organización de turnos prevé su distribución ordenada en la conversación. Las interacciones turno a turno permiten identificar la participación de los interlocutores y, por tanto, el cómo se construyen roles y relaciones particulares que dan rumbo e influyen en el curso de la conversación (Van Esch y Tillema, 2015), pero también el cómo son aprovechados dichos roles. Por otra parte, es un recurso en el establecimiento de la inteligibilidad mutua, por ejemplo, la posición siguiente de los enunciados permite a los interlocutores monitorear la comprensión de cada uno (turno por turno). Es a través de turnos sucesivos que los participantes pueden establecer y revisar su comprensión de la interacción (Wooffitt, 2005).

Lo anterior muestra la importancia de usar para el análisis de turnos, enunciados como unidades separadas, incluso deja ver que el próximo posicionamiento de turno es un recurso metodológico significativo para el analista, pues sus afirmaciones sobre la organización de las actividades de construcción de sentido por parte de los interlocutores pueden derivarse de la inspección de las actividades observables de los propios participantes y justificarse por ellas.

Organización Secuencial

Como anteriormente se indicó, la organización secuencial u organización de secuencias consiste o hace referencia a secuencias coherentes de oraciones, esto es, al cómo una serie de turnos forman una acción social coherente. Aquí debe entenderse que dicha acción es contextualmente situada, pues es producida de unas personas para otras en momentos y formas específicas.

Una organización secuencial es:

> La forma en que los interlocutores se vinculan entre ellos a partir de una serie coherente de acciones comunicativas interrelacionadas. El término secuencia al que se hace referencia consiste en una serie ordenada de turnos a través de los cuales los participantes coordinan y logran una actividad de interacción. (Mazeland, 2006, p.156)

Una pregunta seguida de una respuesta, una solicitud seguida de una decisión al respecto, una invitación seguida de su respectiva aceptación o declinación, una queja y su respuesta, entre otros, son ejemplos de secuencias. Más concretamente, cuando se genera una acción por parte del hablante, habrá otras acciones subsecuentes por parte del receptor, tales acciones se realizan mediante turnos de habla, de este modo se estructura una serie de acciones en la conversación, la cual recibe el nombre de secuencia y se pueden interpretar como patrones (generales) conversacionales (Schegloff, 2007).

Como puede verse en los ejemplos de secuencias mencionados, su estructura consta de dos partes (relativamente simples), de modo que este tipo de secuencias conforman instancias llamadas "par de adyacencia" que constituyen un tipo muy particular de organización secuencial. Así, cuando el destinatario de un turno en la conversación escucha el enunciado del emisor como la primera parte de tal o cual tipo de par de adyacencia, lo que sigue es la entrega de un enunciado que funja como la segunda parte del mismo par, y en caso de no producirse dicha entrega, sería muy notorio su ausencia.

A la propiedad que une las primeras partes con las segundas en un par de adyacencia se le denomina relevancia condicional, ello en virtud de que la relevancia de la segunda acción depende de la producción de la primera. En efecto, como se ha mencionado antes, durante una conversación la reacción apropiada a una pregunta sería responderla. La pregunta entonces es la primera parte de un par de adyacencia (de la forma: preguntas-respuestas) y la respuesta es su segunda parte. Lo mismo aplicaría para el resto de los ejemplos dados de secuencias, incluso se pueden unir múltiples pares de adyacencia para formar cursos complejos de acción mediante procesos de expansión de secuencia.

Puede darse el caso de que una pregunta provoque una respuesta condicionalmente relevante y si no se le da respuesta inmediata, entonces los participantes trabajarían colaborativamente para generar la ocasión de darse. En tal caso, todas las acciones que intervienen se reconocen como subsidiarias de la tarea aún pendiente, es decir, al considerar que el destinatario de la pregunta debe tener la oportunidad de responderla, tales acciones representan el aplazamiento de la respuesta en cada turno posterior.

Según Mazeland (2006), los enunciados en los turnos de conversación logran acciones que son parte de actividades sociales secuencialmente organizadas y tienen implicaciones secuenciales para los participantes. Él menciona:

> Los enunciados (o declaraciones) no solo cuentan como simples acciones aisladas. Los participantes en la conversación se orientan hacia ellos como movimientos en disposición social y contextualmente situada: no atribuyen significado a los enunciados aplicando simplemente reglas que son independientes y externas a la interacción, sino que le dan sentido por turnos en una conversación situada, razonamiento secuencial. (Mazeland, 2006, p. 159)

Como consecuencia de lo anterior se deriva que los interlocutores construyen y dan sentido a los turnos en la conversación con base en un razonamiento secuencial. O, dicho en otras palabras, los mecanismos de construcción de sentido por parte de los interlocutores en conversación se pueden entender como formas de razonamiento situado e interaccional y “tal tipo de razonamiento contextual solo puede ser investigado desde la interacción misma” (Mazeland, 2006, p. 159).

Es en este orden de ideas que los turnos y organización secuencial permiten determinar (en términos interpretativos) lo que un interlocutor está diciendo y haciendo con su participación en la conversación, pues “el desarrollo por turnos de la interacción no es simplemente una serie de enunciados que vienen uno tras otro de diferentes participantes. Hay conexiones entre los turnos que producen propiedades descriptivas y consistentes” (Wooffitt, 2005, p.31).

Diferencias entre el Análisis Conversacional y el Análisis del Discurso

Conceptualmente el AC difiere del AD en que el primero se centra más en lo cotidiano y hasta cierto punto en las características rutinarias durante la interacción. De manera que, cuando los datos provienen de entornos no cotidianos como salas de audiencias o entrevistas de noticias, el AC centra la atención en la forma en que los participantes gestionan las actividades que habitualmente se presentan en estos entornos, como las preguntas y las respuestas (Wooffitt, 2005). Por su parte, el AD se centra más en eventos controvertidos.

Con el AC se busca identificar fenómenos de interacción a partir del análisis detallado de una colección de instancias, de modo que pueda generarse entendimiento sobre cómo los propios participantes construyen un sentido en la interacción. Por ejemplo, descubriendo y explicando secuencias de enunciados en los que los participantes se involucran en actividades interactivas e inferenciales. El interés del AC es la acción social a través del uso del lenguaje o más aun, la organización social de las actividades realizadas a través de la conversación (hablar en interacción).

Se puede decir que el AC se enfoca esencialmente en las prácticas de construcción de sentido en la interacción, como lo indica Mazeland (2006), se enfoca en la organización de la conversación como conjunto de prácticas situadas y socialmente organizadas, es decir, entendiendo a:

> La organización de la toma de turnos como un conjunto de prácticas de construcción que permiten a los co-participantes anticipar los lugares en los que la transición del orador se vuelve posiblemente relevante, para luego abordar ese problema de acuerdo con un conjunto estructurado de opciones de interacción. (Mazeland, 2006, p.156)

Ahora bien, las diferencias entre el AC y AD no solo son disciplinares y, por ende, conceptuales, sino también procedimentales, como se ha dejado ver en las dos secciones precedentes y aunque pocas, son sustanciales. Ambas aproximaciones metodológicas "difieren con respecto al rango y tipo de datos que se estudian, la naturaleza de los hallazgos analíticos y los recursos disponibles para justificar afirmaciones empíricas" (Wooffitt, 2005, p.89).

En particular, respecto al tratamiento de los datos se ha mencionado que en el AC esencialmente se examinan videograbaciones de conversaciones (preferentemente en contextos naturales) y las transcripciones son usadas como ayuda en los análisis (Mazeland, 2006). Por su parte, en el AD se examina gran variedad de tipos de datos y se apoya de diversos materiales verbales y textuales para sus análisis empíricos: periódicos, entrevistas informales, declaraciones, entre otros.

Dado que es factible asumir que una conversación tendrá sentido para sus participantes, y que tal o cual sentido (entendimiento de lo que está sucediendo en el momento específico) se muestra en alguna medida en las contribuciones consiguientes a la conversación misma, entonces el AC permite describir los procesos interpretativos endógenos toda vez que se procura una descripción detallada de las actividades que resultan relevantes para los propios participantes a medida que realizan dichas actividades.

Bajo la mirada anterior, en el AC no se pretende analizar y describir la conversación en los propios términos de sus interlocutores, si no dar cuenta de la acción y sus implicaciones con referencia a las formas en que los participantes muestran lo que consideran relevante en su conversación. Así, el AD se ubica en un nivel más amplio que el AC.

Lo Particular del Análisis Conversacional en esta Investigación

Se ha descrito el objeto y procedimientos del AC en cuanto a metodología analítica del habla en interacción. Particularmente en esta investigación se usó como apoyo metódico para examinar cómo futuros profesores de matemáticas conversan reflexivamente y, al hacerlo, desarrollan conocimiento matemático para la enseñanza.

Dicho lo anterior y del hecho de que desde la perspectiva del AC la creación de sentido de los interlocutores en la conversación se puede entender como formas de razonamiento situado e interaccional, es decir, una forma de razonamiento contextual de donde es posible determinar *un quién haciendo un qué* (lo que una persona dice y hace específicamente) en el contexto de la conversación, se asume que tanto el significado de los enunciados como el conocimiento entre los interlocutores se va constituyendo a lo largo de las líneas del razonamiento secuencial. Estas últimas ideas son las que a continuación se tratan, pues sobre ellas se sitúa el AC como apoyo en esta investigación.

Se entiende que el significado se constituye entre quienes participan en la conversación como una integración de las formas de *decir, hacer y ser* de los participantes (Gee, 2011). Luego entonces, se puede decir que se construyen significados y se da sentido cuando se usa el lenguaje para decir y hacer cosas en ciertos contextos. De acuerdo con Gee

(2011), lo enunciado (verbalmente o por escrito) tiene significado cuando comunica un quién y un qué. Es decir, y visto de este modo, los significados adquieren un carácter situado y hay una coparticipación en su creación. Esto se corresponde con lo mencionado por Mazeland (2006), de que los participantes en la conversación no atribuyen significado a los enunciados aplicando simplemente reglas independientes y externas a la interacción, por el contrario, lo hacen en los turnos a partir de la organización secuencial y situada del habla.

En orden con las ideas precedentes, la naturaleza situada de los significados queda establecida y el AC permite entenderlos y reconocerlos, pues éstos no residen solamente en las mentes individuales, sino que más bien se negocian entre las personas en y a través de la conversación. Ahora bien, a medida que la conversación se desarrolla, también lo pueden hacer los significados, ya que los interlocutores tienen la oportunidad de revisarlos continuamente en la interacción.

Por otra parte, y como se planteó en el capítulo dos, desde la perspectiva de la construcción social del conocimiento, el punto de partida para la comprensión de la creación o desarrollo del conocimiento no es la mente del individuo y el mundo exterior, sino más bien un flujo continuo y circunstancial de interacción social. De ahí la importancia de considerar al habla como acción situada, articulada y co-construida en la interacción social (Potter, 1996). En tal sentido, el conocimiento que se comparte y desarrolla en conversación no es un asunto solo de lenguaje, también es un asunto de percepciones y comprensiones, o más específicamente, como hemos venido indicando, de significados.

Se ha señalado que es precisamente en la interacción social (tal es el caso de la conversación) donde se comparten significados entre los miembros de un grupo social para posteriormente ser internalizados (constituirse en conocimiento) de manera individual (Vygotsky, 1986). Esto se traduce en que el conocimiento es construido socialmente y los significados son construidos mediante el uso del lenguaje en contextos específicos (Dewey, 1998). Es de esta manera que al conocimiento no se le considera como algo recibido y estático, separado de la persona y sus actividades, por el contrario, se le reconoce como socialmente constituido a partir de las experiencias y significados situados.

Los significados son importantes en el AC, pues se considera que el conocimiento se conforma a partir de su negociación. La connotación que adquiere el término conocimiento en este sentido es el de información que resulta pertinente para quienes lo comparten y participan de él (Gee, 2011). Esto implica tener en cuenta a las descripciones y explicaciones de los interlocutores como parte esencial de las interacciones conversacionales, pues para comprender los significados contenidos en una conversación se hace necesario interpretar a las interacciones sobre la base de su producción y organización secuencial, esto en virtud de que se reconoce que el significado (en cuanto a expresión) es asistido por alguna acción social en la interacción conversacional.

Finalmente y a modo de resumen, cabe decir que desde esta mirada analítica, lo que se enuncia en los turnos de habla, genera acciones sociales que se organizan y tienen implicaciones secuenciales para los interlocutores, tal es el caso de los pares de adyacencia, en donde la posición y composición de las TCUs informan al receptor sobre cómo debe entenderse en el contexto (local) de la secuencia y al mismo tiempo, permite al analista determinar lo que el interlocutor está diciendo y haciendo a partir de las líneas de organización secuencial (Mazeland, 2006).

Con el fin de seguir lo mejor posible el método del AC, en la investigación se consideraron dos fases para el procesamiento de los datos asociados a la interacción conversacional de los futuros profesores de matemáticas. Tales fases se mencionan y describen a continuación.

Fase 1: Transcripción de Conversaciones

Para el proceso de transcripción de las conversaciones se consideraron dos acciones:

i. *Familiarización con las conversaciones videograbadas*

Este paso consiste en que previo al proceso de la transcripción se debe escuchar al menos un par de veces el total de las interacciones conversacionales con el fin de tener mayor familiaridad con las mismas. Esto permitirá reconocer por medio de la voz a cada uno de los participantes, identificar posibles relaciones entre el total de las conversaciones y algunos fragmentos de éstas o de secuencias organizacionales, entre otros aspectos.

Con esto es posible a priori, decidir sobre la necesidad de transcribir en su totalidad la interacción conversacional, por ejemplo, hacer una primera transcripción aproximada a partir de (si fuera el caso), identificar una organización secuencial general asociada al interés y objetivo de la investigación.

ii. *Transcripción aproximada*

Esta acción se hace con la intención de generar una primera aproximación empírica a la interacción conversacional, por ejemplo, al ensamblado interpretativo que los participantes realizan durante la conversación mediante el escuchado atento de cómo y dónde los enunciados son producidos y el trabajo interpretativo del transcriptor (Mazeland, 2006). Así, la transcripción aproximada es útil para desarrollar una transcripción más elaborada y apegada a los dos niveles organizacionales de la conversación: turnos de habla y organización secuencial, ambas mencionadas y descritas previamente.

Para la realización de la transcripción aproximada se empleó una notación y formato sencillo, por ejemplo, los enunciados se enumeraron por línea (al margen izquierdo de las transcripciones), se usaron letras iniciales mayúsculas para etiquetar a los hablantes, la letra M acompañada de un número del 1 al 8 (M1, M2, …, M8) para el caso de las mujeres y la letra H acompañada de un número del 1 al 3 (H1, H2, H3) para el caso de los hombres participantes. Para referir al profesor se usó la letra T. Los paréntesis con puntos suspensivos (…) se usaron para indicar espacios de conversación en donde era posible omitir la transcripción de algunas palabras sin alterar las ideas centrales. El uso de corchetes [ ] fue para indicar algún gesto o alguna imagen referida por los interlocutores, en general, se empleó una ortografía convencional para las transcripciones.

Escuchar un par de veces los registros de audio de las conversaciones, permitió detectar episodios y secuencias conversacionales entorno al concepto de generalización matemática, tanto desde un punto de vista matemático como de su papel e implicaciones en la enseñanza y aprendizaje, en particular, en la enseñanza de la aritmética y el álgebra.

Fase 2. Transcripciones: Turnos de Habla y Secuencia Organizacional

Después de haber realizado las transcripciones aproximadas y tomado la decisión de realizar el total de las conversaciones o de una parte sustancial de éstas, se procedió a realizar su transcripción atendiendo en particular los dos niveles de organización del habla: Turnos y Secuencia Organizacional.

Para el caso de los Turnos de Habla se tomó en consideración que éstos muestran roles y acciones de los participantes y que a partir de las TCUs se detectan episodios temáticos. Por tanto, la clasificación de los datos asociados a los turnos se hizo con base en tales aspectos, organizándose la información en una tabla.

Cabe señalar que un episodio temático es parte de una secuencia conversacional. Las TCUs son palabra(s), frase(s), oraciones, cláusulas, interjecciones, preguntas, etc., que forman una expresión o enunciado completamente reconocible en el contexto específico de la conversación y los roles (sociales) es la función o papel(es) que desempeñan los participantes en la interacción conversacional, visibles a partir de los comportamientos, actitudes o maneras de pensar asumidas por los interlocutores. En esta investigación se consideraron los siguientes tipos de roles: Opinante, Elaborador, Coordinador y Orientador (claramente se trata de un rol asumido y no impuesto) que suelen emerger en discusiones colectivas.

En la Tabla 3.1 se ilustra cómo se clasificaron los datos relativos a los Turnos de Habla de las dos sesiones.

Tabla 3.1. *Clasificación y análisis de los datos en el nivel de turnos de habla*

SESIONES 1 Y 2. TURNOS DE HABLA				
Turnos	**Oraciones**	**TCUs**	**Roles**	**Acciones**
Episodios Temáticos				

Para el caso de la secuencia organizacional se consideró que ésta mostró actividades y contenidos, y que a partir del análisis de secuencias se detectaron acciones coordinadas. La clasificación de los datos asociados a la secuencia organizacional se hizo con base en tales aspectos, organizándose la información en una tabla.

Las acciones coordinadas son las acciones sociales (comunicativas específicamente) que surgen y pertenecen a secuencias de acción en la conversación, por ejemplo, toma de turnos y que son parte de actividades sociales que se organizan secuencialmente y tienen implicaciones secuenciales para los participantes (Mazeland, 2006).

Por su parte, las secuencias son oraciones coherentes (semántica y pragmáticamente) constituidas por conjuntos de turnos/bloques de participación a través de las cuales "los participantes realizan actividades particulares o identifican o abordan problemas tales como malentendidos, errores o correcciones" (Wooffitt, 2005, p. 79). Es decir, las secuencias describen patrones generales de conversación.

Finalmente, las actividades son secuencias de acción (comunicativas o no) identificables (Sacks, 1992). Y el contenido es aquello que contiene y trasciende al tema central o inicial de la conversación. Es decir, lo que trasciende a los temas o tópicos abordados en la conversación y son reconocibles por los interlocutores o por el analista.

En la Tabla 3.2 se ilustra cómo se clasificaron los datos relativos a la secuencia organizacional de las dos sesiones.

Tabla.3.2. *Clasificación y análisis de los datos en el nivel de secuencia organizacional*

SESIONES 1 Y 2. SECUENCIAS ORGANIZACIONALES			
Turnos	**Acciones Coordinadas**	**Oraciones**	**Actividades (A) y Contenido (C)**
Secuencias organizacionales			

Una vez atendida y realizada la clasificación de los datos según los dos niveles organizacionales del habla se procedió a realizar el respectivo análisis de éstos en relación con las dos categorías de interacción conversacional planteados en el bosquejo teórico de conversación reflexiva: nivel procedimental y nivel conceptual, a fin de dar cuenta de la variable y objetivo de la investigación.

Para las conversaciones en el nivel procedimental se consideró que éstas quedaron caracterizadas por centrarse en la construcción o el uso de procesos y procedimientos matemáticos. Tales conversaciones se ubican en los modos de aprendizaje "Experiencia Concreta (CE)" y "Experimentación Activa (AE)" del bosquejo de conversación reflexiva.

Es en este nivel que se detectan los procesos matemáticos desarrollados o empleados por los participantes, así como los conocimientos procedimentales a partir de sus acciones.

En la Tabla 3.3 se ilustra cómo se clasificaron para su análisis los datos en el nivel procedimental.

Tabla 3.3. *Clasificación y análisis de los datos en el nivel procedimental*

SESIONES 1 Y 2. INTERACCIÓN CONVERSACIONAL A NIVEL PROCEDIMENTAL			
Turnos	**Procesos Matemáticos**	**Acciones**	**Conocimiento Procedimental**

Para el nivel conceptual se consideró que en éste las conversaciones se caracterizaron por enfocarse en el uso de teorías, principios o conceptos matemáticos, los cuales se ubican en los modos de aprendizaje "Observación Reflexiva (RO)" y "Conceptualización Abstracta (AC)" del bosquejo de conversación reflexiva. Es en este nivel que se detectan los conceptos (matemáticos) desarrollados o empleados por los participantes, así como los conocimientos conceptuales a partir de sus explicaciones.

En la Tabla 3.4 se ilustra cómo se clasificaron para su análisis los datos en el nivel conceptual.

Tabla 3.4. *Clasificación y análisis de los datos en el nivel conceptual*

SESIONES 1 Y 2. INTERACCIÓN CONVERSACIONAL A NIVEL CONCEPTUAL			
Turnos	**Conceptos Matemáticos**	**Explicaciones**	**Conocimiento Conceptual**

El análisis empieza con una aproximación a los datos sin tener en cuenta (en mente) algo en particular, de tal modo que las intuiciones y corazonadas del investigador se van esculpiendo orgánicamente a través del tiempo y de la experiencia con los datos. Los niveles de organización estructural básica de la interacción (turnos y organización secuencial) es parte de este proceso.

Como se ha referido con anterioridad, los datos registrados (transcripciones de las conversaciones) sirven para hacer una primera observación o aproximación del análisis conversacional, generando las primeras ideas sobre lo que se está diciendo y haciendo por parte de los participantes en la conversación. Se generan las primeras ideas sobre aquello que los participantes tratan de manera relevante en su interacción. Tales ideas son tratadas por el analista mediante la observación de otras instancias de la interacción, ampliándose gradualmente y refinándose cíclicamente la descripción (Mazeland, 2006).

Las observaciones a las que se hace referencia pueden dirigirse a la estructura de episodios temáticos de interacción. En sí, las observaciones se pueden dirigir a las acciones que constituyen tal o cual tipo de secuencias, por ejemplo, la acción de informar o solicitar información, entre otras. Existen dos tipos de análisis que se pueden realizar sobre la interacción conversacional, esto es, sobre los datos: El análisis de un caso único y el análisis de una colección. Con colección se hace referencia a un conjunto de extractos de datos (por ejemplo, videoclips) de interacciones grabadas que forman la base empírica para un análisis.

Para el caso del análisis de un caso singular o único, el investigador desarrolla un análisis de la interacción en un solo episodio con respecto a un aspecto interesante o relevante. Mientras que, para el caso del análisis de una colección, el investigador "generaliza" los resultados de una serie acumulativa de análisis de casos únicos con respecto a un aspecto específico. Todos los casos son comparados en relación con alguna característica al describir las formas y grados en que son lo mismo, similares o diferentes (Mazeland, 2006).

Los análisis de casos sirven para que de manera inicial las observaciones analíticas puedan generarse a partir del examen detallado de éstos, por ejemplo, generando ideas sobre una secuencia de turnos que parece mostrar propiedades interesantes. Y es así como después de haber encontrado algo analíticamente interesante, es necesario volver al corpus del que se tomó la instancia inicial, incluso consultar otros si estuvieran disponibles y fueran relevantes para ver si hay más secuencias con propiedades similares.

Se trata entonces de descubrir regularidades yendo de caso en caso en una colección de instancias candidatas de análisis, buscando desarrollar gradual y cíclicamente la descripción de patrones. Si estos son identificados, entonces se asume la existencia de una base para una descripción analítica sistemática (Wooffitt, 2005).

CAPÍTULO 4

RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos del análisis de los datos. El capítulo se conforma de siete secciones. Las primeras dos secciones (4.1 y 4.2) corresponden a la descripción de los hallazgos relativos al nivel organizacional de la conversación: Turnos de habla y Organización secuencial, mostrando los episodios temáticos, roles y secuencias implicadas en el conocimiento desarrollado por los futuros profesores. La tercera y cuarta sección (4.3 y 4.4) corresponden a la descripción de los conocimientos procedimentales y conceptuales implicados en el conocimiento desarrollado por los participantes. La quinta y sexta sección (4.5 y 4.6) corresponde a la descripción del proceso de aprendizaje de los participantes en relación con el modelo de conversación reflexiva y a la caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza desarrollado según los seis subdominios de dicho conocimiento referidos por Ball *et al*., (2008) y Hill *et al*., (2008). Finalmente, en la séptima sección se presenta un resumen del capítulo.

4.1.Turnos de Habla

En esta sección se presentan los episodios temáticos y roles de los participantes identificados durante el proceso de conversación reflexiva. Los episodios se presentan en orden ascendente, es decir, conformen fueron emergiendo de principio a fin de la conversación.

El análisis de los datos se inició examinando los cambios de turnos en relación con las TCUs, de modo que sirviera para detectar los lugares en donde la interacción fue relevante para los interlocutores, determinándose con ello los episodios temáticos. Como ya se ha dicho, es precisamente a través de turnos sucesivos que los participantes pueden establecer y revisar su comprensión de la interacción (Wooffitt, 2005). De esta manera las afirmaciones sobre la organización de las actividades de construcción de sentido por parte de los interlocutores se derivan de la inspección de las actividades observables de los propios participantes y se justifican debido a ellas.

En la Tabla 4.1 se presentan nueve episodios temáticos identificados, así como las TCUs, los roles y acciones identificadas en la conversación. En la primera columna se muestra una de las letras mayúsculas M o H para indicar si se trata de una mujer o un hombre en la conversación respectivamente, y se acompaña de un número para indicar qué número de mujer u hombre es el que está participando. Los números presentes después de dichos códigos indican las líneas en las que se ubican los diálogos en la transcripción de los datos.

La segunda columna "oraciones" son extractos de las conversaciones que se usan para ejemplificar y referir lo dicho por los participantes en cada episodio. En la tercera, cuarta y quinta columna se muestran las TCUs, los roles y acciones (sociales) identificadas durante la CR. Cabe recordar que la conversación reflexiva inicia en torno a la tarea en forma de la pregunta abierta siguiente: *¿Hasta qué punto es posible inferir que un número par es el resultado de multiplicar dos enteros consecutivos?*

Tabla 4.1. *Episodios temáticos identificados en los turnos de habla*

SESIONES 1 Y 2. TURNOS DE HABLA				
Turnos	**Oraciones**	**TCUs**	**Roles**	**Acciones**
Episodio 1. Naturaleza de lo solicitado en la tarea				
M4: 010 - 011	Pienso que la pregunta es más de reflexión, ¿no?	Es más de reflexión ¿no?	Opinante	*Solicita una respuesta*
M1: 017	No es tan fácil de deducir.		Opinante	*Ofrece una respuesta*
H2: 018 - 030	Si coincido un poco con M4 (…), nos preguntamos si es trivial para un niño de primaria ¿Sí?, ¿No?, ¿Por qué? (…) depende de los conocimientos y nivel educativo.	Depende de los conocimientos	Orientador	*Ofrece una valoración*
Episodio 2. Tipos de Conocimientos para resolver la tarea				
T: 031	¿Cuáles son esos conocimientos?	¿Cuáles?	Coordinador	*Solicita una respuesta*
H1: 033 - 034	Transitar de un pensamiento aritmético a uno algebraico. No sé, si al reconocerse una estructura	Transitar de un pensamiento (…)	Elaborador	*Ofrece una respuesta*

H2: 042 - 045	algebraica o aritmética, ya se está en ese tránsito. En aritmética como que se trata de (…) pensando en casos particulares, en cambio en el pensamiento algebraico (…) preguntarse ¿qué pasa?, y así ir generalizando.	Se trata de pensar en casos (…)	Orientador	*Ofrece información*
Episodio 3. Generalización en Aritmética y Álgebra				
T: 046 - 047	Entonces, M4 está de acuerdo en que la generalización es propia del pensamiento algebraico, pero no del pensamiento aritmético. ¿Todos están de acuerdo?	La generalización es propia del pensamiento algebraico		*Ofrece información y solicita una respuesta*
H1: 048	Sí, un poco. A la generalización la consideré propia del pensamiento algebraico.	Si, un poco	Elaborador	*Ofrece una valoración*
H2: 053 - 057	Nosotros lo pensamos diferente. (…) no sería exclusiva del álgebra. (..) se generaliza en cálculo, en geometría, (…) no me quedaría con la idea (…)		Elaborador	*Ofrece información*
Episodio 4. Número par como una generalización matemática				
M2: 084 - 085	Podríamos decir que el número es una forma de generalizar en aritmética	El número es una forma de generalizar	Opinante	*Ofrece una valoración*
T: 105 - 106	¿qué opinan del número par?, ¿sería una generalización aritmética?, ¿qué sería expresarlo como $2k$?		Coordinador	*Solicita una respuesta*
H1: 107	Eso quería decir, ¿eso es una estructura aritmética? De hecho, no sé si lo es o no	¿eso es una estructura aritmética?	Elaborador	*Ofrece una respuesta*
M6: 108	Depende del análisis que le demos a $2k$, por ejemplo, si pensamos a k como número general.		Orientador	*Ofrece una valoración*
H1: 121 - 122	Entonces ¿qué concluimos? $2k$ es una estructura algebraica, no perdón, una estructura aritmética. ¿La generalización es propiamente del álgebra o	¿qué concluimos?	Coordinador	*Solicita una respuesta*

	de la aritmética? No entiendo bien.			
M3 - H3: 123	Es de la Matemática.			*Ofrece una respuesta*
H1: 128 - 129	Ajá, es que me dijeron que el $2r$ que represento ahí [imagen 2], es una estructura aritmética y me parece que ya estamos discutiendo más en torno a qué es la generalización.		Orientador	*Ofrece una valoración*
M2: 131 - 133	O sea, pensar en una generalización (…), el concepto de número par es en sí una generalización que hacen los estudiantes, pues relacionan todos los múltiplos de 2 como número par.		Opinante	*Ofrece información*
H1: 134 - 135	Yo hacía referencia a algo así, como que hay una transición de cierta manera, de este punto hacia el pensamiento algebraico.		Elaborador	*Ofrece información*
T: 138 - 139	En cierto sentido, el álgebra comienza como una generalización de la aritmética, pero es más que eso.	El álgebra comienza con una generalización		*Ofrece información*
Episodio 5. Representación y Generalización de números pares				
M4: 140	Yo haría como que una transición y partiría del primer método propuesto	Transición	Opinante	*Ofrece una valoración*
H2: 147 - 149	Es que igual coincidiendo con M4 de que no podríamos tomar solo una de estas respuestas propuestas, tenemos que articular entre todas para precisamente, seguir generando o estableciendo esas relaciones a base de ejemplos.		Orientador	*Ofrece una valoración*
M5: 155 - 164	Yo propongo pensar al número par dado por $2k$, como la medida de área de un rectángulo (…) sería como generalizar el patrón.	Pensar al número par dado por $2k$ como la medida de área	Elaborador	*Ofrece información*
M6: 165 - 166	Pero, estábamos sobre cómo la multiplicación de dos números consecutivos	¿cómo se vería con eso que la multiplicación de	Orientador	*Solicita una respuesta*

	es un número par, ¿no? Entonces ¿cómo se vería con eso que la multiplicación de dos números consecutivos sería un número par?	dos números consecutivos sería un número par?		
M2: 167	Pienso que lo que está comentando M5 sería construir o ver el comportamiento de una secuencia.		Orientador	*Ofrece una respuesta*
H2: 178 – 179	Es que la actividad se puede usar para enseñar pares, o sea, de qué partir para enseñar pares y pues es cómo construir digamos un significado del par.		Opinante	*Ofrece información*
M1: 181 -182	Ahí, si se cumple eso de que el producto de dos números enteros consecutivos es un número par y además podemos ver que tienen en común al número 2, que en este caso es el área.		Elaborador	*Ofrece información*
Episodio 6. El cuadrado de un número par como generalización				
T: 227- 228	Si se toma como hecho que el cuadrado de cualquier número impar es impar, ¿qué tan claramente es deducible que el cuadrado de cualquier número par es par?	¿qué tan claramente es deducible que el cuadrado de cualquier número par es par?	Coordinador	*Solicita una respuesta*
H1: 229 - 240	Este razonamiento geométrico (…) intentemos relacionar el área de este cuadrado con el área del anterior (…) y las demás áreas y figuras que la conforman (…) Y se puede hacer con casos particulares hasta llegar a este resultado: el cuadrado de un número par es par.		Elaborador	*Ofrece información*
M4: 241 - 242	Nosotras no lo vimos con caso particular como lo que muestran ustedes, sino que tratábamos de generalizar. Y lo plasmamos aquí.		Elaborador	*Ofrece información*
M3: 249 - 251	Nosotros lo entendimos diferente, (...) Entendimos	Entendimos diferente	Orientador	*Ofrece información*

	que ya estaba probado que el cuadrado de un número par es par, a partir de eso teníamos que probar entonces que el cuadrado de un número impar es impar. Pero, así como lo plantearon ellos pareciera que lo hicieron por separado.			
T: 252	Así es.			*Ofrece información*
M4: 253 - 254	Entendimos en ese momento que se tenía que demostrar que el cuadrado de un impar es impar y el de un par, par. No lo habíamos entendido así.		Opinante	*Ofrece información*
M8: 255 - 256	Ah, o sea que lo que se sabe es que el cuadrado de cualquier número impar es impar, entonces cómo llegamos a que el cuadrado de un número par es par.	Cómo llegamos a que el cuadrado de un número par es par		*Ofrece información*
M3: 277 - 278	Ya nos dimos cuenta de que no llegamos a una generalización. Nosotros partimos del hecho de que el cuadrado de un número impar es impar, lo hicimos geométricamente.		Orientador	*Ofrece una valoración*
H2: 294 - 296	Básicamente fue como generalizar o como ver de otra manera esto porque siento que aquí, era un poco particular, solo era muy // y con la explicación de M3 se hizo muy // no sé. ¿No sé si lo ven?	¿No sé si lo ven?	Orientador	*Ofrece información*
H1: 297	¿El área de ese rectángulo es par?		Coordinador	*Solicita una respuesta*
H2: 298	Sí, porque es multiplicar un número impar por un número par.		Orientador	*Ofrece una respuesta*
M6: 300	Sería impar ese lado, ¿no?		NA	*Solicita una respuesta*
H2: 301	¿Cuál, este? Sí, son impares.		NA	*Ofrece una respuesta*
M6: 302	¿Pero el lado completo del cuadrado: $2n + 1 + 2k$!		NA	*Solicita una respuesta*

H2: 303	¿Todo el lado? Sí.	NA	*Ofrece una respuesta*
M6: 304	Pero //	NA	
M1: 305	Tal vez sólo querías llegar al cuadrito chiquito.	Orientador	*Ofrece una valoración*
H2: 306 - 308	Sí, precisamente (…) como que partimos de esta idea y buscamos una construcción y llegamos a esto (…) podría ser un argumento para los estudiantes.	Elaborador	*Ofrece información*
T: 309	Entonces, ¿están buscando generalizar a partir de explicaciones geométricas?		*Solicita una respuesta*
Episodio 7. Construcción de una Generalización Geométrica			
M5: 312	Tal vez se pudiera mostrar, así como lo planteó M4.	Opinante	*Ofrece una valoración*
T: 320	Todo esto es impar por hecho, ¿cierto?		*Solicita una respuesta*
Todos: 322	Sí.	NA	*Ofrecen una respuesta*
T: 323	Este es par. ¿Par más impar?		*Solicita una respuesta*
Todos: 324	Impar.	NA	*Ofrecen una respuesta*
T: 325	Impar, ok. ¿Cómo debe de ser esto para que todo sea impar?		*Solicita una respuesta*
Todos: 326	Par [muestran duda]	NA	*Ofrecen una respuesta*
T: 327	¿Por qué lo dudan?		*Solicita una respuesta*
Todos: 328	Es par.	NA	*Ofrecen una respuesta*
M2: 329	Tiene al 2 que lo vuelve par.	Orientador	*Ofrece información*
T: 330 -331	Pero es a lo que quiero llegar. Nosotros queremos deducir que esto [señalando el término $(2k)^2$] es par, pues es lo que nos está representando el cuadrado de un número par ($2k$).		*Ofrece información*
M1: 336	Ah ok, tiene que ser par para que todo sea impar, como señala el hecho.	Opinante	*Ofrece información*
Episodio 8. Uso de la Generalización Geométrica			

T: 337 - 338	Finalmente, ¿existe algún tipo de propiedad o concepto en aritmética que implique el concepto de número par y la multiplicación de alguna manera?		Coordinador	*Solicita una respuesta*
M3: 339-340	Pues la multiplicación está relacionada con la potencia, quizá pensar en el cuadrado de números enteros consecutivos como se hizo al inicio y ver qué pasa.	quizá pensar en el cuadrado de números enteros consecutivos como se hizo al inicio y ver qué pasa	Opinante	*Ofrece una respuesta*
H2: 341 - 342	Como dice M3, pienso que podemos preguntarnos ¿Qué números enteros al elevarlos al cuadrado da como resultado un número par?, o ¿es el cuadrado de cualquier número par, un número par?	¿es el cuadrado de cualquier número par, un número par?	Orientador	*Ofrece información*
M2: 343 - 344	Ya sabemos que el cuadrado de un número par es par, y lo mismo sucede con los impares, pero al menos yo no había realizado una interpretación geométrica como las realizadas hasta ahora.	Interpretación geométrica	Opinante	*Ofrece información*
M4: 345 - 346	Pues hagamos una representación geométrica, se me ocurre iniciar con un cuadrado de longitud 3 unidades y luego uno del doble e interpretar qué sucede.	Iniciar con un cuadrado	Elaborador	*Ofrece información*
H1: 348 - 349	Algo más general, propongo iniciar con considerar a $2m + 1$ un número impar, así el número siguiente $2m + 2$ es par. Considerando que $(2m + 1)^2$ es impar.	Algo más general	Elaborador	*Ofrece una valoración*
M1: 353	¡Sí! Tenemos una explicación geométrica.		Opinante	*Ofrece información*
M5: 354 - 355	Viendo la representación de M4 y si se le “elimina” una unidad cuadrada y se reacomoda en un arreglo rectangular, el área de la	se reacomoda en un arreglo rectangular	Elaborador	*Ofrece una valoración*

	forma rectangular es un múltiplo de 2.			
M1: 358 - 359	¡Sí, es cierto! Con esas imágenes geométricas se va viendo que el número par también resulta de un proceso como ese.		Orientador	*Ofrece información*
M6: 360	Sí, al parecer siempre debemos hacer reacomodos para ver más claramente las cosas.		Opinante	*Ofrece una valoración*
H2: 361 - 362	Pues ya que estamos en esto, algo más general podría ser buscar un patrón numérico para ver qué está pasando o a qué se llega.	buscar un patrón numérico	Elaborador	*Ofrece información*
H3: 364 - 366	Desarrollando y organizando la expresión dada por H2, se llega a que $n(n+1)$ debe ser par por el resultado de la sesión anterior. Por tanto, es divisible entre 8.		Elaborador	*Ofrece información*
Episodio 9. Complementariedad de Representaciones				
T: 367 - 368	Bien, entonces para concluir, se puede retomar la representación geométrica propuesta por M5 y M3 para articular las respuestas propuestas.	Articular las respuestas	Coordinador	*Ofrece una valoración*
M8: 376 - 377	Claro, por eso en mi análisis, ya no podía seguir dividiendo el 55. Pero entonces, ¿sin una representación geométrica no se hubiera podido generalizar?	¿No se hubiera podido generalizar?	Opinante	*Ofrece información y Solicita una respuesta*
T: 378	Si se pudiera, por ejemplo, usando la idea presentada por H1.	Si se pudiera	Orientador	*Ofrece una respuesta*
M1: 379 - 380	Sí, con la explicación de H1 se lograría generalizar, pero articularlo con lo geométrico permite entender por qué se cumple, ¿No?	Articularlo con lo geométrico permite entender	Orientador	*Ofrece información y solicita una respuesta*
H2: 381 - 382	También considero que fue provechoso la articulación de representaciones, pues lo de H1 es más abstracto ya	Considero que fue provechoso	Opinante	*Ofrece información*

	que no se tiene un apoyo geométrico.	
T: 384	Sí, hay complementariedad	Hay complementariedad

De la Tabla 4.1 se deriva que, de los nueve episodios temáticos identificados, en dos terceras partes de éstos (del episodio 3 al episodio 8) se habla de la generalización (matemática) como temática central y con distintos matices en la conversación. Un ejemplo de esto puede verse en el tratamiento que los participantes dieron al concepto de paridad en dichos episodios.

Lo anterior permite hacer referencia a la generalización matemática como aquello que, en primera instancia, (implícita y explícitamente) los participantes trataron y consideraron relevante en su interacción conversacional. Dicho de otra manera, los seis episodios señalados muestran ciertos patrones en la interacción conversacional que caracterizan a las acciones y roles de los participantes en el "compromiso mutuo" de entender y usar a la generalización tanto desde el punto de vista matemático como didáctico. Sobre este asunto se ahondará más adelante. Respecto a los tipos y cantidad de roles asumidos por los participantes, en la Tabla 4.2 se muestra su distribución a lo largo de los nueve episodios temáticos referidos.

Tabla 4.2. *Roles asumidos en los turnos de habla*

EPISODIOS (E)	ROLES ASUMIDOS			
	Opinante	Orientador	Coordinador	Elaborador
E1	2	1	0	0
E2	0	1	1	1
E3	0	0	0	2
E4	2	2	2	2
E5	2	3	0	2
E6	1	5	2	3
E7	2	1	0	0
E8	4	2	1	5
E9	2	2	1	0
TOTAL	15	17	7	15

Como puede verse de la Tabla 4.2, el rol de orientador fue el más asumido por los participantes y en contraparte, el rol de coordinador fue el menos asumido. Esto tiene sentido considerando que, en una conversación reflexiva con las características descritas a lo largo de esta investigación, se trata de una búsqueda por generar entendimientos comunes a partir de compartir conceptos, procedimientos y negociar significados de los términos comunes.

Dicho así y como refuerzan los datos de los roles asumidos, en la conversación reflexiva no se trató de imponer una manera de pensar y hacer las cosas, sino más bien, se trató con una forma de experimentar el contexto y el problema en cuestión, de modo que fueron las ideas colectivas las que dieron forma y fondo a aquello que debía entenderse y hacerse en dicho contexto, es decir, la conversación reflexiva representó una oportunidad para el aprendizaje y desarrollo de conocimiento en colectivo.

4.2. Organización Secuencial

En esta sección se muestra cómo se fue configurando la organización secuencial a partir de cuatro secuencias identificadas durante la interacción conversacional y con ello, mostrar la forma en la que los participantes consiguieron coordinar acciones coherentes (para ellos) con base en sus acciones comunicativas, logrando evidenciar algunas actividades y contenidos asociados a tal organización secuencial.

Al igual que en la sección anterior, las secuencias que forman parte de la organización secuencial se presentan en orden ascendente, es decir, conformen fueron emergiendo de principio a fin en la interacción conversacional. El análisis de los datos se inició examinando los turnos en donde se presentaban indicios de una acción coordinada, si había algún tipo de actividad y contenido asociado y en relación con los episodios temáticos previamente identificados.

En la Tabla 4.3 se presentan las cuatro secuencias identificadas que configuran a la organización secuencial. En la primera columna se emplean los mismos códigos de la sección anterior. La segunda columna “acciones coordinadas” se indica el tipo de acción coordinada lograda por los participantes. En la tercera columna “oraciones” se muestran extractos de las conversaciones para ejemplificar y referir lo dicho por los participantes en cada secuencia. En la cuarta y última columna se muestran las actividades y contenidos asociados a las acciones coordinadas.

Tabla 4.3. *Organización secuencial: Acciones coordinadas, actividades y contenidos*

SESIONES 1 Y 2. ORGANIZACIÓN SECUENCIAL			
Turnos	**Acciones Coordinadas**	**Oraciones**	**Actividades (A) y Contenido (C)**
Secuencia 1. Discusión sobre la naturaleza de la tarea			
M4: 010 - 014	Precisar lo solicitado en la tarea	Entiendo la lógica; Pero al preguntarnos hasta qué punto; Estoy todavía en pausa [hay risas]. Siento que es una **pregunta de análisis**	A: Consenso sobre la naturaleza de la tarea. C: Reflexión y tipo de conocimientos implicados en la tarea
M1: 015		Pues consideramos que **no es tan claro y pareciera trivial**	
H2: 018 - 030		Sí, coincido un poco con M4; **Responder ¿hasta qué punto?** Decimos que depende de los **conocimientos** y del nivel educativo	
Secuencia 2. Discusión sobre la naturaleza y papel de la generalización			
H1: 048 - 049	Clarificar el papel de la generalización en Aritmética y Álgebra	A **la generalización** la consideré propia del **pensamiento algebraico**, pero el reconocimiento de **patrones**, la **relación** que hay entre **cantidades**, si es de la **aritmética**	A: Consenso sobre el significado de la generalización matemática C: Patrones, relaciones y generalización en matemáticas
H2: 053 - 055		Pensar algebraicamente requiere desarrollar un pensamiento para establecer **relaciones entre cantidades variables y constantes**, viéndolo así, **la generalización no sería exclusiva del álgebra**. De hecho, **se generaliza en cálculo, en geometría**	
M5: 059 - 060		**La matemática trata de patrones, relaciones y generalizaciones**, ¿no? Entonces no solo en álgebra se generaliza	
H1: 121 - 122		Entonces ¿qué concluimos? (…) **¿La generalización es propiamente del álgebra o de la aritmética?** No entiendo bien	
M3 - H3: 123		Es de la **Matemática**	
Secuencia 3. Discusión sobre el número par como una generalización matemática			
M5: 155	Mostrar al número par como una generalización matemática	Propongo pensar al **número par** dado por $2k$, como la **medida de área de un rectángulo**	A: Construcción de un concepto matemático (número par) como resultado de un proceso de generalización
M6: 165 - 166		Pero, estábamos sobre cómo la multiplicación de dos números consecutivos es un número par, ¿no? Entonces ¿cómo se vería con eso que la multiplicación de dos	

		números consecutivos sería un número par?	C: Número par como generalización (numérica y geométrica)
M2: 167		Pienso que lo que está comentando M5, sería **construir o ver el comportamiento de una secuencia**	
H2: 178 - 179		Es como **construir** digamos un **significado del par**	
H3: 200 - 201		**A partir de lo geométrico** podemos **deducir** que se va pasando de esto, pero ahora ya pasó como que a **una forma** en la que podemos **comprobar** que si en verdad **ocurre lo que estábamos mencionando**	
M1: 210		Es la **construcción de una generalización**	
Secuencia 4. Discusión sobre cómo validar la generalidad de un resultado			
H1: 262 - 263		Más o menos algo así pensaba. No sé si esté bien. O sea, ya tengo como resultado de que el cuadrado de un número impar es impar, entonces **hay que mostrar** que el cuadrado de un par es par, a partir de este resultado	
M3: 277		Ya nos dimos cuenta de que no llegamos a una generalización	A: Usar la generalización como un proceso para explorar, validar y construir resultados o conceptos matemáticos, tanto desde una mirada matemática como didáctica
H2: 292 - 294	Usar a la Generalización como proceso de exploración, construcción y validación de resultados matemáticos	Al momento de sacar **la medida de área de este rectángulo** que tiene medida un número par y un número impar, esto nos va a dar también un número par (…) Básicamente **fue como generalizar**	
T: 309		Entonces, ¿están **buscando generalizar** a partir de **explicaciones geométricas?**	C: Articulación de diversas representaciones como un medio para generalizar y al mismo tiempo como una herramienta para construir y mostrar explicaciones matemáticas
M5: 312		Tal vez se pudiera **mostrar,** así como lo planteó M4	
M2: 343 - 344		Ya sabemos que el cuadrado de un número par es par, y lo mismo sucede con los impares, pero al menos yo no había realizado una **interpretación geométrica** como las realizadas hasta ahora	
M4: 345		Pues hagamos una **representación geométrica**	
H1: 348		**Algo más general**, propongo iniciar	
M1: 353		¡Sí! Tenemos una **explicación geométrica**	

M1: 358 -359	¡Sí es cierto! Con esas **imágenes geométricas** se va viendo que **el número par también resulta de un proceso como ese**	
H2: 361 - 362	**Algo más general** podría ser buscar un **patrón numérico** para ver qué está pasando o **a qué se llega**, y pues a partir de casos particulares	
M8: 376 - 377	Claro, por eso en mi análisis, ya no podía seguir dividiendo el 55, Pero entonces, ¿sin una **representación geométrica** no se hubiera podido **generalizar**?	
M1: 379 - 380	Sí, con la explicación de H1 se **lograría generalizar**, pero **articularlo con lo geométrico** permite **entender** por qué se cumple, ¿No?	
H2: 381 - 383	También considero que fue provechoso la articulación de representaciones, pues lo de H3 es más abstracto, ya que no se tiene un apoyo geométrico, lo que puede **ser usado como un argumento por los estudiantes**	
T: 384	Sí, hay complementariedad.	

Entre los resultados que se derivan de las cuatro secuencias que conforman la organización secuencial de la interacción conversacional, se tienen los siguientes:

- La secuencia 1 se conforma prácticamente del episodio 1, mientras que la secuencia 2 abarca a los episodios 3 y 4, quedando fuera de ambas secuencias el episodio 2, lo que lleva a considerar al tópico tratado en dicho episodio como muy corto y poco significativo en la conversación reflexiva.
- Las secuencias 3 y 4 comparten el episodio 6, esto permite decir que el tópico tratado resultó ser relevante en la conversación reflexiva.
- La secuencia 4 es en la que converge el mayor número de episodios (del 6 al 9), y por la naturaleza de dichos episodios, se puede decir que el núcleo de la conversación reflexiva fue la generalización como concepto y proceso cuyas implicaciones matemáticas y didácticas quedan establecidas en las actividades y contenidos descritos en dicha secuencia.

En las secuencias es visible que la CR inició con una breve discusión sobre la naturaleza de la tarea, inmediatamente se dio paso a una discusión sobre la naturaleza y el papel de la generalización en matemáticas, subsiguientemente se conversó y trató el tema de número par precisamente como resultado de un proceso de generalización. Finalmente, en la cuarta secuencia se concluye la conversación con una discusión sobre cómo entender y usar a la generalización como proceso de exploración, construcción y validación de resultados matemáticos en relación con el uso de diversas representaciones.

Lo anterior permite ver un progreso "natural" de la conversación, pues ésta no se restringe a dar respuesta a la pregunta inicialmente planteada, sino que se desarrolla hasta el punto en donde se construyen consensos sobre la importancia y relevancia de la generalización para resolver la tarea planteada, así como la necesidad de pensar en formas de cómo favorecer la habilidad de generalizar durante la enseñanza de las matemáticas en educación básica.

Respecto al tipo de actividades logradas durante la interacción conversacional se observa que estas consistieron en alcanzar consensos, desarrollar conocimiento matemático y usar a la generalización como una herramienta para explorar, validar y construir resultados o conceptos matemáticos, así como reflexionar sobre su importancia para la enseñanza de las matemáticas. Por el lado de los contenidos, figura la generalización y algunas de sus características subyacentes tal como la búsqueda de patrones y relaciones, y el concepto de número par como resultado de un proceso de generalización. Asimismo, la importancia que tiene la articulación de diversas representaciones en el proceso de generalización matemática.

4.3. Nivel Procedimental en la Conversación Reflexiva

Por conocimiento procedimental en esencia se entiende y consiste en "saber cómo" proceder para lograr ciertos objetivos. Es decir, en conocer los procesos o procedimientos a seguir ante cierta situación o tarea. "Los procedimientos se han caracterizado utilizando constructos tales como habilidades, estrategias, producciones y acciones interiorizadas" (Byrnes y Wasik, 1991, p. 777).

Tal como se indicó en el capítulo anterior, en el nivel procedimental se detectan los procesos matemáticos desarrollados o empleados por los participantes, así como los conocimientos procedimentales a partir de sus acciones. En este punto es importante se tenga en cuenta que si bien es cierto que tanto en matemáticas como en otras áreas del conocimiento puede darse el caso de que las personas conocen y usan procedimientos de manera “automática” en la resolución de problemas, también es cierto que en diversas ocasiones esto no necesariamente es así; en ese tipo de ocasiones, la selección, reflexión y secuenciación consciente de pasos no sólo es algo requerido, sino que también connota a este tipo de conocimientos (Star y Newton, 2009).

En la Tabla 4.4 se presentan en orden ascendente, los procesos matemáticos y conocimientos procedimentales identificados en la interacción conversacional en el nivel procedimental de la conversación reflexiva. En la primera columna se emplean los mismos códigos de la sección anterior. En la segunda columna “procesos matemáticos” se indica el tipo de proceso matemático identificado. En la tercera columna “acciones” se muestran extractos de las conversaciones para ejemplificar y referir las acciones de los participantes. En la cuarta y última columna se muestran los conocimientos procedimentales asociados a las acciones y procesos matemáticos.

Tabla 4.4. *Nivel Procedimental: Procesos y Conocimientos Procedimentales*

<table>
<tr><td colspan="4">SESIONES 1 Y 2. INTERACCIÓN CONVERSACIONAL A NIVEL PROCEDIMENTAL</td></tr>
<tr><th>Turnos</th><th>Procesos Matemáticos</th><th>Acciones</th><th>Conocimiento Procedimental</th></tr>
<tr><td>M1: 006 - 009</td><td rowspan="3">Procesos Aritméticos (Suma, resta y multiplicación de números pares e impares)</td><td>Nos planteamos qué pasa si multiplicamos un par y un impar que sean consecutivos, (…) como vemos aquí: $\mathbf{1 \times 2 = 2}$ y $\mathbf{2 \times 3 = 6}$. Entonces concluimos que, al estar acomodados consecutivamente.</td><td rowspan="3">Establecer relaciones aditivas y multiplicativas entre valores numéricos</td></tr>
<tr><td>H1: 049 - 052</td><td>En este caso se ve una cierta relación entre las cantidades que van aumentando: de 2 se llega a 4, luego a 6, y cada vez se tienen 2 unidades, así van aumentando las cantidades (…) Llegar a una generalización.</td></tr>
<tr><td>M4: 067 - 074</td><td>Por ejemplo, aquí, si al multiplicar los números enteros consecutivos resulta un número par, entonces eso es una generalización (…) Y decimos que en la</td></tr>
</table>

H1: 080 - 081		**secuencia** [Imagen 4.1 e Imagen 4.3], se cumple que de **2 a 6, hace falta 4**, y se puede **llegar a la generalidad** Como que en cada momento **hay una relación multiplicativa**: 2×1, 2×3, 2×4, 2×5, 2×15, yo vería eso.	
H2: 024 – 027	Procesos Algebraicos (Relaciones y operaciones entre términos algebraicos)	$\boldsymbol{n}$ es un par y, $\boldsymbol{n+1}$ es el impar; entonces al multiplicarlos tenemos $\boldsymbol{n^2+n}$, de aquí puedo concluir que es par, **¿estuvo fácil?**, **¿qué me lo dice o qué hace falta?**, **¿qué otra prueba puedo hacer para concluir que es par?** ¿Puedo decir, ah sabes, si es fácil? Después me fui a pensar en el caso 2×3, y ahí pensaba en varias cosas.	Establecer relaciones simbólicas y realizar operaciones algebraicas
H2: 147 - 148 M5: 155 - 156 M1: 170 - 171 H1: 180 H3: 199 M6: 204 M2: 211	Procesos Aritméticos – Geométricos Proceso de Generalización	No podríamos tomar solo una de estas respuestas propuestas, tenemos que **articular entre todas** para precisamente, seguir generando o **estableciendo esas relaciones.** Pensar al número par dado por $2k$, como la medida de área de un rectángulo, por ejemplo, un rectángulo de base 2 y altura 1, es decir, de área 2. Y así **sucesivamente.** Ok, pensando en lo de M5, **veía que 2 por 1 da 2** y son dos consecutivos, el 2 por 2 no son consecutivos, **el 2 por 3, sí**; 4 por 3, sí. Entonces, (…) **eliminamos.** Yo comparto mi idea sobre lo que dice M5. ¿Cómo se pudo llegar a una representación?, o sea, ¿cómo pudo plasmar algo más general? El área del **primer rectángulo lo relacionó con el área** del anterior. Yo pensaba más bien en **una gráfica**, pero no logro expresarlo.	Reconocer patrones aritméticos - geométricos Cálculo de áreas de figuras rectangulares
H1: 230 - 234 M4: 246 H1: 267 M5: 314 - 315	Procesos Algebraicos - Geométricos	Uno de lado $2m+1$ y otro de $2m+3$ (…) llegamos a esta expresión $(2q+1)$. Al hacer la multiplicación nos dio esto (n^2+2n+1). Si sabemos que n^2es par. Quedaría un número par $2k$. $2n$ por ser múltiplo de 2 (…) Entonces puedo decir que el cuadrado de un número par es par.	Describir comportamientos numéricos y probar propiedades de manera simbólica

H3: 364 - 365	Desarrollando y organizando la expresión dada por H2, se llega a que $n(n+1)$ debe ser par por el resultado de la sesión anterior.	

Respecto a los procesos matemáticos empleados por los participantes se encuentran, en orden ascendente, los relacionados con la aritmética, el álgebra y la geometría elemental, así como una combinación o articulación de éstos. Particularmente se inició con el uso de arreglos y operaciones aritméticas tales como la adición, sustracción y multiplicación. Luego se establecieron relaciones y realizaron operaciones algebraicas. Finalmente, se incorporó el uso de representaciones geométricas en relación con los procesos aritméticos y algebraicos previamente desplegados.

Los conocimientos procedimentales identificados fueron cinco:

1) Establecer relaciones aditivas y multiplicativas entre valores numéricos;
2) Establecer relaciones simbólicas y realizar operaciones algebraicas;
3) Reconocer patrones aritméticos – geométricos;
4) Cálculo de áreas de figuras rectangulares y;
5) Describir comportamientos numéricos y probar propiedades de manera simbólica.

El común de los procesos matemáticos y conocimientos procedimentales identificados es su relación muy estrecha con el tipo de habilidades, estrategias, producciones y acciones (interiorizadas) implicadas en procesos de generalización matemática, particularmente en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación básica. Esta consideración se refuerza con el tipo de imágenes desarrolladas por los participantes durante este nivel de interacción conversacional, la cuales se muestran más adelante en la sección 4.5.

4.4. Nivel Conceptual en la Conversación Reflexiva

El conocimiento conceptual es el conocimiento basado o en relación con los conceptos, es decir, con principios generales o abstractos. En tal sentido, este tipo de conocimiento es considerado de un nivel cognitivo mayor al procedimental, pues se reconoce que este implica no sólo a los conceptos, sino también al tipo de relaciones o conexiones entre éstos, por ejemplo, si hay o no riqueza en las relaciones o conexiones.

Baroody, Feil y Johnson (2007) definen al conocimiento conceptual como "conocimiento de hechos, generalizaciones y principios" (p. 107). Esto presupone que este tipo de conocimiento es proposicional y conlleva el poder ofrecer definiciones "formales" y explicaciones de la validez de un concepto o incluso, del por qué es funcional (en términos de indicar por qué funciona) un determinado procedimiento. Visto así, dar cuenta del conocimiento conceptual en el marco teórico de esta investigación, implicó prestar atención a lo que los participantes hicieron en su interacción conversacional.

En la identificación de los conceptos se asumió que éstos pueden expresarse mediante una palabra o una frase. Asimismo, se consideró que "por su propia naturaleza, cada concepto presupone la presencia de ciertos sistemas de conceptos. Fuera de tal sistema, no puede existir" (Vygotsky, 1987, p. 224). Dicho, en otros términos, tales conceptos se pueden considerar contextuales en lugar de presuponerlos como predicados previamente formados.

Para el nivel conceptual se consideró que en éste las conversaciones se caracterizaron por enfocarse en el uso de teorías, principios o conceptos matemáticos, los cuales se ubican en la interacción entre los modos de aprendizaje RO y AC en el bosquejo de conversación reflexiva y que en esencia dicha interacción quedó caracterizada por el uso de conceptos abstractos o generación de modelos teóricos, razón por la que es en este nivel que se detectaron los conceptos desarrollados o empleados por los participantes, así como los conocimientos conceptuales derivados a partir de sus explicaciones.

En la Tabla 4.5 se presentan en orden ascendente, los conceptos y conocimientos conceptuales identificados en la interacción conversacional en el nivel conceptual de la conversación reflexiva. En la primera columna se emplean los mismos códigos de la sección anterior. En la segunda columna "conceptos" se indican los conceptos identificados. En la tercera columna "explicaciones" se muestran extractos de las conversaciones para ejemplificar y referir las explicaciones de los participantes. En la cuarta y última columna se muestran los conocimientos conceptuales asociados a las explicaciones y conceptos.

Tabla 4.5. *Nivel Conceptual: Conceptos y Conocimientos Conceptuales*

<table>
<tr><td colspan="4">SESIONES 1 Y 2. INTERACCIÓN CONVERSACIONAL A NIVEL CONCEPTUAL</td></tr>
<tr><th>Turnos</th><th>Conceptos</th><th>Explicaciones</th><th>Conocimiento Conceptual</th></tr>
<tr><td>H1: 038 - 039</td><td rowspan="9">Álgebra

Pensamiento Algebraico

Generalización</td><td>Cuando llegamos a esta **transición de pensamiento**, es posible precisar y afirmar un resultado.</td><td rowspan="9">El pensamiento algebraico precisa de poder establecer relaciones entre cantidades variables

La generalización favorece la transición entre pensamiento aritmético y algebraico</td></tr>
<tr><td>H2: 044 - 045</td><td>Tomar dos **cantidades** consecutivas, pero **más grandes** y preguntarse ¿qué pasa?, y así ir **generalizando.**</td></tr>
<tr><td>H2: 053 - 054</td><td>**Pensar algebraicamente** requiere desarrollar un pensamiento para **establecer relaciones entre cantidades variables y constantes.**</td></tr>
<tr><td>M4: 071 - 072</td><td>En álgebra no se tiene una cantidad conocida, sino que **intervienen variables**, viendo esa **relación entre variables.**</td></tr>
<tr><td>H1: 082 - 083</td><td>Creo que hay una **transición al álgebra.**</td></tr>
<tr><td>M2: 086 - 087</td><td>Ya intervienen de cierta forma las **literales**, y podemos preguntarnos si ¿ya estamos hablando de **álgebra**?</td></tr>
<tr><td>M6: 089 - 090</td><td>No por **usar literales** esto va a ser **álgebra.** Es decir, si el uso de **variables** es exclusivo del **álgebra.**</td></tr>
<tr><td>H1: 100 - 101</td><td>Pues no sé si sea del **álgebra**, pero como que **pensamiento algebraico y álgebra**, son un poquito **distinto las dos cosas**, se podría decir.</td></tr>
<tr><td>H2: 147 - 151</td><td>No podríamos tomar solo una de estas respuestas propuestas, tenemos que **articular** entre todas para precisamente, seguir generando o **estableciendo esas relaciones (…)** si bien sabemos que los ejemplos no son ya **la generalización.**</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>M5: 164</td><td rowspan="5">*Paridad de un número entero*

Generalización</td><td>Sería como **generalizar el patrón**</td><td rowspan="5">Todo número par es múltiplo de 2

El **número par** puede entenderse como un **proceso de generalización**

La **generalización es un proceso**</td></tr>
<tr><td>M1: 176 - 177</td><td>Aquí podemos ver que lo que **tienen en común** es también **el número 2**, que en este caso es el área.</td></tr>
<tr><td>H2: 178 - 179</td><td>Se puede usar para **enseñar pares**, (…) es como **construir** digamos un **significado del par.**</td></tr>
<tr><td>H1: 197 - 198</td><td>Una estructura aritmética que sea una generalización para el número par.</td></tr>
<tr><td>H3: 199</td><td>¿Cómo pudo plasmar algo **más general**?</td></tr>
</table>

M1: 210		Es la construcción de una **generalización.**	para explorar, validar y construir resultados matemáticos
M4: 245 - 247		Si queremos un **número impar**, le vamos a **sumar o restar 1** (…) sabemos que n^2es **par** por lo que vimos anteriormente y 2 por n es par también porque **2 indica paridad.**	
H1: 264		Considerando **el siguiente** número de un **número impar** a fuerza va a ser **par.**	Un número impar resulta de sumar o restar una unidad a un número par
M3: 279 - 282		**Construimos un cuadrado que representa su área** y (…). Entonces como el cuadrado de este es un **número impar** ($9u^2$), entonces al **restarle un número impar**, **esta área** que queda y que no está sombreada **es impar**. ¿lo entienden?	El área de un cuadrado representa geométricamente la potencia cuadrada de un número
H1: 297	*Paridad de un número entero*	¿**El área de ese rectángulo es par**?	
H2: 298	Potencia de un número entero	Sí, porque es **multiplicar** un **número impar** por un **número par.**	
M6: 300		Sería impar ese lado, ¿no?	El producto de números enteros consecutivos es par.
H2: 307 - 308		Vemos esta **relación entre número par, impar**, entonces desde ahí podría **ser un argumento**	
M5: 314 - 315		**Impar más impar es par.** Entonces puedo decir que el **cuadrado de un número par es par.**	El cuadrado de un número par es par.
H1: 350 - 351		Además, por lo concluido anteriormente de que, al **multiplicar un número par con uno impar**, **el resultado es par.**	
M1: 353		¡Sí! Tenemos una explicación geométrica.	

En este nivel de interacción conversacional se identificaron en orden ascendente, cinco conceptos:

1) Álgebra;
2) Pensamiento algebraico;
3) Generalización;
4) Paridad de un número entero y;
5) Potencia de un número entero.

De estos conceptos se observa que el de generalización y el de número par fueron los que mayormente estuvieron de principio a fin en la interacción conversacional.

Nueve fueron los conocimientos conceptuales identificados en relación con los cinco conceptos ya referidos. Estos son:

1) El pensamiento algebraico precisa de poder establecer relaciones entre cantidades variables;
2) La generalización favorece la transición entre pensamiento aritmético y algebraico;
3) Todo número par es múltiplo de 2;
4) El número par puede entenderse como un proceso de generalización;
5) La generalización es un proceso para explorar, validar y construir resultados matemáticos;
6) Un número impar resulta de sumar o restar una unidad a un número par;
7) El área de un cuadrado representa geométricamente la potencia cuadrada de un número;
8) El producto de números enteros consecutivos es par y;
9) El cuadrado de un número par es par.

En los conocimientos conceptuales se observa una relación entre el concepto de número par y el de generalización matemática. Más adelante se ahondará al respecto y se precisará mediante las producciones de los participantes, el sentido bajo el cual se trató particularmente a la generalización. Finalmente, cabe señalar que tales conocimientos conceptuales resultan de la coparticipación de los interlocutores.

4.5. Tránsito entre Modos de Aprendizaje en la Conversación Reflexiva

Los cuatro modos de aprendizaje representados en el modelo de CR se pusieron de manifiesto. En esta sección se muestra la forma en que se fue dando el tránsito entre tales modos y el conocimiento desarrollado. Particularmente se hace referencia al conocimiento sobre la generalización y sus implicaciones en la práctica de enseñanza de las matemáticas en educación básica.

El orden en el que se muestran los modos de aprendizaje y su transición es el presentado en el bosquejo de conversación reflexiva.

Modo de aprendizaje CE

Como ya se ha indicado antes, el modo CE consiste en aprender haciendo o teniendo una experiencia (aprender experimentando o sintiendo) y se ubica en el nivel procedimental. En este modo se encontró que algunos participantes comenzaron a experimentar la resolución de la tarea con casos aritméticos, mientras que algunos otros lo hicieron a partir de un tratamiento algebraico más general.

Las producciones realizadas y compartidas en la pizarra por los participantes ilustran lo anterior. Ver las Imágenes 4.1 y 4.2 siguientes, respectivamente.

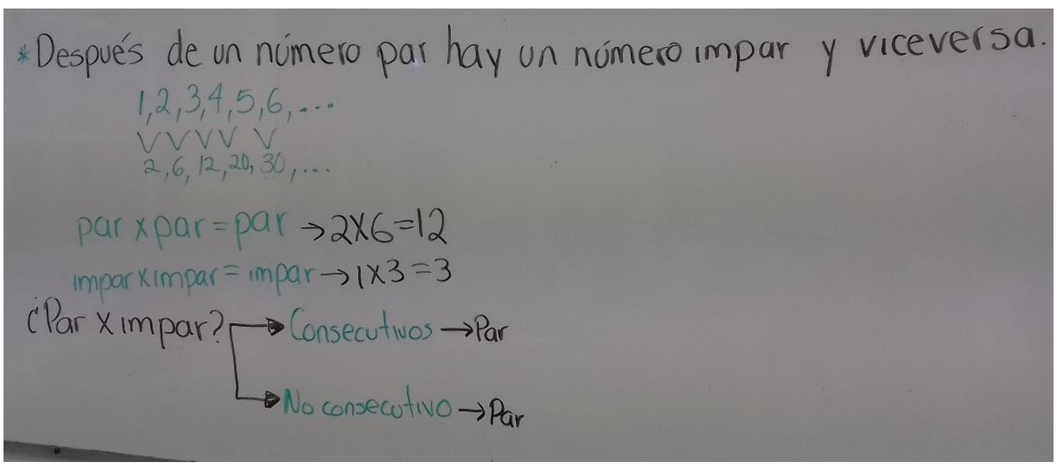

Imagen 4.1. Procedimiento aritmético dado por M1 y M2 al inicio de la tarea en el modo CE.

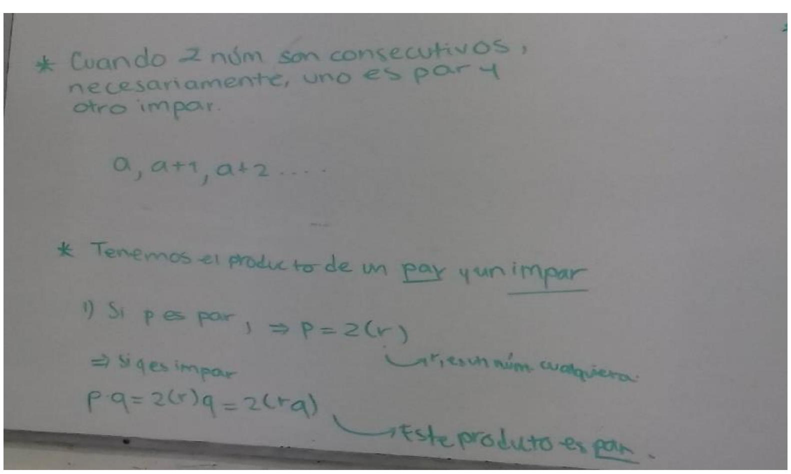

Imagen 4.2. Procedimiento algebraico dado por M3 y H1 al inicio de la tarea en el modo CE.

La interacción conversacional y las producciones de los participantes se ubican en el nivel procedimental dado que, como se muestra en la Imagen 4.1, la realización de la experiencia se hizo de manera concreta y a partir del uso de operaciones multiplicativas con diferentes casos de números pares e impares. En la Imagen 4.2 se muestra algo similar a la Imagen 4.1, con la salvedad de que en lugar de usar numerales específicos, se emplearon literales para representar a los números en su forma más general.

Los participantes identificaron y verificaron que el resultado de multiplicar dos números enteros consecutivos es un número par después de compartir sus ideas, significados y procedimientos en la conversación, como se muestra en los extractos siguientes:

01	M1: Como en la recta numérica siempre tenemos un número par e impar y así sucesivamente. Entonces, al realizar la multiplicación siempre será un número par por un número impar. Luego nos planteamos ¿qué pasa cuando multiplicamos dos números pares? (…), cuando son consecutivos nos da un número par como vemos aquí: $1 \times 2 = 2$ y $2 \times 3 = 6$. Entonces concluimos que, al estar acomodados consecutivamente los números, la multiplicación de un número par por un impar da un número par [señala el arreglo numérico de la imagen 4.1].	001-009
02	H1: (…) cuando estamos en primaria o secundaria (…), particularizamos ese dato ¿no?, de que un número impar multiplicado por un par es par. Es decir, un número par multiplicado por un número par es par, o un impar multiplicado por un impar es impar, pero nos queda la duda de que se cumpla siempre. Por ejemplo, si tomamos números más grandes, en ese caso hay cierta incertidumbre o desconfianza.	034-038
03	H2: (…) en aritmética, como que se trata de que un estudiante indique, por ejemplo, que $2 \times 6 = 12$, pensando en casos particulares [refiere a la imagen 4.1]. En cambio, pensando más en el pensamiento algebraico, sería como tomar dos cantidades consecutivas, pero más grandes y preguntarse ¿qué pasa?, y así ir generalizando.	042-045
04	H1: (…) a la generalización la consideré propia del pensamiento algebraico, pero el reconocimiento de patrones, la relación que hay entre cantidades, si es de la aritmética. Y en este caso se ve una cierta relación entre las cantidades que van aumentando: de 2 se llega a 4, luego a 6, y cada vez se tienen 2 unidades, así van aumentando las cantidades, entonces se podría concluir que la multiplicación de dos números consecutivos es par. Llegar a una generalización.	048-052
05	M4: En un principio había planteado que en aritmética no se podía generalizar (…), pero después de reflexionar sobre qué entendemos por generalizar, por ejemplo, aquí [refiere a la imagen 4.1], si al multiplicar los números enteros consecutivos resulta un número par, entonces eso es una generalización, (…), en aritmética y en álgebra se puede generalizar (…), en la secuencia [imagen 4.1], se cumple que de 2 a 6, hace falta 4, y se puede llegar a la generalidad de que serían múltiplos de dos.	065-076
06	M8: (…) pienso que interpretar en aritmética y en álgebra a $2k$, no es igual que en cálculo. En aritmética se ve como el área total o representa un número par, en cambio en álgebra lo interpreto como un cambio o variación, la variable está cambiando al doble.	114-116

El inicio y desarrollo de la conversación de poco en poco fue conduciendo a una reflexión y discusión del concepto de número par como resultado de una generalización en aritmética. Se reconoció el uso de la expresión $2k$ para representar a un número par en general y se discutió el papel de la generalización en aritmética y álgebra de manera particular. Sin embargo, los participantes no lograron llegar a la propiedad de que la multiplicación de dos números enteros consecutivos, n y $n + 1$, da la suma de los primeros n números pares consecutivos como parte del proceso de generalización.

Lo anterior se debe a que la conversación estuvo mayormente situada en generar un significado colectivo sobre la generalización y se dejó de lado (parcialmente), el análisis puntual y global de la información obtenida.

Modo de aprendizaje RO

El modo de aprendizaje RO consiste en observar y reflexionar (aprender por procesamiento) sobre lo que se ha hecho o experimentado en el modo CE. Para pasar del modo CE al RO, el profesor preguntó cómo relacionar la multiplicación de dos números enteros consecutivos con la idea de un número par. Es entonces que los participantes emplearon representaciones geométricas para intentar generalizar el resultado mediante la búsqueda de las condiciones generales para obtener un número par al multiplicar dos números enteros consecutivos.

Por ejemplo y de manera inicial, los participantes discutieron sobre cómo reconocer un patrón cuando el producto de números enteros consecutivos aumenta usando el cálculo recursivo de diferencias. Así, obtuvieron su primera representación geométrica intercambiando ideas y reflexionando sobre ellas. La Imagen 4.3 muestra el patrón seguido por los números $2, 6, 12, 20\ y\ 30$:

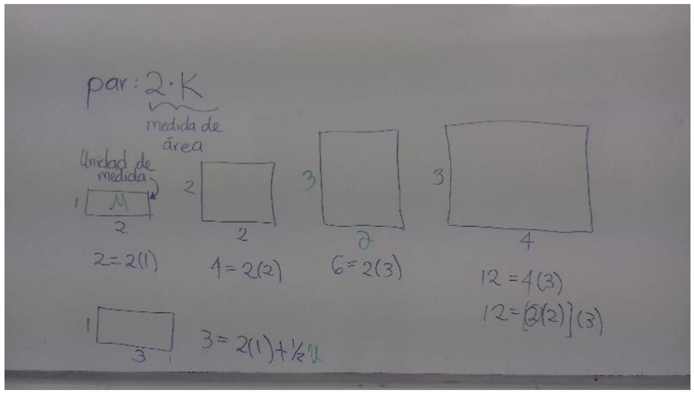

Imagen 4.3. Representación geométrica de números pares como medidas de áreas de rectángulos, dado por M5.

La interacción conversacional favoreció la reflexión sobre la importancia de la generalización en matemáticas y de su enseñanza, particularmente en educación básica en las áreas de aritmética y álgebra. Es así como la conversación reflexiva se situó más allá de la especificidad de la pregunta inicial, tal como se muestra en los siguientes extractos:

07	T: ¿Cómo relacionar la multiplicación de dos números enteros consecutivos con la idea de número par?	139
08	M5: Yo propongo pensar al número par dado por $2k$, como la medida de área de un rectángulo, por ejemplo, un rectángulo de base 2 y altura 1, es decir, de área 2. Y así sucesivamente [hace referencia a la imagen 4.3], (...) Sería como generalizar el patrón.	155-164
09	M6: Pero, estábamos sobre cómo la multiplicación de dos números consecutivos es un número par, ¿no?, entonces ¿cómo se vería con eso que la multiplicación de dos números consecutivos sería un número par?	165-166
10	M2: Pienso que lo que está comentando M5, sería construir o ver el comportamiento de una secuencia.	167
11	H1: Yo comparto mi idea de lo que dice M5 [comparte la imagen 4.4]	180
12	M1: Ahí [refiere a la imagen 4.4], si se cumple eso de que el producto de dos números enteros consecutivos es un número par y además podemos ver que tienen en común al número 2, que en este caso es el área.	181-182
13	H2: Sí, y pudiera pensarse en considerarlo como punto de partida para la enseñanza de números pares.	183
14	H3: ¿Cómo pudiste llegar a una representación? Es decir, a algo más general. Me parece interesante.	184

En este modo de aprendizaje RO, la parte geométrico-visual fue fundamental para reflexionar y hacer explícitas las ideas, pensamientos y significados de la generalización en matemáticas, por ejemplo, entenderla no solo como un proceso, sino también como resultado. Es decir, entenderla como una relación “proceso-producto” que debe estudiarse en la educación básica, tal como se muestra en lo dicho por los participantes en el siguiente modo de aprendizaje.

Modo de aprendizaje AC

El modo de aprendizaje AC consiste en teorizar o generalizar la experiencia (aprender generalizando) a partir de RO. En este caso se encontró que los participantes llegan a conceptualizar al número par como un concepto matemático que está en relación con un proceso de generalización de relaciones aritméticas multiplicativas, tal y como se observa en el modo RO. Pero en este modo AC, se consigue ampliar y concretar cuando dieron una expresión simbólica que describe al proceso de generalización.

En los extractos siguientes se ejemplifica lo anterior.

15	H1: Ahora me pregunto si esta representación podría usarse para obtener una estructura aritmética que sea una generalización para el número par	196 - 198
16	H3: ¿Cómo se pudo llegar a una representación? Osea, ¿cómo pudo plasmar algo más general? Porque dice, a partir de lo geométrico podemos deducir que se va pasando de esto, pero ahora ya pasó como que a una forma en la que podemos comprobar que, si en verdad ocurre lo que estábamos mencionando.	199 - 201
17	H2: Yo decía algo como eso, es como si hubiera una transición hacia el pensamiento algebraico.	2003
18	M1: Es la construcción de una generalización	210
19	H1: Pues otra cosa que estoy viendo ahora, ¿qué significa la posición en todo este contexto?, y pienso que es una manera de ir colocando el rectángulo anterior en el rectángulo actual [refiere a la imagen 4.4].	216 - 217
20	M6: El área es lo común en todos los rectángulos, el área del rectángulo inicial es la unidad de medida.	219
21	M4: m es la medida de la altura y $m+1$ es la medida de la base de los rectángulos; se puede ver geométricamente que el resultado de multiplicarlos (números consecutivos) es un múltiplo de dos.	220 - 221
22	H1: Si, $m(m+1)=2k$, en general.	222

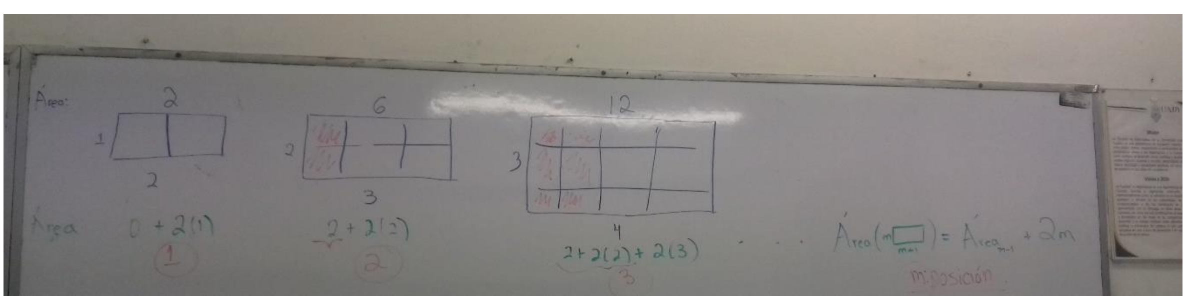

Imagen 4.4. Idea compartida por H1 sobre la idea de M5 (representada en la imagen 4.3).

Se observó un desarrollo en los pensamientos de los participantes en la medida en que la conversación alcanza aspectos más amplios a los originalmente planteados en la tarea de inicio, por ejemplo, ahondar en la generalización como proceso para construir explicaciones matemáticas y discurrir sobre su enseñanza y aprendizaje.

También se detectó una transición en las formas de aprendizaje, concretamente, el tránsito de un aprendizaje divergente a uno convergente. El modo de aprendizaje divergente generalmente se mueve entre el modo CE y RO mostrados en el bosquejo de CR, mientras que el modo de aprendizaje convergente se ubica entre el modo AC y AE (Kolb y Kolb, 2017). Es decir, se pasa de la generación de ideas en varias direcciones a la búsqueda de "la mejor" respuesta a la tarea, buscando regularidades o patrones que pudieran llevar a abstraer un concepto general; en este caso específico, *la multiplicación de dos números enteros consecutivos da la suma de los primeros números pares consecutivos como resultado de un proceso de generalización*. Desafortunadamente esto no sucedió.

Como ya señaló y se puede ver, la conceptualización abstracta no se logró por completo, ello a pesar de que a partir de la Imagen 4.4 se pudo haber inferido la relación entre la multiplicación y adición de los números enteros en forma consecutiva, como se muestra a continuación:

$$1 \times 2 = 2$$

$$2 \times 3 = 2 + 4$$

$$3 \times 4 = 2 + 4 + 6$$

$$4 \times 5 = 2 + 4 + 6 + 8$$

Etc.

Es así como la propiedad abstraída resultó ser más débil, misma que se enuncia de la manera siguiente: "La multiplicación de enteros consecutivos da como resultado un número par".

Modo de Aprendizaje AE

El modo de aprendizaje AE consiste en aplicar o probar una teoría para una experiencia posterior (aprender haciendo). Para promover este modo de aprendizaje, el profesor preguntó si existía algún tipo de propiedad o concepto aritmético que incluyera los conceptos de número par y multiplicación.

Los extractos siguientes ejemplifican lo acontecido en la interacción conversacional y los resultados respecto a este modo de aprendizaje.

23	T: ¿Existe algún tipo de propiedad o concepto en aritmética que implique el concepto de número par y la multiplicación de alguna manera?	337 – 338
24	M3: Pues la multiplicación está relacionada con la potencia, quizá pensar en el cuadrado de números enteros consecutivos como se hizo al inicio y ver qué pasa	339 – 340
25	Como dice M3 pienso que podemos preguntarnos ¿Qué números enteros al elevarlos al cuadrado da como resultado un número par?, o ¿es el cuadrado de cualquier número par, un número par?	341 – 342
26	M2: Ya sabemos que el cuadrado de un número par es par, y lo mismo sucede con los impares, pero al menos yo no había realizado una interpretación geométrica como las realizadas hasta ahora.	343 – 344
27	M4: Pues hagamos una representación geométrica, se me ocurre iniciar con un cuadrado de longitud 3 unidades y luego uno del doble e interpretar qué sucede, ¿qué dicen? [M4 da la representación mostrada en la imagen 4.5].	345 – 346
28	H1: Algo más general, propongo iniciar con considerar a $2m+1$ un número impar, así el número siguiente $2m+2$ es par. Considerando que $(2m+1)^2$ es impar [como dijo M2], entonces lo reescribo de la manera siguiente: $2q+1$ y desarrollando todo, el resultado es múltiplo de 2, por lo que es par. Además, por lo concluido anteriormente de que, al multiplicar un número par con uno impar, el resultado es par, entonces se puede deducir que el cuadrado $(2l \times 2l)$ es par [se refiere a la imagen 4.6].	348 – 352
29	M1: ¡Sí! Tenemos una explicación geométrica	353

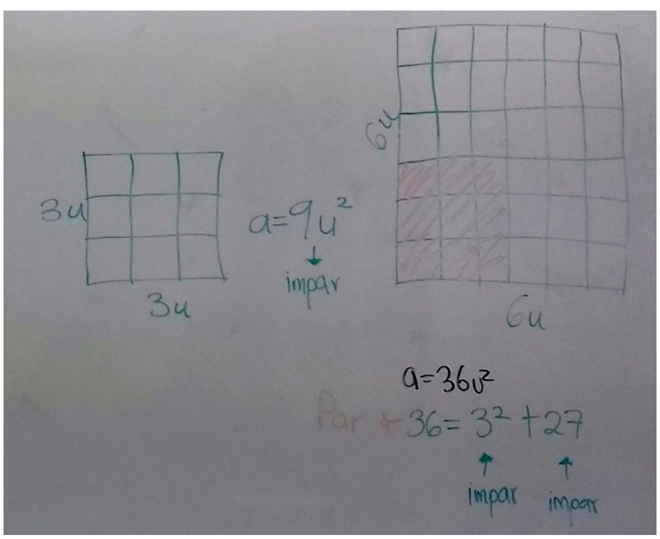

Imagen 4.5. Propuesta geométrica dada por M4, sobre el cuadrado de un impar y de su doble.

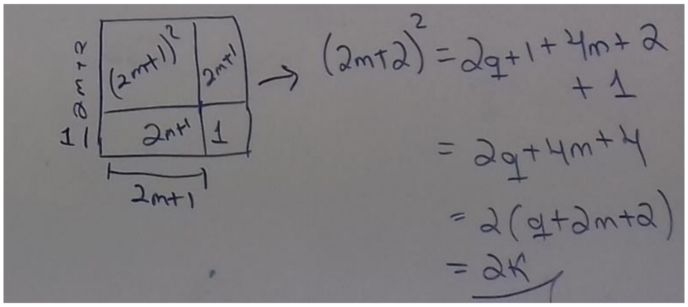

Imagen 4.6. Representación geométrica general dada por H1 de la multiplicación de impares con pares consecutivos.

Una vez llegado a este momento de interacción, el uso de representaciones geométricas en combinación con el uso de operaciones y relaciones aritméticas-algebraicas fue muy notorio en los participantes como un recurso para generar explicaciones de otras situaciones similares a la planteada al inicio de la conversación y que, de alguna manera, implicaba un proceso de generalización matemática.

Por definición, lo anterior se corresponde con el modo de aprendizaje AE. De hecho, entre los participantes emerge (a partir de sus experiencias adquiridas en la interacción y basándose en diferentes ideas y representaciones con el fin de obtener una que las vincule e integre) el desarrollar la idea siguiente en términos de un resultado de generalización: "el cuadrado de un número impar reducido en una unidad es un número par". A continuación, se muestran algunos extractos y representaciones que dan cuenta de lo dicho y hecho por los participantes al respecto del desarrollo de su idea, junto con el tipo de explicaciones y validación dadas.

30	M5: Viendo la representación de M4 [se refiere a la imagen 4.5] y si se le "elimina" una unidad cuadrada y se reacomoda en un arreglo rectangular, el área de la forma rectangular es un múltiplo de 2 [Imagen 4.7]. De hecho se puede ver que el área de la forma rectangular es siempre divisible entre 8. De forma más particular, la base o la altura del rectángulo va a corresponder a una medida múltiplo de 8 o de 4.	354 - 357
31	M6: Si, al parecer siempre debemos hacer reacomodos para ver más claramente las cosas	360
32	H2: Pues ya que estamos en esto, algo más general podría ser buscar un patrón numérico para ver qué está pasando o a qué se llega [comparte la imagen 4.8], y pues a partir de casos particulares se reconoce que al descomponer en factores se mantiene invariante el 2^3.	361 - 363
33	H3: Desarrollando y organizando la expresión dada por H2 [imagen 4.8], se llega a que $n(n+1)$ debe ser par por el resultado anterior [el producto de un número entero con su consecutivo es par]. Por tanto, es divisible entre 8. [imagen 4.9].	364 - 366

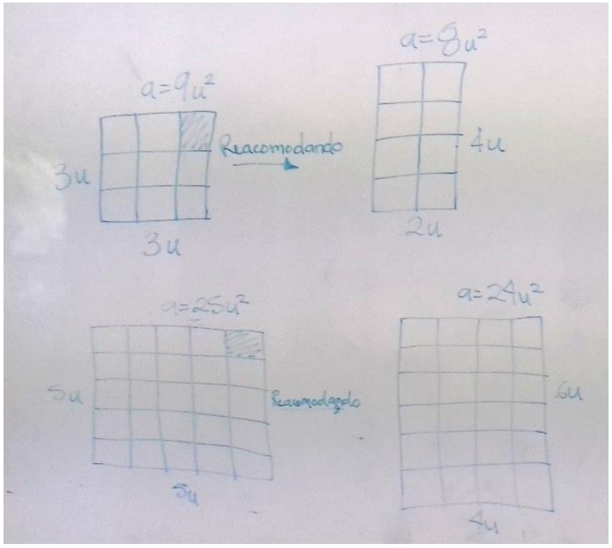

Imagen 4.7. Representación geométrica del cuadrado de un número impar reducido en una unidad, dado por M5.

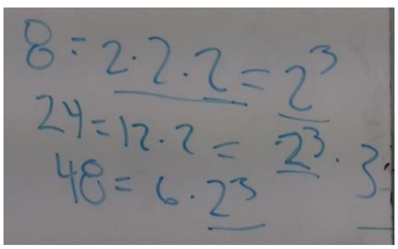

Imagen 4.8. Desarrollo numérico dado por H2 sobre el proceso de elevar un impar al cuadrado y restarle una unidad al resultado.

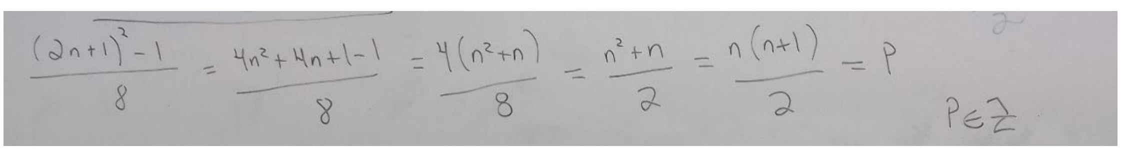

Imagen 4.9. Desarrollo algebraico dado por H3 sobre el proceso de elevar un impar al cuadrado y restarle una unidad al resultado.

Al cierre de las discusiones los participantes consensuaron en que, con el proceso mostrado en la Imagen 4.9, se logra tener una generalización que explica el resultado siguiente: “el cuadrado de un número impar, reducido en 1, es un número par”. No obstante, todos consideraron que la articulación de representaciones fue provechosa dado que permitió entender por qué se cumple dicho resultado, pues dijeron que el procedimiento presentado en la Imagen 4.9 llega a ser más abstracto (en educación primaria o secundaria), si no se tiene un apoyo aritmético y geométrico que lo soporte, como el desarrollado por ellos.

Es así como los participantes aplicaron lo aprendido (conceptos y procedimientos aritméticos-geométricos) en una “nueva experiencia” en la que, al tiempo que comparten sus pensamientos y acciones, también los cuestionan y discuten de manera abierta y flexible. Esto les permitió llegar a un aprendizaje mediado por la experimentación con nuevas situaciones. Es decir, aprendieron implementado o actuando con situaciones nuevas.

Particularmente en este modo de aprendizaje los participantes no aplicaron lo que, deseable y teóricamente debieron haber abstraído en el modo anterior CA; en su lugar utilizaron la propiedad asociada a la multiplicación de enteros consecutivos (como se observa en lo dicho y hecho por H3 en línea de diálogo 33) para validar y explicar una nueva propiedad mediante un proceso de generalización y el uso de representaciones geométricas, aritméticas y algebraicas.

El señalamiento anterior no impide decir que el tránsito entre los cuatro modos de aprendizaje durante la CR pone en evidencia la producción de un aprendizaje de manera colectiva, el cual se vio reflejado en el desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza relacionado con la paridad de números enteros y la generalización.

4.6. Conocimiento Matemático para la Enseñanza Desarrollado en CR

En esta sección se describe el conocimiento matemático para la enseñanza desarrollado por los participantes durante el proceso de conversación reflexiva y su relación con los dominios y subdominios que, de acuerdo con Ball *et al*. (2008) y Hill *et al*. (2008), caracterizan a este conocimiento profesional.

Antes de pasar a la descripción del conocimiento matemático para la enseñanza desarrollado por los participantes, se muestran tres tipos de reflexiones evidenciadas por ellos y vinculadas con la práctica de enseñar matemáticas. Esto en virtud de que permite situar de mejor manera a dicho conocimiento en el contexto mismo de esta investigación.

Reflexiones vinculadas con la práctica de enseñar matemáticas

Las reflexiones identificadas durante la CR son de tres tipos:

- *Reflexiones Anticipadas:* Se caracterizaron por hacer referencia a las acciones futuras implicadas con la práctica de enseñar matemáticas;
- *Reflexiones actuales:* Se caracterizaron por hacer referencia a las acciones actuales, expresadas en tiempo indicativo presente;
- *Reflexiones retrospectivas:* Se caracterizaron por hacer referencia a las acciones pasadas, expresadas en tiempo pasado.

Las reflexiones anticipadas y retrospectivas son las que más están en relación con la práctica de enseñar matemáticas, en particular, con la enseñanza de la aritmética. En contraparte, la reflexión actual se sitúo mayormente en la naturaleza del contenido matemático, en este caso, contenido aritmético y algebraico movilizado durante la conversación.

A continuación, se muestran extractos relacionados con estos tres tipos de reflexiones.

Reflexiones anticipadas

019 - 021	H2: **Nos preguntamos si es trivial para un niño de primaria**, ¿Sí?, ¿No?, ¿Por qué? Y luego, ¿lo es para uno de bachillerato o de universidad? Y por ejemplo esto [señala la imagen 4.2], ¿lo haría un estudiante de primaria? (…)
033 - 035	H1: Podría ser el **poder transitar** de un pensamiento aritmético a un pensamiento algebraico. **No sé, si al reconocerse una estructura algebraica o aritmética**, ya se está en ese tránsito. Y cuando estamos **en primaria o secundaria** no suele ser tanto así, es decir, particularizamos ese dato ¿no? (…)
042 - 045	H2: En aritmética, como que se trata de que **un estudiante indique**, por ejemplo, que $2 \times 6 = 12$, pensando en casos particulares [imagen 1]. En cambio, pensando más en el pensamiento algebraico, sería como tomar dos cantidades consecutivas, pero más grandes y preguntarse ¿qué pasa?, y así ir generalizando (…)
101 - 102	H1: Pues **pensaría que el estudiante** está en el pensamiento algebraico
129 - 130	H1: Y en eso **pienso que un estudiante de primaria que sabe generalizar**, se podría también decir que ya hace interpretaciones
131 - 132	M2: **El concepto de número par es en sí una generalización que hacen los estudiantes**, pues relacionan todos los múltiplos de 2 (…)
134 - 135	H1: Yo hacía referencia a algo así, **como que hay una transición** de cierta manera, de este punto hacia el pensamiento algebraico.
140 - 141	M4: Yo haría como que **una transición** y partiría del primer método propuesto [imagen 4.1], ¿por qué?, porque como es **a nivel primaria**, ellos van a tender a ir a algo particular (…)
150 - 154	H2: Digamos **si pensamos en un nivel primaria** creo que es más o menos formal que inclusive podría ser demasiados ejemplos, si bien sabemos que los ejemplos no son ya la generalización o ya que estamos hablando de una demostración pues digamos, para **un nivel primaria**, creo que es claro, ¿no? el ver todo eso y partir de digamos,

	esos productos, para después a lo mejor, **empezar a establecer ese tipo de relaciones y ellos vayan generalizando**.
178 - 179	H2: Es que **la actividad se puede usar para enseñar pares**, o sea, de qué partir para enseñar pares y pues es como construir digamos un significado del par.
306 - 308	H2: Como que partimos de esta idea y buscamos una construcción y llegamos a esto, pero igual me percaté, como algo extra, que igual estas medidas del área, vemos esta relación entre número par, impar, entonces **desde ahí podría ser un argumento para los estudiantes**.
382 - 383	H2: Ya que no se tiene un apoyo geométrico, lo que puede ser usado como un argumento por los estudiantes

Reflexiones actuales

010 - 014	M4: Pienso que la pregunta es más de reflexión, ¿no?, por ello la frase ¿hasta qué punto? (…), al preguntarnos ¿hasta qué punto? Estoy todavía en pausa [hay risas]. Siento que es una pregunta de análisis.
042 - 045	H2: Considero que sería en casos particulares como él mencionaba. En aritmética, como que se trata de que un estudiante indique, por ejemplo, que $2 \times 6 = 12$, pensando en casos particulares [imagen 4.1]. En cambio, pensando más en el pensamiento algebraico, sería como tomar dos cantidades consecutivas, pero más grandes y preguntarse ¿qué pasa?, y así ir generalizando.
114 - 116	M8: Pienso que interpretar en aritmética y en álgebra a $2k$, no es igual que en cálculo. En aritmética se ve como el área total o representa un número par, en cambio en álgebra lo interpreto como un cambio o variación, la variable está cambiando al doble (…)
196 - 198	H1: Ahora me pregunto si esta representación podría usarse para obtener una estructura aritmética que sea una generalización para el número par.
358 - 359	M1: ¡Sí, es cierto!, con esas imágenes geométricas [Imagen 4.5] se va viendo que el número par también resulta de un proceso como ese.
360	M6: Sí, al parecer siempre debemos hacer reacomodos para ver más claramente las cosas.

Reflexiones Retrospectivas

048 - 050	H1: A la generalización la consideré propia del pensamiento algebraico, pero el reconocimiento de patrones, la relación que hay entre cantidades, si es de la aritmética. Y en este caso se ve una cierta relación entre las cantidades que van aumentando: de 2 se llega a 4, luego a 6, y cada vez se tienen 2 unidades (…)
065 - 070	M4: En un principio había planteado que en aritmética no se podía generalizar, porque tenía la idea de que, solo buscábamos la relación entre esas cantidades o esos patrones y se reconocía una secuencia. Pero después de reflexionar sobre qué entendemos por generalizar, por ejemplo, aquí, si al multiplicar los números enteros consecutivos resulta un número par, entonces eso es una generalización, es decir, algo que siempre se va a cumplir. Nos damos cuenta y podemos concluir que en aritmética y en álgebra se puede generalizar, pero de diferente forma (…)
216 - 217	H1: Pues otra cosa que estoy viendo ahora, ¿qué significa la posición en todo este contexto?, y pienso que es una manera de ir colocando el rectángulo anterior en el rectángulo actual (…)

277 - 278	M3: Ya nos dimos cuenta de que no llegamos a una generalización. Nosotros partimos del hecho de que el cuadrado de un número impar es impar, lo hicimos geométricamente (…)

Los conceptos de número par y generalización son los más presentes en las tres reflexiones, así como el de algunas implicaciones para la enseñanza de ambos en la educación básica. Las reflexiones sugieren que el diálogo sobre las acciones y pensamientos a partir de cuestionamientos y contradicciones sirvió para la negociación de las ideas y significados asociados a los conceptos de número par y generalización matemática. En este sentido, se reconoce una transformación de la experiencia conversacional traducida en conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores en formación.

Como parte de lo anterior se tiene que los participantes fueron reflexionando sobre sus pensamientos, acciones y significados, al tiempo que también reflexionaron y compartieron algunas implicaciones para la práctica de enseñanza, particularmente, sobre la enseñanza de la aritmética y el álgebra. Algunas implicaciones fueron la consideración de la complejidad del aprendizaje en los niños, el tipo de interpretaciones que se pueden realizar sobre las representaciones de los objetos matemáticos en una u otra área de las matemáticas, el proceso e importancia de la construcción de significados, la necesidad de desarrollar la capacidad de transitar de un pensamiento aritmético a uno algebraico, así como la importancia de usar y articular diversas representaciones en procesos de generalización. En los extractos siguientes se muestra información referente a esta aseveración.

019 - 020	H2: nos preguntamos si es trivial para un niño de primaria, ¿Sí?, ¿No?, ¿Por qué?
059 - 061	M5: la matemática trata de patrones, relaciones y generalizaciones, ¿no? Entonces no solo en álgebra se generaliza, sino en todas las áreas de la matemática, como dice H2.
117 - 118	M8: Entonces, estar en aritmética o en álgebra, depende de cómo se interprete la expresión $2k$.
129 - 130	H1: Y en eso pienso que un estudiante de primaria que sabe generalizar, se podría también decir que ya hace interpretaciones.
147 - 150	H2: Es que igual, coincidiendo con M4 de que no podríamos tomar solo una de estas respuestas propuestas, tenemos que articular entre todas para precisamente, seguir generando o estableciendo esas relaciones a base de ejemplos. Y por otro lado, dónde se ve claramente deducible y pensar en proponer como en ese [imagen 4.1] // digamos si pensamos en un nivel primaria (…)
178 - 179	H2: Es que la actividad se puede usar para enseñar pares, o sea, de qué partir para enseñar pares y pues es como construir digamos un significado del par.

203	H2: Yo decía algo como eso, es como si hubiera una transición hacia el pensamiento algebraico.
381 - 383	H2: También considero que fue provechoso la articulación de representaciones, pues lo de H3 es más abstracto [se refiere a la imagen 4.9], ya que no se tiene un apoyo geométrico, lo que puede ser usado como un argumento por los estudiantes.

De este modo se tiene que durante la CR o debido a ésta, tuvieron lugar los tres tipos de reflexiones antes referidas sobre la propiedad de paridad de los números enteros y la generalización por parte de los futuros profesores de matemáticas participantes. Primero, desde un punto de vista del contenido matemático que ellos mismos han aprendido, y segundo, desde un punto de vista de las implicaciones e importancia didáctica de estos conocimientos como parte de su práctica profesional futura. Dicho así, tales reflexiones se circunscriben como parte de los resultados promovidos por la conversación reflexiva y que, al mismo tiempo, favorecieron el aprendizaje y desarrollo de conocimiento profesional de los interlocutores.

Características del Conocimiento Matemático para la Enseñanza Desarrollado

Los resultados mostrados en las secciones anteriores fortalecen la idea de que el aprendizaje (entendido como un proceso) en el contexto de una conversación reflexiva se puede ver como la transformación del conocimiento individual o de su estructura, basado en un diálogo libre y abierto que incluye el planteamiento de preguntas y el ofrecimiento de respuestas como una manera de compartir información, afrontar contradicciones y aceptar diferencias, incluidos los significados.

Con base en lo anterior, también se puede reconocer al aprendizaje conversacional reflexivo como un proceso de construcción de significados (nuevos) y la comprensión compartida de un tópico que termina por desarrollar un conocimiento previamente adquirido o por constituirse en él.

En la Figura 4.1 se sintetiza el proceso de aprendizaje y el conocimiento matemático para la enseñanza desarrollado por los participantes con base en el bosquejo de conversación reflexiva empleado en la investigación.

<table>
<tr><td colspan="2">Nivel procedimental: Procedimientos basados en el uso de representaciones y en la generalización matemática.</td><td colspan="2" rowspan="2">Conocimiento Profesional</td><td colspan="2">Nivel conceptual: Concepto de número par y generalización matemática.</td></tr>
<tr><td>(1) Modo CE</td><td>Ejemplo</td><td>(2) Modo RO</td><td>Ejemplo</td></tr>
<tr><td>Se usan arreglos y se analizan casos numéricos.</td><td>Imagen 4.1</td><td rowspan="4">Conceptos matemáticos como número par requieren de la construcción y articulación de representaciones aritméticas, algebraicas y geométricas para su comprensión y enseñanza en educación básica.</td><td rowspan="4">La generalización matemática es un método y una habilidad que se deben promover en la educación básica para interpretar, validar y explicar resultados matemáticos.</td><td>Se usan estructuras algebraicas.</td><td>Imagen 4.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">↕ Transformación del conocimiento</td><td colspan="2">↕ Comprensión del conocimiento</td></tr>
<tr><td>(4) Modo AE</td><td>Ejemplo</td><td>(3) Modo AC</td><td>Ejemplo</td></tr>
<tr><td>Se emplean representaciones y a la generalización para explicar y validar resultados nuevos: $[(2n+1)^2-1], n \in Z$, es un número par.</td><td>Imagen 4.9</td><td>Se establecen patrones y conceptualiza al número par como una generalización al multiplicar números enteros consecutivos.</td><td>Imagen 4.4</td></tr>
</table>

Figura 4.1. Proceso de aprendizaje y conocimiento matemático para la enseñanza desarrollado en CR por futuros profesores.

Los conocimientos descritos en la Figura 4.1 se configuraron con base en los conocimientos procedimentales y conceptuales descritos en las Tablas 4.4 y 4.5, respectivamente, así como con la información descrita en la Tabla 4.3. A continuación, se describen las características del conocimiento matemático para la enseñanza desarrollado por los futuros profesores en relación con las presentadas en los dominios y subdominios indicados en Ball *et al.*, (2008) y Hill *et al.*, (2008).

Conocimiento del Contenido de las Matemáticas

a) *Conocimiento Común del Contenido (CCK)*: Respecto a este subdominio del conocimiento se observó que los participantes usaron y desarrollaron conocimientos conceptuales y procedimentales de la aritmética y álgebra básica en el planteamiento y resolución de problemas, tal como se describe en las Tablas 4.4 y 4.5. En términos de habilidades matemáticas sobresale la articulación adecuada de diversas representaciones aritméticas, algebraicas y geométricas asociadas al proceso de "abstracción" del número par como una generalización matemática, ya descrito en la sección 4.5.

b) *Conocimiento Especializado del Contenido (SCK)*: Respecto a este subdominio se tiene que, si bien no hay información que dé cuenta de este conocimiento *per se*, pues se trató de una investigación con profesores en formación y no en ejercicio, si es posible apuntar (a partir de las reflexiones anticipadas) una serie de indicios que refieren un conocimiento desarrollado potencialmente en esta dirección, como ejemplo de ello considérese las líneas de diálogo siguientes: 134 – 135; 140 – 141; 150 – 154; 178 – 179; 306 – 308; 382 – 383; pertenecientes a las reflexiones anticipadas. Además de esto, es perceptible que los participantes proporcionaron explicaciones matemáticas adecuadas y examinaron métodos alternativos para plantear y resolver problemas, como puede verse en la tercera columna de la Tabla 4.5.

c) *Conocimiento del Horizonte Matemático (HCK).* No se identificaron datos o evidencia de que los profesores en formación aludieran o expresaran como parte de su conocimiento desarrollado, a este subdominio de conocimiento, más allá del breve momento en que se hace referencia a las diversas interpretaciones que se dan o pueden darse a la expresión simbólica $2k$ en la aritmética y el álgebra escolar.

Conocimiento Pedagógico del Contenido Matemático

a) *Conocimiento del Contenido y de los Estudiante (KCS)*: En relación con este subdominio de conocimiento se reconoce que es en las reflexiones anticipadas y de manera particular en las líneas de diálogo siguientes: 019 – 021; 033 – 035; 129 – 130 y 131 – 132, en donde es posible advertir indicios de tal conocimiento. En efecto, las reflexiones realizadas sobre cómo se podría dar cuenta de si un estudiante (de primaria o secundaria) se sitúa o no en un pensamiento algebraico o en una transición hacia éste, así como lo que implica para él saber generalizar, son ejemplos de un entrelace entre el conocimiento del contenido y el de los estudiantes, ello desde un punto de vista teórico e hipotético.

b) *Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT)*: En relación con este subdominio de conocimiento, sucede algo similar a lo referido previamente en el subdominio “Conocimiento Especializado del Contenido”, y en tal sentido, se puede decir que tanto la construcción y articulación de las diversas representaciones aritméticas, algebraicas y geométricas, como los procesos de generalización realizados por los participantes, dan cuenta de este tipo de conocimiento desarrollado en un sentido potencial, pues desde una mirada teórica e hipotética (como suele ocurrir en los procesos o programas institucionales de formación docente), implica el poder construir procesos pertinentes que no solo estén orientados a tratar dificultades o errores en las formas de razonar o proceder de los estudiantes, sino que también representan una oportunidad para ampliarlas y mejorarlas. Las líneas de diálogo: 147 – 150 y 381 – 383, ubicadas al final de la sección 4.6, ejemplifican esta idea y se refuerza con los conocimientos resumidos y referidos en la Figura 4.1.

c) *Conocimiento del Currículo:* No se identificaron datos o evidencia de que los participantes aludieran o expresaran como parte de su conocimiento desarrollado, a este subdominio de conocimiento *per se*.

Tres aspectos se derivan del conocimiento desarrollado por los participantes en relación con los dominios y subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza, a saber: 1) los dos subdominios que más y mejor lo caracterizan son el “conocimiento común del contenido” y el “conocimiento del contenido y de los estudiantes”; 2) Los dos subdominios con menos relación son el “conocimiento especializado del contenido” y el “conocimiento del contenido y la enseñanza”; 3) Los dos subdominios con los que no hubo relación son el “conocimiento del horizonte matemático” y el “conocimiento del currículo”.

4.7. Resumen del Capítulo

En el capítulo se presentaron los resultados de la investigación. Con base en el análisis de los turnos y organización secuencial de la conversación se reportaron nueve episodios temáticos y cuatro secuencias que circunscribieron a la generalización como el tópico principal y rector de la conversación reflexiva, llegando a formar parte del conocimiento matemático para la enseñanza desarrollado por los participantes.

Por otro lado, del análisis de los niveles de interacción conversacional procedimental y conceptual de la CR, se encontró y reportó que ambos tipos de conocimientos mostrados por los participantes se sitúan mayormente en la aritmética y el álgebra elemental, así como su relación muy estrecha con el uso pertinente de representaciones que auxilian en el proceso de generalización y su enseñanza.

De los dos análisis anteriores más el análisis del tránsito entre los cuatro modos de aprendizaje y la identificación de los tres tipos de reflexiones realizadas por los participantes como parte del proceso de CR, se reportó que el conocimiento matemático para la enseñanza desarrollado por estos últimos queda enunciado de la manera siguiente: 1) La comprensión de conceptos matemáticos como el de número par en la educación básica podría mejorarse si para su enseñanza se recurre a la construcción y articulación de representaciones aritméticas, algebraicas y geométricas; 2) La generalización matemática es un método y una habilidad que se debe promover en la educación básica como una forma de interpretar, validar y explicar resultados matemáticos, pues exige y soporta procesos de argumentación inductiva.

También se reportó que la CR promovió reflexiones asociadas con el aprendizaje y desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza, en particular, en lo relativo a la paridad de números enteros y al proceso de generalización matemática. Tales reflexiones se clasificaron en anticipadas, actuales y retrospectivas respecto al conocimiento matemático y la práctica de enseñanza futura de los futuros profesores.

Finalmente, haciendo uso de los dominios y subdominios que caracterizan al conocimiento matemático para la enseñanza (Ball *et al*., 2008; Hill *et al*., 2008), se reportó que el conocimiento desarrollado por los participantes tiene características expresadas en los subdominios CCK y SCK del dominio “Conocimiento del Contenido de las Matemáticas” y en los subdominios KCS y KCT del dominio “Conocimiento Pedagógico del Contenido”, no encontrándose características relativas al “conocimiento del horizonte matemático” y “conocimiento del currículo”.

CAPÍTULO 5

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

En este capítulo se presenta una discusión de los resultados obtenidos sobre la conversación reflexiva como medio para promover el aprendizaje y desarrollo de conocimiento profesional en futuros profesores de matemáticas, así como una discusión del conocimiento generado en tal conversación, según lo reportado en estudios relativos al conocimiento matemático para la enseñanza de profesores en servicio y formación inicial.

5.1. Conversación Reflexiva y Desarrollo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza

A partir de los episodios temáticos y las secuencias obtenidas como resultado del análisis de la organización del habla, es posible afirmar que la CR y lo experiencial fueron importantes en el desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza de los participantes, pues al escuchar y valorar la respuesta de un interlocutor les permitió establecer más conexiones entre sus pensamientos y acciones durante el proceso conversacional-reflexivo. De este modo, hablar de sus ideas matemáticas fue una experiencia mucho más activa e implicada en su proceso de aprendizaje y conocimiento del que quizá pudo resultar de solamente escucharlo del profesor. Dicho en otras palabras, el aprendizaje de los participantes fue resultado de las experiencias y reflexiones dentro de las cuales ellos fueron entendiendo y situando su interacción conversacional.

En relación con lo anterior, algunos estudios han documentado que el intercambio de experiencias mediado por un diálogo basado en la indagación o el cuestionamiento favorece el desarrollo de un pensamiento reflexivo en profesores y futuros profesores sobre aspectos relacionados con el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido (Chamoso, Cáceres y Azcárate, 2012; Demissie, 2015; Eriksson, 2017; Hairon, 2016;

Jaworski, 2006; Laursen, Hassi y Hough, 2016; Rasmussen, 2016; Toom, Husu y Patrikainen, 2015). Esto también concuerda con lo reportado por Simoncini, Lasen y Rocco (2014), quienes sostienen que un diálogo guiado ayuda a los futuros profesores a obtener mejores perspectivas de sus prácticas docentes, de sus pensamientos y acciones.

De manera complementaria a lo ya dicho y con base en los tres tipos de reflexiones evidenciadas por los participantes, es posible aseverar que el conversar reflexivamente les creó oportunidades de aprendizaje profesional relativas a la práctica de enseñar matemáticas, por ejemplo, la oportunidad de considerar a la generalización como un proceso y una habilidad matemática necesaria a desarrollar en los estudiantes durante la enseñanza de las matemáticas en educación básica, lo que a su vez implicó el discutir cómo coadyuvar para que los estudiantes puedan transitar entre una y otra forma de pensamiento matemático, tal es el caso de pasar de un pensamiento aritmético a uno algebraico, en donde el uso de diversas representaciones semióticas tiene una singular importancia. Esto puede resumirse diciendo que la conversación reflexiva ayudó a una conexión asequible entre lo teórico y práctico del conocimiento matemático para la enseñanza de las matemáticas.

Trabajos como los de Brodie y Shalem (2011) apoyan el posicionamiento anterior, pues aun cuando su trabajo fue con profesores en ejercicio y no con futuros profesores, estas autoras reportan que las conversaciones entre profesores basadas en la idea de desafío y solidaridad no solo favorecen el desarrollo de nuevos conocimientos profesionales, también favorece los vínculos entre la práctica y la teoría. Ellas observaron que los profesores en ejercicio pudieron usar los errores “reales” de sus estudiantes para pensar en la naturaleza de tales errores, así como en el papel de ellos para darles un tratamiento adecuado. Otros autores (Potari, Sakonidis, Chatzigoula y Manaridis, 2010) también han documentado que cuando los profesores en servicio o en formación participan colaborativamente en la reflexión de múltiples aspectos de la enseñanza, les ayuda a integrar sus conocimientos, a tener una visión más amplia de su complejidad y a explicitar su conocimiento tácito. De alguna manera, este tipo de resultados hace suponer que el crecimiento o desarrollo del conocimiento para la enseñanza de las matemáticas no solo se nutre de la experiencia, sino que también de la conversación y reflexión entre pares (Doerr y Lerman, 2009).

5.2. Conversación reflexiva y Aprendizaje del Futuro Profesor de Matemáticas

Las características identificadas en el conocimiento desarrollado por los futuros profesores sugieren que la conversación reflexiva es una herramienta y un enfoque adecuado para favorecer el aprendizaje y desarrollo profesional de futuros profesores de matemáticas, pues se encontraron consistencias significativas con algunas de las recomendaciones basadas en la investigación en el campo, algunas de las cuales se mencionan en esta sección.

Ponte (2012) afirma que, si bien es importante contar con una caracterización del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, lo es más entender sus procesos de desarrollo. En tal sentido y a la luz de los resultados de esta investigación se puede señalar que la CR constituye un proceso para el desarrollo de tal conocimiento en el futuro profesor toda vez que se identificaron tres tipos de reflexiones que promovieron su aprendizaje en relación con su práctica de enseñanza futura, por ejemplo, reconociendo la importancia que tiene el poder articular el contenido matemático con aspectos pedagógicos. A este respecto Ponte y Chapman (2016) refieren lo siguiente:

> Es importante que los programas involucren a los futuros profesores en oportunidades de aprendizaje que les permitan reconstruir su conocimiento y comprensión iniciales de la enseñanza de las matemáticas. Esto requiere conciencia y escrutinio de este conocimiento previo. La reflexión es un proceso clave para lograrlo (p. 283).

Además, mirando los diálogos durante el proceso de conversación reflexiva, en particular, los indicados en la sección 4.5 (tránsito entre los modos de aprendizaje en la CR) del capítulo anterior, se observa que los entendimientos y las experiencias de los participantes están en constante interacción hasta que llegan a constituirse en aprendizaje y conocimiento, tal como se muestra en la sección 4.6. Edwards (2005) puntualiza algo similar al señalar que "los profesores alinean sus pensamientos y acciones con los de los demás para interpretar los problemas de la práctica y responder a esas interpretaciones" (p. 169), cuando se comparten y conectan experiencias a partir de un conjunto de razones.

Si se considera la forma en que se fue dando la CR entre los participantes, puede decirse que su aprendizaje se caracterizó por ser un proceso racional e inferencial en donde ellos preguntaron y dieron razones sobre lo considerado potencialmente relevante en su conversación. Un ejemplo de esto es la discusión sobre el concepto de generalización y su reconocimiento como una habilidad que debe favorecerse en la enseñanza por su importancia para interpretar, validar y explicar resultados matemáticos. De esta manera se da cuenta de cómo a través de la conversación reflexiva se conectan entendimientos y emergen nuevos, en este caso, de conceptos matemáticos, y de algunos aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje. Lave y Wenger (1991) y Wenger (2001) llaman a este tipo de aprendizaje "aprendizaje situado" y lo caracterizan como un nexo evolutivo de relaciones entre el agente y el sistema de práctica en el que participa.

Otro aspecto que sugiere las potencialidades de la CR para favorecer el aprendizaje y desarrollo profesional de los futuros profesores de matemáticas es la coherencia con algunos de los elementos planteados en la propuesta denominada "Aprender a mirar profesionalmente los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas" o "mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza" desarrollada e impulsada por Llinares y colaboradores (Llinares, 2016; Llinares, Ivars, Buforn y Groenwald, 2019). Esencialmente la propuesta consiste en que los profesores en formación aprendan a "mirar con sentido" el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, esto incluye por supuesto, el pensamiento de sus estudiantes. La forma en que estos autores sugieren se puede ayudar en dicho aprendizaje es mediante el uso de diferentes tipos de registros de la práctica que ofrezcan información sobre el diseño de contextos que coadyuven a estructurar su mirada (profesional), por ejemplo, sobre "qué aspectos mirar del registro de la práctica, qué conocimiento es pertinente para analizar estos aspectos, cómo justificar las decisiones de enseñanza considerando las interpretaciones realizadas, etc." (Llinares, 2019, p.7).

Por lo que concierne a esta investigación, las reflexiones anticipadas de los participantes en la conversación reflexiva revelan que éstos se plantean cuestionamientos sobre la pertinencia de presentar de una u otra forma un contenido matemático a los estudiantes en función de sus conocimientos y nivel educativo, el tipo de actividad que pudiera resultar útil en la introducción, por ejemplo, del concepto de número par o paridad de números en general y el cómo desarrollarla para su mejor entendimiento, así como el tipo de argumentos que se promueven en tal o cual actividad de enseñanza. Todo ello se puede entender como aspectos favorables que, a priori, abonan a darle un mayor sentido a la práctica de enseñanza de las matemáticas, en donde la participación y colaboración son elementos clave.

Finalmente, en el reporte de Thanheiser *et al*. (2014), sobre qué se sabe, no se sabe y hacia donde se va respecto al conocimiento matemático para la enseñanza del futuro profesor en educación básica, se expone que si bien se conocen y se han identificado varios conceptos erróneos que los futuros profesores tienen en diversas áreas del contenido matemático y algunas descripciones de sus concepciones, aun no se sabe lo suficiente de cómo ellos aprenden, por tanto, puntualizan la necesidad de ampliar los estudios que versen sobre los procesos de aprendizaje de los futuros profesores y de su desarrollo en relación con lo que se hace en el aula. Respecto a cómo ayudar el aprendizaje profesional de los futuros profesores, Ponte y Chapman (2016) señalan como tendencia el que ellos revisen el contenido que ya les es familiar y lo examinen de formas que no lo sea, para de este modo llegar a los significados subyacentes de los conceptos y procedimientos matemáticos, y de cómo poder desarrollarlos en el aula.

En esta dirección, los resultados de esta investigación sugieren que situar a los futuros profesores en conversación reflexiva representó un medio y una oportunidad para que ellos vayan aprendiendo a cuestionar y ampliar sus propios conocimientos matemáticos y adquiriendo mayor conciencia sobre la complejidad de su práctica profesional futura. En particular, se observó un involucramiento en los pensamientos y acciones relacionados con algunas ideas matemáticas y didácticas para la práctica de enseñanza en educación básica, tal es el caso de reconocer la importancia de la generalización y el papel del tránsito entre diversas formas de pensamiento matemático: aritmético – algebraico, sin dejar de lado el aprendizaje del alumno. Es así como la CR representó un medio y una oportunidad de colaborar para el aprendizaje y desarrollo profesional del futuro profesor de matemáticas.

5.3. Discusión General del Conocimiento Matemático para la Enseñanza Desarrollado

Los resultados de esta investigación muestran que el conocimiento matemático desarrollado por los futuros profesores tiene relación con las características descritas en los subdominios CCK y SCK del dominio "Conocimiento del Contenido de las Matemáticas" y los subdominios KCS y KCT del dominio "Conocimiento Pedagógico del Contenido", pero no así con los subdominios "conocimiento del horizonte matemático" y "conocimiento del currículo".

Lo anterior es coincidente con lo reportado por McDonough, Clarke y Clarke (2002) y Clarke (2013), quienes señalan que el uso frecuente de la entrevista individual por parte de los profesores en formación con sus estudiantes (durante y como parte de su prepráctica profesional), contribuye al crecimiento de su conocimiento de la materia en lo relativo al SCK y HCK y de su conocimiento pedagógico del contenido, en particular, al conocimiento sobre la comprensión, pensamiento y razonamiento matemático de los estudiantes. Dicho de otro modo, tanto en dichas investigaciones como en la presente, los subdominios SCK, KCS y KCT, aparecen como parte del conocimiento profesional en futuros profesores, al tiempo que en ambas también se evidencia ausencia de algún indicio sobre el conocimiento del currículo. Un aspecto no concurrente es que, en los estudios referidos, a diferencia de esta investigación, si aparece el HCK como parte del conocimiento acrecentado por los futuros profesores, no obstante, ello puede explicarse debido a los alcances que tiene una entrevista "clínica" frente a una conversación reflexiva en colectivo, y el estar en un contexto de pre-práctica profesional (Asante y Mereku, 2012).

Otro hecho relevante del conocimiento matemático desarrollado por los futuros profesores es su conexión con el contenido del curso, la inclusión de algunas consideraciones que vinculan al contenido matemático con los pensamientos o aprendizajes de los estudiantes, es decir, tiene relación con su práctica de enseñanza futura. Justamente en esta dirección, algunos autores han señalado que los cursos orientados al desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza en futuros profesores deben estar organizados de modo que se atienda al contenido, los estudiantes y la enseñanza en forma articulada (Ball, Sleep, Boerst y Bass, 2009). Incluso algunos autores han señalado que, en el proceso de aprender a enseñar, por ejemplo, por medio de la resolución de problemas, también es importante desarrollar una base de principios que guíen la toma de decisiones pedagógicas. Algunos principios pudieran ser: decidir cuándo continuar o cambiar una actividad de enseñanza, cuándo introducir ideas matemáticas o qué nivel de justificación es suficiente (Masingila, Olanoff y Kimani, 2017); dicho en otras palabras, propiciar que los futuros profesores conecten lo matemático con lo pedagógico y viceversa.

El reconocimiento de la importancia que tiene en general el uso de diversas representaciones numéricas, algebraicas y geométricas en actividades matemáticas tal como la generalización, procesos de interpretación, validación y explicación de resultados matemáticos, fue parte medular del conocimiento desarrollado por los participantes. En un sentido, ellos logran reconocer "implícitamente" que, para alcanzar una enseñanza de las matemáticas de manera más efectiva, no basta con el conocimiento del contenido de la materia, se requiere también analizar la forma en que éste puede y/o debe presentársele a los estudiantes. Autores como Kilpatrick, Swafford y Findell (2001) refieren dicha importancia de la manera siguiente:

> Conocimiento de hechos matemáticos, conceptos, procedimientos y las relaciones entre ellos; conocimiento de las formas en que se pueden representar las ideas matemáticas; y el conocimiento de las matemáticas como disciplina, en particular, cómo se produce el conocimiento matemático, la naturaleza del discurso en matemáticas y las normas y estándares que guían el argumento y la prueba (p. 371).

Algunos estudios han planteado que la cualidad anterior se propicie en cursos de formación inicial de profesores de matemáticas como parte de su conocimiento matemático para la enseñanza, por ejemplo, favoreciendo que los futuros profesores "elaboren y valoren múltiples representaciones, métodos y argumentos" (Kuennen y Beam, 2020, p. 774) como una manera de fortalecer dicho conocimiento. Esto es, el articular diversas representaciones es un conocimiento pedagógico esencial para la práctica profesional del profesor, ya que ayuda a la comprensión de objetos matemáticos (Iori, 2017).

Por otro lado, y desde una mirada de los conocimientos matemáticos procedimentales y conceptuales inmersos en el conocimiento desarrollado por los participantes, se observó el establecimiento de relaciones (nexos) entre ambos tipos de conocimientos y su apreciación como algo benéfico para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de nexo es cuando se reconoce la importancia de usar diversas representaciones en la enseñanza de las matemáticas como una forma de favorecer el tránsito del pensamiento numérico al algebraico.

Otro ejemplo de tal tipo de nexos es cuando los participantes articulan la paridad de un número entero con los procedimientos numéricos, algebraicos y geométricos, para luego situarse en un proceso de generalización matemática, tal como se muestra en los diálogos entablados por los futuros profesores hacia el final de la tabla 4.4. Sin embargo, y como se indicó en la sección 4.5, en donde al no abstraerse de manera adecuada la propiedad matemática: *la multiplicación de dos números enteros consecutivos da la suma de los primeros números pares consecutivos*, es claro que tales relaciones también quedaron a un nivel potencial. Esto hace suponer que, de haberse conseguido dicha abstracción, los beneficios que representa el establecer tal tipo de relaciones pudieron haber sido un tema que nutriera más la conversación reflexiva y posiblemente, el conocimiento desarrollado (Rittle-Johnson, 2019).

En la dirección anterior, algunos estudios han indicado que el uso de diversas representaciones por parte de futuros profesores puede favorecer el establecimiento de esas relaciones entre ambos tipos de conocimientos, fortaleciendo con ello no solo su relación bidireccional (Rittle-Johnson y Schneider, 2012), o aminorando el supuesto predominio de uno u otro al momento de resolver problemas (Zuya, 2017), sino que también desarrollando su conocimiento especializado del contenido al permitirles analizar y explicar (por anticipado) los errores de los estudiantes (Chinnappan y Forrester, 2014).

5.4. Resumen del Capítulo

En este capítulo se presentó una discusión de los resultados obtenidos acerca de la pregunta de investigación. Se argumentó que la conversación reflexiva favoreció la emergencia de cualidades deseables y necesarias como parte del conocimiento desarrollado por los participantes, en particular, el uso del cuestionamiento y la reflexión como recursos para la reconstrucción de los conocimientos matemáticos previamente adquiridos al tiempo que se favorece una visión con sentido sobre las implicaciones en la práctica de enseñanza (Laursen, Hassi y Hough, 2016; Llinares, 2019; Ponte y Chpaman, 2016; Rasmussen, 2016; Toom, Husu y Patrikainen, 2015).

Se discutió y mostró que el tipo de conocimiento profesional desarrollado por futuros profesores tiene relación con las características descritas en el modelo MKT de Ball y colaboradores (Ball *et al*., 2008) y se enmarca matemáticamente en los conceptos de número par y generalización. También se discutió que los resultados refuerzan, pero también son fortalecidos por estudios en donde se reporta que el uso de múltiples representaciones y métodos son aspectos centrales del conocimiento matemático para la enseñanza (Kuennen y Beam, 2020; Iori, 2017).

CAPÍTULO 6

CONCLUSIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta una síntesis de los hallazgos principales de esta investigación, se describen algunas implicaciones para el aprendizaje profesional del futuro profesor de matemáticas y para investigaciones futuras. También se presentan las limitaciones y conclusiones de la investigación, así como los aportes al campo de estudio.

6.1. Síntesis de los Hallazgos

Los resultados de esta investigación apoyan los de otras investigaciones en donde se reporta que el diálogo basado en la indagación y reflexión sobre aspectos relacionados con la práctica de enseñanza, son elementos fundamentales en el aprendizaje profesional de los profesores y futuros profesores de matemáticas (Alice, Heaton y Williams, 2017; Arcavi, 2016; Chamoso, Cáceres y Azcárate, 2012; Jaworski, 2006; Krainer y Llinares, 2010; Preciado-Babb *et al*., 2015; Saylor y Johnson, 2014; Rasmussen, 2016). También soportan la idea de que la conversación reflexiva puede ser un medio y herramienta que contribuya tanto al desarrollo de un conocimiento como al de una mirada profesional de la práctica de enseñanza (Llinares, 2019). El conocimiento matemático para la enseñanza desarrollado por los participantes en CR no solo se caracterizó por su dominio matemático, sino también por el pedagógico, como se mostró hacia el final del capítulo 4.

No obstante, los resultados obtenidos van más allá de solo apoyar con un nuevo enfoque y evidencia empírica, la importancia e implicaciones favorables de lo conversacional-reflexivo en el aprendizaje profesional del futuro profesor o de caracterizar el conocimiento desarrollado para su práctica de enseñanza en tales condiciones, sino que ofrecen información respecto al contenido que aprenden y cómo lo aprenden en tales condiciones (Ponte y Chapman, 2016; Thanheiser *et al*., 2014).

Respecto al primer caso mencionado en el párrafo anterior, un ejemplo de ello son los conceptos matemáticos de número par y generalización en relación con un reconocimiento del papel e importancia que tiene el uso de diversas representaciones para su enseñanza y aprendizaje. Respecto al segundo caso mencionado, se ubica el papel de mediación que tienen los tres tipos de reflexiones: anticipadas, actuales y retrospectivas, en el cuestionamiento y ampliación de los significados asociados a tal contenido matemático y en relación con la práctica de enseñanza futura.

En efecto, la Figura 4.1 no solo muestra que el proceso de interacción conversacional de los participantes comprendió un tránsito entre el nivel procedimental y conceptual de su conocimiento matemático y la presencia de los cuatros modos de aprendizaje planteados en la teoría del aprendizaje experiencial de Kolb y Kolb (2017), también da cuenta de cómo el conocimiento matemático para la enseñanza se va desarrollando colaborativamente a medida que se establece y se acepta un diálogo (inherente a la conversación) acompañado por reflexiones y autorreflexiones. Es así como, por ejemplo, las discusiones sobre paridad de número entero, generalización y pensamiento matemático, se constituyeron no solo en un conocimiento matemático del colectivo, sino en un reconocimiento del contenido matemático personal. Por su parte, el uso de diversas representaciones y la transición entre el pensamiento aritmético y algebraico, se instauraron como conocimiento pedagógico de dicho contenido.

6.2. Implicaciones de los Resultados

Considerando que el propósito de esta investigación fue explorar y aportar evidencia empírica de cómo la conversación reflexiva promueve el desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza en futuros profesores de matemáticas y caracterizar tal conocimiento, en esta sección se explican las implicaciones de los resultados principales en dos direcciones. Primero, en lo concerniente al aprendizaje profesional del futuro profesor de matemáticas y segundo, en lo relativo a investigaciones futuras.

Implicaciones para el Aprendizaje Profesional del Futuro Profesor

En la literatura se reporta que en general, la conversación y reflexión son medulares en el crecimiento o desarrollo del conocimiento profesional del profesorado de matemáticas. No obstante, también se reporta la necesidad de ampliar y examinar más de cerca su aprendizaje y las condiciones que le pueden soportar, pues es muy poco lo que se sabe sobre ello. Por ejemplo, se señala que todavía falta precisar el cómo favorecer reflexiones más significativas entre los profesores (Saylor y Johnson, 2014; Smith, 2015). Al respecto, en esta investigación se identificó que la CR favorece reflexiones anticipadas, actualizadas y retrospectivas que permiten cuestionar y ampliar los significados asociados a conceptos tales como número par y generalización en futuros profesores, situándolos en relación con la práctica de enseñanza.

La revisión de la literatura también reveló la necesidad de explorar tipos de andamiajes requeridos para integrar la reflexión con la práctica profesional (Ponte y Chapman, 2016; Roberts, 2016) y en general, avanzar hacia conocer los alcances y limitaciones del habla en interacción (conversación) en el aprendizaje del profesor en relación con su práctica profesional (Horn y Kane, 2015; Louie, 2016; Andrews-Larson, Wilson y Larbi-Cherif, 2017). Los hallazgos de esta investigación revelan que los participantes reflexionaron y compartieron una visión de las matemáticas y de las implicaciones para la enseñanza y aprendizaje. Tal es el caso de cuando se plantean cómo hacer para que aprendan matemáticas los estudiantes de educación básica, en este caso, lo relacionado con la paridad de números enteros y la generalización, así como el papel de sus conocimientos y demandas cognitivas acorde al nivel educativo y área matemática en cuestión.

En el sentido anterior, se puede decir que los participantes reflexionaron respecto a las implicaciones de su práctica futura de enseñar matemáticas en relación con el estado de sus conocimientos matemáticos. Por tanto y dado que tales aspectos coinciden con algunos de los reportados en el tema de desarrollo profesional del profesor de matemáticas (Jaworski y Wood, 2008; Ponte, 2012; Rowland, Turner y Thwaites, 2014; Sowder, 2007; Tzur, 2007), tales hallazgos apuntan hacia la posibilidad de favorecer el aprendizaje y desarrollo profesional a través de la conversación reflexiva.

Dicho lo anterior, una implicación de los resultados es el uso potencial del modelo de conversación reflexiva para organizar experiencias de aprendizaje a partir de las cuales se lleve progresivamente a futuros profesores a desarrollar conocimiento matemático para la enseñanza, pues se mostró que los participantes lograron construir conocimiento relacionado con la práctica de enseñar matemáticas tomando como base la conversación y reflexión sobre sus pensamientos y acciones movilizados durante la resolución de la tarea.

Además de lo anterior, es viable pensar que la CR puede promover experiencias para el análisis y profundización en los conocimientos conceptuales y procedimentales de futuros profesores, así como promover la importancia de la reflexión individual y colectiva sobre posibles formas de desarrollar la práctica de enseñanza en búsqueda del aprendizaje de los estudiantes (Ball *et al*., 2009; Wilburne y Long, 2010), pues se mostró que los participantes reflexionaron sobre sus conocimientos de generalización y paridad de números en relación con la práctica de enseñanza futura.

Implicaciones para Investigaciones Futuras

Desde las discusiones y reflexiones de los resultados se reconoce la necesidad de más estudios sobre el conocimiento matemático para la enseñanza que desarrollan o pueden llegar a desarrollar futuros profesores cuando se les sitúa en CR relativo a sus conocimientos movilizados durante la resolución de tareas matemáticas en forma de preguntas abiertas.

A continuación, se presentan algunas sugerencias para investigaciones futuras derivadas de los hallazgos alcanzados.

- Los hallazgos muestran que los participantes poseían y se movieron entre modos de aprendizaje distintos, retroalimentándolos mutuamente a medida que avanzaban en la conversación, esto resultó provechoso para todos, particularmente en lo que respecta a una visión sobre la futura práctica de enseñanza. Por ello, se considera importante examinar de qué manera potencializar la transición entre los cuatro modos de aprendizaje del modelo de conversación reflexiva. Con este tipo de información se podría desarrollar conocimiento matemático para la enseñanza a partir del diseño e implementación de protocolos de conversación en los que se incorporen e integren los distintos modos de aprendizaje individual.
- Entre las características identificadas en el conocimiento desarrollado por los participantes no se identificaron las referidas en los subdominios: “conocimiento del horizonte matemático y del currículo”, aunque cabe decir que, sí se presentaron

momentos para su inclusión en el proceso conversacional. Por tanto, en caso de estar interesados en su promoción, sería necesario explorar de qué manera o en qué condiciones es factible hacer que los futuros profesores discutan y reflexionen en torno a dichos subdominios de conocimiento.

- Esta o parte de esta investigación se podría repetir con profesores en servicio para contrastar el tipo de conocimiento matemático para la enseñanza que desarrollan y el papel que su experiencia laboral o conocimiento práctico tiene en ello.
- Como parte del proceso conversacional-reflexivo, los participantes plantearon cuestionamientos anticipativos sobre el conocimiento matemático y pedagógico, por ejemplo, plantearon preguntas relacionadas con lo que saben y precisan saber los estudiantes sobre la generalización y paridad de números enteros, el tipo de recursos que se pueden usar y cómo usarlos en la enseñanza para favorecer su comprensión, siendo esto una oportunidad de aprendizaje sobre cómo realizar una práctica de enseñanza mejor. En tal sentido, sería necesario examinar qué resulta de cuando futuros profesores conversan reflexivamente respecto a lo que a priori saben y lo que piensan pudieran hacer sus futuros estudiantes. Ello podría complementar los resultados revelando formas en las que futuros profesores pudieran incorporar el trabajo potencial de los estudiantes como parte de su conocimiento profesional.
- Los resultados mostraron que los participantes movilizaron y establecieron relaciones entre sus conocimientos matemáticos procedimentales y conceptuales de manera adecuada, reconociendo la ventaja de dichas relaciones para su práctica de enseñanza al usar representaciones diversas. Sin embargo, faltaría indagar sobre cómo ellos explicitan ambos tipos de conocimientos y los analizan en relación con la práctica de enseñanza. Esto ayudaría a entender cómo los futuros profesores conocen y vinculan conceptos y procesos matemáticos con la enseñanza, pues algunos autores como Foster, Wake y Swan (2014) consideran que en el modelo MKT de Ball *et al*. (2008), la palabra “contenido” podría ser reemplazada por “conceptos y procesos”.

Considerando que el aprendizaje profesional del profesorado de matemáticas incluye tanto procesos de formación inicial como continua (Ponte, 2012), resultaría muy conveniente examinar el tipo de conocimiento matemático que desarrollan profesores en situación laboral versus el que desarrollan profesores en formación inicial, como fue el caso de esta investigación, para así disponer de mayor información y evidencia empírica del impacto favorable que puede llegar a tener el uso del modelo de conversación reflexiva en el desarrollo profesional de profesores de matemáticas.

6.3 Limitaciones de la Investigación

Una limitación de esta investigación está asociada a la suficiencia de los datos obtenidos y procesados. En efecto, es de notar que los resultados se basaron en una cantidad limitada de datos, pues mientras que algunos participantes prontamente se comprometieron con el proceso conversacional y empezaban a generar información, otros tardaron en hacerlo y otros más, lo hicieron prácticamente hacia el final de las sesiones trabajadas. El impacto de esta limitante es que, si bien fue posible afirmar que la CR promovió el desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza en los futuros profesores, tal afirmación pudo nutrirse más con los pensamientos y acciones de los que casi no tuvieron participación.

Otra limitante que tiene relación con la anterior es el tiempo dedicado al proceso de CR por parte de los participantes, ya que una cantidad mayor de éste pudo haber sido benéfico para que la CR se desarrollara más ampliamente y con ello, disponer de más elementos para evidenciar de manera más fehaciente cómo ésta promueve el aprendizaje y desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza. Estas limitantes podrían subsanarse ampliando el tiempo para recabar más datos que ayuden a profundizar en la descripción del papel de la CR en el aprendizaje.

También se reconoce que el uso de una sola tarea en el formato de pregunta abierta y como detonadora de la CR, es un área de oportunidad en la investigación, pues aun cuando se logró ver que las reflexiones, cuestionamientos y consensos fueron parte significativa para el desarrollo de conocimiento, ello sucedió en razón de nuevas preguntas, la mayoría de ellas impulsadas por el profesor formador. Por tanto, es de suponerse que, al considerarse más de una pregunta, no sólo puede ayudar a incrementar las interacciones conversacionales y con ello la cantidad de datos, sino aminorar la participación del profesor.

Por otra parte, si bien el uso y validez del modelo de conversación reflexiva que se obtuvo de adaptar las propuestas teóricas del aprendizaje en conversación de Kolb y Kolb

(2017) y Pask (1976), queda justificado, por una parte, desde las teorías del aprendizaje de ambas propuestas y por otra, desde el objetivo de esta investigación, es oportuno señalar que una experimentación previa pudo aportar información importante para, por ejemplo, un entendimiento mayor del papel que el profesor formador puede asumir durante el proceso de conversación reflexiva.

Un ejemplo de ese papel pudiera ser incentivar una mayor discusión de las ideas que requieran ser ampliadas o precisadas para una mejor comprensión o el sugerir analizar más finamente las producciones que se comparten, pues como se indicó en la sección 4.5, aunque los participantes no llegaron al resultado de que *la multiplicación de dos números enteros consecutivos da la suma de los primeros números pares consecutivos,* asociado a la tarea planteada y discutida, es posible que una mayor atención por parte del profesor, ya sea incentivando o sugiriendo una mayor discusión al respecto, hubiera conducido a una eventual obtención de dicho resultado.

6.4. Conclusiones de la Investigación

Como parte de esta investigación se tiene que el conocimiento matemático para la enseñanza desarrollado por los futuros profesores de matemáticas cuando conversan reflexivamente respecto al contenido temático y tareas planteadas por su profesor, posee características que se corresponden con el dominio "Conocimiento del Contenido de las Matemáticas", en específico, con los subdominios CCK y SCK , y con los subdominios KCS y KCT del dominio "Conocimiento Pedagógico del Contenido", descritos en el modelo MKT de Ball *et al*. (2008). No obstante, algunas de estas características se observaron solo en un sentido potencial, tal es el caso de los subdominios SCK y KCT, mientras que otras no fueron identificadas, como sucedió con los subdominios "HCK" y "conocimiento del currículo".

Lo anterior permite decir que, en lo general, la CR promovió el desarrollo de conocimiento profesional en los futuros profesores que incorpora aspectos esenciales del conocimiento matemático y pedagógico para su práctica de enseñanza, lo cual en sí mismo es muy favorecedor en su aprendizaje profesional. Sin embargo, si se considera al conocimiento matemático para la enseñanza como un todo conformado por los dominios y subdominios referidos antes, entonces, debe reconocerse que el conocimiento desarrollado por los participantes propiamente no es el conocimiento matemático para la enseñanza en los términos planteados por Ball *et al*. (2008), más bien debe considerársele como una parte o un tipo de dicho conocimiento.

Otro aspecto que se deriva de esta investigación es el hecho de poder considerar a la CR como un medio para suscitar reflexiones anticipadas, actuales y retrospectivas en futuros profesores, con relación a sus conocimientos matemáticos y a la práctica de enseñanza. Esto es particularmente relevante dado que en diversas investigaciones (Ponte y Chapman, 2016) no solo se enfatiza la importancia de la reflexión para el aprendizaje y desarrollo profesional de los profesores, sino que, además, han indicado que su desarrollo eficiente precisa de andamiajes para su integración con la práctica profesional (Roberts, 2016; Saylor y Johnson, 2014). En este sentido, la CR bien puede ser considerada uno de esos andamiajes que favorezcan reflexiones significativas en los profesores.

Finalmente, aunque se mostró que la CR favorece el desarrollo de conocimiento matemático para la enseñanza y se describen sus características, así como algunos episodios y secuencias de interacción conversacional que le dieron forma y fondo, resta ampliar la información sobre el tipo de mecanismos, recursos o medios orientados a garantizar una correlación entre lo que debe aprenderse durante el proceso de formación inicial y lo que está siendo requerido en el ejercicio real de la práctica de enseñanza.

Una reflexión derivada de esta experiencia de investigación es mirar a la CR como un medio de construcción social de conocimiento profesional y una herramienta para promover el desarrollo profesional-personal en futuros profesores de matemáticas, pues promovió reflexiones respecto a cómo (a priori) vincular la naturaleza teórica del conocimiento profesional con la respectiva práctica de enseñanza.

6.5. Aportes al Campo de Estudio

En esta sección se indican algunas de las aportaciones realizadas con esta investigación al campo de estudio del aprendizaje y desarrollo profesional del futuro profesor de matemáticas, en particular, en el tema de conversación reflexiva y conocimiento matemático para la enseñanza.

Aparicio, E., Sosa, L., y Cabañas-Sánchez, G. (2021). Reflective conversation and knowledge development in pre-service teachers: The case of mathematical generalisation. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST), 9*(1), 40 – 62. https://doi.org/10.46328/ijemst.977.

Aparicio, E., Sosa, L., Cabañas-Sánchez, G., y Gómez, K. (2020). Reflexive Conversation: Approach to the Professional Learning of Pre-service Mathematics Teachers. *Universal Journal of Educational Research*, *8*(5), 1797 – 1809. DOI: 10.13189/ujer.2020.080516.

Aparicio, E., y Sosa, L. (2020). Reflective Conversation as a Means to Develop Knowledge in Future Mathematics Teachers. In A.I. Sacristán, J.C. Cortés-Zavala & P.M. Ruiz-Arias, (eds.). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mexico* (pp. 1561 - 1566). Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020.

Gómez, K., **Aparicio, E.**, y Sosa, L. (2020). Conceptual and Procedural Learning in Pre-Service Mathematics Teachers During a Conversation. In A.I. Sacristán, J.C. Cortés-Zavala & P.M. Ruiz-Arias, (eds.). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mexico* (pp. 1606 - 1610). Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020.

Aparicio, E., Cabañas-Sánchez, G., y Sosa, L. (2019). Reconceptualización de la transformación geométrica en profesores de matemáticas. En Yuri Morales-López y Ángel Ruíz (eds.), *Comité Interamericano de Educación Matemática (2020). Educación Matemática en las Américas 2019*. (pp. 1021 – 1029). Medellin, Colombia.

REFERENCIAS

Akiba, M., Murata, A., Howard, C.C., y Wilkinson, B. (2019). Lesson study design features for supporting collaborative teacher learning. *Teaching and Teacher Education* 77, 352 – 365. DOI: 10.1016/j.tate.2018.10.012

Akkerman, S.F., y Bakker, A. (2011). Boundary Crossing and Boundary Objects. *Review of Educational Research, 81*(2), 132 – 169. https://doi.org/10.3102/0034654311404435

Alice, M., Heaton, R., y Williams, M. (2017). Translating Professional Development for Teachers into Professional Development for Instructional Leaders. *Mathematics teacher educator, 6*(1), 27 – 39. http://dx.doi.org/10.5951/mathteaceduc.6.1.0027.

Alles, M., Seidel, T., y Gröschner, A. (2019). Establishing a positive learning atmosphere and conversation culture in the context of a video-based teacher learning community. *Professional Development in Education, 45*(2), 250 – 263. DOI: 10.1080/19415257.2018.1430049.

Alsina, A. (2010). El aprendizaje reflexivo en la formación inicial del profesorado: un modelo para aprender a enseñar matemáticas. *Educación Matemática, 22*(1), 149 – 166.

Altricher, H., Feldman, A., Posch, P., y Somekh, B. (2008). *Teachers Investigate Their Work: An Introduction to Action Research across the Professions*. New York: Routledge.

Anderson, J., Greeno, J., Reder, L., y Simon, H. (2000). Perspectives on Learning, Thinking, and Activity. *Educational Researcher, 29*(4), 11 – 13. https://doi.org/10.3102/0013189X029004011

Andrews-Larson, C., Wilson, J., y Larbi-Cherif, A. (2017). Instructional improvement and teachers' collaborative conversations: The role of focus y facilitation. *The Teachers College Record, 119*(2), 1 – 37.

Arcavi, A. (2016). Promoviendo conversaciones entre docentes acerca de clases filmadas de Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*(15), 385 – 396.

Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación Matemática, 16* (3), 5 – 28.

Asante, J.N., y Mereku, D.K. (2012). The effect of Ghanaian pre-service teachers' content knowledge on their mathematical knowledge for teaching basic school mathematics. *African Journal of Educational Studies in Mathematics and Sciences, 10, 23 – 37.*

Bakhtin, M. M. (1986). *Speech genres and other late essays*. Austin, Texas: University of Texas Press.

Ball, D. L., y Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis y E. Simmt (eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group (pp. 3 – 14)*. Edmonton, AB: CMESG/GCEDM

Ball, D. L., Hill, H. H., y Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching: Who Knows Mathematics Well Enough To Teach Third Grade, and How Can We Decide? *American Educator*, Fall, 14 – 46.

Ball, D. L., Sleep, L., Boerst, T., y Bass, H. (2009). Combining the development of practice and the practice of development in teacher education. *Elementary School Journal, 109*(5), 458 – 474.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389 – 407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554.

Baroody, A. J., Feil, Y., y Johnson, A. R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*, 115 – 131.

Beijaard, D., Meijer, P., y Verloop, N. (2004). Reconsidering research on teachers' professional identity. *Teaching and Teacher Education, 20*(2), 107 – 128.

Bennett, C. A., Amador, J. M., y Avila, C. (2015). Framing professional conversations with teachers: Developing administrators' professional noticing of students' mathematical thinking. *NCSM Journal of Mathematics Education Leadership, 16*(2), 14 – 26.

Bernstein, B. (1990). *La construcción social del Discurso Pedagógico*. Primera Edición. Bogotá, Colombia: Editorial Producciones y Divulgaciones Culturales y Científicas.

Beswick, K., y Goos, M. (2012). Measuring pre-service primary teacher's knowledge for teaching mathematics. *Mathematics Teacher Education and Development 14,* 70 – 90.

Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., y Laborde, C. (eds.). (1996). *International Handbook of Mathematics Education,* New York, NY: Springer.

Blömeke, S., y Delaney, S. (2012). Assessment of teacher knowledge across countries: a review of the state of research, *ZDM Mathematics Education, 44*, 223 – 247. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0429-7

Bohórquez, L., y D' Amore, B. (2018). Factores que apoyan o limitan los cambios de concepciones de los estudiantes para profesor de matemáticas sobre la gestión del proceso enseñanza-aprendizaje. *AIEM Avances de Investigación en Educación Matemática, 7*(13), 85 – 103.

Brodie, K., y Shalem, Y. (2011). Accountability conversations: mathematics teachers' learning through challenge and solidarity. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*, 419 – 439. https://doi.org/10.1007/s10857-011-9178-8

Bryman, A. (2008). *Social Research Methods* (3a ed.). Oxford: Oxford University Press.

Buforn, A., Llinares, S., Fernández, C., Coles, A., y Brown, L. (2020). Pre-service teachers' knowledge of the unitizing process in recognizing students' reasoning to propose teaching decisions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1777333

Byrnes, J. P., y Wasik, B. A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. *Developmental Psychology*, *27*(5), 777 – 786. http://doi.org/10.1037/00121649.27.5.77

Campbell, M., y Stohl, H. (2017). Examining Secondary Mathematics Teachers' Opportunities to Develop Mathematically in Professional Learning Communities. *School Science and Mathematics, 117* (3 – 4), 115 – 126. https://doi.org./10.1111/ssm.12209

Carrillo, J., y Contreras, L. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza, Educación Matemática, 7(3), 79 – 92.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236 – 253, DOI: 10.1080/14794802.2018.1479981.

Carter, G., y Norwood, K. S. (1997). The relationship between teacher and student beliefs about mathematics. *School Science and Mathematics, 97*(2), 62 – 67.

Cazden, C. (1986). Classroom discourse. In M.E. Wittrock (ed.), *Handbook of Research on Teaching*, Nueva York: Macmillan Publishing Company, 432 – 463.

Chamizo, J. A., y García-Franco, A. (2013). Heuristic diagrams as a tool to formatively assess teachers' research. *Teachers and Teaching: Theory and Practice, 19*(2), 135 – 149. https://doi.org/10.1080/13540602.2013.741841

Chamoso, J. M., Cáceres, M. J., y Azcárate, P. (2012). Reflection on the teaching-learning process in the initial training of teachers. Characterization of the issues on which pre-service mathematics teachers reflect. *Teaching and Teacher Education, 28*(2), 154 – 164. https://doi.org/10.1016/j.tate.2011.08.003.

Chapman, O. (2012). Challenges in mathematics teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*, 263 – 270. DOI:10.1007/s10857-012-9223-2

Charalambous, C., y Pitta-Pantazi, D. (2016). Perspectives on priority mathematics education: Unpacking and understanding a complex relationship linking teacher knowledge, teaching, and learning. In L. English y D. Kirshner (eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3a ed., pp. 19-59). UK: Routledge.

Chauraya, M., y Brodie, K. (2018). Conversations in a professional learning community: An analysis of teacher learning opportunities in mathematics. *Pythagoras, 39*(1), a363. https://doi.org/10.4102/pythagoras.v39i1.363

Chávez, Y., y Llinares, S (2012). La identidad como producto del aprendizaje en la práctica de enseñar matemáticas en profesores de primaria. En *Investigación en educación matemática XVI*, Antonio Estepa Castro, *et al*. (eds.). Jaén: SEIEM. (pp. 187 – 196).

Chen, X., y Yang, F. (2013). Chinese teachers' reconstruction of the curriculum reform through lesson study. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 2*(3), 218–236.

Chinnappan, M., y Forrester, T. (2014). Generating procedural and conceptual knowledge of fractions by pre-service teachers. *Mathematics Education Research Journal, 26* (4), 871 – 896. http://dx.doi.org/10.1007/s13394-014-0131-x

Clarke, D. (2013). Understanding, assessing and developing children's mathematical thinking: Task-based interviews as powerful tools for teacher professional learning. In A.M. Lindmeier & A. Heinze (eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Mathematics learning across the life span* (Vol. 1, pp. 17-30). Kiel, Germany: PME.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., y Whitenack, J. (1997). Reflective Discourse and Collective Reflection. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 258 – 277. DOI:10.2307/749781

Cochran-Smith, M., y Villegas, A. M. (2015). Studying teacher preparation: The questions that drive research. *European Educational Research Journal*, *14*(5), 1–16. https://doi.org/10.1177/1474904115590211

Schmidt, W.H., Cogan, L., y Houang, R. (2011). The role of opportunity to learn in teacher preparation: An international context. *Journal of Teacher Education, 62*(2), 138-153. https://doi.org/10.1177/0022487110391987

Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6a ed.). Routledge/Taylor y Francis Group.

Contreras, L. (2009). Concepciones, creencias y conocimiento. Referentes de la práctica profesional. *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencia y Tecnología*, *1*(1), 11 – 36.

Cooney, T. J., y Wiegel, H. G. (2003). Examining the mathematics in mathematics teacher education. En A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y F. K. S. Leung (eds.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 795–828). Dordrecht: Springer.

Corbin, J., y Strauss, A. (2008). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (3a ed.). Sage Publications, Inc. DOI: https://dx.doi.org/10.4135/9781452230153

Cresswell, J.W. (2009). *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches* (3a ed.). Los Angeles: Sage.

Darling-Hammond, L., Chung, R., Andree, A., Richardson, N., y Orphanos, S. (2009). *Professional Learning in the Learning Profession: A Status Report on Teacher Development in the United States and Abroad.* Oxford: National Staff Development Council.

Darling-Hammond, L. (2000). Teacher Quality and Student Achievement: A Review of State Policy Evidence. *Education Policy Analysis Archives, 8*(1), 1 – 44.

Davydov, V. (1990). Type of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. In J. Kilpatrick (Ed.), *Soviet studies in mathematics education* (Vol. 2). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Davydov, V.V. (1995). The influence of L. S. Vygotsky on education theory, research, and practice. *Educational Researcher, 24*(3), 12 – 21. https://doi.org/10.3102/0013189X024003012

Day, C., y Sachs, J. (2004). Professionalism, Performativity and Empowerment: Discourses in the Politics, Policies and Purposes of Continuing Professional Development. En C. Day, y J. Sachs (eds.), *International Handbook on the Continuing Professional Development of Teachers* (pp. 3 - 32). Maidenhead: Open University Press.

Day, C. (1999). *Developing teachers: The challenges of lifelong learning.* Psychology Press.

Demissie, F. (2015). Promoting Student Teachers' Reflective Thinking Through a Philosophical Community of Enquiry Approach. *Australian Journal of Teacher Education, 40*(12), 1 – 13. http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2015v40n12.1

Demonty, I., Vlassis, J., & Fagnant, A. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. *Educational Studies in Mathematics, 99*(1), 1 – 19. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9820-9

Dewey, J. (1938). *Education and Experience*. New York, NY: Horace Liveright.

Dewey, J. (2007). *Cómo pensamos. La relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo.* Barcelona, España: Editorial Paidós.

Dewey, J. (1933). *How we think*. New York: Dover Publications.

Dewey, J. (1998). *Democracia y Educación. Una introducción a la filosofía de la educación*. Madrid: Ediciones Morata, S. L.

Ditchburn, G. M. (2015). Remembering Reflection in Pre-Service Teachers' Professional Experience. *Australian Journal of Teacher Education, 40*(2), 94 – 111. http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2015v40n2.7

Doerr, H. M., y Lerman, S. (2009). The procedural and the conceptual in mathematics pedagogy: What teachers learn from their teaching. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, y H. Sakonidis (eds.), *Proceedings of PME 33*, 2, (pp. 433 – 440). Salónica, Grecia.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. Van Dormolen (Eds.), *Mathematical Knowledge: Its growth through teaching* (pp. 61 – 85). Dordrecht: Springer.

Earl, L., y Timperley, H.S. (2008). Understanding how evidence and learning conversations work. En L. Earl y H.S. Timperley (eds.), *Professional learning conversations: Challenges in using evidence for improvement* (pp. 1-12). Dordrecht, Springer.

Earles, J., Parrott, A., y Knight, J. (2016). Conversations to transform geometry class. *Journal of Mathematics Teacher Education, 109*(7), 507 – 513. DOI: 10.5951/mathteacher.109.7.0507

Edwards, A. (2005). Relational agency: Learning to be a resourceful practitioner. *International Journal of Educational Research, 43*(3), 168 – 182. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2006.06.010

Eriksson, A. (2013). Positive and Negative Facets of Formal Group Mentoring: Preservice Teacher Perspectives. *Mentoring y Tutoring: Partnership in Learning, 21*(3), 272-291, DOI: 10.1080/13611267.2013.827834

Eriksson, A. (2017). Pre-service teachers’ questions about the profession during mentoring group conversations. *European Journal of Teacher Education, 40*(1), 76 – 90. https://doi.org/10.1080/02619768.2016.1251901.

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. *Mathematics Teaching: the state of the art*. http://people.exeter.ac.uk/PErnest/impact.htm

Ernest, P. (1994). Conversation as a Metaphor for Mathematics and Learning. *Proceedings of BSRLM Day Conference* (pp. 58 – 63). Manchester, England: Manchester Metropolitan University.

Even, R., y Ball, D.L. (eds.) (2009). *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*. New York: Springer.

Farnsworth, V., Kleanthous, I., y Wenger-Trayner, E. (2016). Communities of Practice as a Social Theory of Learning: a Conversation with Etienne Wenger. *British Journal of Educational Studies, 64*(2), 139-160. https://doi.org/10.1080/00071005.2015.1133799

Feiman-Nemser, S., y Parker, M. (1990). Making Subject Matter Part of the Conversation in Learning to Teach. *Journal of Teacher Education, 41*(3), 32 – 43. https://doi.org/10.1177/002248719004100305

Figueras, O., y Sáiz, M. (2019). Una mirada a las investigaciones internacionales sobre el conocimiento del profesor y problemas emergentes. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 193-214). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

Foster, C., Wake, G., y Swan, M. (2014). Mathematical knowledge for teaching problem solving: Lessons from lesson study. *Proceedings of PME 38 and PME-NA 36* (3), 97 – 104.

Garrod, S., y Pickering, M. (2004). Why is conversation so easy? *Trends in Cognitive Sciences*, *8*(1), 8 – 11. https://doi.org/10.1016/j.tics.2003.10.016

Gee, JP. (2011). *An introduction to discourse analysis: theory and method*. New York, NY: Routledge.

Gee, JP. (2008). Learning and Games. *The Ecology of Games: Connecting Youth, Games, and Learning*. Cambridge, MA: The MIT Press. DOI: 10.1162/dmal.9780262693646.021

Gellert, U. (2008). Routines and collective orientations in mathematics teachers' professional development. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(2), 93 – 110.

Glanville, R. (2008). Conversation and design. En R. Luppicini (ed.), *Handbook of conversation design for instructional applications* (capítulo V, pp. 59 – 79). Hershey, PA: IGI Global.

Godino, J.D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20,* 13 – 31.

Godino, J.D., y Batanero, C. (1998). Clarifying the Meaning of Mathematical Objects as a Priority Area for Research in Mathematics Education. In A. Sierpinska y J. Kilpatrick (eds.), *Mathematics Education as a research domain: A Search for identity* (pp. 177 – 195). Publisher: Kluwer. DOI: 10.1007/978-94-011-5190-0_11

Godino, J.D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127 – 135.

Godino, J.D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics, 60,* 3 – 36. DOI: 10.1007/s10649-005-5893-3

Goodwin, C. (1994). Professional Vision. *American Anthropologist*, *96*(3), 606 – 633.

Goos, M., y Bennison, A. (2008). Developing a communal identity as beginning teachers of mathematics: Emergence of an online community of practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(1), 41 – 60. DOI: 10.1007/s10857-007-9061-9

Gresalfi, M. S., y Cobb, P. (2011). Negotiating identities for mathematics teaching in the context of professional development. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3), 270 – 304.

Grossman, P. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York: Teachers College Press.

Grossman, P., Hammerness, K., y McDonald, M. (2009). Redefining Teaching, Re-Imagining Teacher Education. *Teachers and Teaching: Theory and Practice, 15*(2), 273 – 289. http://dx.doi.org/10.1080/13540600902875340

Guskey, T. R. (2004). Foreword. In C. Day y J. Sachs (eds.), *International handbook on the continuing professional development of teachers* (pp. 3–5). Berkshire: McGraw-Hill.

Gutiérrez, A., y Boero, P. (eds) (2006). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education Past, Present and Future.* Sense Publishers.

Hairon, S. (2016). Facilitation for professional learning community conversations in Singapore. *Asia Pacific Journal of Education, 36*(2), 285 – 300, https://doi.org/10.1080/02188791.2016.1148855

Handal, B. (2003). Teachers' Mathematical Beliefs: A Review. *The Mathematics Educator, 13*(2), 47 – 57.

Harrison, J., y Lee, R. (2011). Exploring the use of critical incident analysis and the professional learning conversation in an initial teacher education programme. *Journal of Education for Teaching, International research and Pedagogy, 37*(2), 199 – 217. https://doi.org/10.1080/02607476.2011.558285

Hill, H.C., Ball, D.L. y Schilling, S.G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372 – 400.

Hill, H., Rowan, B. y Ball, D. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371- 406.

Heritage, J. (1984). *Garfinkel and Ethnomethodology*. Cambridge: Polity Press.

Hoey, E. M. (2015). Lapses: How people arrive at, and deal with, discontinuities in talk. *Research on Language and Social Interaction, 48*, 430 – 453.

Holland, D., Lachicotte, W., Jr., Skinner, D., y Cain, C. (1998). *Identity and agency in cultural worlds.* Harvard University Press.

Hoover, M., Mosvold, R., Ball, D. L., y Lai, Y. (2016). Making progress on mathematical knowledge for teaching. *The Mathematics Enthusiast, 13*(1–2), 3 – 34.

Hopwood, N. (2016). *Professional practice and learning: times, spaces, bodies, things*. Dordrecht: Springer.

Hord, S. (2008). Evolution of the professional learning community: Revolutionary concept is based on intentional collegial learning. *Journal of Staff Development, 29*(3), 10 – 13.

Horn, I. S. (2005). Learning on the job: A situated account of teacher learning in high school mathematics departments. *Cognition y Instruction, 23*(2), 207 – 236. https://doi.org/10.1207/s1532690xci2302_2

Horn, I. S. (2012). Teachers Learning Together: Pedagogical Reasoning in Mathematics Teachers' Collaborative Conversations. In Sung Je Cho (ed.). *Proceding of the 12th International Congress on Mathematical Education (ICME-12).* (pp. 1057-1065). Korea: Chunjae Education.

Horn, I.S., y Kane, B. (2015). Opportunities for Professional Learning in Mathematics Teacher Workgroup Conversations: Relationships to Instructional Expertise. *Journal of the Learning Sciences, 24*(3), 373 – 418. https://doi.org/10.1080/10508406.2015.1034865

Horn, I.S. y Little, J.W., (2010). Attending to Problems of Practice: Routines and Resources for Professional Learning in Teachers' Workplace Interactions, *American Educational Research Journal, 47,* 181– 217. https://doi.org/10.3102/0002831209345158

Horn, I.S., Garner, B., Kane, B., y Brasel, J. (2017). A Taxonomy of Instructional Learning Opportunities in Teachers' Workgroup Conversations. *Journal of Teacher Education 2017, 68*(1), 41–54. DOI: 10.1177/0022487116676315

Hoyles, C., Kalas, I., Trouche, L., Hivon, L., Noss, R., y Wilensky, U. (2010). Connectivity and virtual networks for learning. En C. Hoyles, y J.B. (eds.), *Mathematics Education and Technology-Tethinking the Terrain* (pp. 439–462). New York: Springer.

Huang, R., y Shimizu, Y. (2016). Improving teaching, developing teachers and teacher educators, and linking theory and practice through lesson study in mathematics: an international perspective. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education 48*(4), 393 – 409. DOI: 10.1007/s11858-016-0795-7

Huinker, D., y Freckman, J. (2004). Focusing Conversations to Promote Teacher Thinking. *Teaching Children Mathematics, 10*(7), 352 – 357.

Iori, M. (2017). Objects, signs, and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics: A Duvalian perspective. *Educational Studies in Mathematics, 94*, 275-291. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9726-3

Jaworski, B. y Wood, T. (eds.) (2008). *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Vol. 4, The mathematics teacher educator as a developing professional*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Jaworski, B. (1998). Mathematics teacher research: Process practice and the development of teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(1), 3 – 31.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(2), 187 – 211.

Johnson, W.B. (2003). A Framework for Conceptualizing Competence to Mentor. *Ethics y Behavior, 13*(2), 127–151.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5 – 17). New York: Routledge.

Katz, S., Earl, L., y Ben Jaafar, S. (2009). *Building and connecting learning communities: The power of networks for school improvement*. Thousand Oaks, CA: Corwin.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 707 – 762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. & Fong, S. (2016). *Early Algebra. Research into its nature, its learning, its teaching*. Hamburg: Springer Open.

Kilpatrick, J. (1998 abril). Research in mathematics education and curriculum development in Portugal, 1986-1996. Invited plenary address at "Caminhos para a investigação em educação matemática em portugal," *the Seventh Conference on Research in Mathematics Education*, Mirandela, Portugal.

Kilpatrick, J. (2008). The development of mathematics education as an academic field. En M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, y F. Arzarello (eds.), *The first century of the International Commission of Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education* (pp. 25-39). Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani.

Kilpatrick, J., Swafford, J., y Findell, B. (eds). (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics.* Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

Kolb, D. (1984). *Experiential learning: Experience as the source of learning and development*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Kolb, A., y Kolb, D. (2017). *The Experiential Educator. Principles and Practices of Experiential Learning*. Kaunakakai, Hawaii: EBLS Press.

Koponen, M., Asikainen, M., Viholainen, A., y Hirvonen, P. (2017). How Education Affects Mathematics Teachers' Knowledge: Unpacking Selected Aspects of Teacher Knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13*(6), 1943 – 1980. DOI 10.12973/eurasia.2017.01209a

Krainer, K. (2002). Innovations in mathematics, science and technology teaching (IMST2). En M. Borovcnik y H. Kautschitsch (eds.), *Technology in mathematics teaching. Proceedings of ICTMT5 in Didaktik der Mathematik* (pp. 229 - 234). Vienna: ÖBV y HPT.

Krainer, K., y Llinares, S. (2010). Mathematics teacher education. In Peterson P, Baker E, McGaw B (eds.), *International encyclopedia of education*, *7*. Elsevier, Oxford, pp. 702 – 705.

Krainer, K. (2003). Teams, communities y networks. Editorial. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*(2), 93–105.

Krainer, K. (2006). How can schools put mathematics in their centre? Improvement = content + community + context. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 30)* (pp. 84 - 89). Praque, Czech Republic: Faculty of Education, Charles University in Prague.

Krauss, S., Baumert, J., y Blum, W. (2008). Secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge and content knowledge: Validation of the COACTIV constructs. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 40*(5), 873 – 892. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0141-9.

Kuennen, E. W., y Beam, J. E. (2020). Teaching the mathematics that teachers need to know: Classroom ideas for supporting prospective elementary teachers' development of mathematical knowledge for teaching. *The Mathematics Enthusiast*, *17*(1y2), 771 – 805.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S., y Neubrand, M. (eds). (2013). *Cognitive activation in the mathematics classroom and professional competence of teachers. Results from the COACTIV project.* New York: Springer.

Lampert, M. (2010). Learning Teaching in, from, and for Practice: What Do We Mean? *Journal of Teacher Education, 61*(1 – 2), 21 – 34.

Laursen, S., Hassi, M.L., y Hough, S. (2016). Implementation and outcomes of inquiry-based learning in mathematics content courses for pre-service teachers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(2), 256 – 275.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Nueva York: Cambridge University Press.

Leatham, K. R., y Peterson, B. E. (2010). Secondary mathematics cooperating teachers' perceptions of the purpose of student teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(2), 99 – 119.

Lerman, S. (2001). A review of research perspectives on mathematics teacher education. In F. L. Lin y T. J. Cooney (eds.), Making sense of mathematics teacher education (pp. 33-52). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Lerman, S. (2006). Socio-cultural research in PME. In Á. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 347–366). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Lewis, C., y Tsuchida, I. (1999). A Lesson Is Like a Swiftly Flowing River: How Research Lessons Improve Japanese Education. *Improving Schools, 2*(1), 48 – 56. https://doi.org/10.1177/136548029900200117

Lin, F.L., y Rowland, T. (2016). Pre-service and In-service Mathematics Teachers' Knowledge and Professional Development. In A. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. The Journey Continues* (pp. 483-513). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Llinares, S. (1991). *La formación de profesores de matemáticas*. Sevilla: GID-Universidad de Sevilla.

Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *17*, 51 – 63.

Llinares, S. (2007). *Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional*. Conferencia invitada en la XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas – JAEM. Granada, Julio.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 2,* 53 – 70.

Llinares, S. (2016). Enseñar matemáticas y aprender a mirar de forma profesional la enseñanza (Del análisis del conocimiento y práctica del profesor al desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente. In G.A. Perafan, E. Badillo, y A. Aduriz (eds.), *Conocimiento y emociones del profesorado para su desarrollo e implicaciones didácticas* (pp. 211-236). Bogotá: Editorial Aula de Humanidades.

Llinares, S., y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutierrez y P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 429–460). Rotterdam: Sense Publishers.

Llinares, S. (2019). Enseñar Matemáticas como una profesión. Características de las competencias docentes. En Yuri Morales-López y Ángel Ruíz (eds.), *Comité Interamericano de Educación Matemática (2020). Educación Matemática en las Américas 2019*. (pp. 2 – 14). Medellin, Colombia.

Llinares, S., Ivars, P., Buforn, A., y Groenwald, C. (2019). “Mirar Profesionalmente” las situaciones de enseñanza: Una competencia basada en el conocimiento. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. González (eds.), *Investigación sobre el profesor de Matemáticas: Formación, Práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 177-192). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Louie, N. (2015). Tensions in equity- and reform-oriented learning in teachers’ collaborative conversations. *Teaching and Teacher Education, 53,* 10 – 19. https://doi.org/10.1016/j.tate.2015.10.001

Lozano, L. (2008). El coaching como estrategia para la formación de competencias profesionales. *Revista Escuela de Administración de Negocios*, *63*, 127 – 137.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers’ understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum

Masingila, J., Olanoff, D., y Kimani, P. (2017). Mathematical knowledge for teaching teachers: knowledge used and developed by mathematics teacher educators in learning to teach via problem solving. *Journal of Mathematics Teacher Education* *21*(5), 429 – 450. DOI: 10.1007/s10857-017-9389-8

Mazeland, H. (2006). Conversation Analysis. *Encyclopedia of language and linguistics, 3,* 153 – 163.

McDonough, A., Clarke, B., y Clarke, D. (2002). Understanding, assessing and developing children's mathematical thinking: the power of a one-to-one interview for preservice teachers in providing insights into appropriate pedagogical practices. *International Journal of Educational Research*, *37*(2), 211 – 226. https://doi.org/10.1016/S0883-0355(02)00061-7

Moss, J. & London McNab, S. (2011). An Approach to Geometric and Numeric Patterning that Fosters Second Grade Students‟ Reasoning and Generalizing about Functions and Co-variation. In J. Cai and E. Knuth (Eds.) *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education* (pp. 277 – 301). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_16.

Muhtarom, Juniati, D., y Siswono, T.Y.E. (2019). Examining Prospective Teacher Beliefs and Pedagogical Content Knowledge towards Teaching Practice in Mathematics Class: A Case Study. *Journal on Mathematics Education*, *10*(2), 185 – 202.

Murphy, P. K., y Mason, L. (2006). *Changing Knowledge and Beliefs*. In P. A. Alexander y P. H. Winne (eds.), *Handbook of educational psychology* (p. 305–324). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Needham, K. (2016). *Professional Conversations through a Coaching Lens*. East Melbourne, VIC: Centre for Strategic Education.

Obara, S. (2010). Mathematics coaching: A new kind of professional development, *Teacher Development, 14*(2), 241–251.

Opfer, V. D., y Pedder, D. (2011). Conceptualizing teacher professional learning. *Review of educational research, 81*(3), 376 – 407. https://doi.org/10.3102/0034654311413609

Pajares, M. F. (1992). Teachers. beliefs and education research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 63*(3), 307 – 332.

Parada, S. y Pluvinage, F. (2014). Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(1), 83 – 113.

Pask, G. (1976). *Conversation theory. Applications in education and epistemology*. New York: Elsevier Scientific Publishing Company.

Pehkonen, E. (2006). What do we know about teacher change in mathematics? In L. Haeggblom, L. Burman, y A.-S. Roej-Lindberg (eds.), *Kunskapens och laerandets villkor. Festskrift tillaegnad professor Ole Bjoerkqvist* (pp. 77–87). Specialutgåva Nr 1/2006. Vasa: Åbo Akademi, Pedagogiska fakulteten.

Perrenoud, Ph. (2004). *Diez nuevas competencias para ensenar. Invitación al viaje*. Barcelona: Graó y México, Secretaría de Educación Pública (traducido al español de Dix nouvelles compétences pour enseigner. Invitation au voyage. Paris: ESF, 1999).

Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(1), 63 – 94. http://dx.doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8.

Ponte, J.P. (1999). Teachers` beliefs and conceptions as a fundamental topic in teacher education. In K. Krainer, y F. Goffree (eds.), *On research in teacher education. From study of teaching practices to issues in teacher education* (pp. 43-50). Osnabrück: Forschungsintitut für Mathematikdidaktik.

Ponte, J. P. (2011). Teachers' knowledge, practice, and identity: Essential aspects of teachers' learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*, 413 – 417.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática (*pp. 83 – 98). Barcelena: Graó.

Ponte, J. P. (2017). Discussões coletivas no ensino-aprendizagem da Matemática. En GTI (Ed.), *A prática dos professores: Planificação e discussão coletiva na sala de aula* (pp. 33 – 56). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., y Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225 – 263). New York, NY: Routldge.

Ponte, J. P., y Chapman, O. (2016). Prospective Mathematics Teachers' Learning and Knowledge for Teaching. In L. English y D. Kirshner (eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (3rd ed., pp. 275 – 296). New York, NY: Routldge.

Potari, D. y Ponte, J. P. (2017). Current Research on Prospective Secondary Mathematics Teachers' Knowledge. In G. Kaiser (ed.), *The Mathematics Education of Prospective Secondary Teachers Around the World* (pp. 3-15). Springer, Cham. DOI 10.1007/978-3-319-38965-3_2

Potari, D., Sakonidis, H., Chatzigoula, R., y Manaridis, A. (2010). Teachers' and researchers' collaboration in analysing mathematics teaching: A context for professional reflection and development. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(6), 473 – 485. https://doi.org/10.1007/s10857-010-9161-9.

Preciado-Babb, A., Metz, M., y Marcotte, C. (2015). Awareness as an Enactivist Framework for the Mathematical Learning of Teachers, Mentors and Institutions. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 47*(2), 257 – 268. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0657-0.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 4*(2), 37 – 62.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal, 26*(2), 257 – 277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Raelin, J. A. (2007). Toward an epistemology of practice. *Academy of Management Learning y Education, 6*(4), 495 – 519.

Ramos - Rodríguez, E., Flores, P., Ponte, J.P., y Moreno, A. (2015). Desarrollo Profesional del Docente de Matemáticas a través de sus Tareas para el Aula propuestas en un Curso de Formación. *Bolema, 29*(51), 389 – 402. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a20

Rasmussen, K. (2016). Lesson study in prospective mathematics teacher education: didactic and paradidactic technology in the post-lesson reflection. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(4), 301 – 324. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9299-6.

Raths, J. (2001). Teachers' beliefs and teaching beliefs. *Early Chidhood Research y Practices ECRP, 3*(1). Recuperado de http://ecrp.uiuc.edu/v3n1/raths.html.

Reeder, S., & Bateiha, S. (2016). Prospective elementary teachers' conceptual understanding of integers. *Investigations in Mathematics Learning, 8*(3), 16-29.

Rico, L. (2015). Matemáticas escolares y conocimiento didáctico. En P. Flores y L. Rico (Coords.). *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 21- 40). Madrid: Pirámide.

Riscanevo Espitia, L., y Jiménez Espinosa, A. (2017). La experiencia y el aprendizaje del profesor de matemáticas desde la perspectiva de la práctica social. *Praxis y Saber*, *8*(18), 203 - 232. https://doi.org/10.19053/22160159.v8.n18.

Rittle-Johnson, B. (2019). Iterative development of conceptual and procedural knowledge in mathematics learning and instruction. In J. Dunlosky y K. A. Rawson (eds.), *The Cambridge handbook of cognition and education* (p. 124 – 147). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/9781108235631.007

Rittle-Johnson, B., y Schneider, M. (2012). Developing Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics. In R. Cohen Kadosh y A. Dowker (Eds.), *Oxford handbook of numerical cognition*. Oxford University Press.

Roberts, P. (2016). Reflection: A Renewed and Practical Focus for an Existing Problem in Teacher Education. *Australian Journal of Teacher Education*, *41*(7), 19 – 35. http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2016v41n7.2.

Robson, C. (2011). *Real world research* (3a ed.). Chichester: Wiley.

Roesken, B. (2011). *Hidden dimension in the professional development of mathematics teachers*. Rotterdam: Sense Publishers.

Routman, R. (1999). *Conversations. Strategies for Teaching, Learning, and Evaluating*. Heinemann Educational Books.

Rowland, T., y Ruthven, K. (2011). Introduction: mathematical knowledge in teaching. In T. Rowland, y K. Ruthven (eds.), *Mathematical Knowledge in teaching* (1 – 5). Dordrecht: Springer.

Rowland, T., Turner, F., y Thwaites, A. (2014). Research into teacher knowledge: a stimulus for development in mathematics teacher education practice. *ZDM: Mathematics Education*, *46*(2), 317 – 328. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0564-9

Sacks, H. (1992). *Lectures on Conversation*, *Volumes 1 y 2*. Editado por G. Jefferson y E.A. Schegloff. Oxford y Cambridge, MA: Basil Blackwell.

Sánches, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, *5*(4), 129 – 145.

Santagata, R., y Guarino, J. (2011). Using video to teach future teachers to learn from teaching. *ZDM Mathematics Education, 43*, 133 – 145. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0292-3.

Saylor, L. L., y Johnson, C. C. (2014). The Role of Reflection in Elementary Mathematics and Science Teachers' Training and Development: A Meta-Synthesis. *School Science and Mathematics, 114*(1), 30 – 39.

Schegloff, E. A. (2007). *Sequence organization in interaction*. Cambridge: Cambridge University Press.

Scherer, P., y Steinbring, H. (2007). Noticing children's learning processesteachers jointly reflect on their own classroom interaction for improving mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(2), 157- 185. DOI: 10.1007/s10857-006-0004-7

Schoenfeld, A. H. (1998). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education, 4*(1), 1 – 94. DOI: 10.1016/S1080-9724(99)80076-7

Schoenfeld, A.H. (2006). What Doesn't Work: The Challenge and Failure of the What Works Clearinghouse to Conduct Meaningful Reviews of Studies of Mathematics Curricula. *Educational Researcher,35*(2), 13 – 21.

Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think*. New York: Routledge.

Schoenfeld, A. (2011). *How we think: a theory of goal-oriented decision making and its educational applications.* New York: Routledge.

Schoenfeld, A., y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. In D. Tirosh, y T. L. Wood (eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321 – 354). Rotterdam: Sense Publishers.

Schraw, G., y Olafson, L. (2002). Teachers' epistemological world views and educational practices. *Issues in Education: Contributions from Educational Psychology, 8*(2), 99 – 148.

Schuck, S., Aubusson, P., y Buchanan, J. (2008). Enhancing teacher education practice through professional learning conversations. *European Journal of Teacher Education, 31*(2), 215 – 227. https://doi.org/10.1080/02619760802000297

Scott, B. (2001). Gordon Pask's conversation theory: A domain independent constructivist model of human knowing. *Foundations of Science, 6*(4), 343 – 360.

Senk, S.L., Peck, R., Bankov, K. y Tatto, M.T. (2008). Conceptualizing and Measuring Mathematical Knowledge for Teaching: Issues from TEDS-M, an IEA cross-national study. Ponencia presentada en el *11th International Congress on Mathematical Education*, Monterrey, México, julio de 2008.

Senk, S.L., Tatto, M.T., Reckase, M., Rowley, G., Peck, R., y Bankov, K. (2012). Knowledge of future primary teachers for teaching mathematics: An international comparative study. *ZDM: Mathematics Education, 44*(3), 307 – 324. DOI: 10.1007/s11858-012-0400-7

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. New York: Basic Books.

Schön, D. (1987). *Educating the reflective practitioner: toward a new design for teaching and learning in the professions.* San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Shön, D. (1992). Designing as reflective conversation with the materials of a design situation. *Research in Engineering Design, 3*(3), 131 – 147.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4 – 14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*, 1–22.

Shulman, L. S. (2005). *The Signature Pedagogies of the Professions of Law, Medicine, Engineering, and the Clergy: Potential Lessons for the Education of Teachers*. Delivered at the Math Science Partnerships (MSP) Workshop: “Teacher Education for Effective Teaching and Learning” Hosted by the National Research Council’s Center for Education, February 6 – 8, Irvine, CA.

Silverman, J., y Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 499 – 511. https://doi.org/10.1007/s10857-008-9089-5.

Simoncini, K. M., Lasen, M., y Rocco, S. (2014). Professional dialogue, reflective practice and teacher research: Engaging early childhood pre-service teachers in collegial dialogue about curriculum innovation. *Australian Journal of Teacher Education, 39*(1), 27 – 44. http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2014v39n1.3.

Skott, J. (2015). The Promises, Problems, and Prospects of Research on Teachers’ Beliefs. In H. Fives y M. G. Gill (eds.), *International Handbook of Research on Teachers’ Beliefs* (pp. 13-31). Routledge Taylor yFrancis Group: New York and London.

Smith, C. R. (2015). *Continuous professional learning community of mathematics teachers in the western cape: developing a professional learning community through a school-university partnership*. Unpublished doctoral dissertation, University of the Western Cape, Bellville, South Africa.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. K. Lester, Jr. (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 157–223). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Star, J., y Newton, K. J. (2009). The nature and development of experts’ strategy flexibility for solving equations. *Zentralblatt Didaktik für Mathematik (ZDM), 41*(5), 557 – 567.

Stoll, L. (2014). *Stimulating professional learning and learning conversations.* Paper for International Association for Scholastic Excellence Educational Leadership Summit, Singapore, 17 April 2013.

Storrs, D., Putsche, L., y Taylor, A. (2008). Mentoring Expectations and Realities: An Analysis of Metaphorical Thinking Among Female Undergraduate Proteges and their Mentors in a University Mentoring Programme. *Mentoring y Tutoring: Partnership in Learning 16*(2), 175 187. DOI: 10.1080/13611260801916499

Sullivan, P. (2008). Knowledge for teaching mathematics. In P. Sullivan y T. Wood (eds.), *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (pp. 1–9). Rotterdam: Sense Publishers.

Sztajn, P., Campbell, M.P., y Yoon, K.S. (2011). Conceptualizing professional development in mathematics: Elements of a model. *PNA, 5*(3), 83 – 92.

Tall, D. (2008). Using Japanese lesson study in teaching mathematics. *Scottish Mathematical Council Journal, 38*, 45 – 50.

Tatto, M. (Ed). (2013). *The Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M). Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries: Technical Report*. Amsterdam: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

Tenorth, E. (2006). Professionalitaet im Lehrerberuf. Ratlosigkeit der Theorie, gelingende Praxis. *Zeitschrift fuer Erziehungswissenschaft, 9*(4), 580 – 597.

Thanheiser, E., Browning, C., Edson, A., Lo, J., Whitacre, I., Olanoff, D. y Morton, C. (2014). Prospective Elementary Mathematics Teacher Content Knowledge: What Do We Know, What Do We Not Know, and Where Do We Go? *The Mathematics Enthusiast, 11*(2), 433 – 448.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127–146). New York: Macmillan.

Thompson, A. G., Philipp, R. A., Thompson, P. W., y Boyd, B. A. (1994). Calculational and conceptual orientations in teaching mathematics. In A. Coxford (ed.), *Yearbook of the NCTM* (pp. 79-92). Reston, VA: NCTM.

Timperley, H. (2015). *Professional Conversations and Improvement-Focused Feedback: A Review of the Research Literature and the Impact on Practice and Student Outcomes*. Melbourne: Australian Institute of Teaching and School Leadership, AITSL.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: the case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 5 – 25.

Tirosh, D., y Wood, T. (eds.). (2008). *The international handbook of mathematics teacher education, volume 2. Tools and processes in mathematics teacher education*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Toom, A., Husu, J., y Patrikainen, S. (2015). Student teachers' patterns of reflection in the context of teaching practice. *European Journal of Teacher Education*, *38*(3), 320 – 340. http://dx.doi.org/10.1080/02619768.2014.943731.

Turner, F., y Rowland, T. (2011). The Knowledge Quartet as an Organizing Framework. In T. Rowland y K. Ruthven (eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching* (pp. 195-212). NY: Springer Science+Bussiness Media B. V.

Tzur, R. (2007). Fine grain assessment of students' mathematical understanding: Participatory and anticipatory stagesin learning a new mathematical conception. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(3), 273 – 291. DOI: 10.1007/s10649-007-9082-4

UADY, (2013). *Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas*. Recuperado el 12 de junio de 2019, del sitio web de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán: https://www.matematicas.uady.mx

Van Esch, G., y Tillema, E. (2015). The Learning Potential of Mentoring Conversations. In Tillema H., Westhuizen G.J., Smith K. (eds.), *Mentoring for Learning*, (pp. 155 – 179). Rotterdam: Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-058-1_8

Van Nieuwerburgh, C. (2012). Coaching in education: An overview. En C. van Nieuwerburgh (ed.), *Professional coaching series. Coaching in education: Getting better results for students, educators, and parents* (pp. 3–23). Karnac Books.

Voss, T., Kleickmann, T., Kunter, M., y Hachfeld, A. (2013). Mathematics teachers' beliefs. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss, y M. Neubrand (eds.), *Cognitive activation in the mathematics classroom and professional competence of teachers: Results from the COACTIV project* (pp. 249 - 271). (Mathematics Teacher Education; Vol. 8). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5149-5_12

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language*. Cambridge, MA: MIT Press.

Vygotsky, L. S. (1987). Thinking and speech. En R. W. Rieber, y A. S. Carton (eds.), *The collected works of L. S. Vygotsky. Vol. 1. Problems of general psychology* (pp. 39–285). Plenum.

Warren, E., Trigueros, M., & Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez, G. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education. The journey continues* (pp. 73-108). Rotterdam: Sense Publishers.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning, and identity*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad*. Ediciones Paidós: Barcelona, España.

Wilburne, J. M., y Long, M. (2010). Secondary Pre-Service Teachers' Content Knowledge for State Assessments: Implications for Mathematics Education Programs. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers*, *1*. Recuperado de: https://eric.ed.gov/?id=EJ872484

Wood, T., Jaworski, B., Krainer, K., Tirosh, D., y Sullivan, P. (2008). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education.* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Wooffitt, R. (2005). *Conversation Analysis and Discourse Analysis. A Comparative and Critical Introduction.* Thousand Oaks, CA: SAGE Publications Inc.

Xu, H., y Pedder, D. (2015). Lesson Study: An international review of the research. En Dudley, P. (ed.). *Lesson Study: Professional Learning for our time*. London: Routledge, 24 – 47.

Zazkis, R. (1998). Odds and ends of odds and evens: An inquiry into students' understanding of even and odd numbers. *Educational Studies in Mathematics, 36*(1), 73-89.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational studies in mathematics, 49*(3), 379 – 402. https://doi.org/10.1023/A:1020291317178

Zaslavsky, O., y Leikin, R. (2004). Professional development of mathematics teacher educators: Growth through practice. *Journal of mathematics teacher education*, *7*(1), 5 – 32. https://doi.org/10.1023/B:JMTE.0000009971.13834.e1

Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of task that facilitate teacher learning. In B. Jaworski y T. Wood (eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*. *Handbook of Mathematics Teacher Education* (Vol. 4, pp. 93 – 114). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Zuya, H.E. (2017). Prospective Teachers' Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: The Case of Algebra. *American Journal of Educational Research*, *5*(3), 310 – 315. http://pubs.sciepub.com/education/5/3/12