UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

EL USO DE LA HISTORIA COMO UNA HERRAMIENTA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: ESTUDIO DE CASO SOBRE LAS CONEXIONES MATEMÁTICAS AL RESOLVER TAREAS ASOCIADAS A LA CLASIFICACIÓN DE GRUPOS FINITOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTORADO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA:
M. EN C. ERIKA ZUBILLAGA GUERRERO

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. FLOR MONSERRAT RODRÍGUEZ VÁSQUEZ

CODIRECTORES DE TESIS:
DRA. MARÍA TERESA GONZÁLEZ ASTUDILLO
DR. JESÚS ROMERO VALENCIA

Chilpancingo, Gro., Junio de 2020

Índice general

Índice de tablas

Índice de figuras

El uso de la historia como una herramienta en educación matemática: estudio de caso sobre las conexiones matemáticas al resolver tareas asociadas a la clasificación de grupos finitos

Tesis de doctorado

Erika Zubillaga Guerrero

Directora de tesis

Dra. Flor Monserrat Rodríguez Vásquez

Codirectores de tesis

Dra. María Teresa González Astudillo

Dr. Jesús Romero Valencia

2020

Centro de Investigación en Matemática Educativa

Facultad de Matemáticas

Universidad Autónoma de Guerrero

Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, México

Esta investigación fue financiada por el

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Becaria Conacyt

245130

A Erick y Erick Leonel, por su paciencia y amor incondicional

Agradecimientos

Agradezco principalmente a mi asesora, Dra. Flor Monserrat Rodríguez Vásquez, por brindarme su apoyo y confianza desde el momento en que le expresé mi interés por realizar mis estudios de doctorado; por su paciencia y comprensión en etapas difíciles que afronté durante este periodo y por compartir sus conocimientos y su experiencia en el desarrollo de este trabajo doctoral.

A la Dra. María Teresa González Astudillo por su invaluable apoyo y paciencia, por recibirme amablemente durante el periodo de la estancia académica y de investigación en la Universidad de Salamanca, su conocimiento, orientación y amplia experiencia favorecieron significativamente en mi formación y en la culminación de este trabajo.

Al Dr. Jesús Romero Valencia por su confianza, compromiso e interés en mi trabajo de investigación. Agradezco también por su paciencia, crítica y tiempo destinado en las útiles discusiones que me permitieron avanzar en la comprensión de contenidos matemáticos, así como en la escritura articulada de las ideas, sin su apoyo el logro de la publicación no hubiera sido posible.

Al Dr. Armando Morales Carballo, Dr. Gustavo Martínez Sierra y Dr. Alejandro Ricardo Garciadiego Dantan por su disposición y tiempo dedicado en la revisión de esta memoria doctoral, por sus comentarios y aportaciones a mi trabajo.

Al Dr. Antonio Oller Marcén por su colaboración en la localización de fuentes originales de matemáticas, agradezco por su tiempo, amabilidad e interés en esta investigación.

A la Dra. Myriam Codes Valcarce y su hermosa familia, por su amistad y confianza. Hicieron de mi estancia en Salamanca una extraordinaria experiencia.

A los compañeros Landy, Melby, Angie, Safira, Eddie, Esteban, Noé, Camilo, Gustavo y Jhonatan Arenas, por su amistad, apoyo y por compartir conmigo momentos inolvidables.

A los estudiantes de Licenciatura de la Facultad de Matemáticas: Lucero, Olga, Pedro Cuevas, Isela, Alexander, Juan, Pedro Juárez, Elizabeth, Kenia, Isamar, Adilene, Erika y Brian, por su tiempo y colaboración en diversos proyectos.

A mi familia, por su amor y apoyo incondicional. Especialmente a mis padres Ofelia y Luis, mi abuelita Isabel, mis hermanos Ma. Isabel y Luis Enrique, y mi cuñada Alondra. Gracias por sus consejos y motivarme siempre.

Finalmente, a mis suegros Edith y Arturo, por su apoyo y paciencia, sobre todo por el amor brindado a Erick Leonel en mi ausencia.

Introducción

Los cursos de álgebra abstracta son relevantes para la formación de un licenciado en matemáticas, como lo prueba su presencia en el currículo (Fukawa-Connelly, 2012; Schumacher & Siegel, 2015). Además, la importancia de aprender álgebra abstracta es ampliamente reconocida (Hazzan, 1999). Sin embargo, investigaciones en Educación Matemática han evidenciado diversas dificultades que presentan estudiantes universitarios al abordar contenidos del álgebra abstracta (Larsen, 2013).

En particular, el concepto de isomorfismo es importante en álgebra abstracta (Lajoie, 2000). En la literatura en Educación Matemática se pueden identificar escasos estudios que dan cuenta de las dificultades de los estudiantes en la comprensión de este concepto (Leron, Hazzan y Zazkis, 1995; Lajoie, 2000; Melhuish, 2018), así como algunas propuestas para su enseñanza (Thrash & Walls, 1991; Larsen 2009, 2013).

La investigación histórica es un enfoque diferente a partir del cual se han abordado diversas problemáticas en Educación Matemática. En este trabajo se parte del reconocimiento de que en los estudios históricos de los desarrollos conceptuales se revelan elementos lógicos y epistemológicos fundamentales en el proceso de constitución teórica que posibilitan, entre otras cosas, una mejor comprensión del concepto, y evidencian aspectos significativos de la actividad matemática de construcción (Anacona, 2003). Tomando en cuenta la categorización de los usos de la historia propuesta por Jankvist (2009), en esta investigación consideramos el uso de la historia como una *herramienta*.

El objetivo general que nos planteamos en este estudio fue realizar un análisis histórico y epistemológico del concepto isomorfismo de grupos a partir de fuentes originales, así como analizar su potencial para promover conexiones matemáticas en estudiantes universitarios. En este estudio las conexiones matemáticas son entendidas en el mismo sentido que García-García y Dolores-Flores (2017), como “un proceso cognitivo mediante el cual una persona relaciona o asocia dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real” (p. 3).

Para la consecución del objetivo general se realizó un estudio del desarrollo histórico del concepto isomorfismo de grupos durante el siglo XIX basado en fuentes secundarias. A partir de la información obtenida en este estudio se llevó a cabo un análisis histórico y epistemológico de este concepto basado en fuentes originales. Por otra parte, identificamos los aspectos del análisis histórico del concepto isomorfismo que podrían promover conexiones matemáticas y que podían considerarse para un diseño de tareas dirigidas a estudiantes universitarios. Finalmente, a partir de un estudio de caso identificamos y describimos las conexiones matemáticas que hizo una estudiante de Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero al resolver tareas asociadas a la clasificación de los grupos de orden primo y de orden cuatro, y que se basaron en un análisis histórico y epistemológico de este concepto en la obra de Arthur Cayley (1854a).

Quince conexiones intramatemáticas fueron identificadas en este estudio de caso. Estas conexiones fueron asociadas con conceptos como: grupo cíclico, subgrupo, teorema de Lagrange, orden de un elemento, isomorfismo y las relaciones entre ellos. Los resultados de esta investigación son consistentes con los tipos de conexiones identificadas por Businskas (2008), Eli et al. (2011), Singletary (2012) y García-García y Dolores-Flores (2017): *diferentes representaciones*, *comparación a través de características comunes*, *característica/propiedad*, *procedimientos*, *relaciones parte-todo*, *implicaciones*, *derivación* y *significado*.

La presente memoria está estructurada en cuatro capítulos. En el Capítulo 1 se presenta una revisión de literatura en Educación Matemática sobre investigaciones que han considerado como objeto de estudio el concepto isomorfismo y que dan cuenta de las dificultades en la comprensión de este objeto matemático. También, se presenta una revisión de fuentes secundarias que proporcionó información general relevante sobre el surgimiento, desarrollo y consolidación del concepto isomorfismo, que posibilitó la identificación de los matemáticos involucrados en este proceso y la identificación de dos fuentes originales objeto de análisis: Cayley (1854) y Jordan (1870). Finalmente, se presenta el planteamiento del problema y los objetivos de la investigación.

El Capítulo 2 constituye la primera etapa de la investigación relacionada con un análisis histórico y epistemológico del concepto isomorfismo en las obras de Cayley (1854a) y Jordan (1870). Este capítulo está integrado por tres escritos, en el primero se discute una propuesta metodológica para el análisis de documentos históricos. El segundo corresponde a un artículo publicado en relación con un análisis histórico y epistemológico del concepto isomorfismo en la obra de Camille Jordan y el tercero es un manuscrito en revisión sobre un análisis histórico y epistemológico del concepto grupos isomorfos en la obra de Arthur Cayley.

El Capítulo 3 constituye la segunda etapa de la investigación, que considera el estudio de conexiones matemáticas. Este capítulo comprende los elementos teóricos que sustentan esta etapa de la investigación, los aspectos metodológicos, el análisis de los datos y resultados.

Finalmente, el Capítulo 4 se presentan las conclusiones, algunas reflexiones en relación con las limitaciones del estudio e investigación futura.

Después de los capítulos se incluyen las referencias bibliográficas.

Capítulo 1
Diseño de la investigación

1.1. Antecedentes

Para determinar los antecedentes a esta investigación se ha realizado una revisión bibliográfica que hace uso de la metodología propuesta por Gómez-Luna, Fernando-Navas, Aponte-Mayor y Betancourt-Buitrago (2014); la cual está compuesta por tres fases fundamentales:

- *Fase 1. Búsqueda de la información*. Debe realizarse desde una perspectiva estructurada y profesional; es importante que el investigador localice trabajos con fundamentos y también reconocidos, es decir, que hayan sido revisados cuidadosamente por expertos antes de ser publicados. En particular, en este estudio se llevó a cabo una búsqueda en las bases de datos Scopus, ERIC, ELSEVIER y Springer.
- *Fase 2. Organización de la información*. Consiste en organizar de manera sistemática la documentación encontrada. Específicamente, se ha utilizado el software Mendeley Desktop a fin de organizar los documentos obtenidos en la fase anterior.
- *Fase 3. Análisis de la información*. El investigador indaga sobre cuáles son los documentos más útiles para el tema de investigación y se espera identificar el aporte a realizar. En esta fase el investigador debe tener un pensamiento crítico y debe efectuarse en paralelo con la primera fase, puesto que es un proceso constante. En particular, se llevó a cabo una selección y clasificación de los diferentes estudios que se han desarrollado sobre el álgebra abstracta en general, y del concepto isomorfismo de grupos en particular, para mostrar la necesidad y pertinencia de este trabajo.

En concreto, se han localizado trabajos sobre los orígenes y evolución de la teoría de grupos, así como investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje que se han desarrollado alrededor del tópico de interés. Esto ha permitido, por una parte, identificar las fuentes primarias[1] a analizar en una fase posterior; así como delimitar el campo de acción de la investigación, para asegurar su originalidad en el campo de la Educación Matemática.

En la *Tabla 1* se muestra una clasificación de la bibliografía identificada, organizada de acuerdo con la metodología de Gómez-Luna, Fernando-Navas, Aponte-Mayor y Betancourt-Buitrago (2014); y posteriormente se desarrolla el análisis de cada una de las investigaciones de acuerdo con su clasificación.

Tabla 1. Clasificación de la revisión bibliográfica

Fase 1. Búsqueda de la información	Fase 2. Material seleccionado	Fase 3. Análisis de la información
Revistas: *Educational Studies in Mathematics; The Journal of Mathematical Behavior; Journal for Research in Mathematics Education; Mathematics and Computer Education.* Bases de datos consultadas: Springer, ERIC, Scopus, ELSEVIER.	Hazzan, O. (2001). Reducing abstraction. The case of constructing an operation table for a group. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(2), 163-172. Lajoie, C. (2001). Students' difficulties with the concepts of group, subgroup and group isomorphism. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.): *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, pp. 384-391). Melbourne, Australia: The University of Melbourne. Larsen, S. (2013). A local instructional theory for the guided reinvention of the group and isomorphism concepts. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(4), 712-725. Larsen, S. (2009). Reinventing the concepts of group and isomorphism: The case of Jessica and Sandra. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*(2-3), 119-137. Leron, U., Hazzan, O. & Zazkis, R. (1995). Learning group Isomorphism: A Crossroads of many Concepts. *Educational Studies in Mathematics, 29*(2), 153-174.	Clasificación 1. Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto isomorfismo de grupos.

[1] De acuerdo con la manera en que los autores llegaron a un conocimiento de los datos que registran, las fuentes se clasifican en primarias (serán aquellas donde el autor pudo ser un testigo de ojo y oído de los acontecimientos que narra o incluso haber sido partícipe de ellos) y secundarias (serán aquellas donde el autor pudo haber recogido su información de personas que fueron testigos, directos o indirectos, de los hechos en cuestión).

	Melhuish, K. (2018). Three Conceptual Replication Studies in Group Theory. *Journal for Research in Mathematics Education*, *49*(1), 9-38. Thrash, K. R. & Walls, G. L. (1991). A Classroom Note on Understanding the Concept of Group Isomorphism. *Mathematics and Computer Education*, *25*(1), 53-55. Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: the need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 101-119. Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, 56(2–3), 209–234.	
Revistas: *Mathematics Magazine; Journal of Mathematical Behavior*. Editoriales: MIT Press. Bases de datos consultadas: ELSEVIER; Springer.	Kleiner, I. (1986). The evolution of group theory: A brief survey. *Mathematics Magazine*, *59*(4), 195-215. Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, *14*(1), 15-39. Wussing, H. (1984). *The Genesis of the Abstract Group Concept: A Contribution to the History of the Origin of Abstract Group Theory*. Massachusetts: The MIT Press.	Clasificación 2. Estudios sobre los orígenes y evolución de la teoría de grupos.

A continuación, se van a desarrollar los dos apartados mencionados en la *Tabla 1*.

1.1.1. Clasificación 1. Enseñanza y aprendizaje del concepto isomorfismo de grupos

La cantidad de investigaciones que se han enfocado en la enseñanza y el aprendizaje del concepto en cuestión, aunque reducida resulta significativa por la información que brinda sobre la problemática reconocida al abordar el concepto isomorfismo de grupos. En ese sentido, las investigaciones correspondientes a esta categoría describen las dificultades presentadas por los estudiantes en la comprensión de este concepto matemático, así como algunas propuestas para la instrucción que se han realizado al respecto. Por mencionar un ejemplo de estas últimas, Thrash y Walls (1991) sugieren una estrategia de enseñanza basada en el trabajo con tablas de Cayley para desarrollar una comprensión de este tópico en un curso de introducción al álgebra abstracta.

Desde la perspectiva teórica APOE, acrónimo de Acción-Proceso-Objeto-Esquema, un estudio pionero sobre los procesos mentales involucrados en la comprensión del concepto isomorfismo fue el realizado por Leron, Hazzan, y Zazkis (1995) quienes se enfocaron en tres distinciones importantes de este concepto desde el punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje: 1) la distinción entre la relación de ser isomorfo (relación de equivalencia) y el objeto de isomorfismo, 2) probar la existencia o no existencia de un isomorfismo, y 3) el tratamiento del isomorfismo en abstracto y en un caso específico. Leron, Hazzan y Zazkis evidenciaron dificultades de los estudiantes para determinar si dos grupos (finitos) dados son isomorfos y en la construcción de un isomorfismo entre grupos específicos. En este sentido, algunos estudiantes suelen basarse exclusivamente en propiedades de grupo como el orden de los elementos y el orden del grupo para decidir si son isomorfos. Por ejemplo, tras calcular el orden de los elementos de los grupos y realizar la comparación concluyen que, si dos grupos tienen elementos del mismo orden, entonces son isomorfos, razonamiento que lleva a considerar que el mismo orden de los elementos implica isomorfismo. Basados también en el orden de los elementos, la construcción de una correspondencia se vuelve compleja para los estudiantes cuando se tiene más de una forma posible de hacer coincidir los elementos del mismo orden.

Desde un punto de vista cognitivo, Leron et al. (1995) discutieron sobre la pertinencia de la introducción del isomorfismo mediante su versión ingenua (dos grupos son isomorfos si son el mismo excepto por la notación; al considerar un grupo G cualquiera y hacer un cambio de nombre de sus elementos así como su operación, se obtiene una copia isomorfa del mismo grupo, el grupo G'), antes de la presentación en su definición formal (un isomorfismo de un grupo $(G, \circ)$ a un grupo $(G', \circ')$ es una función f uno a uno de G sobre G', que satisface $f(a \circ b) = f(a) \circ' f(b)$ para todo a, b en G. Dos grupos son isomorfos si existe un isomorfismo de uno al otro), como una alternativa para tratar con la complejidad del concepto. Los investigadores sugirieron que la relación *ser isomorfo* es mucho más simple de formular (versión ingenua) y aprender que *el objeto de isomorfismo* (isomorfismo como homomorfismo biyectivo), ya que es intuitiva y no requiere la comprensión del concepto función. En ese sentido, ellos propusieron invertir el orden que en la enseñanza frecuentemente se sigue al abordar este concepto, que va de presentar primero homomorfismo, luego isomorfismo (un tipo especial de homomorfismo), y finalmente la relación de dos grupos de ser isomorfos (la existencia de un isomorfismo de uno al otro). Al respecto, Lajoie (2001) no coincidió en su totalidad con esta sugerencia y argumentó que si una idea de *similitud* (idea intuitiva de isomorfismo) no está asociada con la *preservación de operaciones*, no es de mucha utilidad, salvo en ciertos contextos o para demostrar que dos grupos no son isomorfos como lo evidenció su estudio.

El trabajo de Lajoie (2000, 2001) se centró en el estudio de dificultades en estudiantes universitarios en el tratamiento de los conceptos de grupo, isomorfismo de grupos, subgrupo y grupos cíclicos. Para ello, realizó un estudio histórico basado en fuentes secundarias y un análisis conceptual con la finalidad de anticipar algunas dificultades de los estudiantes. Respecto a isomorfismo, Lajoie identificó cinco dificultades principales: (1) En dar la interpretación que los expertos dan a la idea de que los grupos isomorfos son similares, es decir, aunque los estudiantes suelen referirse a los grupos isomorfos con expresiones como similares o equivalentes, realmente se basan en una interpretación literal de estas palabras y buscan o perciben parecidos entre los grupos isomorfos. Los estudiantes suelen considerar propiedades como el orden de los elementos, el orden del grupo o la naturaleza de las operaciones y los elementos en sí; mientras que la preservación de las operaciones no es percibida a partir de la idea de grupos similares, del mismo modo que en la definición formal. (2) En demostrar (formalmente) que dos grupos son isomorfos (incluso en los casos más simples). (3) En considerar más de un isomorfismo posible entre dos grupos isomorfos. Algunos estudiantes consideran que sólo hay una manera de hacer corresponder a dos grupos isomorfos. (4) En ver al isomorfismo como una relación de equivalencia en grupos y como una correspondencia particular entre dos grupos isomorfos. Finalmente, (5) en reconocer una utilidad para el concepto de isomorfismo en álgebra.

De acuerdo con los resultados de Lajoie (2001, p. 387), la definición conceptual[2] de grupos isomorfos de los estudiantes participantes contenía “piezas dispersas” de la definición formal

[2] Tall y Vinner establecen la definición conceptual como “una forma de palabras usadas para especificar ese concepto”; pudiendo ser personal o formal, donde esta última es la aceptada por la comunidad matemática en general. El término imagen conceptual se refiere a “la estructura cognitiva total que está asociada con el

que no permitieron que dicha componente de la imagen conceptual fuera funcional, lo cual provocó dificultad en ellos para determinar si dos grupos dados eran isomorfos. En ese sentido, a través de la definición formal la propiedad de preservación de las operaciones no fue percibida, esto implicó que al utilizar dicha definición los estudiantes no se preocuparan por su verificación.

Haciendo uso del marco teórico de reducción de la abstracción, Hazzan (2001) analizó los procesos mentales involucrados cuando estudiantes universitarios se enfrentan a la tarea de construir una tabla de operaciones que represente un grupo de orden cuatro. Las estrategias mentales a las que recurrieron los estudiantes evidenciaron una tendencia a usar un *procedimiento canónico*. Específicamente, cuando los estudiantes construyeron la tabla de operaciones para cuatro elementos, utilizaron el procedimiento basado en las leyes de cancelación de un grupo sin saber por qué funcionaba: *en una tabla de operaciones de un grupo, los elementos no se repiten en filas ni en columnas* versus la exploración de las propiedades de un grupo abstracto, lo que pudo haber favorecido en la identificación de que sólo hay dos grupos (salvo isomorfismo) de este orden. Por otra parte, de acuerdo con Hazzan, la *adopción de una perspectiva local* como una forma de reducir el nivel de abstracción se evidenció cuando ninguno de los estudiantes utilizó el argumento de que el grupo solicitado debería ser isomorfo a alguno de los dos grupos de orden cuatro (el cíclico y el no cíclico), sino que para resolver la tarea se centraron en la exploración de los elementos del grupo y sus propiedades.

En relación con la escritura de pruebas, Weber (2001) identificó que estudiantes universitarios, en contraste con estudiantes de doctorado, encuentran particularmente difícil probar o refutar que pares de grupos son isomorfos, a pesar de saber lo que es una prueba y poseer un conocimiento sintáctico adecuado, evidenciándose así que conocer la definición y los teoremas básicos asociados con los grupos isomorfos no garantiza que puedan ser aplicados adecuadamente. Con relación al conocimiento estratégico de los estudiantes de doctorado, utilizaron técnicas de pruebas adecuadas para determinar que los grupos propuestos eran iguales o encontraron en qué eran diferentes. Por ejemplo, intentaron mostrar

---

concepto, que incluye todas las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados. Se construye a lo largo de los años a través de experiencias de todo tipo, cambiando a medida que el individuo encuentra nuevos estímulos y madura” (Tall & Vinner, 1981, p.152).

que los grupos eran esencialmente el mismo o cuando no eran isomorfos, comparaban las propiedades estructurales de los grupos con la finalidad de encontrar una propiedad que un grupo poseía y el otro no. En contraste, los intentos de pruebas producidas por aquellos estudiantes universitarios que utilizaron como estrategia la construcción de un isomorfismo explícito entre dos grupos, trataron de construir una biyección arbitraria (en muchos casos sin éxito), pero prestaron poca atención a si dicha biyección era homomorfismo. Esta dificultad en estudiantes universitarios fue identificada nuevamente en los estudios de caso exploratorios de Weber y Alcock (2004), quienes argumentaron que dichos estudiantes habían comprendido el concepto de isomorfismo a un nivel formal y carecían de una comprensión intuitiva o semántica de este objeto matemático. Es decir, en la construcción de pruebas asociadas con los grupos isomorfos, emplearon exclusivamente su razonamiento formal que involucró el uso de la definición, donde las inferencias que se pueden extraer se limitan a un conjunto de procedimientos bien definidos (a partir de una serie de manipulaciones lógicas).

La investigación de Larsen (2009) formó parte de un estudio más amplio: Larsen (2013), donde el autor describió una teoría local de instrucción para apoyar la reinvención guiada de los conceptos formales de grupo e isomorfismo, mediante una exploración inicial de las simetrías de una figura geométrica. Larsen (2009) llevó a cabo tres experimentos de enseñanza con parejas de estudiantes y, en relación con la comprensión del concepto de isomorfismo identificó dificultades en la determinación de cuándo dos grupos son esencialmente el mismo (misma estructura cuyos elementos no necesariamente están denotados de manera diferente), y en la construcción de la definición formal de isomorfismo. Para los estudiantes resultó natural definir isomorfismo en términos de función biyectiva, mientras que la propiedad de preservación de las operaciones no surgió fácilmente.

Por su parte, Melhuish (2018) evidenció que a pesar de que los estudiantes son capaces de evocar y usar algunas propiedades invariantes como argumento para determinar si dos grupos son isomorfos (en similitud con otras investigaciones tales como Leron et al. (1995), Lajoie (2000), Weber (2001) y Weber y Alcock (2004)), realmente puede no ser claro por qué su verificación es relevante. Es decir, los estudiantes aparentemente podrían estar produciendo pruebas semánticas, desde el punto de vista de Weber y Alcock (2004); sin embargo, éstas no necesariamente implican una comprensión relacional (conocimiento de qué hacer y por qué).

A manera de conclusión

Las dificultades de los estudiantes universitarios con el tratamiento del concepto isomorfismo de grupos en un primer curso de álgebra abstracta han sido bien documentadas (Hazzan, 2001; Lajoie, 2000, 2001; Larsen, 2009; Leron, Hazzan, y Zazkis, 1995; Weber, 2001; Weber y Alcock, 2004).

- Conceptualización de los grupos isomorfos como equivalentes o similares basada exclusivamente en las similitudes superficiales entre dos grupos como la naturaleza de los elementos y las operaciones, el orden del grupo y de los elementos, y propiedades como la conmutatividad o ciclicidad (Lajoie, 2000, 2001; Leron, Hazzan, y Zazkis, 1995).
- Probar o refutar que dos grupos son isomorfos (Lajoie, 2000, 2001; Leron, Hazzan, y Zazkis, 1995; Weber, 2001; Weber y Alcock, 2004).
- En la interpretación de la definición formal de grupos isomorfos, los estudiantes consideran que existe un único isomorfismo posible entre dos grupos isomorfos. Además, la propiedad de preservación de las operaciones no es percibida a partir de la definición (Lajoie, 2000, 2001; Larsen, 2009; Leron, Hazzan, y Zazkis, 1995; Melhuish, 2018; Weber, 2001; Weber y Alcock, 2004).
- Determinar cuántos grupos hay de orden cuatro [salvo isomorfismo] (Hazzan, 2001; Larsen, 2009).

A partir de la revisión de la literatura destacamos dos aspectos importantes:

Primero, bajo la consideración de que las dificultades conceptuales tales como las relacionadas con la definición, las pruebas o la abstracción, reflejan parte de la comprensión de los estudiantes, la revisión de la literatura presentada previamente nos ha incentivado a considerar los estudios históricos y epistemológicos, ya que a partir de estos es posible rescatar aspectos conceptuales que son fundamentales para la comprensión (Anacona, 2003).

Específicamente, en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra abstracta nos interesamos en el uso de la historia para favorecer en la comprensión del concepto isomorfismo de grupos, debido a que no ha sido uno de los objetivos centrales en las investigaciones anteriores.

Leron, Hazzan, y Zazkis (1995) y Lajoie (2000) destacaron aspectos epistemológicos como la estrecha relación entre los conceptos grupo abstracto e isomorfismo a lo largo de la historia, y evidenciaron de esta manera que una noción matemática no se desarrolla de forma aislada, sino en conexión con otras y además muestra el esfuerzo de los matemáticos en la formulación de las definiciones, sobre la complejidad y sofisticación de estos conceptos que permiten entender por qué los estudiantes los encuentran complejos y requieren tiempo y esfuerzo para lograr su adquisición y comprensión. Sin embargo, se deduce de la revisión de la literatura que recurrir a las fuentes originales puede favorecer en la adquisición de un conocimiento profundo sobre los aspectos conceptuales asociados al desarrollo del objeto matemático isomorfismo de grupos.

Segundo, para probar la comprensión conceptual, Melhuish y Fagan (2018) señalan que “los estudiantes deben reflejar conexiones conceptuales precisas para participar en tareas con estructuras *desconocidas* (como grupos modulares u operaciones binarias desconocidas) y clases generales de *objetos* (como todos los grupos en lugar de un ejemplo específico)” (p. 21).

“Las conexiones matemáticas permiten ver las matemáticas como un campo integrado y no como una colección de partes separadas” (García-García y Dolores-Flores, 2017, p. 1). Sin embargo, los estudiantes suelen ver los temas matemáticos como desvinculados uno de otros y no ven que lo que han aprendido en un dominio matemático podría emplearse para comprender otros dominios (Jaijan y Loipha, 2012). En ese sentido, consideramos que las dificultades que pueden emerger a partir de una enseñanza que favorece una presentación acabada y puramente formal de los conceptos, que no prioriza los aspectos epistemológicos y los procesos de construcción teórica; podrían estar asociadas con las dificultades de los estudiantes para comprender cómo los conceptos están interrelacionados.

Basados en la revisión de la literatura concerniente a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra abstracta y del concepto isomorfismo de grupos en particular, identificamos que ninguno de estos estudios ha considerado a las conexiones matemáticas como objeto de estudio en relación con el uso de la historia. De acuerdo con Sierra, González, y López (2002), una de las funciones del análisis histórico es que muestra el contexto de problemas en el que han aparecido los conceptos. Esto supondría, entre otras cosas, la obtención de información sustancial para el planteamiento de tareas basadas en el análisis histórico y epistemológico (que favorece los aprendizajes conceptuales y no sólo los algorítmicos) que podría potenciar la comprensión de los estudiantes, y que corresponde a una de las innovaciones que plantea este trabajo doctoral.

Finalmente, en esta sección se describieron algunas dificultades que presentan estudiantes universitarios en relación con el concepto isomorfismo en un primer curso de algebra abstracta. Su conocimiento resulta de interés en esta investigación para contrastar posteriormente con los resultados del estudio histórico (a partir del uso de fuentes originales) y el diseño de las tareas. Lo anterior justifica la considerable atención brindada a los resultados que reportan investigaciones en torno a este tema.

1.1.2. Clasificación 2. Estudios sobre los orígenes y evolución de la teoría de grupos

Las fuentes secundarias consultadas sobre el desarrollo del concepto de grupo muestran un panorama general sobre la complejidad que su tratamiento representó para los matemáticos de finales del siglo XVIII y del siglo XIX (Kleiner, 1986; Sfard, 1995; Wussing, 1984). Por su parte, Kleiner (1986) remontó el comienzo de la teoría de grupos a 1770, con el trabajo de J. L. Lagrange (1736-1813), mientras que una definición abstracta de grupo fue dada por primera vez en 1854 por Arthur Cayley (1821-1895), y la primera definición axiomática fue proporcionada por Walther von Dyck (1856-1934) en 1882.

El álgebra hasta aproximadamente el final del siglo XVIII había consistido en el estudio de las soluciones de ecuaciones algebraicas, y fue hasta el siglo XX que se convirtió en el estudio de sistemas abstractos y axiomáticos (Kleiner, 1986). Durante esta transición, uno de los importantes resultados fue el establecimiento de las principales estructuras y conceptos algebraicos, que llegarían a convertirse en las bases para dicha evolución. Así, además de la teoría de grupos, emergieron las estructuras de anillos conmutativos, campos, anillos no conmutativos y espacios vectoriales. Respecto a la teoría de grupos, se reconocen cuatro raíces históricas (igualmente importantes) en su evolución: el álgebra clásica, la teoría de números, la geometría y el análisis (Kleiner, 1986).

Inicialmente, el concepto de grupo se utilizó en cada uno de los anteriores dominios matemáticos (álgebra clásica, teoría de números, geometría y análisis) de manera implícita, y a excepción del álgebra clásica eso continuó siendo así hasta el último tercio del siglo XIX. Fue en este dominio del *álgebra clásica* que, de acuerdo con Wussing (1984), el *germen* del concepto de grupo (como un grupo de permutaciones) apareció por primera vez en la Memoria *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, escrita por Lagrange en 1770/71. En esta obra, Lagrange se interesó en la posibilidad de resolver ecuaciones de grado igual o mayor a cinco por medio de radicales; aunque no tuvo éxito, planteó la conjetura de la no solubilidad de ecuaciones de grado superior a cuatro por radicales, mediante los métodos conocidos para la solución de ecuaciones de grado menores a cinco. Además, fue la primera vez que se estableció una conexión entre la resolución de una ecuación algebraica y las permutaciones de sus raíces. En las *Réflexions* se puede identificar el origen de lo que actualmente se conoce como teorema de Lagrange en la teoría de grupos (Kleiner, 1986).

Los resultados de Lagrange fueron aceptados lentamente, tuvieron que transcurrir cerca de 30 años después de sus *Réflexions* para que el matemático Paolo Ruffini (1765-1822) presentara el primer intento serio de una demostración de la insolubilidad de la ecuación general de grado n, para $n > 4$ por medio de radicales en 1799. Fue gracias a los trabajos de Ruffini que van de 1799 a 1813, que la teoría de permutaciones se convirtió en un componente importante de la teoría de ecuaciones. Sin embargo, debido al desarrollo rápido de la teoría de permutaciones, éstas llegaron a ser estudiadas como un campo independiente de la teoría de las ecuaciones durante la primera mitad del siglo XIX (Wussing, 1984). Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) realizó importantes contribuciones que favorecieron a este perfeccionamiento.

Los métodos y resultados conocidos hasta entonces gracias a Lagrange, Ruffini y Cauchy contribuyeron en cierta forma a que Neils Henrich Abel (1802-1829) probara que era imposible resolver por radicales las ecuaciones de grado superior al cuarto (1824-1826). Abel observó que, si bien la solución algebraica de ecuaciones no era posible en general, si lo era para determinadas ecuaciones. En términos modernos Abel demostró que, si "el grupo de permutaciones de las raíces es conmutativo, entonces la solución de la ecuación $\varphi(x) = 0$ es reducible a la solución de ecuaciones auxiliares de menor grado, y estas, a su vez, son resolubles por radicales" (Wussing, 1984, p. 101).

En la *teoría de números*, Carl F. Gauss (1777-1855) realizó importantes aportaciones en este dominio matemático, siendo considerado el precursor de la teoría de grupos abelianos finitos. En sus *Disquisitiones Arithmeticae* de 1801, proporcionó los primeros ejemplos de esos grupos que aparecieron en cuatro formas diferentes: el grupo aditivo de los enteros módulo *n*; el grupo multiplicativo de los enteros que son primos relativos con *n*, módulo *n*; el grupo de clases de equivalencia de las formas cuadráticas binarias con coeficientes enteros; y el grupo de las raíces *n*-ésimas de la unidad (Kleiner, 1986; Wussing, 1984). Respecto a las raíces *n*-ésimas de la unidad, que consideró en relación con la ecuación ciclotómica, demostró que formaban un grupo cíclico. Sin embargo, de acuerdo con Wussing (1984) y Kleiner (1986), Gauss no tuvo el concepto de un grupo abstracto o el de un grupo abeliano finito. En sus *Disquisitiones* no existe un método unificador de teoría de grupos que aplique a todos los casos (grupos) que Gauss consideró.

Por otra parte, en la *geometría*, el interés de los matemáticos de mediados del siglo XIX fue inicialmente, tratar de clasificar las relaciones y conexiones internas entre las diversas geometrías y métodos geométricos, lo cual llevó al estudio de las relaciones geométricas y, en particular, al estudio de las propiedades de las figuras que permanecen invariantes bajo diversas transformaciones. Después, el foco fue hacia el estudio de las transformaciones en sí mismas, y estas llegaron a ser objetos de estudios especializados. Posteriormente, se investigaron las conexiones lógicas entre transformaciones, que llevó al problema de clasificar las transformaciones, y finalmente, a la clasificación de las geometrías (euclidianas y no euclidianas), llevado a cabo por Felix Klein (1849-1925) en 1872, en su *Erlangen Program*; y logrado sólo a través del uso *explícito* de grupos de transformaciones (Wussing, 1984; Kleiner, 1986).

Finalmente, en el dominio matemático del *análisis*, las investigaciones de Sophus Lie (1842-1899) sobre grupos continuos de transformaciones fueron importantes en la preparación del camino para la definición abstracta de grupo. En 1874 introdujo lo que hoy se conocen como los grupos de Lie. El objetivo de Lie fue crear una teoría para resolver ecuaciones diferenciales similar a la creada por Évariste Galois (1811-1832) para las ecuaciones algebraicas. Su trabajo se basó en la idea de que, dada una ecuación diferencial, se debería encontrar un grupo de transformaciones que dejara invariante a la ecuación y por medio del estudio de las propiedades del grupo, simplificar la ecuación para resolverla. Lie observó que casi todas las ecuaciones diferenciales que habían sido integradas por los métodos más antiguos permanecían invariantes bajo grupos continuos que se pueden construir fácilmente, esto lo llevó a considerar, en general, ecuaciones diferenciales que permanecen invariantes bajo un grupo continuo dado y a investigar las posibles simplificaciones de dichas ecuaciones que resultan de las propiedades conocidas del grupo dado (Kleiner, 1986). A pesar de que Lie no logró dar una formulación completa de tal teoría, su trabajo fue fundamental para el desarrollo posterior de la teoría de grupos. Por otra parte, en este dominio matemático, también Henri Poincaré (1854-1912) y Klein comenzaron su trabajo sobre funciones automorfas (que son generalizaciones de funciones del análisis elemental, como la circular, hiperbólica, elíptica, y otras) y los grupos asociados con ellas en 1876 (Kleiner, 1986).

Puede distinguirse una *segunda etapa* posterior al uso implícito del concepto de grupo en diversos dominios matemáticos, la cual se caracterizó por la *emergencia explícita* del concepto, es decir, toda vez que fue nombrado y dotado de una definición, puede observarse cómo se desarrolló de manera independiente en diversos contextos y condujo a teorías especializadas de grupo: el álgebra clásica llevó a la teoría de grupos de permutaciones; la teoría de números hacia la teoría de grupos abelianos; y la geometría y el análisis a la teoría de grupos de transformaciones.

En la revisión de la literatura se identificó la noción implícita de *isomorfismo de grupos* desde los trabajos de Galois, y ya de forma explícita, por primera vez, en el *Traité* de Camille Jordan (1838-1922) en 1870; así como los primeros contextos especializados en los que este concepto se introdujo explícitamente, a saber, en los grupos de permutaciones y los grupos de transformaciones. Además, estos estudios muestran que el concepto isomorfismo jugó un rol importante en la transición de las teorías especializadas a la teoría general de los grupos.

Anteriormente se mencionó que el trabajo de Lagrange en 1770 inició el estudio de las *permutaciones* en conexión con el estudio de la solución de ecuaciones, pero fue Galois, quien realizó los avances conceptuales fundamentales, y quien es considerado por muchos como el fundador de la teoría de grupos (de permutaciones) (Kleiner, 1986). El trabajo de Galois permaneció por mucho tiempo ignorado y calificado de incomprensible y tardó en ser asimilado por sus contemporáneos; pues mientras este se realizó alrededor de 1830, fue hasta 1846 (después de su muerte) que algunas de sus obras fueron publicadas por Joseph Liouville (1809-1882) en la *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* y la *Lettre á Auguste Chevalier* que datan de 1831 y 1832, respectivamente. Así mismo, en 1866, Joseph-Alfred Serret (1819-1885) presentó la teoría de Galois en la tercera edición de su *Curs d'algèbre supérieure*. Sin embargo, fue con la publicación de Jordan en 1870, *Traitè des substitutions et des équations algébriques*, que el trabajo de Galois fue valorado.

Galois fue el primero en utilizar el término *grupo* en un sentido técnico, como un conjunto de permutaciones cerrado bajo multiplicación (Wussing, 1984). También utilizó ampliamente los conceptos de subgrupo y grupo cociente, pero no utilizó algún término para nombrarlos y tampoco presentó alguna definición. Para nuestro trabajo, resulta particularmente importante el señalamiento de Wussing (1984, p. 230), de que "una alusión al isomorfismo entre grupos de permutaciones" puede encontrarse implícito en el trabajo de Galois de 1831.

Como se mencionó previamente, Cauchy también realizó importantes contribuciones a la teoría de permutaciones: "antes de Cauchy, las permutaciones no eran un objeto de estudio independiente, sino un dispositivo útil para la investigación de soluciones de ecuaciones polinomiales" (Kleiner, 1986, p. 202). Introdujo por primera vez en 1815 la notación de permutación en que los arreglos son escritos uno debajo de otro, entre paréntesis; definió el producto de dos permutaciones como la composición de dos permutaciones; introdujo el término *permutación idéntica*; la notación de potencia y el término *grado*, que indicaba el *orden* de una permutación. También designó el inverso de una permutación con la expresión *permutación inversa*.

Por otra parte, Jordan publicó en 1870 su *Traité des substitutions et des équations algébriques*, el cual tuvo mucha influencia en el desarrollo de la teoría de grupos (de permutaciones). En su *Traité*, entre otras cosas, Jordan definió explícitamente el concepto de grupo (equivalente a la definición dada por Galois) de la misma manera que en su

Commentaire sur Galois en 1869. Jordan también hizo explícito y dejó claro el significado esencial de isomorfismo y homomorfismo en el contexto de grupos de permutaciones.

> Se dice que un grupo Γ es *isomorfo* a un grupo G si es posible establecer entre sus sustituciones una correspondencia tal que: 1º a cada sustitución de G corresponda una única sustitución de Γ y para cada sustitución de Γ una o más sustituciones de G; 2º al producto de cualesquiera dos sustituciones de G corresponde el producto de sus respectivas sustituciones correspondientes. (…) Se dice que un isomorfismo es *meriédrico* si muchas sustituciones de G corresponden a la misma sustitución de Γ, y *holoédrico* en el caso contrario. (Jordan, citado por Wussing, 1984, p. 143, nuestra traducción).

Con relación a los *grupos de transformaciones*, Klein, al igual que Jordan, se interesó en los grupos de movimientos. Sin embargo, Klein fue el primero en ver las isometrías mismas como elementos de un grupo, mientras que Jordan consideró las isometrías exclusivamente en términos de permutaciones (Wussing, 1984). Fue en colaboración con Lie que Klein en el verano de 1870 interesados en los trabajos de Galois y Jordan, comenzaron a estudiar diversos grupos de transformaciones de objetos analíticos y geométricos (Wussing, 1984). Los intereses de ambos finalmente divergieron, aunque siempre ligados al estudio de los grupos. Klein aplicó la noción de grupo de transformaciones al estudio de las geometrías y posteriormente inició una serie de investigaciones sobre grupos discretos de transformaciones fraccionales lineales, que son importantes en el estudio de funciones automorfas (Wussing, 1984).

En 1872, a propósito de su ingreso como profesor de la Universidad de Erlangen, Klein presentó su conferencia titulada *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, ahora conocida como el *Erlangen Program*, donde introdujo varios grupos y sus geometrías asociadas, tales como el grupo proyectivo, el grupo de movimientos rígidos, entre otros, y creó con ello una novedosa concepción, tanto del concepto de grupo como el de geometría (pues a partir de entonces debería ser tratada como el estudio de sus invariantes). En su *Erlangen Program* proporcionó una definición de grupo de transformaciones equivalente, vista de forma abstracta, a la propuesta por Jordan en su *Traité*; y aunque introdujo explícitamente la noción de transformación inversa, no la incluyó en esta definición. También retomó la noción de grupos isomorfos introducida anteriormente por Jordan (distinta en cuestión de la terminología) y utilizó la expresión *grupos similares*.

> Se dice que dos grupos de transformaciones son *similares* si podemos asociar las transformaciones de un grupo a las transformaciones del otro grupo para que la composición de las transformaciones correspondientes produzca las transformaciones correspondientes. (Klein, citado por Wussing, 1984, p.186, nuestra traducción).

En 1884, en su famoso *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Klein definió, entre otras cosas, los conceptos de grado de un grupo finito, subgrupo y de isomorfismo de grupos, en el contexto de grupos de isometrías; asimismo en este trabajo apareció el 4-grupo de Klein. Así, teniendo presente la relación entre los grupos de isometrías y los grupos de permutaciones, proporcionó una definición de grupos isomorfos que superó la presentada en su *Erlangen Program*, así como aquella dada por Jordan en el contexto de grupos de permutaciones, en la que caracterizó a los grupos isomorfos como *abstractamente idénticos*.

> Se dice que dos grupos son isomorfos si podemos establecer una correspondencia sobre sus operaciones S, S' tal que si S_i corresponde a $S_{i'}$ y S_k a $S_{k'}$, entonces S_iS_k corresponde a $S_{i'}S_{k'}$. Si el isomorfismo es uno a uno, entonces lo llamamos *holoédrico*. (Klein, citado por Wussing, 1984, p. 203, nuestra traducción).

Klein también descubrió y formuló explícitamente los diversos isomorfismos entre los grupos de isometrías de poliedros regulares y los grupos de permutaciones. Por su parte, Lie desarrolló su teoría de los grupos continuos y la aplicó al estudio de ecuaciones diferenciales. Todo esto condujo hacia una visión más amplia del concepto de grupo (de los grupos de permutaciones y grupos abelianos a los grupos de transformaciones); se dieron ejemplos de grupos infinitos; y se extendió el campo de aplicación del concepto de grupo (teoría de números, teoría de ecuaciones algebraicas, geometría, teoría de ecuaciones diferenciales, y la teoría de funciones).

Finalmente, el rol de *la abstracción en el estudio de los grupos* favoreció el surgimiento del concepto general de grupo; luego al desarrollo y a la axiomatización de la teoría de grupos. Fue el matemático Inglés Arthur Cayley quien diera la primera definición abstracta de un grupo (finito) en 1854 en su artículo titulado *On the theory of groups, as depending on the symbolic equation* $\theta^n = 1$. Cayley introdujo la tabla de multiplicación de un grupo de orden n y afirmó que un grupo estaba totalmente determinado por su tabla de multiplicación (Kleiner, 1986). Además, mencionó algunas aplicaciones del concepto de grupo, por ejemplo, a la teoría de los cuaterniones y la teoría de matrices (Wussing, 1984). Sin embargo, la definición de grupo de Cayley no logró atraer la atención de sus contemporáneos y tuvo que pasar bastante tiempo para que el concepto de grupo abstracto comenzara a ser reconocido por la comunidad matemática de finales del siglo XIX. En 1878 demostró el ahora conocido como teorema de Cayley: cualquier grupo abstracto es isomorfo a un grupo de permutaciones. Aunque no hizo referencia explícita al isomorfismo de grupos en sus trabajos, la evidencia sugiere que era consciente de este concepto, debido al reconocimiento de la equivalencia de los grupos que implicaban la sustitución de letras. Cayley realizó un trabajo magistral con las tablas de multiplicación para determinar todos los grupos de orden cuatro y seis, y fue el primero en declarar que sólo existen dos de cada uno, además notó que el grupo cíclico de orden n "es en todos los aspectos análogo al sistema de las raíces de la ecuación ordinaria $x^n - 1 = 0$" (Kleiner, 1986, p. 209).

Otro matemático que proporcionó una definición de grupo abstracto fue Heinrich Weber (1842-1913) en 1882. Hasta ese momento las definiciones de grupo abstracto habían sido aplicadas sólo a grupos finitos; y en particular, en dos de las teorías especializadas: los grupos de permutaciones y los grupos abelianos finitos; pero ninguno había tomado en cuenta el desarrollo del concepto de grupo en la geometría, específicamente, en los grupos de transformaciones infinitas. Fue von Dyck en 1882 quien, influenciado por los trabajos de Cayley y la estrecha relación con Klein, en la primera parte de su *Gruppentheoretishe Studien* combinó consistentemente las tres principales raíces históricas de la teoría de grupos (la teoría de ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la geometría) por medio del concepto de grupo abstracto, propuso una definición de un grupo que incluía a los grupos infinitos y fue el primero en requerir explícitamente la existencia de un inverso en su definición de grupo: "para nuestras consideraciones, requerimos que un grupo que contiene la operación T_k también debe contener su inversa T_k^{-1}". (von Dyck, citado por Wussing, 1984, p. 243, nuestra traducción).

De acuerdo con von Dyck:

> *Las siguientes investigaciones apuntan a continuar el estudio de las propiedades de un grupo en su formulación abstracta. En particular, esto planteará la cuestión de hasta qué punto estas propiedades tienen un carácter invariante presente en todas las diferentes realizaciones del grupo, y la cuestión de qué conduce a la determinación exacta de su contenido esencial de teoría de grupos*.
>
> Deseo enfatizar aquí, desde el principio, que este enfoque no tiene como objetivo renunciar a las ventajas *individuales* que pueden derivarse de una formulación particular de cada problema en particular. Para cada problema específico, tenemos a nuestra disposición un tesoro de información específico (parece apenas necesario mencionar las preguntas algebraicas, teoría de funciones y teoría de números relacionadas con problemas de teoría de grupos) que se pueden utilizar con ventaja en cualquier caso. *Pero son precisamente estas conexiones especiales las que requieren una discusión sobre la medida en que se basan puramente en la teoría de grupos frente a otras propiedades del problema planteado*.
>
> Estas consideraciones dieron lugar a las siguientes investigaciones. Por lo tanto, aunque no afirmo originalidad para el *tema* de las siguientes líneas, creo que la forma de la pregunta permite ver *las propiedades conocidas* de un grupo desde un nuevo punto de vista y las define con mayor claridad. (von Dyck, citado por Wussing, 1984, p. 242, nuestra traducción).

Von Dyck enfatizó que “de esta manera todos los grupos [...] isomorfos se incluyen en un *solo* grupo” y que “la *esencia* de un grupo ya no se expresa por una forma particular de sus operaciones sino por sus relaciones mutuas” (von Dyck, citado por Wussing, 1984, p. 241, nuestra traducción).

Fue Weber quien en 1893 en su artículo *Die allgemeinen Grundlangen der Galois’schen Gleichungstheorie* proporcionó la primera definición axiomática consistentemente abstracta de un grupo, misma que incluía a los grupos infinitos. Además, Weber introdujo otras definiciones como la de conmutatividad e isomorfismo, y enfatizó la relación entre grupos y campos.

Ejemplos de estudios en un entorno abstracto son los trabajos de Otto Hölder (1859-1937), quien contribuyó de manera significativa a la teoría de grupos. En 1889 en su obra *Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen*, introdujo la noción abstracta de un grupo cociente y completó la prueba del teorema Jordan-

Hölder, gracias a una concepción más abstracta de los grupos y más específicamente, gracias a una visión más abstracta de la naturaleza de los elementos (Wussing, 1984). En 1893 en su obra *Die Gruppen der Ordnungen* p^3, pq^2pqr, p^4, Hölder introdujo abstractamente el concepto de un automorfismo de un grupo, y fue el primero en estudiar los grupos simples de forma abstracta. "Después de la invención del concepto de grupo, nada podía impedir que el álgebra se convirtiera en una ciencia de estructuras abstractas" (Sfard, 1995, p. 32). De esta manera, el siglo XX fue testigo de un movimiento renovador del álgebra, surgieron nuevas estructuras y teorías algebraicas: la teoría de anillos, la teoría de campos, la teoría de módulos, la teoría de representaciones de grupos y de álgebras, por mencionar algunas.

A manera de conclusión

A partir de las fuentes secundarias consultadas en relación con el desarrollo del concepto isomorfismo de grupos, destacamos su rol importante en la adopción de un punto de vista abstracto de la noción de grupo, cuya evolución tomó más de un siglo. En el desarrollo y axiomatización de la teoría de grupos, la primera etapa se caracterizó por el uso implícito de la noción de grupo en al menos cuatro áreas de las matemáticas: álgebra clásica, teoría de números, geometría y análisis. Matemáticos como Lagrange, Gauss y Abel obtuvieron y demostraron diversos resultados y proporcionaron ejemplos de grupos (finitos) sin ser reconocidos como tales. Una segunda etapa se caracterizó por el uso explícito del concepto de grupo (finito), el reconocimiento de instancias específicas de grupos (por ejemplo, permutaciones, raíces n-ésimas de la unidad, formas cuadráticas binarias, por mencionar algunos) y la búsqueda de otras (por ejemplo, grupos de transformaciones). Esto llevó al desarrollo de teorías especializadas como la teoría de grupos de permutaciones, la teoría de grupos abelianos y la teoría de grupos de transformaciones. Finalmente, la tercera etapa se caracterizó por la formulación de los postulados de un grupo, que consideró los casos finitos e infinitos.

En relación con el concepto isomorfismo de grupos, en seguida enlistamos las descripciones/definiciones y propiedades provistas por los matemáticos influyentes en el surgimiento y desarrollo de dicho concepto durante el siglo XIX y que fueron identificadas en el análisis histórico.

Arthur Cayley (1821-1895)

Cayley no hizo referencia explícita al concepto isomorfismo de grupos en sus obras; sin embargo, hay indicios que muestran que era consciente de dicho concepto. El análisis de fuentes secundarias sugiere que Cayley consideró exclusivamente grupos de cardinalidad finita y no hizo referencia a la preservación de las operaciones (propiedad de homomorfismo).

El primer trabajo de Cayley sobre teoría de grupos data de 1854, donde presentó lo que puede considerarse el primer intento de definir un grupo axiomáticamente. Además, Cayley reconoció la generalización de este concepto y sugirió por primera vez que un grupo puede estar completamente determinado por su tabla de operaciones (tabla de Cayley). Sin usar el término de grupos isomorfos declaró, por ejemplo, que el grupo (cíclico de orden n): $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}, (\alpha^n = 1)\}$ "es en todos los aspectos análogo al sistema de las raíces de la ecuación binomial ordinaria $x^n - 1 = 0$" (Kleiner, 1986, p. 709), es decir, solo hay un grupo de orden primo n dado (el grupo cíclico de orden n) y, para los casos particulares de orden cuatro y seis, realizó un análisis lógico detallado de todas las posibilidades de la naturaleza de los grupos de orden cuatro y seis, y mostró para cada uno, la existencia de dos grupos *esencialmente distintos*.

Aunque Cayley enunció en 1878 el ahora conocido como el teorema de Cayley, que afirma que cualquier grupo finito es isomorfo a un grupo de permutaciones, el germen del problema general de grupos sobre la clasificación de todos los grupos hasta isomorfismos, ciertamente relacionado con los grupos isomorfos estaba implícito en su artículo de 1854, en el trabajo realizado para presentar la distinción entre la teoría de la ecuación simbólica $\theta^n = 1$ y la ecuación ordinaria $x^n - 1 = 0$, respectivamente.

Camille Jordan (1838-1922)

La definición de isomorfismo apareció por primera vez explícitamente en el contexto de grupos de sustituciones (lo que hoy llamaríamos una permutación de un número finito de letras) en 1870 y fue dada por Jordan en su *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Jordan usó el término isomorfismo para designar lo que actualmente se conoce como homomorfismo biyectivo (isomorfismo) y homomorfismo sobreyectivo (epimorfismo), distinguiéndolos con los términos holoédrique (total) y mériédrique (parcial), respectivamente. Esta distinción sugiere la posibilidad de una correspondencia o transmisión de algunas propiedades de un grupo a otro, reconociendo la utilidad de este concepto debido a la similitud de las propiedades presentadas por los grupos que son isomorfos. La distinción entre isomorfismo meriédrico y holoédrico presentada por Jordan prueba que el isomorfismo no siempre fue biyectivo.

De acuerdo con la definición de Jordan, dos grupos son isomorfos (similares), si es posible establecer una correspondencia biunívoca entre sus elementos de tal manera que “al producto de cualesquiera dos sustituciones de G corresponde el producto de sus respectivas sustituciones correspondientes” (Jordan, citado por Wussing, 1984, p. 143, nuestra traducción); es decir, se preserva la operación. La correspondencia a la que Jordan se refiere es lo que hoy se conoce como isomorfismo de grupos.

Felix Klein (1849-1925)

Klein aplicó la noción de grupo de transformaciones al estudio de las geometrías. En 1872 importó el concepto de grupos isomorfos introducido en 1870 por Jordan a su *Erlangen Program* donde empleó el término *similares* para hacer referencia a dos grupos de transformaciones isomorfos. Klein afirmó que se obtienen grupos similares si se asocia cada una de las transformaciones A de un grupo a la transformación $C^{-1}AC$ del otro grupo, donde C es una transformación diferente. Por lo tanto, se puede interpretar a los *grupos similares* como grupos que surgieron uno del otro a través de la aplicación de una transformación C (Wussing, 1984).

En 1884 en su *Vorlesungen über das Ikosaeder*, Klein tenía presente la relación entre ciertos grupos de simetrías de poliedros regulares y ciertos grupos de permutaciones y desarrolló de manera abstracta la idea de la *identidad* de los grupos isomorfos.

> Entonces, los dos grupos son abstractamente idénticos y solo pueden diferir en el *significado* de sus respectivas operaciones. Los subgrupos de un grupo corresponden a los subgrupos del otro, etc. (Klein, citado por Wussing, 1984, p. 203, nuestra traducción).

Klein también expuso explícitamente los isomorfismos entre los diversos grupos de isometrías de poliedros regulares y grupos de permutaciones (Wussing, 1984).

Walther von Dyck (1856-1934)

En su trabajo de 1882, *Gruppentheoretishe Studien*, von Dyck unificó por primera vez las tres raíces históricas de la teoría de grupos mediante el concepto de un grupo abstracto. Leron et al. (1995) sugirieron que la comprensión de un grupo abstracto hace necesario el requerimiento de una referencia al isomorfismo. Esto se evidencia con la presentación de una definición general de grupos isomorfos a los que von Dyck se refirió como *incluidos* en un solo grupo, donde la naturaleza de los grupos considerados no parece ser importante:

> De esta manera, todos los grupos *holoédricamente isomorfos* se incluyen en un *solo* grupo…(y)… la *esencia* de un grupo ya no se expresa por una forma particular de sus operaciones sino por sus relaciones mutuas. (von Dyck, citado por Wussing, 1984, p. 241, nuestra traducción).

En ese sentido, "un grupo 'abstracto' puede ser representado por diferentes grupos 'concretos' y dos grupos 'concretos' son isomorfos si representan el mismo grupo 'abstracto'" (Lajoie, 2000, p. 81).

Heinrich Weber (1842-1913)

En 1893, Weber proporcionó la primera definición suficientemente general, válida sin restricciones para grupos finitos e infinitos. Weber se refirió a un grupo como una estructura fundamental del álgebra (Wussing, 1984). En relación con la idea expresada por von Dyck sobre los grupos isomorfos como *incluidos* en un solo grupo, Weber consideró, por un lado, el isomorfismo como una relación de equivalencia entre los grupos, y, por otro lado, los elementos de una clase de equivalencia como representantes de un mismo grupo abstracto (Lajoie, 2000).

> Podemos … combinar todos los grupos isomorfos en una sola clase de grupos que es en sí misma un grupo cuyos elementos son los conceptos genéricos obtenidos al hacer un concepto general a partir de los elementos correspondientes de los grupos isomorfos individuales. Los grupos isomorfos individuales deben considerarse como representantes diferentes del concepto genérico, y no importa qué representante se utilice para estudiar las propiedades del grupo. (Weber, citado por Wussing, 1984, p. 248, nuestra traducción).

Para esta investigación se consideró el análisis de dos fuentes originales de interés, mismas que se presentan en la *Tabla 2* donde se indican algunas características, tales como: nombre del autor, título de la obra y ubicación.

Tabla 2. Fuentes primarias seleccionadas

Autor (nacimiento-fallecimiento)	Título de la obra	Fecha de publicación	Localización
Arthur Cayley (1821-1895)	*VII. On the Theory of Groups, as Depending on the Symbolic Equation* $\theta^n = 1$.	1854	*The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, *7*(42): 40-47.
Camille Jordan (1838-1922)	*Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris : Gauthier-Villars.*	1870	Signaturas: MAT-Ant 102 ZGG 404 Biblioteca de Ciencias. Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

1.2. El problema de investigación

Los cursos de álgebra abstracta son relevantes para la formación de un matemático (Fukawa-Connelly, 2012) y la importancia de su aprendizaje es ampliamente reconocida (Hazzan, 1999; Weber y Larsen, 2008). Sin embargo, investigaciones en Educación Matemática han evidenciado que estudiantes universitarios presentan dificultades en el aprendizaje de conceptos, particularmente en la teoría de grupos (por ejemplo, Dubinsky, Dautermann, Leron, y Zazkis, 1994; Leron, Hazzan, y Zazkis, 1995; Asiala, Dubinsky, Mathews, Morics, y Oktaç, 1997; Brown, DeVries, Dubinsky, y Thomas, 1997; Clark, DeVries, Hemenway, St. John, Tolias, y Vakil, 1997; Asiala, Kleiman, Brown, y Mathews, 1998; Hazzan, 1999, 2001; Lajoie, 2000, 2001; Larsen, 2009) y, que con frecuencia tienden a adoptar una actitud negativa hacia el álgebra abstracta (Clark, Hemenway, St. John, Tolias, y Vakil, 1999). Además de una desconexión entre conceptos del álgebra abstracta y las ideas del álgebra elemental (Wasserman, 2016); la complejidad y sofisticación de los conceptos elementales de la teoría de grupos (Leron, Hazzan, y Zazkis, 1995); a los estudiantes les resulta difícil construir pruebas en este dominio (Weber, 2001; Weber y Alcock, 2004); usar teoremas adecuadamente (Hazzan y Leron, 1996) y al hacer frente a situaciones de resolución de problemas, tienden a trabajar en un nivel inferior de abstracción al intentar dar algún significado a los conceptos del álgebra abstracta involucrados, y esto difiere ampliamente de lo que pudieran esperar los expertos (Hazzan, 1999, 2001).

Específicamente, el concepto de isomorfismo es importante en álgebra abstracta (Lajoie, 2000). Por ejemplo, en la teoría de grupos, el isomorfismo permite clasificar grupos (cíclicos o abelianos finitamente generados, por mencionar algunos). En la obra donde aparece por primera vez de forma explícita la definición de isomorfismo en el contexto de grupos de sustituciones (lo que hoy llamaríamos una permutación de un número finito de letras), el *Traité des substitutions et des équations algébriques* de Camille Jordan publicado en 1870, el autor declaró que la utilidad de la noción de isomorfismo concierne a "la similitud de las propiedades que presentan los grupos isomorfos entre sí. […] Por lo tanto, en muchos casos puede reemplazar la consideración directa de un grupo por la de cualquiera de sus isomorfos" (p. 60). Además, basados en el desarrollo histórico de la teoría de grupos, Leron et al. (1995) reconocieron la estrecha conexión entre los conceptos de isomorfismo y grupo abstracto. Estos investigadores señalaron que "excepto por la definición formal, parece que difícilmente se puede pensar y comprender el significado de abstracto, sin recurrir a alguna versión del isomorfismo" (p. 156). Sin embargo, las investigaciones realizadas en torno a la enseñanza y el aprendizaje del concepto isomorfismo de grupos en un primer curso de álgebra abstracta han dado cuenta que estudiantes universitarios tienen problemas para comprender y razonar sobre este concepto (e. g. Thrash y Walls, 1991; Leron, Hazzan, y Zazkis, 1995; Lajoie, 2000; Larsen, 2009).

Por otra parte, en la enseñanza de las matemáticas, generalmente los conceptos son considerados como objetos sin un precedente histórico, y sólo se presenta lo que los libros de texto exhiben en su contenido. La presentación terminada de estos materiales *enmascara* un aspecto importante: "las matemáticas son una ciencia en continua evolución. La elaboración de los conceptos y procedimientos es el resultado de un largo proceso" (Sierra, 2000, p. 94). En ese sentido, Maz (1999) señaló que el uso de la historia de las matemáticas evidencia que los conocimientos matemáticos no siempre han seguido un desarrollo lineal y rápido, sino que durante el proceso han sufrido estancamientos o algún retroceso (por ejemplo, la dificultad en la aceptación de una teoría o concepto). Además, “los hechos matemáticos, sin una comprensión de por qué son como son, son casi imposibles de aprender” (Thomas, 2002, p. 46).

En el desarrollo de las matemáticas, la clasificación de los grupos finitos de un orden dado n fue uno de los problemas más importantes dentro de la teoría de grupos (Cayley, 1878). Los métodos empleados por Cayley contrastan con la presentación en la enseñanza actual de este tema en un curso introductorio de álgebra abstracta, permitiendo una apreciación conectada de los conceptos subyacentes, tales como grupo, subgrupo, grupo cíclico y clases laterales. Basados en la revisión de la literatura, identificamos que un análisis a profundidad del conocimiento involucrado por parte de los estudiantes al hacer frente a tareas asociadas con la clasificación de grupos finitos no ha sido objeto de estudio. En ese sentido, la presente investigación responde a la escasez de estudios sobre la comprensión en relación con el concepto isomorfismo a partir de su análisis histórico y epistemológico, y se presenta un estudio de caso de las conexiones matemáticas que hace una estudiante universitaria al resolver una secuencia de tareas que se fundamentan en la información histórica.

1.3. Objetivos de la investigación

El objetivo de este estudio es realizar un análisis histórico y epistemológico del concepto isomorfismo de grupos a partir de fuentes originales, así como analizar su potencial para promover conexiones matemáticas en estudiantes universitarios.

Para alcanzar este objetivo general nos planteamos los siguientes objetivos específicos:

OE1. Estudiar el desarrollo histórico del concepto isomorfismo de grupos durante el siglo XIX a partir de fuentes secundarias.

OE2. Realizar un análisis histórico y epistemológico del concepto isomorfismo a partir de fuentes originales.

OE3. Identificar los significados atribuidos al concepto isomorfismo por los matemáticos del siglo XIX.

OE4. Identificar los aspectos del análisis histórico del concepto isomorfismo que podrían promover conexiones matemáticas y que se pueden considerar para un diseño de tareas dirigidas a estudiantes universitarios.

OE5. Identificar y describir las conexiones matemáticas que hacen estudiantes universitarios al resolver tareas asociadas al concepto isomorfismo y que se fundamentan en un análisis histórico y epistemológico de dicho concepto: un estudio de caso.

En función del objetivo general, el desarrollo de la investigación se planificó en dos etapas, lo cual implica la consideración de aspectos teóricos y metodológicos adecuados a cada una. El Capítulo 2 aborda los tres primeros objetivos específicos relacionados con un análisis histórico y epistemológico del concepto isomorfismo, mientras que en el Capítulo 3 se abordan los objetivos cuarto y quinto relacionados con el estudio de las conexiones matemáticas, que constituyen la primera y segunda etapa de la investigación, respectivamente.

Capítulo 2

Análisis histórico y epistemológico del concepto de isomorfismo de grupos

El presente capítulo constituye la primera etapa de la investigación que consiste en un análisis histórico y epistemológico del concepto isomorfismo de grupos en las obras:

- Cayley, A. (1854). VII. On the Theory of Groups, as Depending on the Symbolic Equation $\theta^n = 1$. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, *7*(42): 40-47.

- Jordan, C. (1870). *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Paris: Gauthier-Villars.

Siguiendo el método histórico (Garraghan, 1946), se describe la metodología utilizada para el análisis de las obras históricas, estableciendo categorías de acuerdo con las fases del método análisis cualitativo de texto (Kuckartz, 2014).

Respecto a la presentación del análisis e interpretación de las obras se han considerado en su forma ordenada los niveles de análisis (González, 2002): *ficha de referencia de la obra* en la que se establecen los datos del material analizado; *contexto y propósito de la obra y el autor* que además de la información que ha podido brindar el material analizado fue necesario complementar con fuentes secundarias tales como Kleiner (2007) y Wussing (1984), por mencionar algunas; y finalmente, *presentación y tratamiento del concepto isomorfismo de grupos* que corresponde en sí al apartado de mayor interés para este estudio.

2.1. Metodología de análisis de los documentos históricos

14th International Congress on Mathematical Education

The 14th International Congress on Mathematical Education
第 14 届国际数学教育大会
Shanghai, China 中国 • 上海 2020

CONTRIBUTION ACCEPTANCE LETTER

31th Dec, 2019

Dear Dr. Erika Zubillaga-Guerrero,

This is to certify that your contribution titled:

METHODOLOGICAL PROPOSAL FOR THE ANALYSIS OF HISTORICAL SOURCES OF MATHEMATICS

has been accepted as PAPER by Topic Study Group 27 at the 14th International Congress on Mathematical Education (ICME-14) which is going to be held in Shanghai, China during July 12th –19th, 2020.

We are sure you will contribute greatly to the success of ICME-14. For more information, please visit the congress website at www.icme14.org.

Kind regards,
Local Organizing Committee of ICME-14

METHODOLOGICAL PROPOSAL FOR THE ANALYSIS OF HISTORICAL SOURCES OF MATHEMATICS

Erika Zubillaga-Guerrero[1], Flor Monserrat Rodríguez-Vásquez[1] & María Teresa González-Astudillo[2]
[1]Autonomous University of Guerrero, [2]University of Salamanca

This paper is based on the recognition that, through a historical and epistemological analysis of a mathematical concept, it is possible to identify explicit elements of the process of its theoretical construction that may favor its understanding. In particular, a methodology is proposed for the analysis of primary (original) sources of mathematics based on a qualitative text analysis. For this, levels and categories of analysis have been established in order to allow an objective and deep interpretation of the content.

INTRODUCTION

Researchers such as Fauvel and van Maanen (2000), Jankvist (2009) and Furinghetti (2019) have provided arguments that justify the integration of the history of mathematics in the processes of its teaching and learning. According to the categorization of Jankvist (2009) about why history may/should be used in the teaching of mathematics, this study considers the use of history as a *tool*, since it can play an important role as support in teaching and learning of mathematical concepts, theories, methods and algorithms (in-issues). In this sense, history can promote a deep understanding of mathematical concepts, looking for making the processes of its theoretical construction explicit. Furthermore, to be interested in the process of building knowledge requires knowing the history of mathematical ideas and therefore, an epistemological reflection (Barbin, 1997). The epistemology refers to the question of the meaning of the concepts and theories of mathematics, what Barbin refers to as *historical epistemology*, considering that what gives meaning to concepts and theories are the problems from which they emerge. Thus, the historical and epistemological analysis of concepts takes on special relevance. In this respect, the original sources have been implemented as a *tool* (Jankvist, 2009) to integrate the history of the mathematics in teaching and learning.

On the other hand, attending the categorization of Jankvist (2009) about how history may/should be integrated, we consider the use of original sources within the *history-based* *approaches*, whose focus is on the learning of mathematics and "do not deal whit the study of the history of mathematics in a direct manner, but rather in an indirect fashion" (pp. 246-247). This means that the historical development is not explicitly discussed. In this respect, the analysis of an original source is intended to highlight the characteristics of a mathematical concept itself (e.g., its meanings and applications), as well as the social and cultural aspects that influenced its constructions and, with this available information, some episodes or elements that could favor the understanding of mathematical concepts could be retrieved (Anacona, 2003).

Jahnke, Arcavi, Barbin, Bekken, Furinghetti, El Idrissi, da Silva, and Weeks (2002) recognized that one of the challenges involved in working with original sources lies in the interpretative process of historical documents. This refers to the relationship between the meaning of a historical document (the intention of the author) and its meaning for a modern reader who must be aware of the hypothetical and intuitive of his interpretation. However, there are not many methodological tools for the analysis of original sources in historical research and, in this sense, we develop a proposal whose goal is to allow an objective and deep analysis of these sources.

BACKGROUND OF THE METHODOLOGICAL PROPOSAL

A starting point for a historical and epistemological study of some concept is to carry out a bibliographical analysis of *secondary sources*. From these, the researcher has to identify the original writings made by mathematicians (*primary sources*) in relation to the theoretical construction of a specific mathematical concept, as well as the determination of the time period(s) that will be investigated (Ruiz Berrio, 1976).

We have used the historical method as a research methodology with phases as: heuristics, criticism, interpretation of sources, synthesis and exposition (Garraghan, 1946). Once covered the first two phases of the historical method, the researcher is confronted with the problem of how to perform the interpretative work of the selected source(s). To solve this, we resort to the qualitative text analysis method (Kuckartz, 2014) which consists of five phases: reading and interpretation of the text, building categories, coding of text segments, analysis and presentation of results. The construction of categories and the analysis based on these are distinctive features of the method. Kuckartz (2014) pointed out that a category is the result of some sort of classification, which presupposes the grouping of parts of a text such as words, paragraphs and even pages or chapters, to which common meanings are assigned. The construction of categories can be done in three ways: working directly with the data (*inductive*), constructed before the data was collected (*deductive*) depending on the theoretical framework, hypothesis or reading of secondary sources and, constructed in a *deductive-inductive* way, that is, starting from a previously established category system (*main categories*) to be used in the search for relevant content from the available data, where new categories can be constructed inductively according to the researcher's need (Kuckartz, 2014).

METHODOLOGICAL PROPOSAL

For the analysis of historical texts, we considered three levels (González, 2002), each of them deepens into the information obtained in the previous one: *reference card of the text*, *context and purpose of the text and author* and, *presentation and treatment of a specific concept*. *Reference card of the text* contains the identification data of the material analyzed, while the second and third levels have been divided into categories built in a *deductive-inductive* way (Kuckartz, 2014).

The second level, *context y purpose of the text and author*, gives a general and contextualized view of the text for the proper analysis of the facts that influenced its writing and publication. The resulting categories we have obtained were: (1) *Contextualization of mathematics in the time periods to be investigated*, which informs about the historical-cultural moment of the mathematics when the text was written, providing general information about the most influential scientific societies of the time, the known mathematical results, the problems that were tried to solve, and other interests in the scientific community, the means of divulgation of mathematical results; as well as the influential political, economic or religious factors in the mathematical field of the time; (2) *Contextualization of the text*, which provides information about the historical (scientific) moment in which it was produced, the goals or aims of the author about the text, as well as the innovations introduced in the text and the influence exerted by scientists of his time and beyond; (3) *Characterization of the structure of the text*, to show the extent and distribution of the content and the texts considered as a reference at the time of writing and (4) *Professional information of the author*, to inform about the institutions where the author carried out his main studies, as well as the influences that he received from other scientists of the time, to highlight the most important texts published by the author and to recognized his link with the mathematical concept of interest. The third level, *presentation and treatment of the specific mathematical concept*, considers the context of application of the concept by the author because it unravels its meaning and scope. In addition, a concept is just one element of a conceptual field that transmits its meaning, and therefore a concept will never appear alone; this was taken into consideration to determine how the concept of study was justified and applied (Schubring, 2005). The resulting categories were the following: (1) *Definition*, which are descriptions related to the concept that characterize it from a theoretical mathematical point of view; (2) *Other concepts involved*, which are the concepts underlying the specific mathematical concept and which are associated with its development; (3) *Types of examples* that the author uses to present the specific mathematical concept; and (4) *Applications of the concept*, to identify the importance of the specific mathematical concept from the problems that are solved by this, as well as to identify the scopes and the limitations of the definition.

The operability of the methodological proposal is based on its implementation in a historical and epistemological analysis of the concept of group isomorphism in Zubillaga, González and Rodríguez (to appear).

DISCUSSION

In this paper we discussed a methodological tool for the analysis of original sources in the third phase of the historical method (interpretation of sources), under the consideration that the history of mathematics can contribute to the clarification and deepening of the understanding of mathematical ideas (Matthews, 2014). According to the categorization of Jankvist (2009), we have considered the use of history as a *tool* so that from a historical and epistemological analysis of mathematical concepts based on original sources could be identified enabling elements for the understanding of mathematical concepts (*history-based approach*). In this way, the aim is to obtain information about the work done by some of the most creative minds (mathematicians) in history that could be used by the researcher to show if the history actually supports students' learning of mathematics, and if so, in what sense (Kjeldsen & Blomhøj, 2012). However, a discussion of specific ways to use historical information is beyond the scope of this document.

The *main categories* for an objective and profound interpretation of historical texts were constructed in a *deductive-inductive* way (Kuckartz, 2014) and are not intended to be exhaustive. However, we suggest that this proposal includes the *main categories* to be considered in any historical and epistemological analysis of concepts. Also throughout the discourse we have focused on mathematical concepts, however, we recognize that it is possible to consider it for some theorem, method, algorithm, in general; what Jankvist (2009) characterizes as in-issues of mathematics and this presupposes a modification in the third level of analysis. We also consider that more research is needed in the history of mathematics with purposes similar to those considered here that analyze the applicability of this methodology in the cases mentioned, as well as the relevance and inclusion of other categories that could provide substantial information in the identification of enabling elements for understanding concepts.

REFERENCES

Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemáticas. *Revista EMA*, *8*(1), 30–46.

Barbin, E. (1997). Histoire des Mathématiques: Pourquoi? Comment? *Bulletin AMQ*, *37*(1), 20-25.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (Eds.) (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Furinghetti, F. (2019). History and Epistemology in mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-28.

Garraghan, G. J. (1946). *A guide to historical method*. New York: Fordham University Press.

González, M. T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos*. Ph.D. Thesis, University of Salamanca. Spain.

Jahnke, H. N., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Furinghetti, F., El Idrissi, A., da Silva, C. M., & Weeks, C. (2002). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education*: *the ICMI study* (pp. 291-328). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 235-261.

Kjeldsen, T. H., & Blomhøj, M. (2012). Beyond motivation: history as a method for learning meta-discursive rules in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 327-349.

Kuckartz, U. (2014). *Qualitative Text Analysis: A Guide to Methods, Practice and Using Software*. London: SAGE Publications.

Matthews, M. R. (Ed.). (2014). *International handbook of research in history, philosophy and science teaching*. Dordrecht: springer.

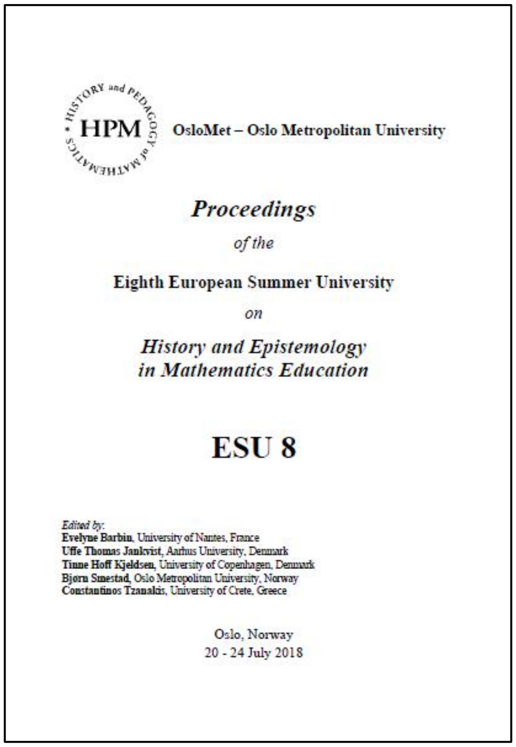
Ruiz Berrio, J. (1976). El método histórico en la investigación histórica de la educación. *Revista Española de Pedagogía*, 134, 449-475.

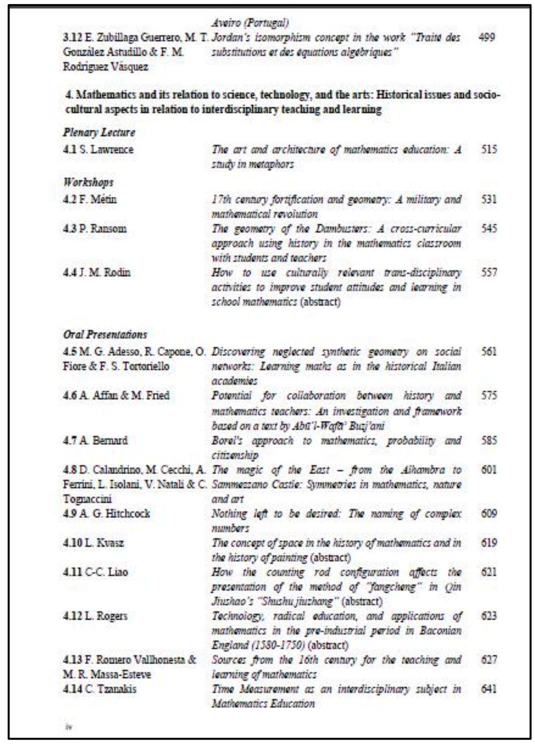
Schubring, G. (2005). *Conflicts between generalization, rigor, and intuition: Number concepts underlying the development of analysis in 17–19th century France and Germany*. New York: Springer-Verlag.

Zubillaga-Guerrero, E., González-Astudillo M. T., & Rodríguez-Vásquez, F. M. (to appear): Jordan’s isomorphism concept in the work “Traité des substitutions et des équations algébriques”. In C. Tzanakis, É. Barbin, U. T. Jankvist, T. H. Kjeldsen, & B. Smestad (Eds.), *Proceedings of the 8th ESU*, Oslo: Oslo Metropolitan University.

2.2. Traité des substitutions et des équations algébriques

Proceedings of the 8th European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education





iv

JORDAN'S ISOMORPHISM CONCEPT IN THE WORK "TRAITÉ DES SUBSTITUTIONS ET DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES"

Erika Zubillaga-Guerrero[a], María Teresa González-Astudillo[b] & Flor Monserrat Rodríguez-Vásquez[a]

[a]Guerrero Autonomous University, Av. Lázaro Cárdenas s/n, Col. Haciendita, 39087, Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, Mexico
eguerrero@uagro.mx, flor.rodriguez@uagro.mx

[b]University of Salamanca, Paseo de Canalejas, 169, 37008, Salamanca, Spain
maite@usal.es

ABSTRACT

This paper discusses the concept of isomorphism from the analysis of Camille Jordan's book "Traité des substitutions et des équations algébriques". Methodologically, we resort to qualitative text analysis (Kuckartz, 2014), considering three levels of analysis: reference card of the work, context and purpose of the work and of the author, and presentation and treatment of the group isomorphism concept. The results show that Jordan explicitly introduced the concepts of holoedric (total) and meriedric (partial) isomorphism in the context of substitutions groups. Thus, Jordan used the term isomorphism to designate what is currently known as bijective homomorphism (isomorphism) and surjective homomorphism (epimorphism), distinguishing them with the terms holoédrique and mériédrique, respectively. This distinction suggests the possibility of a correspondence or transmission of some properties from one group to another, recognizing the usefulness of this concept due to the similarity of the properties presented by groups that are isomorphic.

Keywords: Isomorphism, Substitutions groups, Qualitative text analysis, Camille Jordan

1 INTRODUCTION

Over the past four decades there has been considerable interest and growth in research in Mathematics Education towards the line of historical research (Fauvel and van Maanen, 2000; Matthews, 2014; Clark, Kjeldsen, Schorcht, Tzanakis, and Wang, 2016). Two areas of study can currently be distinguished in relation to the contributions of history in this field (differentiated themes in the International Congress on Mathematical Education [ICME]): the history of the teaching and the learning of mathematics; and the role of the history of mathematics in mathematics education. The first focuses on the history of Mathematics Education due to its development as a scientific discipline, while the second emphasizes the importance of integrating historical and epistemological issues in the teaching and learning of mathematics.

Clark et al. (2016) point out that “mathematical knowledge is determined not only by the circumstances in which it becomes a deductively structured theory, but also by the procedures that originally led or may lead to it” (p. 136). However, the teaching of mathematics usually presents the final products of years of mathematicians’ work and does not consider the process of constructing those products, which would otherwise contribute to the appropriation of the meaning of mathematical concepts. In this regard, in the teaching and learning of mathematics, the integration of historical and epistemological aspects can favor the understanding of specific parts (e.g., concepts, theorems) of mathematics, and also lead to a deep awareness of the discipline itself (Clark et al., 2016).

Various researchers (e.g., Fauvel and van Maanen, 2000; Jankvist, 2009; Furinghetti, 2019) have provided arguments in favor of the use of history indicating the ways in which it can be used in the teaching and learning of mathematics. For example, Jankvist (2009) proposes two categories of arguments for the use of history, as a *tool* and as a *goal*. In the first category, history plays an important role as an auxiliary or supportive means of teaching and learning the in-issues of mathematics: mathematical concepts, theories, methods, algorithms, among others. In the second category, history as a *goal*, it is stated that although history can have a positive side effect of supporting the learning of mathematics, the main purpose of its use is not this one; it concerns the teaching of meta-issues of mathematics as a scientific discipline and its history.

We consider the use of history as a *tool* that can enhance a deep understanding of mathematical concepts, seeking to make more explicit the mathematical construction of a specific mathematical concept and other underlying concepts (in-issues) (Jankvist, 2009). Thus, we could see mathematics as something that develops and can be constructed, that is, highlighting the creative side of mathematics rather than the cultural side (Menghini, 2000). Furthermore, “to be interested in the process of knowledge construction requires a history of mathematical ideas and, therefore, an epistemological reflection” (Barbin, 1997, p. 21). Epistemology here refers to the question of the meaning of mathematical concepts and theories, what Barbin refers to as *épistémologie historique* (historical epistemology), considering that what gives meaning to concepts and theories are the problems they solve. In this respect, the historical and epistemological of concepts takes on special relevance.

On the other hand, a way in which history has been integrated into teaching and learning (as a tool and as a goal) of mathematics has been using primary (original) sources, that according to the categorization of Jankvist (2009) on how history may/should be used, the information from these materials is usually used as: (1) small extracts in historical epilogues (*illumination* approaches) and (2) readings of original sources or student projects (*modules* approaches). In this paper we consider the use of original sources for a historical and epistemological study in the (3) *history-based* approaches, where the main concern lies in the problems of mathematics, whose interest lies in their learning, and "do not deal with the study of the history of mathematics in a direct manner, but rather in an indirect fashion" (pp. 246-247), that is, the historical information is not directly discussed with the students. In particular, the analysis of an original source is intended to highlight the characteristics of a mathematical concept itself (e.g., its meaning and applications), and the social and cultural aspects that influenced its construction, and from the available information, rescuing episodes or enabling elements that can help students to understand mathematical concepts (Anacona, 2003).

Thus, we situate this work within the second area of study in relation to the contributions of history to mathematical education, namely, the role of the history of mathematics in mathematical education. We propose that a historical and epistemological analysis of concepts based on original sources, reveals the different approaches that mathematicians made around a concept, the difficulties that they had to overcome, the genesis of the concept and how other aspects determined the evolution of this concept until its consideration as we know it today. In this respect, some investigations justify that a historical approach to the concept may favor its understanding (e.g., Anacona, 2003; Furinghetti, 2019).

Specifically, we have carried out a historical and epistemological analysis of the group isomorphism concept, that despite the importance of this concept in abstract algebra (Lajoie, 2000), research carried out around their teaching and learning in a first course of abstract algebra has shown difficulties presented by undergraduate students to understand this concept. For example, Larsen (2009) identified difficulties in determining when two groups are *essentially the same* (the same structure whose elements are not necessarily labeled differently), and in the formulating of the formal definition of isomorphism, that usually is given in terms of a bijective function, whereas the operation preservation property does not emerge easily. Leron, Hazzan, & Zazkis (1995), Lajoie (2000, 2001), Weber (2001), and Weber & Alcock (2004) showed difficulties in proving that two groups are isomorphic and in constructing an isomorphism between specific groups. In addition, Lajoie (2000, 2001) identified difficulties: in giving the interpretation experts give, to the idea that isomorphic groups are similar, in considering more than one possible isomorphism between two isomorphic groups, in seeing isomorphism both as an equivalence relation on groups and as a particular correspondence between two isomorphic groups, and in recognizing a usefulness to the isomorphism concept in algebra.

We specifically investigated the following questions:

- What kind of problems were the mathematicians of the 19th century trying to solve, which favored the emergence of the concept of group isomorphism?
- What meanings were attributed to the concept of group isomorphism by 19th century mathematicians?

This document presents the results of the analysis of the book by Camille Jordan (1838-1922): "Traité des substitutions et des équations algébriques", published in 1870 in the sections that refer to the concept of group isomorphism. The presentation of a didactic intervention based on the results of historical and epistemological analysis of this concept in Jordan's work is beyond the scope of this paper.

2 METHOD

This document studies the work of Jordan (1870), which from a literature review of secondary sources (Wussing, 1984; Kleiner, 2007), was identified as the work where the definition of isomorphism appears for the first time explicitly in the context of substitution groups (what today we would call a permutation of a finite number of letters).

For the analysis of the work we used the qualitative text analysis method (Kuckartz, 2014). Three levels of analysis (González, 2002) were considered, each one of which deepens in the information obtained in the previous one: *reference card of the work, context and purpose of the work and of the author*, and *presentation and treatment of the group isomorphism concept*

(Table 1). The second and third levels have been subdivided into categories, which were constructed in a deductive-inductive way (Kuckartz, 2014).

The first level (*reference card of the work*) corresponds to the information specific to the work, which includes the name of the author, dates of birth and death, title of the work, year, publisher and place of publication analyzed and location of the work.

The second level (*context and purpose of the work and of the author*) provides an overview of the work, contextualizing it so that it can be properly analyzed in terms of the facts that influenced its writing and publication. The resulting categories were the following: (1) *Contextualization of nineteenth century mathematics*, which informs about the historical-cultural moment of the mathematics in which the work was written; (2) *Contextualization of the work*, which provides information about the historical (scientific) moment in which it was produced, the goals or intentions of the author about the work, as well as the innovations introduced in the work; (3) *Characterization of the structure of the work,* to show the extent and distribution of the content and the works considered as reference at the time of writing; (4) *Professional information of the author*, to inform about the institutions where he carried out his main studies, as well as the influences that he received from other mathematicians of the time, to highlight the most important works published by the author and to recognize his link with the mathematical object of interest.

The third level (*presentation and treatment of the group isomorphism concept*) considers the context of application of the concept by the author because it unravels its meaning and scope. In addition, a concept is only one element of a conceptual field that conveys its meaning to it, so a concept will never appear isolated, which was considered in determining how the concept of study was justified and applied (Schubring, 2005). The resulting categories were the following: (1) *Definition*, which are descriptions related to the mathematical concept group isomorphism, in which they are characterized from a theoretical mathematical point of view and which will depend on the context in which it was introduced: classical algebra, number theory, geometry or analysis; (2) *Other concepts involved*, which are the concepts underlying the group isomorphism concept and which are associated with its development; (3) *Types of examples* that the author uses to present the mathematical object group isomorphism; (4) *Applications of the concept*, to identify the importance of the group isomorphism concept from the problems that are solved by this, as well as to identify the scopes and the limitations of the definition.

Table 1. Methodology for the analysis of historical mathematical works

Levels of analysis	Categories	Units of analysis
Reference card of the work	Name of the author Date of birth and death of the author Title of the work Year, publisher and place of publication analyzed Location of the work	
Context and purpose of the work and of the author	Contextualization of nineteenth century mathematics	Historical-cultural moment of the mathematics
	Contextualization of the work	Historical moment and place where the work was written General objectives of the work Innovations introduced in the work
	Characterization of the structure of the work	Extent and distribution of the content References
	Professional information of the author	Author's education Other published works
Presentation and treatment of the group isomorphism concept	Definition Other concepts involved Types of examples Applications of the concept	

3 ANALYSIS AND INTERPRETATION OF JORDAN'S WORK (1870)

With respect to the presentation of the work, the proposed levels of analysis have been considered in an orderly manner: *reference card of the work*, where the data of the analyzed material are established; *context and purpose of the work and of the author*, for which in addition to the information that the analyzed material has been able to provide, it has been necessary to consider secondary sources such as Brechenmacher (2012), Kleiner (2007), Lebesgue (1926), Neumann (1999), Schlimm (2008), Timmermans (2012) and, Wussing (1984), these sources were selected according to two criteria: (1) review of mathematics history books where elements of Jordan's life and academic work where identified, and (2) review of articles in mathematics history that provided specific information about life, Jordan's academic work, and where specific content of the Traité was discussed; and finally, *presentation and treatment of the group isomorphism concept*. The development of the exposition of the work is organized according to the levels of analysis and is based on the categories and units of analysis previously established (Table 1).

Reference card of the work

Author: Marie-Ennemond- Camille Jordan.

Author's date of birth and death: 1838-1922.

Title: Traité des substitutions et des équations algébriques.

Year, publisher and place of the edition analyzed: 1870, Paris: Gauthier-Villars.

Location of work: Library of Sciences. Mathematics. University of Zaragoza. Spain.

Symbols: MAT-Ant 102; ZGG 404.

Context and purpose of the work and of the author

The French-Italian mathematician Joseph-Louis de Lagrange's (1736-1813) work in 1770-71 had initiated the study of permutations in connection with the study of the solving of algebraic equations and had influenced, in the first third of the 19th century, the work of other mathematicians such as the Italian Paolo Ruffini (1765-1822) and the Norwegian Niels Henrik Abel (1802-1829), developing elements of the theory of groups of permutations (Kleiner, 2007). It was the French Évariste Galois (1811-1832) who first used the term *group* and distinguished between the general principles of what is now known as Galois theory and an application of this, namely the solvability of algebraic equations by radicals. Galois' ideas transmitted from his writings were not understood and assimilated by his contemporaries. The main works of Galois were published after his death for the first time in 1846 by Joseph Liouville (1809-1882), who like his French compatriots Charles Hermite (1822-1901), Victor Puiseux (1820-1883) and Joseph-Alfred Serret (1819-1885) studied and continued the works of Galois (Wussing, 1984); until they received a complete treatment by Jordan in his "Traité des substitutions et des équations algébriques" (Neumann, 1999).

In the first half of the nineteenth century, the French mathematician Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) also made important contributions to the development of theory of groups of permutations, and it is because of Cauchy that this theory has been developed autonomously.

In this regard, Kleiner (2007) points out that “before Cauchy, permutations were not an object of independent study but rather a useful device for the investigation of solutions of polynomial equations” (p. 24).

In France, a deep and rapid advance that revealed the wide range of the concept of permutation group through mathematics was achieved by establishing a connection between the Galois and Cauchy approaches (Wussing, 1984). The work of Serret of 1866, the third edition of the “Cours d’Algèbre Supérieure” and two Comments of Jordan on Galois, the first “Commentaire sur le Mémoire de Galois” of 1865, and its continuation “Commentaire sur Galois” of 1869 are examples of this interest of unification; but it would be Jordan’s work “Traité des substitutions et des équations algébriques”, in which the ideas of Galois and Cauchy were finally unified, which had a great influence on the evolution of group theory. Jordan published more than 30 articles on groups in the period of 1860-1880, and “the *Treatise* embodied the substance of most of Jordan’s publications on groups up to that time” (Kleiner, 2007, p. 25).

Camille Jordan was born on January 5, 1838 in Lyon, France. Jordan was admitted to the École Polytechnique in 1855. In 1873 he was appointed *examinateur* at the École and professor of Analysis, replacing Hermite in 1876. Jordan was elected member of the Académie des Sciences after the death of the French Michel Chasles (1793-1880) in 1881. Furthermore, in 1883 he was appointed professor at the Collège de France as Liouville’s successor and in 1885 he assumed the position as director of the *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées,* one of the main mathematical research journals of the time (Lebesgue, 1926).

Jordan’s book “Traité des substitutions et des équations algébriques” of 667 pages was published in 1870 by Gauthier-Villars. In the preface the author states that the main goal of the work is “to develop the methods of Galois and compile them into a body of doctrine, showing how easily they solve all the major problems of equation theory” (Jordan, 1870, p. VII, our translation)[1]. In addition to mentioning the influence of Serret’s work, “Cours d’Algèbre supérieure”, whose study inspired Jordan to contribute to the progress of Algebra, he recognized the contributions of Galois, for the invention of the principles of the Galois

[1] « de développer les méthodes de Galois et de les constituer en corps de doctrine, en montrant avec quelle facilité elles permettent de résoudre tous les principaux problèmes de la théorie des équations ». (Jordan, 1870, p. VII)

theory and the Italian Enrico Betti (1823-1892), for writing an important Memoir, where it was established for the first time the complete series of the theorems of Galois in a rigorous way. Jordan also mentioned the contributions of Germans Leopold Kronecker (1823-1891) and Abel, Hermite, and the Italian Francesco Brioschi (1824-1897) on the Galois groups of certain division problems of elliptic and Abelian functions, as well as the investigations of the German geometers Otto Hesse (1811-1874), Alfred Clebsch (1833-1872), and Ernst Eduard Kummer (1810-1893), the British Arthur Cayley (1821-1895), the Irish George Salmon (1819-1904), and the Swiss Jakob Steiner (1796-1863), who studied various geometrical problems to which Galois' methods can be applied.

The concept of substitutions group and its application not only to the theory of equations but in other areas of contemporary mathematics allowed Jordan to unify in his Traité the results of Galois, Cauchy and other mathematicians (Wussing, 1984; Kleiner, 2007). In general, Jordan's Traité contains sections dedicated to the study of substitution groups, to the Galois theory itself and to the applications of the Galois theory to equations that arise in several areas of mathematics.

Jordan's work (1870) is not a book with pedagogical intent. In fact, as Wussing (1984) indicates: "it was an expression of Jordan's deep desire to bring about a conceptual synthesis of the mathematics of his time. That he tried to achieve such a synthesis by relying on the concept of a permutation group" (p. 160). Also, Kleiner (2007) points out that "his aim was a survey of all of mathematics by areas in which the theory of permutation groups had been applied or seemed likely to be applicable" (p. 25). On the Traité of Camille Jordan one may consult Brechenmacher (2012).

The Traité consists of four books, each divided into chapters. Book I deals with the main notions related to congruences. Book II is divided into two chapters, the first dedicated to the study of substitutions in general and the second to linear substitutions. Book III is made up of four chapters. The first presents the principles of the general theory of equations and the other three contain applications of the Galois theory in algebra, geometry and problems concerning transcendental functions. Finally, in Book IV, divided into seven chapters, Jordan determines the general types of equations solvable by radicals and for each of them he obtains a complete classification system.

It is in Book II of Jordan's Traité entitled "Des substitutions", where the isomorphism concept can be found, and in which Jordan proves a part of the Jordan-Hölder theorem, "one of the fundamental theorems in the theory of groups" (Schlimm, 2008, p. 409). The first chapter deals with generalizations about substitutions and presents a synthesis of previous results from French mathematicians such as Cauchy, Serret, Joseph Bertrand (1822-1900), and Émile Mathieu (1835-1890). Jordan presents concepts (which had previously appeared in his "Commentaire sur Galois" in 1869) such as a substitution, an unit substitution, the product of two substitutions, a group (Jordan uses the term *faisceau* as a synonym for group), the derived group (le groupe dérivé), the order of a group, the degree of a group, the simple and composite groups, and alternating group. About Jordan's work on groups, he considers them as groups acting on sets and uses a generator and relations approach to groups. In Jordan's group definition, closure under multiplication is the sole property required.

> 23. One gives the substitution name to the operation by which a number of things are exchanged than can be assumed to be represented by letters a, b, …. […]
> 27. One says that a system of substitutions forms a group (or a bundle) if the product of any two of the substitutions of the system is again a member of that system.
> The various substitutions obtained operating successively whenever we want and, in any order, certain substitutions given A, B, C ... obviously form a group: we will call it the derived group of A, B, C, ..., and we will designate it by the symbol (A, B, C, ...). (Jordan, 1870, pp. 21-22, our translation)[2]

Jordan also proves the Lagrange theorem and the Cauchy theorem and introduces the isomorphism concept. In addition, he conducts an important study on transitivity and primitivity for substitution groups. In the second chapter of Book II, Jordan is devoted to the study of the properties of the General and Special linear groups.

[2] « **23**. On donne le nom de *substitution* à l'opération par laquelle on intervertit un certain nombre de choses que l'on peut supposer représentées par des lettres *a*, *b*, …. […]
27. On dira qu'un système de substitutions forme un *groupe* (ou un *faisceau*) si le produit de deux substitutions quelconques du système appartient lui-même au système.
Les diverses substitutions obtenues en opérant successivement tant qu'on voudra et dans un ordre quelconque certaines substitutions données A, B, C,… forment évidemment un groupe : nous l'appellerons le *groupe dérivé de* A, B, C,…, et nous le désignerons par le symbole (A, B, C,…) ». (Jordan, 1870, pp. 21-22)

Presentation and treatment of the group isomorphism concept

Jordan's Traité is an extensive and complex work. In this paper we do not present a general study of Jordan's group concept, rather, we consider a fragmented reading of the Traité, extracting some interesting elements about the isomorphism concept of this monumental work.

In Book II: Des substitutions, in §V.- Symétrie des fonctions rationnelles, Jordan addresses the problem of the number of values taken on by a function of *n* variables as a result of their permutation, that it had been the subject of previous study by the same author in his 1860 thesis. Also, Jordan treats the concept of isomorphism.

Jordan imported the terms *holoédrique* (total) and *mériédrique* (partial) from Auguste Bravais' "Études cristallographiques" to substitution groups. "Similarly any two groups of operations applying to any object (movements of solid objects, substitutions of the roots of an equation, etc.) can transmit, in whole or in part, some of their properties" (Timmermans, 2012, p. 45).

Jordan used the word *isomorphism* to refer to what is now known as bijective homomorphism and surjective homomorphism, but distinguished between the two using the terms *l'isomorphisme holoédrique* and *l'isomorphisme mériédrique*, respectively. However, we must keep in mind that Jordan's isomorphism is not seen as maps.

> 67. A group Γ is said to be isomorphic to a group G if it is possible to establish between their substitutions a correspondence such that: 1° to each substitution of G there corresponds a unique substitution of Γ and to each substitution of Γ one or more substitutions of G; 2° to the product of any two substitutions of G there corresponds the product of their respective corresponding substitutions.
>
> An isomorphism is said to be meriedric if many substitutions of G correspond to the same substitution of Γ, and holoedric in the opposite case. (Jordan, 1870, p. 56, our translation)[3]

[3] « **67**. Un groupe Γ est dit *isomorphe* à un autre groupe *G*, si l'on peut établir entre leurs substitutions une correspondance telle : 1° que chaque substitution de *G* corresponde à une seule substitution de Γ, et chaque substitution de Γ à une ou plusieurs substitutions de *G* ; 2° que le produit de deux substitutions quelconques de *G* corresponde au produit de leurs correspondantes respectives.
L'isomorphisme sera dit *mériédrique*, si plusieurs substitutions de *G* correspondent à une même substitution de Γ, *holoédrique* dans le cas contraire ». (Jordan, 1870, p. 56)

Jordan does not present concrete examples of isomorphic groups. However, he explicitly shows the application of the definition of meriedric isomorphism by deducing that if a group has isomorphic groups of this type then it is composite [1], as shown in the following quotation:

> Suppose, to fix the ideas, that G contains m substitutions $g_1,\ldots, g_m$ corresponding to the same substitution γ of group Γ. Let γ' another substitution of Γ, g' a substitution of G corresponding to it: $g_1^{-1}g'$ will correspond to $\gamma^{-1}\gamma'$, and consequently each of the m substitutions g', $g_2g_1^{-1}g',\ldots, g_mg_1^{-1}g'$ will correspond to $\gamma\gamma^{-1}\gamma' = \gamma'$. Each substitution of Γ having thus m corresponding in G, the order of Γ will be m-fold smaller than that of G.
>
> Group Γ contains substitution I. Let $h_1,\ldots,h_m$ be the corresponding substitutions of G: they form a group to which all the substitutions of G are permutable. Because if g is one of these, γ is its corresponding: $g^{-1}h_1g$ has the corresponding $\gamma^{-1}I\gamma = I$: therefore, it belongs to the sequence $h_1,\ldots, h_m$.
>
> If $m > I$, the group $(h_1,\ldots, h_m)$ cannot be reduced to the only substitution I: it will be less than G, if we assume that Γ is not reduced to the only substitution I; therefore G will be composite. Hence this conclusion: The composite groups have only meriedric isomorphs (not formed exclusively by substitution I). (Jordan, 1870, p. 56, our translation)[4]

Jordan then poses as a problem the determination of isomorphic groups to a given G group. In the development, Jordan treats the problem by constructing a new group through the values taken by a function of *n* variables as a result of their permutations, which turns out to be transitive [2] and isomorphic to G:

[4] « Supposons, pour fixer les idées, que G contienne *m* substitutions $g_1,\ldots,g_m$ correspondantes à une même substitution γ du groupe Γ. Soient γ' une autre substitution quelconque de Γ, g' une substitution de G qui lui corresponde : $g_1^{-1}g'$ correspondra à $\gamma^{-1}\gamma'$, et par suite chacune des *m* substitutions $g', g_2g_1^{-1}g',\ldots, g_mg_1^{-1}g'$ correspondra à $\gamma\gamma^{-1}\gamma' = \gamma'$. Chaque substitution de Γ ayant ainsi *m* correspondantes dans G, l'ordre de Γ sera *m* fois moindre que celui de G.
Le groupe Γ contient la substitution *I*. Soient $h_1,\ldots,h_m$ les substitutions correspondantes de G : elles forment un groupe auquel toutes les substitutions de G sont permutables. Car soient *g* l'une de ces dernières, γ sa correspondante : $g^{-1}h_1g$ a pour correspondante $\gamma^{-1}I\gamma = I$: elle appartient donc à la suite $h_1,\ldots,h_m$.
Si $m > I$, le groupe $(h_1,\ldots,h_m)$ ne peut se réduire à la seule substitution *I* : il sera d'ailleurs moindre que G, si l'on suppose que Γ ne se réduise pas à la seule substitution *I* ; donc G sera composé. D'où cette conclusion : *Les groupes composés ont seuls des isomorphes mériédriques* (non exclusivement formés de la substitution *I*) ». (Jordan, 1870, p. 56)

68. PROBLEM. — Determine the isomorphic groups to a given group G.

The problem is reduced to determining those groups that are transitive. […]

69. So let's search isomorphic groups at G and transitive. We will see that their determination is reduced to that of the various groups contained in G.

Let x, x_1,… be the letters that G exchanges between them; H = (h_1,…, h_n) any group contained in G. Substitutions of G can all be put in the form of $h_\alpha g_\beta$, g_1,…, g_β,…, g_m which are appropriately chosen substitutions, the first of which is reduced to unit and whose number m equals the proportion of the orders of G and H.

Now let F_1 be any rational function of x, x_1,…, invariable by substitutions H; F_s becomes substitution s. The m functions F_1,..., F_{g_m} will be transformed into each other by any substitution of G. Indeed, the substitution $h_{\alpha'} g_{\beta'}$ transforms F_{g_β}, for example, into $F_{g_\beta h_{\alpha'} g_{\beta'}}$. Moreover $g_\beta h_{\alpha'} g_{\beta'}$, belonging to G, can be put in the form $h_{\alpha''} g_{\beta''}$ and $h_{\alpha''}$ does not alter the function F_1: so F_{g_β} will be transformed into $F_{h_{\alpha''} g_{\beta''}} = F_{g_{\beta''}}$.

Each substitution of G, performed in the functions F_1,…, is thus equivalent to a certain substitution performed between these functions. The latter substitutions obviously form a group Γ, isomorphic to G. This new group will be transitive, the substitutions g_1,…,g_m make it possible to transform F_1 into any of the functions F_1,..., F_{g_m}.

70. We will show reciprocally that any transitive group, isomorphic to G, is identical to one of those we have just formed. […]

Our proposition is thus established. (Jordan, 1870, pp. 56-59, our translation)[5]

[5] « **68**. PROBLÈME. — *Déterminer les groupes isomorphes à un groupe donné* G.
Le problème se réduit à déterminer ceux de ces groupes qui sont transitifs. […]
69. Cherchons donc les groupes isomorphes à G et transitifs. Nous allons voir que leur détermination se ramène à celle des divers groupes contenus dans G.
Soient en effet $x, x_1,\dots$ les lettres que G permute entre elles ; H = ($h_1,\dots,h_n$) un groupe quelconque contenu dans G. Les substitutions de G peuvent toutes être mises sous la forme $h_\alpha g_\beta, g_1,\dots, g_\beta,\dots, g_m$ étant des substitutions convenablement choisies, dont la première se réduit à l'unité et dont le nombre *m* est égal au rapport des ordres de G et de H.
Soient maintenant F_1 une fonction rationnelle quelconque de $x, x_1,\dots$, invariable par les substitutions H ; F_s ce qu'elle devient par la substitution *s*. Les *m* fonctions F_1,..., F_{g_m} seront transformées les unes dans les autres par toute substitution de G. En effet, la substitution $h_{\alpha'} g_{\beta'}$ transforme F_{g_β}, par exemple, en $F_{g_\beta h_{\alpha'} g_{\beta'}}$. D'ailleurs $g_\beta h_{\alpha'} g_{\beta'}$, appartenant à G, peut être mise sous la forme $h_{\alpha''} g_{\beta''}$ et $h_{\alpha''}$ n'altère pas la fonction F_1 : donc F_{g_β} sera transformée en $F_{h_{\alpha''} g_{\beta''}} = F_{g_{\beta''}}$.
Chaque substitution de G, effectuée dans les fonctions F_1,..., équivaut ainsi à une certaine substitution effectuée *entre* ces fonctions. Ces dernières substitutions forment évidemment un groupe Γ, isomorphe à G. Ce nouveau

Finally, in Jordan's treatment of the concepts of isomorphism and isomorphic groups, some theorems involving them can be identified, for example, in section §XI. Groupes isomorphes aux groupes linéaires of Book II; as well as in Book III: Des irrationnelles, in Chapter IV: Applications a la théorie des transcendantes in the section § III. Fonctions hyperelliptiques; and in Book IV: De la résolution par radicaux, in the first chapter, Conditions de résolubilité. Below is a theorem taken from Book III.

> THEOREM. — *Any group of degree q is isomorphic not meriedric to a group of the degree* $2^{2k} - 1$, *with abelian linear substitutions, where k is the largest integer contained in* $\frac{q-1}{2}$. (Jordan, 1870, pp. 364-365, our translation)[6]

4 DISCUSSION

Implicitly, the groups became the object of study in algebra when mathematicians like Lagrange and Ruffini used permutations when dealing with one of the main problems of the eighteenth and nineteenth century in this mathematical domain, the solvability of algebraic equations of degree higher than the fourth by radicals (Kleiner, 2007). Abel proved that it was impossible solving the general equation of the fifth degree by radicals and posed the following problems: (1) Constructing all algebraic equations of a given degree that are solvable by radicals. (2) Given an equation, recognizing whether it is soluble by radicals and make this resolution when possible (Lebesgue, 1926).

On the other hand, the term group was used for the first time, without being defined, by Galois, who created a theory (Galois theory) considered one of the great achievements of the nineteenth century, and its application to the solvability of equations by radicals. After the publications of Galois' writings by Liouville in 1846, the interaction between the theory of

groupe sera transitif, les substitutions $g_1,\ldots,g_m$ permettant de transformer F_1 en l'une quelconque des fonctions $F_1,\ldots,F_{g_m}$.

70. Nous allons montrer réciproquement que tout groupe transitif, isomorphe à G, est identique à l'un de ceux que nous venons de former. […]

Notre proposition se trouve ainsi établie ». (Jordan, 1870, pp. 56-59)

[6] « THÉORÈME. — *Un groupe quelconque de degré q est isomorphe sans mériédrie à un groupe de degré* $2^{2k} - 1$, *à substitutions linéaires abéliennes, k étant le plus grand entier contenu dans* $\frac{q-1}{2}$ ». (Jordan, 1870, pp. 364-365)

equations and the theory of permutations favored the emergence and consolidation of the concept of a permutation group (Wussing, 1984). Thus, initially, group theory was considered under the aspect of finite group theory of permutations.

The independence of the theory of permutations resulted in the application of the concept of a permutation group outside the theory of algebraic equations, for example, in geometry, analysis, number theory, and mechanics in the works of mathematicians such as Jordan, Serret y Hermite, just to mention a few (Wussing, 1984). In fact, Schlimm (2008) points out that with the publication of Jordan (1870), "the theory of substitution groups was established as an independent tool for the study of algebraic equations" (p. 410).

Jordan (1870) explicitly introduced the concepts of *isomorphisme holoédrique* (total) and *mériédrique* (partial), terms which he imported from crystallography, particularly from Études de Auguste Bravais, to his "Traité des substitutions et des équations algébriques" in the context of substitution groups. The distinction between meriedric and holoedric isomorphism presented by Jordan proves that isomorphism was not always bijective (holoedric). In his Traité, Jordan uses the term *similitude* (similarity) to refer to the properties of isomorphic groups *identiques* (identical), which he acknowledges as a utility of isomorphism. The approach to the definition of Jordan's meriedric isomorphism in 1870 suggests the possibility of a correspondence or transmission of *some* properties from one group to another.

Two groups are isomorphic (similar), if it is possible to establish a biunivocal correspondence among their elements in such a way that the product of the *corresponds* is equal to the *corresponding* product; that is, the operation is preserved. The correspondence Jordan refers to is what is called today group isomorphism.

On the other hand, the usefulness of the notion of isomorphism of substitution groups, according to Jordan (1870), concerns "the similarity of properties that isomorphic groups present between each other. […] therefore in many cases replace the direct consideration of a group by that of any of its isomorphs" (p. 60). Today, the importance of isomorphism is difficult for students to recognize; for example, Lajoie (2000) showed that the ideas, images and conceptions that students assign to group isomorphism do not allow them to understand the importance of this concept in mathematics. Students tend to refer to isomorphic groups with expressions such as *similar* or *equivalent*, and in practice, to determine whether two groups are isomorphic, students tend to rely on the literal interpretation of these words, so they try to find similarities between the operations or elements of the groups.

Finally, an important idea for the design of tasks has been extracted from the analysis of the work; this idea includes asking the students to construct a group of permutations isomorphic to a given group G.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank Jesús Romero Valencia for helpful discussions.

NOTES

1. Jordan (1870) points out that "a group is *simple*, if it does not contain another group whose substitutions are permutable, and *composite* otherwise" (p. 41, our translation).

2. According to Jordan (1870), "a group […] will be *n-fold transitive* if its substitutions make it possible to simultaneously bring *n* given letters *a*, *b*, *c*, ... to the places primitively occupied by *n* other arbitrary letters *a'*, *b'*, *c'*, …" (p. 29, our translation).

REFERENCES

Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *Revista EMA*, *8*(1), 30-46.

Barbin, E. (1997). Histoire des Mathématiques : Pourquoi ? Comment ? *Bulletin AMQ*, *37*(1), 20-25.

Brechenmacher, F. (2012). Un portrait kaléidoscopique du jeune Camille Jordan. *arXiv preprint arXiv:1205.5339*.

Clark, K., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., Tzanakis, C., & Wang, X. (2016). History of mathematics in mathematics education: Recent developments. In L. Radford, F. Furinghetti, & T. Hausberger (Eds.), *Proceeding of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics* (pp. 135-179). IREM de Montpellier.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (Eds.) (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Furinghetti, F. (2019). History and Epistemology in mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-28.

González, M. T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca. España. Disponible en http://hdl.handle.net/10366/22651.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 235-261.

Jordan, C. (1870). *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Paris: Gauthier-Villars.

Kleiner, I. (2007). *A history of abstract algebra*. Boston: Birkhäuser.

Kuckartz, U. (2014). *Qualitative Text Analysis*: *A Guide to Methods, Practice and Using Software*. London: Sage publications.

Lajoie, C. (2000). *Difficultés liées aux premiers apprentissages en Théorie des groupes*. Thèse de doctorat. Université Laval, Ste-Foy. Retrieved from http://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk1/tape3/PQDD_0019/NQ56442.pdf.

Lajoie, C. (2001). Students' difficulties with the concepts of group, subgroup and group isomorphism. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.): *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference*: *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*, *vol. 2*, University of Melbourne, Melbourne, Australia, 9-14 December 2001 (pp. 384-391). Melbourne, Australia: University of Melbourne. Retrieved from http://hdl.handle.net/11343/35000.

Larsen, S. (2009). Reinventing the concepts of group and isomorphism: The case of Jessica and Sandra. *Journal of Mathematical Behavior*, 28(2-3), 119-137.

Lebesgue, M. H. (1926). Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan (1838-1922). Leu dans la séance du 4 Juin 1923. En Académie des sciences (France) (Ed.), *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France* (pp. XXXIX-LXVI). Paris: Gauthier-Villars.

Leron, U., Hazzan, O., & Zazkis, R. (1995). Learning group isomorphism: A crossroads of many concepts. *Educational Studies in Mathematics, 29*(2), 153-174.

Matthews, M. R. (Ed.). (2014). *International handbook of research in history, philosophy and science teaching*. Dordrecht: Springer.

Menghini, M. (2000). On potentialities, limits and risks. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp. 86-90). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Neumann, P. M. (1999). What groups were: a study of the development of the axiomatics of group theory. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, *60*(2), 285-301.

Schlimm, D. (2008). On Abstraction and the Importance of Asking the Right Research Questions: Could Jordan have Proved the Jordan-Hölder Theorem?. *Erkenntnis*, *68*(3), 409-420.

Schubring, G. (2005). *Conflicts between generalization, rigor, and intuition: Number concepts underlying the development of analysis in 17–19th century France and Germany*. New York: Springer-Verlag.

Timmermans, B. (2012). Prehistory of the Concept of Mathematical Structure: Isomorphism Between Group Theory, Crystallography, and Philosophy. *The Mathematical Intelligencer*, *34*(3), 41-54.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 101–119.

Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, *56*(2–3), 209–234.

Wussing, H. (1984). *The Genesis of the Abstract Group Concept: A Contribution to the History of the Origin of Abstract Group Theory*. Massachusetts: The MIT Press.

2.3. On the Theory of Groups, as Depending on the Symbolic Equation $\theta^n = 1$

British Journal for the History of Mathematics

British Journal for the History of Mathematics

Revisiting the concept of isomorphic groups through the work of Cayley

--Manuscript Draft--

Full Title:	Revisiting the concept of isomorphic groups through the work of Cayley
Manuscript Number:	
Article Type:	Original Article
Keywords:	group theory; isomorphic groups; historical-epistemological analysis; qualitative text analysis
Abstract:	This article discusses the concept of isomorphic groups in Arthur Cayley's work in 1854. Methodologically, qualitative text analysis was used considering three levels: reference card, context and purpose of the work and author, and presentation and treatment of the concept. In Cayley's work was identified the seed of the general problem of groups about the classification of all groups up to isomorphism, certainly related to isomorphic groups. This article deals with the recovery of ideas related to the determination of all groups of order four and six based on this analysis. Finally, some implications for teaching are discussed.
Order of Authors:	Erika Zubillaga-Guerrero
	Flor Monserrat Rodríguez-Vásquez
	María Teresa González-Astudillo
	Jesús Romero-Valencia

Revisiting the concept of isomorphic groups through the work of Cayley

Erika Zubillaga-Guerrero[1]; Flor Monserrat Rodríguez-Vásquez[1]; María Teresa González-Astudillo[2]; Jesús Romero-Valencia[3]

[1]*Centre for Research in Mathematics Education, Faculty of Mathematics, Autonomous University of Guerrero, Chilpancingo de los Bravo, Mexico;* [2]*Department of Didactics of Mathematics and Didactics of Experimental Sciences, Faculty of Education, University of Salamanca, Salamanca, Spain;* [3]*Faculty of Mathematics, Autonomous University of Guerrero, Chilpancingo de los Bravo, Mexico.*

*Corresponding author

Erika Zubillaga-Guerrero

[1]Centre for research in Mathematics Education, Faculty of Mathematics, Autonomous University of Guerrero, Av. Lázaro Cárdenas S/N, Colonia Haciendita, Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, 39087, Mexico. E-mail: eguerrero@uagro.mx

Revisiting the concept of isomorphic groups through the work of Cayley

This article discusses the concept of isomorphic groups in Arthur Cayley's work in 1854. Methodologically, qualitative text analysis was used considering three levels: reference card, context and purpose of the work and author, and presentation and treatment of the concept. In Cayley's work was identified the seed of the general problem of groups about the classification of all groups up to isomorphism, certainly related to isomorphic groups. This article deals with the recovery of ideas related to the determination of all groups of order four and six based on this analysis. Finally, some implications for teaching are discussed.

Keywords: group theory; isomorphic groups; historical-epistemological analysis; qualitative text analysis

1 Introduction

Various researchers in Mathematics Education (Barbin 1997; Fauvel and van Maanen 2000; Furinghetti 2019; Heeffer 2006; Jankvist 2009) have given arguments to justify the integration of the history of mathematics in the processes of its teaching and learning, indicating some ways of how to use it. This paper considers the categorization of arguments for integrating the history of mathematics proposed by Jankvist (2009), history as a *tool* and as a *goal*. Specifically, history as a *tool* plays an important role as an auxiliary or supportive means of teaching and learning of mathematical concepts, theories, methods, and algorithms (in-issues).

The present investigation uses history as a *tool* that could enhance a deep understanding of mathematical concepts, looking to do the processes of its theoretical construction explicit (Jankvist 2009). Furthermore, to be interested in the process of building knowledge requires knowing the history of mathematical ideas and therefore, an epistemological reflection. The logical epistemology that deals with the question of the foundations of mathematics is a historical epistemology which is concerned with the question of the meaning of the concepts and theories. However, what gives meaning to the concepts and theories of mathematics are the problems from which they emerge (Barbin 1997). Thus, the historical and epistemological analysis of concepts takes on special relevance.

On the other hand, the use of primary sources (original sources) is a way in which history, as a *tool* and as a *goal*, has been integrated in the teaching and learning of mathematics. In this paper, attending the categorization of Jankvist about how history may or should be integrated, we consider the use of original sources for a historical and epistemological study within the *history-based approaches*, whose interest lies in learning mathematics and 'do not deal with the study of the history of mathematics in a direct manner, but rather in an indirect fashion' (Jankvist 2009, 246-247). This means that the historical development is not explicitly discussed. In this respect, the intention of the analysis of an original source is to highlight the characteristics of the mathematical concepts (for example, its meanings and applications) and the social and cultural aspects that influenced its construction, and with this information available, some episodes or elements that could favour the understanding of mathematical concepts could be retrieved (Anacona 2003).

This investigation analyses the work of Cayley (1854), *On the theory of groups, as depending on the symbolic equation* $\theta^n = 1$. Along with the definition of a group, this work suggests the identification of a group from its table for the first time and it can be also identified the seed of the general problem of groups that was stated in 1878 by this author in connection with the concept of isomorphic groups. The question that guided this investigation was: What problems give rise to the concept of isomorphic groups and how does Cayley deal with this concept?

2 Method

The analysis of the work of Cayley was conducted with a qualitative text analysis (Kuckartz 2014) taking into consideration three levels of analysis (González 2002), each level deepens the information of the previous level: *reference card of the work*, *context and purpose of the work and author* and, *presentation and treatment of the concept of isomorphic groups*. *Reference card of the work* corresponds with the identification of the material under analysis; while the second and third levels have been divided into categories built in a deductive-inductive way (Kuckartz 2014).

The second level, *context and purpose of the work and author*, gives a general and contextualized view of the work for the proper analysis of the facts that influenced its writing and publication. In this sense, the following categories were considered: (1) *Contextualization of the mathematics in the nineteenth century*, which informs about the historical-cultural moment of the mathematics when the work was written, providing general information about the most influential scientific societies of the time, the known mathematical results, the problems that were tried to solve, and other interests in the scientific community, the means of divulgation of mathematical results; as well as the influential political, economic or religious factors in the mathematical field of the time. (2) *Contextualization of the work*, which provides information about the historical (scientific) moment in which it was produced, the goals or aims of the author about the work, as well as the innovations introduced in the work and the influence exerted by scientists of his time and beyond. (3) *Characterization of the structure of the work*, to show the extent and distribution of the content and the works considered as a reference at the time of writing. And finally, (4) *Professional information of the author*, to inform about the institutions where the author carried out his main studies, as well as the influences that he received from other scientists of the time, to highlight the most important works published by the author and to recognized his link with the mathematical concept of interest. In this level, secondary sources (Barnett 2010; Crilly 1999; Godoy 2018; Heatherly 2008; Kleiner 2007; Wussing 1984) complemented the information. These sources were selected attending two criteria: history of mathematics books with elements of the life and academic work of Cayley, and papers in the history of mathematics with specific information of the life, academic work of the author that discussed the specific topic developed by Cayley (1854a).

The third level, *presentation and treatment of the concept of isomorphic groups*, considers the application of the concept used by the author because it unravels its meaning and scope. In addition, a concept is just one element of the conceptual field that transmits its meaning, and therefore a concept will never appear alone; this was taken into consideration to determine how the concept of study was justified and applied (Schubring 2005). The categories considered in this level were: (1) *Definition*, which are descriptions related to the concept that characterize it from a theoretical mathematical point of view. (2) *Other concepts involved*, which are the concepts underlying the concept of isomorphic groups and which are associated with its development. (3) *Types of examples* that the author uses to present the concept of isomorphic groups. And finally, (4) *Applications of the concept*, to identify the importance of the specific mathematical concept from the problems that are solved by this, as well as to identify the scopes and the limitations of the definition.

3 Analysis and interpretation of the work of Cayley

Arthur Cayley (1821-1895) wrote three papers (Cayley 1854a; Cayley 1854b; Cayley 1859) under de title: *On the theory of groups, as depending on the symbolic equation* $\theta^n = 1$, published by Philosophical Magazine, Volume 7 and 18, respectively. This paper analyzed the first of them.

We will draw attention to some significant aspects of the life and academic work of this mathematician that surround the context of this work before the presentation of the analysis and interpretation of the paper of Cayley (1854a).

3.1 Context and purpose of the work and author

Arthur Cayley was born on 16 August 1821 in Richmond, Surrey, England. His academic path initiated at Potticary's School in 1831, he already showed interest for mathematics there. Later, at the age of fourteen, he attended King's College School in London. Towards 1838, Cayley entered Trinity College of Cambridge, being George Peacock (1791-1858) his tutor during his first year in college. Peacock was responsible for initiating the readings of continental mathematical authors in Cambridge (Godoy 2018). Cayley published his first paper, *On a Theorem in the Geometry of Position* in 1841 in the Cambridge Mathematical Journal when he was still a student in Trinity. In 1842, he graduated as a *Senior Wrangler* with William Hopkins (1793-1866) as his private tutor in preparation for the Mathematical Tripos (Godoy 2018; Heatherly 2008).

After leaving Cambridge in 1846, Cayley studied law at Lincoln's Inn in London; he met James Joseph Sylvester (1814-1897) in 1847 with whom he used to discuss the invariant theory widely. Cayley practiced law for fourteen years (1849-1863) in parallel with his mathematical research.

In 1863, Cayley accepted the Sadleirian Professorship in Pure Mathematics at Cambridge University. By that time, he had already published an approximate of 340 papers and built a solid reputation as a mathematical investigator (Crilly 1999). He was elected as a member of the Council of the Royal Society of London in 1852 and into the Royal Society of London in 1857. In 1859, he received the Royal Medal of the Royal Society of London (Heatherly 2008). At Cambridge, Cayley continued playing important roles in scientific organizations like president of the London Mathematical Society (1868-1870); president of the Cambridge Philosophical Society (1869-1870); president of the Royal Astronomical Society (1872-1874); and president of the British Association for the Advancement of Science (1883). In addition, he obtained the first De Morgan Medal awarded by the London Mathematical Society in 1884. Dedicated to mathematical research, Cayley published more than nine hundred papers (Heatherly 2008; Kleiner 2007).

Cayley made significant contributions in diverse areas of algebra like the invariant theory, groups and matrices, and geometry (Kleiner 2007). With respect to groups, Cayley stated a theorem, now known as Cayley's theorem, in 1878:

> The general problem of finding all the groups of a given order *n*, is really identical with the apparently less general problem of finding all the groups of the same order *n*, which can be formed with the substitutions upon *n* letters. (Cayley 1878, 52)

Before his works of 1878, Cayley (Cayley 1854a) had already stated the first definition of a group in his paper: *On the theory of groups, as depending on the symbolic equation* $\theta^n = 1$, identifying the generality of this concept and showing several examples besides permutations. For example, he made reference to the quaternions, the transposition and inversion of matrices and the quadratic forms of Gauss. The ideas from the English school of symbolic algebra, specifically the contributions of mathematicians like Peacock, Augustus De Morgan (1806-1871), William Rowan Hamilton (1805-1865) and George Boole (1815-1864), influenced the orientation of Cayley toward a more abstract vision of groups. In this respect, Wussing (1984) points out that as a result of the concerns for the abstract bases of mathematics the concept of abstract group was developed in England in the sense of an arbitrary system of elements determined just for the definition of their relations. Although 'Cayley's mathematical interests were strongly influenced by the general state of British mathematics at the time' (Barnett 2010, 48), he was also familiar with the works of the continental mathematicians in general and with the Frenchmen Augustin-Louis Cauchy

(1789-1857) and Évariste Galois (1811-1832) in particular, as well as of the Franco-Italian Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813), in relation with his interpretation of group theory. However, the work of Cayley in 1854 did not make an immediate impact on his contemporaries in the appreciation of the abstract approach to the concept of group owing to the fact that the only groups under investigation by that time were the groups of permutations (Kleiner 2007; Wussing 1984).

3.2 Presentation and treatment of the concept isomorphic groups

Cayley 'became the first to formulate a description of the algebraic structure now known as an abstract group' (Barnett 2010, 48). In this 1854 paper, Cayley held a discussion about the general properties of what he seemed to consider as operations and were referred to as *symbols of operation*: (1) 'The symbol 1 will naturally denote an operation which (either generally or in regard to the particular operand) leaves the operand unaltered' (Cayley 1854a, 40) (identity element). (2) '$\theta\phi$ denotes the compound operation, [...], first of the operation ϕ, and then of the operation θ; $\theta\phi$ is of course in general different from $\phi\theta$' (Cayley 1854a, 40) (commutativity, referred to as convertible by Cayley). (3) 'The symbols $\theta, \phi, \ldots$ are in general such that $\theta \cdot \phi\chi = \theta\phi \cdot \chi$, &c.' (Cayley 1854a, 40) (associativity). (4) 'The distributive law has no application to the symbols $\theta\phi$ ...' (Cayley 1854a, 41). (5) The properties of the exponents are valid (the *index law*): $\theta^0 = 1$ and $\theta^m \cdot \theta^n = \theta^{m+n}$, $\forall\, m, n \in \mathbb{Z}$, which also considers: $\theta\theta^{-1} = \theta^{-1}\theta = 1$ (inverse property). And finally, (6) 'if $\theta = \phi$, then, whatever the symbols α, β may be $\alpha\theta\beta = \alpha\phi\beta$, and conversely' (Cayley 1854a, 41). In (6), the first implication indicates that the operation is well defined in a group, while the reciprocal of the original proposition points out the validity of the cancellation property closely related with the inverse property.

In the definition of group presented by Cayley, we can identify another property, (7) closure under products. Together with (1), (3), and (5) Cayley had implicitly declared the other properties that constitute an abstract group, assuming that the identity element and inverses are unique.

> A set of symbols,
> $1, \alpha, \beta \ldots$

> all of them different, and such that the product of any two of them (no matter in what order), or the product of any one of them into itself belongs to the set, is said to be a *group*. (Cayley 1854a, 41)

Cayley was the first one to point out that a group is fully determined by its multiplication table (Cayley's tables), where no file or column has repeated elements. The construction of the table gathers all possible information about the operation in the group, and the symbols $1, \alpha, \beta, \ldots$ did not represent any 'concrete instance of an operation' (Barnett 2010, 56).

> It follows that if the entire group is multiplied by any one of the symbols, either as further or nearer factor, the effect is simply to reproduce the group; or what is the same thing […],

Further factors.

Nearer factors.				
1	1	α	β	..
α	α	α^2	$\beta\alpha$	
β	β	$\alpha\beta$	β^2	
	.			

> […] each line as each column of the square will contain all the symbols $1, \alpha, \beta$.. It also follows that the product of any number of the symbols, with or without repetitions, and in any order whatever, is a symbol of the group. (Cayley 1854a, 41)

On the other hand, Cayley (1854a) developed two cases from which he made the distinction between the ordinary equation $x^n - 1 = 0$ and the symbolic equation $\theta^n = 1$ (a cyclic and non-cyclic group, respectively); namely, he carried out a detailed logical analysis of all possibilities of the nature of the groups of order four and six showing, for each one, the existence of two *essentially distinct* groups, as Cayley referred to in his article, that we now identify as non-isomorphic groups, even when Cayley did not present a definition of isomorphic groups. The analysis began considering a finite group $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ (n symbols) as a system of roots of the symbolic equation $\theta^n = 1$. He assumed some results of groups as true even when he did not provide proofs for them; for example, those that referred to the relations between the order of a group and the order of its elements, subgroups and cosets, even when he did not use these terms. In this sense, Barnett (2010) carried out the presentation of theorems in terms of the current terminology and notation and discussed them in the light of what he knows about the works of Lagrange on algebraic solutions of polynomial equations and Cauchy on permutation theory.

Cayley explored the nature of n in the symbolic equation and concludes that every finite group G of index (*order*) prime is *cyclic* (without using this term): 'when n is a prime number, the group is of necessity of the form $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}, (\alpha^n = 1)$' (Cayley 1854a, 41). According to Cayley, every group of index n for n a prime or composite number of the previous form (cyclic), 'is in every respect analogous to the system of the roots of the ordinary binomial equation $x^n - 1 = 0$' (Cayley 1854a, 41-42), this means, these groups are isomorphic.

Cayley also stated that if G is a cyclic group of prime order, then every element of G, except the identity, is a generator (referred to by him as *prime roots*); but for a cyclic group of order n for a composite number, there are only as many generators as natural numbers $k < n$ for which k and n are relatively primes ($gcd\ (k, n) = 1$). Cayley did not provide proofs; however, he was aware of these results previously discussed by Lagrange in the specific case of the n^{th} roots of unity (Barnett 2010).

After the classification of the finite groups of order n for prime numbers, the next interesting problem was to determine all finite groups of order n for composite numbers. For the case $n = 4$, Cayley showed two *essentially distinct* groups of this order; only one of them is *analogous* (isomorphic) to the system of roots of the ordinary equation $x^4 - 1 = 0$ (namely, one is cyclic and the other is not).

Cayley began this discussion considering a group G of distinct elements (symbols) $\{1, \alpha, \beta, \gamma\}$. Except for the identity, the other three elements (α, β, γ) are of order two or four, because the order of any element α ($ord\ (\alpha)$) of G is a divisor of the order of the group ($|G|$): 'if any symbol α of the group satisfies the equation $\theta^r = 1$, where r is less that n, then that r must be a submultiple of n' (Cayley 1854a, 41). If $ord(\alpha) = ord(\beta) = ord(\gamma) = 4$, namely, if all elements of G different from the identity are generators, then the group G is cyclic of prime order; but $|G| = 4$, and therefore G must contain an element of order two. Suppose that $\beta^2 = 1$, as Cayley did, that is $ord(\beta) = 2$. Let $H = \langle\beta\rangle = \{1, \beta\}$ be a subgroup of G and $\alpha \in G$, $\alpha \neq 1, \beta$, then $\alpha H = \{\alpha, \alpha\beta\}$. $H \cap \alpha H = \emptyset$ is satisfied; therefore, $G = \{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$. Multiplying each element of G on the left (or a further factor as Cayley referred to it) by α, we obtain $\{\alpha, \alpha^2, \alpha\beta, \alpha^2\beta\}$ (see Figure 1). These resulting elements correspond with some of the original elements $\{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$, so that $\alpha^2 = 1$ or $\alpha^2 = \beta$.

	1	α	β	$\alpha\beta$
1	1	α	β	$\alpha\beta$
α	α	α^2	$\beta\alpha$	$\alpha\beta\alpha$
β	β	$\alpha\beta$	β^2	$\alpha\beta^2$
$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha^2\beta$	$\beta\alpha\beta$	$(\alpha\beta)^2$

Figure 1. Table of the group $G = \{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$, where 1 represents the identity and $\alpha, \beta, \alpha\beta$ are three distinct elements (symbols).

$\alpha^2 = \beta$ implies that $\alpha\beta = \beta\alpha$ and $\alpha^4 = 1$ (α is of order 4, because $\alpha^4 = \alpha^2\alpha^2 = \beta^2 = 1$), therefore we obtain the cyclic group $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, (\alpha^4 = 1)\}$ making the corresponding substitution in $\{\alpha, \alpha^2, \alpha\beta, \alpha^2\beta\}$.

In his article, Cayley represented the group $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, (\alpha^4 = 1)\}$ from a table denoting the same group with the symbols $\{1, \alpha, \beta, \gamma\}$. We show the third row as an example of how the table is filled.

Establishing the correspondence $\alpha \leftrightarrow \alpha$; $\alpha^2 \leftrightarrow \beta$; $\alpha^3 \leftrightarrow \gamma$; $\alpha^4 \leftrightarrow 1$, we obtain: $1\beta = \beta$; $\alpha\beta = \alpha\alpha^2 = \alpha^3 = \gamma$; $\beta\beta = \alpha^2\alpha^2 = \alpha^4 = 1$; $\gamma\beta = \alpha^3\alpha^2 = \alpha^4\alpha = \alpha$.[7]

	$1,$	$\alpha,$	$\beta,$	γ
1	1	α	β	γ
α	α	β	γ	1
β	β	γ	1	α
γ	γ	1	α	β

[7] Keep in mind that the elements are obtained in the following way: For the (i, j) entry in this table, the ith element (column) is multiplied by the jth element (row).

(Cayley 1854a, 42)

On the other hand, considering the case $\alpha^2 = 1$, multiplying the elements of $G = \{1, \alpha, \beta, \alpha\beta, (\beta^2 = 1)\}$ on the left (or a *further factor*) by β, gives us $\{\beta, \beta\alpha, \beta^2, \beta\alpha\beta\}$ (see Figure 1), these resulting elements correspond with some of the elements of G; we can deduce from this that $\beta\alpha = \alpha\beta$, and therefore, $(\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2 = 1$.

Cayley built his table in the representation of this group. We show the third row of the table as an example of how to fill it, taking $\gamma = \alpha\beta$: $1\beta = \beta$; $\alpha\beta = \gamma$; $\beta\beta = \beta^2 = 1$; $\gamma\beta = \alpha\beta\beta = \alpha\beta^2 = \alpha$.

	1	α	β	γ
1	1	α	β	γ
α	α	1	γ	β
β	β	γ	1	α
γ	γ	β	α	1

(Cayley 1854a, 43)

For the case $n = 6$, Cayley showed two *essentially distinct* groups of this order; only one of them is *analogous* (isomorphic) to the system of roots of the ordinary equation $x^6 - 1 = 0$; this means that one is cyclic and the other is not, and in fact, it is not even commutative, making reference to the group of permutations of three letters (S_3) as an example of this last one.

Cayley began the discussion considering the group G of six different elements $\{1, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$, where 1 represents the identity. The only possible orders for these elements (except the identity) are two, three or six. The strategy used by Cayley was to show that not all its elements of G different from the identity have order two $(ord(\alpha) = ord(\beta) = ord(\gamma) = ord(\delta) = ord(\varepsilon) = 2)$, because it would imply that G had a subgroup of order four. To explain this, suppose that every element (except the identity) of G has order two, and let γ, δ be two elements of G, such that $\gamma^2 = 1$ and $\delta^2 = 1$ then, if $\gamma\delta$ has also order 2 $((\gamma\delta)^2 = 1)$, it can be deduced that $\gamma\delta = \delta\gamma$. As a consequence, $\{1, \gamma, \delta, \gamma\delta\}$ would be a subgroup of G, which is not possible because 'if among the roots of the symbolic equation $\theta^n = 1$, there are contained a system of roots of the symbolic equation $\theta^p = 1$ [...], then p is a submultiple of n' (Cayley 1854a, 44). Therefore, $\gamma^2 = 1$, $\delta^2 = 1$ implies that $(\gamma\delta)^3 = 1$, namely, a group G of order six must contain an element of order three.

Suppose that $\alpha^3 = 1$, as Cayley did, namely, $ord(\alpha) = 3$. Let $H = \langle\alpha\rangle = \{1, \alpha, \alpha^2\}$ be a subgroup of G and $\gamma \in G$, $\gamma \neq 1, \alpha, \alpha^2$, then $H\gamma = \{\gamma, \alpha\gamma, \alpha^2\gamma\}$. It follows that $H \cap H\gamma = \emptyset$, therefore $G = \{1, \alpha, \alpha^2, \gamma, \alpha\gamma, \alpha^2\gamma, (\alpha^3 = 1)\}$. Multiplying each term of G on the right (or a nearest factor, as referred to by Cayley) by γ, we get $\{\gamma, \alpha\gamma, \alpha^2\gamma, \gamma^2, \alpha\gamma^2, \alpha^2\gamma^2\}$ (see Figure 2). These resulting elements correspond with some of the original elements $\{1, \alpha, \alpha^2, \gamma, \alpha\gamma, \alpha^2\gamma\}$, so that $\gamma^2 = 1$, $\gamma^2 = \alpha$ or $\gamma^2 = \alpha^2$. We discuss three cases in the following paragraphs.

	1	α	α^2	γ	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$
1	1	α	α^2	γ	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$
α	α	α^2	1	$\gamma\alpha$	$\alpha\gamma\alpha$	$\alpha^2\gamma\alpha$
α^2	α^2	1	α	$\gamma\alpha^2$	$\alpha\gamma\alpha^2$	$\alpha^2\gamma\alpha^2$
γ	γ	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$	γ^2	$\alpha\gamma^2$	$\alpha^2\gamma^2$
$\alpha\gamma$	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$	γ	$\gamma\alpha\gamma$	$(\alpha\gamma)^2$	$\alpha^2\gamma\alpha\gamma$
$\alpha^2\gamma$	$\alpha^2\gamma$	γ	$\alpha\gamma$	$\gamma\alpha^2\gamma$	$\alpha\gamma\alpha^2\gamma$	$(\alpha^2\gamma)^2$

Figure 2. Table of the group $G = \{1, \alpha, \alpha^2, \gamma, \alpha\gamma, \alpha^2\gamma\}$, where 1 represents the identity and $\alpha, \alpha^2, \gamma, \alpha\gamma, \alpha^2\gamma$ are five distinct elements (symbols).

In Figure 2, we should realize that $\gamma^2 = \alpha^2$ implies $\alpha\gamma^2 = 1$ (because $\alpha^3 = 1$), and therefore $\alpha\gamma = \gamma\alpha$ (Figure 3). In an analogous way, $\gamma^2 = \alpha$ implies $\alpha^2\gamma^2 = 1$ and, therefore, $\alpha\gamma = \gamma\alpha$ (Figure 4). In both cases, G is the cyclic group $\langle\gamma\rangle = \{1, \gamma, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4, \gamma^5, (\gamma^6 = 1)\}$. In the first case: $\gamma^1 = \gamma$; $\gamma^2 = \alpha^2$; $\gamma^3 = \gamma^2\gamma = \alpha^2\gamma$; $\gamma^4 = \gamma^3\gamma = \alpha^2\gamma\gamma = \alpha^2\alpha^2 = \alpha$; $\gamma^5 = \gamma^4\gamma = \alpha\gamma$; $\gamma^6 = \alpha\gamma\gamma = \alpha\alpha^2$=1. In the second case: $\gamma^1 = \gamma$; $\gamma^2 = \alpha$; $\gamma^3 = \gamma^2\gamma = \alpha\gamma$; $\gamma^4 = \alpha\gamma\gamma = \alpha^2$; $\gamma^5 = \gamma^4\gamma = \alpha^2\gamma$; $\gamma^6 = \alpha^2\gamma\gamma = \alpha^6 = 1$.

	1	α	α^2	γ	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$
1	1	α	α^2	γ	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$
α	α	α^2	1	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$	γ
α^2	α^2	1	α	$\alpha^2\gamma$	γ	$\alpha\gamma$
γ	γ	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$	α^2	1	α
$\alpha\gamma$	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$	γ	1	α	α^2
$\alpha^2\gamma$	$\alpha^2\gamma$	γ	$\alpha\gamma$	α	α^2	1

Figure 3. Case 1. Table of the group under the assumptions $\gamma^2 = \alpha^2$ and $\alpha\gamma = \gamma\alpha$.

	1	α	α^2	γ	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$
1	1	α	α^2	γ	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$
α	α	α^2	1	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$	γ
α^2	α^2	1	α	$\alpha^2\gamma$	γ	$\alpha\gamma$
γ	γ	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$	α	α^2	1
$\alpha\gamma$	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$	γ	α^2	1	α
$\alpha^2\gamma$	$\alpha^2\gamma$	γ	$\alpha\gamma$	1	α	α^2

Figure 4. Case 2. Table of the group under the assumptions $\gamma^2 = \alpha$ and $\alpha\gamma = \gamma\alpha$.

Finally, for the third case $\gamma^2 = 1$, multiplying each term G on the left (or by a *further factor*) by γ, we get $\{\gamma, \gamma\alpha, \gamma\alpha^2, \gamma^2, \gamma\alpha\gamma, \gamma\alpha^2\gamma\}$ (see Figure 2), which lead us to consider two possible subcases: (a) $\gamma\alpha = \alpha\gamma$ (Figure 5) or (b) $\gamma\alpha = \alpha^2\gamma$ (Figure 6), which leads to the groups $\{1, \alpha, \alpha^2, \gamma, \alpha\gamma, \alpha^2\gamma, (\alpha^3 = 1, \gamma^2 = 1, \gamma\alpha = \alpha\gamma)\}$ and $\{1, \alpha, \alpha^2, \gamma, \alpha\gamma, \alpha^2\gamma, (\alpha^3 = 1, \gamma^2 = 1, \gamma\alpha = \alpha^2\gamma)\}$, respectively.

	1	α	α^2	γ	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$
1	1	α	α^2	γ	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$
α	α	α^2	1	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$	γ
α^2	α^2	1	α	$\alpha^2\gamma$	γ	$\alpha\gamma$
γ	γ	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$	1	α	α^2
$\alpha\gamma$	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$	γ	α	α^2	1
$\alpha^2\gamma$	$\alpha^2\gamma$	γ	$\alpha\gamma$	α^2	1	α

Figure 5. Case 3(a). Table of the group under the assumptions $\gamma^2 = 1$ and $\gamma\alpha = \gamma\alpha$.

	1	α	α^2	γ	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$
1	1	α	α^2	γ	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$
α	α	α^2	1	$\alpha^2\gamma$	γ	$\alpha\gamma$
α^2	α^2	1	α	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$	γ
γ	γ	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$	1	α	α^2
$\alpha\gamma$	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma$	γ	α^2	1	α
$\alpha^2\gamma$	$\alpha^2\gamma$	γ	$\alpha\gamma$	α	α^2	1

Figure 6. Case 3(b). Table of the group under the assumptions $\gamma^2 = 1$ and $\gamma\alpha = \alpha^2\gamma$.

For the case 3 (a), if we denote $\alpha\gamma = \lambda$ (as Cayley did), as $\alpha\gamma = \gamma\alpha$, then $(\alpha\gamma)^k = \alpha^k\gamma^k$, for all $k \in \mathbb{Z}$. Thus, we will get: $\lambda^1 = \alpha\gamma$; $\lambda^2 = (\alpha\gamma)^2 = \alpha^2\gamma^2 = \alpha^2$; $\lambda^3 = \lambda^2\lambda = \alpha^2\alpha\gamma = \alpha^3\gamma = \gamma$; $\lambda^4 = (\lambda^2)^2 = (\alpha^2)^2 = \alpha^3\alpha = \alpha$; $\lambda^5 = \lambda^4\lambda = \alpha\alpha\gamma = \alpha^2\gamma$; $\lambda^6 = (\lambda^3)^2 = \gamma^2 = 1$. Therefore, $G = \langle\lambda\rangle = \{1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5, (\lambda^6 = 1)\}$.

Cayley represented the group $\{1, \alpha, \alpha^2, \gamma, \alpha\gamma, \alpha^2\gamma, (\alpha^3 = 1, \gamma^2 = 1, \gamma\alpha = \alpha\gamma)\}$, from its table denoting it with the symbols $\{1, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$. Establishing the correspondence $1 \leftrightarrow 1$; $\alpha \leftrightarrow \beta$; $\alpha^2 \leftrightarrow \delta$; $\gamma \leftrightarrow \gamma$; $\alpha\gamma \leftrightarrow \varepsilon$; $\alpha^2\gamma \leftrightarrow \alpha$, we show the third row of this table as an example of how to fill it: $1\beta = \beta$; $\alpha\beta = \alpha^2\gamma\alpha = \alpha^3\gamma = \gamma$; $\beta\beta = \alpha^2 = \delta$; $\gamma\beta = \gamma\alpha = \alpha\gamma = \varepsilon$; $\delta\beta = \alpha^2\alpha = \alpha^3 = 1$; $\varepsilon\beta = \alpha\gamma\alpha = \alpha^2\gamma = \alpha$.

	1,	α,	β,	γ,	δ,	ε
1	1	α	β	γ	δ	ε
α	α	β	γ	δ	ε	1
β	β	γ	δ	ε	1	α
γ	γ	δ	ε	1	α	β
δ	δ	ε	1	α	β	γ
ε	ε	1	α	β	γ	δ

(Cayley 1854a, 45)

From the cases 1, 2, 3(a), and 3(b) the first three cases turn out to be *analogous* (isomorphic) to the system of roots of the ordinary equation $x^6 - 1 = 0$ (group G is cyclic). In the representation of the other group *essentially distinct* to $\{1, \alpha, \alpha^2, \gamma, \alpha\gamma, \alpha^2\gamma, (\alpha^3 = 1, \gamma^2 = 1, \gamma\alpha = \alpha\gamma)\}$, namely case 3(b), Cayley built its table by denoting this group with the symbols $\{1, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$. Establishing the correspondence $1 \leftrightarrow 1$; $\alpha \leftrightarrow \alpha$; $\alpha^2 \leftrightarrow \beta$; $\gamma \leftrightarrow \gamma$; $\alpha\gamma \leftrightarrow \delta$; $\alpha^2\gamma \leftrightarrow \varepsilon$, we show as an example of filling in the table for the third row: $1\beta = \beta$; $\alpha\beta = \alpha\alpha^2 = \alpha^3 = 1$; $\beta\beta = \alpha^2\alpha^2 = \alpha^3\alpha = \alpha$; $\gamma\beta = \gamma\alpha^2 = \gamma\alpha\alpha = \alpha^2\gamma\alpha = \alpha^2\alpha^2\gamma = \alpha^3\alpha\gamma = \alpha\gamma = \delta$; $\delta\beta = \alpha\gamma\alpha^2 = \alpha\gamma\alpha\alpha = \alpha\alpha^2\gamma\alpha = \alpha^3\gamma\alpha = \alpha^2\gamma = \varepsilon$; $\varepsilon\beta = \alpha^2\gamma\alpha^2 = \gamma\alpha\alpha^2 = \gamma\alpha^3 = \gamma$.

	1,	α,	β,	γ,	δ,	ε
1	1	α	β	γ	δ	ε
α	α	β	1	ε	γ	δ
β	β	1	α	δ	ε	γ
γ	γ	δ	ε	1	α	β
δ	δ	ε	γ	β	1	α
ε	ε	γ	δ	α	β	1

(Cayley 1854a, 45)

4 Discussion

Cayley presented what may be considered to be the first attempt to define a group axiomatically. He recognized the generalization of the concept of group, made use of *symbols* to represent a group through its table. Cayley did not use the term isomorphic groups but stated, for example, that the group (cyclic of order n) $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}, (\alpha^n = 1)\}$ is 'is in every respect analogous to the system of the roots of the ordinary binomial equation $x^n - 1 = 0$' (Cayley 1854a, 41-42), this is, there is only one given group of prime order n (the cyclic group of order n) and, for the particular cases of order four and six, he found two *essentially distinct* groups for each of them. Finally, when he dealt with the case for $n = 6$, he deduced that both assumptions $\gamma^2 = \alpha^2$ y $\gamma^2 = \alpha$ give the *same group* (cyclic) $\{1, \gamma, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4, \gamma^5, (\gamma^6 = 1)\}$, and that assuming $\gamma^2 = 1$, for the particular case $\gamma\alpha = \alpha\gamma$, we get that this group is *analogous* (isomorphic) to the system of roots of the ordinary equation $x^6 - 1 = 0$, namely, the one considered previously: $\{1, \gamma, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4, \gamma^5, (\gamma^6 = 1)\}$.

Even when it was not until 1878 that Cayley stated that 'a group is defined by means of the laws of combination of its symbols' (Cayley 1878, p. 51), together with the enunciation of what is now known as Cayley's theorem, the seed of these ideas was implicit in his article of 1854, when he suggested for the first time that a group was fully determined by its multiplication table, and in the work carried out to present the distinction between the theory of the symbolic equation $\theta^n = 1$ and the ordinary equation $x^n - 1 = 0$, respectively. We will now show two schemes that describe in a synthesized way the reasoning followed by Cayley in the determination of all groups of order four and six that can be deduced from his paper of 1854. These schemes include current mathematical notation and terminology.

For the determination of all groups of order four (see Figure 7), Cayley already knew that the order of each element of a finite group should divide the order of a group: 'if any symbol α of the group satisfies the equation $\theta^r = 1$, where r is less that n, then that r must be a submultiple of n' (Cayley 1854a, 41). In addition, he deduced that any group of order n is cyclic: 'when n is a prime number, the group is of necessity of the form $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}, (\alpha^n = 1)$' (Cayley 1854a, 41). Therefore, when n is a prime, any element different from the identity is a generator of the group. However, for a cyclic group of order n for a composite number, there will be as many generators as natural numbers $k < n$, for which k and n are relatively prime ($gcd\,(k, n) = 1$).

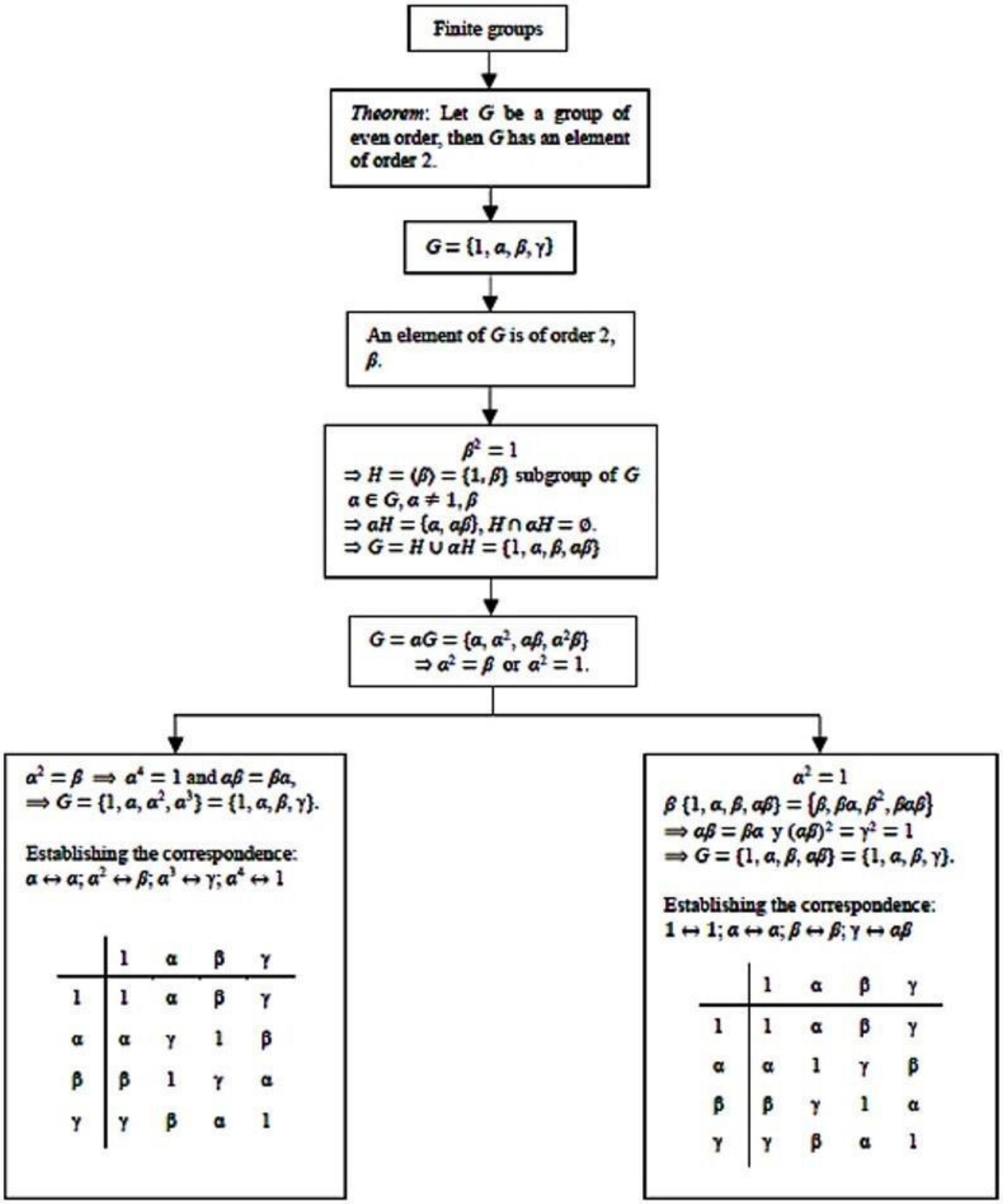
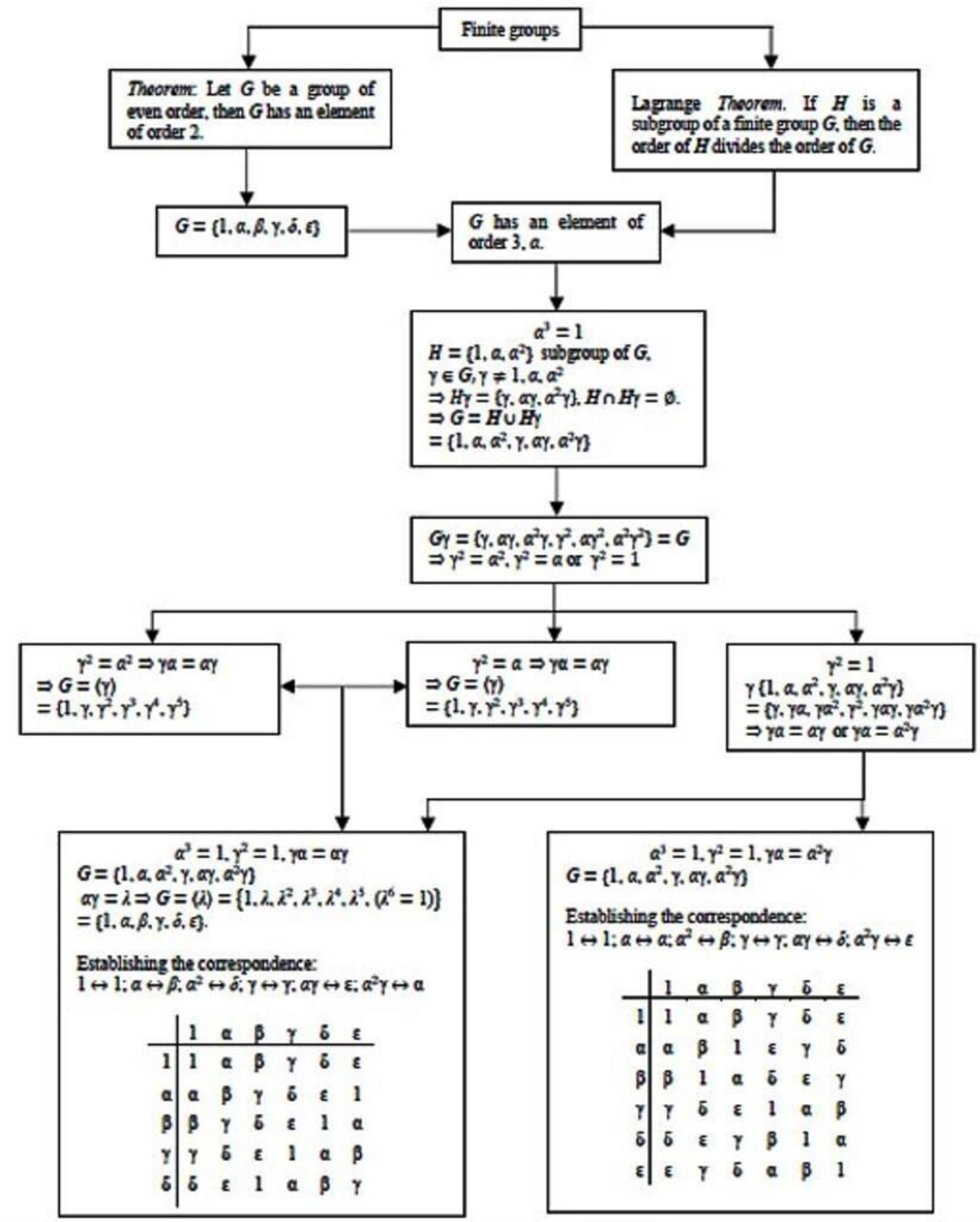


Figure 7. Two *essentially distinct* groups of order four.

Cayley's reasoning could have initiated with the exploration of the possible cases for the order of the elements of a group. For a group $G = \{1, \alpha, \beta, \gamma\}$, the divisors of the order of the group are one, two, and four; they match with the possible orders of the elements of G. We can ensure that G has only one element of order one (the identity). If we suppose that the three remaining elements have order four, we obtain that the three of them are generators and this would imply that G is cyclic, with $n = 4$ and prime. Due to the impossibility of this assumption, G must contain at least one element of order two. It can be deduced that G has an element of order two. Cayley relied on this result to determine all groups of order four, using also the notions of subgroups and cosets, without making explicit reference to these terms.

Continuing with the analysis, for a group $G = \{1, \alpha, \beta, \gamma\}$, we have determined the existence of an element of order one (the identity) and an element of order two. If G has an element of order four (cyclic) then it should have two, because 'when n is composite, there are only as many prime roots as there are numbers less than n and prime to it' (Cayley 1854a, 42). Otherwise, the order of all elements different from identity must be two. Cayley represented the two *essentially distinct groups* of this order (the cyclic group and the other one), both commutative, from their respective tables considering that if $G = \{1, \alpha, \beta, \ldots\}$ is a group with an identity element 1, then Cayley's table for G is such that all files and rows must contain each element of G one time.

In an analogous way, for a group $G = \{1, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ (Figure 8), the divisors of the order of the group are one, two, three, and six which correspond with the possible orders for the elements of G. We can ensure that G has a unique element of order one (identity) and that there is an element of order three. The reasoning of Cayley was to show that not all its elements of G can be of order two. Because then G should have a subgroup of order four, which is impossible (Lagrange's theorem), seeing that 'if among the roots of the symbolic equation $\theta^n = 1$, there are contained a system of roots of the symbolic equation $\theta^p = 1$ […], then p is a submultiple of n' (Cayley 1854a, 44). Then G must have elements of order three or six. If G has an element of order six, then it must have two. There would be a contradiction with Lagrange's theorem if the other elements were of order two; so, there should be an element of order three. Cayley used this result to determine all groups of order six, using a similar reasoning to the case of four elements and determined *two essentially distinct groups* of this order (the cyclic and the other) with just one of them commutative; he represented them with their respective tables.



	1	α	β	γ	δ	ε
1	1	α	β	γ	δ	ε
α	α	β	γ	δ	ε	1
β	β	γ	δ	ε	1	α
γ	γ	δ	ε	1	α	β
δ	δ	ε	1	α	β	γ

	1	α	β	γ	δ	ε
1	1	α	β	γ	δ	ε
α	α	β	1	ε	γ	δ
β	β	1	α	δ	ε	γ
γ	γ	δ	ε	1	α	β
δ	δ	ε	γ	β	1	α
ε	ε	γ	δ	α	β	1

Figure 8. Two *essentially distinct* groups of order six.

5 Final considerations

Today, although in any first course in abstract algebra the determination of all groups of order four and six can be considered a standard exercise, the mental processes involved in dealing with these determinations have not been studied in-depth, as well as the ways of involving students in the analysis of why there are two groups of order four and six up to isomorphism, respectively.

In the development of mathematics, the classification of all finite groups (Cayley 1878) was one of the most important problems within group theory. We consider that an in-depth analysis of this application of the concept of isomorphic groups by students has not been prioritized in teaching. In this respect, Lajoie (2000) showed that undergraduate students have difficulties in recognizing a usefulness to the isomorphism concept in algebra, and as a result of reducing the level of abstraction, Hazzan (2001) showed that in dealing with the specific task of constructing an operation table that it represents a group of order four, *adopting a local perspective* made that none of the students use the argument that the required group should be isomorphic to one of the two known groups of order four (the cyclic group and the non-cyclic group), which would have given evidence of an object conception of these groups.

Students are often asked to determine all possible Cayley's tables for groups of a given order (Thrash and Walls 1991), which may be difficult or impractical, even for those of small order (consider a set with five elements, for example), without considering the difficulties students face in the construction of group tables (Hazzan 2001). On the other hand, the strategy of comparing the tables of two specific groups to determine if they are isomorphic can be helpful the appreciation of the similarities or differences in the structure of such groups, but this exercise does not promote an analysis of why these groups satisfy those structural properties. In contrast to the work done by Cayley (1854a), who had an abstract view on the groups, and did not focus on specific groups, although he recognized some examples such as permutations and the n^{th} roots of unity. Cayley used a generators and relations approach to groups and it was in this context where the seed of the concept of isomorphic groups can be identified, by exemplifying the distinction between the ordinary equation $x^n - 1 = 0$ and the symbolic equation $\theta^n = 1$ (cyclic and non-cyclic groups, respectively).

Like Thrash and Walls (1991) and Larsen (2009), we consider the use of the group tables and the strategy of the renaming of the elements in a first approach to the concept of isomorphism in a first course of abstract algebra as essential. However, these instructional strategies could be enriched if the ideas gathered from Cayley's work on isomorphic groups analyzed in this article were considered.

Finally, in this theoretical article we have accomplished the recovery of the ideas and meanings underlying isomorphic groups in a specific historical moment. Schemes in section 4 can also be considered as a particular description or a possible path to follow in todays' instruction dealing with an application of isomorphic groups based on the work of Cayley (1854a), in this way could be developed instructional designs and inform about the students' understanding. However, the presentation of an educational intervention goes beyond the scope of this document and is not a goal of the investigation.

Disclosure statement

The authors state that they have no competing interests.

Bibliography

Anacona, Maribel, 'La historia de las matemáticas en la educación matemática', *Revista EMA*, 8/1 (2003), 30-46.

Barbin, Evelyne, 'Histoire des mathématiques: pourquoi? comment?', *Bulletin AMQ*, 37/1 (1997), 20-25.

Barnett, Janet Heine, *Abstract awakenings in algebra: early group theory in the works of Lagrange, Cauchy, and Cayley*, https://www.cs.nmsu.edu/historical-projects/Projects/Cayley.pdf, 2010.

Cayley, Arthur, 'VII. On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$', *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 7/42 (1854a), 40-47. https://doi.org/10.1080/14786445408647421.

Cayley, Arthur, 'LXV. On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$.-Part II.', *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 7/47 (1854b), 408-409. https://doi.org/10.1080/14786445408651852.

Cayley, Arthur, 'VII. On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$.-Part III', *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 18/117 (1859), 34-37.

Cayley, Arthur, 'Desiderata and suggestions: No. 1. The theory of groups', *American Journal of Mathematics*, 1/1 (1878), 50-52. https://www.jstor.org/stable/2369433.

Crilly, Tony, 'Arthur Cayley as Sadleirian Professor: a glimpse of mathematics teaching at 19th-century Cambridge', *Historia Mathematica*, 26/2 (1999), 125-160. https://doi.org/10.1006/hmat.1999.2233.

Fauvel, John, and van Maanen, Jan, (eds), *History in mathematics education: the ICMI study*, Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2000.

Furinghetti, Fulvia, 'History and epistemology in mathematics education', *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, (2019), 1-28. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1565454.

Godoy, Kleyton Vinicyus, 'O TRIPOS DE MATEMÁTICA DE 1842: o percurso da preparação de A. Cayley para a realização desse exame', *Revista de História da Educação Matemática*, 4/2 (2018), 98-117.

González, María Teresa, *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del análisis matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos*, PhD thesis, University of Salamanca, 2002, http://hdl.handle.net/10366/22651.

Hazzan, Orit, 'Reducing abstraction: the case of constructing an operation table for a group', *The Journal of Mathematical Behavior*, 20/2 (2001), 163-172. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(01)00067-0.

Heatherly, Henry E, 'Arthur Cayley mathematician laureate of the Victorian age', *The Mathematical Intelligencer*, 30/4 (2008), 64-67. https://doi.org/10.1007/BF03038100.

Heeffer, Albrecht, 'The methodological relevance of the history of mathematics for mathematics education', in G Dhompongsa, F Bhatti, and Q Kitson (eds), *Proceedings of the International Conference on 21st Century Information Technology in Mathematics Education*, 2006, 267-276.

Jankvist, Uffe Thomas, ‘A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education’, *Educational Studies in Mathematics*, 71/3 (2009), 235-261. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9.

Kleiner, Israel, *A history of abstract algebra*, Boston: Birkhäuser, 2007.

Kuckartz, Udo, *Qualitative text analysis*: *a guide to methods, practice and using software*, London: Sage publications, 2014.

Lajoie, Caroline, *Difficultés liées aux premiers apprentissages en théorie des groups*, PhD thesis, Université Laval, 2000, http://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk1/tape3/PQDD_0019/NQ56442.pdf.

Larsen, Sean, ‘Reinventing the concepts of group and isomorphism: the case of Jessica and Sandra’, *The Journal of Mathematical Behavior*, 28/2-3 (2009), 119-137. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2009.06.001.

Schubring, Gert, *Conflicts between generalization, rigor, and intuition: number concepts underlying the development of analysis in 17–19th century France and Germany*, New York: Springer-Verlag, 2005.

Thrash, Karen R, and Walls, Gary L, ‘A classroom note on understanding the concept of group isomorphism’, *Mathematics and Computer Education*, 25/1 (1991), 53-55.

Wussing, Hans, *The genesis of the abstract group concept: a contribution to the history of the origin of abstract group theory*, Massachusetts: The MIT Press, 1984.

Capítulo 3

Conexiones matemáticas y el problema histórico de la clasificación de grupos finitos

3.1. El problema

Las conexiones matemáticas han sido el objeto de estudio de diversas investigaciones en educación matemática. Algunos de estos trabajos se han desarrollado con la participación de estudiantes (por ejemplo, Jaijan y Loipha, 2012; García-García y Dolores-Flores, 2017), incluyendo futuros profesores y profesores en servicio (por mencionar algunos, Businskas, 2008; Mhlolo, Venkat, y Schäfer, 2012; Singletary, 2012). En particular, se han estudiado las interconexiones entre conceptos del Cálculo como la derivada y la integral (Berry y Nyman, 2003; García-García y Dolores-Flores, 2017); mientras que otras investigaciones se han centrado en el estudio de conexiones entre objetos matemáticos en las áreas de Álgebra y Geometría (Eli, Mohr-Schroeder, y Lee, 2011, 2013) y desde una visión curricular (Mwakapenda, 2008). Otros estudios se han enfocado en examinar la naturaleza y la calidad de las conexiones matemáticas (Mhlolo, Venkat, y Schäfer, 2012).

En lo que refiere al álgebra abstracta, si bien gran parte de la investigación se ha concentrado en la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes en relación con los conceptos de la teoría de grupos (Sección 1.1.1 y 1.2), ninguno de esos estudios ha considerado a las conexiones matemáticas como objeto de estudio. En contraste con aquellas investigaciones que han analizado el papel que puede desempeñar el estudio del álgebra abstracta en la preparación de los profesores para enseñar matemáticas en el nivel secundaria (Wasserman, 2018). Esto debido al reconocimiento del rol fundamental que puede ejercer el profesor en el desarrollo de una comprensión profunda de las matemáticas por parte de los estudiantes, lo cual involucra, entre otras cosas, la identificación y la construcción de conexiones entre ideas matemáticas (Suominen, 2018).

En esta segunda fase de la investigación hacemos uso de la recuperación de las ideas y significados subyacentes a los grupos isomorfos en un momento histórico específico. El análisis de la obra de Cayley (1854a) reveló las conexiones entre conceptos y resultados matemáticos que incidieron en el trabajo de este matemático al abordar el problema de la clasificación de todos los grupos (salvo isomorfismo) de orden cuatro y seis, que corresponde a una aplicación de los grupos isomorfos (Sección 2.3).

En el desarrollo de las matemáticas, la clasificación de los grupos finitos de un orden dado n (Cayley, 1878) fue uno de los problemas más importantes dentro de la teoría de grupos. En la revisión de la literatura (Sección 1.1.1.) identificamos que un análisis a profundidad de esta aplicación del concepto de grupos isomorfos y los procesos mentales involucrados por parte de los estudiantes no han sido objeto de estudio. En este sentido, Lajoie (2000) evidenció que los estudiantes universitarios tienen dificultades para reconocer una utilidad del concepto de isomorfismo en álgebra y Hazzan (2001) mostró que al hacer frente a la tarea específica de construir una tabla de operaciones que represente un grupo de orden cuatro, ninguno de los estudiantes utilizó el argumento de que el grupo solicitado debía ser isomorfo a uno de los dos grupos conocidos de ese orden (el grupo cíclico y el no cíclico), lo que habría dado evidencia de una concepción objeto de estos grupos.

En un primer curso de álgebra abstracta, los estudiantes suelen hacer frente al problema de determinar cuántos grupos realmente distintos hay de un orden finito dado (menor o igual a cuatro) mediante la exploración de todas las formas posibles de llenar una tabla de operaciones y la estrategia de un cambio de nombre (Thrash y Walls, 1991; Larsen, 2009). Sin embargo, este procedimiento puede resultar difícil o poco práctico para los grupos de orden mayor que cuatro, y también se deben considerar las dificultades que pueden enfrentar los estudiantes en la construcción de tablas de operaciones (Hazzan, 2001). Por otra parte, la estrategia de comparar las tablas de dos grupos específicos para determinar si son isomorfos es útil en la apreciación de similitudes o diferencias en la estructura de dichos grupos, pero este ejercicio no promueve un análisis de por qué estos grupos satisfacen dichas propiedades estructurales. En contraste con el trabajo realizado por Cayley (1854a) quien tuvo una visión abstracta de los grupos, y no se centró en grupos específicos. Cayley usó un enfoque de generadores y relaciones para grupos y fue en este contexto donde se identificó el germen del concepto de grupos isomorfos, al ejemplificar la distinción entre la ecuación ordinaria $x^n - 1 = 0$ y la ecuación simbólica $\theta^n = 1$ (grupos cíclicos y no cíclicos, respectivamente).

En esta investigación nos interesamos en el estudio de las conexiones matemáticas que hace una estudiante universitaria al involucrarse en tareas que se fundamentan en un análisis histórico y epistemológico relacionadas con la clasificación de grupos finitos, basados en resultados de investigaciones que sugieren que hacer conexiones entre ideas matemáticas es un indicador importante de comprensión (Berry y Nyman, 2003).

3.2. Fundamentación teórica

3.2.1. Conexiones matemáticas y comprensión

En la presente investigación, el estudio de las conexiones matemáticas resulta importante por su vínculo con la comprensión (Skemp, 1980, 2006; Berry y Nyman, 2003; Businskas, 2008; Mhlolo, Venkat, y Schäfer, 2012; Singletary, 2012, García-García y Dolores-Flores, 2017). Por ejemplo, Hiebert y Lefevre (1986) caracterizaron una sólida comprensión conceptual como un conocimiento rico en conexiones. Singletary (2012) señaló que hacer conexiones entre ideas matemáticas es una parte fundamental del aprendizaje de las matemáticas con comprensión. También Eli, Mohr-Schroeder, y Lee (2011, 2013) argumentaron que la comprensión matemática requiere que los estudiantes hagan conexiones entre ideas matemáticas, hechos, procedimientos y relaciones.

Sin embargo, un individuo puede poseer un conocimiento desconectado de las matemáticas (Singletary, 2012). En ese sentido, Skemp (2006) definió la *comprensión instrumental* de las matemáticas como “reglas sin razones” (p. 89). Un tipo de conocimiento segmentado de las matemáticas en que un estudiante comprende las reglas matemáticas como construcciones fragmentadas y aisladas, sin saber por qué o cómo se relacionan las piezas matemáticas separadas y cómo se construyen unas sobre otras (Singletary, 2012). En contraste, la *comprensión relacional* de las matemáticas involucra el conocimiento de qué hacer y por qué. Esto implica saber cómo los conceptos matemáticos están interrelacionados, lo que favorece en la comprensión de las matemáticas como “un todo conectado” (Skemp, 2006, p. 92).

Para Skemp (1980), “comprender algo significa asimilarlo dentro de un esquema adecuado” (p. 50). Un esquema es un grupo de conceptos conectados, cada uno de los cuales fue formado al abstraer propiedades invariantes que lo caracterizan, desde diversas entradas sensoriales-motoras u otros conceptos: es una estructura jerárquica conceptual (Skemp, 1980). Los conceptos están conectados por relaciones y transformaciones. Una relación es una idea común que conecta dos conceptos, mientras que una transformación “surge de nuestra capacidad para ‘cambiar una idea por otra’ haciendo algo con ella” (p. 42).

Skemp (1980) señaló que un esquema tiene dos funciones principales: (1) integrar conocimiento existente, que hace posible la organización de conocimiento existente más efectiva para enfrentar situaciones problemáticas novedosas con los esquemas disponibles; y (2) es un instrumento mental (indispensable) para la adquisición de nuevo conocimiento.

La comprensión de las matemáticas como *un todo conectado* involucra asociar un nuevo concepto con otros desarrollados previamente, así como la reflexión de similitudes y diferencias entre el nuevo concepto y los comprendidos previamente. En contraste con un conocimiento segmentado de las matemáticas donde es probable que la conexión entre las reglas y los tipos de problemas asociados con éstas se deteriore rápidamente, por lo que finalmente el estudiante será incapaz de relacionar un problema con el concepto (Skemp, 1980).

Basada en la revisión de la literatura en Educación Matemática, Businskas (2008) identificó tres interpretaciones de las conexiones matemáticas: (1) Como una relación entre ideas matemáticas, es decir, como una característica inherente de las matemáticas. (2) Como una relación construida por el estudiante, es decir, se refiere a una construcción mental hecha por el estudiante (*producto* de la actividad mental). Finalmente, (3) como un *proceso* (dinámico) que forma parte de la *actividad* de hacer matemáticas. Esta perspectiva combina (1) y (2) al reconocer que hay conexiones en toda la disciplina, de tal forma que las matemáticas pueden considerarse como un campo integrado, y que el estudiante debe participar en la actividad de establecer estas conexiones, respectivamente. Así, las conexiones se pueden entender como el subproducto de llevar a cabo otros procesos matemáticos, tales como: diversas representaciones, resolución de problemas, pruebas, y aplicaciones del mundo real y el modelado matemático.

De acuerdo con Businskas (2008), una conexión matemática es una relación verdadera entre dos ideas matemáticas. En este sentido, hacer conexiones matemáticas es un proceso cognitivo que implica hacer o reconocer enlaces entre ideas matemáticas, y podrían ser útiles para mejorar la comprensión. Businskas propuso siete categorías de conexiones entre conceptos/ideas matemáticas. Sin embargo, la autora redujo esta lista inicial de tipos de conexiones basándose en los resultados de su estudio con profesores de secundaria. Ambos modelos se presentan en la Tabla 3. Excepto por la quinta categoría en el modelo revisado de Businskas, que está orientada a la *instrucción*, las restantes están basadas *matemáticamente*.

Tabla 3. Categorías de conexiones matemáticas (Businskas, 2008)

Categorías-Modelo inicial	Categorías-Modelo revisado
Representación alternativa. **A** es una representación alternativa de **B** si ambas son expresadas en formas diferentes (por ejemplo, geométrica-algebraica, verbal-algebraica). *Representación equivalente*. **A** es una representación equivalente a **B** cuando son expresados de diferentes maneras dentro de la misma forma de representación. *Características comunes*. **A** y **B** comparten algunas características en común.	*Diferentes representaciones*. **A** es otra representación de **B**. El mismo concepto se representa de dos o más formas. Las representaciones pueden ser *alternativas* o *equivalentes*.
Inclusión. **A** está incluido en (es un componente de) **B**; **B** incluye (contiene) **A**. *Generalización*. **A** es una generalización de **B**; **B** es una instancia específica (ejemplo) de **A**.	*Relaciones parte-todo*. **A** es un componente o instancia específica (ejemplo) de **B**; **B** contiene **A** o es una generalización de **A**. Un concepto está vinculado a otro en algún sentido de parte y todo. Las relaciones parte-todo incluyen ejemplos, inclusiones y generalizaciones para ilustrar conceptos.
Implicación. **A** implica **B** (y otras relaciones lógicas). Esta conexión indica una dependencia de un concepto de otro de alguna manera lógica.	*Implicaciones*. **A** implica **B**. Un concepto lleva a otro en forma lógica, SI ..., ENTONCES ...
Procedimiento. **A** es un procedimiento utilizado cuando se trabaja con el objeto **B**.	*Procedimientos*. **A** es un procedimiento utilizado para trabajar con **B**. Un procedimiento algorítmico está asociado con un concepto particular. *Conexiones orientadas a la instrucción*. **A** y **B** son conceptos o habilidades que deben conocerse para aprender/comprender **C**.

Tomando en cuenta que el estudio de Businskas (2008) se basó en profesores, en esta investigación no consideramos la tipología *conexiones orientadas a la instrucción*. En ese sentido, basados en la categorización propuesta por Businskas (ver Tabla 3), la presentación verbal o escrita de la definición formal de un grupo junto con su interpretación basada en una tabla de operaciones, sería un ejemplo de una conexión de *diferentes representaciones* (representación alternativa). Además, argumentar que en un grupo finito G, el orden de cualquiera de los elementos del grupo y el orden de cualquiera de sus subgrupos divide el orden del grupo, es un ejemplo de una conexión de tipo *características comunes*, es decir, se establece alguna relación que involucra la comparación de similitudes entre A y B.

Si el participante dice que $(\mathbb{Z}_5,+_5)$ es un *ejemplo* de un grupo cíclico, diremos que ha establecido una conexión de *relación parte-todo* (en particular, A es una instancia específica de B). Por otra parte, si el participante utiliza o infiere que, si G es un grupo finito de orden primo, entonces G es cíclico; diremos que ha realizado una conexión de tipo *implicación*. Finalmente, hacer uso del conjunto generado por un elemento diferente del neutro en un grupo G de orden cinco como el primer paso para construir su tabla, sería considerado como un ejemplo de una conexión *procedimiento*.

Desde una perspectiva constructivista, para Eli, Mohr-Schroeder, y Lee (2011), una conexión matemática es considerada como "un enlace (o puente) en el que el conocimiento previo o nuevo se utiliza para establecer o fortalecer una comprensión de las relaciones entre ideas matemáticas, conceptos, elementos o representaciones dentro de una red mental" (p. 299). Eli et al. (2011) investigaron los tipos de conexiones matemáticas que establecen 28 futuros profesores de grado medio para la enseñanza de la Geometría al participar en la Actividad de Clasificación de Tarjetas (CSA-Card-Sort Activity). CSA consistió en veinte tarjetas etiquetadas con varios términos matemáticos, conceptos, definiciones, y problemas, de tal forma que los participantes tenían que establecer criterios sobre cómo se podrían conectar las afirmaciones descritas en las tarjetas. Los cinco *tipos de conexiones matemáticas* (categorías) que se identificaron a partir del trabajo realizado por los futuros profesores fueron los siguientes: *categórica*, *procesal*, *característica/propiedad*, *derivación* y *curricular* (ver Tabla 4).

Mientras que el tipo de conexión *curricular* se constituyó de las *conexiones pedagógicas* que los futuros profesores establecieron; las *conexiones de contenido matemático* encajaron en una o más de las categorías: *característica/propiedad*, *categórica*, *derivación* y *procesal*.

Tabla 4. Categorías de conexiones matemáticas (Eli et al., 2011)

Tipos de conexiones matemáticas	Descripción
Categórica	Comprende el uso de características superficiales principalmente como una base para definir un grupo o categoría.
Procesal	Cuando se relacionan ideas basadas en un procedimiento matemático o algoritmo posiblemente a través de la construcción de un ejemplo. Las ideas matemáticas integradas en el procedimiento pueden no ser prioritarias tanto como la descripción de los pasos involucrados en la realización del procedimiento.
Característica/*Propiedad*	Se manifiesta cuando se definen las características o se describen las propiedades de conceptos en términos de otros conceptos.
Derivación	Ocurre cuando el conocimiento de un concepto es empleado para construir o explicar otro concepto; aunque no se limita al reconocimiento de la existencia de una derivación.
Curricular	Relaciona ideas o conceptos en términos del impacto en el currículo, incluido, entre otros, el orden en el que se ensenarían los conceptos/temas.

Tomando en cuenta la categorización propuesta por Eli y colaboradores (Tabla 4), para fines de nuestra investigación, consideramos que la descripción del tipo de conexión *categórica* está más asociada con el tipo de argumentos utilizados (características superficiales) para establecer algún criterio de clasificación cuando se relacionan ideas matemáticas, conceptos, elementos o representaciones. Por otra parte, consideramos que el tipo de conexión *procesal* (Eli et al., 2011) podría corresponderse con el de *procedimientos* descrito por Businskas (2008), ya que, finalmente, un procedimiento matemático o algorítmico es reconocido y utilizado para relacionar ideas matemáticas, conceptos, elementos o representaciones.

En relación con el tipo de conexión *característica/propiedad*, consideramos que difiere de la categoría *características comunes* (Businskas, 2008), ya que la relación no se establece a partir de la realización de algún tipo de comparación de similitudes o diferencias entre *A* y *B*, sino que la asociación o relación se efectúa al definir las características o describir las propiedades de conceptos en términos de otros conceptos. Por ejemplo, si el participante expresa que un grupo finito *G* de orden primo *n* tiene $n - 1$ generadores, a saber, excepto el neutro, todos los demás elementos generan a *G*; se podría considerar como una instancia de una conexión *característica/propiedad*. Por otra parte, un ejemplo de una conexión *derivación* correspondería a la siguiente explicación del participante ante la solicitud de determinar todos los subgrupos de $(\mathbb{Z}_5,+_5)$: "El orden del grupo $(\mathbb{Z}_5,+_5)$ *es primo*, por lo que, los únicos *divisores* del orden del grupo son uno y cinco. $(\mathbb{Z}_5,+_5)$ sólo tiene dos subgrupos, uno de orden uno (el trivial) y uno de orden cinco (el total)".

De la misma manera que Businskas, Singletary (2012) definió una conexión matemática como *una relación entre ideas*: "una conexión matemática es una *relación* entre una entidad matemática y otra entidad matemática o no matemática, donde *A* está relacionada con *B*" (p. 60). El estudio de Singletary tuvo como objetivo examinar los tipos de conexiones que tres profesores de matemáticas de nivel secundaria hicieron en su práctica docente. Además, exploró las creencias de dichos profesores sobre las matemáticas y cómo éstas podrían estar relacionadas con los tipos de conexiones que establecieron en la práctica.

El marco de conexiones matemáticas utilizado por Singletary incluyó niveles y tipos de conexiones matemáticas que los profesores hicieron en su enseñanza. En relación con los niveles a los que se hicieron las conexiones matemáticas, éstos consideraron la posibilidad de (1) que no se hiciera alguna conexión, (2) que se produjera una conexión sugerida (la relación no se proporcionó explícitamente), (3) que fuera proporcionada explícitamente y (4) que una conexión fuera proporcionada y explicada por el profesor. Por otra parte, Singletary proporcionó cinco categorías para los diferentes tipos de conexiones matemáticas hechas en la práctica, éstas se basaron en un análisis de las relaciones entre *A* y *B* (ver Tabla 5).

En la Tabla 5, la primera categoría, *conectando a través de la comparación*, involucra la comparación de similitudes y diferencias entre entidades matemáticas relacionadas *A* y *B* (por ejemplo, entre procedimientos o representaciones). En ese sentido, consideramos que esta categoría incluye el tipo de conexión *características comunes* descrito por Businskas (2008). También esta categoría podría incluir el tipo de conexión *categórica*, ya que la descripción de Eli et al. (2011) sugiere el establecimiento de relaciones a través de la comparación de similitudes (en particular, de características superficiales) que se pueden utilizar para llevar a cabo algún tipo de clasificación: *A* es similar a *B*. La segunda categoría, *conectando especificidades a generalidades*, concierne al establecimiento de relaciones de un caso específico con un concepto o regla más generalizada. En el modelo revisado de Businskas (2008), *A* es un ejemplo de *B*, es un tipo de conexión incluido en la categoría *relación parte-todo*. La tercera categoría, *conexión de métodos*, se refiere a la consideración de múltiples métodos para resolver un problema, es decir, *A* o *B* pueden usarse para encontrar *C*. Creemos que esta categoría difiere sutilmente de los tipos de conexiones: *procedimientos* (Businskas, 2008) y *procesal* (Eli et al., 2011), ya que el foco no es el procedimiento matemático o algorítmico en sí. Por otra parte, una *conexión a través de una implicación lógica* involucra el uso de implicaciones para mostrar una relación de dependencia, donde un componente de la conexión se sigue lógicamente de otro. En el modelo revisado de Businskas (2008), si *A*, entonces *B*, es un tipo de conexión que se corresponde con la categoría *implicaciones*. Finalmente, la categoría *conexión con el mundo real* hace referencia a aquellas relaciones que se establecen entre las matemáticas y el mundo real, es decir, un concepto familiar o contexto relacionado desde fuera del aula de matemáticas.

Tabla 5. Categorías para los diferentes tipos de conexiones matemáticas (Singletary, 2012)

Categoría	Tipo de conexión
Conectando a través de la comparación	*A* es similar a *B*
	A es lo mismo que *B*
	A no es lo mismo que *B*
	A o *B* define o describe de manera similar a *C*
Conectando especificidades a generalidades	*A* es un ejemplo de *B*
Conexión de métodos	*A* o *B* se pueden usar para encontrar *C*
Conectando a través de una implicación lógica	Si *A*, entonces *B*
	Si *A*, entonces *B* y no *C*
Conexión con el mundo real	*A* es un ejemplo de *B* en el mundo real

Por otra parte, García-García y Dolores-Flores (2017) consideran las conexiones matemáticas como un “proceso cognitivo mediante el cual una persona relaciona o asocia dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real” (p. 3). García-García y Dolores-Flores examinaron las conexiones matemáticas que realizan 25 estudiantes preuniversitarios cuando resuelven tareas que involucran la derivada y la integral. En particular, los investigadores se enfocaron en la exploración de conexiones *intramatemáticas*, es decir, aquellas que emergen al interior de la matemática misma y entre entidades matemáticas. Además, García-García y Dolores-Flores exploraron la relación entre las conexiones que emergieron del trabajo de los estudiantes y cómo éstas contribuyen a la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo.

Basados en la producción de los estudiantes, García-García y Dolores-Flores identificaron 223 conexiones matemáticas relacionadas con los conceptos función, derivada, derivada en un punto, integral, constante de integración y el Teorema Fundamental del Cálculo. Si bien los investigadores encontraron tipos de conexiones categorizadas previamente por Businskas (2008) y Eli et al. (2011), una de las contribuciones de la investigación de García-García y Dolores-Flores fue la identificación de dos tipos de *conexiones intramatemáticas*: *reversibilidad* y *significado*.

La conexión de *reversibilidad* está asociada con la capacidad de reconocer y establecer relaciones bidireccionales entre ideas matemáticas y el *significado* como conexión se refiere al sentido que un estudiante da a un objeto matemático y lo que éste represente para él/ella se puede encontrar limitado por su definición o el contexto de su uso (García-García y Dolores-Flores, 2017).

Al igual que Businskas (2008), García-García y Dolores-Flores (2017) comparten la idea de que hacer conexiones es una parte fundamental para lograr la comprensión matemática. García-García y Dolores-Flores van más allá al considerar que “no hay conexión sin comprensión y sin comprensión, no hay conexión” (p. 3). En esta investigación entendemos las conexiones matemáticas en el mismo sentido que García-García y Dolores-Flores (2017) y adoptamos la caracterización de las conexiones destacada por Businskas (2008) como: relaciones verdaderas que deberían ser útiles para mejorar la comprensión matemática. En particular, nos interesamos en la exploración de conexiones intramatemáticas (García-García y Dolores-Flores, 2017).

A partir de la revisión de la literatura observamos que no hay un acuerdo sobre cómo estudiar las conexiones matemáticas que los participantes hacen cuando resuelven tareas matemáticas. Sin embargo, identificamos diferentes tipos de conexiones matemáticas (por ejemplo, Businskas, 2008; Eli et al., 2011; Singletary, 2012; García-García y Dolores-Flores, 2017) y aunque las categorizaciones presentadas en esta sección no pretenden ser exhaustivas, coincidimos con Eli, Mohr-Schroeder, y Lee (2013) cuando señalan que diversos investigadores han definido y categorizado las conexiones, mientras que la característica común entre ellas es que son como *un enlace o puente* entre ideas matemáticas.

En este estudio utilizamos diez categorías como un modelo preliminar de conexiones matemáticas que surgieron de la discusión de los tipos de conexiones que se reportan en la literatura revisada. En las siguientes descripciones categóricas, los componentes de la conexión *A* y *B* pueden ser ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones o significados.

- *Diferentes representaciones*. Las representaciones pueden ser *alternativas* o *equivalentes*. *A* es una representación alternativa de *B*, si ambas se expresan de dos maneras diferentes (por ejemplo, geométrica-algebraica, verbal-algebraica). Por otra parte, *A* es una representación equivalente a *B* cuando ambas se expresan de dos maneras diferentes, pero dentro de la misma forma de representación.
- *Comparación a través de características comunes*. *A* y *B* comparten algunas características en común, lo que permite una comparación basada en sus similitudes o diferencias (*A* es similar a *B*, *A* es lo mismo que *B*, *A* no es lo mismo que *B*, *A* o *B* define o describe de manera similar a *C*).
- *Relaciones parte-todo*. Un concepto está vinculado a otro en algún sentido de parte y todo. Estas relaciones incluyen ejemplos, inclusiones y extensiones/generalizaciones para ilustrar conceptos (*A* es una instancia específica (ejemplo) de *B*; *A* es un componente de *B* (inclusión); *B* contiene *A* o es una generalización de *A*).

- *Implicaciones*. Cuando se establece una relación de dependencia de un concepto de otro, donde un componente de la conexión se sigue lógicamente de otro (Si *A*, entonces *B*, Si *A*, entonces *B* y no *C*).
- *Procedimientos*. Un procedimiento matemático o algorítmico está asociado con un concepto particular (*A* es un procedimiento utilizado para trabajar con *B*).
- *Característica/propiedad*. Se manifiesta cuando se definen las características o se describen las propiedades de un concepto en términos de otros conceptos. También puede incluir la utilización de algún atributo invariante o cualidad de un concepto matemático que lo distingue de los demás.
- *Derivación*. Se manifiesta cuando el conocimiento de un concepto es empleado para construir o explicar otro concepto; aunque no se limita al reconocimiento de alguna derivación.
- *Conexión de métodos*. Se refiere a la consideración de múltiples métodos para resolver un problema, es decir, *A* o *B* pueden usarse para encontrar *C*.
- *Reversibilidad*. Es la capacidad de reconocer y establecer relaciones bidireccionales entre ideas matemáticas.
- *Significado*. Hace referencia al sentido que un estudiante da a un objeto matemático y lo que éste represente para él/ella se puede encontrar limitado por su definición o el contexto de su uso.

Los estudiantes son conscientes de las conexiones que establecen cuando sus argumentos verbales son consistentes con el uso de ese conocimiento para realizar tareas específicas. O bien, después de resolver la(s) tarea(s) o reflexionar sobre los resultados y los procedimientos pueden llegar a ser conscientes de las relaciones y validar las conexiones que pueden hacer. Asimismo, una respuesta correcta por parte del estudiante no implica que haya establecido una conexión matemática (García-García y Dolores-Flores, 2017). Sin embargo, es factible que los estudiantes establezcan *conexiones incorrectas*, por las cuales entenderemos como relaciones verdaderas para el estudiante cuyo fundamento contradice la teoría matemática.

3.3. Elementos metodológicos

3.3.1. Estudio de caso

La presente investigación es cualitativa y usó el método de estudio de caso, esto es, “una estrategia de investigación dirigida a comprender las dinámicas presentes en contextos singulares” (Eisenhardt, 1989). En ese sentido, Hartley (2004) señala que la investigación de estudio de caso tiene por característica ser detallada, a menudo con datos recopilados durante un periodo de tiempo, de fenómenos dentro de su contexto, el objetivo es “proporcionar un análisis del contexto y los procesos que iluminan las cuestiones teóricas que se estudian” (citado en Njie y Asimiran, 2014, p. 36).

En este trabajo (segunda etapa de la investigación) se estudia el caso de Lu (seudónimo) y nos centramos en la exploración de las conexiones matemáticas que la estudiante establece cuando se enfrenta a tareas asociadas con la clasificación de los grupos finitos de un orden dado *n* y que se fundamentan en un análisis histórico y epistemológico de grupos isomorfos en la obra de Cayley (1854a). En ese sentido, el presente estudio es de naturaleza exploratoria (Hernández, Fernández, y Baptista, 2014), ya que es un tema que no ha sido abordado anteriormente. También es descriptiva, ya que pretendemos presentar una descripción de un fenómeno, es decir, detallar cómo es y cómo se manifiesta.

3.3.2. Sobre el caso

3.3.2.1. *La estudiante y su curso de álgebra abstracta*

La estudiante participante en esta investigación responde al seudónimo de Lu. Cuando inició este estudio en abril de 2019, Lu estaba por concluir el quinto semestre de la Licenciatura en Matemáticas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Lu también tomaba un curso obligatorio de álgebra abstracta. Previo a su curso de álgebra abstracta, Lu ya había tomado cuatro cursos de cálculo, uno de análisis y dos de álgebra lineal.

Hubo un seguimiento del grupo en el que se encontraba Lu durante todo el quinto semestre en que se impartió dicha asignatura, donde uno de los investigadores presenció las clases sin tener alguna participación, lo que permitió tomar notas y ganar conocimiento sobre (1) los contenidos abordados, (2) los ejemplos utilizados por el profesor, (3) el tipo de tareas y (4) la participación de los estudiantes durante el curso. Una clase de álgebra abstracta duraba 80 minutos aproximadamente y se impartía tres veces a la semana.

Con el permiso del profesor responsable del curso de álgebra moderna I, un investigador presenció las sesiones de clase, tomó nota de cada uno de los contenidos abordados, sobre la participación de los estudiantes y tuvo acceso a las tareas que resolvieron durante el curso.

En contraste con el contenido indicado en la Unidad de Aprendizaje de álgebra moderna I: grupos, anillos y campos; el profesor abordó los siguientes contenidos preliminares: números enteros, conjuntos, relaciones y particiones, y funciones. En la segunda parte titulada *grupos* se abordaron los temas: permutaciones, grupos y subgrupos, y clases laterales. Finalmente, en la tercera parte denominada *homomorfismos* se abordaron los contenidos: homomorfismos, subgrupos normales y grupos cociente. Al finalizar cada tema el profesor asignaba tarea que demandaba la resolución de ejercicios y demostraciones por parte de los estudiantes.

Durante las clases, el profesor presentaba definiciones, proporcionaba ejemplos y promovía la participación de los estudiantes como solicitar ideas para iniciar una demostración o delegar esa responsabilidad a los estudiantes (Fukawa-Connelly, 2016).

Basados en la observación no participante podemos afirmar que Lu estaba familiarizada con ejemplos de grupos como permutaciones, raíces n-ésimas de la unidad y enteros módulo n, por mencionar algunos.

Después de abordar el tema *permutaciones*, el profesor presentó la definición de un grupo:

> *Definición*. Sean $G \neq \emptyset$ y $*$ una operación binaria sobre G, diremos que la pareja $(G, *)$ es un grupo, si:
>
> *i*) $*$ es asociativa; $(a * (b * c) = (a * b) * c)$
>
> *ii*) Existe un elemento neutro para $*$ en G; $(\exists\, e \in G$ t. q. $a * e = \mathrm{a} = \mathrm{e} * a)$
>
> *iii*) Existen inversos en G. (dado $g \in G\ \exists\, h \in G$ t. q. $g * h = e = h * g$)
>
> Si además se satisface

iv) $*$ es conmutativa $(a * b = b * a)$

$(G, *)$ se llama abeliano. (Notas de clase, 5 de noviembre de 2018)

Algunos de los ejemplos de grupos proporcionados por el profesor fueron los siguientes: $(X, +), X = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$; $(S_x, \circ)$; $(\mathbb{R}^+, \cdot)$; $(\mathbb{Z}_n, +_n)$. Además, se demostró que en un grupo son válidas las leyes de cancelación, la unicidad del elemento neutro e inversos.

En particular, un grupo finito $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se representó por medio de su tabla de operaciones, donde ninguna fila y columna tiene elementos repetidos. Lu estaba familiarizada con la construcción de *todos* los grupos con dos, tres y cuatro elementos, llevado a cabo cuando se abordó el tema de *grupos* (en ese momento aún no habían abordado el tema de *homomorfismo*). En general, la estrategia empleada consistió en analizar todas las posibles formas de llenar una tabla con elementos y operaciones arbitrarias. En particular, respecto al ejercicio de construir *todos* los grupos con cuatro elementos, se obtuvieron cuatro posibles grupos, de los cuales tres *se comportaban de la misma manera* o *eran realmente el mismo grupo*. Para ello, se hizo énfasis en la propiedad distintiva del orden de los elementos. Claramente, una de las tablas parecía diferente a las demás, todos los elementos distintos del neutro eran su propio inverso. Sin embargo, para las restantes tres tablas resultó difícil para los estudiantes iniciar un análisis sobre el comportamiento de los grupos.

Que los grupos fueran *realmente el mismo* fue intuitivamente ejemplificado por el profesor como cambiar el nombre a los elementos, por tanto, lo que interesaba averiguar era cómo estaba cambiando el nombre. En ese sentido, para indagar si las tablas de operaciones representaban a "un mismo" grupo, se analizaron las formas en que fuera posible establecer una correspondencia o asociación entre los elementos de un grupo al otro, que respetara las operaciones. Pero ¿cómo saber qué elemento asociar con cuál? Para ello se sugirió tomar en cuenta propiedades como el orden de los elementos. Mediante este método de cambio de nombre se analizó únicamente un par de tablas, como este ejercicio no fue concluido en la sesión del profesor, fue asignado como tarea a los estudiantes mostrar por qué las tres tablas representaban realmente el mismo grupo (Figura 1).


6. Encuentra todos los posibles grupos de 4 elementos.

Figura 1. Ejercicio de la tarea asociado con la clasificación de los grupos de orden cuatro

Algunos de los estudiantes que intentaron resolver esta tarea se estancaron al tratar de establecer una correspondencia entre los elementos de un grupo al otro que respetara las operaciones (basados en el ejemplo del profesor), o bien, concluyeron que había cuatro posibles grupos de cuatro elementos (ver Figura 2).

Aproximadamente un mes después de la sesión en que se introdujo un *grupo* a partir de su tabla de operaciones, fue presentada la definición de isomorfismo a los estudiantes como un *homomorfismo biyectivo*. En el transcurso se habían abordado los contenidos: *subgrupo*, *grupos cíclicos* y *clases laterales*.

> *Definición*. Sean $(G, *)$ y $(H, \circ)$ grupos y $\varphi: G \rightarrow H$ una función, diremos que φ es un (homo)morfismo, si
>
> $$\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y), \text{ para todos } x, y \in G.$$
>
> Si φ es biyectiva, se llama isomorfismo. (Notas de clase, 12 de diciembre de 2018)

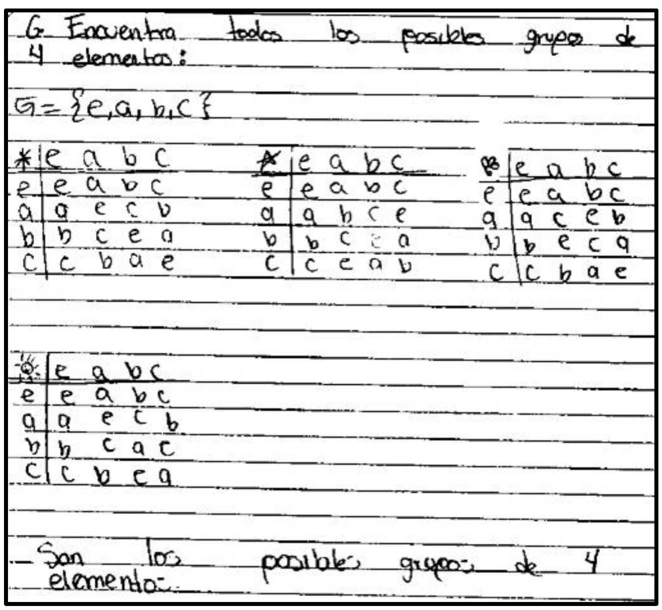


Figura 2. Cuatro posibles grupos de cuatro elementos

El profesor presentó varios ejemplos de homomorfismos de grupos. También demostró que, si G y H eran grupos cíclicos de orden finito m, entonces G era isomorfo a H e introdujo la notación $\cong$. Asimismo, definió un invariante de un grupo, y se mencionó su utilidad para determinar cuándo dos grupos no son isomorfos.

Definición. Sea G un grupo, un invariante de G es una propiedad de G, tal que cualquier grupo H isomorfo a G tiene la misma propiedad.

Proposición. Sea G un grupo, entonces las siguientes propiedades son invariantes de G.

i) La cardinalidad

ii) Ser abeliano

iii) Tener un elemento de orden finito dado. (Notas de clase, 14 de diciembre de 2018)

Tomando en cuenta estas propiedades invariantes se proporcionaron ejemplos de grupos no isomorfos: $U_4 = \{1, i, -1, -i\}$ y V (4-grupo de Klein) y dos grupos G, H de orden distinto. Algunos ejercicios de la tarea correspondiente a este tema se muestran en la Figura 3.

10. Sea G un grupo, demuestra que las siguientes propiedades son invariantes de grupos:
    i. si d divide a $|G|$, la cantidad de elementos de G de orden d;
    ii. tener un elemento de orden infinito;
    iii. ser cíclico de orden dado.
11. Prueba que A_4 y D_{12} no son isomorfos.
12. Construye los grupos de simetrías de un hexágono regular, de una pirámide regular de base dodecagonal y de un tetraedro regular. Prueba que ningún par de estos grupos son isomorfos.

Figura 3. Ejemplos de ejercicios correspondientes al tema de homomorfismos de grupos

A partir del seguimiento y observación del grupo ganamos conocimiento sobre los contenidos abordados en el curso. Para el diseño de tareas, esta información se contrastó con el análisis histórico y epistemológico del concepto isomorfismo en las obras de Cayley (1854a) y Jordan (1870). Ambos matemáticos abordaron el problema de la clasificación de los grupos finitos: Cayley desarrolló dos casos a partir de los cuales presentó la distinción entre la ecuación ordinaria $x^n - 1 = 0$ y la ecuación simbólica $\theta^n = 1$ (un grupo cíclico y no cíclico, respectivamente) y realizó un análisis lógico detallado de todas las posibilidades de la naturaleza de los grupos de orden cuatro y seis, y determinó para cada caso dos grupos *esencialmente distintos* y que ahora identificamos como grupos no isomorfos, incluso cuando Cayley no proporcionó una definición de grupos isomorfos.

Por su parte, Jordan afirmó que el objetivo principal de su trabajo era “desarrollar los métodos de Galois y compilarlos en un cuerpo de doctrina, mostrando cuán fácilmente resuelven todos los problemas principales de la teoría de ecuaciones" (Jordan, 1870, p. VII, nuestra traducción). El concepto de grupo de sustituciones (permutaciones) y su aplicación no solo a la teoría de ecuaciones sino también en otras áreas de la matemática contemporánea le permitió unificar en su "Traité" los resultados de Galois, Cauchy y otros matemáticos (Wussing, 1984; Kleiner, 2007). En este contexto, Jordan planteó como un problema la determinación de grupos isomorfos a un grupo G dado. También presentó la primera definición de isomorfismo, serie de composición para un grupo (de permutaciones) y probó parcialmente el teorema Jordan−Hölder.

El diseño de las tareas se basó en el análisis de la obra de Cayley (1854a), ya que el trabajo de Jordan (1870) demandaba el conocimiento de contenidos que no fueron abordados en el curso. La selección de Lu como caso fue principalmente por criterios de disponibilidad y debido a su interés por participar en la investigación. Lu no fue una estudiante regular durante el semestre, de hecho, no aprobó el curso. Sin embargo, había asistido a las sesiones en que fueron abordados los contenidos de interés para este estudio y fue una estudiante participativa en sus clases de álgebra.

3.3.2.2. *Exploración del conocimiento previo de Lu*

Se diseñó un instrumento exploratorio que consistió en una tarea y dada su formulación, tenía como finalidad obtener información variada del conocimiento de Lu sobre este tema, por ejemplo, definiciones formales, intuitivas, representaciones diversas y resultados matemáticos relacionados con grupos cíclicos y sus relaciones con otros conceptos (ver Figura 4). Una entrevista fue necesaria para aclarar y profundizar en las respuestas de la estudiante.

1. Grupos cíclicos.

a) Describe todo lo que conoces sobre grupos cíclicos (finitos).

b) Proporciona ejemplos de grupos cíclicos y justifícalos.

Figura 4. Instrumento exploratorio

La información obtenida a partir de esta tarea exploratoria fue de utilidad en el diseño posterior de la secuencia de tareas relacionada con una aplicación del concepto de grupos isomorfos: la clasificación de los grupos de orden primo y de orden cuatro.

Los resultados del instrumento exploratorio no fueron los esperados debido a que la estudiante estableció *conexiones incorrectas*. En particular, Lu manifestó una confusión entre los términos grupo cíclico y un *ciclo* en el sentido de *permutaciones de conjuntos finitos*. De hecho, las representaciones utilizadas por la estudiante correspondían a este último (ver Figura 5). Durante la entrevista, Lu presentó dificultades para recordar la definición formal y otros resultados matemáticos asociados con los grupos cíclicos.

En relación con el concepto de grupo cíclico, el *significado* atribuido por Lu fue que *un grupo era cíclico si se podía saber cuál es el elemento inicial y cuál es el elemento final, y si se podía saber cuál es el elemento inicial y cuál es el elemento final, el grupo es cíclico*. En ese sentido, es factible que Lu considerara grupos cíclicos de cardinalidad finita, pero esta idea podría interferir con el reconocimiento de un grupo cíclico infinito. La primera implicación puede conducir a conclusiones equivocadas como que un grupo de cardinalidad infinita, por ejemplo, $(\mathbb{Z}, +)$ no es cíclico, ya que no sería posible conocer el elemento inicial y final. Por otra parte, la segunda implicación puede llevar a considerar que cualquier grupo finito es cíclico.

Lu también utilizó *representaciones alternativas* para hacer referencia a un grupo cíclico (ver Figuras 5 y 7). En particular, basada en la idea de que es posible conocer el elemento inicial y final a partir del cual los elementos se repiten una y otra vez, las representaciones pictóricas ejercieron fuerte influencia en su interpretación de un grupo cíclico como una *espiral*. En el mismo sentido, la representación simbólica de un ciclo llevó a la estudiante a considerar que en un grupo cíclico finito debe estar definida “una función” que determina el orden de los elementos en el ciclo. Mientras que, puede ser posible que, para el caso de cardinalidad infinita, “una función sea definida de un grupo a otro”, donde uno de los grupos es el cíclico, es decir, de alguna manera se puede conocer cuál es el elemento inicial y el final. Por tanto, consideramos que Lu basó su conocimiento de una permutación cíclica para explicar la forma en que se representan los elementos de un grupo cíclico, que al igual que un ciclo, debe conservar el orden de los elementos y esto, según Lu, está determinado por cómo esté definida la función. En la entrevista, la estudiante en ningún momento hizo referencia a un grupo cíclico como un grupo en el que un elemento genera a todos los demás. A continuación, describimos los resultados del instrumento exploratorio.

Cuando solicitamos a Lu describir todo lo que conocía sobre grupos cíclicos (finitos), así como proporcionar y justificar ejemplos, la estudiante asoció un grupo cíclico con un ciclo o una permutación cíclica (Lajoie y Mura, 2000). Lu relacionó esta idea con el hecho de que en un grupo cíclico finito debe haber un elemento inicial y un elemento final, donde *el último elemento se encuentra en una posición antes que el primero*. En ese sentido, a partir del elemento final, los demás elementos *se repiten una y otra vez* como una *espiral* (ver Figura 5).

> *Lu*: […] que yo me acuerde era, […] si en los grupos teníamos una cantidad finita de elementos era cíclico sí y sólo sí, […] el último elemento estaba una posición antes que el primero, o sea, que si podíamos cambiar éstos [se refiere a los elementos del grupo] en otra definición esto quedaría como b, un montón, r, a y esto seguía siendo un ciclo […] era como […] tenemos a aquí, tenemos b, tenemos c, tenemos d y así hasta r, y el que seguía después de r caía aquí.
>
> *Entrevistador*: Otra vez.
>
> *Lu*: Sí, ajá, si éste era $r + 1$ cae otra vez en a y aquí éste sería $r + 2$ [ver Figura 5].

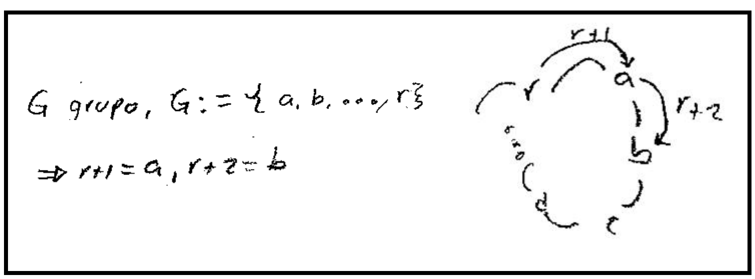


Figura 5. Representación de un grupo cíclico realizada por Lu

Basados en el seguimiento de la participante, inferimos que Lu atribuyó el mismo significado a los términos cíclico y ciclo, éste último en el sentido de permutaciones de conjuntos finitos. De hecho, la representación pictórica de Lu en la Figura 5 es similar a la que el profesor utilizó para un k-ciclo. Además, la estudiante empleó explícitamente el término ciclo para señalar que los elementos de un grupo cíclico se pueden representar como un ciclo y al reescribir los elementos como otro ciclo se tiene que *conservar el orden*, de otro modo el grupo no sería cíclico (Figura 6).

> *Entrevistador*: […] ¿qué es lo que hace la función?
>
> *Lu*: Pues, éste mismo orden.
>
> *Entrevistador*: ¿Conservar el orden de los elementos?
>
> *Lu*: Sí. […] O sea, se pueden cambiar, pero no puedo poner la *a* antes de la *r* porque ya no sería cíclico
>
> *Entrevistador*: Mmm.
>
> *Lu*: O sea, no puede tenerlo así y después como segunda operación […] *a* y luego *r*, esto ya es diferente [ver Figura 6].

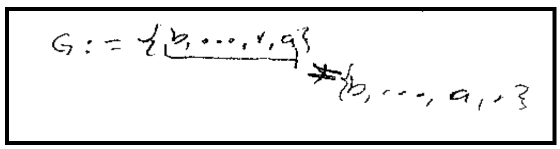


Figura 6. Representación de un grupo cíclico como un ciclo

En el siguiente episodio, la estudiante discutió sobre la distinción de un grupo cíclico finito como un ciclo (permutación cíclica) y como un conjunto, en relación con la posición que deben conservar los elementos. En particular, solicitamos a Lu profundizar en su explicación tomando como ejemplo el grupo $(\mathbb{Z}_6,+_6)$, donde la notación $+_n$ en $(\mathbb{Z}_n,+_n)$ significa suma módulo *n* (ver Figura 7).

> *Entrevistador*: […] dices que cambia la forma […] en la que están colocados los elementos […].
>
> *Lu*: […] depende cómo los veamos, si vemos éste como el ciclo, o sea, este orden como el ciclo, no debe de cambiar, pero si lo vemos como un conjunto […] sí pueden cambiar de lugar, pero ya a la hora de determinar el ciclo, ahí ya no pueden cambiar […]
>
> *Entrevistador*: Si consideraras, por ejemplo, $\mathbb{Z}_6$ […]
>
> *Lu*: Éste sería igual a, por ejemplo, 0, 1, 2, 3, 4, 5, aquí pongámosle 1 así, 3, 5, 2, 4, 0, eso como conjunto es lo mismo. Pero si lo vemos como […] el ciclo así [0 1 2 3 4 5] […] si ya lo tenemos como ciclo, esto es diferente a que si tuviéramos el ciclo [1 3 5 2 4 0] porque aquí quiere decir que después del cero nos vamos al 1 y el siguiente elemento del 1 es el 2 y el siguiente elemento es el 3, y aquí quiere decir que después del 1 nos vamos al 3 y ya esto ya es diferente […], ya se brincaría un paso, es como cuando

teníamos en grupo nada más las tablitas y decíamos, bueno, si *a* operación *b* es igual a *c* y aquí […], algo aplicado a 1 lo mandamos a 3 […] y de este lado tenemos […], algo aplicado al 1 […] que es *b* y luego nos manda a 2 y luego aplicado a otra cosa entonces ya nos manda a 3 y ya, pero ya hay un elemento más aquí […] que hace una diferencia […]

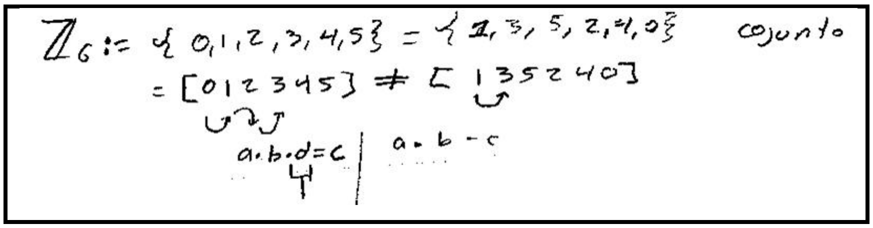


Figura 7. Ejemplo de un grupo finito cíclico visto como un conjunto y como un ciclo

Por otra parte, a pesar de que Lu señaló la posibilidad de considerar grupos cíclicos de cardinalidad infinita, la idea predominante fue aquella en que debe haber un elemento inicial y un elemento final, como se muestra en el siguiente extracto:

Entrevistador: […] ¿y qué pasará si consideras un grupo cíclico de cardinalidad infinita? […] ¿lo puedes ver también como lo que representas aquí? [Figura 5]

Lu: ¡Pero si no sé su cardinalidad, no sé en qué elemento termina!

Entrevistador: ¿Y cómo sabrías que es cíclico? O ¿no hay grupos de cardinalidad infinita que sean cíclicos?

Lu: Tal vez sí […].

En este sentido, por ejemplo, Lu señaló que $(\mathbb{R}, +)$ no era cíclico porque *no se sabe dónde terminan* los números reales.

Entrevistador: […] ¿y por qué pones no cíclico ahí?

Lu: Porque los reales no son cíclicos.

Entrevistador: Mmm, ¿por qué?

Lu: Porque […] para empezar, no sabemos en dónde terminan [los números reales] […].

También Lu creía que para que un grupo fuera cíclico tendría que definirse algún tipo de función. Esta idea se derivó de la asociación que Lu hizo con un *ciclo* (permutación cíclica).

Entrevistador: […] entonces piensas que para que sea cíclico ¿debes definir una función?

> *Lu*: Sí […]. Bueno, es que en las […] ¿cómo se llama? En las estas cosas que teníamos aquí el (1 2 3 4) y que podíamos separar como (1 2) (3 4) […].
>
> *Entrevistador*: Las permutaciones.
>
> *Lu*: Sí, las permutaciones. Ahí también vimos cíclicos, que era cíclico si el último elemento era el primero […], teníamos el 1, el 2, el 3, el 4 y así porque aquí se cortaba el ciclo, entonces por eso podíamos escribir así la permutación, […], pero sí había una función que te decía a dónde mandarlo.
>
> *Entrevistador*: Mmm.
>
> *Lu*: Esto quiere decir que el 1 se manda al 2, el 2 se manda al 3, el 3 al 4 y el 4 al 1, […] pero si está dando el orden quiere decir que, sí está una función […] esto ya está diciendo […] cuál es […] la combinación, o sea que sí está dando una función.
>
> *Entrevistador*: O sea, ¿estás relacionando los ciclos que recuerdas de permutaciones con un grupo cíclico?
>
> *Lu*: Sí.

En diversas ocasiones Lu señaló explícitamente que debe haber una función que: (*i*) determina el orden (posición) de los elementos en el ciclo, es decir, cómo se obtiene cada elemento y, por otra parte, (*ii*) que asigne cada elemento de un grupo a otro grupo (éste último es el cíclico). En concordancia con (*ii*), la idea de definir algún tipo de función debe establecerse entre dos grupos, una correspondencia particular entre los elementos de los grupos. Un *ejemplo* de grupo cíclico infinito que Lu proporcionó y que no logró concluir y argumentar fue el de los “grupos” $(\mathbb{R}, +)$ y $([0,1], +)$, donde este último es “el grupo cíclico” (Figura 8).

> *Lu*: Pues es que, si el grupo son los reales, en cada intervalo que nosotros hagamos, por ejemplo, de 0 y 1, hay una cantidad infinita de elementos. Ahora, sería según yo, éste podría ser cíclico si para todos los reales se armara como que […], aquí tenemos el puro segmento 0 y 1, entonces si aquí tenemos a 0 y 2, que los decimales éstos, por ejemplo, si aquí está el 1.1, se fuera a 0.1 […] y éste que es -1 y éste de aquí sería […] -0.1, éste lo mandáramos aquí [a 0.1] o bien éste lo mandáramos aquí dependiendo de cómo se defina la función.
>
> *Entrevistador*: ¿Por cada intervalo?
>
> *Lu*: Entre los enteros.
>
> *Entrevistador*: ¿Quién sería cíclico en ese caso que me estás diciendo?

Lu: El segmento 0-1

Entrevistador: ¿Ese sería cíclico?

Lu: Sí porque si aquí tenemos el grupo cíclico podemos tener una función que mande a este grupo […], al operarlo pues […], nos regresa elementos de éste y éste es el grupo que es cíclico […].

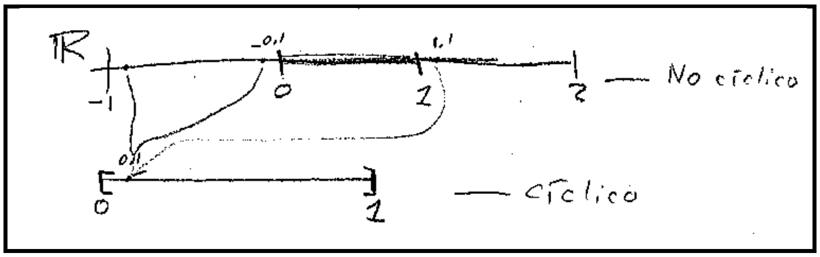


Figura 8. Ejemplo de un “grupo cíclico” de cardinalidad infinita proporcionado por Lu

Lu hizo una conexión de tipo *relación parte-todo* al reconocer a $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ [para $n \in \mathbb{Z}^+$, el grupo $\mathbb{Z}_n$ bajo la suma modulo n] como una instancia específica de un grupo cíclico finito. La estudiante utilizó la siguiente explicación para mostrar la *naturaleza cíclica* de $\mathbb{Z}_n$ a partir del caso particular de $(\mathbb{Z}_2, +_2)$ (ver Figura 9).

Lu: Eso es que sea cíclico […] un ejemplo es $\mathbb{Z}_n$ con cualquier n.

Entrevistador: ¿Por qué es un grupo cíclico?

Lu: Porque si, por ejemplo, tenemos en $\mathbb{Z}_2$. 0, 1, 2, 3 ¿a dónde los va a mandar?, éste lo va a mandar a 1, a 0 perdón, éste a 1, éste a 0, éste a 1 y se van a ir repitiendo los elementos.

Entrevistador: Mmm, ¿con eso te refieres a los elementos a, b, hasta r? ¿En este caso serían 0 y 1? […].

Lu: Ajá, $\mathbb{Z}_2$ aquí sería $a = 0$, $b = 1$ y ya no hay más [ver Figura 9].

Entrevistador: Bien.

Lu: Y éstos serían $r + 1$ […] y éste $r + 2$ y así [ver Figura 9].

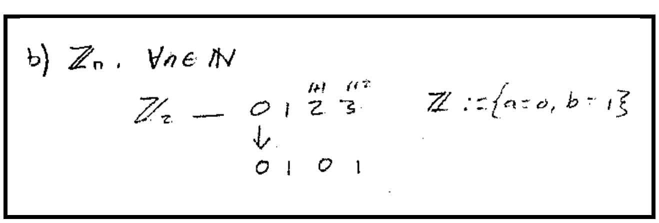


Figura 9. Un ejemplo de grupo cíclico finito proporcionado por Lu

Lu intentó dar otros ejemplos de grupos cíclicos finitos, uno de ellos relacionado con las permutaciones y otro con los cuaterniones (Figura 10). A pesar de que no tuvo éxito, en ambos casos sus argumentos se refieren a la misma idea de que los elementos se repiten una y otra vez, donde un elemento lleva al siguiente. En ese sentido, consideramos que para Lu *cualquier grupo finito* pudiera satisfacer esas condiciones, esto es, en un grupo finito se puede saber cuál es el elemento inicial y cuál es el elemento final. Por otra parte, como se muestra en el ejemplo de la derecha en la Figura 10, Lu manifestó una idea incorrecta de "cuaterniones", ya que debió considerar únicamente tres unidades imaginarias.

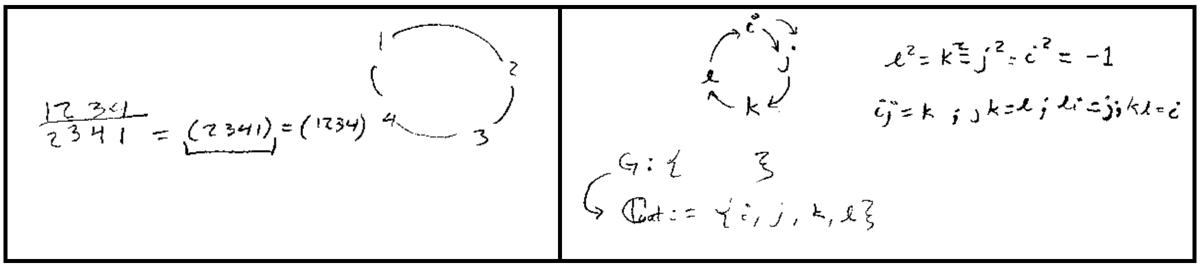


Figura 10. En un grupo cíclico finito los elementos se repiten una y otra vez

3.3.3. Técnica de obtención de datos

Se diseñó un protocolo de entrevista semiestructurada a desarrollar en cinco sesiones, que constituyó la principal fuente de obtención de datos. Todas las entrevistas fueron grabadas en audio y video para su posterior análisis. Además, éstas se transcribieron en su totalidad para ser analizadas junto con las producciones escritas obtenidas. Cada sesión tuvo una duración de aproximadamente 90 minutos. Las entrevistas se llevaron a cabo en las instalaciones de la Facultad de Matemáticas.

3.3.3.1. *Entrevista semiestructurada*

En esta investigación usamos la entrevista semiestructurada como un instrumento de recolección de información para profundizar en el razonamiento de Lu. Adoptamos el enfoque de Arnon et al. (2014) en el sentido de que, en dependencia de las respuestas proporcionadas por la estudiante, el entrevistador puede optar por una ruta más didáctica. En este caso, si la estudiante se estancara ante una tarea específica o no proporcionara una respuesta razonable a una pregunta, se pueden dar pistas con la finalidad de incitar su progreso en la construcción de conceptos y para motivar conexiones entre diferentes nociones (Oktaç, 2019). De acuerdo con Arnon et al. (2014):

> Esta práctica se alinea con el paradigma donde el objetivo de una entrevista en particular […] no es organizar a los estudiantes en categorías, sino determinar y explicar cómo los individuos construyen su comprensión de los conceptos matemáticos. Tal enfoque, que incluye preguntas de seguimiento e indicaciones, permite al entrevistador observar el proceso de construcción a medida que se desarrolla. (p. 96).

Inicialmente se elaboró un cuestionario que incorporó una secuencia de tareas de carácter intramatemático fundamentadas en el análisis histórico y epistemológico de grupos isomorfos en la obra de Arthur Cayley presentado en el Capítulo 2, sobre el problema de clasificación de los grupos finitos. En particular, nos centramos en la clasificación de los grupos de orden primo y de orden cuatro (ver Figura 11). Estas tareas fueron validadas por un experto. A continuación, exponemos la intención de las tareas que lo componen:

Las tareas **1-6** estaban destinadas a explorar las asociaciones entre ideas y resultados matemáticos que la estudiante pudiera establecer en relación con los conceptos requeridos para la construcción de todos los grupos (salvo isomorfismo) de orden p, primo; así como los de orden cuatro. La tarea **1** tenía como objetivo explorar el conocimiento de la estudiante en relación con el teorema de Lagrange, y fue central en la secuencia de las tareas. Los ejemplos de grupos finitos que se consideraron en la tarea **1** incluyeron enteros módulo n [$(\mathbb{Z}_n,+_n)$] y permutaciones de un conjunto X [grupo simétrico de n letras, $(S_n,\ \circ)$]. En 1. (c), se consideró la notación de un *ciclo de longitud k* utilizada por el profesor en el curso, por ejemplo, $\sigma = (1\ \ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ denota un ciclo σ de longitud 2 (transposición) en el grupo S_4 de todas las permutaciones de $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

Las preguntas **2** y **3** tenían la intención de explorar el razonamiento de la estudiante respecto a los subgrupos de un grupo de orden primo. En la pregunta **3** se empleó el término *generado* sin hacer referencia explícita a un *grupo cíclico*, esperábamos que la estudiante pudiera establecer relaciones entre un grupo de orden primo y el conjunto generado por cualquiera de sus elementos distintos del neutro. Las tareas **4-6** consideraron grupos cíclicos finitos, se esperaba que la estudiante pueda asociar que el generado por un elemento x del grupo [$\langle x \rangle$] era un subgrupo (*i*) y que el orden de un elemento del grupo es igual al orden del subgrupo generado por este elemento (*ii*).

Las tareas **7** y **8** tienen su fundamento en la información histórica del trabajo de Cayley (Capítulo 2). Estas tareas estaban destinadas a explorar las relaciones entre ideas y resultados matemáticos que hiciera la estudiante en la determinación de que el único grupo de orden p (primo) es el grupo cíclico de ese orden. Es posible que la estudiante relacione las ideas discutidas en las tareas anteriores (**1-6**) y sean consideradas para el caso particular de los grupos de orden primo, esto debido a la secuencia de las tareas.

Respecto a la clasificación de los grupos de orden cuatro, se preparó un protocolo semiestructurado constituido de tareas e indicaciones (**9** y **10**) destinadas a explorar las conexiones matemáticas que hiciera la estudiante mientras lleva a cabo la *construcción* de los dos grupos de este orden. El protocolo también se fundamenta en la información histórica en relación con el trabajo de Cayley.

1. Dados los siguientes grupos:

a) $(S_2, \circ)$;

b) $(\mathbb{Z}_3, +_3)$;

c) $G = \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \subset S_4$, con la composición;

d) $(\mathbb{Z}_5, +_5)$;

e) $(S_3, \circ)$;

f) $(\mathbb{Z}_6, +_6)$;

g) $(\mathbb{Z}_7, +_7)$.

i. ¿Cuántos subgrupos tienen cada uno de ellos? Justifica tu respuesta.

ii. Calcula el orden de cada subgrupo.

iii. ¿Qué relación hay entre el orden de un grupo con el orden de cualquiera de sus subgrupos? Explica.

2. ¿Cómo determinas todos los subgrupos que tiene un grupo de orden primo? Explica.

3. Si G es un grupo finito de orden primo p y $x \in G$, ¿qué se puede decir del subgrupo generado por x?

4. Sea $G = \{1, i, -1, -i\} \subset \mathbb{C}$, con la multiplicación de números complejos y $x \in G$.

i. ¿Qué puedes decir del generado por x?

ii. ¿Qué relación existe entre el orden de x y el orden del generado por x?

5. Sea $G = (\mathbb{Z}_5, +_5)$ y $x \in G$.

i. ¿Qué puedes decir del generado por x?

ii. ¿Qué relación existe entre el orden de x y el orden del generado por x?

6. Sea $G = (\mathbb{Z}_8, +_8)$ y $x \in G$.

i. ¿Qué puedes decir del generado por x?

ii. ¿Qué relación existe entre el orden de x y el orden del generado por x?

7. Clasificación: grupos de orden primo.

i) Considera un grupo G de orden 3, con elemento generador α.

- Construye la tabla del grupo G.

ii) Considera un grupo H de orden 3, con elemento generador β.

- Construye la tabla del grupo H.

iii) Compara ambas tablas y determina si los grupos G y H "se comportan de la misma manera".

iv) ¿Podrías dar un ejemplo de un grupo de orden 3 que "no se comporte de la misma manera" que los anteriores?

8. Considera un grupo A de orden 5, con elemento generador γ.

- Construye la tabla del grupo A.

i) ¿Podrías dar un ejemplo de un grupo de orden 5 que "no se comporte de la misma manera" que el anterior?

9. Explica por qué un grupo G de orden par tiene al menos un elemento de orden dos.

10. Considera un grupo G de orden cuatro con elementos $1, \alpha, \beta, \gamma$ distintos, donde el símbolo 1 representa el neutro.

i) Sea α *el* elemento de orden dos (puede ser cualquiera diferente de 1).

- Determina el generado por α.
- ¿El generado por α es un subgrupo de G?

ii) A partir de $\langle\alpha\rangle$ construye una tabla de operaciones con cuatro elementos.

- Si no sabe cómo construir la tabla:
- Construye la tabla de operaciones para $\langle\alpha\rangle$.
- Si β es otro elemento de G diferente del neutro y de α, discute lo que sucede al multiplicar (operar) por la derecha por β. [Puede hacer uso de la tabla de $\langle\alpha\rangle$]
- ¿Por qué el elemento $\alpha\beta$ es diferente de 1, α y β?

iii) Considera cualquier fila de la tabla de operaciones que obtuviste a partir de *ii*) [puede ser la de β].

- Determina los casos para los cuales $\{\beta, \beta\alpha, \beta^2, \beta\alpha\beta\} = \{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$.
    - Si hace alguna propuesta:
        - ¿Será el único caso?
        - ¿Cómo sabes que no hay otras posibilidades?

iv) Para cada caso que determinaste en *iii*) construye su respectiva tabla de operaciones.

- Reescribe las tablas con los elementos de $G = \{1, \alpha, \beta, \gamma\}$.
- ¿Los grupos resultantes "se comportan de la misma manera"? Explica.

Figura 11. Protocolo de la entrevista

3.3.4. Metodología para el análisis de datos: Análisis cualitativo de texto

El proceso general de análisis cualitativo de texto presentado en la Figura 12 evidencia su naturaleza no lineal en la que las diferentes fases (áreas del método) no están estrictamente separadas unas de otras, por ejemplo, es posible adquirir más datos después de haber establecido el sistema de categorías, incluso si la mayoría de los datos con los que se contaba inicialmente ya hubiesen sido codificados. El diagrama en la Figura 12 muestra la importancia y el rol que juega la pregunta u objetivo de investigación en el análisis cualitativo de texto, misma que es central en cada una de las cinco fases de este enfoque: lectura e interpretación del texto, construcción de categorías, codificación de segmentos del texto, análisis, y presentación de los resultados; y puede sufrir cambios durante el proceso de análisis; de manera que los ciclos de retroalimentación y las iteraciones son comunes en este método. Otra característica distintiva del análisis cualitativo de texto es que no tiene que ser guiado inicialmente por teorías específicas. Tampoco es necesaria la formulación de hipótesis iniciales en la fase de planeación.

La construcción de categorías y el análisis basado en éstas son también características distintiva del método análisis cualitativo de texto. Kuckartz (2014) señaló que una categoría es el resultado de algún tipo de clasificación, lo cual presupone la agrupación de partes de un texto como palabras, párrafos e incluso páginas o capítulos, a los que son asignados significados comunes. Las unidades de análisis son los segmentos que interesa investigar del contenido del texto y que se caracterizan en categorías.

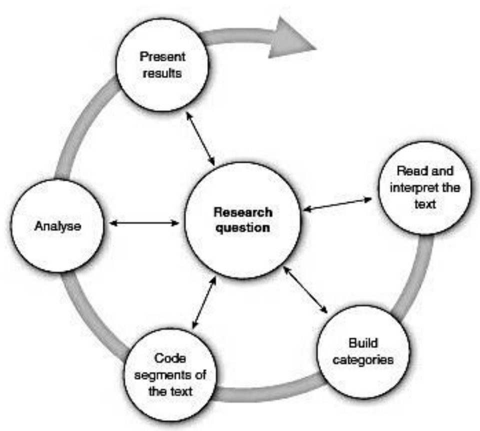


Figura 12. Proceso general de Análisis Cualitativo de Texto (Kuckartz, 2014, p. 40)

La construcción de categorías puede realizarse al trabajar directamente con los datos (*inductivas*); construidas previamente a la recolección de datos, por ejemplo, en función del marco teórico o hipótesis (*deductivas*); y construidas de forma *deductiva-inductiva*, es decir, se puede partir de un sistema de categorías establecido previamente que incluya sólo algunas categorías principales derivadas de una teoría o pregunta de investigación, y ser utilizadas en la búsqueda de contenido relevante a través de los datos y construir subcategorías inductivamente. Sin embargo, puede suceder que los datos no se ajusten a las categorías principales previamente establecidas y en ese caso nuevas categorías pueden ser construidas (Kuckartz, 2014). Los datos son codificados en su contexto de forma hermenéutica e interpretativa. Por ejemplo, en la primera fase que involucra una lectura cuidadosa del texto y tratar de entenderlo sobre la base de la pregunta u objetivo de investigación, implica trabajar a través del contenido y el lenguaje de un texto dado. Podemos observar al mismo tiempo que este método sigue una progresión que es característica en todos los ámbitos de investigación, desde la formulación de la pregunta u objetivo de investigación hasta el análisis y, por último, la presentación de resultados (Kuckartz, 2014).

Basados en el proceso general de análisis cualitativo de texto (Kuckartz, 2014), la *primera fase* implicó la familiarización con los datos, se analizó el texto en función del objetivo general de investigación. Previo a destacar los pasajes importantes se realizó la lectura del texto en su totalidad y se registraron breves notas que incluían ideas, hipótesis y comentarios reflexivos de los investigadores durante el proceso de análisis.

En una *segunda fase*, basados en el objetivo general de investigación y en el marco conceptual adoptado sobre conexiones matemáticas, la construcción de categorías se llevó a cabo de forma deductiva. En ese sentido, consideramos inicialmente las siguientes categorías (ver Sección 3.2.1): *diferentes representaciones*, *comparación a través de características comunes*, *relaciones parte-todo*, *implicaciones*, *procedimientos*, *característica/propiedad*, *derivación*, *conexión de métodos*, *reversibilidad* y *significado*.

La *tercera fase* consistió en la codificación de los datos a partir de las *categorías principales*. Designamos los siguientes códigos (Tabla 6) en relación con las categorías previamente establecidas en la segunda fase:

Tabla 6. Categorías para los diferentes tipos de conexiones matemáticas

Categorías	Código
Característica/propiedad	**CP**
Comparación a través de características comunes	**CC**
Conexión de métodos	**CM**
Derivación	**D**
Diferentes representaciones	**DR**
Implicaciones	**I**
Procedimientos	**P**
Relación parte-todo	**PT**
Reversibilidad	**R**
Significado	**S**

Buscamos en todo el texto frases en el discurso que indicaran que la estudiante hizo conexiones entre ideas matemáticas, procedimientos, representaciones, teoremas o significados y asignamos códigos.

Basados en los resultados de la tercera fase, se definieron las conexiones matemáticas específicas, por tanto, se consideraron sólo aquellas categorías (tipo de conexión) para las cuales encontramos evidencia en relación con las conexiones que hizo la estudiante. Esto se logró mediante la discusión y consenso entre tres de los investigadores involucrados en este trabajo (*cuarta fase*).

Para su presentación, las conexiones matemáticas específicas se agruparon (considerando su respectiva tipología) en torno a la siguiente clasificación: concepto de grupo, subgrupo, teorema de Lagrange y grupos cíclicos; clasificación: grupos de orden primo y clasificación: grupos de orden cuatro (*quinta fase*).

3.4. Análisis de datos y resultados

Identificamos 15 conexiones intramatemáticas que Lu hizo de forma implícita o explícita al resolver tareas relacionadas con la clasificación de los grupos de orden primo y de orden cuatro fundamentadas en un análisis histórico y epistemológico del concepto isomorfismo.

Estas conexiones son asociadas con conceptos y resultados conocidos, tales como: grupo cíclico, subgrupo, teorema de Lagrange, orden de un elemento, isomorfismo y las relaciones entre ellos. Los resultados de esta investigación son consistentes con los tipos de conexiones identificadas por Businskas (2008), Eli et al. (2011), Singletary (2012) y García-García y Dolores-Flores (2017): *diferentes representaciones*, *comparación a través de características comunes*, *característica/propiedad*, *procedimientos*, *relaciones parte-todo*, *implicaciones*, *derivación* y *significado*.

3.4.1. Conexiones matemáticas asociadas a los conceptos de grupo, subgrupo, teorema de Lagrange y grupo cíclico

Presentamos a Lu siete ejemplos de grupos finitos (cuyos elementos involucraban permutaciones y enteros módulo *n*) y demandamos determinar todos los subgrupos de cada grupo, calcular el orden de los subgrupos y explicar la relación que hay entre el orden de un grupo y el orden de cada uno de sus subgrupos. Los resultados evidenciaron que inicialmente Lu no asoció la relación entre dichos órdenes con lo que establece el teorema de Lagrange.

Para la presentación de los grupos fue considerado el orden de menor a mayor a partir de dos hasta siete, se tomaron en cuenta grupos cíclicos y no cíclicos con los que la estudiante estaba familiarizada debido a que se abordaron ejemplos de éstos en sus clases de álgebra. Lu encontró particularmente difícil trabajar en el contexto de permutaciones. A continuación, describimos las conexiones matemáticas que la estudiante hizo al resolver dicha tarea.

(1) *Un subgrupo es un grupo cuyos elementos están contenidos en el grupo principal*

Lu relacionó la noción de subconjunto y el concepto de grupo para explicar qué es un subgrupo. Para Lu, un subgrupo es un subconjunto que satisface las propiedades de grupo: existencia de elemento neutro, inversos, cerradura y asociatividad. Desde este punto de vista es factible que un grupo sea considerado él mismo un subgrupo.

La estudiante realizó esta conexión de tipo *significado* cuando le fue solicitado determinar cuántos subgrupos tenía cada uno de los grupos en la Tarea 1. En particular, el siguiente episodio alude a la discusión en relación con los subgrupos de 1. a) $(S_2, \circ)$.

> *Entrevistador*: […] se te pide determinar todos los subgrupos de $(S_2, \circ)$. ¿Qué es un subgrupo?
>
> *Lu*: Es un grupo que esté contenido, que sus elementos estén contenidos en el grupo mayor. Pues sería él mismo, o sea que ninguno o uno, ¿eso cómo cuenta, si $\mathbb{R}$ es subgrupo de $\mathbb{R}$? (**S**)
>
> *Entrevistador*: No te entiendo.
>
> *Lu*: [Risas] Si podemos ver a $\mathbb{R}$ como un subconjunto de $\mathbb{R}$, entonces si $\mathbb{R}$ fuese grupo […], lo intento comparar con $\mathbb{R}$ [se refiere a $(S_2, \circ)$]. Entonces $\mathbb{R}$ ¿sería un subgrupo de $\mathbb{R}$? Si es así, tenemos un subgrupo que es él mismo. (**S**)

Por otra parte, cuando Lu hizo referencia a la propiedad asociativa parecía considerar que los elementos eran asociativos y no la operación. Esto se evidenció cuando argumentó porqué el subconjunto que contenía únicamente a la *composición identidad* era un subgrupo y el subconjunto que contenía al elemento (2 1), al cual se refiere como el *inverso*, no era un subgrupo (énfasis añadido).

> *Lu*: Entonces, a ver, si tuviera subgrupos tuviese dos [se refiere a $(S_2, \circ)$].
>
> *Entrevistador*: ¿Quiénes serían los dos subgrupos?
>
> *Lu*: Cada uno de los elementos. Pero eso quiere decir que cada elemento cumple con todas las propiedades de grupo, pero las propiedades son, que exista el neutro […], o sea si tomamos el neutro, el neutro es neutro, entonces ya. Que sea asociativo, *el neutro consigo mismo pues es asociativo* […], pero no tiene inverso, ¿necesitamos inverso?, ajá, no tiene inverso o ¿sí? No, tal que algo por algo pues solamente que sea su propio inverso, ¿el neutro es su propio inverso? A ver, pues sí [verificó que el subconjunto que contiene al elemento neutro es un subgrupo]. […]. Mmm, ¿el inverso cumple con la asociatividad? [se refiere a $\{(2\ 1)\}$]. Si son tres es, inverso del inverso es 1, pero ya no tiene cerradura. Si ya no tiene cerradura pues ya no puede ser subgrupo […] (**S, P**)
>
> *Entrevistador*: ¿Cuáles son esas propiedades?
>
> *Lu*: [...] que exista neutro […], que tenga asociatividad […]. Inverso, sería que algo multiplicado por él, el inverso es que algo más multiplicado por él mismo dé el neutro […]. Mmm, pues cumple cerradura. (**S, P**)
>
> *Entrevistador*: ¿Por qué cumple cerradura?
>
> *Lu*: Porque apliquemos lo que apliquemos siempre va […] a estar en el mismo grupo. […]

Entrevistador: ¿$(S_2, \circ)$ tendrá otro subgrupo además del neutro?

Lu: Nadie.

Entrevistador: ¿Ni el propio $(S_2, \circ)$?

Lu: Pues eso era lo que le preguntaba hace rato que si un grupo puede ser subgrupo de sí mismo […]

Entrevistador: ¿Cómo podrías estar segura?

Lu: Pues si es grupo las va a cumplir [se refiere a las propiedades de grupo]. (**S**)

(2) *Para hallar los subgrupos de un grupo finito se verifican uno a uno los subconjuntos que satisfacen las propiedades de grupo*

En relación con (1), para los casos específicos de grupos de orden *n* que Lu investigaba, verificó para todos los subconjuntos de combinaciones posibles con uno, dos, hasta *n* elementos del grupo en busca de aquellos que cumplieran las propiedades de grupo. Esta conexión de tipo *procedimiento* fue identificada cuando la estudiante determinó todos los subgrupos de un grupo dado (Tarea 1). Lu también utilizó *representaciones alternativas* para hacer referencia a un subgrupo. Además de la definición informal de este concepto, Lu se basó en las tablas de operaciones para decidir si un subconjunto era un subgrupo.

En el siguiente episodio de entrevista mostramos para el caso particular de la determinación de todos los subgrupos de 1. *c*) $G = \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \subset S_4$, con la composición.

Entrevistador: […] el siguiente es el de un subconjunto de S_4 con la composición […]

Lu: ¿Cuántos subgrupos tiene? A ver, ¿éste es subgrupo? [se refiere al elemento (1 2) (3 4)]. Sí, ¿verdad? […]

Entrevistador: […] dices que el elemento identidad es un subgrupo y ahora quieres ver si el elemento (1 2) (3 4) puede ser un subgrupo y según tú.

Lu: [Interrumpe] Según yo, sí.

Entrevistador: ¿Cómo lo sabes?

Lu: (1 2) (3 4) composición (1 2) (3 4) […] el 4 lo manda al 3 y el 3 lo manda al 4 [realiza las operaciones], es la identidad en S_4 […]. Porque […], aquí 1 lo manda al 2 y el otro lo regresa. […] uno lo manda y el otro lo regresa y eso me da la identidad en S_4, […]. (**P**) [Figura 13]

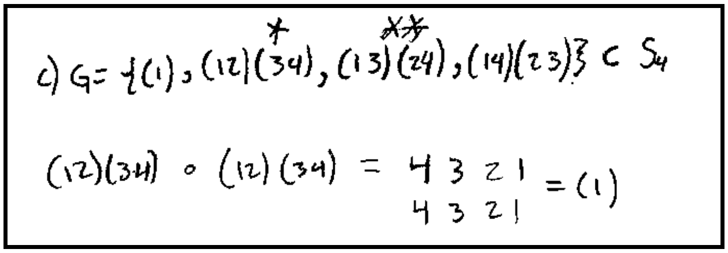


Figura 13. El subconjunto {(1 2) (3 4)} no es un subgrupo de *G*

Entrevistador: ¿Es un subgrupo?

Lu: No, porque no está. Si sólo tomé éste, pues [se refiere al elemento (1 2) (3 4)] al operarlo con este no me puede dar ese. Entonces, lo mismo pasaría aquí, ¿no? [se refiere al otro elemento (1 3) (2 4)] porque si uno lo manda y lo vuelvo a aplicar y ese mismo lo regresa. Y con éste sería lo mismo [se refiere al elemento (1 4) (2 3)]. […] De dos [elementos] éste con la identidad, si aplico identidad y * [inicia el llenado de la tabla con elementos (1) y * = (1 2) (3 4)], aquí ya vimos que nos da la identidad [se refiere a operar * y *] y aquí nos daría * y aquí la identidad, sí [Figura 14]. (**P, DR**)

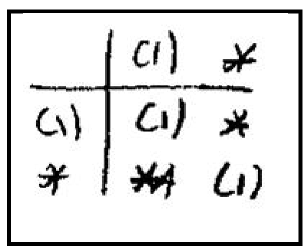


Figura 14. Uso de la tabla de operaciones para verificar si {(1), (1 2) (3 4)} es un subgrupo

Entrevistador: Bien. * con *, ya lo comprobaste anteriormente es la identidad […]

Lu: […]. Pero si éste [(1 3) (2 4)] lo hacemos **, el 1 lo manda al 3 y el 3 lo regresa [comprueba para ** y verifica que es otro subgrupo con dos elementos, además comprueba que pasa lo mismo para el elemento (1 4) (2 3), que denota como ***], de dos. Y de tres [se refiere a subconjuntos de tres elementos], éste ya no porque me lo cambia, (1 2) (3 4) composición (1 3) (2 4) [realiza la operación y obtiene como resultado (1 4) (3 2), ver Figura 16]. Creo son todos [los subgrupos, ver Figura 15]. (**P**)

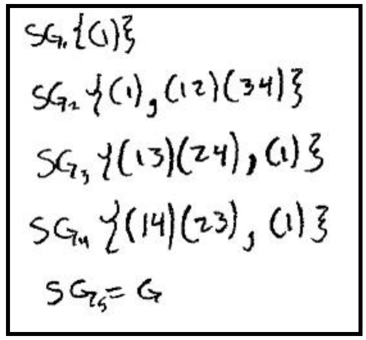


Figura 15. Todos los subgrupos de *G*

> *Entrevistador*: ¿Por qué?
>
> *Lu*: Porque al aplicar dos nos da el otro.
>
> *Entrevistador*: ¿Y así pasa con los demás? Bueno, aquí operaste, entiendo, * y ** y obtuviste el otro elemento, ***.
>
> *Lu*: Sí.
>
> *Entrevistador*: ¿Y estás segura de que al operar ahora ** con *** vas a obtener * y así para?
>
> *Lu*: [Interrumpe] Sí, estoy segura, pero lo podemos hacer [hace la operación de ** y ***] y da * [el elemento (1 2) (3 4), ver Figura 16]. Y ya de cuatro elementos nos queda el total, el subgrupo igual al grupo. (**P**)

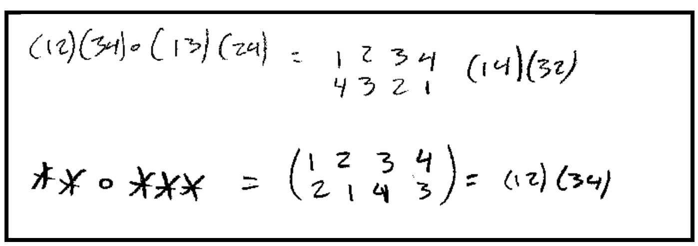


Figura 16. No hay subgrupos de tres elementos

La estrategia empleada por Lu se basó en un trabajo operacional que resultó tedioso. Sin embargo, este procedimiento favoreció en la apreciación y posterior análisis de algunas características que satisfacían los subconjuntos que resultaron ser subgrupos.

(3) *Un subconjunto es un subgrupo con la operación restringida del grupo*

Lu llegó a ser consciente de esta conexión después de trabajar con los distintos grupos que incluía la Tarea 1. En relación con (2), la estudiante asoció el concepto de subgrupo con la propiedad de cerradura e infirió que un subconjunto debía ser un subgrupo con la operación restringida del grupo. En ese sentido, consideramos que Lu estableció una conexión de tipo *característica-propiedad* debido a que reconoció una propiedad que constituye o es parte de un subgrupo.

Inicialmente, Lu no sabía si la operación requerida para verificar si un subconjunto era un subgrupo debía ser la operación del "grupo principal". Consideramos que fue fundamental el trabajo con los grupos cuyos elementos eran enteros módulo *n*, ya que después de analizar el caso de $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ infirió (implícitamente) que la operación tenía que ser la del "grupo principal".

El siguiente extracto corresponde a la discusión para 1. *b*) $(\mathbb{Z}_3, +_3)$, de donde surge la dificultad de Lu para decidir qué operación utilizar. Al respecto, consideramos que tal dificultad puede tener dos orígenes, el primero, debido a una confusión, ya que el subconjunto $\{0, 1\}$ también puede interpretarse como los elementos de $\mathbb{Z}_2$ y considerar que la operación correspondiente es suma módulo 2. O bien, en la comprensión intuitiva de subgrupo, al ser conceptualizado como *un subconjunto cuyos elementos están contenidos en el grupo mayor*, se pudiera pensar, por ejemplo, que $(\mathbb{Z}_2,+_2) < (\mathbb{Z}_3, +_3) < (\mathbb{Z}_4,+_4) \ldots < (\mathbb{Z}_n,+_n)$. Sin embargo, al abordar los otros casos específicos de grupos que involucraba la Tarea 1, Lu utilizó la operación restringida del grupo en la determinación de posibles subgrupos.

> *Entrevistador*: Dices que un subgrupo de $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ es el subconjunto que contiene al neutro y el otro es $\mathbb{Z}_3$.
>
> *Lu*: Sí.
>
> *Entrevistador*: ¿Son todos los subgrupos de $(\mathbb{Z}_3, +_3)$?
>
> *Lu*: Pues sí tiene más [subgrupos] porque, por ejemplo, éste es un subgrupo [se refiere al subconjunto $\{0,1\}$]. **(P)**
>
> *Entrevistador*: ¿Por qué es un subgrupo?
>
> *Lu*: No, a ver, es un subconjunto, pero no sabemos si es un subgrupo, o sea, no sabemos si es grupo. Sí, éste es subgrupo porque es grupo con $\mathbb{Z}_2$, o sea, éste es $\mathbb{Z}_2$, ¿no?
>
> *Entrevistador*: ¿Ese es $\mathbb{Z}_2$?
>
> *Lu*: Sí.
>
> *Entrevistador*: ¿Y por qué es un subgrupo de $\mathbb{Z}_3$?

> *Lu*: A ver, tiene que ser subconjunto y tiene que ser grupo con la operación, ¿aquí sería con suma 2 o con suma 3? (**CP**)
>
> *Entrevistador*: ¿Tú con qué operación crees que sea grupo?
>
> *Lu*: Según yo […] es con suma 2 […], si es con suma 3 no es subgrupo, pero entonces la otra que podría ser, la otra opción es {1, 2} o {0, 2}, tampoco son subgrupos. (**CP**)
>
> *Entrevistador*: No son subgrupos, ¿con qué operación?
>
> *Lu*: Con suma 3. (**CP**)
>
> *Entrevistador*: ¿Por qué?
>
> *Lu*: Porque aquí sería 2 y aquí sería 0 y 0 ya no está, 0 no pertenece […]. Y aquí tendríamos {0, 2} con suma 3 [construye la tabla de operaciones para {0, 2}], 4 es 1 y 1 no pertenece. (**CP**)
>
> *Entrevistador*: Entonces, los conjuntos con los elementos {1, 2} y {0, 2} no serían subgrupos, ¿y {0, 1}?
>
> *Lu*: Es que igual, si es con suma 3, no. Pero si lo hacemos con suma 2 sí sería, pero es que suma 2 es de $\mathbb{Z}_2$, pues, no es la misma operación que en $\mathbb{Z}_3$. (**CP**)

(4) *Cualquier grupo tiene por subgrupos al trivial y al total*

En relación con (2) y (3), para los grupos finitos específicos de la Tarea 1, Lu verificó que efectivamente el subconjunto que contenía únicamente al elemento neutro y el propio grupo eran subgrupos, a los cuales llamó “neutro” y “total”. Lu se basó en la verificación de las cuatro propiedades de grupo para probarlo. Consideramos que la estudiante hizo una conexión de tipo *relación parte-todo* al reconocer a los subgrupos trivial y total como subgrupos de cualquier grupo (*generalización*). Después del análisis que Lu llevó a cabo al determinar todos los subgrupos del grupo *a*) $(S_2, \circ)$, para los restantes seis grupos estaba convencida de que cada uno de los grupos tenía al menos dos subgrupos, el trivial y el total.

> *Lu*: […] cualquier grupo, para cualquier grupo el neutro es un subgrupo. […]. Un grupo puede ser subgrupo de sí mismo. (**PT**)
>
> *Entrevistador*: ¿Cómo podrías estar segura?
>
> *Lu*: Pues si es grupo las va a cumplir [se refiere a las propiedades de grupo]. A ver, tenemos al grupo S_2, si tomamos […] al mismo, pues sí las va a cumplir, porque tiene neutro, sí, su neutro aquí está; tiene asociatividad […], lo cumple. Sólo tengo que verificar […] que sus elementos estén en el grupo […] es cerrado; para cada elemento

existe su inverso, su inverso es el mismo. Así como vimos aquí, el inverso de éste es éste mismo y el inverso del neutro pues es el neutro. Y ya no hay más subgrupos. (**P**)

Entrevistador: Entonces, ¿cuántos subgrupos tiene S_2?

Lu: Dos. El neutro y el total. (**PT**)

(5) *El neutro es un elemento que pertenece a cualquier subgrupo*

Lu infirió que todo grupo tiene un único subgrupo con un elemento, el que contiene al neutro, ya que ningún otro elemento se comporta como éste. De acuerdo con la explicación de Lu, el elemento neutro es único en un grupo y debe estar en cualquier subconjunto que sea un subgrupo. Por lo tanto, Lu señaló que aquellas combinaciones de elementos (los subconjuntos) que no contienen al elemento neutro, no podrían ser consideradas como posibles subgrupos. En ese sentido, la estudiante estableció una conexión de tipo *característica-propiedad*, ya que reconoció una propiedad que constituye o es parte de un subgrupo.

Entrevistador: Entonces, ¿qué relación hay entre el orden del grupo con el orden de cualquiera de sus subgrupos?

Lu: Bueno, están entre a lo más, pueden ser el orden del grupo, por esto, porque el grupo es subgrupo del grupo [risas]. (**CP**)

Entrevistador: Si.

Lu: A lo más uno y además un subgrupo de cardinalidad uno. (**CP**)

Entrevistador: ¿Por qué crees que sucede eso?

Lu: Porque ya intuimos que la operación, bueno, yo acabo de intuir ahorita que la operación que vamos a ocupar es la del grupo principal, si eso es así, cualquier otro elemento del grupo no puede actuar como el neutro. (**CP**)

Entrevistador: Ningún otro puede actuar como el neutro.

Lu: No, y a la hora de que veamos que sea un subgrupo no va a funcionar porque ninguno va a ser el neutro y en el subgrupo necesitamos un neutro, así que ningún otro subconjunto de un elemento que no sea el neutro puede ser subgrupo. […] (**CP**)

Lu: [Al abordar el caso 1. *d*) $(\mathbb{Z}_5,+_5)$] Aquí está un ejemplo, mire, muy rápido, si […] son módulo 5; con el 1 no nos da un subgrupo. Igual con el 2, con el 2 sería 4, con el 3 sería 1, con el 4, 4 y 4 es 8, es 3, así que no nos da [los subconjuntos $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ y $\{4\}$ no son subgrupos de G]. Así que de cardinalidad uno, igual a uno solo está éste [el neutro] (**P**). Ahora, mmm, {0,1} ¿es subgrupo? {0,1} tenemos a 0, éste nos da uno […] y 1 y 1, dos, no [{0, 1} no es subgrupo]. {0, 2} […], éste es cero, éste es 2, éste es 2 y éste es 4 y 4 no es 0 [{0, 2} no es subgrupo]. {0, 3} es cero, éste es 3 [verifica a partir del uso de tablas de operaciones] éste sería 3 y éste sería 1 [{0, 3} no es subgrupo]. Con 4 [se refiere al subconjunto {0, 4}] (**P**). No hay de cardinalidad 2. Cardinalidad igual a 2 es vacío. De cardinalidad 3 tenemos {0, 1, 2} [verifica para todos los casos posibles {0, 1, 3}, {0, 2, 3}, {0, 2, 4} y {0, 3, 4} a partir de las tablas de operaciones (**P, DR**)]. Tampoco hay de cardinalidad 3. De cardinalidad 4; tenemos {0, 1, 2, 3} [construye la tabla]. Éste sería 0, éste sería 3, pero el 3 con el 1 es 4 y no tenemos 4 [analiza los casos posibles] […]. De cuatro, ¿cuántos tenemos?, tenemos {0, 1, 2, 3}, tenemos {0, 1, 2, 4}, sí, {0, 1, 3, 4} [verifica para esos casos] {0, 2, 3, 4} [realiza las operaciones en voz baja]. {1, 2, 3, 4}, 4 y 1 es 5 y 5 no está (**P**) [explora en voz baja otros casos]. ¿Puede haber un subgrupo que no tenga al neutro? (**CP**)

Entrevistador: Dime tú si eso es posible.

Lu: Yo digo que no. […]

(6) *El orden de cualquier subgrupo finito divide al orden del grupo*

Además de determinar todos los subgrupos de un grupo finito dado, Lu exploró las posibles relaciones entre el orden de un grupo y el orden de cada uno de sus subgrupos. En particular, a partir de los primeros casos de la Tarea 1, *a*) y *b*), la estudiante infirió que era posible establecer una relación de "igualdad" entre los órdenes: el orden de un grupo iba a ser igual al producto del orden de sus subgrupos. A pesar de que dicha hipótesis no funcionó para otros casos, Lu seguía considerando que al operar de alguna otra manera los órdenes de los subgrupos iba a obtener como resultado el orden del grupo [ver Figura 17].

Lu: Para la Tarea 1. *c*).

Entrevistador: El orden de cada subgrupo.

Lu: La cardinalidad de *G* es cuatro, la cardinalidad de SG_1 es 1 y aquí ya mi teoría ya está mal, de dos [SG_2] es dos, de tres [SG_3] es dos y de cuatro [SG_4], dos, de SG_5 que es el total, es 4. Entonces si fuera lo mismo, aquí tenemos que 4 es igual a 1 por 2 por 2 por 2 por 4 y esto no sé cuánto es, pero es 4 por 4, 16 por 2, 32 por 1, 32.

Entrevistador: Entonces, ¿cuál es la relación?

Lu: Otra podría ser 1, 3 a la 1, no. 1 a la tres 1, 2 a la 2 es 4 a la 2 es 16, no, ya se hizo muy grande. 1 a la 2, no. 2 a la 2 es 4 [hace varias operaciones mentalmente en busca de alguna relación de igualdad].

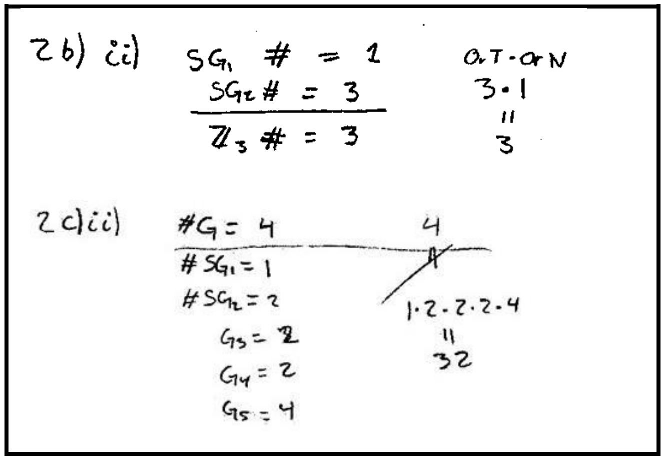


Figura 17. El orden de $G = \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \subset S_4$ no es igual al producto del orden de sus subgrupos

Lu no pudo establecer satisfactoriamente una relación entre el orden de un grupo y el orden de cada uno de sus subgrupos bajo la consideración de que el resultado de operar los órdenes de los subgrupos tenía que ser igual al orden del grupo. Sin embargo, al replantear la pregunta ¿qué relación hay entre el orden de un grupo y el orden de cada uno de sus subgrupos? por ¿qué relación hay entre el orden de un grupo con el orden de cualquiera de sus subgrupos?, Lu cambió su apreciación inicial de la relación de *igualdad* entre el orden de los subgrupos (mediante algún tipo de operación entre los órdenes) y el orden del grupo. Así, Lu se centró en buscar una relación entre el orden del grupo y el orden de cualquiera de sus subgrupos (una relación que todos satisfacen). Lu observó, aunque con algunas imprecisiones que, en *todos* los casos, el orden de cualquier subgrupo dividía el orden del grupo. En ese sentido, decimos que Lu hizo una conexión de tipo *comparación a través de características comunes*.

Inicialmente Lu construyó una tabla con la información que obtuvo de cada uno de los siete grupos y sus respectivos subgrupos e infirió que al dividir el orden del grupo con el orden de cualquiera de los subgrupos obtenía como resultado un número entero, el cual resulta ser un número primo [ver Figura 18].

Lu: […] Entonces éste es 2 y aquí es 2, 1; éste es 3 y éste es 1, 3; 4 y 1, 2, 2, 2, 4 [escribe una lista correspondiente al orden de cada uno de los grupos: 5, 6, 6 y 7 y los órdenes de sus respectivos subgrupos]. Entonces ¿lo único que le pide es que al dividirlos de un número entero? (**CC**)

Entrevistador: ¿Cómo deduces eso?

Lu: Pues si dividimos 2 entre 2 o entre 1 da un número entero; 3 entre 1, entre 3 es un número entero; éste entre cualquiera de éstos y así va a dar un número entero. (**CC**)

Entrevistador: ¿Qué significa eso?

Lu: […] son números primos nada más, 1 o números primos, bueno, es que algunos no toman en cuenta el 1 como número primo. (**CC**)

Entrevistador: Es este caso, por ejemplo, ¿el 4 es número primo?

Lu: No, pero al dividir 4 entre 4 es uno.

Entrevistador: O sea que el resultado de dividir sea un número primo, ¿a eso te refieres?

Lu: Sí […]. Sería orden del grupo entre orden del subgrupo, número entero, primo o uno máximo el orden del grupo. (**CC**)

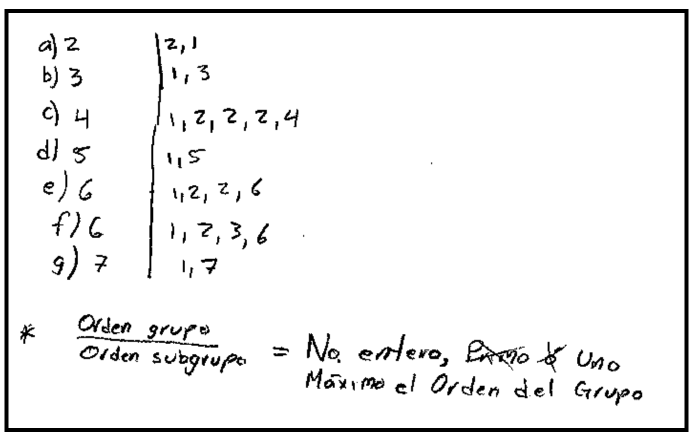


Figura 18. Tabla comparativa entre el orden de un grupo y el orden de sus respectivos subgrupos

Ante la afirmación de Lu en relación con la observación de que el resultado de dividir el orden del grupo entre el orden del subgrupo era un número primo, se generó una discusión sobre los casos particulares de los grupos de orden cuatro y seis, razón por la que en la Figura 18 la palabra “primo” está tachada. Como se muestra en el siguiente episodio, la estudiante utilizó la palabra “divisores”, haciendo referencia a los órdenes de los subgrupos.

Entrevistador: […] en este caso, por ejemplo, si divides cuatro entre uno.

Lu: Es cuatro.

> *Entrevistador*: Y en ese caso, ¿cuatro es número primo?
>
> *Lu*: Bueno, no siempre es número primo, esto no, entonces no podemos tener esto [tacha lo que escribió sobre número primo]. (**CC**)
>
> *Entrevistador*: ¿Y el de orden seis?
>
> *Lu*: […] no es número primo […]
>
> *Entrevistador*: Entonces, ¿qué relación hay entre el orden de un grupo con el orden de cualquiera de sus subgrupos? […]
>
> *Lu*: Pues que son, ¿cómo se llaman los números que dividen a otro número? ¿divisores? Sí […]. (**CC**)
>
> *Entrevistador*: ¿Cada uno de ellos son divisores?
>
> *Lu*: Sí, más o menos lo que puse aquí, que va a salir un número entero no más grande a éste [se refiere al orden del grupo]. (**CC**)

Sin embargo, Lu argumentó que, si no se consideraran los órdenes de los subgrupos trivial y total, el resultado de dividir por los restantes órdenes iba a ser un número primo. En ese caso, preguntamos a Lu sobre los posibles subgrupos de un grupo de orden ocho, que resultó en un contraejemplo de su afirmación anterior. En esta discusión, la estudiante evidenció que era consciente de que un grupo no puede tener un subgrupo cuyo orden no divida al orden del grupo (Figura 19). Consideramos que Lu estableció una conexión de tipo *implicación*: el orden de cualquier subgrupo divide al orden del grupo.

> *Lu*: Bueno, es que yo veo que, si quitamos el uno y el total, o sea, el neutro y el total da un número primo […] (**CC**)
>
> *Entrevistador*: Mmm, por ejemplo, para un grupo de orden ocho, si tuviera subgrupos, ¿de qué orden podrían ser los posibles subgrupos?
>
> *Lu*: ¿Qué yo crea? Tal vez el uno […] pero si hubiera de dos como en el de cuatro […] ¿qué nos resultaría? ocho entre dos, cuatro, y ya no es número primo […].
>
> *Entrevistador*: Así es. […] Por ejemplo, en un grupo de orden ocho, ¿es posible que haya uno de orden cuatro?
>
> *Lu*: Sí, yo creo que sí y de orden dos tal vez también. […] Aunque eso no se puede asegurar, depende del grupo.
>
> *Entrevistador*: Bien. ¿Por qué dices que un grupo de orden ocho puede tener un subgrupo de orden cuatro o de orden dos?

Lu: Porque el cuatro divide al ocho y el dos divide al ocho, ¿no? O sea, yo a lo que digo aquí es que no va a haber en el de ocho uno de orden cinco porque el cinco no divide al ocho. (**I**)

Entrevistador: Y en este caso, por ejemplo, de orden seis, en cualquiera de los dos [$\mathbb{Z}_6$ y S_6], eso que dices, ¿cómo lo verificas?

Lu: Pues vemos si seis entre dos es igual a tres y seis entre tres es igual a dos, entonces éstos son números enteros, por lo tanto, el tres divide al seis y éste dos divide a éste también con un número entero [ver Figura 19]. (**I**)

Entrevistador: Entonces, ¿este grupo de orden seis puede tener algún subgrupo de orden cinco?

Lu: No, ni de cuatro porque no lo divide. (**I**)

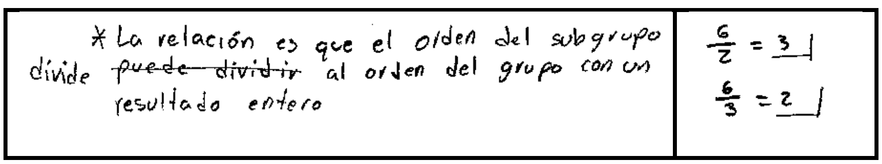


Figura 19. El orden de cualquier subgrupo divide al orden del grupo

(7) *Un grupo G de orden primo tiene por subgrupos únicamente al trivial y al total*

Durante la discusión sobre la relación entre los órdenes de un grupo y cualquiera de sus subgrupos, Lu observó que para los grupos específicos (S_2, $\circ$), ($\mathbb{Z}_3$, $+_3$), ($\mathbb{Z}_5$, $+_5$) y ($\mathbb{Z}_7$,$+_7$), cuyo orden es primo, tenían por subgrupos únicamente el trivial (al que se refiere como neutro) y el total. Lu asoció y utilizó el resultado que relaciona el orden de un grupo finito con el orden de cualquiera de sus subgrupos (ver conexión (6)) y señaló que esa era la razón por la que cualquier grupo de orden primo tenía por subgrupos el trivial y el total. Por tanto, consideramos que Lu hizo una conexión de tipo *implicación*.

Entrevistador: Y […] ¿cómo determinas todos los subgrupos que tiene un grupo de orden *p*, primo? […]

Lu: Pero es que si, a ver, si lo que yo estoy afirmando es que el orden del subgrupo puede dividir al orden del grupo, necesitamos que haya un número que divida, que pueda dividir a ese orden del grupo, pero si el orden del grupo es primo no hay más números que lo dividan. (**I**)

Entrevistador: ¿Cómo?

Lu: Bueno, el uno y el mismo número. Entonces para el uno, o sea para que lo pueda dividir el uno, quiere decir que es de orden uno que es el neutro y que lo divida el mismo número es que es el total, o sea, él mismo. (**I**)

(8) *El generador de un grupo finito G es un elemento que al aplicarlo n veces se obtienen todos los elementos de G*

Inicialmente Lu no asoció el concepto de grupo cíclico con el término generador. Al trabajar con las tareas que involucraban grupos cíclicos finitos, el *significado* que Lu atribuyó al término *generador* fue el de un elemento a partir del cual se construyen todos los elementos del grupo. Específicamente, a partir de potencias sucesivas de un elemento dado, que en algún momento produce el elemento neutro. Por “potencias” Lu se refería tanto a potencias positivas como negativas.

Entrevistador: ¿Qué significa que un elemento sea generador del grupo?

Lu: Pues, se aplica para un grupo n, de tamaño n, eh, de orden n, el generador es que tú tomas un elemento y lo vas a aplicar n veces y te dan todos, te resultan todos los elementos del grupo, eso es. (**S**) […]

Entrevistador: ¿Sólo se consideran las potencias positivas?

Lu: También pueden ser negativas, pero esas potencias negativas están relacionadas con las potencias positivas. O sea, en $\mathbb{Z}_4$, por ejemplo, 3^{-2} es -6, pero -6 no existe, así que esto es igual a -2, pero -2 tampoco existe y -2 es, ah, 2, creo. […] ¿De qué otra manera se puede expresar 3^{-2}? [Escribe $(3^{-1})^2 = (1)^2 = 2$]. Según yo, éste tiene que dar [se refiere a -2 que obtuvo previamente], o sea, se tiene que buscar un elemento que al operar con -2 de como resultado el neutro, el neutro es cero, entonces sumando 2 a -2 nos da 0, de ahí, es éste. Por el otro método [se refiere a $(3^{-1})^2$], el inverso de tres es uno, al cuadrado es 2. […] Ok, yo no los estoy poniendo porque según yo no los repetiría. O sea, bueno, aquí podría quedar desde así [escribe abajo los elementos a^0, a^{-1}, hasta a^{1-n}] hasta 1-n, creo. Porque -n es el cero, pero si este es igual que uno de los de arriba [a^0, a^1, a^2, hasta a^{n-1}, ver Figura 20], ¿para qué ponerlo? […] O sea, si los estoy considerando sólo que alguno de potencia negativa tiene que ser igual a uno de potencia positiva. (**S**)

$$a \in G \; ; \; \langle a \rangle = G = \begin{cases} \{a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{n-1}\} \\ a^0, a^{-1}, a^{-2}, \ldots, a^{1-n} \end{cases}$$

Figura 20. *a* es un generador de un grupo finito *G*

(9) *Un grupo de orden primo es necesariamente cíclico*

Esta conexión está relacionada con la característica que Lu asoció con los subgrupos de un grupo de orden primo, y surgió cuando le preguntamos, ¿qué se puede decir del subgrupo generado por un elemento x de G, si G es de orden primo? (Tarea 3). Lu relacionó los términos subgrupo y grupo de orden primo e indicó que el generado por el elemento x era igual a G, el subgrupo total, debido a la imposibilidad de que el elemento neutro (0 en el caso de $\mathbb{Z}_p$) generara a G.

Por tanto, para Lu la única restricción era que ese elemento x fuera distinto del neutro. En ese caso, el generado por x sería G (el subgrupo total). La estudiante asoció lo que había deducido previamente sobre los subgrupos de un grupo de orden primo con esta tarea. Así, consideramos que Lu hizo una conexión de tipo *implicación*.

> *Entrevistador*: […] Si G es un grupo de orden primo, p y x es un elemento de G, ¿qué se puede decir del subgrupo generado por x?
>
> *Lu*: El conjunto generado por x es subgrupo, entonces [escribe $< x > = G$]. (**I**)
>
> *Entrevistador*: ¿Por qué?
>
> *Lu*: Por ejemplo, en $\mathbb{Z}_p$, ¿qué elementos pueden hacer a $\mathbb{Z}_p$? ¿Generar a $\mathbb{Z}_p$?, el cero no lo puede generar […] Porque cero […] al aplicarlo muchas veces, varias veces […] cero más cero siempre va a dar cero, más cero, otra vez cero y así. Entonces sería el uno […] a ver, sería uno, dos, tres, ajá. No sé qué elemento sea x, pero tenemos excepciones para que sea subgrupo, o subgrupos de G, tenemos dos, uno es éste y el otro es éste [se refiere al trivial y al total]. Si es un subgrupo generado por x quiere decir que x es parte de ese subgrupo, es un elemento del subgrupo. En este caso sería cero, pero cero no genera a G [el subgrupo que contiene al neutro]. En este caso sería un número que no se bien cuál es, pero que genera un subgrupo y como solo tenemos dos posibilidades de subgrupo, entonces el generado por x es G. […] (**I**)
>
> *Entrevistador*: ¿Por qué dices que el generado por x es G?

Lu: Porque yo tomé en cuenta *x* igual a uno. […] O sea, si yo tenía estos dos [el subgrupo trivial y el total] y yo supuse que *x* tenía que estar en los subgrupos, entonces si *x* pertenece a *G* y el generado por *x* es un subgrupo y no puede ser éste [el subgrupo trivial], pues entonces es el otro [el subgrupo total]. […] excepto el neutro, porque el cero podría ser no neutro en uno de composición o de multiplicación. (**I**)

Lu ejemplificó esta idea con un caso particular de un grupo de orden primo, el grupo $(\mathbb{Z}_5, +_5)$, de donde infirió que cualquier elemento de *G* excepto el neutro genera a *G*. En ese sentido, cuando se le cuestionó respecto al grupo $(\mathbb{Z}_{11}, +_{11})$, señaló que los "generados son subgrupos, pero totales".

Lu: […] ¿Lo podemos hacer con cinco? Todos van a ser el mismo (ver Figura 21).
Entrevistador: ¿Por qué?
Lu: Porque 5 es un número primo […]. Si no es el neutro, […] cualquier otro elemento de *G*, el generado por ese va a ser el mismo grupo *G*. […] Es el subgrupo total del grupo […] (**I**)
Lu: En este caso el grupo principal es número primo [se refiere al orden]. Entonces, pues ningún número que no sea él mismo o el uno lo va a dividir, así que no va a tener ningún subgrupo. Si no tiene ningún subgrupo, todos los elementos de él mismo van a generar al total, excepto el neutro. (**I**)
Entrevistador: Mmm, bueno, eso que dices respecto a que *G* tiene ningún subgrupo.
Lu: Bueno, ningún subgrupo que no sea el neutro o el total […].

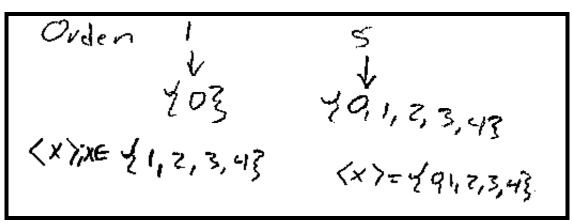


Figura 21. Todos los elementos de un grupo de orden primo, excepto el neutro, son generadores del grupo

En este momento de la entrevista se le dijo a Lu que, si en un grupo *G* existe un elemento *x* generador del grupo, es decir, $G = < x >$, se dice que *G* es cíclico.

(10) *El orden de cualquier elemento divide al orden del grupo*

Durante la discusión sobre los generadores de un grupo de orden primo, también se abordó la relación entre el orden del elemento generador y el orden del subgrupo generado por éste. Lu observó la relación de igualdad entre los órdenes y estableció una asociación entre el orden de un grupo y el orden de sus elementos. De manera análoga a considerar la imposibilidad de la existencia de un subgrupo cuyo orden no fuera divisor del orden del grupo, no es posible que el orden de un elemento no divida al orden del grupo. En ese sentido, consideramos que Lu hizo una conexión de tipo *comparación a través de características comunes*.

> *Lu*: Pues es que este es de orden primo, así que sólo va a tener el neutro y el total [se refiere a los subgrupos]. Sólo dos, de orden uno y de orden cinco, el conjunto del cero y el conjunto del cero al cuatro. […] (**I**)
> *Entrevistador*: ¿Quiénes serían los generadores de $\mathbb{Z}_5$? […]
> *Lu*: [Desarrolla el generado por uno en forma de potencias].
> *Entrevistador*: ¿De qué orden es ese subgrupo?
> *Lu*: Cinco.
> *Entrevistador*: Tomaste como elemento generador al uno, ¿de qué orden es ese elemento?
> *Lu*: Cinco. [Para los demás elementos generadores, los desarrolla en forma de potencias]. Porque es cuando vuelve a empezar. O sea, si yo pongo aquí uno a la seis, va a ser uno otra vez […]
> *Entrevistador*: […] ¿de qué orden son cada uno de los elementos generadores?
> *Lu*: Pues cinco, pero todos los elementos generadores van a ser de orden del orden del grupo. […] (**CC**)
> *Entrevistador*: ¿Cuál es la relación entre el orden del elemento generador y el orden del subgrupo generado por éste?
> *Lu*: Pues yo digo que es del mismo orden. O sea, el elemento generador de un grupo versus el orden del grupo, bueno, este sería orden de *G* [subgrupo total], es igual [ver Figura 22] […]. (**CC**)

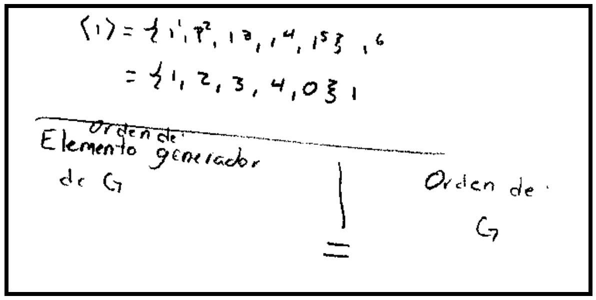


Figura 22. El orden del elemento generador de *G* es igual al orden del subgrupo generado por ese elemento

Lu: Entonces el orden del elemento va a generar un subgrupo del mismo orden. El orden del elemento es igual al orden del subgrupo que genera. Yo había dicho antes que el orden del subgrupo puede dividir al orden del grupo, si es el mismo al del orden del elemento, ¿entonces el orden del elemento puede dividir al orden del grupo? Sí. […] (**CC**)

Entrevistador: Por ejemplo, considera el grupo $(\mathbb{Z}_{20},+_{20})$, ¿puede tener este grupo un elemento de orden once?

Lu: No.

Entrevistador: ¿Por qué?

Lu: Porque once no divide a veinte, por eso no se puede. […] (**I**)

Entrevistador: Bien, ¿todos los subgrupos distintos del trivial y el total en $(\mathbb{Z}_{20},+_{20})$ pueden ser de orden igual a veinte?

Lu: No.

Entrevistador: ¿Por qué?

Lu: Significaría que todos los elementos son de orden veinte y no todos los elementos son de orden veinte.

Entrevistador: Y que todos los elementos sean de orden veinte, ¿qué significaría?

Lu: Pues que el orden del grupo es primo y veinte no es primo. (**I**)

3.4.2. Conexiones matemáticas asociadas a la clasificación de los grupos de orden primo

(11) *Los grupos de orden tres son similares*

Dado el trabajo previo con grupos finitos de orden primo, solicitamos a Lu considerar un grupo *G* de orden tres con elemento generador α y construir su tabla de operaciones. Lu asoció la idea de que, si α fuera un generador del grupo, a partir de éste se podrían obtener todos los elementos del grupo, que constituyen un subgrupo de orden tres (el total). Esta tarea no fue sencilla para Lu, inicialmente expresó los elementos del generado por α en forma de potencias (α^0, α^1, α^2), pero no sabía cuál de ellos era el elemento neutro, ya que pensaba que si consideraba α^0 como el neutro del grupo, significaría que el neutro genera a G y eso no podía ser posible. Consideramos que la estudiante hizo una conexión de tipo *derivación* cuando se apoyó en el conocimiento de las propiedades del grupo $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ y en la construcción de su tabla para inferir que $\alpha^3 = \alpha^0 = e$ y poder avanzar en la resolución de la tarea.

> *Entrevistador*: […] considera un grupo G de orden tres, con elemento generador α. Entonces se te pide que construyas la tabla del grupo G […]
>
> *Lu*: ¿Y cómo se cuál es el neutro?
>
> *Entrevistador*: […] ¿Cuál sería el elemento neutro, considerando que tienes un elemento generador α del grupo G? […] ¿Estás pensando en un grupo en específico?
>
> *Lu*: Sí. […] Uno podría ser $\mathbb{Z}_3$ con 0, 1 y 2. […] (**D**)
>
> *Entrevistador*: […] ¿quién sería alfa al cubo?
>
> *Lu*: Alfa a la cero […] (**D**)
>
> *Entrevistador*: Bien, ¿cuáles son los elementos del generado por α en un grupo de orden tres?
>
> *Lu*: Los elementos del grupo serían alfa a la cero, alfa a la uno y alfa a la dos. […] Pues es que no me gustó que quedó alfa cero [en la tabla de la izquierda, ver Figura 23] como si fuera, o sea, así como lo escribí quedó alfa cero como si fuera el neutro y eso no me gustó. (**D**)
>
> *Entrevistador*: ¿Por qué no te gustó?
>
> *Lu*: Porque el neutro no puede generar a G. (**I**)
>
> *Entrevistador*: […] A ver, tienes un grupo G con elemento generador del grupo alfa. […]
>
> *Lu*: Alfa a la uno sería ese elemento alfa. […]. No sabemos quién sea alfa al cuadrado, queda indicado. Alfa a la tres, pues es igual, queda indicado […]. (**D**)
>
> *Entrevistador*: […] Considerando tu ejemplo de $\mathbb{Z}_3$. Ahí, ¿quién sería un elemento generador?
>
> *Lu*: Uno.
>
> *Entrevistador*: ¿Cómo obtienes a los otros elementos a partir del generador?

Lu: [Escribe cada elemento como potencia del generador]. O sea que alfa tres es el neutro. (**D**)

Entrevistador: Si consideras, por ejemplo, alfa a la cuarta.

Lu: Sería alfa uno [se refiere a α^1]. […] Alfa cero es neutro. (**D**)

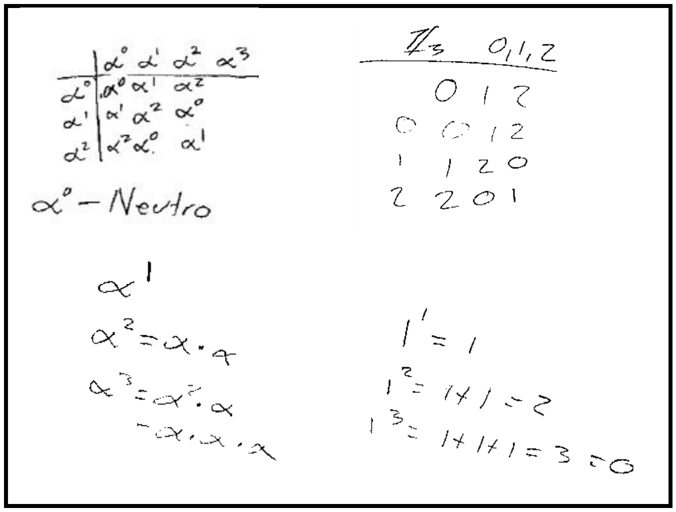


Figura 23. Tabla de un grupo G de orden tres con elemento generador α basado en el grupo $(\mathbb{Z}_3,+_3)$

La tarea siguiente demandaba considerar otro grupo H de orden tres con elemento generador β y construir su tabla. Rápidamente Lu infirió que estas tablas serían iguales/similares. Al comparar las tablas, Lu observó algunas similitudes en ambos grupos: tenían dos elementos que son inversos entre sí, y al realizar algunos cambios en la representación de los elementos las tablas se veían iguales/similares [diferentes nombres para los elementos]. Lu sugirió realizar un cambio de nombre para mostrar que los grupos G y H eran "isomorfos", pero sin llevarlo a cabo. Consideramos que Lu hizo una conexión de tipo *comparación a través de características comunes*, en el sentido de que su argumento principal se basó en la apreciación de similitudes entre las propiedades de los grupos como el orden de los elementos para señalar que los grupos de orden tres tenían tablas similares.

Entrevistador: […] Ahora, considera otro grupo H de orden tres con elemento generador β, construye la tabla del grupo H.

Lu: ¿No va a ser igual la tabla? (**CC**)

Entrevistador: ¿Por qué sería igual?

Lu: […] β pues β, β al cuadrado es β por β, β al cubo […] la e es para el neutro […] Entonces tendríamos β, β^1 y β^2 [llena la tabla con esos elementos]. (**CC**)

Entrevistador: Bien, tienes dos tablas que corresponden a grupos de orden tres, G y H, con elementos generadores α y β. Entonces, compara ambas tablas y determina si los grupos G y H se comportan de la misma manera.

Lu: Yo digo que son similares.

Entrevistador: ¿En qué forma?

Lu: Tenemos un neutro en ambos casos […] y en ambos casos es a la potencia tres que sale ese neutro […] y tenemos dos elementos más que son inversos entre sí […]. (**CC**)

Entrevistador: […] ¿cómo puedes estar segura de que son similares?

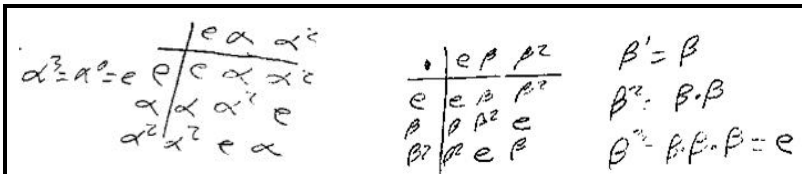
Lu: […] por medio de la tabla. […] porque si aquí hacemos $\alpha^3 = \alpha^0$, entonces α^3 o α^0 es el neutro y si le cambiamos el símbolo quedaría más similar la tabla […]. Y así ya se ve más claro que las tablas son iguales, ¿no? (**CC**)

Entrevistador: ¿Aunque tengan elementos alfa y beta?

Lu: Sí.

Entrevistador: O sea, para ti esas tablas, ¿son iguales?

Lu: Bueno, en sentido estricto de la igualdad, no, pero son […] ¿cómo le decíamos cuando las tablas eran similares, que podíamos hacer un cambio de nombre entre ellas? ¿isomorfos? Algo así, bueno, no sé.



Grupo G con elemento generador α.

Grupo H con elemento generador β.

Figura 24. Dos grupos similares de orden tres

Antes de preguntar a Lu si podía dar un ejemplo de un grupo de orden tres que no se comportara de la misma manera que G y H, la estudiante se preguntó si habría otro grupo de orden tres que no fuera $\mathbb{Z}_3$. El razonamiento de Lu evidencia que consideró a $\mathbb{Z}_3$ y los grupos G y H como *realmente el mismo grupo con diferentes nombres para los elementos y operaciones*. Inferimos que este razonamiento se basó en la apreciación de la propiedad estructural del orden de los elementos. En particular, los tres grupos (*G*, *H* y ($\mathbb{Z}_3$,$+_3$)) tienen dos elementos que son de orden tres (inversos entre sí). En ese sentido, Lu analizó el otro caso posible de un grupo de orden tres donde los elementos diferentes del neutro fueran de orden dos, es decir, que cada uno sea su propio inverso. Hubiera sido fácil argumentar esta imposibilidad debido a que un grupo de orden tres no puede tener un elemento de orden dos (ver conexión 10). Sin embargo, Lu llevó a cabo la construcción de la tabla, mostró que no se cumplía la propiedad asociativa y por tanto no era grupo. Finalmente, Lu hizo una conexión de tipo *relación parte-todo* al reconocer que cualquier otro grupo de orden tres debería tener una tabla similar a *G* y *H* (ver Figura 24).

> *Lu*: Pues, ¿habrá otro grupo de orden tres que no sea $\mathbb{Z}_3$? […] (**PT**)
>
> *Entrevistador*: ¿Podrías dar un ejemplo de un grupo de orden tres que no se comporte de la misma manera que los anteriores?
>
> *Lu*: No.
>
> *Entrevistador*: ¿Por qué no?
>
> *Lu*: Porque, es que no sé cómo explicárselo sin que regrese a lo que […]. Si hubiese una tabla que tuviéramos neutro, neutro, neutro [en la diagonal]; elemento uno y elemento dos [construye su tabla, ver Figura 25]. Aquí debe quedar elemento uno, aquí elemento dos. Entonces, que el elemento uno por el elemento dos fuese así [termina de llenar su tabla]. ¿Esto es grupo? (**PT**)
>
> *Entrevistador*: ¿Cómo lo verificarías? ¿Ese sería otro grupo de orden tres?
>
> *Lu*: [verifica las propiedades, existencia de elemento neutro, inversos, cerradura a partir de su tabla] y tendría que ser asociativo […]. No, no es grupo.
>
> *Entrevistador*: ¿Por qué no es grupo?
>
> *Lu*: Porque no es asociativo.
>
> *Entrevistador*: […], ¿por qué elegiste elementos que eran inversos entre sí?
>
> *Lu*: Porque yo creo que todos, bueno yo creía y ahora también creo que, y lo dudé al momento de hacer la tabla [risas], que todos […] o sea, son tres elementos. Uno es el neutro, y los otros dos inversos entre sí porque, bueno, dije, ¿y qué pasa si no fueran inversos entre sí? Tendrían que ser inversos entre ellos mismos, entonces por eso fue por lo que puse los neutros en la diagonal y dije, bueno, si es neutro, entonces, o sea, si son inversos ellos mismos, entonces aquí está la tabla, e investigué si funciona como grupo. (**PT**)

Entrevistador: Muy bien, entonces si te pidiera que construyeras otro grupo de orden tres que no sea similar al que ya construiste con elemento generador α, ¿podrías construir otro?

Lu: No.

Entrevistador: Y si te dijera, considera un grupo de orden tres con elemento generador γ.

Lu: Pues la tabla sería similar a las dos tablas anteriores. Pues los elementos que se obtienen a partir de γ son, γ^1, γ^2 y γ^3, que serían γ, γ^2 y el neutro. (**PT**)

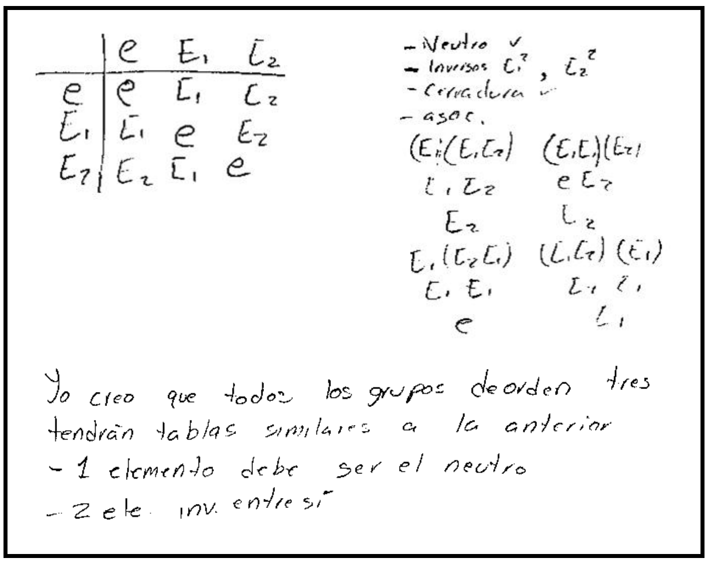


Figura 25. Todos los grupos de orden tres tienen tablas similares a *G* y *H*

(12) *Dos grupos de orden cinco se pueden ver como el mismo grupo haciendo un cambio de nombre que preserve las operaciones*

De manera análoga a un grupo de orden tres, solicitamos a Lu construir la tabla de operaciones para un grupo *A* de orden cinco con elemento generador γ. Lu no tuvo dificultades para llenar la tabla (ver Figura 26).

Entrevistador: […] A continuación, considera un grupo *A* de orden cinco, con elemento generador γ. Construye la tabla del grupo *A*. […]

Lu: Serían cuatro, bueno, hasta exponente cuatro y el […] neutro […]. [Construye la tabla para los cinco elementos] Ya está [Figura 26].

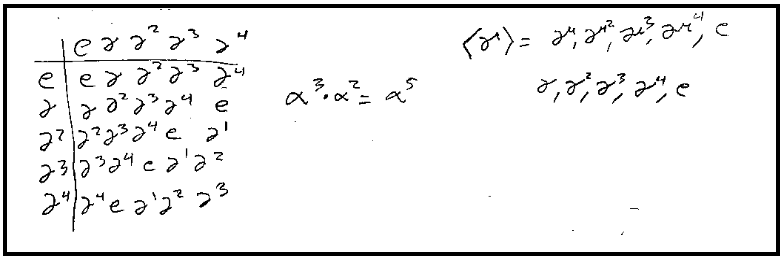


Figura 26. Tabla de operaciones del grupo *A* con elemento generador γ

Cuando preguntamos a Lu si podría dar un ejemplo de otro grupo de orden cinco que no fuera similar al anterior, nuevamente consideró la posibilidad de que, si existiera, la característica distintiva de dicho grupo sería que cada uno de los elementos diferentes del neutro fueran ellos mismos su propio inverso pues, de otra manera se trataría del mismo grupo. Considerando el caso en que los grupos en cuestión son de orden primo, Lu utilizó el resultado de que cualquier elemento diferente del neutro es generador del grupo, que implícitamente implica que todo elemento generador tiene por orden igual al orden del grupo. Es muy probable que Lu haya asociado estos resultados, ya que en el resto de la entrevista se enfoca en mostrar que sólo hay un grupo de orden cinco y cualquier otro sería "similar".

> *Entrevistador*: […] ¿puedes dar un ejemplo de un grupo de orden cinco que no sea similar al anterior?
>
> *Lu*: ¿Pero que sea con los elementos generados? […]. Tal vez sí, pero no sería con un, no tendría elemento generador o ¿sí? ¿Todos los grupos tienen elemento generador?
>
> *Entrevistador*: ¿Tu qué opinas? ¿Qué significa que tengas un elemento generador?
>
> *Lu*: Que ese elemento construye todos los elementos del grupo. (**S**)
>
> *Entrevistador*: ¿Todos los elementos de un grupo pueden hacer eso?
>
> *Lu*: No.
>
> *Entrevistador*: ¿Por qué?
>
> *Lu*: No todos los elementos pueden generar al grupo, por ejemplo, el neutro […] no construye a todo el grupo, a todos los elementos. […]. En los grupos de orden primo vimos que todos sus elementos lo generan, bueno […] sin contar el neutro. (**I**)
>
> *Entrevistador*: Entonces si se te pide construir otro grupo *B* de orden cinco con elemento generador *σ* que no sea similar al grupo *A*.
>
> *Lu*: Un grupo que no sea similar. Pero, yo creo que no […]. Si todos sus elementos de un grupo de orden cinco generan ese grupo, podemos tomar el que sea y hacer una tabla

como ésta [Figura 26]. Si tomamos otro elemento, igual y basamos todo el grupo en ese elemento, la tabla se va a parecer a ésta [Figura 26]. […] Es que no creo porque, a ver, usemos letras […]. Otro grupo de orden cinco, ¿qué quiere decir? que tenemos un *a* que vale *a* obviamente; un *b* que vale dos veces la operación, no sabemos qué operación; un *c* que es tres veces la operación; un *d* que es cuatro veces y un *e* que es cinco veces que es el neutro […]. Entonces, bueno, pero es que esto es el generado [construye la tabla con elemento generador *a*, ver Figura 27]. […] (**S**)

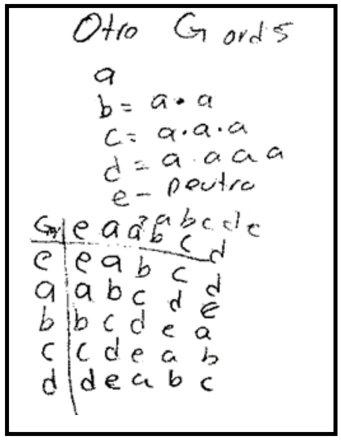


Figura 27. Otro grupo de orden cinco con elemento generador *a*

Además de la apreciación de similitudes entre los grupos como el orden de los elementos, sin hacer uso del término isomorfismo, Lu asoció la idea de grupos similares a la búsqueda de *una relación* que mediante la realización de un *cambio de nombre* de los elementos pudiera mostrar que sólo hay un grupo de orden cinco. Lu no sólo fue capaz de dar dicha relación, también sabía por qué ese cambio de nombre propuesto funcionaba. Consideramos que Lu hizo conexiones de tipo *derivación*, ya que su argumento se basó en la propiedad de isomorfismo, que permite el cambio de nombre de los elementos a través de la correspondencia biunívoca, de tal forma que las tablas de operaciones son "similares", y como Lu verificó, el hecho de que las tablas fueran "similares", garantizaba que se satisface la preservación de las operaciones.

Por otra parte, si bien Lu hace énfasis en que "en orden estricto no son el mismo grupo porque no son los mismos elementos, pero se comportan similar", estamos de acuerdo con Larsen (2009) cuando señala que "por sí mismas, estas interpretaciones competitivas no son realmente problemáticas" (p. 128).

Lu: Lo que haríamos para verificarlo sería […] buscar una relación […], hacer un cambio de nombre y operar y a ver si nos da lo mismo. […] (**D**)

Entrevistador: ¿Cómo estableciste esa relación […]?

Lu: γ^2 con b porque es a^2, c es a^3 y d es a^4. […]. Tenemos [construye la tabla con elementos e, γ, γ^2, γ^3 y γ^4]. Entonces, e ¿por cuál lo cambiamos? Por e, y lo vamos a aplicar por otra e que está aquí […] Bueno, ésta es la trivial [llena la primera fila, ver Figura 28]. […] Si cambiamos […], ¿por cuál cambiamos de acuerdo con la relación, γ? Por a, y de aquí tenemos a, y a por a es a^2 y a^2 es b, y luego regresamos. b ¿con cuál lo tenemos relacionado? Con γ^2, aquí, y γ^2 es b por a que es γ, sería al cubo y a^3 es c, y c es γ^3. Luego, γ^3, por, aquí es c y γ es a, es a^4, que es d y d es γ^4 y así; d es a^4 y a es uno, entonces queda a^5 que es a^0 y a^0 es e, tenemos e, ¿por cuál lo cambiamos? Pues por e [la segunda fila de la tabla, ver Figura 28]. […] (**D**)

Entrevistador: ¿Podrías desarrollar aquí cómo estás operando entre los elementos?

Lu: Tenemos γ^2 que es igual a b, bueno, que le corresponde a b y tenemos γ […], y γ es a. Entonces tenemos a operación b, que es igual a a^2 con a, que es igual a a^3, que es c, y c por la relación es ésta [γ^3]. (**D**)

Entrevistador: Bien. Entonces de esa forma llenarías la tabla.

Lu: Sí. [Llena la tabla, ver Figura 28]. […]

Entrevistador: Entonces, ¿cómo sabes que ese cambio que hiciste efectivamente muestra que las tablas son la misma con elementos denotados con simbología distinta?

Lu: Porque está igual, ¡mire! Está igual, exactamente igual. […]

Entrevistador: […] ¿Eso se cumple para todos los elementos en la tabla?

Lu: Sí, se cumple para todos. Se cumple porque la relación está bien. Sí se cumple para todos porque pues son los elementos de características similares. […] están aplicados la misma cantidad de veces. Por ejemplo, éste γ^2 no se puede hacer corresponder con a^4. (**D**)

Entrevistador: Entonces, reitero la pregunta con esto que acabas de hacer. ¿Este otro grupo G es diferente al grupo A?

Lu: No. O sea, en orden estricto no son el mismo porque no son los mismos elementos, pero se comportan similar. Entonces si lo vemos por comportamiento, sí son iguales. […]. (**CC**)

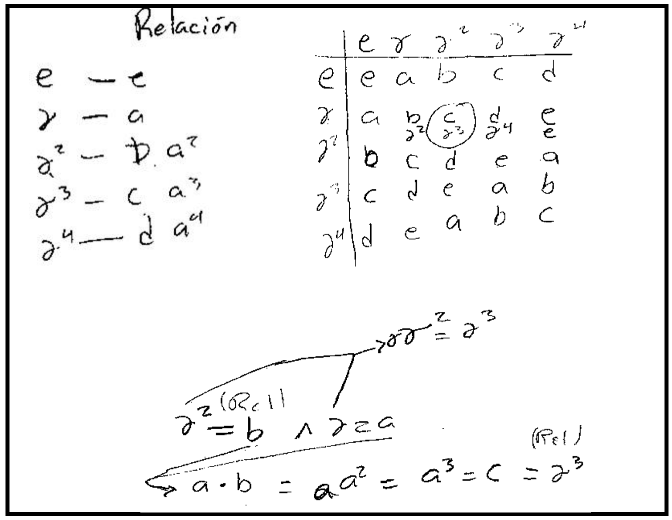


Figura 28. Los grupos de orden cinco son similares

(13) *Hay un solo grupo de orden primo, salvo la denominación de los elementos*

Basada en las dos tareas anteriores, Lu generalizó el caso para cualquier grupo de orden primo. Ella asoció el resultado de que, en un grupo de orden primo todos los elementos diferentes del neutro son generadores y a partir de ese elemento era posible construir su tabla de operaciones. El procedimiento sería análogo a los anteriores, mostrar que las tablas eran "similares" y, por tanto, los grupos considerados eran "similares". Inferimos que Lu hizo una conexión de tipo *relación parte-todo*, ya que reconoció (implícitamente) a los grupos de orden tres y cinco como instancias específicas de grupo finito de orden primo. La estudiante concluyó que *en general*, hay un único grupo de orden primo dado, salvo la denominación de los elementos.

> *Entrevistador*: Entonces, para un grupo *G'* de orden *p*, primo ¿cuántos grupos hay de ese orden *p*, primo?
>
> *Lu*: […] ¿Cuántos grupos de manera estricta? O ¿Cuántos grupos que se comporten similar? O sea, de manera estricta pues hay muchos grupos de orden *p*, primo. No sabemos cuáles. […]
>
> *Entrevistador*: […] ¿Por qué dices que finalmente todos esos se comportan de manera similar?
>
> *Lu*: […] Porque su orden es primo, que su orden sea primo quiere decir que todos los elementos que tiene a excepción del neutro lo van a generar, que quiere decir que puede tomar cualquiera de sus elementos y construir su tabla. Entonces, la tabla de cualquiera

de los elementos seleccionados, de un elemento arbitrariamente seleccionado ¿si me expliqué? O sea, tenemos todos, arbitrariamente tomo uno de cada uno de ellos, construyo su tabla y veo que las tablas se comportan similar, o sea, es el mismo. (**PT**)

Entrevistador: Entonces, ¿cuántos grupos de un orden p, primo hay?

Lu: Uno, siempre va a haber uno, sí. (**PT**)

3.4.3. Conexiones matemáticas asociadas a la clasificación de los grupos de orden cuatro

(14) *Un grupo finito de orden par tiene un elemento de orden dos*

Lu hizo una conexión de tipo *derivación* basada en su conocimiento de las propiedades de un grupo. En particular, se satisface que todo elemento tiene un (único) inverso, así como la idea de que el orden de un elemento es igual al orden de su inverso. Lu argumentó que un grupo de orden par tiene un elemento que es de orden uno, el neutro; si ese elemento no es considerado quedaría una cantidad impar de elementos, en cuyo caso inferimos que Lu no tenía dificultad en considerar que todos fueran de orden dos, ya que cada uno sería su propio inverso (aunque no lo dice explícitamente). Si en el grupo no todos los elementos tuvieran orden dos, significaría que uno tendría que ser inverso de otro, por lo que Lu consideró "parejas" de elementos cuyos órdenes eran iguales. Al tener una cantidad impar de elementos siempre sobra uno, que tendría que ser de orden dos (su propio inverso). Entonces, Lu creía que en un grupo no puede haber un sólo elemento de orden distinto de uno y dos, porque se necesitaría otro del mismo orden con el cual emparejarlo (su inverso).

Lu: Bueno, mi idea es la siguiente. En este de orden cuatro tenemos cuatro elementos obviamente, si hay dos que sean del mismo [se refiere al mismo orden] y tenemos el neutro, ya llevamos tres. Entonces el que quede es de orden dos y así va a pasar siempre porque vamos a tener el neutro. Entonces, si los demás van a pares, por ejemplo, [...] $\mathbb{Z}_6$ de orden seis, son seis elementos, van, por ejemplo, dos de tres, dos de seis son cuatro y tenemos el neutro y entonces nos queda uno de orden dos. (**D**)

Entrevistador: Entonces, piensas que tendrían que considerarse parejas de elementos del.

Lu: [Interrumpe] Del mismo orden. [...] En un grupo de orden par como los que ya mencioné, tengo dos elementos que son inversos entre sí, un elemento que es el neutro, entonces el otro debe ser de orden dos, es decir, inverso de sí mismo. En el de $\mathbb{Z}_6$, si no consideramos al neutro, tenemos cinco elementos restantes, si alguno de ellos tuviera orden seis, debe haber otro elemento de orden seis que es inverso de éste. De orden tres tendría dos, porque son inversos entre sí. Entonces tendría parejas y me queda un sólo elemento, que tendría que ser de orden dos ¿por qué? Porque es su propio inverso. […] Aunque no siempre pasa que van en parejas. Por ejemplo, el otro grupo de orden cuatro. Ahí hay tres elementos de orden dos. […] Entonces sí, me refiero a que no puede haber un grupo que estos dos sean de orden dos y éste de orden cuatro. (**D**)

(15) *Hay dos grupos estructuralmente diferentes de orden cuatro*

Lu tenía claro que en un grupo de orden cuatro había un elemento de orden uno (el neutro) y un elemento de orden dos (un elemento que era su propio inverso). Inicialmente, intentó llenar una tabla (sin tener éxito) con los elementos 1, α, β y γ, donde el símbolo 1 representaba al elemento neutro y α, β y γ eran tres elementos diferentes entre sí y del neutro. El razonamiento de Lu lo interpretamos como un intento de seguir el procedimiento visto en clase de abordar todas las posibilidades de llenar una tabla con cuatro elementos.

Lu: Yo aquí creo α, β y γ pueden ser […] de orden dos y la segunda opción que yo digo es que, pues, el neutro no lo tomamos en cuenta, es, no sé si haya uno o dos de orden dos y uno de orden cuatro. Entonces sería, a ver, es que es [discute las posibilidades hablando en voz baja] entonces es, inversos entre sí, dos de orden cuatro y uno de orden dos, no […]

Entrevistador: Continúa.

Lu: ¡Mire, este es así!, […] tenemos β y γ y β y γ [inicia con el llenado de la tabla, ver Figura 29] y estos son inversos entre sí, o sea que aquí va la identidad, aquí va β, aquí γ, aquí β y aquí γ. Ahí es donde no sé cómo, no me acuerdo como eran éstos [espacios en blanco en la tabla de operaciones de la Figura 29] […].

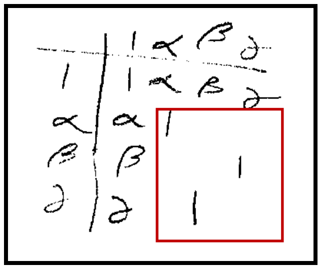


Figura 29. Intento de llenado de una tabla de un grupo con cuatro elementos — 1, α, β y γ — realizado por Lu

Retomando la notación de Lu, se consideró al elemento α como aquel de orden dos y le fue solicitado determinar el generado por ese elemento, al que identificó como un subgrupo; así como construir la tabla de operaciones correspondiente. Lu presentó dificultades en la construcción de una tabla con cuatro elementos a partir de $\langle\alpha\rangle$. Sugerimos a Lu considerar a β como otro elemento del grupo diferente del neutro y de α, y analizar lo que sucedía al multiplicar (operar) por la derecha por β (clase lateral derecha, módulo el subgrupo considerado), mediante el uso de la tabla de operaciones de $\langle\alpha\rangle$. La estudiante infirió que el elemento $\alpha\beta$ era distinto de los tres anteriores. De esta manera, Lu pudo construir la tabla de operaciones solicitada.

> *Entrevistador*: Considera un elemento β […] si operas β con esos dos elementos […] en esta columna.
>
> *Lu*: [en la tabla escribe el resultado de operar por β: β, $\alpha\beta$] si me fijo así debería de poner β, pero si me fijo así no lo puedo poner, ¿si me explico? (**P**)
>
> *Entrevistador*: ¿Por qué $\alpha\beta$ es un elemento diferente de los que tenías anteriormente?
>
> *Lu*: Pues porque no puede ser ni β ni α y tampoco es el neutro. (**P**)
>
> *Entrevistador*: ¿Por qué no puede ser β ni α?
>
> *Lu*: Porque si aquí le pusiera α o β se estaría repitiendo en la tabla, entonces debe ser un elemento diferente, es el cuarto elemento. No sé si es conmutativo, ¿verdad? [llena la tabla con los elementos 1, α, β, $\alpha\beta$ dejando representados los elementos, tal como resultan al operar entre ellos, ver Figura 30].

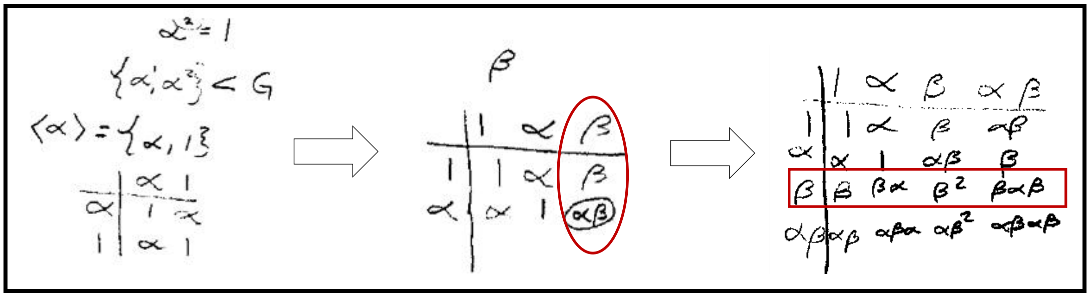


Figura 30. Construcción de una tabla de operaciones de un grupo con elementos arbitrarios — 1, *α*, *β* y γ — realizado por Lu

Debido a que la tabla de operaciones representa un grupo, cada una de las entradas en filas y columnas corresponde a alguno de los elementos originales 1, *α*, *β* y *αβ*. En palabras de Lu, "son esos elementos de las filas y columnas porque el grupo es cerrado". En ese sentido, Lu tenía claro que ninguna fila o columna de la tabla podía tener elementos repetidos, estableciendo una conexión de tipo *procedimiento*, asociada con el concepto de grupo.

Basada en la tabla que había construido con elementos 1, *α*, *β* y *αβ*, en particular, en los elementos de la fila de *β*, Lu sugirió y argumentó que si el grupo fuera conmutativo se podrían considerar sólo dos casos posibles en los que los elementos se pudieran relacionar, si: $\beta^2 = 1$ y $\beta^2 = \alpha$ (ver Figura 31).

> *Entrevistador*: En la tabla que construiste, si consideramos cualquier fila, digamos la de *β*, todos los elementos de la fila de *β*. […] ¿qué relación hay entre estos y los elementos 1, *α*, *β*, *αβ*?
>
> *Lu*: […] deberían de relacionarse con *β*, 1, *α* y *αβ*. (**P**)
>
> *Entrevistador*: […] ¿cómo determinas quién es cada uno de ellos?
>
> *Lu*: Pues si fuera conmutativo, β^2 sería 1 y así *βαβ* sería *α* y éste sería éste. (**P**)
>
> *Entrevistador*: ¿Sería el único caso?
>
> *Lu*: No, también puede ser […] *β* pues es *β*, β^2 […] éste sería *α* nada más y éste al ser conmutativo pues se puede cambiar […]. $\beta^2 = 1$ y *G* conmutativo [el primer caso]. El elemento *βα* es igual a *αβ*. […] Otro caso es $\beta^2 = \alpha$. (**P**)
>
> *Entrevistador*: ¿ $\beta^2 = \alpha$? Y ahí ¿quién es el elemento *βαβ*?
>
> *Lu*: […] considere que es conmutativo tendría $\beta^2\alpha$ y β^2 es *α* […] es 1. (**P**)
>
> *Entrevistador*: ¿Serán los únicos casos?
>
> *Lu*: Sí.

Entrevistador: ¿Cómo lo sabes?

Lu: Porque […] este no puede ser identidad [el elemento $\beta\alpha$] porque si a éste lo hacemos identidad, aquí diríamos que éste [el elemento $\beta\alpha\beta$] estaría dividido así, entonces sería β y aquí tenemos β, ya está repetida así que no se puede. (**P**)

Entrevistador: Y, ¿cómo sabes que β no es identidad?

Lu: ¿β nada más? Pues no se puede.

Entrevistador: ¿Por qué?

Lu: Porque β es un elemento del grupo, y si ya está la identidad del grupo, ¿cómo β va a ser la identidad? (**P**)

Entrevistador: A ver, éste es β y ninguno de estos es la identidad, entonces una posibilidad es que β sea la identidad. En ese caso, ¿qué pasa con los otros elementos?

Lu: Pues β^2 sería identidad también. […] Los únicos casos son éstos. (**P**)

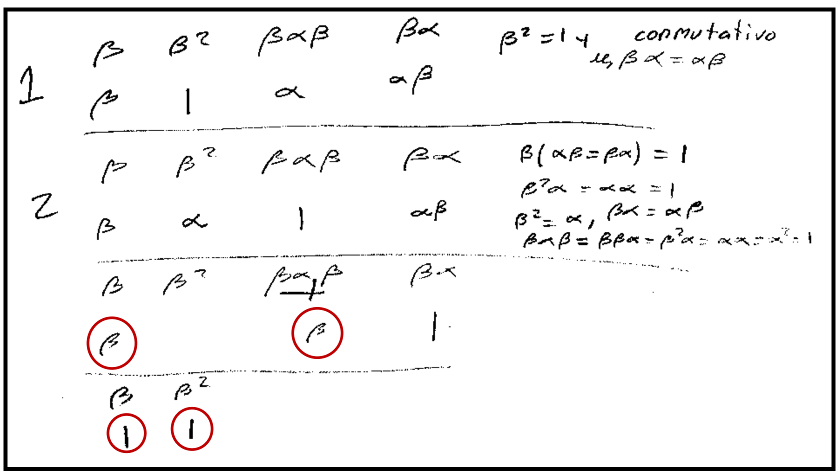


Figura 31. Dos casos posibles para $\{\beta, \beta\alpha, \beta^2, \beta\alpha\beta\} = \{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$

Al establecer una conexión de *comparación a través de características comunes*, Lu determinó dos grupos estructuralmente diferentes de orden cuatro, ambos conmutativos. Uno, donde todos sus elementos diferentes del neutro son de orden dos, mientras que el segundo tenía dos elementos de orden cuatro (generadores del grupo) y uno de orden dos. De acuerdo con Lu, estos grupos no eran similares porque resulta imposible establecer una relación entre los elementos de un grupo al otro debido a esta diferencia entre los órdenes. Finalmente, Lu reescribió las tablas resultantes en términos de los símbolos 1, α, β y γ, donde $\gamma = \alpha\beta$. A partir de la producción de la estudiante consideramos que también hizo una conexión de tipo *característica/propiedad* al identificar dos grupos distintos de orden cuatro, cuyo argumento se basó en la propiedad invariante del orden de los elementos.

> *Entrevistador*: […] habías comentado anteriormente que uno de los grupos de orden cuatro podría tener todos sus elementos de orden dos, a excepción del neutro. También mencionaste que otro grupo podría tener un elemento de orden dos y
>
> *Lu*: [Interrumpe] Y dos inversos entre sí.
>
> *Entrevistador*: Así es. En este caso que fueran de orden cuatro [dos elementos de orden cuatro], lo que te faltó determinar en la tabla que intentaste llenar al inicio [Figura 29]. Ahora bien, ¿estas tablas resultantes [Figura 32] se comportan de la misma manera?
>
> *Lu*: No.
>
> *Entrevistador*: ¿Por qué?
>
> *Lu*: En principio, pues si yo quisiera hacer una relación tendría que haber un elemento de un orden igual a otro elemento del mismo orden, podría relacionar a 1 y α con 1 y α, pero β y γ aquí son de orden dos [ver Tabla 1 en Figura 32] y aquí son de orden cuatro [ver Tabla 2 en Figura 32], así que no los puedo hacer relacionar […] no se puede hacer esa la relación entre los elementos para hacer un cambio de nombre. (**CP**)

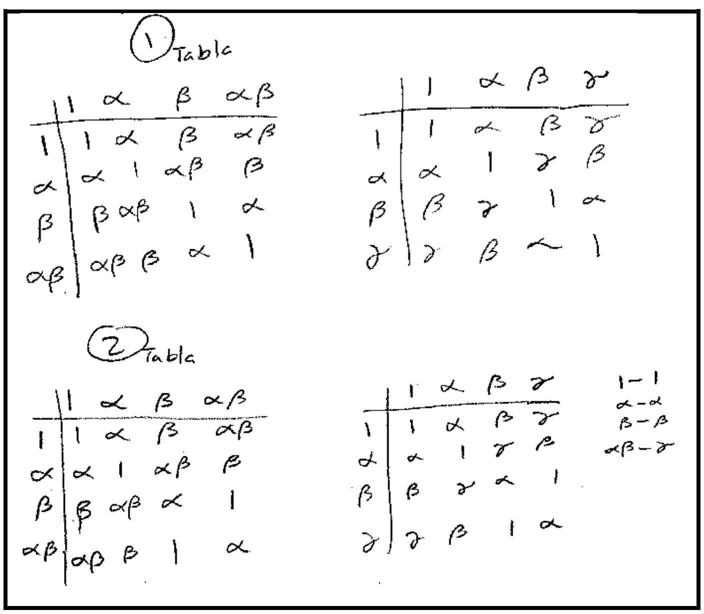


Figura 32. Dos grupos de orden cuatro

Capítulo 4
Conclusiones

4.1. Con relación a los objetivos de investigación

En esta sección discutimos en qué medida han sido alcanzados los objetivos que nos planteamos al inicio de este trabajo.

El **objetivo general** de la investigación fue realizar un análisis histórico y epistemológico del concepto isomorfismo de grupos a partir de fuentes originales, así como analizar su potencial para promover conexiones matemáticas en estudiantes universitarios. Para la consecución de este objetivo se plantearon los siguientes objetivos específicos:

OE1. Estudiar el desarrollo histórico del concepto isomorfismo de grupos durante el siglo XIX a partir de fuentes secundarias.

OE2. Realizar un análisis histórico y epistemológico del concepto isomorfismo a partir de fuentes originales.

OE3. Identificar los significados atribuidos al concepto isomorfismo por los matemáticos del siglo XIX.

OE4. Identificar los aspectos del análisis histórico del concepto isomorfismo que podrían promover conexiones matemáticas y que se pueden considerar para un diseño de tareas dirigidas a estudiantes universitarios.

OE5. Identificar y describir las conexiones matemáticas que hacen estudiantes universitarios al resolver tareas asociadas al concepto isomorfismo y que se fundamentan en un análisis histórico y epistemológico de dicho concepto: un estudio de caso.

En relación con el primer objetivo específico (**OE1**), se realizó un estudio del desarrollo histórico del concepto isomorfismo de grupos durante el siglo XIX basado en fuentes secundarias tales como Wussing (1984), Kleiner (1986, 2007) y Sfard (1995). Dicho análisis se desarrolló en la sección 1.1.2 del Capítulo 1. Como resultado de este estudio se ganó conocimiento sobre los matemáticos influyentes en el surgimiento y desarrollo del concepto isomorfismo, que favoreció en la identificación de dos obras históricas de interés para esta investigación: Cayley (1854a) y Jordan (1870).

Para la consecución del segundo objetivo específico (**OE2**) se desarrolló una metodología de análisis de documentos históricos descrita en la sección 2.1 del Capítulo 2, a partir de la cual se analizaron las obras de Jordan (1870) y Cayley (1854a) (sección 2.2 y 2.3 respectivamente). Los resultados han sido revisados y valorados por la comunidad internacional en matemática educativa.

Respecto al tercer objetivo específico (**OE3**), en el artículo de Cayley, *On the Theory of Groups, as Depending on the Symbolic Equation* $\theta^n = 1$, se identificó el germen del problema general de grupos sobre la clasificación de todos los grupos hasta isomorfismo, ciertamente relacionado con los grupos isomorfos. Desarrolló dos casos a partir de los cuales presentó la distinción entre la ecuación ordinaria $x^n - 1 = 0$ y la ecuación simbólica $\theta^n = 1$ (un grupo cíclico y no cíclico, respectivamente), y usó un enfoque de generadores y relaciones para grupos. En ese contexto llevó a cabo un análisis detallado de todas las posibilidades de la naturaleza de los grupos de orden cuatro y seis, y determinó para cada caso dos grupos *esencialmente distintos* y que ahora identificamos como grupos no isomorfos, incluso cuando Cayley no presentó una definición de grupos isomorfos.

Si bien no fue hasta 1878 que Cayley declaró que "un grupo se define por medio de las leyes de combinación de sus símbolos" (p. 51), así como la enunciación de lo que hoy se conoce como el teorema de Cayley; ya en su artículo de 1854 el germen de estas ideas se encontraba implícito al sugerir por primera vez que un grupo estaba determinado por su tabla de operaciones, y en el trabajo realizado al presentar la distinción entre la teoría de la ecuación simbólica $\theta^n = 1$ y de la ecuación ordinaria $x^n - 1 = 0$, respectivamente.

Por su parte, Jordan (1870) introdujo explícitamente los conceptos de *isomorfismo holoédrico* (total) y *meriédrico* (parcial), términos que importó de la cristalografía, particularmente de los Estudios de Auguste Bravais, a su "Traité des substitutions et des équations algébriques" en el contexto de *grupos de sustituciones* (lo que hoy llamaríamos una permutación de un número finito de letras). La distinción entre isomorfismo meriédrico y holoédrico presentada por Jordan evidencia que el isomorfismo no siempre fue biyectivo (holoédrico).

En su Traité, Jordan empleó el término *similitude* para referirse a las propiedades que presentan los grupos isomorfos (*identiques*), que él reconoce como una utilidad del isomorfismo. El planteamiento de la definición de isomorfismo meriédrico presentada por Jordan sugiere la posibilidad de una correspondencia o transmisión de *algunas* propiedades de un grupo a otro.

Finalmente, la utilidad de la noción de isomorfismo de grupos de sustituciones, según Jordan (1870), concierne a "la similitud de las propiedades que presentan los grupos isomorfos entre sí. […] Por lo tanto, en muchos casos puede reemplazar la consideración directa de un grupo por la de cualquiera de sus isomorfos" (p. 60).

Con relación al cuarto objetivo específico (**OE4**), retomamos el problema de la clasificación de todos los grupos finitos salvo isomorfismo. En particular, nos centramos en el artículo de Cayley (1854a) donde se identificó el germen de dicho problema. El diseño de las tareas se basó en el análisis de la obra de Cayley, ya que el trabajo de Jordan (1870) demandaba el conocimiento de contenidos que no se abordan en un primer curso de álgebra abstracta.

- En el célebre artículo de Cayley (1854a), el autor declaró por primera vez que un grupo estaba determinado por su tabla de operaciones (tabla de Cayley) y estas jugaron un rol importante en la representación de los grupos "esencialmente distintos". Destacamos del análisis histórico los aspectos representacionales y conceptuales asociados a las tablas de Cayley.
- El trabajo matemático de Cayley se caracterizó por una visión abstracta de grupos (Wussing 1984; Kleiner 2007). El análisis del artículo de Cayley desde una *perspectiva actual* nos permitió identificar las ideas matemáticas (conceptos), los resultados matemáticos (teoremas) involucrados y las conexiones entre estos al abordar el problema de clasificación de grupos finitos. En ese sentido, consideramos los aspectos simbólicos y formales asociados a los conceptos.
- Cayley (1854a) llevó a cabo la determinación de todos los grupos de orden cuatro y seis. A partir del trabajo de Cayley también se deduce que tenía presente que el único grupo de orden primo es el grupo cíclico de ese orden. Consideramos para los fines exploratorios de esta etapa de la investigación abordar la clasificación de los grupos

de orden primo y de orden cuatro, así como retomar en esencia el método empleado por Cayley. Desde una perspectiva actual, los esquemas de la sección 2.3 del Capítulo 2 sintetizan el método usado por Cayley y los conceptos y resultados matemáticos asociados.

Respecto al quinto objetivo específico (**OE5**), se analizaron las conexiones intramatemáticas que hizo una estudiante al resolver tareas relacionadas con una aplicación de los grupos isomorfos fundamentadas en un análisis histórico y epistemológico del concepto isomorfismo (secciones 3.4.1 3.4.2 y 3.4.3 del Capítulo 3). Identificamos 15 conexiones intramatemáticas que Lu hizo de forma implícita o explícita al resolver tareas relacionadas con la clasificación de los grupos de orden primo y de orden cuatro (ver Tabla 7). Estas conexiones fueron asociadas con conceptos tales como: grupo, grupo cíclico, subgrupo, teorema de Lagrange, isomorfismo y las relaciones entre ellos. Asimismo, encajaron en una o más de las categorías: *diferentes representaciones*, *comparación a través de características comunes*, *característica/propiedad*, *procedimientos*, *relaciones parte-todo*, *implicaciones*, *derivación* y *significado*.

Tabla 7. Conexiones matemáticas identificadas en las tareas resueltas por Lu

Campo de análisis	Conexiones matemáticas
Grupo, subgrupo, teorema de Lagrange y grupos cíclicos	(1) Un subgrupo es un grupo cuyos elementos están contenidos en el grupo principal
	(2) Para hallar los subgrupos de un grupo finito se verifican uno a uno los subconjuntos que satisfacen las propiedades de grupo
	(3) Un subconjunto es un subgrupo con la operación restringida del grupo
	(4) Cualquier grupo tiene por subgrupos al trivial y al total
	(5) El neutro es un elemento que pertenece a cualquier subgrupo
	(6) El orden de cualquier subgrupo finito divide al orden del grupo
	(7) Un grupo G de orden primo tiene por subgrupos únicamente al trivial y al total

	(8) El generador de un grupo finito *G* es un elemento que al aplicarlo *n* veces se obtienen todos los elementos de *G*
	(9) Un grupo de orden primo es necesariamente cíclico
	(10) El orden de cualquier elemento divide al orden del grupo
Clasificación: grupos de orden primo	(11) Los grupos de orden tres son similares
	(12) Dos grupos de orden cinco se pueden ver como el mismo grupo haciendo un cambio de nombre que preserve las operaciones
	(13) Hay un solo grupo de orden primo, salvo la denominación de los elementos
Clasificación: grupos de orden cuatro	(14) Un grupo finito de orden par tiene un elemento de orden dos
	(15) Hay dos grupos estructuralmente diferentes de orden cuatro

En relación con el concepto de subgrupo, el *significado* atribuido por Lu fue el de un grupo cuyos elementos estaban contenidos en un grupo mayor (también referido como *principal*), por lo que consideró posible que un grupo fuera él mismo un subgrupo. Así, un subgrupo debería satisfacer las propiedades de grupo: existencia de elemento neutro, inversos, cerradura y asociatividad. Estas ideas matemáticas la llevaron a considerar, para los casos específicos de grupos de orden *n* que investigaba, todos los subconjuntos de combinaciones posibles con uno, dos, tres, hasta *n* elementos del grupo en busca de aquellos que cumplieran las propiedades de grupo. Esta conexión de tipo *procedimiento* fue identificada cuando la estudiante determinó todos los subgrupos de un grupo dado. Afirmamos que Lu también estableció una conexión de tipo *diferentes representaciones* para hacer referencia a un subgrupo, ya que además de su definición informal de este concepto, se basó en las tablas de operaciones para decidir si un subconjunto era un subgrupo.

La estudiante también infirió que un subconjunto es un subgrupo con la operación restringida del grupo y que el neutro es un elemento que pertenece a cualquier subgrupo, en ambos casos consideramos que estableció una conexión de tipo *característica-propiedad* ya que reconoció una de las propiedades que constituyen o son parte de un subgrupo. Lu hizo una conexión de tipo *relación parte-todo*, en particular, al reconocer a los subgrupos trivial y total como subgrupos de cualquier grupo (*generalización*). Una herramienta que Lu utilizó en esta exploración de los subgrupos fue el uso de las tablas de operaciones. Aun cuando la cantidad de casos posibles a ser subgrupos se redujo por sus inferencias, Lu realizó varios cálculos y en algún momento dudó si había agotado todas las combinaciones posibles.

Respecto a la relación entre el orden de un grupo y el orden de cada uno de sus subgrupos, contrario a los resultados de Hazzan y Leron (1996), Lu no usó naturalmente el teorema de Lagrange. La estudiante inicialmente consideró que habría alguna manera de establecer una relación de igualdad entre ellos. Así, lo primero que hizo fue analizar las formas posibles de operar cada uno de los órdenes de los subgrupos para obtener el orden del grupo. Sin embargo, no tuvo éxito en esta exploración. Al replantear la pregunta, Lu se enfocó en las relaciones entre cada uno de los subgrupos (por separado) y el orden del grupo del cual eran subgrupos. La estudiante observó, aunque con algunas imprecisiones que, en todos los casos, el orden de cualquier subgrupo dividía el orden del grupo. En ese sentido, decimos que Lu hizo una conexión de tipo *comparación a través de características comunes*; pero también de tipo *implicación*, ya que llegó a ser consciente de que un grupo no puede tener un subgrupo cuyo orden no divida al orden del grupo y este resultado lo aplicó en diversas ocasiones durante la entrevista. La estudiante utilizó el resultado que relaciona el orden de un grupo finito con el orden de cualquiera de sus subgrupos e infirió que cualquier grupo de orden primo sólo tiene por subgrupos el trivial (al que se refiere como neutro) y el total, ningún otro podría ser subgrupo ya que su orden no dividiría al orden del grupo, por tanto, consideramos que estableció una conexión de tipo *implicación*.

Por otra parte, en relación con el concepto de grupo cíclico, Lu hizo *conexiones incorrectas* (ver sección 3.3.2.2), ya que su imagen conceptual de grupo cíclico difería de la definición formal. A partir del trabajo realizado por Lu, identificamos dificultades para dar ejemplos de grupos cíclicos finitos e infinitos. Sin embargo, con algunas imprecisiones Lu hizo una conexión de tipo *relación parte-todo* al reconocer a $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ como una instancia específica de un grupo cíclico finito. Cuando preguntamos a Lu, ¿qué se puede decir del subgrupo generado por un elemento x de G, si G es de orden primo?, la estudiante asoció los términos subgrupo y grupo de orden primo y señaló que el generado por el elemento x era igual a G, el subgrupo total, dada la imposibilidad de que el elemento neutro generara al grupo G. La estudiante asoció lo que había deducido previamente sobre los subgrupos de un grupo de orden primo con esta tarea. En ese sentido, consideramos que la conexión que Lu hizo fue de tipo *implicación*. En relación con los generadores de un grupo de orden primo, preguntamos a Lu sobre la relación entre el orden del elemento generador y el orden del subgrupo generado por éste. Lu se basó en la característica de igualdad entre los respectivos órdenes e infirió de forma más general que el orden de cualquier elemento divide al orden del grupo (teorema de Lagrange). Así, consideramos que Lu hizo una conexión de tipo *comparación a través de características comunes*.

Con relación a la clasificación de los grupos de orden primo, solicitamos a Lu considerar un grupo G de orden tres (Tarea **7**), la estudiante asoció el hecho de que dicho grupo era de orden primo y entonces cualquier elemento diferente del neutro era generador del grupo. En particular, a partir del elemento generador se podrían obtener los elementos del grupo y con ello construir su tabla de operaciones. Sin embargo, la estudiante se basó en el conocimiento de las propiedades del grupo $(\mathbb{Z}_3, +_3)$ y en la construcción de su tabla para inferir que $\alpha^3 = \alpha^0 = e$ y poder llenar la tabla del grupo G. En ese sentido, consideramos que Lu hizo una conexión de tipo *derivación*. La Tarea **7** también demandaba considerar otro grupo H de orden tres y construir su tabla de operaciones, Lu procedió de la misma manera que el caso anterior, pero infirió rápidamente que podría tratarse del mismo grupo con notación distinta. Basada en la apreciación de que en ambos grupos había *elementos del mismo orden* y en la comparación de las tablas de G y H, Lu señaló que eran *similares*. Afirmamos que Lu hizo una conexión de tipo *comparación a través de características comunes*, ya que su explicación se basó en la apreciación de similitudes entre las propiedades de los grupos como el orden y en un arreglo de la posición de los elementos en las tablas de operaciones para argumentar que los grupos de orden tres tenían tablas similares. Basarse en propiedades como el orden de los elementos, la conmutatividad o el orden del grupo para determinar que dos grupos son similares es consistente con otros estudios tales como Leron, Hazzan, y Zazkis (1995) y Lajoie (2000). Por otra parte, cuando preguntamos a Lu si podría haber otro grupo que no se comportara de la misma manera que los anteriores, infirió que el único caso posible sería que cada uno de los elementos distintos del neutro fuera cada uno su propio inverso. Basada en esa suposición, la estudiante construyó la tabla de operaciones y argumentó que no era un grupo, ya que fallaba la asociatividad (no utilizó (10)). De acuerdo con Lu, cualquier otro grupo de orden tres sería *similar*, por lo que sólo hay un grupo de orden tres (salvo la denominación de los elementos). Consideramos que la estudiante hizo una conexión de tipo *relación parte-todo* al reconocer que cualquier otro grupo de orden tres debería tener una tabla similar a G y H.

Para el caso de los grupos de orden cinco (Tarea **8**), Lu procedió de manera análoga a la construcción de las tablas de los grupos de orden tres a partir del elemento generador. Además de apreciar la similitud en relación con el orden de los elementos, Lu sugirió el establecimiento de una relación entre los elementos de ambos grupos y construyó una tabla que consideraba el cambio de nombre propuesto. La explicación de Lu de por qué el cambio de nombre funcionaba se basó en la preservación de las operaciones (aunque esto no lo dijo explícitamente). De esta manera, Lu mostró que hay un solo grupo de orden cinco. La estudiante realmente construyó un isomorfismo de un grupo al otro, aunque no utilizó este término. Decimos que la conexión que Lu hizo fue de tipo *derivación* ya que su argumento se basó en la propiedad de isomorfismo, que permite el cambio de nombre de los elementos, a través de la correspondencia biunívoca, de tal forma que las tablas de operaciones se vean "similares", y como Lu verificó, el hecho de que las tablas fueran "similares" es lo que garantiza que se satisface la preservación de las operaciones.

Lu también hizo una conexión de tipo *relación parte-todo* debido a que reconoció a los grupos de orden tres y cinco como instancias específicas de grupo finito de orden primo. La estudiante concluyó que en general, hay un único grupo de orden primo dado, salvo la denominación de los elementos.

Finalmente, identificamos tres conexiones que Lu hizo en relación con la *clasificación de los grupos de orden cuatro*. Ante el planteamiento de la Tarea **9** que demandaba explicar por qué un grupo G de orden par tiene al menos un elemento de orden 2, Lu hizo una conexión de tipo *derivación*, ya que se basó en el conocimiento de la propiedad de unicidad del inverso y la relación de igualdad entre el orden de un elemento y el orden de su inverso para abordar esta tarea. La estudiante argumentó que, en un grupo de orden par, si no se considera al neutro, la cantidad de elementos restantes siempre es impar. Si ninguno de ellos fuese de orden dos, se tendrían que considerar parejas de elementos donde uno es inverso del otro (ambos del mismo orden), en cuyo caso, sobra un elemento, el cual necesariamente es su propio inverso, es decir, hay un elemento de orden dos.

En la clasificación de los grupos de orden cuatro (Tarea **10**), Lu consideró un grupo G con elementos distintos entre $\{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$, donde 1 es el símbolo que representa al elemento neutro y α un elemento de orden dos ($\alpha^2 = 1$). Las indicaciones durante la entrevista se enfocaron hacia la construcción de la tabla con elementos $\{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$, obtenidos a partir del generado por α ($\langle\alpha\rangle = \{1, \alpha\}$). Lu no pudo construir una tabla con cuatro elementos a partir de $\langle\alpha\rangle$. En ese caso, le fue sugerido operar por la derecha por β ($\langle\alpha\rangle\beta = \{\beta, \alpha\beta\}$), y Lu explicó por qué $\alpha\beta \neq 1, \alpha, \beta$. Sin embargo, durante el *procedimiento* de llenado de la tabla, Lu no relacionó que el operar $\langle\alpha\rangle\beta$ era lo mismo que solicitarle hallar la clase lateral derecha, módulo el subgrupo considerado. La estudiante reconoció que en esta nueva tabla cada uno de los elementos en filas y columnas se deberían corresponder con alguno de los elementos $\{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$. A partir de la tabla, la primera inferencia que Lu hizo fue que el grupo tenía que ser abeliano, $\alpha\beta = \beta\alpha$. Tomando en cuenta la fila de β, la estudiante inició la exploración de los casos para los cuales $\left\{\beta, \beta\alpha, \beta^2, \beta\alpha\beta\right\} = \{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$. Lu dedujo que había dos únicos casos: $\beta^2 = 1$ y $\beta^2 = \alpha$, y para cada uno de ellos construyó su respectiva tabla de operaciones. La estudiante estableció una conexión de tipo *comparación a través de características comunes* al argumentar que los grupos resultantes no eran similares, ya que los grupos tenían elementos de orden distinto, por lo que no habría forma de establecer una relación entre elementos con diferente orden. Consideramos que Lu también hizo una conexión de tipo *característica/propiedad* al identificar dos grupos distintos de orden cuatro cuyo argumento se basó en la propiedad invariante del orden de los elementos.

En consecuencia, basados en la consecución de los cinco objetivos específicos, consideramos que se ha cubierto el **objetivo general** de la investigación.

4.2. Reflexiones finales

En la presente investigación se utilizó la historia de las matemáticas como una *herramienta*, que de acuerdo con la categorización de argumentos de uso de la historia propuesta por Jankvist (2009), la historia como *herramienta* desempeña un rol importante como un medio auxiliar o de apoyo en la enseñanza y el aprendizaje de las cuestiones internas de las matemáticas (in-issues): conceptos matemáticos, teorías, métodos, algoritmos, por mencionar algunos. En particular, se llevó a cabo un análisis histórico y epistemológico del concepto isomorfismo de grupos utilizando dos fuentes primarias (Cayley, 1854a; Jordan, 1870), para lo cual se realizó una propuesta metodológica de análisis de fuentes históricas de matemáticas.

Las obras de Cayley y Jordan no fueron escritas con una intencionalidad pedagógica, sino que corresponden a una síntesis conceptual de las matemáticas de la época, y de la teoría de grupos en particular. Como resultado de la primera etapa de la investigación rescatamos el problema histórico de la clasificación de todos los grupos finitos salvo isomorfismo que ambos matemáticos abordaron, y cuyo germen se ubicó en el trabajo realizado por Cayley (1854a).

¿Cómo usamos la historia? Atendiendo a la categorización de Jankvist (2009), consideramos el uso de las fuentes originales dentro de los enfoques *basados en la historia*, cuyo foco está en el aprendizaje de las matemáticas y "no trata el estudio de la historia de las matemáticas de una manera directa, sino de una manera indirecta" (pp. 246-247), es decir, sin discutir explícitamente el desarrollo histórico. En particular, en la segunda etapa de esta investigación utilizamos la información del análisis histórico y epistemológico para diseñar un instrumento y comprobar la comprensión de una estudiante a partir de la exploración de las conexiones matemáticas que la participante hizo al resolver tareas asociadas al problema de la clasificación de los grupos finitos, en particular, abordamos la clasificación de los grupos de orden primo y de orden cuatro. A partir de un estudio de caso, como resultado identificamos 15 conexiones matemáticas específicas que una estudiante hizo de forma implícita o explícita al resolver las tareas.

Aunque la estudiante hizo conexiones matemáticas entre conceptos, definiciones, procedimientos y teoremas al abordar tareas asociadas a la clasificación de los grupos de orden primo y de orden cuatro, el conocimiento de la estudiante fue limitado en relación con los conceptos y resultados matemáticos involucrados en las tareas, tales como grupo, subgrupo, grupos cíclicos, clases laterales y el teorema de Lagrange.

Basados en los resultados de la tarea exploratoria, el caso abordado corresponde a una estudiante que no contaba con los conocimientos previos requeridos para resolver las tareas específicas de la clasificación de los grupos de orden primo y de orden cuatro (tareas **7-10**).

Las tareas **1-6** ofrecieron una oportunidad a la estudiante de hacer frente a dichas tareas objetivo (**7-10**). En ese sentido, una distinción de este trabajo en relación con aquellos que se han centrado en la identificación de las conexiones matemáticas, además de involucrar la perspectiva histórica, tiene que ver con la cuestión metodológica. Entrevistas didácticas (Arnon et al., 2014; Oktaç, 2019) y diseños de instrumentos que tomen en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes podrían favorecer en un análisis más preciso sobre las conexiones matemáticas.

Los resultados de esta investigación sugieren que, en la mayoría de los casos, la estudiante llegó a ser consciente de las conexiones matemáticas establecidas una vez que resolvió la tarea o reflexionó sobre sus resultados y procedimientos realizados.

Por otra parte, estamos de acuerdo con Hazzan y Zazkis (1999) cuando señalan que "la construcción de nociones matemáticas significativas requiere el reconocimiento de las similitudes de ideas generales en diferentes ejemplos particulares para descubrir su estructura y atributos comunes" (p. 5). Sin embargo, identificamos que Lu presentó dificultades para proveer ejemplos en relación con el significado atribuido a un concepto, como fue el caso de un grupo cíclico en el instrumento exploratorio, esto a pesar de que en su curso de álgebra fueron proporcionados diversos ejemplos de grupos cíclicos. Con relación al tipo de tareas que involucraban ejemplos específicos, consideramos que favorecieron en la exploración y el descubrimiento a partir del establecimiento de conexiones del tipo comparación a través de características comunes, característica/propiedad, relaciones parte-todo (generalizaciones) e implicaciones.

Creemos que Lu hizo pocas conexiones de tipo derivación, en gran parte debido a su conocimiento limitado de los conceptos involucrados en las tareas, lo cual también podría explicar la ausencia de conexiones de tipo reversibilidad y conexión de métodos. Por ejemplo, en la determinación de todos los subgrupos de un grupo finito de orden primo dado, la estudiante verificó uno a uno los subconjuntos en busca de aquellos que satisfacían las propiedades de grupo sin hacer referencia al resultado que relaciona el orden de un grupo finito con el orden de cualquiera de sus subgrupos (teorema de Lagrange). Sin embargo, en la resolución de la Tarea **9** Lu estableció una conexión de tipo derivación, ya que implícitamente reconoció que dos grupos de orden cinco se pueden ver como el mismo grupo haciendo un cambio de nombre que preserve las operaciones. Es decir, su argumento no se basó únicamente en la verificación de propiedades superficiales como el orden de los elementos, el orden del grupo o la conmutatividad, sino que se basó en la propiedad de isomorfismo y asoció la idea de grupos similares a la búsqueda de una relación que mediante la realización de un cambio de nombre de los elementos pudiera mostrar que sólo hay un grupo de orden cinco. Este resultado difiere de otros estudios que evidencian que la conceptualización de los estudiantes en relación con los grupos isomorfos como grupos similares está asociada con una interpretación literal de esta palabra. Así, los estudiantes suelen considerar propiedades como la naturaleza de las operaciones y los elementos en sí; mientras que la preservación de las operaciones no es percibida a partir de la idea de grupos similares, del mismo modo que en la definición formal (Lajoie, 2000, 2001; Leron, Hazzan, y Zazkis, 1995).

En la construcción de dos grupos estructuralmente distintos de orden cuatro, Lu estableció conexiones de tipo procedimiento, comparación a través de características comunes y característica/propiedad. Aunque Lu llevó a cabo la clasificación de los grupos de orden cuatro, no hay evidencia de que haya asociado el procedimiento en la construcción de la tabla con elementos $\{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$ con todos los conceptos subyacentes a este, por ejemplo, el de clases laterales. Consideramos esto, por una parte, como una limitación del diseño, pero también de la propia comprensión conceptual de Lu.

4.3. Limitaciones e investigación futura

Esta investigación de tipo exploratorio se centró en identificar y describir las conexiones matemáticas que una estudiante hizo al resolver tareas relacionadas con la clasificación de los grupos de orden primo y de orden cuatro fundamentadas en un análisis histórico y epistemológico del concepto isomorfismo. Una de las limitantes concierne a la metodología. Abordamos un estudio de caso con una estudiante con características particulares, de modo que el diseño fue *ad hoc* a los resultados que arrojó el instrumento exploratorio. Sin embargo, este trabajo fue un primer acercamiento al estudio de las conexiones matemáticas asociadas al problema de clasificación de grupos desde una perspectiva diferente de aquella que en la literatura se ha reportado, por ejemplo, Thrash y Walls (1991), Hazzan (2001) y Larsen (2009, 2013), por mencionar algunos.

En este estudio nos limitamos al problema de la clasificación de los grupos de orden primo y de orden cuatro. Un trabajo interesante sería considerar la clasificación de los grupos de orden seis. Por otra parte, esta investigación, aunque centrada en el estudio de conexiones matemáticas es considerada sólo un enfoque particular (no exclusivo) a partir del cual se puede utilizar a la historia como una *herramienta* (Jankvist, 2009). Esta investigación pudiera ampliarse hacia el análisis de las relaciones entre las conexiones matemáticas identificadas y cómo estas contribuyen en la comprensión de los conceptos subyacentes al problema de clasificación de grupos finitos. El terreno es fértil y diversas investigaciones con diferentes enfoques pueden llevarse a cabo utilizando los resultados del análisis histórico y epistemológico del concepto grupos isomorfos de la obra de Cayley (1854a).

Finalmente, en relación con el análisis de la obra de Jordan (1870), identificamos el uso del término *isomorfismo* para designar lo que actualmente se conoce como un homomorfismo biyectivo (isomorfismo) y un homomorfismo sobreyectivo (epimorfismo) que Jordan distinguió mediante los términos *holoédrique* y *mériédrique*, respectivamente. Este matemático planteó como un problema la determinación de los grupos isomorfos para un grupo G dado. Abordar este problema siguiendo el trabajo realizado por Jordan demanda el conocimiento por parte de los estudiantes de los conceptos tales como serie de composición, grupo soluble y el teorema de Jordan-Hölder, contenidos que no siempre son abordados en un primer curso de álgebra abstracta, como fue el caso del grupo de observación y que resultó en otra de las limitaciones de esta investigación. En ese sentido, consideramos que podría ser interesante llevar a cabo un estudio más amplio sobre conexiones matemáticas que considere la información histórica y epistemológica de la obra de Jordan (1870) y que involucre la participación de estudiantes que hayan tomado un segundo curso de álgebra abstracta.

Referencias bibliográficas

Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemáticas. *Revista EMA, 8*(1), 30–46.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS theory—A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Cham: Springer.

Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Morics, S., & Oktaç, A. (1997). Development of students' understanding of cosets, normality, and quotient groups. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(3), 241-309.

Asiala, M., Kleiman, J., Brown, A., & Mathews, D. (1998). The development of students' understanding of permutations and symmetries. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *3*(1), 13–43.

Barbin, E. (1997). Histoire des Mathématiques: Pourquoi? Comment? *Bulletin AMQ*, *37*(1), 20-25.

Barnett, J. (2010). *Abstract awakenings in algebra: early group theory in the works of Lagrange, Cauchy, and Cayley*, https://www.cs.nmsu.edu/historical-projects/Projects/Cayley.pdf.

Berry, J. S., & Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(4), 479-495.

Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., & Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups, and subgroups. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(3), 187-239.

Brechenmacher, F. (2012). Un portrait kaléidoscopique du jeune Camille Jordan. *arXiv preprint arXiv:1205.5339*.

Businskas, A. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections.* Doctoral dissertation. Faculty of Education-Simon Fraser University. Canada. Retrieved from: https://summit.sfu.ca/item/9245.

Cayley, A. (1854a). VII. On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, *7*(42), 40-47.

Cayley, A. (1854b). LXV. On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$.-Part II. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, *7*(47), 408-409.

Cayley, A. (1859). VII. On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$.-Part III. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, *18*(117), 34-37.

Cayley, A. (1878). Desiderata and suggestions: No. 1. The theory of groups. *American Journal of Mathematics*, *1*(1), 50-52.

Clark, J., DeVries, D., Hemenway, C., St. John, D., Tolias, G., & Vakil, R. (1997). An Investigation of students' understanding of Abstract Algebra (binary operations, groups and subgroups) and the use of abstract structures to build other structures (through cosets, normality and quotient groups). *Journal of Mathematical Behavior, 16*(3), 181-185.

Clark, J. M., Hemenway, C., St. John, D., Tolias, G., & Vakil, R. (1999). Student attitudes toward abstract algebra. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *9*(1), 76-96.

Clark, K., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., Tzanakis, C., & Wang, X. (2016). History of mathematics in mathematics education: Recent developments. In L. Radford, F. Furinghetti, & T. Hausberger (Eds.), *Proceeding of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics* (pp. 135-179). IREM de Montpellier.

Crilly, T. (1999). Arthur Cayley as Sadleirian Professor: a glimpse of mathematics teaching at 19th-century Cambridge. *Historia Mathematica*, *26*(2), 125-160.

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U., & Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of group theory. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(3), 267-305.

Eisenhardt, K. M. (1989). Building theories from case study research. *Academy of management review*, *14*(4), 532-550.

Eli, J., Mohr-Schroeder, M., & Lee, C. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal*, *23*(3), 297-319.

Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J., & Lee, C. W. (2013). Mathematical connections and their relationship to mathematics knowledge for teaching geometry. *School Science and Mathematics*, *113*(3), 120-134.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (Eds.) (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fukawa-Connelly, T. (2012). Classroom sociomathematical norms for proof presentation in undergraduate in abstract algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 401-416.

Fukawa-Connelly, T. (2016). Responsibility for proving and defining in abstract algebra class. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(5), 733-749.

Furinghetti, F. (2019). History and Epistemology in mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-28.

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2017). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(2), 227-252.

Garraghan, G. J. (1946). *A guide to historical method*. New York: Fordham University Press.

Godoy, K. V. (2018). O TRIPOS DE MATEMÁTICA DE 1842: o percurso da preparação de A. Cayley para a realização desse exame', *Revista de História da Educação Matemática*. *4*(2), 98-117.

Gómez-Luna, E., Fernando-Navas, D., Aponte-Mayor, G., y Betancourt-Buitrago, L. A. (2014). Metodología para la revisión bibliográfica y la gestión de información de temas científicos, a través de su estructuración y sistematización. *Dyna*, *81*(184), 158-163.

González, M. T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca. España. Disponible en http://hdl.handle.net/10366/22651.

Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level When learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *40*(1), 71-90.

Hazzan, O. (2001). Reducing abstraction: the case of constructing an operation table for a group. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(2), 163-172.

Hazzan, O., & Leron, U. (1996). Students' use and misuse of mathematical theorems: The case of Lagrange's theorem. *For the Learning of Mathematics*, *16*, 23-26.

Hazzan, O., & Zazkis, R. (1999). A perspective on "give an example" tasks as opportunities to construct links among mathematical concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *21*(4), 1-14.

Heatherly, H. E. (2008). Arthur Cayley mathematician laureate of the Victorian age. *The Mathematical Intelligencer*, *30*(4), 64-67.

Heeffer, A. (2006). The methodological relevance of the history of mathematics for mathematics education, in G. Dhompongsa, F. Bhatti, and Q. Kitson (Eds.), *Proceedings of the International Conference on 21st Century Information Technology in Mathematics Education*, 267-276.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación* (Sexta ed.). México: McGraw Hill.

Jahnke, H. N., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Furinghetti, F., El Idrissi, A., da Silva, C. M., & Weeks, C. (2002). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education*: *the ICMI study* (pp. 291-328). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Jaijan, W., & Loipha, S. (2012). Making mathematical connections with transformations using open approach. *HRD Journal*, *3*(1), 91-100.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 235-261.

Jordan, C. (1870). *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Paris: Gauthier-Villars.

Kastberg, S. E. (2002). Understanding mathematical concepts: The case of the logarithmic function. Doctoral dissertation. University of Georgia, Athens, Georgia. Retrieved from http://jwilson.coe.uga.edu/Pers/Dissertations/kastberg_signe_e_200205_phd.pdf.

Kjeldsen, T. H., & Blomhøj, M. (2012). Beyond motivation: history as a method for learning meta-discursive rules in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(3), 327-349.

Kleiner, I. (1986). The evolution of group theory: A brief survey. *Mathematics Magazine*, *59*(4), 195-215.

Kleiner, I. (2007). *A history of abstract algebra*. Boston: Birkhäuser.

Kuckartz, U. (2014). *Qualitative Text Analysis: A Guide to Methods, Practice and Using Software*. London: SAGE Publications.

Lajoie, C. (2000). *Difficultés liées aux premiers apprentissages en Théorie des groupes*. Thèse de doctorat. Université Laval, Ste-Foy. Retrieved from http://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk1/tape3/PQDD_0019/NQ56442.pdf.

Lajoie, C. (2001). Students' difficulties with the concepts of group, subgroup and group isomorphism. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.): *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference*: *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*, *vol. 2*, University of Melbourne, Melbourne, Australia, 9-14 December 2001 (pp. 384-391). Melbourne, Australia: University of Melbourne. Retrieved from http://hdl.handle.net/11343/35000.

Lajoie, C., & Mura, L. (2000). What's in a name? A learning difficulty in connection with cyclic groups. *For the Learning of Mathematics*. *20*(3), pp. 29-33.

Larsen, S. (2009). Reinventing the concepts of group and isomorphism: The case of Jessica and Sandra. *Journal of Mathematical Behavior*, 28(2-3), 119-137.

Larsen, S. (2013). A local instructional theory for the guided reinvention of the group and isomorphism concepts. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(4), 712-725.

Lebesgue, M. H. (1926). Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan (1838-1922). Leu dans la séance du 4 Juin 1923. En Académie des sciences (France) (Ed.), *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France* (pp. XXXIX-LXVI). Paris: Gauthier-Villars.

Leron, U., Hazzan, O., & Zazkis, R. (1995). Learning group isomorphism: A crossroads of many concepts. *Educational Studies in Mathematics, 29*(2), 153-174.

Matthews, M. R. (Ed.). (2014). *International handbook of research in history, philosophy and science teaching*. Dordrecht: springer.

Maz, A. (1999). Historia de las matemáticas en clase: ¿por qué? Y ¿para qué? En M. I. Berenger, J. M. Cardeñoso, y M. Toquero (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad* (pp. 205-210). Granada: Sociedad Thales y Universidad de Granada.

Melhuish, K. (2018). Three conceptual replication studies in group theory. *Journal for Research in Mathematics Education*, *49*(1), 9-38.

Melhuish, K., & Fagan, J. (2018). Connecting the Group Theory Concept Assessment to Core Concepts at the Secondary Level. In N. H. Wasserman (ed.), *Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers* (pp. 19-45). Springer.

Menghini, M. (2000). On potentialities, limits and risks. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp. 86-90). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mhlolo, M. K., Schafer, M., & Venkat, H. (2012). The nature and quality of the mathematical connections teachers make. *Pythagoras*, *33*(1), 1-9.

Mwakapenda, W. (2008). Understanding connections in the school mathematics curriculum. *South African Journal of Education*, *28*(2), 189-202.

Neumann, P. M. (1999). What groups were: a study of the development of the axiomatics of group theory. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, *60*(2), 285-301.

Njie, B., & Asimiran, S. (2014). Case study as a choice in qualitative methodology. *Journal of Research & Method in Education*, *4*(3), 35-40.

Oktaç, A. (2019). Mental constructions in linear algebra. *ZDM – Mathematics Education*, *51*(7), 1043-1054.

Ruiz Berrio, J. (1976). El método histórico en la investigación histórica de la educación. *Revista Española de Pedagogía*, 134, 449-475.

Schlimm, D. (2008). On Abstraction and the Importance of Asking the Right Research Questions: Could Jordan have Proved the Jordan-Hölder Theorem? *Erkenntnis*, *68*(3), 409-420.

Schubring, G. (2005). *Conflicts between generalization, rigor, and intuition: Number concepts underlying the development of analysis in 17–19th century France and Germany*. New York: Springer-Verlag.

Schumacher, C. S., & Siegel, M. J. (20015). 2015 CUPM Curriculum Guide to Majors in the Mathematical Sciences. United States of America: The Mathematical Association of America. Retrieved from https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/CUPM/pdf/CUPMguide_print.pdf

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, *14*(1), 15-39.

Sierra, M. (2000). El papel de la historia de la matemática en la enseñanza. En A. Martinón (Ed.), *Las matemáticas del siglo XX* (pp. 93-96). La Laguna: Nivela.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (2002). Una visión integradora acerca del concepto de límite. *UNO Revista de Didáctica de la Matemática*, 29, 77-94.

Singletary, L. M. (2012). *Mathematical Connections Made in Practice: An Examination of Teachers' Beliefs and Practices*. Doctoral dissertation, University of Georgia. Athens, Georgia. Retrieved from: https://getd.libs.uga.edu/pdfs/singletary_laura_m_201208_phd.pdf.

Skemp, R. R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Skemp, R. R. (2006). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching in the middle school*, *12*(2), 88-95.

Suominen, A. L. (2018). Abstract Algebra and Secondary School Mathematics Connections as Discussed by Mathematicians and Mathematics Educators. In N. H. Wasserman (ed.), *Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers* (pp. 149-173). Springer.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Thomas, R. S. D. (2002). Mathematics and narrative. *The Mathematical Intelligencer*, *24*(3), 43–46.

Thrash, K. R., and Walls, G. L. (1991). A classroom note on understanding the concept of group isomorphism. *Mathematics and Computer Education*, 25(1), 53-55.

Timmermans, B. (2012). Prehistory of the Concept of Mathematical Structure: Isomorphism Between Group Theory, Crystallography, and Philosophy. *The Mathematical Intelligencer*, *34*(3), 41-54.

Wasserman, N. (2016). Modern algebra for algebra teaching: Influencing school mathematics instruction. *Canadian Journal of Science Mathematics and Technology Education*, *16* (1), 28-47.

Wasserman, N. H. (Ed.). (2018). *Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers*. Springer.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 101–119.

Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, *56*(2–3), 209–234.

Weber, K., & Larsen, S. (2008). Teaching and learning group theory. In *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 139-152). Mathematical Association of America.

Wussing, H. (1984). *The Genesis of the Abstract Group Concept: A Contribution to the History of the Origin of Abstract Group Theory*. Massachusetts: The MIT Press.

Zubillaga-Guerrero, E., González-Astudillo M. T., & Rodríguez-Vásquez, F. M. (2019): Jordan's isomorphism concept in the work "Traité des substitutions et des équations algébriques". In É. Barbin, U. T. Jankvist, T. H. Kjeldsen, B. Smestad & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education (ESU-8)* (Skriftserie 2019, nr 11, pp. 499-512). Oslo: Oslo Metropolitan University.