UAGro

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

CONEXIONES MATEMÁTICAS ESTABLECIDAS POR ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS AL RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE

Maestro en Ciencias Área Matemática Educativa

PRESENTA

Enrique Dans Moreno

DIRECTORES DE TESIS

Dra. Flor Monserrat Rodríguez Vásquez

Dr. Javier García García

Chilpancingo de los Bravo, Guerrero. México. Diciembre del 2020.

AGRADEZCO AL CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGIA, POR LA BECA OTORGADA A MI PERSONA DURANTE MIS ESTUDIOS DE MAESTRÍA

CONACYT

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

BECARIO: 930893

DEDICATORIA

A mis padres que gracias a ellos estoy cumpliendo otro de mis sueños. A mis hermanos, que siempre trato de ser un ejemplo para ellos. A mis abuelos y tíos abuelos que cada día me dan fuerza para continuar y enfrentar nuevos retos. A mi pareja por aconsejarme y estar a mi lado en todo momento. A toda mi familia. A mis amigos y compañeros de maestría que me apoyaron durante todo este tiempo. A mis profesores por su valiosa enseñanza. A todos aquellos que creyeron en mi dedico esta tesis.

AGRADECIMIENTO

A mis padres por haber siempre confiado en mí y por todo lo que han hecho por mi formación profesional.

A Juan Javier mi gran hermano por ser ejemplo para mí.

A mi amigo Carlos Roberto por escucharme en cada momento.

A mi pareja por apoyarme y aconsejarme cada día.

A toda mi familia por quererme tanto.

A mis compañeros de maestría Cézar, Liz, Damián, Andrea, Aline y Katia por todo su apoyo incondicional.

A mis tutores, Javier García García y Flor Monserrat Rodríguez, por su dedicación y por permitirme trabajar a su lado.

A mis profesores de la Maestría en Ciencia Área Matemática Educativa por sus consejos y valiosa enseñanza.

A todas las personas de México que hicieron posible mi superación profesional.

A la Universidad Autónoma de Guerrero por darme la oportunidad de continuar mis estudios.

A todo aquel que de una forma u otra aportó su granito de arena para que este sueño se haya hecho realidad.

A todos ustedes mil gracias.

Resumen

Las conexiones matemáticas permiten concebir la matemática como un todo integrado y posibilitan que los estudiantes desarrollen su compresión matemática. Por esta razón, surge el interés de identificar las conexiones matemáticas que realizan los estudiantes al resolver tareas que involucran a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden. En la presente investigación nos preguntamos ¿Qué conexiones matemáticas realizan los estudiantes universitarios al resolver tareas que involucran a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden? Se entiende por conexión matemática al proceso mediante el cual una persona relaciona dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real. Para la recolección de datos se utilizó las entrevistas basadas en tareas y el análisis temático para analizarlos. Nuestros resultados indican siete tipos de conexiones matemáticas: procedimental, representaciones diferentes, característica, parte-todo, significado, implicación y reversibilidad.

Abstract

Mathematical connections make it possible conceive of mathematics as integrated whole and enable students to develop their mathematical understanding. For this reason, the interest arises in identifying the mathematical connections that students make when solving tasks that involve first-order Ordinary Differential Equations. In the present investigation we ask ourselves: What mathematical connections do university students make when solving tasks that involve first-order Ordinary Differential Equations? Mathematical connection is understood to be the process by which a person relates two or more ideas, concepts, definitions, theorems, procedures, representations and meanings with each other, with of other disciplines or with real life. Task-based interview and thematic analysis were used for data collection to analyze them. Our results indicate that seven types of mathematical connections were identified: different representations, part-whole, feature, procedural, meaning, implication and reversibility.

Índice general

Índice de Figura

Índice de tablas

Índice de gráficos

Introducción

Las conexiones matemáticas son un campo actual de investigación en la matemática educativa, éstas permiten desarrollar la perspectiva de concebir la matemática integrada y no por partes separadas (Evitts, 2004). También posibilitan que los estudiantes desarrollen su compresión matemática (Mousley 2004; Silver, Mesa, Morris, Star y Benken, 2009; Barmby, Harries, Higgins y Suggate, 2009; Mhlolo, 2012; Mhlolo, Venkat y Schafer, 2012). Teniendo en cuenta esto, se concibe importante el estudio de las conexiones matemáticas en la práctica del proceso de enseñanza-aprendizaje y la necesidad de seguir investigado en este campo.

En este sentido, Adu-Gyamfi, Bossé, & Chandler (2017) señalan que las investigaciones deben explicar cómo los estudiantes realizan conexiones matemáticas y qué tipo de conexiones hacen. Mientras que García-García (2019) propone escenarios de exploración de conexiones matemáticas de acuerdo ha resultados propios y a la literatura especializada, como por ejemplo: explorar las conexiones matemáticas que realizan los estudiantes al resolver tareas referidas a distintos dominios matemáticos.

Al mismo tiempo diferentes estudios de la educación matemática reconocen la existencia de fuertes interrelaciones de las ecuaciones diferenciales con diferentes conceptos matemáticos en diferentes contextos de estudio (Ramusen, 2001; Raychaudhuri 2007; Arslan 2010; Guerrero, Camacho y Mejia, 2010; Perdomo 2011; Trigueros 2014; Spindler, 2019). Pero no es objetivo de las investigaciones revisadas estudiar las conexiones matemáticas en las ecuaciones diferenciales. Esto indica en parte, la necesidad de investigar las conexiones matemáticas que realizan los estudiantes al resolver tareas, en particular tareas que involucren a las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Por estas razones, la presente investigación planteó el siguiente objetivo:

Identificar las conexiones matemáticas que realizan los estudiantes al resolver tareas que involucran a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden.

Entendemos una conexión matemática como un proceso mediante el cual una persona relaciona p asocia dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas y con la vida real (García-García & Dolores-Flores, 2018). Debido a que esta acepción esta relacionada con el quehacer de los estudiantes al resolver tareas específicas.

Para la recolección de los datos utilizamos las Entrevistas Basadas en Tareas propuesta por Goldin (2000). Decidimos utilizar este método porque nos permite obtener datos de las producciones escritas, de los testimonios verbales y gestuales de los estudiantes. Mientras que para el análisis de los datos recogidos decidimos utilizar el análisis temático propuesto por Braun y Clarke (2006) dado que nos permite identificar patrones de significados (temas) en un conjunto de datos.

Esta tesis está integrada por 5 capítulos. En el Capítulo 1 se delimita el problema de investigación, por ejemplo, se presenta una síntesis sobre investigaciones realizadas en el campo de las conexiones matemáticas y el papel de estas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Asimismo, se muestra un apartado para investigaciones relacionadas con el campo de las ecuaciones diferenciales. Estas revisiones fueron importantes para el desarrollo de la problematización de la investigación. Teniendo en cuenta esto también se presenta la pregunta de investigación y el objetivo de esta.

En el Capítulo 2 se puntualizan aspectos teóricos en los que se basa la presente investigación. En particular, se define qué se entiende por conexión matemática y se presentan tipologías de conexiones matemáticas reportadas en diferentes investigaciones. En el apartado final de este capítulo se muestran definiciones y teoremas asociados a las ecuaciones diferenciales.

En el Capítulo 3 se describe el contexto de la investigación y los participantes, el método de recolección de los datos, la confección del instrumento para la colección de los datos, así como, las particularidades de las tareas consideradas y los objetivos de estas. También se presenta como se hizo el análisis de los datos.

En el Capítulo 4 se describen los resultados obtenidos a partir de las producciones escritas, de los argumentos verbales y de los gestos de los estudiantes. En este sentido, se presentan las conexiones matemáticas identificadas y evidencias de los resultados de acuerdo a las tipologías descritas.

Finalmente, en el Capítulo 5 se presenta la discusión, conclusión y futuras investigaciones. En particular se contrastan los resultados obtenidos en esta investigación con la literatura y se presentan futuros trabajos que pueden ser desarrollados considerando los resultados de esta investigación.

Capítulo 1

Antecedentes

En este capítulo se establece el problema de investigación y se ubica dentro del marco de la investigación en Matemática Educativa y en el contexto de las investigaciones existentes en relación con las conexiones matemáticas. Se resalta la importancia de las conexiones matemáticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. También se realiza una revisión de diferentes trabajos de investigación relacionados con las conexiones matemáticas y trabajos relacionados con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. En la última sección se formulan la pregunta de investigación y el objetivo del presente trabajo.

1.1 Conexiones matemáticas en Matemática Educativa

En la estructura de la matemática se pueden identificar relaciones entre objetos matemáticos y hacer generalizaciones de esas relaciones (Yildirim, 1996). Según Bingölbali y Coşkun (2016) este rasgo ha hecho que las matemáticas sean vistas como una disciplina secuencial y acumulativa. Debido a que los conceptos y sistemas matemáticos se construyen unos sobre otros, están interrelacionados y se utilizan conocimientos o conceptos previos para definir nuevos conceptos y construir nuevos sistemas. Por ejemplo, para definir el concepto de ecuaciones diferenciales ordinarias se requiere del conocimiento de diferentes conceptos matemáticos como función, derivada e integral, entre otros. Esto indica que la matemática está conectada por naturaleza. Sin embargo, es posible que esa conexión no sea identificada por estudiantes e incluso, por algunos profesores de matemáticas (García, 2018).

Sin embargo, está presente el hecho de que los contenidos matemáticos en los libros de textos y en los programas de estudio, se presentan en apartados separados (García, 2018). Esto puede provocar que la matemática sea percibida desconectada entre sí (Evitts, 2004; Jaijan y Loipha, 2002). Por ejemplo, Artigue (2001) hace referencia que muchas de las dificultades con las que se encuentra el estudiante pueden asociarse a las discontinuidades que se presentan durante proceso de enseñanza. Esto, en parte puede llevar a que profesores y estudiantes muestren dificultades para realizar conexiones matemáticas como reportan algunas investigaciones (Mhlolo, 2012; Mhlolo, Venkat & Schfer, 2012; Dolores y García-García, 2018).

Por otra parte, los estándares de educación de diferentes países tienen presente a las conexiones matemáticas. Por ejemplo, la NCTM (1989, 2000), sugiere que los estudiantes deben reconocer y realizar conexiones matemáticas entre diferentes temas matemáticos, así como con otras disciplinas y con aplicaciones de la vida real. En México el currículum sugiere que en la educación media superior se debe desarrollar la habilidad de realizar conexiones matemáticas y dejar a un lado la memorización y prácticas mecánicas (García, 2018). Mientras que en Sudáfrica el plan de estudio ofrece oportunidades para que los maestros perciban las matemáticas como una disciplina conectada que presenta relaciones dentro de sí misma y con otras disciplinas (Mwakapenda, 2008). A pesar de esto, establecer conexiones matemáticas todavía está lejos de estar presente en la práctica de muchos profesores de matemáticas (Singletary, 2000).

Las conexiones según Gamboa (2014) también están presentes en el conocimiento matemático del profesor. Por ejemplo, en la categoría del conocimiento del horizonte matemático las conexiones son un indicador sobre cómo se relacionan los contenidos matemáticos en el currículo matemático, en el conocimiento de la estructura matemática las conexiones emergen como un aspecto importante para entender las matemáticas como un sistema conectado y en el conocimiento de la actividad matemática las conexiones favorecen relacionar múltiples formas de definir, discutir o demostrar en la matemática. En general las conexiones en los modelos anteriores evidencian la existencia de una relación entre el conocimiento del profesor y el establecimiento de conexiones matemáticas en el aula. Aunque es importante tener en cuenta que para que los maestros desarrollen la construcción, el énfasis y el uso de conexiones matemáticas, estos deben tener una comprensión de la matemática que sea interconectada (Evitts 2004).

Por otra parte, según Mousley (2004) la comprensión matemática se centra en el conocimiento conectado, esto resalta la importancia de que los estudiantes y maestros realicen conexiones matemáticas durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, conexiones entre la información nueva y la existente, conexiones entre diferentes ideas y representaciones matemáticas y conexiones entre los conceptos matemáticos y contextos reales, entre otras. Permitiendo que el estudiante adquiera un conocimiento rico en relaciones y que las conexiones matemáticas sean importantes en la práctica de los maestros y de los estudiantes (Eli, Mohr-Schroeder y Lee, 2011).

Además, se reconoce la capacidad de un estudiante para realizar conexiones matemáticas está relacionada con la compresión matemática (Silver, Mesa, Morris, Star y Benken, 2009). En este sentido, para estudiar la comprensión de un individuo sobre un concepto matemático, es importante examinar las conexiones matemáticas que realiza con éste, aunque estas no se pueden ver directamente; más bien, se deben identificar las conexiones matemáticas que una persona puede manifestar y luego deducir su comprensión a partir de ellas (Barmby, Harries, Higgins y Suggate, 2009).

Por otra parte, Karakoç y Alacacı (2015) mencionan que es importante realizar conexiones matemáticas con la vida real durante el proceso de enseñanza de las matemáticas, dado que estas pueden favorecer a mejorar el desempeño de los estudiantes en las matemáticas. Así como aumentar la motivación de los estudiantes hacia las matemáticas y también contribuir a esquematizar la disciplina abstracta de las matemáticas y a su percepción como real (Umay, 2007). También las conexiones matemáticas con la vida real son resaltadas en múltiples documentos curriculares relacionados con la educación matemática (Ji-Eun, 2012). En este sentido los estudiantes perciben que la relación de la matemática con otras áreas o con la vida real no son empleadas lo suficiente, esto puede conllevar a que los estudiantes vean las matemáticas y la vida real parcialmente conectados (Ozgen, 2013).

Además, Bingölbali y Coşkun (2016) señalan que hacer conexiones matemáticas es una habilidad fundamental que deben adquirir los estudiantes. Dado que el aprendizaje de nuevos conceptos requiere establecer conexiones entre conceptos previos y los conceptos aprendidos. Al mismo tiempo el estudiante al establecer conexiones matemáticas entre diferentes representaciones favorece a que un concepto se entienda mejor, permitiendo al estudiante durante este proceso una comprensión relacional. También resulta importante para que los estudiantes adquieran esta habilidad, tener presente hacer conexiones con otras disciplinas y las relaciones entre las matemáticas y la vida real, esto conlleva enseñar los conceptos matemáticos mediante contextos de una disciplina diferente o contextos de la vida real. Por lo tanto, en la enseñanza de las matemáticas los maestros en formación deben estar expuestos a cursos nuevos y diferentes que recalquen el uso de conexiones matemáticas entre conceptos matemáticos, entre diferentes representaciones, entre diferentes disciplinas y con la vida real (Mumcu, 2018).

Por otra parte, Eli at al. (2011, 2013) y García (2018) plantean que las conexiones matemáticas deben estar presente en futuras secuencias didácticas, esto puede favorecer el desarrollo de la comprensión de la matemática de los estudiantes. Además, puede permitir que los estudiantes logren transitar entre representaciones diferentes, relacionar conceptos y reconocer relaciones de la matemática con la vida real.

En resumen, las conexiones matemáticas están presente en la matemática educativa ya sea desde la propia estructura de la matemática viéndola como una disciplina conectada, como producto de la comprensión, permitiendo comprender como los estudiantes pueden conectar y entender en la mente la matemática y también como parte del proceso de hacer matemática (Businskas, 2008). Esto ha traído consigo que los investigadores realicen diversas investigaciones relacionadas a las conexiones matemáticas.

1.1.1 Investigaciones sobre conexiones matemáticas

Las conexiones matemáticas han sido centro de estudio en la literatura internacional desde diversos matices. Por ejemplo, se ha investigado las conexiones entre la matemática y el mundo real (Umay, 2007; Ji-Eun, 2012; Ozgen, 2013; Karakoç y Alacacı, 2015). En éstas, se exploran las opiniones y puntos de vistas de profesores y estudiantes sobre la relación existente entre la matemática y el mundo real. Estas investigaciones tienen en general como objetivo describir y explorar la viabilidad del uso de conexiones matemáticas en el mundo real. Los resultados arrojan que esas conexiones pueden favorecer la motivación, el interés y las actitudes de los alumnos, así como desarrollar sus habilidades de razonamiento matemático, resolución de problemas y aprendizaje conceptual (Karakoç y Alacacı, 2015). También pueden contribuir a extraer ideas y relacionarlas que permitan esquematizar las matemáticas y lograr una mejor percepción de la matemática como real (Umay, 2017). Sin embargo, también se han reportado dificultades en los estudiantes para conectar las matemáticas con el mundo real, debido a que tienen opiniones y percepciones parcialmente incorrectas e incompletas (Ozgen, 2013).

Otras investigaciones que se han reportado han definido tipologías de conexiones matemáticas. Las cuales tienen como objetivo caracterizar la capacidad de hacer conexiones matemáticas de los profesores ya sea desde la práctica o al resolver problemas y, la capacidad de los estudiantes al resolver tareas específicas. Estas investigaciones han reportado las siguientes conexiones matemáticas: representaciones diferentes, relación parte-todo, procedimental, característica, significado, entre otras (Businskas, 2008; Eli, Mohr-Schroeder y Lee, 2011; Evitts, 2004; García, 2018). Proponen que futuras investigaciones deben hacer uso de estas tipologías en diferentes temas matemáticos, que permitan refinar estas conexiones matemáticas o ampliar la búsqueda de instancias adicionales de conexión. También, proponen analizar como los estudiantes o maestros logran hacer las conexiones matemáticas (Eli, Mohr-Schroeder y Lee, 2011).

Además, se ha investigado la calidad de las conexiones matemáticas asumiendo que, si un estudiante presenta mejor calidad en sus conexiones entonces su compresión puede ser más profunda y duradera. Estas investigaciones (Mholo, 2012; Mhlolo, Venkat y Schäfer, 2012), tienen como interés identificar las conexiones matemáticas que establecen los profesores y analizar la calidad de éstas en la práctica. En específico Mholo (2012), propone una herramienta a partir de cinco conexiones matemáticas, definidas teniendo como referente los documentos del plan de estudio y que permita usarse para conceptualizar las conexiones. Además, sugiere que las conexiones matemáticas identificadas y probadas podrían considerarse un punto de partida para seguir estudiándolas, así como su demanda cognitiva. Esto podría permitir analizar la comprensión de los profesores a partir de la calidad de las conexiones matemáticas. Asimismo, Mhlolo, Venkat y Schäfer (2012), reportan que la mayoría de las conexiones matemáticas de tipo representaciones diferentes que hacen los profesores de matemáticas en servicio son defectuosas o superficiales, lo que trae consigo que los alumnos pierdan oportunidades de desarrollar una comprensión profunda. Estos autores sugieren estudiar las conexiones matemáticas y la calidad de éstas que pueden aparecer durante el proceso de enseñanza de las matemáticas.

Otras de las investigaciones hacen referencia a la habilidad de hacer conexiones. Por ejemplo, han propuesto un marco conceptual para ayudar a los maestros sobre cómo lograr que los estudiantes obtengan la habilidad de hacer conexiones (Bingölbali y Coşkun, 2016). Mediante cuatro componentes, conexiones entre conceptos, conexiones entre diferentes representaciones del concepto, conexiones con la vida real y conexiones con diferentes disciplinas. Estas componentes constituyen el contenido de la habilidad de hacer conexiones y demuestran cómo esta habilidad se conceptualiza y define. En particular, se han explorado las habilidades de los maestros para hacer conexión matemática al utilizar el concepto de derivada (Mumcu, 2018), concluyendo que los maestros presentan conflictos para dar sentido a las diferentes representaciones de la derivada y asociarla con su significado, así como para asociar el concepto de derivada con los conceptos de límite y continuidad. Esto hace que los profesores presentan dificultades para desarrollar las componentes conexiones entre conceptos y conexiones entre diferentes representaciones. Mumcu (2018) sugiere que para alcanzar una comprensión más significativa y relacional de las matemáticas los maestros de matemáticas deben centrarse en la comprensión conceptual e incorporar en su práctica actividades que permitan que los conceptos se asimilen de manera significativa y en conexión con la vida real.

También existen investigaciones sobre las conexiones matemáticas que realizan los estudiantes al resolver tareas relacionadas con diferentes conceptos matemáticos. Por ejemplo, García-García y Dolores-Flores (2018, 2019) exploraron las conexiones matemáticas que hacen estudiantes de nivel preuniversitario al resolver problemas de aplicación de cálculo y al esbozar las gráficas de funciones derivadas y antiderivada. Se identificaron en general seis tipos de conexiones matemáticas: procedimentales, diferentes representaciones, característica, parte todo, significado y reversibilidad. Mientras García-García, Dolores-Flores y Rivera-López (2018) exploraron las conexiones matemáticas que realizan los estudiantes al resolver tareas que implican el uso de la tasa de cambio. Se identificaron las conexiones matemáticas: procedimental, característica, parte-todo y además se concluyó que los estudiantes tienen presente a la pendiente como un concepto desconectado de la velocidad y la aceleración. En general estas investigaciones proponen continuar explorando las conexiones matemáticas que realizan los estudiantes mediante otros conceptos matemáticos que permitan identificar nuevas conexiones, identificar el nivel de comprensión de los estudiantes mediante el estudio de la calidad de las conexiones matemáticas que realizan los alumnos y también proponen hacer uso de nuevos instrumentos que permitan estudiar con mayor claridad la relación de las creencia y las conexiones matemáticas que hacen los estudiantes.

Por otra parte, Adu-Gyamfi et al. (2017) señalan que la investigación debe explicar cómo los estudiantes realizan conexiones matemáticas, qué tipos de conexiones hacen y cómo cambiar las prácticas de enseñanza para favorecer a los alumnos a realizar estas. Mientras que García-García (2019) propone escenarios de exploración de conexiones matemáticas, como por ejemplo: 1) Las conexiones matemáticas que realizan los estudidantes al resolver tareas de diferentes contenidos matemáticos. 2) Las conexiones matemáticas que se ecuentran en los libros de textos y, las que se muestran en los planes de estudio. 3) Las conexiones matemáticas que promueven los profesores en su practica docente.

En resumen, las conexiones mateamáticas son un tema actual de investigación en educación matemática. Estas han sido estudiadas desde diversas perspectivas, por ejemplo, los investigadores se han interesado en estudiar las conexiones de las matematicas con el mundo real, en caracterizar las conexiones matemáticas que realizan los maestros en su practica o al resolver problemas y tambien las conexiones que realizan los estudiantes. También se ha estudiado la calidad de las conexiones matemáticas y se ha explorado las conexiones que realizan los estudiantes cuando resuelven tareas de diferentes dominios matemáticos. Estas investigaciones proponen futuras lineas de investigación en este tema, ejemplo: explicar cómo los estudiantes hacen conexiones mateamticas, que tipo de conexiones realizan los estudiantes al resolver tareas de distintos dominios mateamticos, hacer uso de las tipologías definidas en diferentes dominios, que permitan refinar estas conexiones matemáticas e identificar el nivel de comprensión del estudiante mediante la calidad de las conexiones matemáticas que estos realizan, entre otras.

1.2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) en la literatura de Matemática Educativa.

Las EDO son un tema básico en la formación de estudiantes universitarios de las carreras de ciencias e ingeniería y son importantes dado que favorecen el estudio de fenómenos de variación y procesos de modelación, además, permiten analizar y solucionar cuantiosos problemas que surgen en diferentes contextos (Perdomo, 2011). También tienen fuertes interrelaciones con diferentes conceptos matemáticos como funciones, derivadas, integrales, etc., (Arslan, 2010).

En este sentido, existen diversas investigaciones que atienden el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales (Arslan, 2010; Perdomo, 2011; Zeynivandnezhad, Ismail, y Yosuf, 2013; Gaisman, 2014; KarimiFardinpour & Gooya, 2017). Entre éstas están las que identifican y analizan las dificultades en el proceso de aprendizaje. Por ejemplo, Guerrero, Camacho y Mejía (2010) analizaron dificultades de estudiantes de ingeniería al interpretar las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria cuando se representan gráficamente o algebraicamente. Reportando que los estudiantes dominan procedimientos algebraicos para resolver una EDO, pero no son capaces de articular los registros algebraicos y gráficos, obstaculizando la interpretación del comportamiento de las soluciones en el registro gráfico. Arslan (2010) estudio el aprendizaje de 77 futuros profesores de matemática inscritos en un curso tradicional de ecuaciones diferenciales, para esto proporcionó un instrumento que tuvo en cuenta preguntas de aprendizaje procedimental y conceptual sobre las ecuaciones diferenciales. Los resultados arrojaron que 85% de los futuros profesores respondieron correctamente las preguntas procedimentales y el 30% las preguntas conceptuales. Identificándose que el aprendizaje de los futuros maestros fue principalmente procedimental, en particular, los participantes que tuvieron éxito en soluciones algebraicas no entienden suficientemente los conceptos relacionados y presentan dificultades en relación con estos conceptos.

Por otra parte, Rowland & Jovanoski (2004) estudiaron las dificultades interpretativas de 59 estudiantes de primer año de pregrado de acuerdo con las ecuaciones diferenciales ordinarias en un contexto de modelado. Indicando por ejemplo que los estudiantes al resolver problemas se confunden pensando en la función a determinar y en la ecuación de la tasa de cambio. Mientras Rasmussen (2001) hace alusión a las dificultades que presenta el concepto de solución de una ecuación diferencial y plantea que estas se pueden presentar debido a que es un concepto formado por funciones y no por valores numéricos y Raychaudhuri (2007) analizó el uso que le dan los estudiantes al teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales. Los resultados indicaron que los estudiantes en general plantean que solo puede existir una solución única del problema de valores iniciales si los coeficientes son continuos. Explicando este hecho debido a una interpretación errónea de la condición si-entonces y de que las funciones discontinuas no son integrables en un intervalo.

También, en la literatura están presente formas de enseñanzas alternas al modo tradicional (Perdomo, 2011; Rodríguez, 2015; Tisdell, 2018; Spindler, 2018). Por ejemplo, Perdomo (2011) implementó un módulo de enseñanza para la introducción del concepto de EDO, donde tiene como punto de partida al concepto de derivada de una función. Para ello conjugó tres elementos: la resolución de problemas, la interacción entre estudiantes y el uso de la tecnología. Se favoreció que los diferentes significados de la derivada se fortalecieran a medida que los alumnos progresaban en los problemas. Por lo que, se introduce las EDO mediante la relación que tienen estas con la derivada de una función, favoreciendo la construcción de un concepto matemático nuevo y fortaleciendo los conceptos previos de los estudiantes. Rodríguez (2015) implemento una forma diferente de impartir un curso de ecuaciones diferenciales para futuros ingenieros a través de modelos matemáticos. En esta propuesta didáctica tiene como base importante la modelación, consistió en presentar tres situaciones de modelado que aseguraran que los estudiantes transitaran entre diferentes etapas del ciclo de modelado poniendo de manifiesto múltiples habilidades que en su mayoría se tratan incorrectamente en un entorno tradicional. Mientras Spindler (2018) mediante un estudio de caso describió un proyecto basado en problemas únicos y auténticos durante un curso de ecuaciones diferenciales. Los estudiantes desarrollaron conjuntamente un modelo de ecuaciones diferenciales y luego lo resolvieron confeccionando un informe final donde se pudo mostrar su comprensión.

Por otra parte, existen investigaciones interesadas en la comprensión de los estudiantes. Por ejemplo, Rasmussen (2001) investiga la comprensión de seis estudiantes con el propósito de ofrecer un marco para interpretar la comprensión de los estudiantes enfocado en nuevas direcciones de las ecuaciones diferenciales, estas nuevas direcciones pretenden guiar a los estudiantes hacia un pensamiento más interpretativo y mejorar la interpretación gráfica y numérica de las ecuaciones diferenciales. Trigueros (2014) describió el papel del uso de la modelación y de representaciones en la comprensión, por parte de los estudiantes del concepto de ecuación diferencial de primer orden y del de solución. Reconociendo aspectos importantes en el aprendizaje de la construcción de los conceptos de ecuación diferencial y su conjunto solución, por ejemplo, 1) el proceso de análisis de la derivada, 2) la función implícita como objeto y su derivada y 3) la distinción entre los puntos críticos de una función entre otros.

También se ha reportado estudios de modelado mediante las ecuaciones diferenciales con el objetivo de favorecer la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, por ejemplo, Gallegos & Bourguet (2015) estudio las prácticas de modelado utilizadas en un curso de sistemas dinámicos con estudiantes de ingeniería que incorporaron actividades basadas en las ecuaciones diferenciales. Arrojando resultados favorables en el desarrollo de la comprensión del concepto de ecuaciones diferenciales. Clark (2018) presentó una alternativa de enseñanza para las ecuaciones diferenciales donde el tema central fue el modelado. Mientras que Winkel (2015) examinó las ecuaciones diferenciales de crecimiento o decrecimiento exponencial de primer orden y las ecuaciones diferenciales de segundo orden de coeficientes constantes dentro de un contexto de modelado. Reconociendo que a través de un enfoque de modelado se puede favorecer las estrategias de formación y solución de las ecuaciones diferenciales, además de ser motivador para los estudiantes.

En resumen, las ecuaciones diferenciales han sido de interés por diferentes autores (Ramussen, 2001; Rowland & Jovanoski, 2004; Raychaudhury, 2007; Arslan, 2010; Guerrero Camacho y Mejía, 2010; Perdomo, 2011, Trigueros, 2014; Rodríguez, 2015; Winkel, 2015; Clarke, 2018). Se han estudiado dificultades en el proceso de aprendizaje de los estudiantes y futuros maestros, así como su comprensión. También se han propuesto modelos de enseñanza alternos a los tradicionales, basados en la resolución de problemas, el uso de la tecnología y la modelación, con el objetivo de favorecer la comprensión de los estudiantes. Además, se reconoce que las ecuaciones diferenciales tienen relación con otros conceptos, con otras disciplinas y con la vida real, y tiene, como ya se ha mencionado, una gran aplicabilidad, por lo que se visualiza un amplio potencial para estudiar las conexiones en este dominio matemático.

1.3 Pregunta de investigación y objetivo

Teniendo presente la contextualización de este trabajo y la literatura revisada se puede inferir que las conexiones matemáticas que los estudiantes universitarios realizan asociadas a las EDO cobran relevancia por las siguientes razones:

- Las conexiones matemáticas son un tema actual de investigación en Educación Matemática.
- Las conexiones matemáticas que realizan los estudiantes al resolver tareas pueden ayudar en la gestión de la enseñanza-aprendizaje.
- El campo de las EDO sugiere, dado su importancia y la vinculación entre conceptos, que se realicen estudios considerando el enfoque de las conexiones matemáticas.

De acuerdo con lo anteriormente planteado y las sugerencias hechas por Adu-Gyamfi et al. (2017) y García-García (2019) se pretende hacer uso de las tipologías conocidas (representaciones diferentes, relación parte-todo, procedimental, característica, significado y reversibilidad) para identificar tipos de conexiones matemáticas que los estudiantes realizan al resolver tareas referidas a distintos conceptos de la matemática superior (EDO). Por tanto, la pregunta de investigación del presente trabajo es:

¿Qué conexiones matemáticas realizan los estudiantes universitarios al resolver tareas que involucran a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden?

La pregunta de investigación planteada conduce al siguiente objetivo general:

Identificar las conexiones matemáticas que realizan los estudiantes universitarios al resolver tareas que involucran a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden.

Capítulo 2

Marco Conceptual

En este capítulo se presentan los elementos referenciales que sustentan esta investigación: las conexiones matemáticas, las tipologías de conexiones matemáticas y elementos del contenido matemático al que se refiere el presente estudio (Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden).

2.1 Conexiones matemáticas

Según la literatura educativa existen diferentes formas de describir las conexiones matemáticas. Por ejemplo, Singletary (2012) entiende a las conexiones matemáticas como una disciplina conectada, es decir, las conexiones entre conceptos y procedimientos son una característica determinante de las matemáticas. Mientras que, en otros contextos, las conexiones matemáticas pueden verse como producto de la comprensión, donde las conexiones existen en la mente del estudiante y pueden verse en el proceso de hacer matemáticas. De igual forma, se encuentran diversas posturas en relación con la definición de conexiones matemáticas como: una conexión relación casual o lógica (Brown, 1993), son ideas o procesos muy amplios que pueden usarse para vincular diferentes temas en matemáticas (Coxford, 1995) y dentro de los procesos matemáticos involucran establecer relaciones entre distintos dominios matemáticos (Godino, Batanero & Font, 2003). También se pueden entender como redes de enlaces que asocian definiciones, propiedades, procedimientos y representaciones (Gamboa & Figueiras, 2014).

Por otra parte, según Businskas (2008) las conexiones matemáticas son una característica propia de la matemática debido a que se pueden ver como una relación entre ideas matemáticas (relaciones específicas entre conceptos matemáticos y reconocimiento de la equivalencia de dos o más representaciones). También se pueden considerar como una construcción del estudiante (hacer una conexión matemática es un proceso que acontece en la mente del estudiante). Además, es un proceso que forma parte de la actividad de hacer matemática.

Mientras, Eli et al. (2011) consideran una conexión matemática como un enlace donde el conocimiento previo y nuevo permiten desarrollar una compresión entre las relaciones de los conceptos, representaciones e ideas matemáticas en una red mental y Singletary (2012) entiende las conexiones matemáticas como una relación entre entidades matemáticas o no matemáticas. Estas entidades matemáticas son cualquier objeto matemático. Esta última acepción tiene relación con la de Businskas (2008).

Otra acepción, es la propuesta por García-García y Dolores-Flores (2018) quienes mencionan que una conexión matemática es un proceso donde una persona relaciona dos o más significados, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos y representaciones entre sí, con otras disciplinas o con la vida real.

En la presente investigación, se asumirá la acepción de García-García y Dolores-Flores (2018), teniendo presente que está relacionada con el quehacer de los estudiantes al resolver tareas específicas.

Por otra parte, según García (2018) las investigaciones reconocen que se realizan conexiones con los conocimientos previos, con varios dominios matemáticos, con otras disciplinas y con el mundo real. Por tanto, estas se producen al relacionar la matemática entre sí, que se denominan conexiones intramatemáticas, y al establecer relaciones donde intervenga un contexto extra matemático, que se denominan conexiones extramatemáticas (De Gamboa & Figueiras, 2014).

2.2 Tipologías de conexiones matemáticas

A parte de las diferentes acepciones de conexiones matemáticas los investigadores se han interesado por caracterizar estas conexiones, a partir de tipologías propuestas en la literatura revisada, donde se encuentra: las de Evitts (2004), Businskas (2008) y las planteadas por Eli et al. (2011). Estas tipologías en estas investigaciones están asociadas a las respuestas de profesores en servicio o futuros profesores. También se encuentra las tipologías de García (2018) asociadas a las respuestas de los estudiantes cuando resuelven tareas matemáticas. A continuación, se describen algunas de estas tipologías.

Evitts (2004), plantea cinco tipologías para estudiar conexiones matemáticas:

1. Conexión de modelado: Esta constituye relaciones entre el mundo de las matemáticas y el mundo real. Puede caracterizarse por la interacción de información del mundo real con una

representación matemática apropiada y en ocasiones requiere ideas matemáticas de más de un tema de las matemáticas.

2. Conexión estructural: Esta ocurre cuando se reconoce similitudes entre dos ideas o construcciones matemáticas. Ejemplo, un estudiante reconoce que la suma de un número y su opuesto y el producto y el producto de un número distinto de cero y su recíproco son elementos de identidad aditivos y multiplicativos.
3. Conexión de representación: Se manifiesta cuando se relacionan diferentes representaciones, se pueden representar en formas de gráficas, numéricas, simbólicas, pictóricas y verbales. Ejemplo, un estudiante lee un conjunto de pares ordenados $((1{,}3)\ y\ (2{,}8))$ y esta información la presenta como dos puntos distintos en un plano de coordenadas.
4. Conexión procedimental-conceptual: Se manifiesta cuando los conceptos están relacionados a los procedimientos. Ejemplo, la relación entre procedimiento y concepto del valor absoluto.
5. Conexión entre conceptos matemáticos: Consiste en relacionar distintos conceptos matemáticos. Estas relaciones pueden ser de dos tipos, cuando se aplican habilidades y conceptos matemáticos a un problema determinado o cuando se consideran las matemáticas como una colección de temas unificados.

Busisnska (2008), plantea una categorización diferente para identificar las conexiones matemáticas definida por las siguientes tipologías:

1. Representaciones diferentes: Se manifiesta cuando el concepto se representa de dos o más formas. Estas representaciones pueden ser alternas o equivalentes. Las representaciones alternas son aquellas donde se representa el mismo objeto matemático en diferentes registros de representación, tales como: simbólica-algebraica, gráfica-geométrica, pictórica-diagrama, etc. Mientras que, las representaciones equivalentes son aquellas donde se representa de forma diferente, pero dentro de la misma representación. Ejemplo la representación $f(x) = ax^2 + bx + c$ es equivalente a $a(x - r)^2 + c$.
2. Implicación: Se manifiesta cuando un concepto conlleva a otro de forma lógica. Ejemplo, tiene la forma de si…, entonces… (si $D = 0$ entonces la ecuación tiene una raíz real).

3. Relación parte todo: Se manifiesta cuando un concepto está relacionado a otro en algún sentido de parte y todo. Esto puede ser en dos sentidos inclusiones (A esta incluido en B) o generalizaciones (A es una generalización de B).
4. Procedimiento: Se manifiesta cuando un procedimiento está relacionado con un concepto determinado. Por ejemplo, cuando se utiliza la formula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para encontrar la pendiente de una recta.
5. Conexión orientada a la instrucción: Se manifiesta cuando A y B son dos conceptos o habilidades que deben ser conocidos para concebir o aprender C y se muestra en dos formas. Cuando se hace énfasis en la vinculación del nuevo tema con el conocimiento previo y cuando los conceptos y procedimientos matemáticos relacionados entre sí se consideran prerrequisitos o habilidades que los estudiantes deben dominar antes de abordar un tema nuevo.

Eli et al. (2011) plantea otras tipologías de conexiones matemáticas. En particular, plantea las siguientes:

1. Categóricas: Se manifiesta principalmente con el uso de características superficiales, principalmente como una base para la definición de un grupo o categoría.
2. Procedimiento: Se manifiesta cuando se relacionan ideas basadas en un procedimiento matemático o en un algoritmo, que puede incluir una descripción de mecanismo involucrados en la realización de procedimientos.
3. Característica/Propiedad: Se manifiesta cuando se definen características o se describen propiedades de los conceptos en términos de otros conceptos.
4. Derivación: Se manifiesta cuando se usa el conocimiento de un concepto para construir o explicar otro concepto.
5. Curricular: Se manifiesta cuando se relacionan ideas o conceptos en términos de impacto en el currículo, incluyendo el orden en que se puede enseñar conceptos o temas.

De acuerdo con García (2018) estas tipologías expuestas tienen semejanzas, por ejemplo, la conexión procedimental está presente en las tipologías de los tres investigadores, mientras que la conexión de representaciones diferentes la consideran Evitts (2004) y Businskas (2008). En la presente investigación se hace uso de las tipologías de García (2018) debido que el trabajo se centra en los estudiantes. Pero se tendrán en cuenta las tipologías de Evitts (2004), Businskas (2008) y Eli et al. (2011) por sí emergen alguna de éstas en el análisis de los datos.

2.3 Tipologías para estudiar conexiones matemáticas propuesto por García (2018)

En la propuesta de García (2018), se caracterizan seis tipologías de conexiones matemáticas: significado, característica, procedimental, representaciones diferentes, parte-todo y reversibilidad. A continuación, se describen las tipologías a tener en cuenta para la presente investigación.

1. Procedimental (P): Se manifiesta cuando los estudiantes utilizan reglas, algoritmos o fórmulas para resolver una tarea matemática cualquiera e incluyen explicaciones para lograr un resultado.
2. Representaciones diferentes (RD): se manifiesta de dos formas: a) representaciones alternativas cuando un estudiante utiliza dos o más representaciones para representar un concepto matemático (algebraico-gráfico, verbal-algebraico, etc.). b) representaciones equivalentes cuando un estudiante representa el mismo concepto matemático de dos maneras diferentes dentro de la misma representación.
3. Característica (C): Ocurre cuando los estudiantes identifican atributos o cualidades que los hace diferente de otros. Estas son de ayuda en el momento de diferenciar un concepto matemático de otro, para distinguir simbologías matemáticas, la forma en que deben ser representados o pueden ayudar a identificar cierto orden para efectuarse algunos cálculos. Asimismo, se manifiesta cuando se describen las propiedades de los conceptos.
4. Reversibilidad (R): Tienen la particularidad de ser bidireccional y se manifiestan cuando un estudiante puede partir de un concepto A para llegar a un concepto B e invertir el proceso partiendo de B para regresar a A. Esto implica que los alumnos pueden iniciar en un punto final y seguir el curso de un razonamiento hasta llegar al punto inicial y viceversa.
5. Significado (S): Se manifiesta cuando los estudiantes atribuyen un sentido a un concepto matemático, tanto lo que para ellos es (que lo hace diferente de otro) y lo que representa; puede contener la definición que ellos han construido para estos conceptos. Es diferente de la conexión matemática característica porque no se describen propiedades ni cualidades.
6. Parte-todo (PT): Ocurre cuando los estudiantes establecen relaciones lógicas entre los conceptos matemáticos, ya sea de generalización (entre casos generales y particulares) o inclusión (cuando un concepto matemático está incluido en otro).

2.4 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden

En diversos libros de texto, las ecuaciones diferenciales, se definen según en contexto al que se refiera o esté dirigido el texto. Estas definiciones resaltan los conceptos de ecuación, función y derivada (Zill, 1998; Zimmons y Krantz, 2007; Zill y Cullen, 2009; Zill y Wright, 2015).

En lo que sigue se definirán algunos aspectos matemáticos implicados en esta tesis considerando los autores Zill y Wright (2015).

Definición 1. *Ecuación diferencial*

Se denomina ecuación diferencial (ED) a la ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables.

Las ED se clasifican en ordinarias o parciales y también de acuerdo al orden. En la presente investigación es de interés en particular las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden. Estas tienen la característica que contiene sólo derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente.

Forma de las ecuaciones diferenciales ordinarias de n-esimo:

$F(x, y, y', \ldots, y^n) = 0$ ó $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$

Forma de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$F(x, y, y') = 0$ ó $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Definición 2: *Solución de una EDO*

Se denomina solución de la ecuación en el intervalo a cualquier φ, definida en un intervalo I y que tiene al menos n derivadas continuas en I, las cuales cuando se sustituyen en una ecuación diferencial ordinaria de $n - \acute{e}simo$ orden reducen la ecuación a una identidad.

Problemas de valor inicial:

En ocasiones es de interés estudiar problemas donde la solución $y(x)$ de una ecuación diferencial satisface condiciones iniciales, es decir, condiciones asignadas a $y(x)$ o a sus derivadas. En algún intervalo I que contiene a x_0 el problema de resolver una ecuación diferencial de n-ésimo orden sujeto a las n condiciones que lo acompañan especificas en x_0:

Resolver: $\frac{dy}{dx} = f(x, y, y', \dots., y^{(n-1)})$

Sujeto a: $(x_0) = y_0, y^{\prime\prime}(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

donde $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ son constantes reales dadas, se denomina problema con valores iniciales de $n - \acute{e}simo$ orden.

Problemas de valor inicial de primer orden.

Resolver: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Sujeto a: $y(x_0) = y_0,$

Teorema 1: *Existencia de solución única*

Sea R una región rectangular xy definida por $a \leq x \leq b, c \leq x \leq d$ que contiene al punto (x_0, y_0) en su interior. Si $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en R, entonces existe algún intervalo $I_0 : (x_0 - h, x_0 + h), h > 0$, contenido $[a, b]$, y una función $y(x)$, definida en I_0, que es una solución del problema con valores iniciales.

Campo direccional

Al evaluar sistemáticamente f en una cuadrícula de puntos en el plano xy y trazar un elemento lineal en cada punto (x, y) de la cuadrícula con pendiente $f(x, y)$, entonces al conjunto de todos los elementos lineales se le nombra campo direccional de la ED $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Gráficamente, el campo direccional indica la forma de una familia de curvas de solución de la ED. También se puede observar aspectos cualitativos de la solución, por ejemplo, comportamientos poco comunes de una solución específica.

Definición 3. *Ecuaciones separables*

Una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = g(x)\, h(x)$ se denomina una ecuación separable o que tiene variables separables.

Definición 4: *Ecuación Lineal*

Una ecuación diferencial de la forma $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = g(x)$ se denomina ecuación lineal.

Definición 5: *Ecuación exacta*

Una expresión diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una diferencial exacta en una región R del plano xy si esta corresponde a la diferencial de alguna función $f(x,y)$ definida en R. Una ecuación diferencial de la forma $M(x,y)dx + M(x,y)dy = 0$ se denomina ecuación exacta si la expresión del lado izquierdo es una diferencial exacta.

Teorema 2: *Criterio para diferencial exacta*

Si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ y sus primeras derivadas parciales son continuas en una región rectangular R defina por $a < x < b$, $c < x < d$, entonces una condición necesaria y suficiente para que $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ sea una diferencial exacta es que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Capítulo 3

Metodología

Una vez definido el problema de investigación y las bases teóricas que sustentan este trabajo, se plantean los términos en que se ha desarrollado el estudio, es decir la metodología que se empleó en la investigación. En este capítulo se describen las características generales de una investigación de tipo cualitativo, así como participantes, instrumento, método de recolección y análisis de los datos.

3.1 La investigación cualitativa:

La presente investigación es cualitativa. Este estudio se enfoca en comprender los fenómenos, desde las perspectivas de los individuos y es seleccionado cuando el propósito de la investigación es reconocer la forma en que los participantes perciben y experimentan los fenómenos que los rodean, atendiendo sus puntos de vista, interpretaciones y significados (Baptista, Fernández y Hernández, 2014). De acuerdo con Maxwell (2005) los estudios cualitativos son útiles: 1) comprender el significado de los participantes en el estudio, de hechos, situaciones y acciones donde están involucrados; teniendo en cuenta los relatos que dan. 2) comprender el contexto particular dentro del cual actúan los participantes y la influencia que este contexto. 3) Comprender los procesos mediante los cuales ocurren los eventos y acciones. En general estas ideas se reflejan en las características y naturaleza del problema de investigación que pretende identificar las conexiones matemáticas desde la perspectiva de los estudiantes, describiendo sus producciones escritas y argumentos orales.

La investigación cualitativa se llevó a cabo mediante un estudio de caso. Según Rodríguez, Gil y García (1999) el estudio de casos implica un proceso de búsqueda que se caracteriza por el análisis detallado, comprehensivo y sistemático del caso objeto de interés. Donde se tiene en cuenta la particularidad de cada participante con el objetivo de conocerlo bien (Stake, 2007). Esto nos permitió realizar una investigación con mayor exhaustividad y dar a conocer una mejor comprensión de los casos estudiados.

3.2 Método de recolección de datos

La Entrevista Basadas en Tareas propuesta por Goldin (2000), se utilizó como método para la recolección de los datos dado que permite el uso de dos técnicas: las entrevistas y cuestionarios (tareas). Este método permite obtener datos a partir de las producciones escritas y también de los testimonios verbales y gestuales que utilizan los estudiantes.

De acuerdo con Goldin (2000), las Entrevistas Basadas en Tareas involucran un entrevistador (clínico) y un sujeto (solucionador de problemas), que interactúan entorno a una o más (preguntas, problemas o actividades). El investigador al analizar el comportamiento o las interacciones verbales y no verbales puede hacer inferencias sobre el conocimiento, el aprendizaje y las formas de interpretación.

Esto permitió centrar la atención de la investigación más directamente en los procesos de los estudiantes al resolver tareas matemáticas en lugar de solo tener en cuenta respuestas correctas e incorrectas de los resultados que producen (Goldin, 2000). Por lo que existe la posibilidad de profundizar en la cognición de los estudiantes asociado con el aprendizaje de las EDO. Para las intenciones de la presente investigación se puso interés en las producciones escritas, las orales (argumentos) y gestuales de los estudiantes que desarrollaron durante la resolución de las tareas propuestas.

Por otra parte, según Assad (2015) las entrevistas Basadas en Tareas ofrecen la oportunidad de evaluar el conocimiento conceptual de los estudiantes y pueden brindar oportunidades para desarrollar la comprensión matemática. La entrevista puede ser planificada de antemano, o puede ser semiestructurada. Mediante preguntas el investigador puede motivar a los estudiantes a autocorregirse o que logren generalizar un problema. También, se anima a examinar a los estudiantes las estrategias que emplean y su pensamiento matemático.

Además, se tuvo en cuenta durante la presente investigación los principios que establece Goldin (2000) para diseñar y construir Entrevistas Basadas en Tareas. Entre estos se hallan: 1) Elegir tareas que sean asequibles para los sujetos, de acuerdo con esto las tareas incorporaron ideas y estructuras matemáticas apropiadas para los estudiantes. 2) Fomentar la libre resolución de problemas, en este sentido los estudiantes participaron en la resolución de las tareas con toda libertad durante la entrevista, en la mayor medida posible. 3) Decidir qué sería grabado y grabar, de acuerdo con esto, se grabar todo lo posible, de acuerdo a esto, se grabaron las intervenciones y los gestos de los estudiantes en cada una de las sesiones. 4) Preparar entrevistas clínicas y test piloto, en este sentido se refinaron cada una de las tareas, y las preguntas mediante pruebas piloto. 5) Prever nuevas posibilidades o imprevistos, se tuvo cuenta durante la investigación la mayor cantidad de variantes de solución y respuestas de los estudiantes.

3.2.1 Contexto de la investigación y participantes

La presente investigación se desarrolló en la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro) en específico en la Unidad Académica de Matemática con estudiantes del 6to semestre de la licenciatura en Matemáticas.

Para realizar la investigación, primeramente, se conversó con los dos profesores que impartían clases en la facultad en el curso de Ecuaciones Diferenciales I, se les informó el objetivo de la investigación y se les pidió apoyo a sus estudiantes para participar. La elección de los participantes se hizo atendiendo que hubieran terminado el curso de Ecuaciones Diferenciales I y que estuvieran dispuestos a colaborar en el presente trabajo. Atendiendo esto, los casos de estudios fueron cuatro estudiantes, los cuales fueron seleccionados por su desempeño durante el curso y el interés de tener una variación entre los casos. Para hacer referencia a los estudiantes se utilizará la siguiente notación: E1, E2, E3, E4, donde E significa estudiante y el número posterior a la letra E permite distinguir cada individuo.

La implementación del instrumento se realizó en cuatro sesiones una con cada estudiante, se grabó en las sesiones las intervenciones y los gestos los estudiantes. La duración de cada sesión fue entre 90 y 150 minutos. Las entrevistas se realizaron después que el estudiante respondía cada una de las tareas (una a una) haciendo énfasis, por ejemplo, la forma en que el estudiante le daba respuesta a la tarea, porque de esa forma, si reconoce otra vía de solución, como interpretaba el resultado, etc. Por lo que, el investigador estuvo pendiente de cada acción del estudiante con el fin realizar preguntas que permitieran entender el proceder de éste.

Asimismo, durante las entrevistas se motivó al estudiante a autocorregir sus producciones escritas cuando cometía errores, en particular los cálculos que hicieron al resolver el instrumento para asegurar que sus errores fueran conceptuales y no inconsciente (como no tener en cuenta algún signo, operar equivocadamente, etc.) en el instante de hacer las operaciones.

Posteriormente a la aplicación de las entrevistas, estas fueron transcritas totalmente y las producciones escritas fueron escaneadas. Esto permitió, reunir evidencia verbal y escrita de cada estudiante. Mientras que los gestos fueron detallados en la narrativa de cada uno para saber cuándo fueron utilizados y que conceptos matemáticos utilizaron de acuerdo con esta vía. La evidencia de cada estudiante fueron objeto de análisis.

3.2.2 Instrumento de colección de datos.

Para el logro del objetivo de esta investigación se elaboró un instrumento que permitiera obtener las respuestas de los estudiantes mientras estos muestran sus ideas libremente, cuando resuelven tareas que involucran a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden. El proceso de confección del instrumento fue propuesto y discutido en profundidad por el equipo investigador. Las tareas propuestas fueron retomadas y adaptadas del artículo de Perdomo (2011), de acuerdo con su clasificación. Asimismo, se consideraron los criterios de Goldin (2000) para llevar a cabo una Entrevista Basada en Tareas. También se realizó una validación por usuarios y expertos del instrumento.

Tipos de tareas de (EDO) según Perdomo (2011):

Tipo 1: Requieren del conocimiento del concepto de solución de una EDO. Consisten en verificar si una expresión es solución general o particular de una EDO y analizar las propiedades de las soluciones. (T1[1]).

Tipo 2: Consisten en el uso de conocimientos matemáticos estudiados con anterioridad o empleando métodos algebraicos sencillos (T2).

Tipo 3: Requieren para la resolución, la representación y/o interpretación del campo de direcciones asociado a una EDO (T2).

Tipo 4: Consisten en interpretar información proporcionada en términos algebraico en un problema de aplicación (T3).

3.3 Aplicación piloto y resultados

El instrumento fue sometido a un proceso de validación, a fin de valorar el alcance del objetivo de esta investigación, debido a que las preguntas fueron adaptadas de otra investigación. En este proceso de validación por expertos y usuarios. Además, se tuvieron en cuenta los siguientes

[1] Tn $(n = 1,2,3)$ hace referencia a la tarea Tn en el instrumento

criterios para evaluar la validez del contenido de las tareas: a) claridad, b) redacción, c) nivel de dificultad y d) si contiene información adecuada.

En la validación con expertos en Matemática Educativa representados por el equipo de investigación y un maestro de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales, llevó a realizar cambios en el diseño del instrumento (ver anexo 1). Los expertos[2] sugirieron resolver el instrumento por el investigador y estudiantes para observar el alcance del objetivo y la claridad en las preguntas. Además de medir el tiempo de solución del instrumento.

En esta etapa se respondieron las tareas, se discutieron las diferentes variantes de solución con la participación del maestro de la asignatura de Ecuaciones diferenciales. Luego se identificaron las conexiones matemáticas (Tabla 1) definidas por García (2018), esto fue llevado a cabo por el equipo de investigación. Ninguna tarea permitió identificar todas las conexiones matemáticas y las tareas de Tipo 2 solo permitieron identificar las conexiones: procedimental y de reversibilidad. Las tareas de Tipo 3 y Tipo 4 permitieron identificar una mayor cantidad de conexiones matemáticas en específico la T3 y la T5.

Tabla 1. Conexiones Matemáticas

Tarea	Tipo	Conexiones Matemáticas
1	1	Procedimental, significado, característica y parte todo.
2	2	Procedimental y reversibilidad
3	3	Procedimental, reversibilidad, significado, representación diferente y parte todo
4	3	Característica, procedimental, significado, representación diferente y parte todo
5	4	Procedimental, reversibilidad, significado, parte todo y representación diferente
6	4	Procedimental, significado, parte todo y representación diferente

De acuerdo a estos resultados se llegó a la conclusión de que el instrumento fuera confeccionado por tres tareas: la T1 que permitiera recoger conexiones en el registro algebraico y es consecuente con la tarea de Tipo 1, la T2 permitiera recoger conexiones en el registro algebraico y gráfico (en específico el tránsito entre estos registros) y es consecuentes con la tareas de Tipo 3 y por último

[2] Los expertos se caracterizaron por tener una formación en el área de matemática educativa, uno de ellos con mas de 15 años de experiencia impartiendo la asignatura de Ecuaciones Diferenciales, otro en el campo de las conexiones matemáticas y otro en el campo de comprensión de conceptos.

la T3 que permitiera recoger conexiones en la resolución de problemas de aplicación y es consecuente con la tarea de Tipo 4 (ver anexo 2).

3.3.1 Diseño de Entrevistas Basadas en Tareas

Teniendo en cuenta los resultados de la aplicación piloto del instrumento, se confeccionó un protocolo semiestructurado que presento las tareas propuestas y algunas preguntas auxiliares para cada tarea. Esto permitió recopilar las producciones de los estudiantes en los registros: algebraico, gráfico y verbal. A los alumnos se les dio el protocolo en forma de cuestionario con las tareas, pero sin las preguntas auxiliares. El protocolo de la entrevista se estructuró en cuatro partes (Tabla 2) como se describe enseguida.

Tabla 2. Estructura del protocolo para la recolección de datos.

Parte I. *Datos generales del entrevistado.* El objetivo es recopilar información personal de los participantes, así como del desempeño general que tuvieron en su curso de Ecuaciones Diferenciales.

1. ¿Cuál es tu nombre completo y cuál es tu edad?
2. ¿Qué calificaciones has obtenidos en tu curso de Ecuaciones Diferenciales?
3. ¿Cómo consideras que fue tu desempeño en las clases de Ecuaciones Diferenciales?

Parte II. *Explorando conexiones matemáticas en el registro algebraico*. El objetivo es identificar las conexiones que realizan los estudiantes cuando resuelven las tareas en el registro algebraico, observando las estrategias de resolución que utilizan, alternativas de resolución, si conocen el algoritmo para resolver la EDO de primer orden. Hace referencia a las tareas de tipo 1.

Justifica de forma razonada, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) La función $xy^2 + \frac{x^3}{3} = 1$ es una ecuación particular de la ecuación diferencial

$$(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$$

b) La familia de funciones $y = \frac{c}{x} + 2$ es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2 - y)}{x}$$

¿Qué es una ecuación diferencial?

¿Qué es una solución particular y general?

Cómo resolver varios tipos de EDO de primer orden (separable, lineal y exacta).

Si el estudiante no explica sus procedimientos se le indica que lo haga.

Si el estudiante conoce diferentes vías de solución alentarlo a que lo indique.

Parte III. *Explorando conexiones matemáticas en el registro algebraico y gráfico.* El objetivo es identificar las conexiones que realizan los estudiantes cuando construyen el campo de direcciones, la solución pedida y la coordinación entre los sistemas de representación gráficos y algebraicos. Hace referencia a las tareas de tipo 2 y tipo 3.

Resuelve la ecuación diferencial $y'(x) = \frac{1}{x}$. Represente el campo de direcciones asociado a la ecuación y una solución correspondiente a $x = 1$

- ¿Qué es un campo de direcciones?
- Si el estudiante no explica sus procedimientos se le indica que lo haga.
- Si el estudiante conoce diferentes vías de solución alentarlo a que lo indique.

Parte IV. *Explorando conexiones matemáticas en la resolución de problemas de aplicación*. El objetivo es identificar las conexiones que realizan los estudiantes cuando resuelven problemas, al determinar si interpretan de forma correcta, en lenguaje matemático, la información dada en lenguaje verbal relativa a un contexto real. Hace referencia a las tareas de tipo 4.

Se sabe que la población de una ciudad crece a medida que pasa el tiempo, verificando la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = K, 0 > 0$.Si la población se ha elevado en 3 años, y en 5 años ha alcanzado la cifra de 4000 habitantes. ¿Cuántas personas vivían en la ciudad al comienzo de ese período de cinco años?

3.4 Análisis de datos

Para el análisis de los datos colectados se decidió utilizar el análisis temático establecido por Braun y Clarke (2016, 2012), su objetivo es identificar patrones de significados (Temas) de un conjunto de datos que se obtienen de las respuestas a las tareas planteadas en la investigación, en otras palabras, permite examinar e identificar patrones en datos cualitativos (Braun y Clarke, 2012). El análisis temático resalta por ser flexible dado que puede ser usado en diferentes marcos teóricos y preguntas de investigación. También puede ser utilizado para ocasionar análisis mediante los datos o encaminado por la teoría. En esta investigación, el análisis temático, se utilizó para identificar conexiones matemáticas que realizaron los estudiantes al resolver las tareas planteadas.

3.4.1 Fases del análisis temático

El método está compuesto por seis fases (Braun & Clarke, 2006, 2012), que se describen a continuación.

Fase 1. Familiarizarse con los datos

Esta fase consiste en conocer detalladamente las producciones (escritas, verbales y gestuales) de los alumnos e introducirse en los datos para habituarse con el lenguaje que utilizan. Para lograrlo, se transcribió cada entrevista, esto permitió tener ideas iniciales sobre las conexiones matemáticas que realizan los estudiantes.

Fase 2. Generar códigos iniciales

Según Braun y Clarke (2012) los códigos facilitan identificar etiquetas de acuerdo a una característica de los datos que sea notable para la pregunta de investigación. La codificación se realiza cuando se identifica algo que es relevante y a medida que avanza la codificación se pueden transformar los códigos. En este sentido, para identificar conexiones matemáticas, se buscaron proposiciones en las narrativas de los estudiantes donde establecieron una verdadera relación entre dos o más conceptos, definiciones, teoremas, significados entre sí. Por ejemplo, ver extracto de la entrevista con E2.

> I: ¿Cómo te das cuenta de que es una ecuación diferencial?
>
> E2: Por esto (señala la expresión dy/dx) la notación.
>
> I: ¿Qué es eso?
>
> E2: La notación.
>
> I: Pero ¿qué significa?
>
> E2: La derivada de y respecto a x

A partir del extracto anterior formamos el código: “la derivada permite identificar la existencia de una ecuación diferencial”. Este proceso se realizó con los cuatro estudiantes y se crearon veinticinco códigos (Tabla 3).

Tabla 3. Códigos

Estudiante	Código
E1	C_1: El campo direccional es una representación gráfica que permite observar el comportamiento que tiene la solución de la ecuación diferencial. C_2: Para resolver una ecuación diferencial separable se despeja las expresiones de x e y y se integra ambos miembros. C_3: El campo direccional se construye utilizando la derivada, dado que la derivada es la pendiente de la recta tangente en un punto. C_4: El valor inicial de una EDO se representa por la expresión $p(0)$. C_5: La representación verbal "En cinco años se ha alcanzado la cifra de 40000 habitantes" se puede representar algebraicamente por $p(5) = 40000$. C_6: Una ecuación diferencial es una ecuación donde en lugar de una variable incógnita en este caso es una función incógnita. C_7: La solución general es un conjunto de funciones que satisface una ecuación diferencial. C_8: Las ecuaciones diferenciales de variables separables tienen la forma $f(y)dy = f(x)dx$. C_9: Una ecuación diferencial es exacta si $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. C_{10}: En las ecuaciones diferenciales separables se despejan las expresiones de x y de y.
E2	C_{11}: La derivada permite identificar la existencia de una ecuación diferencial C_{12}: La derivada y la integral son operaciones inversas. C_{13}: Una función es solución, cuando se deriva la solución y se sustituye la solución, comprobando que se cumpla la igualdad de la ecuación. C_{14}: La solución general es una expresión donde cualquier valor que se evalúe en la constante "c" va satisfacer la ecuación diferencial.
E3	C_{15}: La constante C de una solución general puede tomar un valor cualquiera de los reales. C_{16}: Por $x = 1$ pasa una curva de la familia de funciones de tipo logarítmica. C_{17}: Una ecuación diferencial exacta es de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. C_{18}: La representación de la derivada de una función me permite identificar una ecuación diferencial. C_{19}: Para resolver una ecuación diferencial separable se separan las expresiones de x e y y se integra ambos miembros. C_{20}: En las ecuaciones diferenciales separables se despejan las variables x y y. C_{21}: Una función es solución al comprobar que la solución satisfaga la ecuación, para esto se deriva la solución y se sustituye la solución.

		C_{22}: Una ecuación diferencial es una ecuación en donde las soluciones no son números reales, sino que las soluciones son funciones. C_{23}: El campo de direcciones es una representación en forma de vectores que se obtiene a partir de la derivada de cierta función.
E4		C_{24}: Para resolver una ecuación diferencial separable se separan las x de un lado y las y del otro, integrando ambos miembros. C_{25}: Una ecuación diferencial es la relación de una función con sus derivadas.

Fase 3. Buscar temas

De acuerdo con Braun y Clarke (2012) buscar temas es un proceso activo, donde se generan o se construyen temas. En este sentido, señalan que el conjunto de datos provee la base material para el análisis. Este proceso de construcción de temas y subtemas consiste en revisar los datos codificados y agrupar los códigos que comparten alguna similitud.

Para lograr esto se asignaron y ordenaron códigos relacionados entre sí y se establecieron familias de códigos (subtemas). Esto permitió agrupar aquellos códigos que tenían el mismo patrón de respuesta. Los subtemas construidos fueron asociados a un tipo de conexión matemática (temas). Cada subtema es un tipo de conexión matemática específica dentro de las ecuaciones diferenciales (construido a partir de los datos) y cada tema es un tipo de conexión matemática (proporcionada en el marco). Los códigos que no se relacionaron se consideraron conexiones matemáticas específicas de las ecuaciones diferenciales (subtemas) y fueron asociados a un tipo de conexión matemática (Tabla 4).

Tabla 4: Asociación de código, subtema y tema.

Código	Subtema	Tema
C_2 C_{19} C_{24}	Para encontrar la solución de una ecuación diferencial de variable separable se separan las variables y se integraa.	Procedimental
C_{13} C_{21}	Una función es solución de una EDO cuando ésta satisface a la ecuación diferencial.	Procedimental
C_3 C_{23}	El campo de direcciones de una ecuación diferencial se representa mediante la interpretación geométrica de la derivada.	Representaciones diferentes
C_4	El valor inicial de una EDO se representa por la expresión $p(0)$.	Representaciones diferentes

C_5	La representación verbal "En cinco años se ha alcanzado la cifra de 40000 habitantes" se puede representar algebraicamente por $p(5) = 40000$.	Representaciones diferentes
C_6 C_{22}	Una ecuación diferencial es una ecuación donde las soluciones son funciones.	Significado
C_{25}	Una ecuación diferencial es la relación de una función con sus derivadas	Significado
C_1	El campo direccional es una representación gráfica que permite observar el comportamiento que tiene la solución de la ecuación diferencial	Significado
C_7 C_{14}	La solución general es una familia de funciones que satisface una ecuación diferencial.	Significado
C_{11} C_{18}	La derivada es una componente de la ecuación diferencial	Característica
C_{10} C_{20}	Las ecuaciones diferenciales separables tienen la característica de separar las variables x y y.	Característica
C_{15}	La constante C de una solución general de una ecuación diferencial puede tomar un valor cualquiera de los reales.	Parte-Todo
C_{16}	Por $x = 1$ pasa una curva de la familia de funciones de tipo logarítmica.	Parte-Todo
C_{17}	Una ecuación diferencial exacta es de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.	Parte-Todo
C_8	Las ecuaciones diferenciales de variables separables tienen la forma $f(y)dy = f(x)dx$.	Parte-Todo
C_{12}	La derivada y la integral son operaciones inversas.	Reversibilidad
C_9	Una ecuación diferencial es exacta si $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial y}$.	Implicación

Fase 4. Revisión de los temas

Una vez que se tienen los posibles temas candidatos se comienza la fase 4. Esta fase implica un proceso recursivo donde los temas son revisados en relación con los datos codificados con el fin de que exista relación entre ellos (Braun & Clarke, 2012). Esto permite generar nuevos temas o subtemas que respondan de forma más significativa los datos relevantes (códigos) a la pregunta de investigación. También se puede dividir un tema en varios subtemas o más bien juntarlos de tal forma que respondan a un mismo patrón de respuesta. Teniendo presente que los datos de los temas deben ser coherentes entres si y además debe existir distinciones claras entre los temas.

En esta fase se realizan dos niveles de revisión (Braun & Clarke, 2016). En el nivel uno se revisan los datos codificados. Observando todos los códigos confeccionados para cada tema y prestando atención si forman un patrón coherente. Si se cumple esto se pasa al segundo nivel de esta fase. En la segunda fase se realiza un proceso similar, pero teniendo en cuenta todo el conjunto de datos. Primero se discute, si los temas son correctos en relación con el conjunto de datos y segundo se codifican cualquier dato adicional dentro de los temas que se hayan perdido en la fase de codificación. Por tanto, esta fase permite refinar los temas construidos.

Por ejemplo, el subtema "Una ecuación diferencial es una ecuación en donde las soluciones son funciones" se decidió asociarlo a la conexión de significado. Inicialmente, este subtema se había considerado como una conexión matemática del tipo característica; sin embargo, en las discusiones de trabajo se decidió hacer el cambio porque se consideró que este tema (conexión de significado) indica con mayor claridad el patrón de respuesta del estudiante, es decir el tema está asociado al sentido propio que el estudiante tiene de este concepto matemático.

Fase 5. Definición y nombre de temas

De acuerdo con Braun y Clarke (2012) para definir los temas es preciso establecer apropiadamente lo que es único y específico sobre cada tema. Los temas deberían tener un enfoque singular; pueden estar relacionados, pero sin ser repetitivos y deben responder a la pregunta de investigación (Braun & Clarke, 2012). Para esta investigación, se definió y se nombró cada tipo de conexión matemática identificada en los datos durante las sesiones de trabajo.

Fase 6. Elaboración del informe

Según Braun y Clarke (2006) mencionan esta fase inicia cuando hay un conjunto de temas totalmente definidos e involucra la redacción del informe. En este caso, el informe incluyó los subtemas definidos y agrupados en temas que contienen las conexiones matemáticas encontradas.

Capítulo 4

Resultados

En el capítulo anterior se expuso la metodología y se presentó el instrumento y el procedimiento para el análisis de los datos. En este capítulo se describen en detalle los resultados obtenidos en la investigación. En primer lugar, se exponen las conexiones matemáticas realizadas por los estudiantes. A continuación, se describe cada uno de los tipos de conexiones matemáticas y el capítulo finaliza con las conexiones matemáticas identificadas en los estudiantes.

4.1 Conexiones matemáticas realizadas por los estudiantes

Mediante el análisis temático se construyeron 17 subtemas y cada subtema fue asociado a un tipo de conexión matemática (temas) definida en el marco (Tabla 5). Éstas emergieron cuando los estudiantes resolvieron las tareas propuestas en la investigación, es decir, al comprobar si una expresión es solución particular o general de una EDO, al usar conocimientos matemáticos estudiados con anterioridad, al representar y/o interpretar el capo direccional asociado a una EDO y al interpretar la información indicada en términos algebraicos en un contexto de la vida real.

Tabla 5. Conexiones realizadas por los estudiantes

Temas	Subtemas	Frecuencia
Procedimental	1. Una función es solución de una EDO cuando ésta satisface a la ecuación diferencial.	2
	2. Para encontrar la solución de una ecuación diferencial de variable separable se separan las variables y se integra.	5
Representaciones diferentes	3. El campo de direcciones de una ecuación diferencial se representa mediante la interpretación geométrica de la derivada.	2
	4. El valor inicial de una EDO se representa por la expresión $p(0)$.	1
	5. La representación verbal “En cinco años se ha alcanzado la cifra de 40000 habitantes se puede representar algebraicamente por $p(5) = 40000$.	1

Característica	6. La derivada es una componente de la ecuación diferencial.	2
	7. Las ecuaciones diferenciales separables tienen la característica de separar las variables x y y.	2
Significado	8. Una ecuación diferencial es la relación de una función con sus derivadas.	1
	9. Una ecuación diferencial es una ecuación donde las soluciones son funciones.	2
	10. El campo direccional es una representación gráfica que permite observar el comportamiento que tiene la solución de la ecuación diferencial.	1
	11. La solución general es una familia de funciones que satisface una ecuación diferencial.	2
Parte-Todo	12. La constante C de una solución general de una ecuación diferencial puede tomar un valor cualquiera de los reales.	1
	13. Por $x = 1$ pasa una curva de la familia de funciones del tipo logarítmica.	1
	14. Una ecuación diferencial exacta es de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.	1
	15. Las ecuaciones diferenciales de variables separables tienen la forma $f(y)dy = f(x)dx$.	1
Reversibilidad	16. La derivada y la integrar son operaciones inversas.	1
Implicación	17. Una ecuación diferencial es exacta si $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.	1

4.1.1 Conexiones matemáticas de tipo procedimental

Los estudiantes E2 y E3 cuando resolvieron la T1, es decir, cuando justificaron que la familia de funciones $y = \frac{c}{x} + 2$ es una solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{(2-y)}{x}$, argumentaron que es necesario comprobar que la función satisface la ecuación diferencial haciendo uso de reglas matemáticas. En este sentido se identificó la conexión matemática de tipo procedimental cuando los estudiantes guiados por su noción del concepto de solución de una ecuación diferencial: 1) encuentran la derivada de la solución, 2) sustituyen la solución en la ecuación diferencial y 3) realizan los cálculos necesarios. Obteniendo las dos expresiones iguales (ver extracto de los estudiantes E2 y E3 y las figuras correspondientes a éstos).

I: ¿Cómo procediste…?

E2: […] lo que hice fue verificar, pero aquí (señala la tarea 1, inciso b) como tiene que comprobar la igualdad es muy pues fácil derivar y y aquí (señala $y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{c}{x}\right)$) lo que hice derivar, derivar la función esta cosa (señala $y = \frac{c}{x} + 2$) la derivamos, la derivada de 2, una constante siempre va ser cero hacemos esto $\left(\frac{c}{x}\right)$ que es esto ($y' = -\frac{c}{x^2}$) verificamos la igualdad $\left(\frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{x}\right)$ sustituimos $\left(-\frac{c}{x^2} = \frac{2-\left(\frac{c}{x}+2\right)}{x}\right)$, sustituí la derivada ($y' = -\frac{c}{x^2}$) que la puse aquí (señala el miembro izquierdo de $\frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{x}$), aquí igual a la función sustituyendo y (señala donde sustituyo $y = \frac{c}{x} + 2$), reducimos (señala $\frac{2-\left(\frac{c}{x}+2\right)}{x}$) esto es fácil 2 menos esa cosa $\left(\frac{c}{x} + 2\right)$ se va con esto … ya no más queda esto (señala $\frac{\frac{c}{x}}{x}$), […] verificamos que sí (señala la igualdad obtenida $-\frac{c}{x^2} = -\frac{c}{x^2}$)

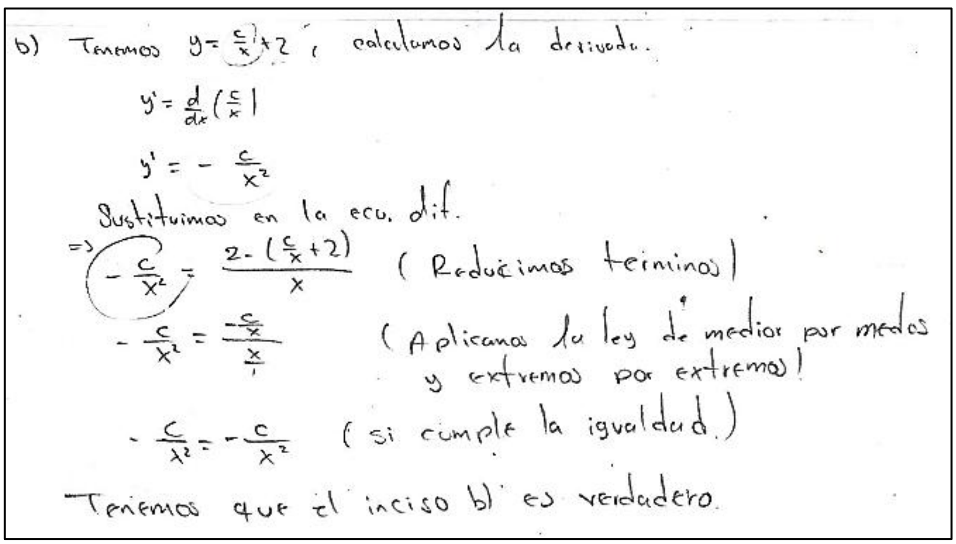


Figura 1. Procedimientos hechos por E2 para resolver la tarea 1.

I: Si preguntara, ¿esta función (señala $y = \frac{c}{x} + 2$) es solución de la ecuación EDO? ¿Qué harías?

E3: Pues, solo debe satisfacer la ecuación.

I: ¿Explícame lo que me dijiste?

E3: Tengo la función ($y = \frac{c}{x} - 2$), la derivo respecto a x, obtengo la derivada.

I: ¿La derivada a que es igual?

E3: Es esta ($y' = -\frac{c}{x^2}$) menos c sobre x cuadrada.

I: ¿Y la ecuación?

E3: La ecuación es 2 menos y sobre x $\left(\frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{x}\right)$.

I: Entonces para que satisfaga que debe pasar.

E3: Sustituimos el valor de y $\left(y = \frac{c}{x} - 2\right)$ acá (señala $\frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{x}$) pues es lo mismo que llegamos acá (señala $y' = -\frac{c}{x^2}$).

I: Será cierto eso.

E3: Sí es cierto

I: ¿A ver?

E3: (realiza el procedimiento)

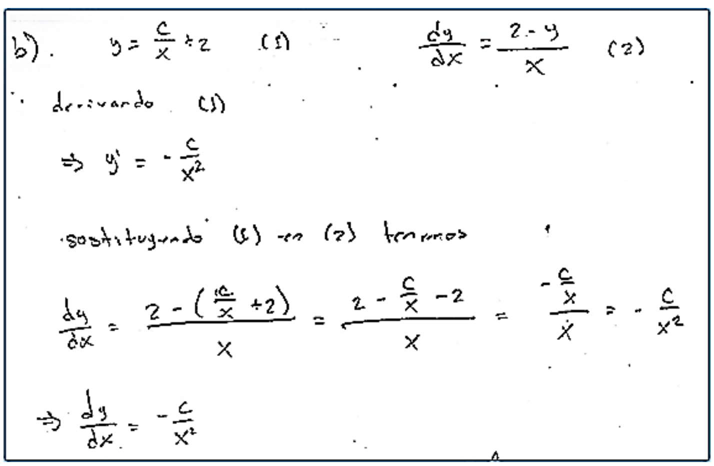


Figura 2. Procedimientos hechos por E3 para resolver la tarea 1.

Este procedimiento corresponde al subtema “una función es solución de una EDO cuando ésta satisface la ecuación diferencial”.

Por otro lado, los estudiantes E1, E3 y E4 al resolver una ecuación diferencial de variable separable indicaron que para encontrar la solución es necesario, separar las variables e integrar, esto corresponde al subtema “para encontrar la solución de una ecuación diferencial de variable separable se separan las variables y se integra” (ver extracto de E1, E3, E4 y las figuras correspondientes a estos).

I: ¿Cómo llegas a esta forma (señala $f(y)dy = f(x)dx$)?

E1: Despejando

I: ¿Cómo sigue…?

E1: Nos queda esto (señala $\frac{1}{2-y}dy = \frac{1}{x}dx$) y lo único que hay que hacer es integrar los dos (señala $\int \frac{1}{2-y}dy = \int \frac{1}{x}dx$)

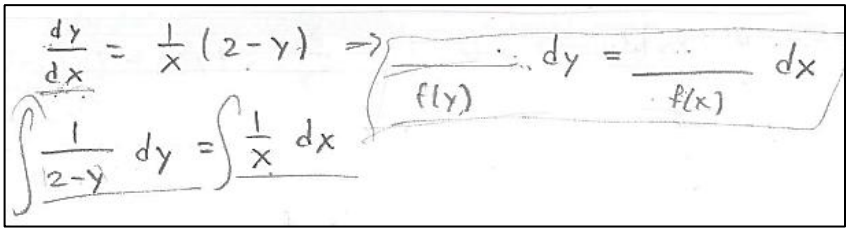


Figura 3. Procedimientos hechos por E1 para resolver la EDO de la T1.

I: ¿Cómo resolverías la ecuación diferencial (señala la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{x}$)?

E3: (el estudiante resuelve la ecuación diferencial)

I: ¿Cómo prosigue?

E3: Lo único que sigue es integrar.

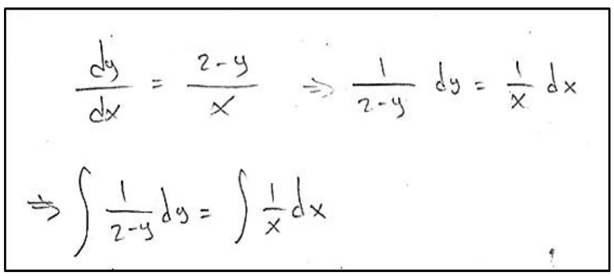


Figura 4. Procedimientos hechos por E3 para resolver la EDO de la T1

I: aquí ($y'(x) = \frac{1}{x}$) la ecuación es derivada de y igual a uno sobre x si quieres encontrar la solución ¿qué debes encontrar?

E4: el valor de y

I: y para hallar y, ¿qué te haría falta?

E4: separar, un lado las x y a un lado las y

I: ¿por qué separarías?

E4: para poder tener aquí el diferencial de y (señala el miembro izquierdo de la ecuación $dy = \frac{1}{x}dx$) y de este lado a uno sobre x diferencial de x

I: y haces lo que hiciste anteriormente (integrar ($\int dy = \int \frac{1}{x}dx$))

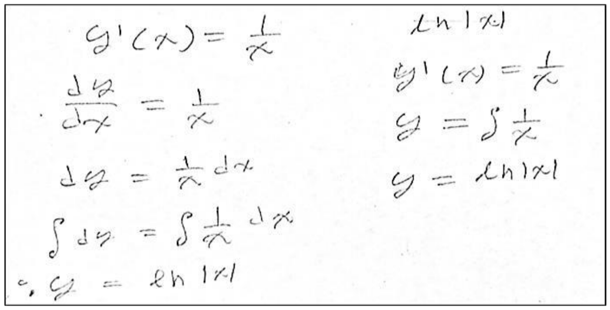


Figura 5. Procedimientos hechos por E4 para resolver la EDO de la T2.

Este subtema también se pudo observar cuando el estudiante E1 resolvió las ecuaciones diferenciales de las tareas T2 y T3 respectivamente (ver Figura 6 y Figura 7).

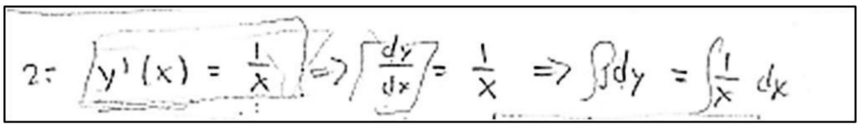


Figura 6. Procedimientos hechos por E1 para resolver la EDO de la T2.

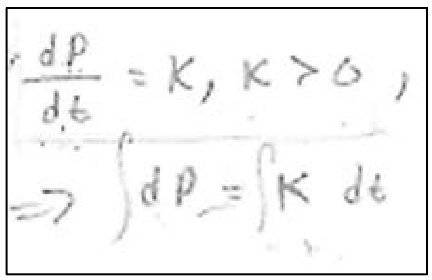


Figura 7. Procedimientos hechos por E1 para resolver la EDO de la T3.

La conexión matemática de tipo procedimental se identificó en los cuatro participantes que intervinieron en la investigación. Los estudiantes en general utilizaron diferentes métodos para resolver las tareas establecidas esto permitió identificar este tipo de conexión matemática.

4.1.2 Conexiones matemáticas de tipo característica

Se encontró que los estudiantes E2 y E3 realizaron conexiones de tipo característica al reconocer cualidades de las ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, reconocieron que al incluir la notación simbólica que representa a la derivada de y con respecto de x en una ecuación, indica que la ecuación es una ecuación diferencial (ver extracto de E2 y E3).

I: ¿Cómo te das cuenta de que es una ecuación diferencial (señala $\frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{x}$)?

E2: Por esto (señala la expresión $\frac{dy}{dx}$) la notación.

I: ¿Qué es eso?

E2: La notación.

I: Pero ¿qué significa?

E2: La derivada de y respecto a x.

I: ¿Existe algo qué te diga que es una ecuación diferencial? Por ejemplo, esta (señala $\frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{x}$).

E3: El primer miembro de esta parte (señala, $\frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{x}$).

I: ¿Qué tiene esa parte?

E3: Es la…para mi representa la derivada de una función.

Esta cualidad corresponde al subtema construido “la derivada es una componente de la ecuación diferencial”.

Mientras el segundo subtema correspondiente a este tipo de conexión matemática está relacionado con la forma de las ecuaciones diferenciales “las ecuaciones diferenciales separables tienen la característica de separar las variables x y y”. Por ejemplo, el estudiante E3 al referirse a las ecuaciones diferenciales separables reconoció que puede escribir la ecuación separando las variables cada una en cada miembro (ver extracto de E3).

I: Las ecuaciones diferenciales que se resuelven mediante este procedimiento $\frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{x} \rightarrow \frac{dy}{2-y} = \frac{dx}{x} \rightarrow \int \frac{dy}{2-y} = \int \frac{dx}{x}$ tienen algún tipo de nombre.

E3: Sí, ecuaciones diferenciales separables.

I: ¿Por qué separables?

E3: Lo que entendí, son fácil de despejar ambas variables porque para otras no puedes despejar, de hecho, en algunas no se pueden despejar las variables, se recurre a otros métodos.

Mientras que el estudiante E1 reconoce que cuando está en presencia de una ecuación diferencial separable se deben separar las expresiones de x y de y, multiplicadas por el diferencial correspondiente a cada variable. (ver extracto de E1).

I: ¿Me puedes explicar? (señala la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}(2 - x)$

E1: … se tiene que despejar y de un lado va a quedar una expresión que es una función de variables y multiplicada por el diferencial dy y aqui una expresión multiplicada por el diferencial dx aquí la expresión depende de x (señala, $f(y)dy = f(x)dx$).

I: ¿Este tipo de ecuación la conoces por algún nombre?

E1: creo que sí … variables separables.

La conexión matemática de tipo característica se identificó en los estudiantes E1, E2 y E3. Estos estudiantes en general reconocieron elementos o características propias de los conceptos ecuaciones diferenciales o ecuación diferencial separable. Mientras que el estudiante E4 presento dificultad para realizar este tipo de conexión matemática, dado que no logro identificar cualidades que le permitieran identificar un concepto. Por ejemplo, él reconoce que un método de solución de una ecuación diferencial es separar las expresiones de x y las de y con sus correspondientes diferenciales e integral ambos miembros, pero no reconoce que tipo de ecuación diferencial utiliza este procedimiento.

4.1.3 Conexiones matemáticas de tipo representaciones diferentes

Como se indicó en la Tabla 1, se identificó la conexión de representaciones debido a que se observó el tránsito entre diferentes registros de representación. Por ejemplo, en el subtema "el campo de direcciones de una ecuación diferencial se representa mediante la interpretación geométrica de la derivada", los estudiantes E1 y E3 lograron transitar entre la expresión analítica de una ecuación diferencial y la representación gráfica del campo direccional asociado a la ecuación diferencial al resolver la T2. En particular el estudiante E3, para representar el campo direccional realiza representaciones algebraicas de la ecuación de una recta (para los puntos (1,1); (2,1)) reconociendo que al evaluar el punto en la derivada el valor obtenido es la pendiente de la recta en dicho punto. Las rectas las representa en una gráfica, resaltando vectores pequeños en la recta que pasan por los puntos indicados anteriormente, obteniendo una representación gráfica inicial del campo de direcciones asociado a la ecuación diferencial $y'(x) = \frac{1}{x}$ (ver extracto de E3 y Figura 8).

I: ¿Qué es un campo direccional?

E3: Mi idea es que, digamos es una representación […] en forma de vectores.

I: ¿Esos vectores como los obtienes?

E3: Si es relacionado al problema se deben de obtener a partir de... esos vectores deben tener una pendiente, esa pendiente se tiene que obtener a partir de la derivada de cierta función.

I: ¿Cómo es este caso (señala $y'(x) = \frac{1}{x}$)?

E3: Para obtener el campo direccional por ejemplo tenemos la ecuación diferencial que es esta (señala $y'(x) = \frac{1}{x}$) entonces podemos sacar las rectas tangentes digamos, tomamos un punto, el punto p de coordenadas uno coma uno y en la derivada (señala $y'(x) = \frac{1}{x}$) solo tenemos el valor de x entonces sustituimos el valor de la primera coordenada que sería uno en la derivada, entonces tenemos uno sobre uno es igual a uno.

I: ¿Ese uno que es?

E3: Ese uno es la pendiente que tendrá la recta que pasa por dicho punto entonces nosotros como ya tenemos el punto utilizamos esta ecuación de la recta (señala $y - y_1 = m(x - x_1)$).

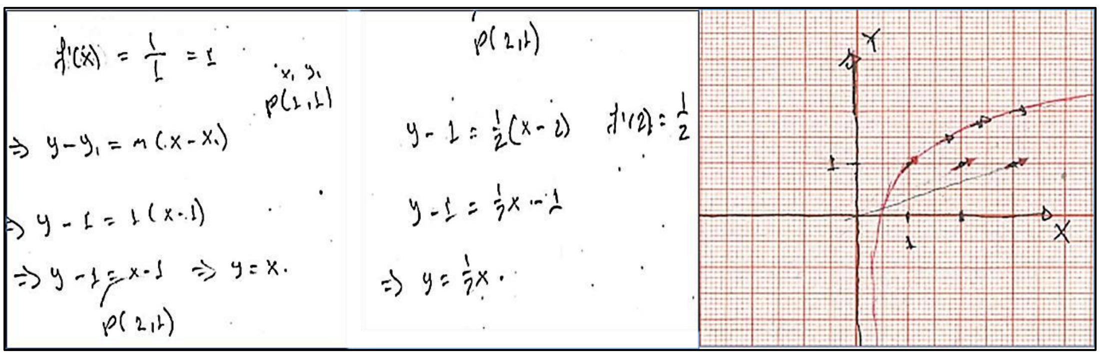


Figura 8. Representación algebraica y gráfica de E3.

La conexión matemática de representación también se identificó por parte del subtema “el campo de direcciones asociado a una ecuación diferencial”, cuando el estudiante E1 hizo una representación tabular con puntos que obtiene de la expresión de la derivada $\left(y'(x) = \frac{1}{x}\right)$ y al mismo tiempo reconoció que la derivada es la pendiente de la recta tangente en un punto. Con esta información, va obteniendo pendientes que le permiten representar gráficamente el campo direccional asociado a la ecuación diferencial $y'(x) = \frac{1}{x}$ deduciendo el comportamiento de las pendientes en otros puntos (ver extracto de E1 y Figura 9).

I: ¿Cómo se construye el campo direccional?

E1: Con esta (señala $y'(x) = \frac{1}{x}$) que sería la derivada

I: ¿Cómo lo haces?

E1: Como sabemos que gráficamente la derivada viene siendo la pendiente de la recta tangente en un punto, pues básicamente se le da valores a esta expresión (señala $y'(x) = \frac{1}{x}$) y ya básicamente con los valores.

I: ¿Qué vas obteniendo?

E1: La pendiente de la recta tangente es ese punto.

I: Y eso fue lo que tu obtuviste (señala la representación gráfica)

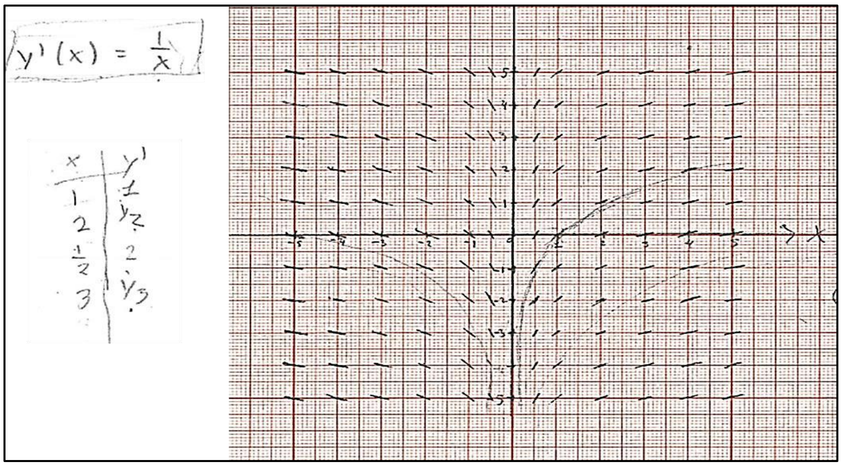


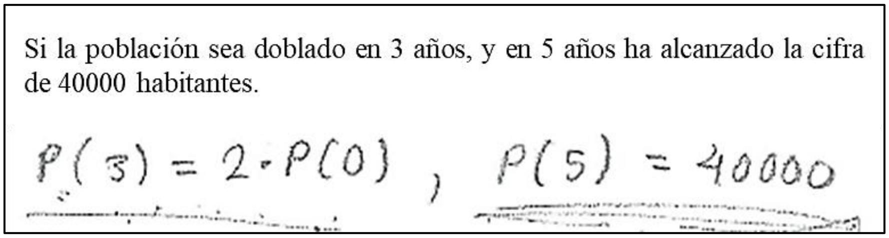
Figura 9. Representación tabular y gráfica de E1.

Además, se construyeron los subtemas "el valor inicial de una EDO se representa por la expresión $p(0)$" y "la representación verbal "en cinco años se ha alcanzado la cifra de 40000 habitantes" se puede representar por $p(5) = 40000$" para el tipo de conexión de representaciones. Esto fue permitido, dado que el estudiante E1 al resolver el problema de la Tarea 3 fue capaz de representar algebraicamente situaciones del problema, por ejemplo, reconoce que el valor inicial de la población lo puede representar por una función p evaluada en cero ($p(0)$). Al mismo tiempo reconoce que si la población en 5 años ha alcanzado la cifra de 40000 entonces esto se puede representar por una función p evaluada en 5 igual a 40000 ($p(5) = 40000$) la cual es una representación algebraica (ver extracto de E1 y Figura 10).

I: Explícame tu procedimiento.

E1: Queremos encontrar primero la función original que depende del tiempo y la función original es p así que p evaluada en tres sería el doble que p evaluada en cero que sería el valor inicial y aquí está la expresión que dice que se ha doblado en tres años (señala

$p(3) = 2p(0)$) y así mismo en cinco años se ha alcanzado la cifra de 40000 habitantes o sea que p evaluado en 5 son igual a 40000 ($p(5) = 40000$) […].


Si la población sea doblado en 3 años, y en 5 años ha alcanzado la cifra de 40000 habitantes.

$P(3) = 2 \cdot P(0)$, $P(5) = 40000$

Figura 10. Representación algebraica de E1.

La conexión matemática de representaciones diferente se identificó en los estudiantes E1 y E3 en específico utilizaron representaciones alternativas (algebraico-gráfico y verbal-algebraico). Mientras que los estudiantes E2 y E4 presentaron dificultad para realizar este tipo de conexión matemática. Por ejemplo, el estudiante E2 trabajo en el registro algebraico para resolver las ecuaciones diferenciales, pero cuando se le solicitó obtener el campo direccional correspondiente a la ecuación diferencial $y'(x) = \frac{1}{2}$ argumento que no recordaba el concepto. Por otra parte, cuando va a resolver la Tarea 3 no logra escribir algebraicamente las condiciones del problema para poder resolver la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = K$. El estudiante E4 de igual forma presentó la misma dificultad, pero en este caso reconoce que es un campo de direcciones, pero no logra representarlo debido a que no relaciona la derivada con el campo de dirección.

4.1.4 Conexiones matemáticas de tipo significado

Se identificó la conexión de tipo significado debido a que los estudiantes después que resolvieron las tareas se les preguntó durante la entrevista qué entendían por ecuaciones diferenciales, solución general, campo direccional. Los estudiantes en sus respuestas atribuyeron un sentido a cada uno de estos conceptos matemáticos. Ejemplo, para el subtema "una ecuación diferencial es la relación de una función con sus derivadas", se identificó la conexión matemática de significado ya que el estudiante E4 al preguntarle qué es una ecuación diferencial indicó que ésta es la relación de una función con sus derivadas (ver extracto de E4) dándole un sentido al concepto, en este caso lo que para él es una ecuación diferencial.

I: ¿Qué es una ecuación diferencial?

E4: Es la relación de una función con sus derivadas.

En este mismo sentido se construyó el subtema "una ecuación diferencial es una ecuación en donde las soluciones son funciones". Dado que los estudiantes E1 y E3 respondieron que una ecuación diferencial es una ecuación en donde las soluciones funciones (ver extracto de E1 y E3).

I: ¿Qué es una ecuación diferencial?

E1: Una ecuación en la que en lugar de una variable incógnita en ese caso es una función incógnita...

I: ¿Qué es una ecuación diferencial?

E3: Una ecuación diferencial, es una ecuación en donde las soluciones no son números reales, sino que las soluciones son funciones.

Por otra parte, se construyeron los subtemas "el campo direccional es una representación gráfica que permite observar el comportamiento que tiene la solución de la ecuación diferencial" y "la solución general es un conjunto de funciones que satisface una ecuación diferencial". Estos fueron permitidos ya que el estudiante E1 al resolver las tareas se le preguntó qué es un campo direccional e indicó que el campo direccional permite observar el comportamiento que tiene la solución de la ecuación diferencial (ver extracto de E1). De esta misma forma se le preguntó sobre qué es una solución general y respondió que es un conjunto de funciones que satisface una ecuación diferencial (ver extracto de E1). En estos dos casos el estudiante les da sentido a ambos conceptos reconociendo aspectos que hacen a estos conceptos diferentes de otros.

I: ¿Qué es un campo direccional?

E1: Vimos en clase que era una guía u orientación para poder observar o darnos cuenta del comportamiento que tiene la solución de la ecuación diferencial.

I: ¿La solución general es una función única?

E1: Es un conjunto de funciones que satisface esta (señala $y' = \frac{1}{x}$) ecuación diferencial.

También se identificó este tipo conexión matemática en el estudiante E2. Por ejemplo, para el estudiante la solución general es una expresión donde cualquier valor que se evalúe en la constante "c" va satisfacer la ecuación diferencial (ver extracto de E2).

I: ¿Qué es una solución general?

E2: (Señala la solución $y = \frac{c}{x} + 2$) cualquier constante que se le ponga va a satisfacer la ecuación diferencial, se le puede poner 5, 3, 20, 200 cualquiera sigue satisfaciendo la ecuación diferencial.

La conexión matemática de tipo significado se identificó en los cuatro estudiantes que participaron en la investigación. En general los estudiantes atribuyeron un sentido a los conceptos ecuación diferencial, campo dirección y solución general de una ecuación diferencial permitiendo reconocer las definiciones que han construido los estudiantes para estos conceptos.

4.1.5 Conexiones matemáticas del tipo parte-todo

Como se indicó en la Tabla 1, se identificó la conexión matemática del tipo parte-todo, esto fue posible teniendo en cuenta que los estudiantes E1 y E3 establecieron relaciones lógicas entre conceptos matemáticos ya sea de generalización o inclusión. Por ejemplo, en el subtema “la constante C de una solución general de una ecuación diferencial puede tomar un valor cualquiera de los reales” el estudiante E3 reconoció que la solución general es una familia de funciones que genera funciones particulares de acuerdo con el valor que toma la constante C, un valor cualquiera de los reales, (ver extracto de E3).

I: ¿Qué es una solución general?

E3: Es una familia de funciones porque a C le podemos dar un valor cualquiera de los reales por ejemplo le podemos dar el valor de uno y se genera una función, le damos otro valor y es otra función.

La conexión matemática de parte-todo también se identificó como parte del subtema “una ecuación diferencial exacta es de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$)”, dado que el estudiante E3 al referirse a la ecuación diferencial $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$ logra escribir la forma general de una ecuación diferencial exacta (ver extracto de E3 y Figura 11).

I: ¿Cómo pensaste el inciso a) de la Tarea 1?

E3: Esta ecuación diferencial es exacta.

I: ¿Por qué?

E3: Este… bueno más que nada no me aprendí la definición, pero la identifico por esta primera parte (señala $M(x,y)dx$)….

I: Si quieres escribe aquí abajo para que tengas espacio.

E3: Una ecuación diferencia exacta es de la forma (señala $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$).

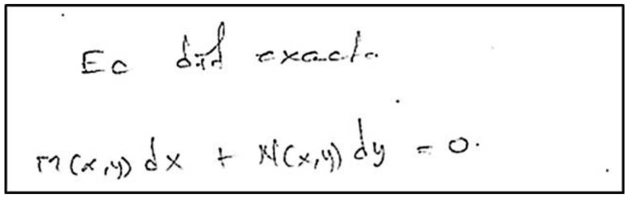


Figura 11. Forma general de la ecuación diferencial exacta hecha por E3.

En este mismo sentido, el subtema "las ecuaciones diferenciales de variables separables tienen la forma $f(y)dy = f(x)dx$", se identificó una conexión de tipo parte-todo cuando el estudiante E1 indicó que en la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(2-y)$ se tiene que despejar las expresiones que dependen de x e y (una en cada miembro de la ecuación) y cada expresión debe estar multiplicada por el diferencial correspondiente a las variables indicadas, logrando describir la forma general de una ecuación diferencial separable en la forma $f(y)dy = g(x)dx$ (ver extracto de E1 y Figura 12).

I: ¿Me puedes explicar?

E1: Me explicaron en clase que aquí (señala $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(2-y)$) se tiene que despejar y, de un lado iban a quedar una expresión que fuera una función de variables y y que va ser multiplicada por el diferencial dy y aquí (miembro derecho de la ecuación) una expresión que iba ser multiplicada por el diferencial dx aquí la expresión depende de x

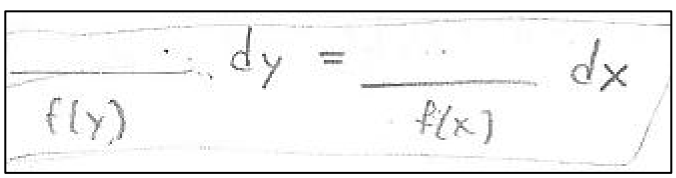


Figura 12. Forma general de una ecuación diferencial separable hecha por E1.

Por último, en el subtema "por $x = 1$ pasa una curva de la familia de funciones del tipo logarítmica", en este caso el estudiante E1 al referirse a la representación de una solución correspondiente a $x = 1$ de acuerdo con la Tarea 2. Reconoció que la solución de una ecuación diferencial es una familia de funciones, pero al representar una solución que pase por el punto indicado (ejemplo por $(1,1)$) solo pasa una curva de la familia de funciones (ver extracto de E3 y Figura 13).

I: Acá dice (señala tarea 2), traza el campo de direcciones asociado a esta ecuación y una solución correspondiente a $x = 1$. ¿Cuál sería una solución correspondiente a $x = 1$?

E3: Es donde debería pasar una curva de la familia de funciones

I: ¿Cómo debería ser?

E3: Creo que debe ser así, algo así (grafica una función que pasa por el punto (1,1))

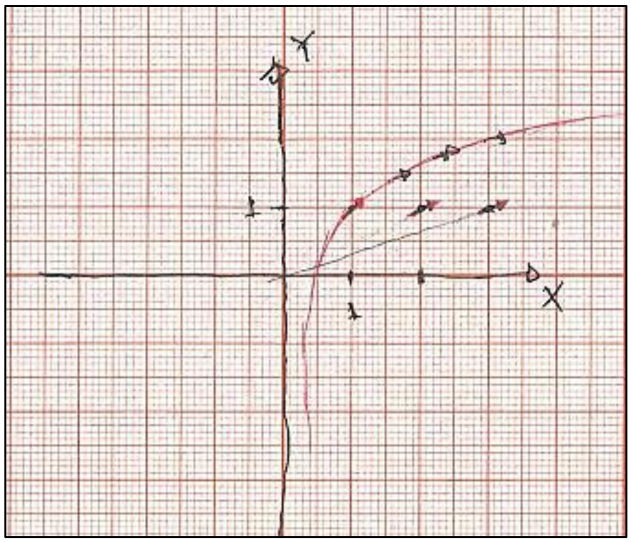


Figura 13. Representación de una curva de la familia de funciones por E3.

La conexión matemática de tipo parte-todo se identificó en los estudiantes E1 y E3. Mientras que los estudiantes E2 y E4 presentaron dificultad para realizar este tipo de conexión matemática. Por ejemplo, el estudiante E4 reconoce que es una ecuación diferencial y logra resolver una ecuación diferencial separable. Pero no es capaz de generalizar un tipo de ecuación diferencial e identificar elementos incluidos en las ecuaciones diferenciales que le permitan encontrar particularidades de éstas. Mientras que el estudiante E2, igualmente es capaz de reconocer las ecuaciones diferenciales de tipo separable pero no logra generalizar este tipo de ecuación.

4.1.6 Conexión matemática de tipo reversibilidad

La conexión matemática de reversibilidad se identificó en el estudiante E2 teniendo en cuenta que logra partir de la derivada $y'(x)$ para llegar al valor de $y(x)$ reconociendo que la integral es la operación inversa de la derivada. Específicamente el estudiante E2 no hace uso de un método para resolver la ecuación diferencial $y(x)' = \frac{1}{x}$, E2 reconoció que tiene la derivada de una función ($y(x)' = \frac{1}{x}$) y para obtener la función ($y(x)$) solo debe integrar dado que la integral es la operación inversa de la derivada (ver extracto de E2 y Figura 14). Esto hace alusión al subtema: “la derivada y la integral son operaciones inversas”.

I: ¿En la tarea 2 explícame que hiciste?

E2: Quería encontrar primero y, integramos esta cosa (señala $y'(x)$) y prima, integral de y prima respecto de x va a ser igual (señala $\int y'(x)dx = \int \frac{1}{x}dx$)

I: ¿Por qué integras?

E2: Quiero calcular primero qué es y.

I: ¿Por qué para calcular y necesitas integral?

E2: Porque y prima es la derivada respecto a x, es una primitiva.

I: ¿Entonces?

E2: Para calcular y necesitamos una integración que es lo contrario de la derivación, una antiderivada que es la integración

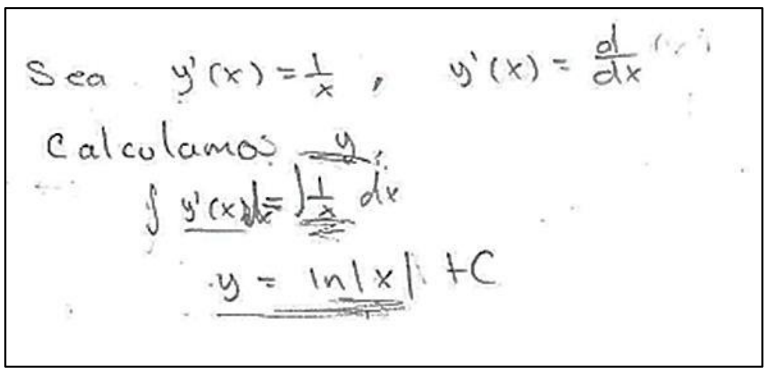


Figura 14. Cálculos hechos por E2 para resolver la EDO de la T2.

En general esta conexión matemática se identificó en el estudiante E2. Mientras que los estudiantes E1, E3 y E4 no pudieron realizar este tipo de conexión. Dentro los elementos que no permitieron a los estudiantes realizar este tipo de conexión se presenta el uso frecuente de métodos para resolver las ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, los estudiantes al resolver la ecuación diferencial $y(x)' = \frac{1}{x}$, utilizan el procedimiento correspondiente para resolver una ecuación diferencial separable y no identifican que están en presencia del resultado de una derivada y que la ecuación se puede resolver de forma intuitiva determinando la primitiva de $\frac{1}{x}$. Es importante resaltar que los estudiantes reconocen que la integral es la operación inversa de la derivada, pero no lo utilizan para resolver este tipo de ecuación diferencial observándose una desconexión entre el cálculo diferencial y las ecuaciones diferenciales.

4.1.7 Conexión de tipo implicación

La conexión matemática de implicación se identificó considerando que se evidenció la relación *si se cumple A entonces ocurre B (A implica B)*. Por ejemplo, el estudiante E1 argumenta que una ecuación diferencial es exacta si la derivada parcial de $x^2 + y^2$ con respecto a y es igual a la derivada parcial de $2xy$ con respecto a x. (ver extracto de E1 y Figura 15).

En el subtema "una ecuación diferencial es exacta si $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$", se identificó la conexión de tipo implicación, considerando que se evidenció la relación

> I: ¿Cómo procediste?
>
> E1: [...] ubiqué que la forma que tenía ($(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$) la ecuación diferencial tendría la forma de una ecuación diferencial exacta ya solo ahora es cuestión de comprobarlo bajo esta propiedad ($\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y} = \frac{\partial(2xy)}{\partial x}$)

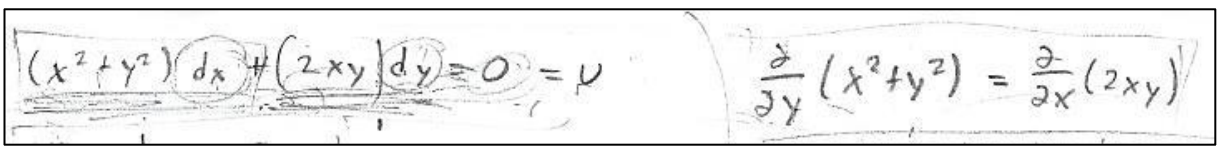


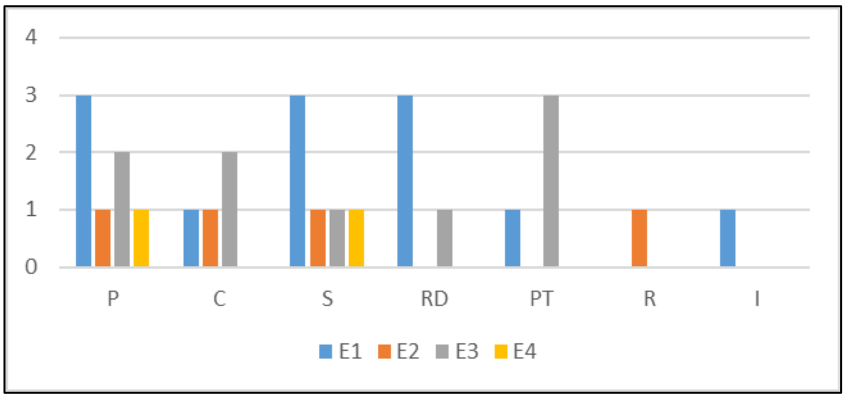
Figura 15. Condición que se debe cumplir según E1 para que la ecuación diferencial sea exacta.

> I: ¿Qué significa eso?
>
> E1: Me explicaron en clase que si la derivada de esto (señala, $x^2 + y^2$) con respecto a y tendría que ser igual a la derivada de esto (señala, $2xy$) con respecto a x
>
> I: ¿Y si se cumple?
>
> E1: Si se cumple, entonces es una ecuación diferencial exacta

La conexión matemática de implicación se identificó en el estudiante E1, Mientras que los estudiantes E2, E3 y E4 no logran realizar este tipo de conexión matemática. Esto es debido al uso incorrecto de teoremas ("Existencia de solución única" y "Criterio para diferencial exacta"). Por ejemplo, los estudiantes cuando van a determinar si una ecuación diferencial es exacta utilizan incorrectamente la condición $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, como intercambiar las derivadas parciales ("E3") o no reconocen que deben utilizar la condición ("E2 y E4"). De igual forma cuando analizan si una solución es general no reconocen que $f(x, y)$ y $\frac{f(x,y)}{\partial y}$ deben ser continua.

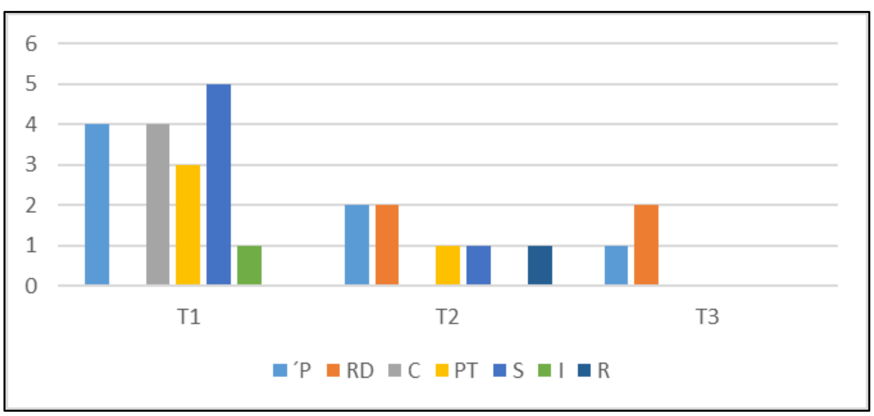
4.2 Conexiones matemáticas identificadas

En general se identificaron 27 conexiones matemáticas de las cuales 7 fueron conexiones de tipo procedimental, 4 de tipo representaciones diferentes, 6 de tipo significado, 4 de tipo parte-todo, 4 de tipo característica, 1 de tipo de reversibilidad, 1 de tipo implicación. Las conexiones de tipo procedimental y significado se identificaron en los cuatro estudiantes. Mientras que la conexión de tipo implicación es identificada en el estudiante E1 y la de tipo reversibilidad en el estudiante E2 solamente (ver gráfica 1).



Gráfica 1. Conexiones matemáticas realizadas por los estudiantes.

Las conexiones matemáticas de acuerdo con las tareas, se observó que en la T3 solo se identificaron las conexiones matemáticas de tipo procedimental y de representaciones diferentes. Mientras en la T1 resalta la conexión de implicación y en la T2 la conexión de reversibilidad (ver grafica 2).



Gráfica 2. Conexiones matemáticas identificadas en las Tareas.

Capítulo 5

Discusión y conclusión

El presente trabajo persiguió el objetivo de identificar las conexiones matemáticas que realizan los estudiantes universitarios al resolver tareas que involucran a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden. En relación con este objetivo se planteó la pregunta de investigación: ¿Qué conexiones matemáticas realizan los estudiantes universitarios al resolver tareas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden?

En el capítulo 4 se presentaron los resultados y se establecieron, de manera general, las conclusiones de la investigación. El objetivo de este capítulo es sintetizar esos resultados y reflexionar sobre ellos y también sobre el marco conceptual y la metodología utilizadas en la investigación. En la última sección se exponen algunas consideraciones en torno a la continuación de la línea de investigación.

Para determinar una respuesta a la pregunta de investigación sobre qué conexiones matemáticas realizan los estudiantes universitarios al resolver tareas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden, se utilizaron principalmente las tipologías de conexiones matemáticas de García (2018) y se tuvieron presente las tipologías de Evitts (2004), Businskas (2008) y Eli et al. (2011) para la identificación de nuevas conexiones de los estudiantes. Además de la acepción de conexión matemática de García-García y Dolores-Flores (2018). Estos elementos se conectaron para conformar la parte del marco conceptual de esta investigación.

Se optó por la Entrevista Basada en Tareas para recolectar datos, dado que este método nos dio la posibilidad de recoger datos a partir de las producciones escritas, de los argumentos orales y gestos de los estudiantes permitiendo indagar cognitivamente en ellos. Mientras que el análisis temático nos permitió analizar los datos obtenidos. Asociando las conexiones matemáticas realizadas por los estudiantes al resolver las tareas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (subtemas) con las tipologías de conexiones matemáticas definidas en el marco conceptual (temas).

Los resultados revelaron las conexiones matemáticas de tipo procedimental, significado, representaciones diferentes, característica, parte-todo, reversibilidad e implicación, previstos en el marco conceptual como esperábamos en el marco.

5.1 Las conexiones matemáticas en las tareas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden

Las conexiones matemáticas identificadas (*procedimental, característica, significado, representaciones diferentes, parte todo y reversibilidad*) en los participantes son consistentes con las que han sido reportadas por García-García y Dolores-Flores (2018, 2019, 2020) y García-García, Rivera-López y Dolores-Flores (2018) quienes exploraron las conexiones matemáticas establecidas por estudiantes de preuniversitario al resolver tareas asociadas a la derivada y la integral y el uso de la tasa de cambio. Estas mismas en gran medida también han sido utilizadas por profesores de matemáticas como se informó en Evitts (2004), Businskas (2008) y Eli et al. (2011, 2013).

La conexión matemática de implicación ha sido utilizada por profesores en servicio como se informó por Businskas (2008). Sin embargo, con esta investigación se amplía su uso en estudiantes universitarios, puesto que emergió a partir de las producciones del estudiante E1, cuando utilizó el teorema: *Criterio para una ecuación diferencial exacta*, consistentemente para determinar si la ecuación diferencial $(x^2 + y^2)dx + 2xy\, dy = 0$ es exacta. Mientras los demás participantes lo utilizaron incorrectamente, esto es consecuente con Raychaudhuri (2007) que plantea que los estudiantes suelen hacer uso incorrecto de los teoremas por lo cual no lograron realizar la conexión de implicación.

Por otra parte, los resultados mostraron que las conexiones matemáticas de tipo procedimental y significado fueron realizadas por los cuatro participantes. La procedimental se debe a que predomina en el estudiante el uso de fórmulas y reglas para resolver las ecuaciones diferenciales en específico en el registro algebraico. Por ejemplo, cuando determinaron la solución de una ecuación diferencial separable reconocieron que se debe separar las expresiones de x y y e integral. Se considera que este resultado es consistente con Camacho, Guerrero y Mejia (2010) quienes plantearon que los estudiantes de forma general dominan procedimientos algebraicos para resolver una EDO. Mientras la conexión matemática de tipo significado se debió al sentido propio que les dieron los estudiantes a diferentes conceptos (ecuación diferencial, solución general, campo direccional). Se cree que esto es producto de la explicación y el uso que se le dio a estos conceptos durante el curso de ecuaciones diferenciales I (Gómez, 2005; Pecharromán, 2013)

Las conexiones matemáticas de tipo representaciones diferentes identificadas son consistentes con los resultados de Mhlolo et al. (2012). Nuestros resultados mostraron que solo los estudiantes E1 y E3 realizan esta conexión. Por ejemplo, en T2 estos estudiantes representaron el campo direccional asociado a la ecuación diferencial dada, haciendo uso de la interpretación geométrica de la derivada. Mientras los estudiantes E2 y E4 no son capaces de relacionar este concepto para lograr la representación del campo de direcciones. Además, en las demás tareas se identificaron dificultades en el uso de esta conexión. Por ejemplo, en T3 (contexto de solución de problema), solo el estudiante E1 logró establecerla (transitó entre el enunciado escrito de T3 y la representación algebraica a través de ecuaciones). Se considera que este resultado es consistente con Rowland & Jovanoski (2004) y Arslan (2010) quienes platearon que los estudiantes al resolver tareas de ecuaciones diferenciales presentan dificultades interpretativas al resolver problemas y para relacionar diferentes conceptos.

Mientras, la conexión matemática de tipo característica emergió cuando los estudiantes identificaron el símbolo de la derivada como una componente de la ecuación diferencial y que las ecuaciones diferenciales separables durante su resolución las variables x y y se separan. Esto último es consistente con lo reportado por García-García y Dolores Flores (2020) quienes indicaron que esta conexión puede aparecer una vez que los estudiantes hacen una conexión matemática de tipo procedimental. Además, la conexión matemática característica permitió a los estudiantes realizar la conexión de tipo parte-todo. Por ejemplo, el estudiante E1 logro generalizar la ecuación de variable separable partiendo de que las expresiones de variables x y y deben estar separadas. Este resultado es consistente con García-García y Dolores-Flores (2020) quienes plantean que este tipo de conexión matemática juega un papel importante en el logro de la generalización y abstracción de diferentes conceptos matemáticos.

La conexión matemática de tipo reversibilidad solo se identificó en el estudiante E2 debido a que resolvió la ecuación diferencial $y'(x) = \frac{1}{x}$ utilizando reglas de la derivada, así como el significado de la integración como operación inversa de la derivada. Mientras los estudiantes E1, E3 y E4 utilizaron métodos de resolución de EDO y no fueron capaces de relacionar la ecuación diferencial con el concepto de derivada e integral. Esto es consistente con lo reportado por Perdomo

(2011), quien expuso que los estudiantes muestran dificultades para establecer relaciones entre el concepto de las EDO y el de derivada de una función que les permita analizar y resolver tareas que contienen ideas básicas de las EDO.

En general, las tareas T1, T2 y T3 permitieron identificar las conexiones matemáticas. La tarea T3 presentó el menor número de conexiones matemática, producto a las dificultades presentadas por los participantes al resolver esta tarea. Se cree que ésto es debido a que los estudiantes no logran interpretar y presentan generalmente un aprendizaje procedimental que no les permite resolver este tipo de tarea (Rowland & Jovanoski, 2004; Arslan, 2010). La tarea T1 permitió identificar la conexión de implicación y la tarea T2 la conexión de reversibilidad, aunque se reconoce que estas conexiones se le dificultan a los estudiantes. Se considera que es debido al uso incorrecto que le dan los estudiantes a los teoremas que involucran una condición de implicación y las dificultades que presentan los estudiantes para relacionar el concepto de derivada y el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria (Raychaudhuri, 2007; Perdomo, 2011).

Finalmente, los resultados plasmados nos revelan que las conexiones matemáticas son un proceso complejo y no siempre es llevado a cabo por los estudiantes e influye los conocimientos previos y nuevos de los estudiantes (García-García & Dolores-Flores, 2018). Además, entender las conexiones matemáticas, la relación que guardan entre sí y así como el origen nos puede permitir llevarlas a la práctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje permitiendo atender las dificultades de los estudiantes y favorecer el desarrollo de la comprensión matemática.

5.1.1 Implicaciones para la enseñanza-aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden

Teniendo presente los resultados de esta investigación y de acuerdo con García (2018) y Eli at al. (2013), se plantea la necesidad de desarrollar secuencias para la enseñanza de las matemáticas enfocadas en las conexiones matemáticas, en particular las ecuaciones diferenciales ordinarias. En estas secuencias el papel de la articulación de diferentes conceptos y de diferentes registros de representación permitirá comprender los procesos y métodos matemáticos por parte de los estudiantes.

Una propuesta para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales podría plantear como tema inicial la relación entre la derivada y las ecuaciones diferenciales como punto de inicio para su enseñanza (Perdomo, 2011). Las conexiones matemáticas de significado y representaciones diferentes pueden favorecer este proceso. Por ejemplo, auxiliar la articulación de los distintos significados de la derivada que permitan a los estudiantes resolver ecuaciones diferenciales sencillas y beneficiar el proceso de establecer una relación entre conocimientos previos del cálculo diferencial (concepto de derivada y la recta tangente a una curva) con los campos de direcciones e interpretación de las soluciones de una EDO (Guerrero, Camacho y Mejía, 2010). Además, reconocemos que las representaciones diferentes juegan un papel importante para comprender los procesos matemáticos relacionados con las EDO.

Por otro lado, la conexión parte-todo puede beneficiar el proceso de generalización e inclusión en las ecuaciones diferenciales permitiendo al estudiante desarrollar la abstracción matemática (García, 2018). La conexión característica puede favorecer el proceso de identificación y clasificación de los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales. Mientras la conexión procedimental puede favorecer el uso correcto de métodos, fórmulas y procedimientos que permitan la resolución de éstas y la conexión de implicación puede favorecer el uso de teoremas que conlleven a demostrar condiciones necesarias y suficientes aplicadas en las ecuaciones diferenciales por ejemplo el teorema: *Criterio para una diferencial exacta.*

En general las conexiones matemáticas deberían jugar un papel importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, teniendo en cuenta que permitirían reforzar la enseñanza de algoritmos permitiendo un aprendizaje que perdure en el tiempo y desarrollar la comprensión matemática. Sin embargo, según García (2018) es importante la práctica del profesor en el aula, quien debe promover el uso de las conexiones matemáticas entre conceptos previos o nuevos a las ecuaciones diferenciales ordinarias y así como entre estas con las de otras disciplinas y contextos reales.

5.2 Futuras investigaciones

Dados los resultados de esta investigación consideramos que las próximas investigaciones pueden explorar las conexiones matemáticas que realizan los alumnos al resolver tareas, en particular las de modelación que permita relacionar las ecuaciones diferenciales con otras diciplinas y con contextos reales. Esto ayudará a identificar conexiones extramatemáticas e intramatemáticas.

Por otra parte, consideramos también que las futuras investigaciones pueden estudiar la relación entre el conocimiento matemático de los estudiantes y las conexiones matemáticas que estos realizan dentro de otros dominios y contextos. Esto nos puede ayudar a explicar cómo los estudiantes hacen conexiones matemáticas.

También creemos que para futuras investigaciones será importante identificar conexiones matemáticas manifestadas en el plan de estudio y las que los docentes realizan en el aula referidas a las EDO. Asimismo, es importante profundizar en el estudio de la compresión matemática a partir de las conexiones matemáticas que realizan los estudiantes.

Referencias

Adu-Gyamfi, K., Bossé, M. J., & Chandler, K. (2017). Student Connections between Algebraic and Graphical Polynomial Representations in the Context of a Polynomial Relation. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(5), 915–938. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9730-1

Arslan, S. (2010). Traditional instruction of differential equations and conceptual learning. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *29*(2), 94–107. https://doi.org/10.1093/teamat/hrq001

Artigue, M. (2001). What Can we Learn from Educational Research at the University Level? In D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study*. Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Assad, D. A. (2015). Task-Based Interviews in Mathematics: Understanding Student Strategies and Representations through Problem Solving. *International Journal of Education and Social Science Www.Ijessnet.Com*, *2*(1), 17–26. www.ripknet.org.

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., & Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(3), 217–241. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9145-1

Baptista, P., Fernández, C., & Hernández, R. (2014). Metodología de la investigación. (Cuarta Ed.). México, DF: The McGraw-Hill.

Bingölbali, E., & Coskun, M. (2016). A proposed conceptual framework for enhancing the use of making connections skill in mathematics teaching. *Egitim ve Bilim*, *41*(183), 233–249. https://doi.org/10.15390/EB.2016.4764

Braun, V, & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77–101.

Braun, V., & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. *APA Handbook of Research Methods in Psychology, Vol 2: Research Designs: Quantitative, Qualitative, Neuropsychological, and Biological.*, *2*, 57–71. https://doi.org/10.1037/13620-004

Brown, L. (Ed.). (1993). *The new shorter Oxford English dictionary on historical principles.* Oxford: Clarendon Press.

Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections*. Unpublished PhD Thesis. Simon Fraser University. Canada.

Clark, T. J. (2018). Weighing Fog: Modeling on Day 1 of Differential Equations. Primus. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1729429

Coxford, A. F. (1995). The case for connections. In P. A. House & A. F. Coxford (Eds.), *Connecting mathematics across the curriculum* (pp. 3-12). Reston, VI: National Council of Teachers of Mathematics

De Gamboa, G. y Figueiras, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 337–344). Salamanca: SEIEM.

Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J., & Lee, C. W. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal*, *23*(3), 297–319. https://doi.org/10.1007/s13394-011-0017-0

Evitts, T. (2004). *Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula*. Unpublished dissertation, Pennsylvania State University College of Education. EE. UU.

Gallegos, R. R., & Bourguet-Diaz, R. E. (2015). Building bridges between mathematics and engineering: Identifying modeling practices through Differential Equations and Simulation. *ASEE Annual Conference and Exposition, Conference Proceedings*, *122nd ASEE Annual Conference and Exposition: Making Value for Society*. https://doi.org/10.18260/p.23641

García, J. (2018). *Conexiones matemáticas y concepciones alternativas a la derivada y a la integral en los estudiantes del preuniversitario*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero, México.

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(2), 227–252.

https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355994

García-García, J. (2019). Escenarios de exploración de conexiones matemáticas. *NÚMEROS: Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, *100*(mayo 2019), 129–133.

García-García, J., & Dolores-Flores, C. (2020). Exploring pre-university students' mathematical connections when solving Calculus application problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1–25. https://doi.org/10.1080/0020739x.2020.1729429

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: Universidad de Granada.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. pp. 517–545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gómez, W. (2005). El significado de los objetos en el aula de matemática. *Revista de Pedagogía*, *26*(75), 131-164.

Guerrero, C., Camacho, M., & Mejia, H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de Las Ciencias*, *28*(3), 341–352.

Jaijan, W., & Loipha, S. (2010). *Exploring Thai Students ' Kinds of Mathematical Connections in Open Approach*. *33*(3), 175–184.

Jaijan, W., & Loipha, S. (2012). Making Mathematical Connections with Transformations Using Open Approach. *Hrd Journal*, *3*(1), 91–100.

Ji-Eun, L. (2012). Prospective elementary teachers' perceptions of real-life connections reflected in posing and evaluating story problems. *Journal Mathematics of Teacher Education*, *15*, 429–452.

Karakoç, G., & Alacacı, C. (2015). Real World Connections in High School Mathematics Curriculum and Teaching. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, *6*(1), 31. https://doi.org/10.16949/turcomat.76099

KarimiFardinpour, Y., & Gooya, Z. (2017). Comparing Three Methods of Geometrical Approach in Visualizing Differential Equations. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *Nctm 2000*. https://doi.org/10.1007/s40753-017-0061-6

Lee, J. E. (2012). Prospective elementary teachers' perceptions of real-life connections reflected in posing and evaluating story problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(6), 429–452. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9220-5

Maxwell, JA. (2005). *Qualitive research design: An interactive approach* (Segunda Ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Mhlolo, Michael K., Venkat, H., & Schfer, M. (2012). The nature and quality of the mathematical connections teachers make. *Pythagoras*, *33*(1), 1–9. https://doi.org/10.4102/pythagoras.v33i1.22

Mhlolo, Michael K. (2012). Mathematical connections of a higher cognitive level: A tool we may use to identify these in practice. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *16*(2), 176–191. https://doi.org/10.1080/10288457.2012.10740738

Mousley, J. (2004). An aspect of mathematical understanding: the notion of "connected knowing". *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 377-384). Bergen: Bergen University College.

Mumcu, H. Y. (2018). A theoretical examination of the mathematical connection skill: The case of the concept of derivative. In *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education* (Vol. 9, Issue 2). https://doi.org/10.16949/turkbilmat.379891

Mwakapenda, W. (2008). Understanding connections in the school mathematics curriculum. *South African Journal of Education*, *28*, 189-202.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: Nacional Council of Teachers of Mathemathics.

NCTM (2000). *Principales and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Özgen, K. (2013b). Self-Efficacy Beliefs In Mathematical Literacy And Connections Between Mathematics And Real World: The Case Of High School Students. *Journal of International Education Research*, *9*(4), 305–316.

Pecharromán, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado. *Enseñanza de las ciencias*, *31*(3), 121-134.

Perdomo Díaz, J. (2011). Construcción del concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria en escenarios de Resolución de Problemas. *Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *29*(3), 463. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n3.650

Rasmussen, C. L. (2001). New directions in differential equations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(1), 55–87. https://doi.org/10.1016/s0732-3123(01)00062-1

Raychaudhuri, D. (2007). A layer framework to investigate student understanding and application of the existence and uniqueness theorems of differential equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(3), 367–381. https://doi.org/10.1080/00207390601002898

Rodríguez, G., Gil, J., & García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Aljibe.

Rodríguez Gallegos, R. (2015). *A Differential Equations Course for Engineers Through Modelling and Technology*. 545–555. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_46

Rowland, D. R., & Jovanoski, Z. (2004). Student interpretations of the terms in first-order ordinary differential equations in modelling contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(4), 503–516. https://doi.org/10.1080/00207390410001686607

Silver, E. A., Mesa, V. M., Morris, K. A., Star, J. R., & Benken, B. M. (2009). Teaching mathematics for understanding: An analysis of lessons submitted by teachers seeking NBPTS certification. *American Educational Research Journal*, *46*(2), 501–531. https://doi.org/10.3102/0002831208326559

Simmons, G. y Krantz, S. (2007). *Ecuaciones Diferenciales. Teoría, técnica y práctica*. México: McGraw-Hill.

Singletary, L. M, (2012). *Mathematical connections made in practice: an examination of teachers' beliefs and practices*. Unpublished dissertation. The University of Georgia. United States of America.

Spindler, R. (2019). A Differential Equations Project: Drone Heading Home. *Primus*, *29*(7), 688–701. https://doi.org/10.1080/10511970.2018.1446202

Stake, R. E. (2007). Investigación con estudio de casos. (Cuarta Ed.). Madrid: Ediciones Morata.

Tisdell, C. C. (2019). An accessible, justifiable and transferable pedagogical approach for the differential equations of simple harmonic motion. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(6), 950–959. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1516826

Trigueros Gaisman, M. (2014). Vínculo entre la modelación y el uso de representaciones en la comprensión de los conceptos de ecuación diferencial de primer orden y de solución. *Educación Matemática*, *26*(1), 207–226

Umay, A. (2007). *The New Face of Our Old Friend School Mathematics*. Ankara: Aydan Web Tesisleri.

Winkel, B. (2015). *Informed Conjeturing of Solutions for Differential Equations in a Modelling Context*. 1970(June 2016). https://doi.org/10.1080/10511970.2014.922145

Yıldırım, C. (1996). *Matematiksel düşünme.* İstanbul:Remzi Kitapevi.

Zengin, Y. (2019). Development of mathematical connection skills in a dynamic learning environment. *Education and Information Technologies*, *24*(3), 2175–2194. https://doi.org/10.1007/s10639-019-09870-x

Zeynivandnezhad, F., Ismail, Z., & Yosuf, Y. M. (2013). Mathematical thinking in differential equations among pre-service teachers. *Jurnal Teknologi (Sciences and Engineering)*, *63*(2), 51–58. https://doi.org/10.11113/jt.v63.2009

Zill, D. y Wright, W. (2015). *Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera.* (Octava ed.). México: Cengage Learning.

Zill, D. (1997). *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado*. (Sexta ed.).Mexico: International Thomson.

Zill, D. y Cullen, M. (2009). *Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera.* (Septima ed.). México: Cengage Learning.

Anexos

Anexo 1. Instrumento inicial

1. Contesta de forma razonada, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Argumenta tu respuesta.
   a) La función $y = e^{\int e^{x^2} dx}$ es solución de la EDO $\frac{dy}{dx} = 4e^{x^2}y$
   b) La familia de funciones $y = \frac{c}{x} + 2$ es la solución general de la EDO $\frac{dy}{dx} = \frac{(2-y)}{x}$

2. Representa gráficamente algunas soluciones de las siguientes ecuaciones.
   a) $\frac{dy}{dx} = 0$
   b) $\frac{dy}{dx} = cosx$

3. Dibuja el campo de dirección para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 1$ y, con base en esto, resuelva el siguiente problema de valor inicial $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 1 \\ y(-2) = 4 \end{cases}$

4. Resuelve la ecuación diferencial $y'(x) = x + y$. Dibuja el campo de direcciones asociado a esta ecuación y una solución correspondiente a $y(0) = 1$.

5. Se sabe que la población de una ciudad crece a medida que pasa el tiempo, verificando la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = K, K > 0$. Si la población se ha doblado en 3 años, y en 5 años ha alcanzado la cifra de 40000 habitantes. ¿Cuántas personas vivían en la ciudad al comienzo de ese periodo de cinco años?

6. Cuando se retira una torta de un horno su temperatura se mide a $300^0\ F$. Tres minutos después su temperatura es de $200^0 F$. ¿Cuánto tardará la torta en enfriarse a una temperatura ambiente de $70^0\ F$?

Anexo 2. Instrumento final

1. Justifique de forma razonada, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
   a) La función $xy^2 + \frac{x^3}{3} = 1$ es una solución particular de la ecuación diferencial $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$
   b) La familia de funciones $y = \frac{c}{x} + 2$ es una solución general de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{(2-y)}{x}$

2. Resuelve la ecuación diferencial $y'(x) = \frac{1}{x}$. Dibuja el campo de direcciones asociado a esta ecuación y una solución correspondiente a $x = 1$

3. Se sabe que la población de una ciudad crece a medida que pasa el tiempo, verificando la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = K, K > 0$. Si la población se ha doblado en 3 años, y en 5 años ha alcanzado la cifra de 40000 habitantes. ¿Cuántas personas vivían en la ciudad al comienzo de ese periodo de cinco años?