Universidad Autónoma de Guerrero

Unidad Académica de Matemáticas

Formas Diferenciales

TESIS

Que para obtener el título de:

Maestro en Ciencias Matemáticas

PRESENTA:

Alejandro Estrada Tiznado

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Efrén Morales Amaya

23 de Agosto de 2017.

Dedicado
a mis profesores
a mi familia
a Dios

A mis padres
María F. Tiznado A. y Heraclio Estrada G.

A mis hermanos
H. Iván, Coral y Liliana

A los amores de mi vida
L. Paola y A. Camila

A la memoria de
Víctor Alonso Reyes Estrada

Formas Diferenciales

Dr. Efrén Morales Amaya.
Lic. Alejandro Estrada Tiznado.
Facultad de Matemáticas nodo Acapulco, Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro).

Prefacio

Por Lic. Alejandro Estrada Tiznado

alex_rey5000@hotmail.com

Esta obra surge a partir de las notas del curso ”*Formas Diferenciales*” impartido en dos semestres por el Doctor *Efrén Morales Amaya* en la facultad de matemáticas nodo Acapulco, de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro). Ésta hace distinción para el primer semestre como ”*Formas diferenciales* ”, y para el segundo semestre como ”*Teorema de Stokes*”. Adjuntamos una notación, presentación, objetivos, problemas resultos y ejercicios.

Este material es un *”Frankenstein”* que combina un considerable número de libros, entre los que destacamos aquellos que se enlistan en la bibliografía. Cabe mencionar que buscamos un nivel intermendio de abstracción y que se resuelven ejemplos completos para que el lector se motive y se adentre en el libro.

Por Dr. Efrén Morales Amaya.

El libro *Differential forms* de Manfredo P. do Carmo. (1971). empieza definiendo formas diferenciales y el producto exterior, ambos en asbtracto. Por otro lado el *Differential forms with applications to the physical sciences* de Harley Flanders. (1989). desarrolla un capítuto completo de álgebra exterior. Cuando se impartieron los cursos, lo resolví con la frase ”ni tanto que queme al santo, ni tanto que no lo alumbre”, me metí al *Cálculo en variedades.* de Michael Spivak. (1988). Con el Spivak hice una recapitulación de formas diferenciales y la definición de producto exterior de formas se realizó a partir del producto tensorial. Esto es un aporte del libro. En particular, no estamos haciendo una reedición del do Carmo, usamos do Carmo, Flanders y Spivak para darle la columna vertebral al libro, estamos indagando tres libros clásicos y famosos para dar una presentación que pueda ser más conveniente para el estudiante, para ello, es importante que nos situemos, tomando en cuenta los elementos de los que se dispone y en función de estos presentar el tema de formas diferenciales.

El libro es una amalgama, pues se compone de diferentes versiones del tema de formas de varios libros, como es común en cualquier otro libro.

Tenemos la fortuna Alejandro y yo de poder trabajar en este tema. Yo, por tener la suerte de contar con él para materializar el curso, que no se pierda como es común en las notas de clase y poder contar con un material de apoyo para presentar el curso en un futuro, y fortuna para Alejandro como opción de su trabajo de tesis.

Bienvenidos al material.

Notación

1. $\mathbb{R}^n$ Espacio euclideano.

2. $P^2(\mathbb{R})$ Plano proyectivo real.

3. $T^*\,\mathbb{R}^n$ Haz cotangente de $\mathbb{R}^n$.

4. $T\,\mathbb{R}^n$ Haz tangente de $\mathbb{R}^n$.

5. $\mathbb{R}^n_p$ Espacio tangente en p.

6. V^* Espacio dual del espacio vectorial V.

7. $\Im^k(V^*)$ Espacio de todas las k-formas multilineales en V.

8. $\Lambda^k(V^*)$ Espacio de todas las k-formas multilineales alternantes en V.

9. $\Omega^k(V)$ Conjunto de las k-formas diferenciales en V.

10. $\mathrm{Mul}(V_1, \ldots, V_n; W)$ Conjunto de todas las transformaciones multilineales con dominio en $V_1, \ldots, V_n$ y codominio W.

11. $\mathrm{Sim}(V_1, \ldots, V_n; W)$ Conjunto de las transformaciones multilineales simétricas con dominio en $V_1, \ldots, V_n$ y codominio W..

12. $\mathrm{Sim}_n(V)$ Conjunto de todas las formas multilineales simétricas.

13. $\mathrm{Alt}(V_1, \ldots, V_n; W)$ Conjunto de todas las transformaciones multilineales alternantes con dominio en $V_1, \ldots, V_n$ y codominio W..

14. $\mathrm{Alt}_n(V)$ Conjunto de todas las formas multilineales alternantes.

15. $\nabla \times F$ Rotacional del campo F diferenciable.

16. $\nabla \cdot F$ Divergencia del campo F.

17. ∇f Gradiente de la función f diferenciable.

18. $\triangle_q$ q-simplejo estandar.

19. $\wedge$ Producto exterior.

20. $\otimes$ Producto tensorial.

21. ∂ Derivada parcial u operador frontera de un simplejo.

22. $H_q(X; R)$ q-ésimo módulo de homología.

23. $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ Base estandar de $\mathbb{R}^n$.

24. $\{dx_l, dx_2, \ldots, dx_n\}$ Base dual estandar de $\mathbb{R}^n$.

25. $C_p(M)$ Espacio de cadenas M.

26. σ q-simplejo singular.

Índice general

0.1. A modo de introducción. ¿Qué es una forma diferencial? 11
0.2. Objetivos 12

1. Formas Diferenciales. Diferenciabilidad 13
1.0.1. Teoremas integrales 16

2. Álgebra exterior 21
2.1. Espacio dual 21
2.1.1. Base dual 22
2.2. Formas multilineales 24
2.3. Formas multilineales simétricas y alternantes 25
2.3.1. Producto tensorial 27
2.3.2. Producto exterior 28

3. Formas diferenciales 35
3.1. Formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$. Definición y ejemplos . . 36
3.2. Producto exterior 47
3.3. Derivada exterior 48
3.4. Forma inducida (Pull-back) 50
3.5. Formas y campos en $\mathbb{R}^3$ 54
3.6. Formas cerradas y exactas 55

4. Variedades diferenciales 59
4.1. Superficies diferenciables 59
4.2. Caracterizaciones de las superficies 66
4.3. Primera forma fundamental 69
4.3.1. Aplicaciones 73
4.4. Segunda forma fundamental 74
4.5. Variedades diferenciales 77

5. Integración en variedades 89

5.1. Integración de formas diferenciales 89

6. Ejercicios **95**
6.1. Ejercicios resueltos 95
6.2. Ejercicios propuestos 109

7. Teorema de Stokes **113**
7.1. Simplejos y homología singular 113
7.2. Mapeos de cadenas 122
7.3. Teorema (general) de Stokes 124
7.4. El inverso del lema de Poincaré 129
7.5. Ecuaciones de campo de Maxwell 134
7.6. Aplicaciones en el espacio euclidiano 135
7.7. Teoría de potencial 137
7.8. Fórrmula simétrica de Green 138
7.9. Teoremas de De Rham 140
7.10.Winding Number 141
7.11.El invariante de Hopf 142
7.12.Geometría diferencial de superficies 143

8. Ejercicios **149**
8.1. Ejercicios resueltos 149
8.2. Ejercicios propuestos 155

9. Apéndice **159**
9.1. A. Mapeo de Gauss en coordenadas locales 159

Presentación

0.1. A modo de introducción. ¿Qué es una forma diferencial?

En geometría diferencial, la *forma diferencial* es un objeto matemático perteneciente a un espacio vectorial que aparece en el cálculo multivariable, cálculo tensorial o en física. Comúnmente una forma diferencial puede ser entendida como un operador multilineal antisimétrico definido sobre el espacio vectorial tangente a una curva, superficie y, en general a una variedad diferenciable. En un espacio o variedad de dimensión n, pueden definirse 0-formas, 1-formas, ... y n-formas.

El concepto de forma diferencial es una generalización sobre ideas previas como el gradiente, la divergencia, el rotacional, etc. Esa generalización y la moderna notación usada en el estudio de las formas difenciales se debe a *Élie Cartan*.

Élie-Joseph Cartan.(Dolomieu, 1869 - París, 1951) Matemático francés. Estudiante de la École Normale Superieure en 1888, se doctoró en 1894 con una tesis sobre los grupos de Lie en la que completaba la clasificación de las álgebras semisimples que había iniciado Killing. Fue profesor de matemáticas en Montpellier (1894-1896), Lyon (1896-1903), Nancy (1903-1909) y París (1909-1940). Estudió la influencia de las álgebras asociativas sobre los campos real y complejo y aplicó el álgebra de Grassman a la teoría de las diferenciales exteriores. Hacia 1904 publicó diversos artículos sobre ecuaciones diferenciales. En 1926 inició su teoría de los espacios simétricos utilizando los métodos topológicos desarrollados por Weyl. Trabajó asimismo en los teoremas desarrollados por su hijo Henri. Investigó, también, sobre las bases matemáticas de la teoría de la relatividad y la teoría cuántica. Fue elegido miembro de la Academia de Ciencias en 1931 y de la Royal Society londinense en 1947. Entre sus obras destacan Leçons sur les invariants intégraux (1922), Les espaces métriques fondés sur la notion dáire (1933) y Les systèmes différentiels extérieurs et leurs aplications géométriques (1948).

0.2. Objetivos

Las formas diferenciales integran muchos resultados de cálculo y variable compleja en torno a varios resultados, como lo son el *teorema de Newton*, *teorema de Leibniz*, *teorema de Cauchy*, *teorema de Green* y *teorema de Stokes*.

También, muchos resultados y definiciones en geometría y áreas afines no pueden ser formulados sin utilizar las formas diferenciales. Entre estos están: La formulación Hamiltoniana de la mecánica clásica, unificaciones de las ecuaciones de Maxwell, la formulación geométrica de termodinámica, la forma de la conexión y curvatura, cohomología y teorema de De Rham, medida de Haar en grupos de Lie y la teoría de Hodge.

Podemos enumerar los siguientes objetivos sobre esta obra:

1. Presentar una introducción a la teoría de las variedades de dimensión arbitraria en el espacio euclídeo, los tensores y las formas diferenciales, así mismo establecer el marco más adecuado para la teoría de de la integración en variedades.

2. Demostración del *Teorema de Stokes*, que unifica diversas identidades clásicas entre integrales.

3. Presentar algunas aplicaciones del *Teorema de Stokes*, tanto en matemáticas como en física.

Capítulo 1

Formas Diferenciales. Diferenciabilidad

"De pronto, en su muy primitivo cerebro de trescientos centímetros cúbicos, apareció una representación de una escena que podía convertirse en realidad. Aquel mono comenzó a prever sucesos, a planear acciones, a perseguir un objetivo. El más formidable suceso de la historia del mundo ocurrió entonces".

Obtenida del libro Una Mecánica Sin Talachas / Fermín Viniegra Heberlein. 2da edición México. FCE, SEP, CONACyT, 2001. Colección La Ciencia para Todos.

Definición 1.0.1. Llamamos *espacio euclídeo* al espacio vectorial con producto interno $\mathbb{R}^n$, para algún $n \geq 1$, donde el producto interno es el producto escalar usual.

Definición 1.0.2. Sea V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$. Un *producto interior* en V es una función que asigna a cada par ordenado de vectores x y y en V un escalar en $\mathbb{F}$, representado como $\langle x, y\rangle$, tal que para toda x, y y z en V y toda ce en $\mathbb{F}$ se tiene que:

a) $\langle x+z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$

b) $\langle cx, y\rangle = c\langle x, y\rangle$

c) $\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle$, donde la barra indica conjugación compleja.

d) $\langle x, x\rangle > 0$ *si* $x \neq 0$

Nótese que c se reduce a $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Las condiciones $a)$

y $b)$ simplemente requieren que el producto interior sea lineal en la primer componente.

Ejemplo 1.0.1. Sea $V = \mathbb{F}^n$. Para $x = (a_1, \ldots, a_n)$ y $y = (b_1, \ldots, b_n)$ defínase

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{b}_i$$

que satisface las condiciones de $a)$ a $d)$ y se denomina *producto interior ordinario* en $\mathbb{F}^n$. (En cursos elementales de álgebra lineal, éste se denomina *producto escalar* o *producto punto*).

Ejemplo 1.0.2. Considerando a $V = \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ y $y = (y_1, y_2, y_3)$. El producto escalar de x y y está dado por

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Definición 1.0.3. Sea V un espacio con producto interior. Para $x \in V$ definimos la *norma o longitud* de x mediante

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

La *distancia* entre dos puntos (vectores) x y y se denota por $d(x, y)$ y se define como

$$d(x, y) = ||x - y||$$

Ejemplo 1.0.3. Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ son vectores en $\mathbb{R}^n$ con el producto interior euclidiano (producto escalar), entonces

$$\begin{aligned} ||x|| &= \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \\ d(x, y) &= ||x - y|| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle} \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \end{aligned}$$

Es importante tener en mente que la norma y la distancia dependen del producto interior que se esté usando. Si se cambia el producto interior, entonces también cambian las normas y las distancias entre vectores.

Teorema 1.0.1. *Sea V un espacio con producto interior. Entonces para x, y y $z \in V$ y $c \in \mathbb{F}$*

a) $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.

b) $\langle x, cy\rangle = \bar{c}\langle x, y\rangle$.

c) $\langle x, x\rangle = 0$ ***si y sólo si*** $x = 0$.

d) Si $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle \ \forall \ x \in V$*, entonces* $y = z$.

Teorema 1.0.2. *Sea V un espacio con producto interior. Entonces para toda $x, y \in V$ y $c \in \mathbb{F}$ tenemos*

a) $||cx|| = |c| \cdot ||x||$.

b) $||x|| = 0$ ***si y sólo si*** $x = 0$*. En cualquier caso* $||x|| \geq 0$.

c) (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) $|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$.

d) (Desigualdad del triángulo) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Demostración. Consultar **(vi)**. ■

En Cálculo se define *diferenciabilidad* de esta manera: si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $p \in U$ si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (que llamaremos el diferencial de f en p y lo denotaremos por df_p) tal que:

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(p+v) - f(p) - T(v)}{||v||} = 0$$

o lo que es equivalente, escribiendo T como df_p

$$f(x) - f(p) = df_p(x-p) + r(x), \quad \forall x \in U$$

donde $r : U \to \mathbb{R}^m$ verifica :

$$\lim_{x \to p} \frac{r(x)}{||x-p||} = 0$$

Definición 1.0.4. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : U \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es *infinitamente diferenciable* o de clase C^∞ en $p \in U$ si existen todas sus derivadas parciales de todos los órdenes en p. Luego f es diferenciable en U si es diferenciable para todo $p \in U$.

Denotaremos su derivada parcial según x_i indistintamente como $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ o como f_{x_i}. Escribiremos como

$$\bigtriangledown f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) : U \to \mathbb{R}^n$$

su gradiente y como $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ su diferencial en un punto $p \in U$.

Definiremos formas diferenciales en variedades, y de esta manera poder demostrar el teorema de Stokes. Éste vincula la topología con el análisis y, por otro lado, generaliza y engloba varios teoremas clásicos como son el *teorema fundamental del cálculo, el teorema del gradiente, el teorema de Green y el teorema de la divergencia de Gauss*, entro otros.

El ***Teorema de Stokes*** se anuncia como sigue: Si M es una variedad de dimensión k orientada, compacta, con frontera, donde ∂M es la frontera de M, w es una $(k-1)$-forma en M y dw es la derivada de w, entonces

$$\int_M dw = \int_{\partial M} w$$

El Teorema de Stokes nos enseña que la integral de la derivada exterior de una forma diferencial sobre una variedad M, puede ser calculada mediante la integral de la forma calculada sobre la frontera de la variedad. Esta expresión resume y vincula muchas ideas,como son variedades, variedades con borde, formas en variedades, derivada exterior de formas en variedades e integración de formas en variedades.

1.0.1. Teoremas integrales

Dos transformaciones integrales que son de fundamental importancia en teorias de mecánica de continuos son:

i) *Teorema de Gauss.* El cual permite la transformación de una integral de volumen en una integral de superficie, extendida sobre la frontera s de un dominio

$$\int_\tau \text{div } A d\tau = \int_s A n ds$$

ii) *Teorema de Stokes.* La cual permite la transformación de una integral de superficie en una integral de línea, extendida sobre la curva frontera de una superficie abierta.

$$\int_s (\mathrm{rot}\ \ A)nds = \int_s Atds$$

t es tangente a la curva frontera s, tomado como un vector de longitud 1.

Ecuaciones de Maxwell. En la notación clásica, en términos de los campos eléctrico y magnético, escribimos el par de ecuaciones

$$\mathrm{div}\, H = 0, \quad \mathrm{rot}\, E + \frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \tag{1.1}$$

A partir de la primer ecuación de 1.1 y de la fórmula Gauss-Ostrogradskii obtenemos

$$\int\int\int_U \mathrm{div}\, H dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \int\int_\Gamma \langle H, n\rangle d\sigma = 0$$

donde Γ es la frontera de la región U tridimensional.

Este resultado suele expresarse en palabras como sigue: *El flujo de campo magnético a través de una superficie cerrada es siempre cero.*

A partir de la segunda ecuación en 1.1 y la fórmula de Stokes, que con $T = E$ tenemos

$$\int\int_U \langle \mathrm{rot}\, E, n\rangle d\sigma = \oint_\Gamma E_\alpha dx^\alpha$$

donde Γ es la frontera de una región de una superficie U (2 dimensional), entonces

$$-\int\int_U \left\langle \frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, n \right\rangle d\sigma = \oint_\Gamma E_\alpha dx^\alpha$$

Esta fórmula clasica puede escribirse como sigue: *La razón de cambio de tiempo de un fluido a través de un campo magnético de una superficie es igual a la circulación del campo eléctrico alrededor de la frontera de la superficie.*

El segundo par de las ecuaciones de Maxwell tienen la forma

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^k} - \frac{1}{c}\frac{\partial F_{0i}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_{(4)i} \tag{1.2}$$

donde $j_{(4)} = (c\rho, j_1, j_2, j_3)$, siendo ρ la densidad de carga, y $j = (j_1, j_2, j_3)$ el vector de corriente tridimensional.

En la forma tridimensional 1.2 se convierte en el par de ecuaciones

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} H + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j \tag{1.3}$$

La primera de ellas y la fórmula Gauss-Ostrogradskii nos dan

$$\int\int\int_U 4\pi\rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \int\int_\Gamma \langle E, n\rangle d\sigma \tag{1.4}$$

en palabras: *El flujo de un campo eléctrico a través de la frontera de una región del espacio es igual a 4π veces la carga total contenida en la región.* De la segunda de las ecuaciones 7.11 y de la fórmula de Stokes obtenemos

$$-\frac{1}{c}\int\int_U \left\langle \frac{\partial E}{\partial t}, n \right\rangle d\sigma + \int\int_U \frac{4\pi}{c}\langle j, n\rangle d\sigma = \oint_\Gamma H_\alpha dx^\alpha$$

Lo enunciamos como sigue: *La corriente neta a través de una superficie menos la razón de cambio de tiempo de del flujo del campo eléctrico a través de la superficie es igual a la circulación del campo magnético alrededor de la frontera de la superficie.*

Estas son todas funciones de variables espaciales x^1, x^2, x^3 y el tiempo t.

La conservación de la masa. En mecánica de partículas las variaciones de la trayectoria mecánica lleva a las ecuaciones de Euler-Lagrange. En este proceso variamos las trayectorias de las partículas pero sus masas son dadas como constantes. Si las masas son ahora continuamente distribuidas, es de modo imperativo que pongamos atención en la no-variación de la masa. Aquí la densidad ρ del fluido es una cantidad fundamental definida por el hecho de que la masa contenida en el elemento de volumen $d\tau$ está dado por

$$dm = \rho d\tau$$

Luego la masa total contenida en el volumen τ está dada por la integral definida

$$m = \int_{\tau} \rho d\tau$$

Podríamos esperar que la constancia de la masa demanda que esta integral permanezca independiente del tiempo. Si τ es un volumen definido, estacionario en el espacio, entonces la cantidad de m va a permanecer constante porque cierta cantidad de masa va a fluir hacia afuera (o hacia adentro) a través de la frontera de volumen τ. La cantidad de fluido que sale en una unidad de tiempo a través del elemento de superficie ds está dado por el producto escalar $\rho v \cdot nds$ donde v es la velocidad del movimiento. Por lo tanto la conservación de la masa demanda

$$\frac{dm}{dt} + \int_{s} \rho v \cdot nds = 0 \tag{1.5}$$

$$m = \int_{\tau} \rho d\tau \tag{1.6}$$

El segundo término de 1.1 puede ser transformado por el teorema de la divergencia de Gauss en

$$\int_{\tau} \mathrm{div}(\rho v) d\tau \tag{1.7}$$

y la ley de la conservación de la masa queda ahora, sustituyendo 1.2 y 1.3 en 1.1

$$\int_{\tau} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho v) \right] d\tau = 0 \tag{1.8}$$

Esta ecuación se debe cumplir para volumenes τ arbitrariamente escogidos, lo cual es posible solo si el integrando se anula. Por lo tanto la ley de la conservación impone la siguiente condición sobre la densidad ρ de un fluido

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho v) = 0$$

Ejemplo 1.0.4. Sea $D = [a, b]$ un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ y f una función continuamente diferenciable sobre D. Entonces se cumple el teorema fundamental del cálculo

$$\int_{D} df = f(b) - f(a) \quad | \int_{D} df = \int_{\partial D} f$$

denotamos por ∂D la frontera orientada $\{b\} - \{a\}$ de D.

Definición 1.0.5. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable. Definimos la *derivada parcial* de f según x_i como la función:

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \cdots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}\right)$$

Definición 1.0.6. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ una función. Decimos que f es infinitamente diferenciable, o de clase C^∞ si existen todas las derivadas parciales de todos los órdenes de f en todo punto de U. Escribiremos como $df_p = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ su diferencial en un punto p de U. Recordemos que es una transformación lineal y que $df_p = (d(f_1)_p, \ldots, d(f_m)_p)$.

Capítulo 2

Álgebra exterior

2.1. Espacio dual

En esta sección nos interesaremos exlusivamente en las transformaciones lineales de un espacio vectorial V en su campo de escalares $\mathbb{F}$, que a su vez es un espacio vectorial de dimensión 1 sobre $\mathbb{F}$. Tal transformación lineal se llama *funcional lineal en* V . En el cálculo, la *integral definida* nos proporciona uno de los ejemplos más importantes en matemáticas de una funcional lineal. Utilizaremos generalmente las letras $f, g, h, \ldots$ para denotar a las funcionales lineales.

Ejemplo 2.1.1. Sea V el espacio vectorial de funciones continuas complejas (o reales) sobre el intervalo $[a, b]$. La función $f : V \to \mathbb{C}$ $(o\ \mathbb{R})$ definida por

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt$$

es una funcional lineal en V.

Ejemplo 2.1.2. Sea $V = \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$ y defínase $f : V \to \mathbb{F}$ por $f(A) = \mathrm{tr}(A)$, la traza de A. Luego f es una funcional lineal.

Ejemplo 2.1.3. Sea V un espacio vectorial dimensionalmente finito con la base ordenada $\beta = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Para cada $i = 1, \ldots, n$

defínase $f_i(x) = a_i$, donde

$$[x]_\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

es el vector de coordenadas de x relativo a β. Entonces f_i es un funcional lineal en V llamada la *i-ésima función coordenada con respecto a la base* β. Nótese que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$. Estas funcionales lineales jugarán un papel muy importante en la teoría de espacios duales.

Para un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{F}$, definimos el *espacio dual* de V como el espacio vectorial $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$, denotado por V^*.
Por tanto, V^* es el espacio vectorial que consta de todas las funciones lineales en V. Si consideramos a $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, podemos dar la siguiente definición:

Definición 2.1.1. Definimos el *espacio dual* de V que denotaremos V^* como el espacio

$$V^* = \{f : V \longrightarrow \mathbb{R} : f \quad \textit{es lineal}\}$$

Se puede ver que V^* es un subespacio vectorial del $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las funciones de V en $\mathbb{R}$ con las operaciones definidas punto a punto. Esto es

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

2.1.1. Base dual

Teorema 2.1.1. *Supóngase que V es un espacio vectorial dimensionalemente finito con la base ordenada $\beta = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Sean $f_i(1 \leq i \leq n)$ las funciones coordenadas con respecto a β tal como se definieron anteiormente y sea $\beta^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$. Entonces β^* es una base ordenada para V^*, y para cualquier $f \in V^*$ tenemos que*

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) f_i$$

Llamamos a β^* la base dual de β.

Demostración. Sea $f \in V^*$. Como $\dim(V^*) = n$, sólo necesitamos probar que

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) f_i,$$

porque entonces β^* generará a V^*. Sea

$$g = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) f_i$$

Para $1 \leq j \leq n$, tenemos que

$$\begin{aligned} g(x_j) &= \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) f_i \right)(x_j) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) f_i(x_j) \\ &= \sum^{n} f(x_i) \delta_{ij} = f(x_j) \end{aligned}$$

Por lo tanto, por el corolario 2.1.1. $g = f$.

■

Corolario 2.1.1. *Sean V y W espacios vectoriales y supóngase que V es dimensionalmente finito con una base $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Si $U, T : V \to W$ son lineales y $U(x_i) = T(x_i)$ para $i = 1, \ldots, n$ entonces $U = T$.*

Ejemplo 2.1.4. Sea $V = \mathbb{R}^2$. Consideremos la base $B = \{(1,1), (1,-1)\}$. Si $B^* = \{f_1, f_2\}$ es la base dual de B, entonces debe cumplir que $f_1(1,1) = 1$, $f_1(1,-1) = 0$, $f_2(1,1) = 0$ y $f_2(1,-1) = 1$. De modo que

$$B^* = \left\{ \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \right), \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \right) \right\}$$

Observación 2.1.1. Es importante considerar las siguientes expresiones:

a) Para todo $v \in V$ y $f \in V^*$ se cumple

$$v = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(v) e_i$$

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) \phi_i$$

b) Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces denotaremos su base dual por $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$.

A las funcionales lineales se les da también el nombre de *formas lineales*.

2.2. Formas multilineales

Sean $V_1, \ldots, V_n, W$ espacios vectoriales y $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ una función. Decimos que f es *multilineal* si fijando todas las variables menos la variable i-ésima, la función $V_i \to W$ que se obtiene es lineal.

Llamamos $\mathrm{Mul}(V_1, \ldots, V_n; W)$ al conjunto de todas las transformaciones multilineales con dominio en $V_1, \ldots, V_n$ y codominio W. En el caso en el que el codominio es el campo, por ejemplo, si $W = \mathbb{R}$, decimos que $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to \mathbb{R}$ es una *forma multilineal*. Una k-forma multilineal (o forma k-lineal, o k-forma lineal, o k tensor) en V es una función $T : V^k \to \mathbb{R}$ que es lineal en cada variable, esto es:

$$T(v_1, \ldots, av_i + w_i, \ldots, v_k) = aT(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + T(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_k)$$

para toda $a \in \mathbb{R}$, $v_1 \ldots, v_k, w_i \in V$ y todo $i = 1, \ldots, k$. Denotaremos por $\Im^k(V^*)$ al *espacio de todas las k-formas multilineales* en V. Como podra notar el lector, consideraremos al campo $\mathbb{R}$ en la mayoria del texto.

Ejemplo 2.2.1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una función f que va del conjunto $V \times V$ de pares ordenados de vectores en V a $\mathbb{R}$, se llama *forma bilineal* en V si f es lineal en cada variable cuando la otra se mantiene fija, esto es, si

i) $f(ax_1 + x_2, y) = af(x_1, y) + f(x_2, y)$ para toda $x_1, x_2, y \in V$ y $a \in \mathbb{R}$.

ii) $f(x, ay_1 + y_2) = af(x, y_1) + f(x, y_2)$ para toda $x, y_1, y_2 \in V$ y $a \in \mathbb{R}$.

Representaremos al conjunto de formas bilineales en V mediante $\mathbb{B}(V)$.

Definición 2.2.1. Una función $f : \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ se dice que es una *función n-lineal* si f es una función lineal de cada renglón de una matriz de $n \times n$ cuando los restantes $n - 1$ renglones se mantienen fijos.

Ejemplo 2.2.2. Sea $\det : \mathrm{Mat}_{2\times 2}\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

es una función 2-lineal, por filas o columnas.

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{pmatrix} &= (a+a')d - (c+c')b \\ &= ad + a'd - bc - bc' \\ &(ad-bc) + (a'd - bc') \\ &= f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a' & b \\ c' & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.3. Formas multilineales simétricas y alternantes

Una función multilineal $f \in \mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_n; W)$ se dice que es *simétrica*, si al intercambiar dos vectores de posición el resultado es el mismo. Es decir, si para todo $1 \leq i < j \leq n$, se tiene que

$$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$$

Denotemos por $\mathrm{Sim}(V_1, \ldots, V_n; W)$ al conjunto de todas las transformaciones multilineales simétricas. Si $W = \mathbb{R}$ denotamos $\mathrm{Sim}(V_1, \ldots, V_n; \mathbb{R}) = \mathrm{Sim}_n(V)$.

Una función multilineal $f \in \mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_n; W)$ se dice *antisimétrica o alternada*, si al intercambiar dos vectores de posición el resultado es opuesto. Es decir, si para $1 \leq i < j \leq n$, se tiene

$$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$$

Todas las 1-formas son automáticamente alternantes. El determinante también es alternante, pero el producto punto no lo es. Es útil reformular ligeramente esta condición. Sea S_k el grupo de permutaciones de los números 1 a k. Recuerde que una permutacipon $\pi \in S_k$ es par o impar según si se puede expresar como producto de un número par o impar de transposiciones. Sea $(-1)^\pi$ igual a $+1$

o -1, según si π es par o impar. Para cada k-forma T y cualquier $\pi \in S_k$, definimos otra k-forma T^π como

$$T^\pi(v_1 \dots, v_p) = T(v_{\pi(1)}, \dots, v_\pi(p))$$

Entonces, claramente, las k-formas alternantes son aquellas que satisfacen

$$T^\pi = (-1)^\pi T \quad \textit{para toda } \pi \in S_k$$

Observe que $T^{\pi^\sigma} = T^{\pi\circ\sigma}$ siempre es válida.

Existe un procedimiento canónico para crear formas alternantes a partir de formas aribitrarias. Si T es cualquier k-forma, definimos la nueva forma $\operatorname{Alt} T$ como

$$\operatorname{Alt}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} (-1)^\pi T^\pi$$

Obsérvese que $\operatorname{Alt}(T)$ realmente es alternante, ya que claramente $(-1)^{\pi\circ\sigma} = (-1)^\pi(-1)^\sigma$. Así,

$$[\operatorname{Alt}(T)]^\sigma = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} (-1)^\pi (T^\pi)^\sigma = \frac{1}{k!}(-1)^\sigma \sum_{\pi \in S_k} (-1)^{\pi\circ\sigma} T^{\pi\circ\sigma}$$

Si hacemos $\tau = \pi \circ \sigma$, entonces, como S_k es un grupo, al variar π en todo S_k, ocurre lo mismo con τ. Así,

$$[\operatorname{Alt}(T)]^\sigma = (-1)^\sigma \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} (-1)^\tau T^\tau = (-1)^\tau \operatorname{Alt}(T)$$

como se afirmaba.

Observación 2.3.1. Observe también que si T ya es alternante, entonces $\operatorname{Alt}(T) = T$, ya que cada sumando $(-1)^\pi T^\pi$ es igual a T y existen exactamente $k!$ permutaciones en S_k. Puesto que la suma y múltiplos escalares de funciones alternantes siguen alternando, las k-formas alternantes forman un subespacio vectorial $\Lambda^k(V^*)$ de $\Im^k(V^*)$.

Ejemplo 2.3.1. En el ejemplo 2.2.2 se probó que $\det : \operatorname{Mat}_{2\times2} \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

es 2-lineal. Ahora probaremos que es alternante. Intercambiando la primer columna por la segunda se tiene

$$\det\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = bc - ad = -(ad - bc) = -\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.3.2. La función $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} & f\left[(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)\right] \\ = & a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 \end{aligned}$$

Es 3-lineal alternante.

Ahora, denotemos por $\mathrm{Alt}(V_1, \ldots, V_n; W)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales alternantes.
Si $W = \mathbb{R}$ denotamos $\mathrm{Alt}(V_1, \ldots, V_n; \mathbb{R}) = \Lambda^n(\mathbb{R}^*)$.

Se puede ver que

$$\mathrm{Sim}(V_1, \ldots, V_n; W) \subset \mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_n; W)$$

y

$$\mathrm{Alt}(V_1, \ldots, V_n; W) \subset \mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_n; W)$$

son subespacios. En particular, $\mathrm{Sim}_n(V)$ y $\Lambda^n(\mathbb{R}^*)$ son espacios vectoriales de modo natural.

2.3.1. Producto tensorial

En matemáticas, el *producto tensorial*, denotado por $\otimes$, se puede aplicar en diversos contextos a vectores, matrices, tensores y espacios vectoriales. En cada caso, el significado del símbolo es el mismo: la operación bilineal más general.

Un caso representativo de producto tensorial es el producto de Kronecker de dos matrices cualesquiera.

Definición 2.3.1. Sea ω una k-forma multilineal en V y ρ una r-forma multilineal en V. Definimos su *producto tensorial*, $\omega \otimes \rho \in \Im^{k+r}(V^*)$ por:

$$(\omega \otimes \rho)(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+r}) = \omega(v_1, \ldots, v_k)\rho(v_{k+1}, \ldots, v_{k+r})$$

Proposición 2.3.1. *El producto tensorial tiene las siguientes propiedades:*

i) $(\omega + \rho) \otimes \psi = \omega \otimes \psi + \rho \otimes \psi$ *(propiedad distributiva)*

ii) $\omega \otimes (\rho + \psi) = \omega \otimes \rho + \omega \otimes \psi$ *(propiedad distributiva)*

iii) $(a\omega) \otimes \rho = \omega \otimes (a\rho) = a(\omega \otimes \rho)$ *(propiedad homogenénea)*

iv) $\omega \otimes (\rho \otimes \psi) = (\omega \otimes \rho) \otimes \psi$ *(propiedad asociativa)*

La última propiedad nos permite escribir

$$\omega \otimes \rho \otimes \psi$$

Observación 2.3.2. El producto tensorial no es conmutativo

$$\omega \otimes \rho \neq \rho \otimes \omega$$

2.3.2. Producto exterior

Definición 2.3.2. Denotemos por $\Lambda^k(V^*)$ al *espacio de todas las k-formas multilineales alternantes* en V. Sean $T \in \Lambda^k(V^*)$ y $S \in \Lambda^r(V^*)$. Definimos su *producto exterior o producto cuña*, $T \wedge S \in \Lambda^{k+r}(V^*)$, mediante:

$$T \wedge S = \frac{(k+r)!}{k!r!} \operatorname{Alt}(T \otimes S)$$

Es claro que el producto cuña de dos tensores alternados es un tensor alternado, mientras que el producto tensorial de dos tensores alternados no tiene por qué serlo. En este sentido, el producto cuña es cerrado para los tensores alternados: es un producto adecuado. La utilidad de los factoriales se irá mostrando progresivamente.

El producto cuña tiene las siguientes propiedades: para todo $T \in \Lambda^k(V^*), S \in \Lambda^r(V^*), R \in \Lambda^l(V^*)$ y $a \in \mathbb{R}$:

i) $T \wedge (S + R) = T \wedge S + T \wedge R$ (propiedad distributiva).

ii) $(T + S) \wedge R = T \wedge R + S \wedge R$ (propiedad distributiva).

iii) $(aS) \wedge T = S \wedge (aT) = a(S \wedge T)$ (propiedad homogénea).

iv) $T \wedge S = (-1)^{kr} S \wedge T$.

De $iv)$ se deduce que si $\phi, \psi \in \Lambda^1(V^*)$, entonces $\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi$ y $\phi \wedge \phi = 0$.

Teorema 2.3.1. *El producto exterior es asociativo, es decir si* $T \in \Lambda^k(V^*), S \in \Lambda^r(V^*)$, *y* $R \in \Lambda^l(V^*)$, *vale*

$$(T \wedge S) \wedge R = T \wedge (S \wedge R) = \frac{(k+r+l)!}{k!r!l!} \operatorname{Alt}(T \otimes S \otimes R)$$

y por tanto escribiremos simplemente $T \wedge S \wedge R$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
(T \wedge S) \wedge R &= \frac{((k+r)+l)!}{(k+r)!l!} \operatorname{Alt}((T \wedge S) \otimes R) \\
&= \frac{(k+r+l)!}{(k+r)!l!} \operatorname{Alt}\left(\frac{(k+r)!}{k!r!} \operatorname{Alt}(T \otimes S) \otimes R\right) \\
&= \frac{k+r+l}{!}(k+r)!l! \frac{(k+r)!}{k!r!} \operatorname{Alt}(T \otimes S \otimes R) \\
&= \frac{(k+r+l)!}{k!r!l!} \operatorname{Alt}(T \otimes S \otimes R)
\end{aligned}$$

La otra igualdad es análoga. ■

Teorema 2.3.2. *Si* $\{f_1, \ldots, f_n\}$ *es una base de* V^*, *entonces*

$$\beta = \{f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_k} \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

es una base para $\Lambda^k(V^*)$.

Demostración. Sea $T \in \Lambda^k(V^*)$, en particular $T \in \Im^k(V^*)$, por lo tanto podemos escribir

$$T = \sum_{j_1, \ldots, j_k = 1}^{n} a_{j_1, \ldots, j_k} f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_k}, \quad a_{j_1, \ldots, j_k} \in \mathbb{R}$$

Como T es alternada, entonces $\operatorname{Alt}(T) = T$, por lo tanto:

$$T = \operatorname{Alt}(T) = \sum_{j_1, \ldots, j_k = 1}^{n} a_{j_1, \ldots, j_k} \operatorname{Alt}(f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_k})$$

Esto es igual a

$$\sum_{j_1, \ldots, j_k = 1}^{n} a_{j_1, \ldots, j_k} (f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_k})$$

a menos de los factoriales, por lo tanto todos los $\{f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_k} : i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n\}$ generan $\Lambda^k(V^*)$, pero no son linealmente independientes: por anticomnmutatividad de $\wedge$ en 1-formas, tenemos $\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi$, y $\phi \wedge \phi = 0$. Eliminando redundancias nos quedamos con $\{f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_k} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$. ∎

Ejemplo 2.3.3. Sea $V = \mathbb{R}^n$ y consideramos $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ como base de $(\mathbb{R}^n)^*$. Entonces si $T \in \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$, la podemos escribir de manera única como

$$T = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \quad a_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 2.3.4. Ya sabemos $\Lambda^n((\mathbb{R}^n)^*)$ tiene dimensión 1 y que $\det \in \Lambda^n((\mathbb{R}^n)^*)$, por lo tanto si $T \in \Lambda^n((\mathbb{R}^n)^*)$, entonces $T = \lambda \det$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.3.3. *Sean $f_1, \ldots, f_k \in \Lambda^1((\mathbb{R}^n)^*) = (\mathbb{R}^n)^*$. Entonces $f_1 \wedge \cdots \wedge f_k \in \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$.*

Demostración. Sean $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
(f_1 \wedge \cdots \wedge f_k)(v_1, \ldots, v_k) &= k!\,\mathrm{Alt}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_k) \\
&= \frac{k!}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_k)(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) f_1(v_{\sigma(1)}) \ldots f_k(v_{\sigma(k)}) \\
&= \begin{vmatrix} f_1(v_1) & \cdots f_1(v_k) \\ \vdots & \vdots \\ f_k(v_1) & \cdots f_k(v_k) \end{vmatrix} \\
&= \det(f_i(v_j))
\end{aligned}$$

∎

Como casos particulares, tenemos

$$(f_1 \wedge f_2 \wedge f_3)(v_1, v_2, v_3) = \det(f_i(v_j)) = \begin{vmatrix} f_1(v_1) & f_1(v_2) & f_1(v_3) \\ f_2(v_1) & f_2(v_2) & f_2(v_3) \\ f_3(v_1) & f_3(v_2) & f_3(v_3) \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
(f_1 \wedge f_2 \wedge f_3)(v_1+u, v_2, v_3) = \det(f_i(v_j)) &= \begin{vmatrix} f_1(v_1+u) & f_1(v_2) & f_1(v_3) \\ f_2(v_1+u) & f_2(v_2) & f_2(v_3) \\ f_3(v_1+u) & f_3(v_2) & f_3(v_3) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} f_1(v_1)+f_1(u) & f_1(v_2) & f_1(v_3) \\ f_2(v_1)+f_2(u) & f_2(v_2) & f_2(v_3) \\ f_3(v_1)+f_3(u) & f_3(v_2) & f_3(v_3) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} f_1(v_1) & f_1(v_2) & f_1(v_3) \\ f_2(v_1) & f_2(v_2) & f_2(v_3) \\ f_3(v_1) & f_3(v_2) & f_3(v_3) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(u) & f_1(v_2) & f_1(v_3) \\ f_2(u) & f_2(v_2) & f_2(v_3) \\ f_3(u) & f_3(v_2) & f_3(v_3) \end{vmatrix} \\
&= (f_1 \wedge f_2 \wedge f_3)(v_1, v_2, v_3) + (f_1 \wedge f_2 \wedge f_3)(u, v_2, v_3)
\end{aligned}
$$

Observación 2.3.3. Se acostumbra omitir el signo de producto exterior $\wedge$, es decir $dx \wedge dy = dxdy$.

Ejemplo 2.3.5. Consideremos los siguientes productos.

i) $Adx \wedge Bdxdydz = ABdxdxdydz = 0$.

ii) $(Adx+Bdy+Cdz) \wedge (Edx+Fy+Gdz) = AEdxdx+AFdxdy+AGdxdz+BEdydx+BFdydy+BGdydz+CEdzdx+CFdzdy+CGdzdz) = (AF-BE)dxdy+(AG-CE)dxdz+(BG-CF)dydz$

que ilustra el producto vectorial de dos vectores en $\mathbb{R}^3$.

iii) $(Adx+Bdy+Cdz) \wedge (Pdydz+Qdzdx+Rdxdy) = APdxdydz+AQdxdzdx+ARdxdxdy+BPdydydz+BQdydzdx+BRdydxdy+CPdzdydz+CQdzdzdx+CRdzdxdy = (AP+BQ+CR)dxdydz$

que ilustra el producto interno de dos vectores en $\mathbb{R}^3$.

Teorema 2.3.4. *Sean $v_1, \ldots, v_n$ una base de V, y sea $f_1, \ldots, f_n$ la base dual, $f_i(v_j) = \delta_{ij}$. Entonces el conjunto de todos los productos tensoriales de k factores*

$$f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_k} \quad 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$$

es una base para $\Im^k(V)$, que además tiene dimensión n^k.

Demostración. Obsérvese que

$$
\begin{aligned}
f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_k}(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}) &= \delta_{i_1,j_1} \cdot \cdots \cdot \delta_{i_k,j_k} \\
&= \begin{cases} 1 & \textit{si } j_1 = i_1, \ldots, j_k = i_k \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Si $w_1, \dots, w_k$ son k vectores con $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$ y T está en $\Im^k(V)$, entonces

$$\begin{aligned} T(w_i, \dots, w_k) &= \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} a_{1,j_1} \cdot \dots \cdot a_{k,j_k} T(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} T(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \cdot f_{i_1} \otimes \dots \otimes f_{i_k}(w_1, \dots, w_k) \end{aligned}$$

Así

$$T = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} T(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \cdot f_{i_1} \otimes \dots \otimes f_{i_k}$$

Por consiguiente, las $f_{i_1} \otimes \dots \otimes f_{i_k}$ generan $\Im^k(V)$.

Supóngase ahora que existen números $a_{i_i,\dots,i_k}$ tales que

$$\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} a_{i_1,\dots,i_k} \cdot f_{i_1} \otimes \dots \otimes f_{i_k} = 0$$

Aplicando ambos miembros de esta ecuación a $(v_{j_1}, \dots, v_{j_k})$ se obtiene $a_{j_1,\dots,j_k} = 0$. Por tanto las $f_{i_1} \otimes \cdots f_{i_k}$ son linealmente independientes. ■

Una construcción importante, que es familiar para el caso de espacios duales, se pueden hacer también para tensores. Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal, se define una aplicación lineal $f^* : \Im^k(W) \to \Im^k(V)$ por

$$f^* T(v_1, \dots, v_k) = T(f(v_1), \dots, f(v_k))$$

para $T \in \Im^k(W)$ y $v_1, \dots, v_k$. Es facil comprobar que $f^*(S \otimes T) = f^* S \otimes f^* T$.

$$\begin{aligned} & f^*(S \otimes T)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) \\ &= (S \otimes T)(f(v_1), \dots, f(v_k), f(v_{k+1}), \dots, f(v_{k+l})) \\ &= S(f(v_1), \dots, f(v_k)) \cdot T(f(v_{k+1}), \dots, f(v_{k+l})) \\ &= (f^* S \otimes f^* T)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) \end{aligned}$$

Se define un producto interior en V como un tensor de segundo orden tal que T es simétrico, es decir, $T(v, w) = T(w, v)$ para $v, w \in V$ y tal que T es definido positivo, es decir, $T(v, v) > 0$ si $v \neq 0$.

Teorema 2.3.5. *Si T es un producto interior en V, existe una base $v_1, \dots, v_n$ para V tal que $T(v_i, v_j) = \delta_{ij}$. (Una tal base se denomina ortonormal respecto a T). En consecuencia existe un isomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to V$ tal que $T(f(x), f(y)) = \langle x, y \rangle$ para $x, y \in \mathbb{R}^n$. En otras palabras $f^*T = \langle , \rangle$.*

Demostración. Sean $w_1, \dots, w_n$ una base para V. Se define

$$\begin{aligned}
w_1' &= w_1, \\
w_2' &= w_2 - \frac{T(w_1', w_2)}{T(w_1', w_1')} \cdot w_1', \\
w_3' &= w_3 - \frac{T(w_1', w_3)}{T(w_1', w_1')} \cdot w_1' - \frac{T(w_2', w_3)}{T(w_2', w_2')} \cdot w_2' \\
&\vdots \\
&\mathit{etc.}
\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que $T(w_i', w_j') = 0$ si $i \neq j$ y que si $w_i' \neq 0$ es $T(w_i', w_i') > 0$. Se define ahora $v_i = w_i'/\sqrt{T(w_i', w_i')}$. El isomorfismo f queda definido por $f(e_i) = v_i$. ∎

Un tensor de orden k, $w \in \Im^(V)$ se denomina alternado si

$$w(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -w(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k)$$

para todo $v_1, \dots, v_k \in V$.

El conjunto de todos los tensores de orden k alternados, es evidentemente un subespacio $\Lambda^k(V)$ de $\Im^k(V)$. Si $T \in \Im^k(V)$, se define $\mathrm{Alt}(T)$ por

$$\mathrm{Alt}(T)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}\ \sigma T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

donde S_k es el grupo simétrico de k elementos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Teorema 2.3.6. *Tenemos que*

i) Si $T \in \Im^k(V)$, entonces $\mathrm{Alt}(T) = \Lambda^k(v)$.

ii) Si $w \in \Lambda^k(K)$*, entonces* $\mathrm{Alt}(w) = w$*.*

iii) Si $T \in \Im(V)$*, entonces* $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(T)) = \mathrm{Alt}(T)$*.*

Demostración. $i)$. Sea (i,j) la permutación que cambia entre i y j y deja todos los otros números fijos. Si $\sigma \in S_k$, sea $\sigma' = \sigma \cdot (i,j)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}(T) \ & (v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}\ \sigma \cdot T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(j)}, \dots, v_{\sigma(i)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}\ \sigma \cdot T(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(j)}, \dots, v_{\sigma'(i)}, \dots, v_{\sigma'(k)}) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma' \in S_k} -\mathrm{sgn}\ \sigma' \cdot T(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(k)}) \\
&= -\mathrm{Alt}(T)(v_1, \dots, v_k)
\end{aligned}$$

$ii)$ Si $w \in \Lambda^k(V)$, y $\sigma(i,j)$, entonces $w(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}\ \sigma \cdot w(v_1, \dots, v_k)$. Puesto que cada σ es un producto de permutaciones de la forma (i,j), esta igualdad se verifica para todo σ. Por tanto

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}(w)(v_1, \dots, v_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}\ \sigma \cdot w(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}\ \sigma \cdot \mathrm{sgn}\ \sigma \cdot w(v_1, \dots, v_k) \\
&= w(v_1, \dots, v_k)
\end{aligned}$$

$iii)$ es consecuencia inmediada de $i)$ y $ii)$. ■

Capítulo 3

Formas diferenciales

En la sección 0.1 definimos a la forma diferencial como un objeto matemático perteneciente a un espacio vectorial que aparece en el cálculo multivariable, cálculo tensorial o en física. Comunmente una forma diferencial puede ser entendida como un operador multilineal antisimétrico definido sobre un espacio vectorial tangente a una curva, superficie y, en general a una variedad diferenciable.

También se menciona que para un espacio o variedad de dimensión n pueden definirse 0-formas, 1-formas, $\ldots$ y n-formas.

En **(i)** una k-forma exterior en $\mathbb{R}^n$ se define como el mapeo w que asocia a cada $p \in \mathbb{R}^n$ un elemento de $w(p) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$; w puede escribirse como sigue

$$w(p) = \sum_{i_1<\ldots<i_k} a_{i_1\ldots i_k}(p)(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}), \quad i_j \in \{1, \ldots, n\}$$

El estudio de formas en **(vii)** inicia como sigue.

Las formas diferenciales son objetos matemáticos que aparecen naturalmente bajo el signo de una integral.

$$\int Adx + Bdy + Cdz \tag{3.1}$$

$$\int\int Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \tag{3.2}$$

$$\int\int\int Hdxdydz \tag{3.3}$$

3.1, 3.2 y 3.3 nos muestran una integral de línea, una integral de superficie y una integral de volumen respectivamente, que nos conducen a las siguientes formas

$$\begin{aligned} \alpha &= Adx + Bdy + Cdz && \textit{(1-forma)} \\ \beta &= Pdydz + Qdzdx + Rdxdy && \textit{(2-forma)} \\ \gamma &= Hdxdydz && \textit{(3-forma)} \end{aligned}$$

Todos estos son ejemplos de formas diferenciales de tres variables definidas en $\mathbb{R}^3$.

En la expresión de β anterior, notamos la ausencia de términos en $dzdy, dxdz, dydx$ los cuales sugieren simetría o antisimetría.

Consideremos la integral

$$\int\int A(x,y)dxdy$$

con el cambio de variable $x = x(u,v), y = y(u,v)$. Tenemos,

$$\int\int A(x,y)dxdy = \int\int A[x(u,v), y(u,v)]\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv$$

de donde podemos escribir

$$dxdy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{3.4}$$

Si $x = y$, el determinante tiene filas iguales y por tanto se anula. Si intercambiamos x y y, el determinanate cambia de signo. Esto motiva a las siguientes expresiones

$$dxdx = 0, \quad dxdy = -dydx \tag{3.5}$$

Enseguida construiremos la definición de una k-forma diferencial.

3.1. Formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$. Definición y ejemplos

Definición 3.1.1. Para $p \in \mathbb{R}^n$, el *espacio tangente* en p es el conjunto

$$\mathbb{R}^n_p = \{(p,v) : v \in \mathbb{R}^n\}$$

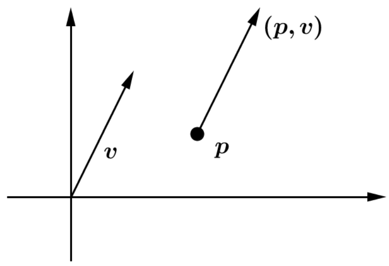

Figura 3.1: El espacio tangente puede verse como el espacio de n-vectores cuyo punto inicial está ubicado en el punto p.

Es decir, $\mathbb{R}^n_p$, es una copia del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, con base en un punto p. Podemos entender el espacio tangente como el espacio de n-vectores cuyo punto inicial, en lugar de estar ubicado en el origen, está ubicado en el punto p, como en la figura 3.1. Si $(p, v) \in \mathbb{R}^n_p$, lo denotaremos simplemente como v_p.

Podemos trasladar la base de $\mathbb{R}^n$ al punto $p \in \mathbb{R}^n$ y así $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^n_p$ son naturalmente isomorfos.

Por similitud con el espacio $\mathbb{R}^n$ definimos en $\mathbb{R}^n_p$ las siguientes operaciones:

i) Sean (p, v) y $(p, w) \in \mathbb{R}^n_p$ definimos la suma por:

$$(p, v) + (p, w) = (p, v + w) \in \mathbb{R}^n_p$$

ii) Sea $(p, v) \in \mathbb{R}^n_p$ y $a \in \mathbb{R}$, definimos el producto por escalares en $\mathbb{R}^n_p$ por

$$a(p, v) = (p, av)$$

Así $\mathbb{R}^n_p$ resulta ser un espacio vectorial.

Además, $\mathbb{R}^n_p$ posee el producto interno

$$(v_p, u_p) = v \cdot u$$

donde el producto de la derecha es el producto estándar en $\mathbb{R}^n$.

A la unión puntual de espacios tangentes en cada punto de $\mathbb{R}^n$, es decir

$$\bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \mathbb{R}^n_p$$

se le llama el *haz tangente*, y se denota por $T\mathbb{R}^n$.

Definición 3.1.2. Un *campo vectorial* es una función $F : \mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n$ tal que, para cada $p \in \mathbb{R}^n$,

$$F(p) \in \mathbb{R}^n_p$$

En otras palabras, el campo vectorial F asigna en cada punto p un vector con inicio en p.

Definición 3.1.3. Sea D un subconjunto en $\mathbb{R}^2$. Un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^2$ es una función F que asigna a cada punto (x, y) en D un vector bidimensional $F(x, y)$.

La mejor manera de representar un campo vectorial es dibujar la flecha que representa al vector $F(x, y)$ que inicie en el punto (x, y). Naturalmente, es imposible hacerlo para todos los puntos (x, y), pero podemos conseguir una representación razonable de F trazando la flecha para algunos puntos representativos de D como en la figura.

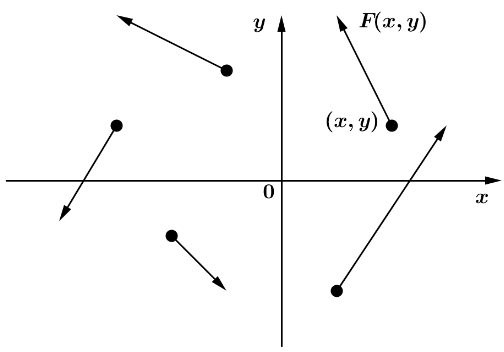

Figura 3.2: Campo vectorial sobre $\mathbb{R}^2$.

Puesto que $F(x, y)$ es un vector bidimensional, podemos expresarlo en términos de sus *funciones componentes* P y Q como sigue:

$$F(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j$$

o bien, simplificando, $F = P_i + Q_j$. Observese que P y Q son funciones escalares de dos variables y, algunas veces, se les llama *campos escalares* para distinguirlos de los campos vectoriales.

Definición 3.1.4. Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ es una función F que asigna a cada punto (x, y, z) en E un vector tridimensional $F(x, y, z)$.

Un campo vectorial F sobre $\mathbb{R}^3$ se representa en la figura.

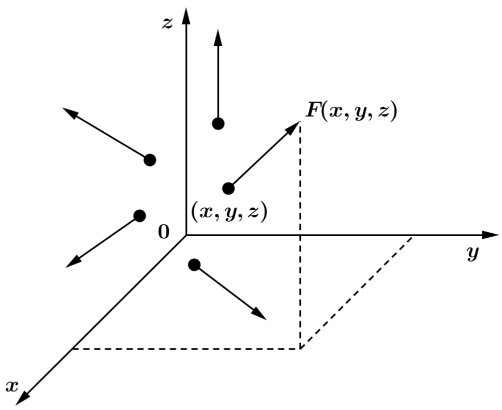

Figura 3.3: Campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$.

Podemos expresarlo en términos de sus funciones componentes P, Q y R como

$$F(x,y,z) = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k$$

Ejemplo 3.1.1. Un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^2$ está definido por $F(x,y) = -yi + xj$. Describa F trazando algunos de sus vectores $F(x,y)$.

Puesto que $F(1,0) = j$, dibujamos el vector $j = \langle 0,1 \rangle$ iniciando en el punto $(1,0)$. Como $F(0,1) = -1$, dibujamos el vector $\langle -1,0 \rangle$. Al continuar de este modo, calculamos varios valores representativos de $F(x,y)$ en la tabla y dibujamos los vectores correspondientes para representar el campo vectorial en la figura 3.4.

En la figura 3.5 se muestran dos representaciones del mismo campo vectorial hechos con un software matemático.

Observación 3.1.1. Se recomienda al lector **(x)** y **(xi)**.

Si $F, G : \mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n$ son campos vectoriales, entonces podemos definir las siguientes operaciones:

i) $(F+G)(p) = F(p) + G(p)$.

ii) $(cF)(p) = cF(p)$.

iii) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (fF)(p) = f(p)F(p)$.

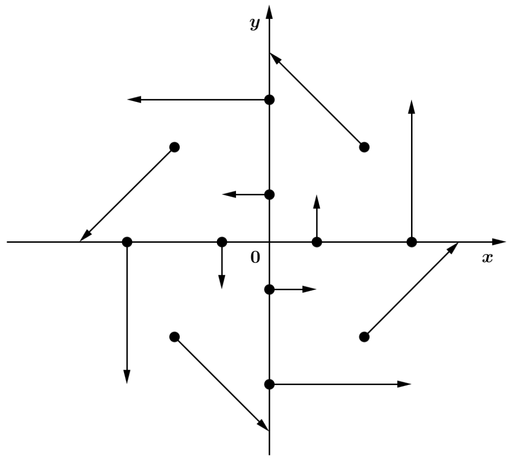

Figura 3.4: $F(x, y) = -yi + xj$.

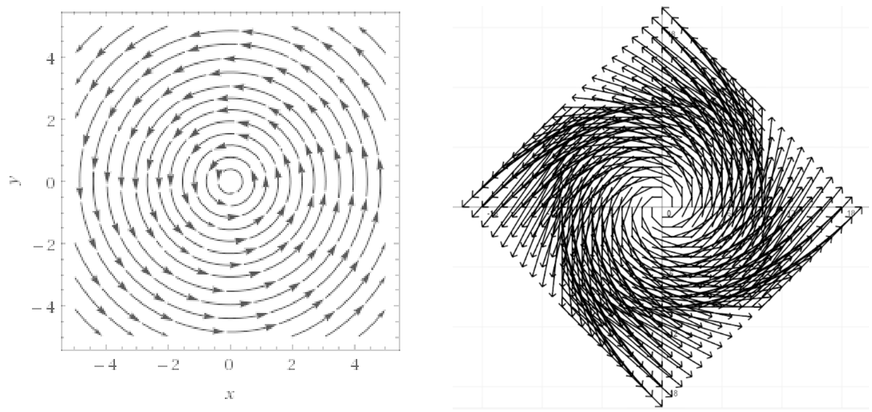

Figura 3.5: $F(x, y) = -yi + xj$ hechos con computadora.

iv) $(F \cdot G)(p) = F(p) \cdot G(p)$.

Si $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es la base estándar en $\mathbb{R}^n$ ésta induce una base estándar para $\mathbb{R}^n_p$ en cada $p \in \mathbb{R}^n$, a saber

$$\{(e_1)_p, (e_2)_p, \ldots, (e_n)_p\}$$

Es decir, simplemente ubicamos el punto inicial de cada e_i en el punto p.

Si $F : \mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n$ es un campo vectorial, entonces podemos escribirlo de la forma

$$F(p) = F_1(p)(e_1)_p + F_2(p)(e_2)_p + \cdots + F_n(p)(e_n)_p$$

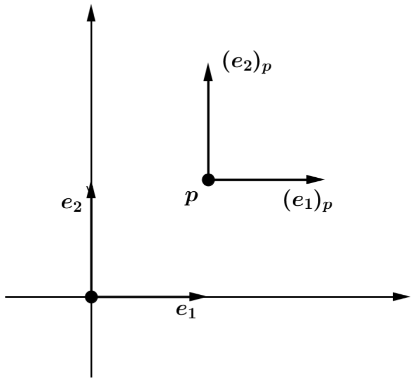

Figura 3.6: Base estándar de $\mathbb{R}^2_p$.

Las funciones $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (como ya se mencionó antes) son llamadas *funciones componentes*. Decimos que el campo F es continuo (diferenciable, de clase C^1, C^k, etc.) si cada componente F_i es continua.

Recordando algunos conceptos de cálculo vectorial en $\mathbb{R}^3$ tenemos a los operadores clásicos, que son:

El gradiente. Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, el gradiente de f (grad) es el campo

$$\mathrm{grad}(f)(p) = (D_1 f(p), D_2 f(p), D_3 f(p))_p$$

Escrito de otra manera

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p)\right)$$

Es decir, el campo cuyas componentes son las derivadas parciales de la función f. Este campo se suele denotar como ∇f.

El rotacional. Si $F : \mathbb{R}^3 \to T\mathbb{R}^3$ es un campo vectorial diferenciable, el rotacional de F es el campo

$$\mathrm{rot}(F) = (D_2F_3 - D_3F_2, D_3F_1 - D_1F_3, D_1F_2 - D_2F_1)$$

o bien

$$\mathrm{rot}\, F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

Se le suele denotar $\nabla \times F$.

La divergencia. Si $F : \mathbb{R}^3 \to T\mathbb{R}^3$ es diferenciable, la divergencia de F es la función

$$\operatorname{div}(F) = D_1F_1 + D_2F_2 + D_3F_3$$

o bien

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Para integrar estos conceptos, damos cabida al conceto de *formas diferenciales*. Por ahora, restringiremos nuestras definiciones y cálculos iniciales al espacio $\mathbb{R}^3$. La generalización a $\mathbb{R}^n$ es inmediata.

Para cada $p \in \mathbb{R}^3$, consideraremos el espacio dual de $\mathbb{R}^3_p$.

$$(\mathbb{R}^3_p)^* = \{f : \mathbb{R}^3_p \to \mathbb{R} : f \text{ *es lineal*}\}$$

Es decir, el espacio de las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^3_p$ a $\mathbb{R}$. En la sección de espacio dual y base dual (se recomienda al lector revisar tales secciones) se mencionó que $(\mathbb{R}^3_p)^*$ es un espacio vectorial de dimensión 3 y que cualquier base $B = \{(v_1)_p, (v_2)_p, (v_3)_p\}$ de $\mathbb{R}^3_p$ induce una base de $(\mathbb{R}^3_p)^*$, llamada la base dual $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$. Repetimos que la base dual inducida por la base estándar $B = \{(e_1)_p, (e_2)_p, (e_3)_p\}$ se le llama *base dual estándar* y se denota por

$$B^* = \{(dx_1)_p, (dx_2)_p, (dx_3)_p\}$$

A cada una de las transformaciones $(dx_i)_p$ se les llama *diferenciales elementales* en p.

Notar que $(dx_i)_p(v_p) = v_i$, es decir, $(dx_i)_p$ solo toma la coordenada i del vector $v_p \in \mathbb{R}^n_p$. A la unión $\bigcup_{p\in\mathbb{R}^3}(\mathbb{R}^3)^*$ de los espacios duales se le denomina *haz cotangente* de $\mathbb{R}^3$, y se denota por $T^*\mathbb{R}^3$.

Definición 3.1.5. Un *campo de formas lineales o una forma exterior de grado 1* en $\mathbb{R}^3$ es un mapeo ω que asocia cada $p \in \mathbb{R}^3$ un elemento $\omega(p) \in (\mathbb{R}^3_p)^*$; ω puede escribirse como

$$\omega(p) = a_1(p)(dx_1)_p + a_2(p)(dx_2)_p + a_3(p)(dx_3)_p$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{3} a_i dx_i$$

donde a_i son funciones reales en $\mathbb{R}^3$. Si las funciones a_i son diferenciales, ω es llamada una forma diferenciable de grado 1.

Ahora sea $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*_p$ el conjunto de mapeos $\rho : \mathbb{R}^3_p \times \mathbb{R}^3_p \to \mathbb{R}$ que son bilineales (es decir, son lineales en cada entrada) y alternantes (es decir $\rho(v_1, v_2) = -\rho(v_2, v_1)$).

Cuando ρ_1 y ρ_2 que pertenecen a $(\mathbb{R}^3_p)^*$ podemos obtener un elemento $\rho_1 \wedge \rho_2$ haciendo

$$(\rho_1 \wedge \rho_2)(v_1, v_2) = \det(\rho_i(v_j))$$

Por el teorema 2.3.2 se tiene $\{(dx_i \wedge dx_j)_p, i < j\}$ es una base para $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*_p$. Además,

$$(dx_i \wedge dx_j)_p = -(dx_j \wedge dx_i)_p,\ i \neq j$$

y

$$(dx_i \wedge dx_i)_p = 0$$

Definición 3.1.6. Un *campo de formas alternantes bilineales o una forma exterior de grado 2* en $\mathbb{R}^3$ es una correspondencia o un mapeo ω que asocia a cada $p \in \mathbb{R}^3$ un elemento $\omega(p) \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*_p$

$$\omega(p) = a_{12}(dx_1 \wedge dx_2)_p + a_{13}(dx_1 \wedge dx_3)_p + a_{23}(dx_2 \wedge dx_3)_p$$

o

$$\omega = \sum_{i<j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j \qquad i, j = 1, 2, 3$$

donde a_{ij} son funciones reales en $\mathbb{R}^3$. Cuando las funciones a_{ij} son diferenciables ω es una forma diferencial de grado 2.

Ahora generalizaremos la noción de forma diferencial en $\mathbb{R}^n$. Sea $p \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_p$ el espacio tangente de $\mathbb{R}^n$ en p y $(\mathbb{R}^n_p)^*$ su espacio dual. Sea $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$ el conjunto de todos los mapeos alternantes k-lineales

$$\rho : \mathbb{R}^n_p \times \cdots \times \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}$$

(alternantes significa que ρ cambia de signo con el intercambio de dos argumentos consecutivos). Con las operaciones usuales, $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$ es un espacio vectorial. Dados $\rho_1, ..., \rho_k \in \mathbb{R}^n_p$, podemos obtener un elemento $\rho_1 \wedge \rho_2 \wedge \ldots \rho_k$ de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$ haciendo

$$(\rho_1 \wedge \rho_2 \wedge \cdots \wedge \rho_k)(v_1, v_2, \cdots, v_k) = \det(\rho_i(v_j)),\ i, j = 1, \ldots, k$$

Se sigue de las propiedades del determinante que $\rho_1 \wedge \rho_2 \wedge \cdots \wedge \rho_k$ es en efecto k-lineal y alternante. En particular $(dx_{i_1})_p \wedge (dx_{i_2})_p \wedge \cdots (dx_{i_k})_p \in \Lambda^k\ (\mathbb{R}^n_p)^*,\ i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, \ldots, n$. Denotaremos este elemento por $(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})_p$.

Proposición 3.1.1. *(Proposición del teorema 2.3.2) El conjunto*

$$\{dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})_p, \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_k, \quad i_j \in \{1, \ldots, n\}$$

es base de $\Lambda^k\ (\mathbb{R}^n_p)^*$.

Definición 3.1.7. Una k-forma exterior en $\mathbb{R}^n$ es un mapeo ω que asocia a cada punto $p \in \mathbb{R}^n$ un elemento $\omega(p) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)^*$; por la proposición 3.1.1, ω puede escribirse de la forma

$$\omega(p) = \sum_{i1<\ldots<ik} a_{i_1\ldots ik}(p)(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})_p, \quad i_j \in \{1, \ldots, n\}$$

donde $a_{i_1\ldots i_k}$ son funciones reales en $\mathbb{R}^n$. Cuando las $a_{i_1\ldots i_k}$ son funciones diferenciables, ω es llamado una *k-forma diferencial.*

Denotaremos por I la k-upla $(i_1, \ldots, i_k)$, $i_1 < \ldots < i_k$, $i_j \in \{1, \ldots, n\}$, y se usará para la siguiente notación de ω :

$$\omega = \sum_I a_I\ dx_I$$

Establecemos la convención de que una 0-forma diferenciable es una función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.1.2. Podemos escribir los siguientes tipos de formas diferenciales en

$\mathbb{R}^2$
- 0-formas. Son funciones diferenciables en $\mathbb{R}^2$.
- 1-formas. $w = a_1dx_1 + a_2dx_2$.
- 2-formas. $w = a_{12}dx_1 \wedge dx_2$.

$\mathbb{R}^3$
- 0-formas. Son funciones diferenciables en $\mathbb{R}^3$.
- 1-formas. $w = a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3$.
- 2-formas. $w = a_{12}dx_1 \wedge dx_2 + a_{13}dx_1 \wedge dx_3 + a_{23}dx_2 \wedge dx_3$.
- 3-formas. $w = a_{123}dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

$\mathbb{R}^4$
- 0-formas. Son funciones en $\mathbb{R}^4$.
- 1-formas. $\omega = a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3 + a_4dx_4$
- 2-formas. $\omega = a_{12}dx_1 \wedge dx_2 + a_{13}dx_1 \wedge dx_3 + a_{14}dx_1 \wedge dx_4 + a_{23}dx_2 \wedge dx_3 + a_{24}dx_2 \wedge dx_4 + a_{34}dx_3 \wedge dx_4$
- 3-formas. $\omega = a_{123}dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + a_{124}dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + a_{134}dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + a_{234}dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$

- 4-formas. $\omega = a_{1234} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$

Desde ahora nos restringiremos a llamar de k-formas diferenciales a simplemente k-formas. Definiremos algunas operaciones sobre k-formas en $\mathbb{R}^n$.

Primero, si ω y ρ son 2 k-formas:

$$\omega = \sum_I a_I \; dx_I, \quad \rho = \sum_I b_I dx_I,$$

podemos definir su suma

$$\omega + \rho = \sum_I (a_I + b_I) dx_I$$

Si ω es una k-forma y ρ es una s-forma podemos definir su producto exterior $\omega \wedge \rho$ el cual es una $(k+s)$-forma, como sigue

Definición 3.1.8. Sean

$$\omega = \sum_I a_I dx_I, \quad I = (i_1, \ldots, i_k), \quad i_1 < \ldots < i_k,$$

$$\rho = \sum_I b_J dx_J, \quad J = (j_1, \ldots, j_s), \quad j_1 < \ldots < j_s.$$

por definición

$$\omega \wedge \rho = \sum_{IJ} a_I b_J \; dx_I \wedge dx_J.$$

Proposición 3.1.2. *Sean ω una k-forma, ρ una s-forma y θ una r-forma. Entonces:*

a) $(\omega \wedge \rho) \wedge \theta = \omega \wedge (\rho \wedge \theta)$

b) $(\omega \wedge \rho) = (-1)^{ks} (\rho \wedge \omega)$

c) $\omega \wedge (\rho + \theta) = \omega \wedge \rho + \omega \wedge \theta, \; si \; r = s$

Demostración. Para probar $b)$,escribimos

$$\omega = \sum_I a_I dx_I, \quad I = (i_1, \ldots, i_k), \quad i_1 < \ldots < i_k,$$

$$\rho = \sum_I b_J dx_J, \quad J = (j_1, \ldots, j_s), \quad j_1 < \ldots < j_s.$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\omega \wedge \rho &= \sum_{IJ} a_I b_J dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s} \\
&= \sum_{IJ} b_J a_I (-1) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{i_k} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s} \\
&= \sum_{IJ} b_J a_I (-1)^k dx_{j_1} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_2} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s}
\end{aligned}
$$

Puesto que J tiene s elementos, obtenemos por repetición del argumento de arriba para cada dx_{j_ℓ}, $j_\ell \in J$,

$$
\begin{aligned}
\omega \wedge \rho &= \sum_{JI} b_J a_I (-1)^{ks} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\
&= (-1)^{ks} \rho \wedge \omega
\end{aligned}
$$

■

En varias situaciones, es conveniente usar las formas diferenciales definidas sobre un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y sobre todo $\mathbb{R}^n$. Está claro que todo lo hecho hasta ahora se extiende trivialmente a esta situación.

Ejemplo 3.1.3. Sea ω una 1-forma en $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$ dado por

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y2}dy$$

Sea U el conjunto en el plano (r,θ) dado por $U = \{r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$ y sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el mapeo

$$f(r,\theta) = \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Calcular $f^*\omega$.

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
dx &= \frac{\partial}{\partial r} x dr + \frac{\partial}{\partial \theta} x d\theta = \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta)dr + \frac{\partial}{\partial \theta}(r\cos\theta)d\theta \\
&= \cos\theta dr - r\operatorname{sen}\theta d\theta \\
dy &= \frac{\partial}{\partial r} y dr + \frac{\partial}{\partial \theta} y d\theta = \frac{\partial}{\partial r}(r\operatorname{sen}\theta)dr + \frac{\partial}{\partial \theta}(r\operatorname{sen}\theta)d\theta \\
&= \operatorname{sen}\theta dr + r\cos\theta d\theta \\
x^2 + y^2 &= r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta = r^2
\end{aligned}
$$

De lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} f^*\omega &= -\frac{r\operatorname{sen}\theta}{r^2}(\cos\theta dr - r\operatorname{sen}\theta d\theta) + \frac{r\cos\theta}{r^2}(\operatorname{sen}\theta dr + \cos\theta d\theta) \\ &= -\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta dr + r\operatorname{sen}^2\theta d\theta}{r} + \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta dr + \cos^2\theta d\theta}{r} \\ &= \frac{r(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)d\theta}{r} \\ &= d\theta \end{aligned}$$

3.2. Producto exterior

En esta sección aprenderemos a acuñar formas diferenciales. Ya sabemos que podemos sumar formas y multiplicarlas por escalares, ahora definiremos su producto, llamado *producto cuña o producto exterior*, igual que con formas lineales. Denotemos por $\Omega^k(U)$ al conjunto de las k-formas diferenciales en U.

Definición 3.2.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $w \in \Omega^k(U)$, $\eta \in \Omega^r(U)$, con k, $r \geq 1$. Definimos $w \wedge \eta \in \Omega^{k+r}(U)$ punto a punto, es decir

$$(w \wedge \eta)(p) = w(p) \wedge \eta(p) \in \Lambda^{k+r}((\mathbb{R}^n)^*)$$

Observar que el producto cuña de la derecha es el producto cuña de formas multilineales ya definido. Si $k = 0$, $f \in \Omega^0(U)$, definimos $f \wedge w = w \wedge f = fw$.

Ejemplo 3.2.1. Hagamos el producto cuña de 1-forma en $\mathbb{R}^3$ con una 2-forma en $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} (xyzdx) \wedge (ydz \wedge dx + zdy \wedge dz) &= xy^2zdx \wedge dz \wedge dx + xyz^2dx \wedge dy \wedge dz \\ &= xyz^2dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

El producto cuña tiene las siguientes propiedades. Para todo $w \in \Omega^k(U)$, $\eta \in \Omega^r(U)$, $\theta \in \Omega^l(U)$ y $a \in \mathbb{R}$:

i) $w \wedge (\eta \wedge \theta) = (w \wedge \eta) \wedge \theta$ (propiedad asociativa).

ii) $(w + \eta) \wedge \theta = w \wedge \theta + \eta \wedge \theta$ (propiedad distributiva).

iii) $w \wedge (\eta + \theta) = w \wedge \eta + w \wedge \theta$ (propiedad distributiva).

iv) $(aw) \wedge \eta = w \wedge (a\eta) = a(w \wedge \eta)$ (propiedad homogenea).

v) $w \wedge \eta = (-1)^{kr} \eta \wedge w$

3.3. Derivada exterior

En matemáticas, el operador de *derivada exterior* (o diferencial exterior) de la topología diferencial, amplía el concepto del diferencial de una función a formas diferenciales a un grado más alto. Fue inventado, en su forma actual, por Élie Cartan.

Definimos una operación d la cual toma cada k-forma ω y la convierte en una $(k+1)$-forma $d\omega$.

Ejemplo 3.3.1. En $\mathbb{R}^3$ d funciona como sigue.

i) Para una 0-forma f

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

ii) Para la 1-forma $\omega = adx + bdy + cdz$, $d\omega$ se define por

$$d\omega = \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right)dxdy$$

iii) Para la 2-forma $\psi = adxdy + bdzdx + cdxdy$ se tiene que

$$d\psi = \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right)dxdydz$$

Definición 3.3.1. Sea $\omega = \sum a_I dx_I$ una k-forma en $\mathbb{R}^n$. El diferencial exterior $d\omega$ de ω es definido por

$$d\omega = \sum_I da_I dx_I$$

Proposición 3.3.1. *Propiedades de la derivada exterior.*

i) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$ *donde* ω_1 *y* ω_2 *son* k*-formas.*

ii) $d(\omega \wedge \rho) = d\omega \wedge +(-1)^k \omega \wedge d\rho$, *donde* ω *es una* k*-forma y* ρ *es una* s*-forma.*

iii) $d(d\omega) = d^2\omega = 0$.

iv) $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$, *donde* ω *es una* k*-forma en* $\mathbb{R}^m$ *y* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ *es un mapeo diferenciable.*

Demostración. $i)$ Es sencillo.

$ii)$ Sea $\omega = \sum_I a_I dx_I$, $\rho = \sum_J b_J dx_J$. Entonces

$$\begin{aligned} d(w \wedge \rho) &= \sum_{IJ} d(a_I b_J) \wedge dx_I dx_J \\ &= \sum_{IJ} b_J da_I \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{IJ} a_I db_J \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \rho + (-1)^k \sum_{IJ} a_I dx_I \wedge db_J \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \rho + (-1)^k \omega \wedge d\rho \end{aligned}$$

$iii)$ Para probarlo, primero asumamos que ω es una 0-forma, esto es, ω es una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que asocia cada $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ le corresponde un $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} d(df) = d\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) &= \sum_{j=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j\right) \end{aligned}$$

donde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

y $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i, i \neq j$, podemos obtener que

$$d(df) = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j = 0$$

Ahora consideremos a $\omega = \sum a_I dx_I$. Por $i)$, podemos restringirnos al caso $\omega = a_I dx_I$ con $a_I \neq 0$. Por $ii)$ tenemos que

$$d\omega = da_I dx_I + a_I d(dx_I)$$

Pero $d(dx_I) = d(1) dx_I = 0$. Además

$$d(d\omega) = d(da_I dx_I) = d(da_I) dx_I + da_I d(dx_I) = 0$$

donde $d(da_I) = 0$ y $d(dx_I) = 0$, con lo cual se prueba iii).

iv) Probaremos el resultado para una 0-forma. Sea $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una función diferenciable que asocia cada $(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}$ le corresponde un $g(y_1, \ldots, y_m)$. Entonces

$$\begin{aligned} f^*(dg) &= f^*\left(\sum_i \frac{\partial g}{\partial y_i} dy_i\right) = \sum_{ij} \frac{\partial g}{\partial y_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \\ &= \sum_j \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j} dx_j = d(g \circ f) = d(f^* g). \end{aligned}$$

Ahora, sea $\rho = \sum_I a_I dx_I$ una k-forma. Mediante el uso de lo anterior, y el hecho de que f^* conmuta con el producto exterior, obtenemos

$$\begin{aligned} d(f^*\rho) &= d\left(\sum_I f^*(a_I) f^*(dx_I)\right) \\ &= \sum_I d(f^*(a_I)) \wedge f^*(dx_I)) = \sum_I f^*(da_I) \wedge f^*(dx_I) \\ &= f^*\left(\sum_I da_I \wedge dx_I\right) = f^*(d\rho) \end{aligned}$$

con lo que se prueba iv). ■

3.4. Forma inducida (Pull-back)

Definición 3.4.1. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos del espacio euclídeo y $f : U \to V$ un mapeo diferenciable. Definimos la aplicación f^*: lleva k-formas diferenciables en V en k-formas diferenciales en U tal que, si $w \in \Omega^k(V)$, $p \in U$ y $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$, entonces:

$$f^*(w)(p)(v_1, \ldots, v_k) = w(f(p))(df_p(v_1), \ldots, df_p(v_k))$$

Para $k = 0$ definimos $f^*(g) = g \circ f$. Decimos que $f^*(w)$ es la *forma inducida de ω bajo f (pull-back)* de w por f.

Proposición 3.4.1. *Sean $f : U \to V$, $g : V \to W$ mapeos diferenciables entre abiertos del espacio euclídeo. La aplicación f^* tiene las siguientes propiedades para todo $w \in \Omega^k(V)$, $\eta \in \Omega^r(V)$:*

i) f^* es lineal.

ii) $f^*(w \wedge \eta) = f^*(w) \wedge f^*(\eta)$

iii) $(\mathrm{id}_U)^* = \mathrm{id}_{\omega^k(U)}$

iv) $(g \circ f) = f^* \circ g^*$

v) Si f es un difeomorfismo entonces f^* es un isomorfismo lineal, y verifica

$$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$$

Las propiedades tercera y cuarta nos dicen que la operación $*$ es un funcional contravariante.

Observación 3.4.1. Aplicando la segunda propiedad a una 0-forma, obtenemos:

$$f^*(gw) = f^*(g \wedge w) = f^*(g) \wedge f^*(w) = (g \circ f) \wedge f^*(w) = (g \circ f)f^*(w)$$

Lema 3.4.1. *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos, $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to V$ un mapeo diferenciable. Notemos que $x_1, \ldots x_n$ las coordenadas en $\mathbb{R}^n$, $y_1, \ldots, y_m$ las coordenadas en $\mathbb{R}^m$. Entonces:*

$$f^*(dy_i) = d(f_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j, \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

Demostración. Sea $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Veamos que $f^*(dy_i)(p)(v) = d(f_i)(p)(v)$. Por un lado tenemos:

$$d(f_i)(p)(v) = d(f_i)_p(v)$$

y por el otro:

$$\begin{aligned} f^*(dy_i)(p)(v) = (dy_i)(f(p))(df_p(v)) &= dy_i(df_p(v)) \\ &= dy_i(d(f_1)_p(v), \ldots, d(f_m)_p(v)) \\ &= d(f_i)_p(v) \end{aligned}$$

∎

Observación 3.4.2. Usamos en la demostración el hecho que dy_i es constante como forma diferencial pues al evaluarla en cualquier punto, obtenemos la forma multilineal dy_i.

Proposición 3.4.2. *Sea* $w \in \Omega^k(V)$ *tal que*

$$w = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} a_{i_1 \ldots, i_k} dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$$

entonces su pull-back para f *es tal que*

$$f^*(w) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} (a_{i_1, \ldots, i_k} \circ f) d(f_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(f_{i_k})$$

Demostración. Basta combinar el lema 3.4.1 anterior con la linealidad de f^*, la regla $f^*(w \wedge \eta) = f^*(w) \wedge f^*(\eta)$ y el hecho que $f^*(gw) = (g \circ f) f^*(w)$. ∎

Corolario 3.4.1. *Si* $w \in \Omega^k(V)$, *entonces* $f^*(w) \in \Omega^k(U)$, *por lo tanto restringiendo el pull-back a las* k*-formas diferenciales en* V, *diremos que* $f^* : \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$.

Demostración. Basta observar la proposición 3.4.2, que f es diferenciable y sus derivadas parciales son diferenciables, y que $a_{i_1, \ldots i_k} \circ f$ son funciones diferenciables. ∎

Proposición 3.4.3. *Sean* $U, V \subset \mathbb{R}^n$ *abiertos,* $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \to V$ *un mapeo diferenciable. Sea* $w \in \Omega^n(V)$. *Entonces*
$f^*(w)(p) = (\det df_p) w(f(p))$. *Explicitamente, si* $a : V \to \mathbb{R}$ *es una función diferenciable, entonces*

$$f^*(a dx_1 \wedge \cdots dx_n) = (a \circ f) \det(df) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Demostración. . Basta combinar la proposición 3.4.4 con la observación 3.4.1. ∎

Proposición 3.4.4. *Sea* $A : V \to V$ *una transformación lineal. Consideremos* $A^* : \Lambda^n(V^*) \to \Lambda^n(V^*)$. *Entonces* $A^*(T) = (\det A) T$. *Explícitamente, para todo* $v_1, \ldots, v_n \in V$ *se tiene que*

$$A^*(T) = T(Av_1, \ldots, Av_n) = (\det A) T(v_1, \ldots, v_n)$$

En particular, si $\phi_1, \ldots, \phi_n \in V^*$ *entonces*

$$A^*(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) = A^*(\phi_1) \wedge \cdots \wedge A^*(\phi_n) = (\det A) \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$$

Observación 3.4.3. Esta proposición nos dice explicitamente cómo luce el pull-back de una n-forma por una función lineal entre abiertos de $\mathbb{R}^n$. El lector atento quizá haya reconocido la forma del teorema de cambio de variable para integrales multiples y difeomorfismos.

Proposición 3.4.5. *La derivada exterior y el pull-back conmutan. Esto es, si $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ son abiertos, y $f = (f_1, \dots, f_m) : U \to V$ es un mapeo diferenciable, entonces $d \circ f^* = f^* \circ d$, es decir:*

$$d(f^*(w)) = f^*(dw), \forall w \in \Omega^k(V)$$

Demostración. Consideraremos tres casos. Primero lo probaremos para 0-formas, luego para $w = dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$, y luego aplicaremos la linealidad de d y de f^* para deducirlo en el caso general.

Caso 1. $k = 0$. Sea $a \in \Omega^0(V) = C^\infty(V)$.

$$\begin{aligned}
f^*(da) &= f^*\left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial a}{\partial y_j} dy_j\right) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial a}{\partial y_j} \circ f\right) f^*(dy_j) \\
&= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial a}{\partial y_j} \circ f\right) d(f_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a}{\partial y_j} \circ f\right) \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial a}{\partial y_j} \circ f\right) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right) dx_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial (a \circ f)}{\partial x_i}\right) dx_i \\
&= d(a \circ f) = d(f^*(a))
\end{aligned}$$

Caso 2 $w = dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$ con $1 \le k \le m, \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m\}$.

$$\begin{aligned}
d(f^*(w)) &= d(f^*(dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k})) = d(f^*(dy_{i_1}) \wedge \cdots \wedge f^*(dy_{i_k})) \\
&= d(d(f_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(f_{i_k})) = 0
\end{aligned}$$

La última igualdad se deduce aplicando iteradamente la regla $d(w \wedge \eta) = dw \wedge \eta + (-1)^k w \wedge d\eta$ y la relación $d^2 = 0$. Por otro lado $dw = 0$, luego $f^*(dw) = 0$.

Caso 3. Si $w \in \Omega^k(V)$, entonces

$$w = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} a_{i_1, \dots, i_k} dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$$

Por la linealidad de f^* y de d, basta probarlo para $w = a\eta = a \wedge \eta$ con $\eta = dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$. Como $d\eta = 0$ y $f^*(d\eta) = d(f^*(\eta)) = 0$;

$$\begin{aligned}
f^*(dw) &= f^*(d(a \wedge \eta)) = f^*(da \wedge +a \wedge \eta) \\
&= f^*(da) \wedge f^*(\eta) \\
d(f^*(w)) &= d(f^*(a \wedge \eta)) = d(f^*(a) \wedge f^*(\eta)) \\
&= d(f^*(a)) \wedge f^*(\eta) + f^*(a) \wedge d(f^*(\eta)) \\
&= d(f^*(a)) \wedge f^*(\eta)
\end{aligned}$$

Ya probamos que $f^*(da) = d(f^*(a))$, de donde $f^*(dw) = d(f^*(w))$. ■

3.5. Formas y campos en $\mathbb{R}^3$

Existe una correspondencia biunívoca entre formas y campos en $\mathbb{R}^3$, también entre la derivada exterior y ciertos operadores clásicos como el gradiente.

Ejemplo 3.5.1. Sea f una función diferenciable (una 0-forma) en $\mathbb{R}^3$. Podemos determinar df como

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Sea $w = F_1dx + F_2dy + F_3dz$ una 1-forma. Podemos determinar dw por

$$dw = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dxdy$$

Sea $\psi = F_1dydz + F_2dzdx + F_3dxdy$ una 2-forma. Determinamos $d\psi$ por

$$d\psi = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)dxdydz$$

Notemos que df, dw y $d\psi$ son funciones cuyas componentes son el gradiente, el rotacional y la divergencia respectivamente. De esta forma, podemos concluir que éstas forman parte de la misma operación en $\mathbb{R}^3$; el diferencial de formas.

Definimos *el laplaciano* por

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \in C^\infty(U)$$

Si escribimos simbólicamente $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, entonces obtenemos las igualdades simbólicas:

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F \quad \operatorname{div} F = \nabla \cdot F \quad \Delta f = \nabla \cdot \nabla f$$

A veces se emplea también la notación ∇^2 para el laplaciano.

Observación 3.5.1. Se puede determinar que $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$ y que $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$.

3.6. Formas cerradas y exactas

Definición 3.6.1. Sea $w \in \Omega^k(U)$. Decimos que w es *cerrada* si $dw = 0$; que es exacta si existe $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$ tal que $d\eta = w$. Se tiene entonces que

$$dw = d^2\eta = 0$$

Proposición 3.6.1. $d(dw) = 0$ *para toda* k*-forma* $w \in \Omega^k(U)$.

Demostración. Sea

$$w = w_{i_1\cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

entonces

$$dw = d(w_{i_1\cdots i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = w_{i_1\cdots i_k,p} dx_p \wedge dx_{i_j} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

luego

$$d(dw) = w_{i_1\cdots i_k,p\ell} dx_\ell \wedge dx_p \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

donde se están sumando índices simétricos k, ℓ con índices antisimétricos $dx_\ell \wedge dx_k$, por lo tanto $d(dw) = 0$. ■

Como $d^2 = 0$, toda forma exacta es cerrada. El reciproco no es en general válido. El estudio de por cúanto una forma cerrada no es exacta es objeto de estudio de la *cohomología de De Rham*.

Ejemplo 3.6.1. Sea $U = \mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$ y definimos $w \in \Omega^1(U)$ mediante

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

Calculando su derivada se tiene

$$\begin{aligned}
d\omega &= d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) dy - d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) dx \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) dy\right] dy \\
&\quad - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) dy\right] dx \\
&= \frac{(x^2+y^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy - \frac{(x^2+y^2) - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} dydx \\
&= \frac{2x^2 + 2y^2 - 2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy \\
&= 0
\end{aligned}$$

por lo tanto w es cerrada.

El ejemplo siguiente es un ejemplo clásico que vale la pena recordar. A veces w se dice *forma de ángulo* y se escribe $w = d\theta$.

Ejemplo 3.6.2. Sea $U = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$, $V = \mathbb{R}^2/\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$, $f : U \to V$ el cambio a coordenadas polares, es decir

$$f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$$

Como f es un difeomorfismo, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$ define $r, \theta : V \to \mathbb{R}$ como funciones de x e y. Probar que

$$d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

justificando el nombre forma de ángulo.

Observación 3.6.1. Si definimos $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, entonces definiendo $w \in \Omega^1(V)$ como antes, resulta exacta. Tenemos que $w = d\eta$ definiendo $\eta = f : V \to \mathbb{R}$ como $f(x,y) = \arctan(y/x)$.

Concluimos entonces que el dominio de una forma tiene la importancia suprema en su exactitud. Enunciaremos ahora un criterio importante para decidir si una forma es exacta.

Definición 3.6.2. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$. Dos curvas cerradas $\alpha, \gamma : S^1 \to U$ son homotópicas si existe un mapeo $F : S^1 \times [0,1] \to U$ diferenciable tal que:

$$F(x,0) = \alpha(x) \quad \forall x \in S^1$$
$$F(x,1) = \gamma(x) \quad \forall x \in S^1$$

Podemos pensar el segundo parámetro como el tiempo, por lo tanto dos curvas son homotópicas si es posible deformar diferenciablemente la una de la otra sin salirse de U.

Definición 3.6.3. Una curva diferenciable $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ se dice cerrada si $\alpha(a) = \alpha(b)$.

Definición 3.6.4. Un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ se dice contráctil si existe un mapeo diferenciable $F : U \times [0,1] \to U$ tal que:

$$F(x,0) = x \quad \forall x \in U$$

$$F(x, 1) = p \quad \forall x \in U$$

para algún $p \in U$. (Decimos que la identidad es *null-homotópica*, esto es, la identidad es homotópica a un punto, llegando a una definición más general de homotopía que la de antes).

Ejemplo 3.6.3. Verificar que los conjuntos con forma de estrella son contráctiles. Un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ tiene forma de estrella si existe $p_0 \in U$ (el centro) tal que para todo $p \in U$ se cumple que el segmento que une p con p_0 está en U, es decir si

$$\{tp + (1-t)p_0 : t \in [0, 1]\} \subset U$$

Intuitivamente, un espacio es contráctil si puede ser diferenciablemente contraído a un punto. Siguiendo con el ejemplo anterior, $\mathbb{R}^3/\{(0, 0, 0)\}$ sería simplemente conexo pero no contráctil. La recíproca siempre vale: si un espacio es contráctil entonces es simplemente conexo. Esta condición más fuerte nos permite enunciar el siguiente:

Lema de Poincaré. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto contráctil, entonces toda k-forma cerrada $w \in \Omega^k(U)$ es exacta, para todo $k > 0$.

Corolario 3.6.1. *Toda forma cerrada $w \in \Omega(\mathbb{R}^n)$ es exacta, para todo $n > 0$, $k > 0$.*

Lo hemos enunciado en su máxima generalidad: observemos qué ocurre en dimensión dos. Lo que pasa es que no precisamos la contractibilidad, en este caso basta con la conexión simple. Obtenemos el siguiente reultado:

Teorema 3.6.1. *Si $U \subset \mathbb{R}^2$ es un abierto simplemente conexo, entonces toda 1-forma cerrada $w \in \Omega^1(U)$ es exacta.*

Capítulo 4

Variedades diferenciales

4.1. Superficies diferenciables

La idea de la definición de una superficie tiene sus origenes en la construcción de mapas que describen un lugar específico de la tierra. El problema de describir una región del planeta obedeció al creciente comercio entre las naciones y a la consecuente necesidad de tener una descripción de las rutas de los viajes que se efectuaban para no tener que hacerlos más largos y costosos. La realización de un mapa se efectua de acuerdo a varias reglas necesarias para que fuese útil a cualquier persona que pudiera obtener copia de él.

Podemos expresar algunas de estas reglas de manera matemática, como sigue: Si U denota la región que se quiere describir con un mapa representado por $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, cada punto de la región $p \in U$ tiene asociado un punto y sólo uno en el mapa Ω, denotado por $q \in \Omega$, además, esta asociación es tal que punto cercanos del mapa corresponden a punto cercanos de la región, y recíprocamente; es decir, la asociación y su inversa son continuas. Por último y como consecuencia de lo anterior, si la región U tiene otra asociación con otro mapa Ω_0, entonces existe una correspondencia biyectiva entre los puntos de Ω_0 y Ω de tal forma que puntos cercanos de Ω_0 corresponden a puntos cercanos de Ω y recíprocamente.

Definición 4.1.1. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una *superficie topológica* si y sólo si para cualquier punto $p \in S$ existe una vecindad (relativa) de p en S y un homeomorfismo $\varphi : \Omega \to U$ de una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en U. La pareja (U, φ) se llamará una *parametrización* para la superficie S alrededor del punto p.

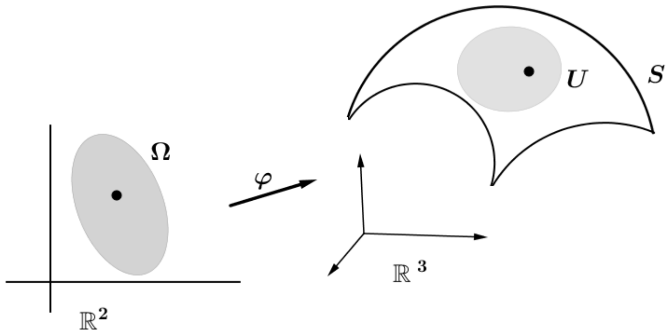

Figura 4.1: Superficie topológica en $\mathbb{R}^3$

De manera breve, se dice que una superficie topológica es *localmente homeomorfa* al plano.

Por supuesto, un conjunto es una superficie topológica si y sólo si para cada punto se puede dar el homeomorfismo $\psi : U \to \Omega$ inverso a cada parametrización. La pareja (U, ψ) se denomina una *carta* para S alrededor de p. Un conjunto de cartas $\{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ es un *atlas* para la superficie cuando las cartas cubren a S; es decir, cuando $S = \cup_i U_i$.

Asociando las coordenadas (u, v) en Ω y las coordenadas ambientales (x, y, z) para S en $\mathbb{R}^3$, la parametrización φ y su inversa ψ se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) = & \ (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ \psi(x, y, z) = & \ (u(x, y, z), v(x, y, z)) \end{aligned}$$

Decimos entonces que φ parametriza a S con el sistema de coordenadas (u, v) alrededor del punto p.

Ejemplo 4.1.1. Sea S^2_R la esfera de radio R y centro en el origen de coordenadas,

$$S^2_R = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

Para mostrar que S^2_R es una superficie topológica utilizaremos las proyecciones estereográficas desde los polos norte $P_n = (0, 0, R)$ y sur $P_s = (0, 0, -R)$ hacia el plano horizontal.

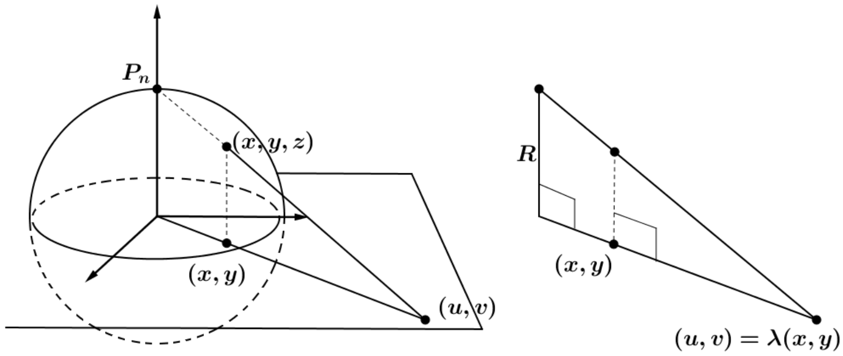

Figura 4.2: Proyección estereográfica de la esfera desde el polo norte.

Para proyectar la esfera desde el polo norte P_n hacia el plano horizontal, a cada punto de coordenadas ambientales (x, y, z) en la esfera le asociamos un punto en el plano horizontal con coordenadas (u, v), considerando la línea recta que pasa por el polo norte P_n y por el punto $p = (x, y, z)$. El punto asociado (u, v) del plano es aquel obtenido de la intersección de la recta mencionada y el plano, como se muestra en la figura 4.2.

De tal figura se obtiene que si (x, y) son las dos primeras coordenadas de p, entonces (u, v) es un múltiplo escalar de (x, y); es decir $(u, v) = \lambda(x, y)$ para algún escalar λ.

De la semejanza de triángulos que se muestra en la misma figura 4.2 se obtiene la igualdad

$$\frac{z}{R} = \frac{\lambda||(x, y)|| - ||(x, y)||}{\lambda||(x, y)||}$$

lo que implica que

$$\lambda = \frac{R}{R - z}$$

De esta forma se obtienen las expresiones para u, v en términos de x, y, z:

$$u = \lambda x = \frac{Rx}{R - z}, \quad v = \lambda y = \frac{Ry}{R - z}$$

De estas relaciones y de la igualdad $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ se obtiene que las expresiones inversas son

$$x = \frac{2R^2u}{u^2+v^2+R^2}, \quad y = \frac{2R^2v}{u^2+v^2+R^2}, \quad z = \frac{R(u^2+v^2-R^2)}{u^2+v^2+R^2}$$

Sea V_1 el conjunto abierto consistente en los puntos $\mathbb{R}^3$ que no están contenidos en el semieje positivo z. El conjunto $U_1 = V_1 \cap S_R^2 = S_R^2 \backslash \{P_n\}$ es una vecindad de p para cualquier punto $p \in S_R^2 \backslash \{P_n\}$. Si definimos la transformación continua $\psi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^2$ mediante

$$(u, v) = \psi_1(x, y, z) = \left(\frac{Rx}{R-z}, \frac{Ry}{R-z} \right)$$

se tiene una carta (U_1, ψ_1) para la esfera S_R^2. La inversa de ψ_1 es una parametrización continua $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to U_1$, $\varphi_1(u, v) = (x, y, z)$ dada mediante

$$\varphi_1(u, v) = \left(\frac{2R^2u}{u^2+v^2+R^2}, \frac{2R^2v}{u^2+v^2+R^2}, \frac{R(u^2+v^2-R^2)}{u^2+v^2+R^2} \right)$$

De manera análoga, para proyectar la esfera desde el polo sur hacia el plano horizontal, a cada punto con coordenadas (x, y, z) en la esfera le asociamos un punto con coordenadas (u_1, v_1), considerando la línea recta que pasa por el polo sur P_S y por el punto $p = (x, y, z)$. El punto asociado (u_1, v_1) del plano es aquel obtenido de la intersección de la recta y el plano.

En este caso se tienen las relaciones

$$u_1 = u_1(x, y, z) = \lambda x = \frac{Rx}{R+z}, \quad v_1 = v_1(x, y, z) = \lambda y = \frac{Ry}{R+z}$$

con las relaciones inversas

$$\begin{aligned} x &= \frac{2R^2u_1}{u_1^2+v_1^2+R^2} \\ y &= \frac{2R^2v_1}{u_1^2+v_1^2+R^2} \\ z &= -\frac{R(u_1^2+v_1^2-R^2)}{u_1^2+v_1^2+R^2} \end{aligned}$$

Si V_2 es el conjunto abierto consistente en los puntos de $\mathbb{R}^3$ que no están contenidos en el semieje negativo z, el conjunto $U_2 = V_2 \cap S_R^2$

es una vecidad de p para cualquier punto $p \in S_R^2 \backslash \{P_s\}$. La transformación continua $\psi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante la regla

$$(u_1, v_1) = \psi_2(x, y, z) = \left(\frac{Rx}{R+z}, \frac{Ry}{R+z} \right)$$

proporciona otra carta (U_2, ψ_2) para la esfera S_R^2. La inversa de ψ_2 es una parametrización continua $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to U_2$ definida mediante la regla de correspondencia $(x, y, z) = \varphi_2(u, v)$, con

$$\varphi_2(u, v) = \left(\frac{2R^2 u_1}{u_1^2 + v_1^2 + R^2}, \frac{2R^2 v_1}{u_1^2 + v_1^2 + R^2}, \frac{R(u_1^2 + v_1^2 - R^2)}{u_1^2 + v_1^2 + R^2} \right)$$

De esta forma, un atlas para la esfera viene dado por

$$\{(U_1, \psi_1), (U_2, \psi_2)\}$$

pues $S_R^2 = U_1 \cup U_2$. Esto muestra que la esfera S_R^2 es una superficie topológica. Obsérvese además que $U_1 \cap U_2 = S_R^2 \setminus \{P_n, P_s\}$ es un conjunto conexo.

Ejemplo 4.1.2. La parte superior del cono circular recto C definido por la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$, con $z \geq 0$, es una superficie topológica en $\mathbb{R}^3$. Consideremos las coordenadas (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ y (u, v) en el plano. La transformación continua $\varphi : \mathbb{R}^2 \to U \subset C$ definida mediante la regla de correspondencia

$$(x, y, z) = \varphi(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$$

es una parametrización de todo el cono C, lo cual lo hace una superficie topológica en $\mathbb{R}^3$.

En la definición de superficie topológica hemos establecido que cada punto en ella debe contar con una vecindad homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^2$. Para poder utilizar los elementos del cálculo, restringiremos nuestra atención a aquellas superficies cuyas cartas y parametrizaciones sean diferenciables.

Definición 4.1.2. Un *difeomorfismo* estre dos superficies regulares M y N es una aplicación diferenciable $f : M \to N$ que posee una inversa diferenciable, esto es, una aplicación entre superficies $g : N \to M$ tal que

$$g \circ f = \mathrm{id}_M, \quad f \circ g = \mathrm{id}_N$$

donde id_M y id_N denotan las aplicaciones identidad de M y N respectivamente.

Observación 4.1.1. La definición de función diferenciable se encuentra en el capítulo 1, páginas 15 y 16.

Definición 4.1.3. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una *superficie diferenciable* si y sólo si para cada punto $p \in S$ existe una vecindad U de p en S y un difeomorfismo $\varphi : \Omega \to U$ de una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en U.

De manera análoga a la definición 4.1.1, la pareja (U, φ) es una parametrización alrededor de p y si $\psi = \phi^{-1}$, entonces (U, ψ) es una carta para la superficie S alrededor del punto p, y un conjunto de cartas $\{(U_i, \psi_i)\}$ es un atlas para la superficie cuando $S = \cup_i U_i$.

Ejemplo 4.1.3. En el ejemplo 4.1.1 vimos que la esfera S^2_R es una superficie topológica. Las transformaciones que utilizamos en ese ejemplo son también diferenciables, por lo que la esfera es una superficie diferenciable.

Sean p un punto de una superficie y (U, φ) una parametrización en p. Entonces φ tiene una inversa ψ diferenciable, de modo que existe una transformación diferenciable Ψ definida en una vecindad ordinaria de p en $\mathbb{R}^3$ tal que $\Psi \circ \varphi = \mathrm{id}$. Por la regla de la cadena, tenemos que

$$d\Psi_p \circ d\varphi_q = \mathrm{id}$$

donde $q = \varphi^{-1}(p)$. Esto nos dice que la transformación $d\varphi_q$ es inyectiva. Para traducir este hecho a una forma matricial, sean (u, v) las coordenadas en $\mathbb{R}^2$ y (x, y, z) las coordenadas en $\mathbb{R}^3$, de modo que

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

La matriz asociada a $d\varphi_q$ tiene entonces la forma

$$D\varphi_q = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

donde por ejemplo, x_u denota la parcial de x con respecto de u.

Sabemos también que los vectores columna de esta matriz son imágenes de los vectores e_1, e_2 de la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Denotemos estos vectores como φ_u, φ_v:

$$d\varphi_q(e_1) = (x_u, y_u, z_u) = \varphi_u, \quad d\varphi_q(e_2) = (x_v, y_v, z_v) = \varphi_v$$

El álgebra lineal nos proporciona el siguiente resultado.

Proposición 4.1.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La transformación lineal $d\varphi_q$ es inyectiva.*
2. *La matriz jacobiana $D\varphi_q$ tiene rango 2.*
3. *Algunos de los menores*

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}$$

   denotados respectivamente por

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \quad \frac{D(z,x)}{D(u,v)},$$

   es dintinto de cero en q.

4. *La expresión*

$$\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2$$

   es destinta de cero en q.

5. *El producto cruz*

$$\varphi_u \times \varphi_v = \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, -\frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)$$

   es distinta de cero en q.

6. *Los vectores φ_u y φ_v son linealmente independientes, es decir, no colineales.*

Este resultado nos proporciona varios criterios para analizar otros ejemplos de superficies diferenciables.

4.2. Caracterizaciones de las superficies

En esta sección revisaremos algunos métodos para obtener una gran variedad de ejemplos de superficies. Primero mostraremos que la gráfica de cualquier función diferenciable definida en una región del plano es una superficie diferenciable $S \subset \mathbb{R}^3$.

Lema 4.2.1. *Sean Ω una región de $\mathbb{R}^2$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces la gráfica de f es una superficie diferenciable.*

Demostración. Si S es la gráfica de f en $\mathbb{R}^3$, basta definir la parametrización

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

con $x = u, y = v$ y $z = f(x, y) = f(u, v)$ para $(u, v) \in \Omega$. Es claro que la proyección $(x, y, z) \to (x, y)$ restringida a S define una carta global para S. ∎

Definición 4.2.1. Sean $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $p \in \Omega$. Decimos que p es un *punto regular* de F si DF_p no se anula. Decimos que $a \in \mathbb{R}$ es un *valor regular* de F si cualquier $p \in F^{-1}(a)$ es un punto regular.

Notemos que si a es un valor regular que no está en la imagen de F, entonces a es un valor regular.

En las coordenadas (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, DF_p no se anula si y sólo si alguna de las derivadas parciales

$$\frac{\partial F}{\partial x}(p), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(p), \quad \frac{\partial F}{\partial z}(p)$$

es dintinta de cero; esto es, si y sólo si el vector gradiente

$$\nabla F_p = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)_p$$

es dintinto de $(0, 0, 0)$.

Lema 4.2.2. *Sean $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $a \in F(\Omega)$ un valor regular de F. Entonces el conjunto de nivel de F en a, definido por*

$$S = F^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in \Omega | F(x, y, z) = a\},$$

es una superficie diferenciable y es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^3$.

Demostración. Sea p_0 un punto regular en $F^{-1}(a)$. Entonces el gradiente de F no se anula en p_0. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$. Por el teorema de la función implicita, existe una vecindad Ω' de (x_0, y_0) en $\mathbb{R}^2$ y una función $f(x, y)$ definida en Ω' tales que un punto (x, y, z) está en $\Omega \cap F^{-1}(a)$ si y sólo si $z = f(x, y)$. Es decir, $F^{-1}(a)$ se puede describir localmente como la gráfica de la función $z = f(x, y)$. Por el lema anterior se tiene que $F^{-1}(a)$ es una superficie diferenciable. S es un conjunto cerrado, pues es la imagen del conjunto cerrado $\{a\}$ bajo la función continua F ■

Ejemplo 4.2.1. Sea E el elipsoide en $\mathbb{R}^3$ definido mediante

$$E = \left\{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$$

Veremos que E es una superficie diferenciable, mostrando que es la imagen inversa de un valor regular.

Se tiene que $E = F^{-1}(0)$ para la función

$$F(x, y, z) = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$$

El gradiente

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = \left(-\frac{2x}{a^2}, -\frac{2y}{b^2}, -\frac{2z}{c^2}\right)$$

se anula si y sólo si $x = y = z = 0$. Pero el punto $(0, 0, 0)$ no pertenece a E, de donde todos los puntos son regulares. Por el lema 4.2.2 E es una superficie diferenciable en R^3.

Ejemplo 4.2.2. El hiperboloide de dos hojas en $\mathbb{R}^3$ es el conjunto

$$H = \{(x, y, z) | 1 = -x^2 - y^2 + z^2\}$$

Si definimos la función diferenciable $F(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$, entonces el hiperboloide está dado por $H = F^{-1}(1)$. El gradiente de F está dado por $\nabla F = (-2x, -2y, 2z)$ y se anula sólo si $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Como tal punto no está en H, el lema 4.2.2 implica que H es una superficie diferenciable. Notemos que H es un conjunto disconexo.

Lema 4.2.3. *Toda superficie diferenciable es localmente la gráfica de una función diferenciable de dos variables.*

Demostración. Sean p un punto en S y $\varphi : \Omega \to U$ una parametrización de una vecindad de p. Utilizando las coordenadas (u, v) en Ω y (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$, sabemos que uno de los menores que aparecen en el tercer inciso de la proposición 4.1.1 es distinto de cero. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(q) \neq 0$$

donde $\varphi(q) = p$. Consideremos la proyección π de $\mathbb{R}^3$ en el plazo xy dada por $\pi(x, y, z) = (x, y)$ y analicemos la composición $\pi \circ \varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$(\pi \circ \varphi)(u, v) = \pi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (x(u, v), y(u, v))$$

Entonces

$$D(\pi \circ \varphi)_q = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}, \quad \det D(\pi \circ \varphi)_q = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$$

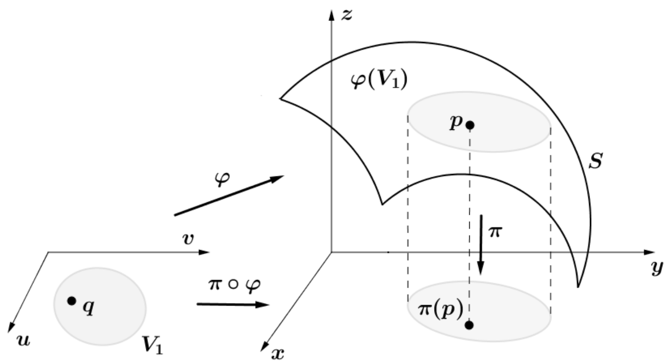

Figura 4.3: Superficie diferenciable vista localmente como una gráfica en $\mathbb{R}^3$.

Por el teorema de la función inversa, existen vecindades $V_1 \subset \mathbb{R}^2$ de q y V_2 en el plano xy de $\pi(p)$ tales que la transformación diferenciable $\pi \circ \varphi : V_1 \to V_2$ tiene una inversa diferenciable, que denotaremos por

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

Tenemos entonces que

$$z = z(u, v) = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$$

lo que implica que S es localmente la gráfica de la función f. ■

Ejemplo 4.2.3. Veremos que la parte superior del cono circular recto C definido por la ecuación

$$x^2 + y^2 = z^2$$

no es una superficie diferenciable.

Supongamos que C es diferenciable. Por el lema 4.2.3 C se puede expresar cerca $(0,0,0)$ mediante alguna de las siguientes formas,

$$z = f(x,y), \quad x = h(y,z), \quad y = g(x,z)$$

donde f, g, h son funciones diferenciables. Las dos últimas expresiones pueden descartarse, pues las proyecciones correspondientes no son inyectivas. Por último, si $z = f(x,y)$, entonces f coincidiría con la función $\sqrt{x^2+y^2}$ en una vecindad de $(0,0,0)$. Esto no es posible, pues $\sqrt{x^2+y^2}$ no es diferenciable en el origen.

4.3. Primera forma fundamental

En esta sección empezaremos con el estudio de más estructuras geométricas en la superficie. La más importante de éstas es quiza la *primera forma fundamental*. Geométricamente, como veremos dentro de un momento, ésta nos permite hacer mediciones sobre la superficie (longitudes de curvas, ángulos de vectores tangentes, áreas de regiones) sin referirnos al espacio ambiente $\mathbb{R}^3$ donde se halla la superficie.

El producto interior natural de $\mathbb{R}^3 \supset S$ induce en cada plano tangente $T_p(S)$ de una superficie regular S un producto interior, que se denotará por $\langle , \rangle_p$. Si $w_1, w_2 \in T_p(S) \subset \mathbb{R}^3$, entonces $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ es igual al producto interior de w_1 y w_2 como vectores de $\mathbb{R}^3$. A este producto interior, que es una forma bilineal simétrica, es decir, $\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle w_2, w_1 \rangle_p$ es lineal, separadamente, en w_1 y w_2, corresponde una forma cuadrática $I_p : T_p(S) \to \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0 \tag{4.1}$$

Definición 4.3.1. La forma cuadrática I_p en $T_p(S)$, definida por la ecuación 4.1, se denomina la *primera forma fundamental* de la superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ en $p \in S$.

Por consiguiente, la primera forma fundamental es simplemente la expresión de cómo la superficie S hereda el producto interior natural de $\mathbb{R}^3$.

Ahora expresaremos la primera forma fundamental en la base $\{x_u, x_v\}$ asociada a la parametrización $x(u,v)$ en p. Cualquier vector $w \in T_pS$ se escribe de la siguiente manera:

$$w = h(u,v)x_u(u,v) + k(u,v)x_v(u,v)$$

siendo $h, k \in C^\infty(U)$. Por simplicidad, escribimos:

$$w = hx_u + kx_v$$

Tenemos:

$$\begin{aligned}
\langle w_1, w_2 \rangle &= w_1 \cdot w_2 = (h_1x_u + k_1x_v) \cdot (h_2x_u + k_2x_v) \\
&= h_1x_u(h_2x_u + k_2x_v) + k_1x_v(h_2x_u + k_2x_v) \\
&= h_1h_2(x_u \cdot x_u) + h_1k_2(x_u \cdot x_v) + h_2k_1(x_u \cdot x_v) + k_1k_1(x_v \cdot x_v) \\
&= h_1h_2E + h_2k_1F + h_1k_2F + k_1k_2G \\
&= \begin{pmatrix} h_1E + k_1F \\ h_1F + k_1G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 \\ k_2 \end{pmatrix} \\
&= (h_1, k_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 \\ k_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
E(u,v) &= \langle x_u, x_u \rangle_p, \\
F(u,v) &= \langle x_u, x_v \rangle_p, \\
G(u,v) &= \langle x_v, x_v \rangle_p
\end{aligned}$$

Son los coeficientes de la primera forma fundamental en la base $\{x_u, x_v\}$ de $T_p(S)$.

$$I_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$$
$$I_p(w_1, w_2) = (h_1, k_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Siendo (h_1, k_1) y (h_2, k_2) las coordenadas de w_1 y w_2 respectivamente, en la base $\{x_u, x_v\}$ de T_pS.

Haciendo a p recorrer el entorno coordenado correspondiente a $x(u,v)$ obtenemos las funciones $E(u,v), F(u,v), G(u,v)$ que son diferenciables en ese entorno.

De ahora en adelante supriremos el subíndice p en la expresión del producto interior o de la forma cuadrática cuando sea claro del contexto a qué punto nos estamos refiriendo.

Ejemplo 4.3.1. Un sistema de coordenadas para un plano $P \subset \mathbb{R}^3$ que pasa por $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y continen al sistema ortonormal $\{w_1, w_2\}$, $w_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $w_2 = (b_1, b_2, b_3)$, viene dado como sigue:

$$x(u,v) = p_0 + uw_1 + vw_2, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

Para calcular la primero forma fundamental en un punto arbitrario de P observamos que $x_u = w_1$, $x_v = w_2$; ya que w_1 y w_2 son vectores unitarios ortogonales, las funciones E, F, G son constantes y vienen dadas por

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1$$

En este caso trivial, la primera forma fundamental es esencialmete el teorema de Pitágoras en P; es decir, el cuadrado de la longitud de un vector w que tiene coordenadas a, b en la base $\{x_u, x_v\}$ es igual a $a^2 + b^2$.

Ejemplo 4.3.2. El cilindro recto apoyado sobre el círculo $x^2+y^2 = 1$ admite la parametrización $x : U \to \mathbb{R}^3$, donde

$$x(\theta, \varphi) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \varphi)$$
$$U = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2; \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad -\infty < \varphi < \infty\}$$

Para calcular la primera forma fundamental, observamos que

$$x_\theta = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0), \quad x_\varphi = (0,0,1)$$

y, por consiguiente

$$E = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad F = 0, \quad G = 1$$

Ejemplo 4.3.3. Calcularemos la primera forma fundamental de una esfera en un punto del entorno coordenado asociado a la parametrización

$$x(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta)$$

Primero, obsérvese que

$$\begin{aligned} x_\theta(\theta,\varphi) &= (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\operatorname{sen}\varphi, -\operatorname{sen}\theta), \\ x_\varphi(\theta,\varphi) &= (-sen\theta\operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta\cos\varphi, 0) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} E(\theta,\varphi) &= \langle x_\theta, x_\theta\rangle = 1, \\ F(\theta,\varphi) &= \langle x_\theta, x_\varphi\rangle = 0, \\ G(\theta,\varphi) &= \langle x_\varphi, x_\varphi\rangle = \operatorname{sen}^2\theta, \end{aligned}$$

Por tanto, si w es un vector tangente a la esfera en el punto $x(\theta,\varphi)$, expresando en la base asociada a $x(\theta,\varphi)$ por

$$w = ax_\theta + bx_\varphi$$

entonces el cuadrado de la longitud de w viene dado por

$$|w|^2 = I(w) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2 = a^2 + b^2\operatorname{sen}^2\theta$$

Como aplicación, determinemos las curvas de este entorno coordenado de la esfera que forman un ángulo constante β con los meridianos φ =costante. Estas curvas se denominan *loxodromas* (*líneas de rumbo*) de la esfera.

Podemos suponer que la curva requerida $\alpha(t)$ es la imagen por x de una curva $(\theta(t),\varphi(t))$ del plano $\theta\varphi$. En el punto $x(\theta,\varphi)$ donde la curva encuentra al meridiano φ =constante, tenemos

$$\cos\beta = \frac{\langle x_\theta, \alpha'(t)\rangle}{|x_\theta||\alpha'(t)|} = \frac{\theta'}{\sqrt{(\theta')^2 + (\varphi')^2\operatorname{sen}^2\theta}}$$

ya que la base $\{x_\theta, x_\varphi\}$ el vector $\alpha'(t)$ tiene coordenadas (θ',φ') y el vector x_θ tiene coordenadas $(1,0)$. Se deduce que

$$\begin{aligned} (\theta')^2\tan^2\beta - (\varphi')^2\operatorname{sen}^2\theta = 0 \\ \frac{\theta'}{\operatorname{sen}\theta} = \pm\frac{\varphi}{\tan\beta} \end{aligned}$$

de donde, por integración, obtenemos la ecuación de las loxodromas

$$\log\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm(\varphi + c)\cot\beta$$

y donde la constante de la integración c queda determinada al dar un punto $x(\theta_0,\varphi_0)$ por donde pasa la curva.

4.3.1. Aplicaciones

1. Cálculo de la longitud de una curva contenida en la superficie.

Vamos a calcular la distancia entre dos puntos $P = x(u_0, v_0)$ y $Q = x(u_1, v_1)$ de la superficie. Consideremos una curva en la superficie S con parametrización

$$\gamma(t) = x(u(t), v(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$$

tal que en t_0 estemos en el puntp P y en t_1 estemos en el punto Q, esto es

$$\begin{aligned} P = & \ \gamma(t_0) = x(u(t_0), v(t_0)) \\ Q = & \ \gamma(t_1) = x(u(t_1), v(t_1)) \end{aligned}$$

Llamamos L a la longitud de curva entre los puntos P y Q. Se tiene;

$$L = \int_{t_0}^{t_1} ||\gamma'(t)|| dt$$

Como

$$\begin{aligned} ||\gamma'(t)||^2 = & \ (x_u u'(t) + x_v v'(t)) \cdot (x_u u'(t) + x_v v'(t)) \\ = & \ (u'(t))^2 x_u \cdot x_u + 2u'(t)v'(t) x_u \cdot x_v + (v'(t))^2 x_v \cdot x_v \\ = & \ E(u'(t))^2 + 2F u'(t) v'(t) + G(v'(t))^2 \\ = & \ I_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \end{aligned}$$

Tenemos que

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I_{\gamma(t)} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle)}$$

2. Cálculo del ángulo que forman en p dos curvas C_1 y C_2 contenidas en la superficie.

Sea w_1 el vector tangente a C_1 en p y sea w_2 el vector tangente a C_2 en p. El ángulo θ que forman las dos curvas C_1, C_2 es el ángulo que forman sus respectivos vectores tangentes en p. Por tanto,

$$\cos\theta = \frac{w_1 \cdot w_2}{||w_1|| ||w_2||} = \frac{I_p \langle w_1, w_2 \rangle}{I_p \langle w_1, w_2 \rangle^{1/2} I_p \langle w_1, w_2 \rangle^{1/2}}$$

Las curvas C_1 y C_2 sor ortogonales si $\theta = \pi/2$; esto es, si $I_p\langle w_1, w_2\rangle = 0$. Si C_1 y C_2 son las curvas coordenadas; esto es, $w_1 = (1,0)$ y $w_2 = (0,1)$, entonces

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

3. Cálculo del área de una región Σ de la superficie.

Consideremos la región Σ de la superficie limitada por las curvas coordenadas

$$x(u_0, v), \quad x(u_0 + \Delta u, v), \quad x(u, v_0), \quad x(u, v_0 + \Delta v)$$

El incremento de área A de la región Σ viene dada por el producto de las longitudes de sus lados por el seno del ángulo que forman, esto es,

$$\begin{aligned} \Delta A = & \; ||x_u(u_0,v_0)||\,||x_v(u_0,v_0)|| \operatorname{sen}\alpha \Delta u \Delta v \\ = & \; ||x_u(u_0,v_0) \wedge x_v(u_0,v_0)||\Delta u \Delta v \\ = & \; \sqrt{EG - F^2}\Delta u \Delta v \end{aligned}$$

Por lo tanto, el área de la región Σ puede calcularse mediante la siguiente integral

$$A = \int\int_{\Sigma} \sqrt{EG - F^2} du dv$$

4. Cálculo de loxodromas. (Ver ejemplo 4.3.3).

4.4. Segunda forma fundamental

En el estudio de curvas, la curvatura mide la tasa de variación de la recta tangente en el entorno de un punto de la curva. Extendemos esta idea al estudio de superficies. Vamos a medir la distancia entre la superficie y el plano tangente a la superficie en un punto $p \in S$, en puntos de la superficie próximos al punto p. Para ello vamos a estudiar cómo varía el campo normal unitario N en un entorno del punto p.

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con representación paramétrica regular

$$x(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$$

El campo normal unitario N asigna a cada punto p de la superficie, su vector normal unitario; esto es,

$$N : U \to \mathbb{R}^3$$
$$N(u,v) = \frac{x_u(u,v) \wedge x_v(u,v)}{||x_u(u,v) \wedge x_v(u,v)||}$$

Usaremos la notación $N(u,v), N_p$ indistintamente y denotaremos $DN_p(w)$ a la derivada direccional de la aplicación N en el punto p y en la dirección del vector unitario w ($||w|| = 1$) tangente a la superficie en el punto p. (Ver figura 4.1).

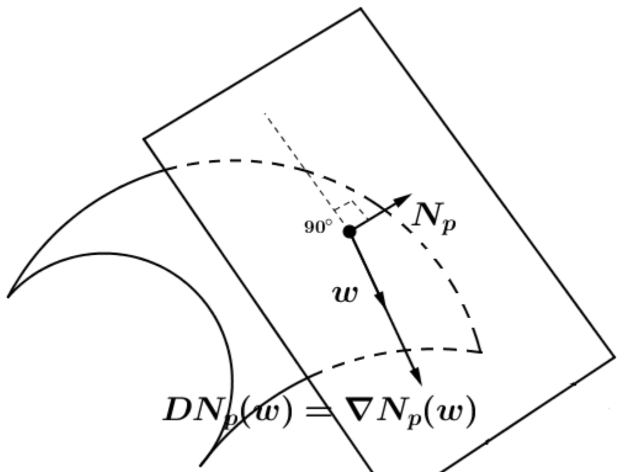

Figura 4.4: $DN_p \in T_pS$ es perpendicular a N_p.

Definición 4.4.1. Llamamos segunda forma fundamental de S en p a la forma cuadrática II_p definida en T_pS de la siguiente manera:

$$II_p : T_pS \to \mathbb{R},$$
$$II_p(w) = -DN_p(w) \cdot w$$

Vamos a calcular la expresión analítica de la segunda forma fundamental en la base $\{x_u(u,v), x_v(u,v)\}$ de T_pS. Cualquier vector $w \in T_pS$

se escribe de la siguiente manera:

$$w = h(u,v)x_u(u,v) + k(u,v)x_v(u,v)$$

También

$$\begin{aligned} DN_p(w) &= \nabla N_p \cdot w \\ &= (N_u(u,v), N_v(u,v)) \cdot (h(u,v), k(u,v)) \\ &= h(u,v)N_u(u,v) + k(u,v)N_v(u,v) \end{aligned}$$

Por simplicidad, escribimos $w = hx_u + kx_v$ y $DN_p(w) = hN_u + kN_v$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} II_p(w) &= -DN_p(w) \cdot w \\ &= -(hN_u + kN_v) \cdot (hx_u + kx_v) \\ &= -[h^2N_u(hx_u + kx_v) + kN_v(hx_u + kx_v)] \\ &= -[h^2x_uN_u + hkx_vNu + hkx_uN_v + k^2x_vN_v] \\ &= -h^2x_uN_u - hk(x_vN_u + x_uN_v) - k^2x_vN_v \\ &= eh^2 + 2fhk + gk^2 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} e &= -x_u \cdot N_u = x_{uu} \cdot N \\ 2f &= -(x_u \cdot N_v + x_v \cdot N_u) = 2x_{uv} \cdot N \\ g &= -x_v \cdot N_v = x_{vv} \cdot N \end{aligned}$$

Las fórmulas anteriores de obtienen teniendo en cuenta que $x_u \cdot N = 0$ y $x_v \cdot N = 0$ pues $x_u, x_v \in T_pS$. Por tanto, derivando estas igualdades tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial u}(x_u \cdot N) = x_{uu} \cdot N + x_u \cdot N_u \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial v}(x_u \cdot N) = x_{uv} \cdot N + x_u \cdot N_v \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial u}(x_v \cdot N) = x_{vu} \cdot N + x_v \cdot N_u \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial v}(x_v \cdot N) = x_{vv} \cdot N + x_v \cdot N_v \end{aligned}$$

4.5. Variedades diferenciales

En términos poco rigurosos matemáticamente, se puede decir que una *variedad* es un espacio topológico que localmente se ”parece” a un espacio euclídeo, y que una variedad diferenciable es una variedad M para la que ese ”parecido” es lo que suficientemente grande como para permitir la existencia de la derivación parcial y, en consecuencia, que se verifiquen las propiedades del cálculo diferencial sobre M.

El estudio de variedades diferenciales involucra la topología, puesto que diferenciabilidad implica continuidad; sin embargo, las propiedades métricas de lo espacios euclídeos no están a priori incluidas. En este capítulo se establece la definición de variedad diferenciable, y se introduce parte de los objetos estándar asociados con ella.

Es bien conocido que el conjunto $\mathbb{R}^n$ de las n-tuplas de números reales es un espacio vectorial, al tiempo que es también un espacio topológico tal que las operaciones vectoriales son continuas con respecto a su topología. Además, existe el concepto de diferenciabilidad para funciones con valores reales definidas sobre $\mathbb{R}^n$; se dice que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (donde $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$) es diferenciable si existen las derivadas parciales

$$\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_r} f}{\partial u_1^{i_1} \cdots \partial u_r^{i_r}}$$

de todos los órdenes. Tales funciones se denominan funciones de clase C^∞; contrastan, por una parte, con las funciones de clase C^k (es decir, las funciones que tienen derivadas parciales continuas hasta el orden k) y, por otra parte, con las funciones analíticas, es decir, las funciones desarrolladas en series convergentes de potencias. Si se representan dichos conjuntos de funciones por $C^\infty(\mathbb{R})^n$, $C^k(\mathbb{R})^n$ y $C^w(\mathbb{R})^n$, respectivamente, se verifican las siguientes inclusiones estrictas

$$C^w(\mathbb{R})^n \subset C^\infty(\mathbb{R})^n \subset C^k(\mathbb{R})^n$$

Definición 4.5.1. Todo espacio topológico M Hausdorff y segundo numerable que sea localmente homeomorfo al espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ se llama *variedad topológica de dimensión* n.

La noción de variedad topológica nos permite definir a las cartas de una variedad topólogica.

Definición 4.5.2. Una *carta* en una variedad M es una pareja de la forma (U, φ) donde $U \subset M$ es abierto y $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo.

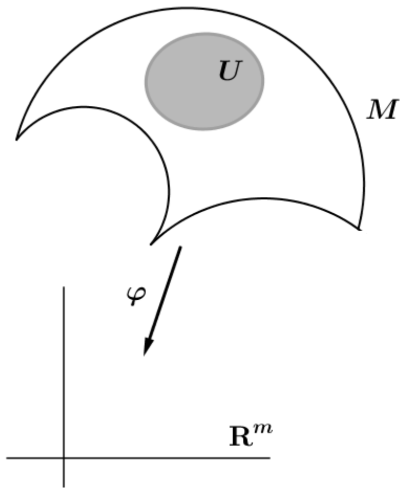

Figura 4.5: Variedad M

Consideremos dos cartas (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) para las cuales $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Entonces

$$\begin{aligned} \varphi_{12} = \varphi_1 \circ (\varphi_2)^{-1} : &\quad \varphi_2(U_1 \cap U_2) \to \varphi_1(U_1 \cap U_2) \\ \varphi_{21} = \varphi_2 \circ (\varphi_1)^{-1} : &\quad \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2) \end{aligned}$$

se llaman *cambios de coordenadas* o *funciones de transición.*

Definición 4.5.3. Llamaremos *atlas topológico* o de clase C^0 de la variedad M a toda colección de cartas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)_{i \in I}\}$ que cubra a M. Es decir, tal que $M = \cup_{i \in I} U_i$. Cuando M admite un atlas de clase C^∞ diremos que M es una *variedad suave* o *diferenciable.*

Definición 4.5.4. Diremos que dos cartas $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ en una variedad topológica M son *suavemente equivalentes* si las funciones de transición φ_{12} y φ_{21} que éstas definen son suaves. Diremos también que un atlas $\mathcal{A}$ de una variedad M es *maximal* si cada carta de (U, φ) que sea compatible con todas las cartas de $\mathcal{A}$ está contenida en $\mathcal{A}$.

Definición 4.5.5. Una función $f : M \to N$ entre dos variedades diferenciables de dimensiones m y n se dice *diferenciable* en un punto $p \in M$ si es continua en p y existen cartas (U, φ) y (V, ψ) de p y $f(p)$ tales que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \psi^{-1}(V)) \to \mathbb{R}^n$$

es una función diferenciable en $\varphi(p)$.

Podemos extender la definición de diferenciabilidad a abiertos $U \subset M$. De la misma manera, el hecho de diferenciabilidad no depende de las cartas que se escojan.

Definición 4.5.6. Una función $f : M \to N$ se dice *diferenciable* en un punto $p \in M$ si f es continua en p y existen cartas (U, φ) y (V, ψ) centradas en p y $f(p)$ tales que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ sea diferenciable en $\varphi(p)$.

Al conjunto de todas las funciones diferenciables entre dos variedades M y N se le denota usualmente por $C^\infty(M, N)$.

Definición 4.5.7. Una variedad diferenciable n-dimensional es un conjunto M junto con una familia de mapeos inyectivos $f_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de conjuntos abiertos U_α de $\mathbb{R}^n$ en M tal que:

1. $\bigcup_\alpha f_\alpha(U_\alpha) = M$.
2. Para cada par α, β con $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = w \neq \phi$, los conjuntos $f_\alpha^{-1}(w)$ y $f_\beta^{-1}(w)$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ y los mapeos $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$, $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$ son diferenciables. (Ver figura 4.7).
3. La familia $\{U_\alpha, f_\alpha\}$ es relativa maximal para 1 y 2.

Ejemplo 4.5.1. El plano proyectivo $p^2(\mathbb{R})$.

Denotaremos por $P^2(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las líneas en $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen $(0, 0, 0)$, es decir, el conjunto de direcciones de $\mathbb{R}^3$. Deseamos dotar a $p^2(\mathbb{R})$ de una estructura diferenciable. Para tal fin, sea $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ y notamos que $p^2(\mathbb{R})$ es el espacio cociente $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ dado por la relación de equivalencia $\sim$:

$$(x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$$

Los puntos de $p^2(\mathbb{R})$ serán denotados por $[x, y, z]$. Definimos los conjuntos $V_1, V_2, V_3 \in p^2(\mathbb{R})$ por:

$$V_1 = \{[x, y, z]; x \neq 0\},$$
$$V_2 = \{[x, y, z]; y \neq 0\},$$
$$V_3 = \{[x, y, z]; z \neq 0\},$$

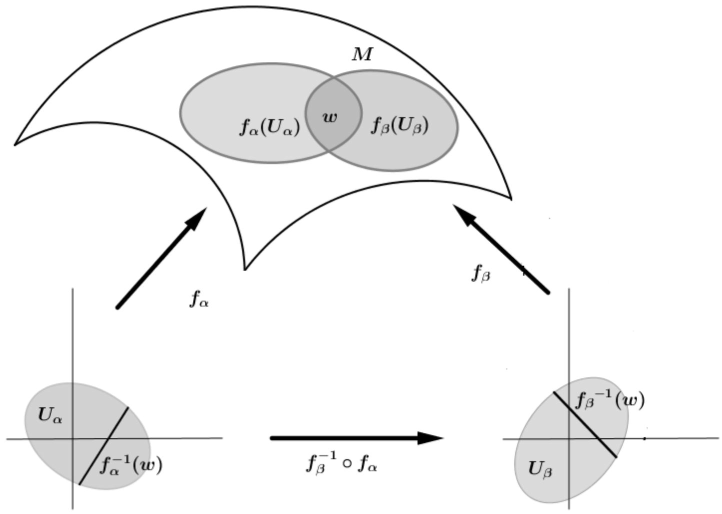

Figura 4.6:

y mapeos $f_i : \mathbb{R}^2 \to V_i,\ i = 1, 2, 3$, por

$$f_1(u, v) = [1, u, v], \quad f_2(u, v) = [u, 1, v] \quad f_3(u, v) = [u, v, 1],$$

donde $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Afirmamos que la familia $\{(f_i, \mathbb{R}^2)\}$ es una estructura diferenciable. Cada $f_i, i = 1, 2, 3$, es claramente biyectiva y $\cup_i f_i(\mathbb{R}^2) = p^2(\mathbb{R})$.

Consideremos el caso $i = 1, j = 2$, los demas son análogos.

La consecuencia más importante de la definición de superficie es el hecho de que el cambio de variables es un difeomorfismo. Queda demostrado que $f_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ es un abierto de $\mathbb{R}^2$ y f_i^{-1} es diferenciable.

Los puntos de $f_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$ son de la forma (u, v) con $u \neq 0$. Por lo tanto $f_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$ es abierto en $\mathbb{R}^2$ y

$$f_2^{-1} \circ f_1(u, v) = f_2^{-1}([1, u, v]) = f_2^{-1}\left(\left[\frac{1}{u}, 1, \frac{v}{u}\right]\right) = \left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right)$$

es claramente diferenciable.

Ahora vamos a definir la noción de vector tangente a una curva diferenciable sobre una variedad diferenciable. Sea $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable en $\mathbb{R}^n$, con $\alpha(0) = p \in \mathbb{R}^n$, y escribimos

$$\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad t \in (-\epsilon, \epsilon), \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

entonces $\alpha'(0) = (x_1'(0), \ldots, x_n'(0)) = v \in \mathbb{R}^n$.

Sea φ una función real en $\mathbb{R}^n$ diferenciable en una vecindad de p. Entonces la derivada de φ a lo largo de v en p está dado por

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\varphi x_i}\frac{dx_i}{dt}|_{t=0} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\varphi$$

Por lo tanto "la derivada direccional a lo largo de v" es un operador diferenciable sobre funciones diferenciables la cual depende solo de v. Esta es la propiedad característica de vectores que vamos a usar para extenderlos a variedades.

Definición 4.5.8. Sea $\alpha : I \to M$ una curva diferenciable sobre una variedad diferenciable M, con $\alpha(0) = p \in M$, y sea D el conjunto de funciones de M que son diferenciables en p. El vector tangente a la curva α en p es el mapeo $\alpha'(0) : D \to \mathbb{R}$ dado por

$$\alpha'(0)\varphi = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)|_{t=0}, \quad \varphi \in D$$

Un vector tangente en $p \in M$ es el vector tangente a alguna curva diferenciable $\alpha : I \to M$ en $\alpha(0) = p$.

Queremos mostrar que el conjunto de vectores tangentes en un punto $p \in M$ forman un espacio vectorial de dimensión n. Para esto, escojemos una parametrización $f : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ alrededor de $p = f(0, \ldots, 0)$. Entonces una curva $\alpha : I \to M$ y una función $\varphi \in D$ pueden ser escritos como

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ \alpha(f) &= (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \\ \varphi \circ f(q) = \varphi(x_1, \ldots, x_n), &\quad q = (x_1, \ldots, x_n) \in U \end{aligned}$$

respectivamente. Luego

$$\begin{aligned} \alpha'(0)\varphi = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\varphi(x_1(t), \ldots, x_n(t))|_{t=0} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right)\varphi \end{aligned}$$

Así el vector tangente $\alpha'(0)$ en p puede ser escrito como

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$$

Notemos que $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$ es el vector tangente de la ”curva coordenada”.

$$x_i \to f(0, \ldots, 0, x_i, \ldots, 0)$$

Sea ahora T_f el espacio vectorial generado por $\left\{\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right\}$, $i = 1, \ldots, n$.

Lema 4.5.1. *El conjunto T_pM de vectores tangentes a M en p es igual a T_f.*

Demostración. Hemos demostrado que $T_pM \subset T_f$. Inversamente si $v \in T_f$, entonces $v = \sum_i \lambda_i \left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$. Sea $\alpha : I \to M$ dada en la parametrización f por $x_i = \lambda_i t$. Entonces $\alpha'(0) = v$, es decir, $v \in T_pM$. ■

Definición 4.5.9. Sean M_1^n y M_2^m dos variedades diferenciables y sea $\varphi : M_1 \to M_2$ un mapeo diferenciable. Para cada $p \in M$, la diferecial de φ en p es un mapeo lineal $d\varphi_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ el cual asocia a cada vector tangente $v \in T_pM_1$ el vector $d\varphi_p(v) \in T_{\varphi(p)}M_2$ definido de la manera siguiente: Tomamos una curva diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M_1$, con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$; entonces $d\varphi_p(v) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$.

Definición 4.5.10. Sea M_1 y M_2 variedades diferenciables. Un mapeo $\varphi : M_1 \to M_2$ es un *difeomorfismo* si este es diferenciable, biyectivo y su inversa φ^{-1} también es diferenciable. El mapeo es un difeormorfismo local en $p \in M$ si existe una vecindad U de p y V de $\varphi(p)$ tal que $\varphi : U \to V$ es un difeomorfismo.

Ejemplo 4.5.2. *El haz tangente.*

Sea M^n una variedad diferenciable y sea

$$TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$$

Introducimos una estructura diferenciable en TM (de dimensión $2n$); con tal estructura TM es llamado el *haz tangente* de M.

Sea $f_\alpha : U\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ una parametrización en $(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha) \in U_\alpha$. Para $w \in T_{f_\alpha(q)}M$, $q \in U_\alpha$, podemos escribir

$$w = \sum_i y_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}$$

Definimos un mapeo $F_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to TM$ por

$$F_\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha, y_1^\alpha, \ldots, y_n^\alpha) = \left(f_\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha), \sum_i y_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right)$$

Afirmamos que si $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ es una estructura diferenciable para M entonces $\{(U_{\alpha \times \mathbb{R}^n}, F_\alpha)\}$ es una estructura diferenciable para TM. Generalmente esto significa que tomamos como coordenadas de un punto $(p, v) \in TM$ las coordenadas de p junto con las coordenadas de n en la base asociada.

Sea

$$(p, v) \in F_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap F_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n),$$

que es

$$(p, v) = (f_\alpha(q_\alpha), df_\alpha(v_\alpha)) = (f_\beta(q_\beta), df_\beta(v_\beta)),$$

donde $q_\alpha \in U_\alpha$, $q_\beta \in U_\beta$, $v_\alpha, v_\beta \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\begin{aligned} F_\beta^{-1} \circ F_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) &= F_\beta^{-1}(f_\alpha(q_\alpha), df_\alpha(v_\alpha)) \\ &= (f_\beta^{-1} \circ f_\alpha(q_\alpha), d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)(v_\alpha)) \end{aligned}$$

Puesto que $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ es diferenciable, (por hipótesis, pues estamos asumiendo que M es una variedad) así $d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)$ es diferenciable. Luego $F_\beta^{-1} \circ F_\alpha$ es diferenciable.

Definición 4.5.11. Sean M^m y N^n variedades diferenciables. Un mapeo diferenciable $\varphi : M \to N$ es una *inmersión* si $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ es inyectivo para todo $p \in M$. Si adicionalmente φ es un homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, donde $\varphi(M)$ tiene inducida la topología por N, φ es un *encaje*.

Ejemplo 4.5.3. La curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ es un mapeo diferenciable pero no una inmersión. La curva $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ es una inmersión pero no un encaje.

Definición 4.5.12. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad diferenciable de dimensión $k < n$, encajada diferenciablemente en $\mathbb{R}^n$. Sea $N \subset M \times \mathbb{R}^n$ definida por $N = \{(q, v) : q \in M,\ v \text{ perpendicular a } M \text{ en } q\}$. No es dificil ver que N es una variedad de dimensión n diferenciablemente encajada en $\mathbb{R}^{2n}$.

Teorema 4.5.1. (Teorema de Sard). *Si M_1 y M_2 son dos variedades diferenciables que tienen bases numerables de la misma dimensión,y $f : M_1 \to M_2$ es de clase C^1, entonces la imagen del conjunto de puntos críticos tiene medida cero.*

Demostración. Consultar **(xiii)**. ■

Un punto crítico de f es un punto donde el jacobiano es singular.

Corolario 4.5.1. *Para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, el punto x no es un punto focal de la variedad.*

Demostración. Justamente acabamos de mencionar que N es una n-variedad. El punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto focal de M si y sólo si x está en la imagen del conjunto de los puntos críticos de $E : N \to \mathbb{R}$, por lo tanto el conjunto tiene medida cero.

Sean $u^1, \ldots, u^k$ coordenadas para una región de la variedad $M \subset \mathbb{R}^n$. Entonces el mapeo de inclusión de M en $\mathbb{R}^n$ determina n funciones suaves

$$x_1(u^1, \ldots, u^k), \ldots, x_n(u^1, \ldots, u^k)$$

Estas funciones van a ser escritas brevemente como $\overrightarrow{x}(u^1, \ldots, u^k)$ donde $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Para ser consistente el punto $q \in M \subset \mathbb{R}^n$ va a ser denotado por $\overrightarrow{q}$.

La primera forma fundamental asociada con el sistema de coordenadas se define como la matriz simétrica de funciones reales

$$(g_{ij}) = \left(\frac{\overrightarrow{\partial x}}{\partial u_i} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial x}}{\partial u_j} \right)$$

Por otro lado **la segunda forma fundamental** es una matriz simétrica $(\overrightarrow{\ell_{ij}})$ de funciones vectoriales definidas de la manera siguiente.

El vector $\frac{\partial^2 \overrightarrow{x}}{\partial u^i \partial u^j}$ en un punto de M puede ser expresado como la suma de un vector tangente a M y un vector normal a M. Definimos el vector $(\overrightarrow{\ell_{ij}})$ como la componente normal de $\frac{\partial^2 \overrightarrow{x}}{\partial u^i \partial u^j}$. Dado algún vector unitario $\overrightarrow{v}$ el cual es normal a M en q la matriz

$$\left(\overrightarrow{v} \cdot \frac{\partial^2 \overrightarrow{x}}{\partial u^i \partial u^j} \right) = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\ell_{ij}})$$

puede ser llamada la segunda forma fundamental de M en $\overrightarrow{q}$ en la dirección $\overrightarrow{v}$.

Para simplificar la discusión asumimos que las coordenadas son escogidas de tal modo que g_{ij}, evaluadas en $\overrightarrow{q}$, es la matriz $\left(\overrightarrow{v} \cdot \frac{\partial^2 \overrightarrow{x}}{\partial u^i \partial u^j}\right) = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\ell_{ij}})$ son llamados las curvaturas principales $k_1, \ldots, k_k$ de M en q en la dirección normal $\overrightarrow{v}$. Los recíprocos $k_1^{-1}, \ldots, k_k^{-1}$ son llamados los radios principales de curvatura. Ahora consideremos la línea normal ℓ que consta de todos los puntos de la forma $\overrightarrow{q} + t\overrightarrow{v}$. ■

Lema 4.5.2. *Los puntos focales de M en $\overrightarrow{q}$ a lo largo de ℓ son precisamente los puntos $\overrightarrow{q} + k_i^{-1}\overrightarrow{v}$, donde $1 \leq i \leq k, k_i \neq 0$. Por lo tanto hay a lo mas k puntos focales de M a lo largo de ℓ cada uno contando con multiplicidad.*

Demostración. Tomemos $(n-k)$ campos vectoriales

$$\overrightarrow{w_1}(u^1, \ldots, u^k), \ldots, \overrightarrow{w}_{n-k}(u^1, \ldots, u^k)$$

a lo largo de la variedad tales que $\overrightarrow{w}_1, \ldots, \overrightarrow{w}_{n-k}$ son vectores unitarios ortogonales a M. Podemos introducir coordenadas $(u^1, \ldots, u^k, t^1, \ldots, t^{n-k})$ sobre la variedad $N \subset M \times \mathbb{R}^n$ como sigue. Sea que $(u^1, \ldots, u^k, t^1, \ldots, t^{n-k})$ corresponde al punto

$$(\overrightarrow{x}(u^1, \ldots, u^k), \sum_{\alpha=1}^{n-k} t^\alpha \overrightarrow{w}_\alpha(u^1, \ldots, u^k)) \in N$$

Entonces la función

$$E : N \to \mathbb{R}^n$$

da lugar a la correspondencia

$$(u^1, \ldots, u^k, t^1, \ldots, t^{n-k}) \xrightarrow{\overrightarrow{e}} \overrightarrow{x}(u^1, \ldots, u^k) + \sum t^\alpha \overrightarrow{w}_\alpha(u^1, \ldots, u^k),$$

con derivadas parciales

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overrightarrow{e}}{\partial u^i} = \dfrac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial u^i} + \sum_\alpha t^\alpha \dfrac{\partial \overrightarrow{w}_\alpha}{\partial u^i} \\ \dfrac{\partial \overrightarrow{e}}{\partial t^\beta} = \overrightarrow{w}_\beta \end{cases}$$

Tomando productos interiores de estos n vectores con los vectores linealmente independientes $\frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial u^k}, \overrightarrow{w}_1, \ldots, \overrightarrow{w}_{n-k}$ obtenemos una matriz de $n \times n$ cuyo rango es igual al rango del jacobiano

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial u^j} + \sum_\alpha t^\alpha \frac{\partial \overrightarrow{w}_\alpha}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial u^j}\right) & \sum_\alpha t^\alpha \frac{\partial \overrightarrow{w}_\alpha}{\partial u^i} \cdot \overrightarrow{w}_\beta \\ & \\ 0 & \textit{matriz identidad} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la nulidad es igual a la nulidad del bloque superior izquierdo. Notemos que el bloque superior izquierdo es igual a lo siguiente

$$g_{ij} - \sum_\alpha t^\alpha \overrightarrow{w}_\alpha \cdot \ell_{ij}$$

después de usar la identidad

$$0 = \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\overrightarrow{w}_\alpha \cdot \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial u^j}\right) = \frac{\partial \overrightarrow{w}_\alpha}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial u^j} + \overrightarrow{w}_\alpha \cdot \frac{\partial^2 \overrightarrow{x}}{\partial u^i \partial u^j}$$

Afirmación 4.5.1. $\overrightarrow{q} + t\overrightarrow{v}$ es un punto focal de $(M, \overrightarrow{q})$ con multiplicidad μ si y sólo si la matriz

$$(g_{ij} - t\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\ell}_{ij}) \tag{4.2}$$

es singular con nulidad μ.

Ahora supongamos que (g_{ij}) es la matriz identidad. Entonces 4.1 es singular si y sólo si $1/t$ es valor propio de la matriz $(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\ell}_{ij})$. Más aún la multiplicidad μ es igual a la multilplicidad de $1/t$ como valor propio. Esto completa la demostración. ■

Ahora para $p \in \mathbb{R}^n$ fijo estudiamos la función

$$L_{\overrightarrow{p}} = f : M \to \mathbb{R}$$

donde

$$f(\overrightarrow{x}(u^1, \ldots, u^k)) = ||\overrightarrow{x}(u^1, \ldots, u^k) - \overrightarrow{p}||^2 = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} - 2\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{p} + \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p}$$

tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial u^i} = 2\frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial u^i} \cdot (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{p})$$

Por lo tanto f tiene un punto crítico en $\overrightarrow{q}$ si y sólo si $\overrightarrow{q} - \overrightarrow{p}$ es normal a M en $\overrightarrow{q}$.

Las segundas derivadas parciales en un punto crítico están dadas por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} = 2\left(\frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial u^j} + \frac{\partial^2 \overrightarrow{x}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{p})\right)$$

Haciendo $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{x} + t\overrightarrow{v}$, esto se convierte

$$\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} = 2(g_{ij} - t\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\ell}_{ij})$$

Lema 4.5.3. *El punto* $\overrightarrow{q} \in M$ *es un* punto crítico degenerado *de* $f = L_{\overrightarrow{p}}$ *si y sólo si* $\overrightarrow{p}$ *es un punto focal de* $(M, \overrightarrow{q})$.

Combinando este resultado con el corolario 4.1.1. obtenemos:

Teorema 4.5.2. *Para casi todo* $p \in \mathbb{R}^n$ *(todos excepto un conjunto de medida cero), la función*

$$L_p = M \to \mathbb{R}$$

tiene puntos críticos no degenerados.

Demostración. Omitida. ■

Capítulo 5

Integración en variedades

5.1. Integración de formas diferenciales

Sea w una forma diferencial definida en un conjunto abierto $U \subset M^n$. *El soporte* K de w es la cerradura del conjunto

$$A = \{p \in M^n; w(p) \neq 0\}$$

Dada una cubierta $\{V_\alpha\}$ de una variedad diferenciable y compacta M, vamos a construir una familia finita de funciones diferenciables $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ tales que

a) $\sum_{i=1}^{m} \varphi_i = 1$,

b) $0 \leq \varphi_i \leq 1$, y el soporte de φ está contenido en algún $V_{\alpha_i} = V_i$.

La familia $\{\varphi_i\}$ es llamada *partición de la unidad* diferenciable.

Vamos a dar una prueba de la existencia de particiones de la unidad subordinada a vecindades coordenadas dadas de una variedad diferenciable compacta M^n. En lo siguiente denotaremos la bola abierta por $B_r(0) = \{p \in \mathbb{R}^n; |p| < r\}$.

Lema 5.1.1. *Existe una función diferenciable* $\varphi : B_3(0) \to \mathbb{R}$ *tal que:*

a) $\varphi(p) = 1,$ ***si*** $p \in B_1(0)$

b) $0 < \varphi(p) \leq 1,$ ***si*** $p \in B_2(0)$

c) $\varphi(p) = 0,$ ***si*** $p \in B_3(0) - B_2(0)$

Demostración. Primero consideremos la función $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha(t) = e^{-\frac{1}{(t+1)(t+2)}}; \quad t \in (-2,-1)$$
$$\alpha(t) = 0, \quad t \notin (-2,-1)$$

Notemos que la función α es una simple modificación de la función bien conocida e^{-1/x^2}, y el punto está en que es C^∞ en todas partes. Ahora tomamos la integral

$$\gamma(t) = \int_{\infty}^{t} \alpha(s)ds$$

para obtener una función diferenciable γ cuyo valor máximo (en $t = -1$) está dado por $\int_{-2}^{-1} \alpha(s)ds = A$. Entonces haciendo $\beta(t) = \gamma(t)/A$, obtenemos una función diferenciable con las siguientes propiedades:

$$\beta(t) = 0, \text{ si } t \leq -2$$
$$0 < \beta(t) \leq 1, \text{ si } t \in (-2,-1)$$
$$\beta(t) = 1, \text{ si } t \geq -1$$

La función requerida $\varphi : B_3(0) \to \mathbb{R}$ se obtiene al hacer $\varphi(p) = \beta(-|p|), \quad p \in B_3(0)$. ■

Lema 5.1.2. *Sea M^n una variedad diferenciable, sea $p \in M$ y $g : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ una parametrización alrededor del punto p, entonces es posible obtener una parametrización $f : B_3(0) \to M$ alrededor de p tal que $f(B_3(0)) \subset g(U)$ y $f^{-1}(p) = (0,\ldots,0)$.*

Demostración. Sea $(x_1^0,\ldots,x_n^0) \in U$ tal que $g(x_1^0,\ldots,x_n^0) = p$. Puesto que U es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x_1^0,\ldots,x_n^0) \subset U$. Sea T la traslación en $\mathbb{R}^n$ tal que manda el punto $(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ en $(0,\ldots,0)$ y sea $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un mapeo de modo que a cada $p \in \mathbb{R}^n$ asocia el $3/rp$. Entonces $H \circ T$ manda $B_r(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ en $B_3(0)$. ■

Definimos la parametrización $f : B_3(0) \to M$ mediante

$$f = g \circ T^{-1} \circ H^{-1}$$

Es fácil ver que se satisfacen las condiciones requeridas.

Proposición 5.1.1. (Existencia de la partición de la unidad diferenciable). *Sea M una variedad compacta y sea $\{V_\alpha\}$ una cubierta de M por vecindades coordenadas. Entonces existen funciones diferenciales $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ tal que:*

a) $\sum_{i=1}^m \varphi_i = 1$

b) $0 \leq \varphi_i \leq 1$ *y el soporte de φ_i está contenido en algún V_α de la cubierta V_α.*

Demostración. Para cada $p \in M$ consideremos la parametrización $f_p : B_3(0) \to M$ dado por el lema anterior con $f_p(B_3(0) = V_p \subset V_\alpha)$, para algún V_α de la cubierta $\{V_\alpha\}$. Hagamos $W_p = f_p(B_3(0))$. La familia $\{W_p\}$ es una cubierta abierta de M. Puesto que M es compacto podemos seleccionar una cubierta finita $W_1, \ldots, W_m$. Los correspondientes $V_1, \ldots, V_m$ dan lugar también a una cubierta de M. Definamos $\theta_i : M \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, m$ mediante las fórmulas

$$\theta_i = \varphi \circ f_i^{-1} \textit{ en } V_i; \quad \theta_i = 0 \textit{ en } M - V_i$$

donde $\varphi : B_3(0) \to \mathbb{R}$ es la función dada por el lema 5.1.1. Las funciones θ_i son diferenciables y el soporte de θ_i está contenido en V_i.

Finalmente definimos φ_i por:

$$\varphi_i(p) = \frac{\theta_i(p)}{\sum_{j=1}^m \theta_j(p)}, \quad p \in M$$

Es inmediato verificar que las funciones φ_i construidas del modo anterior satisfacen las condicioones a) y b). ■

Ahora, sea w una n-forma y $M^n = \mathbb{R}^n$, entonces:

$$w = a(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Supongamos que el soporte K de w es compacto y está contenido en U. Definimos

$$\int_U w = \int_K a\ dx_1 \ldots dx_n$$

donde el lado derecho es la integral multiple usual de $\mathbb{R}^n$.

Inicialmente supongamos que K está contenida en alguna vecindad coordenada $V_\alpha = f_\alpha(U_\alpha)$. Entonces, si la representación w_α de w en U_α es

$$w_\alpha = a_\alpha(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

definimos

$$\int_M w = \int_{V_\alpha} w_\alpha = \int_{U_\alpha} a_\alpha \; dx_1, \ldots, dx_n$$

donde el lado derecho es una integral en $\mathbb{R}^n$.

Puede ocurrir que K está contenida en otra vecindad contenida en $V_\beta = f_\beta U_\beta$ de la misma familia, y debemos mostrar que la definición de arriba es independiente de la elección de la vecindad coordenada.

Podemos asumir, construyendo U_α y U_β si es necesario, que $V_\alpha = V_\beta$. Sea el cambio de coordenadas $f = f_\alpha^{-1} \circ f_\beta : U_\beta \to U_\alpha$ dado por

$$x_i = f_i(y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \in U_\alpha, \quad (y_1, \ldots, y_n) \in U_\beta$$

Puesto que $w_\beta = f^*(w_\alpha)$, tenemos que

$$w_\beta = \det(df) \; a_\beta \; dy_1, \ldots, dy_n$$

donde

$$a_\beta = a_\alpha(f_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(y_1, \ldots, y_n))$$

Por otro lado, por la fórmula del cambio de variables de integrales multiples en $\mathbb{R}^n$, obtenemos:

$$\int_{U_\alpha} a_\alpha \; dx_1 \ldots dx_n = \int_{U_\beta} \det(df) \; a_\beta \; dy_1, \ldots, dy_n$$

Por lo tanto, puesto que $\det(df) > 0$,

$$\int_{V_\alpha} w_\alpha = \int_{V_\beta} w_\beta$$

De acuerdo a la definición previa, tiene sentido escribir

$$\int_M w = \sum_{i=1}^{m} \int_M \varphi_i w$$

la única cuestión es si esta definición es independiente de las elecciones hechas. Consideremos otra cubierta $\{W_\beta\}$ de M la cual determina la misma orientación como $\{V_\alpha\}$ y sea $\{\psi_j, \; j = 1, \ldots, s\}$ la partición de la unidad subordinada $\{W_\beta\}$. Entonces $\{V_\alpha \cap W_\beta\}$ es una cubierta de M y la familia $\varphi_i\psi_j$ es una partición de la unidad subordinada a $\{V_\alpha \cap W_\beta\}$. Luego

$$\sum_{i=1}^{m} \int_M \varphi_i w = \sum_{i=1}^{m} \int_M \varphi_i \left(\sum_{j=1}^{s} \psi_i \right) w = \sum_{ij} \int \varphi_i \ \psi_j w$$

donde la última igualdad fue usando que, para cada i, las funciones $\varphi_i\psi_j$ están definidas en V_i. Análogamente

$$\sum_{j=1}^{s} \int_M \psi_j w = \sum_{j=1}^{s} \int_M \left(\sum_{i=1}^{m} \varphi_i \right) \psi_j w = \sum_{ij} \int_M \varphi_i \psi_j w$$

la cual demuestra la deseada independencia.

Capítulo 6

Ejercicios

6.1. Ejercicios resueltos

1. Probar que la forma bilinial $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es alternante si y sólo si $\varphi(v, v) = 0$, para toda $v \in \mathbb{R}^3$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Suponer que $\varphi(\alpha, \beta) = -\varphi(\beta, \alpha)$ entonces $\varphi(\alpha, \alpha) = -\varphi(\alpha, \alpha)$ y como $\varphi(\alpha, \alpha) = c, \forall c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, \alpha) = c = & -\varphi(\alpha, \alpha) = -c \\ c = & -c \\ 2c = & \ 0 \\ c = & \ 0 \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $\varphi(v, v) = 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^3$. Por demostrar que $\varphi(\alpha, \beta) = -\varphi(\beta, \alpha)$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = \varphi(\alpha + \beta, \beta + \alpha) \\ &= \varphi(\alpha, \beta + \alpha) + \varphi(\beta, \beta + \alpha) \\ &= \varphi(\alpha, \beta) + \varphi(\alpha, \alpha) + \varphi(\beta, \beta) + \varphi(\beta, \alpha)) \end{aligned}$$
$$\text{ent.}\, \varphi(\alpha, \beta) = -\alpha(\beta, \alpha)$$

■

2. La definición de producto exterior se hace de una manera tal que si $\varphi_1, \ldots, \varphi_k(v_1, \ldots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j))$ son 1-formas. Demostrar que el producto exterior $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k$ está dado con la k-forma previamente definidas por

$$\varphi_1 \wedge \cdots \varphi_k(v_1, \ldots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j))$$

Prueba. Sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \Lambda^1((\mathbb{R}^n)^*) = (\mathbb{R}^n)^*$. Entonces $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$. Sean $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k)(v_1, \ldots, v_k) &= k!\,\mathrm{Alt}(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_k) \\
&= \frac{k!}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma)(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_k)(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\varphi_1(v_{\sigma(1)}) \ldots \varphi_k(v_{\sigma(k)}) \\
&= \begin{vmatrix} \varphi_1(v_1) & \cdots \varphi_1(v_k) \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \cdots \varphi_k(v_k) \end{vmatrix} \\
&= \det(\varphi_i(v_j))
\end{aligned}$$

3. Sea φ una k-forma exterior, donde k es impar. Probar que $\varphi \wedge \varphi = 0$. Solución. Sabemos que si φ es un k-forma y w una s-forma entonces

$$(\varphi \wedge w) = (-1)^{ks}(w \wedge \varphi)$$

Luego

$$\begin{aligned}
(\varphi \wedge \varphi) &= (-1)^{kk}(\varphi \wedge \varphi) = (-1)^{k^2}(\varphi \wedge \varphi) \\
&= (-1)^{(2n+1)^2}(\varphi \wedge \varphi) = (-1)^{4n^2}(-1)^{4n}(-1)(\varphi \wedge \varphi) \\
\text{ent.}(\varphi \wedge \varphi) &= -(\varphi \wedge \varphi) \Rightarrow 2(\varphi \wedge \varphi) = 0 \Rightarrow (\varphi \wedge \varphi) = 0
\end{aligned}$$

4. Sean φ, ψ y θ las siguientes formas en $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\varphi &= xdx - ydy \\
\psi &= zdx \wedge dy + xdy \wedge dz \\
\theta &= zdy
\end{aligned}$$

Calcular $\varphi \wedge \psi$, $\theta \wedge \varphi \wedge \psi$, $d\varphi$, $d\psi$ y $d\theta$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\varphi\wedge\psi &= (xdx-ydy)\wedge(zdx\wedge dy+xdy\wedge dz)\\
&= xzdx\wedge dx\wedge dy + x^2dx\wedge dy\wedge dz - yzdy\wedge dx\wedge dy - xydy\wedge dy\wedge dz\\
&= x^2dx\wedge dy\wedge dz\\
\theta\wedge\varphi\wedge\psi &= (zdy)\wedge(xdx-ydy) = xzdy\wedge dx - yzdy\wedge dy = -xzdx\wedge dy\\
d\varphi &= d(x)\wedge dx - d(y)\wedge dy\\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x}xdx+\frac{\partial}{\partial y}xdy+\frac{\partial}{\partial z}xdz\right]\wedge dx - \left[\frac{\partial}{\partial x}ydx+\frac{\partial}{\partial y}ydy+\frac{\partial}{\partial z}ydz\right]\wedge dy\\
&= dx\wedge dx - dy\wedge dy = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&d\psi = d(z)\wedge dx\wedge dy + d(x)\wedge dy\wedge dz\\
&= \left[\frac{\partial}{\partial x}zdx+\frac{\partial}{\partial y}zdy+\frac{\partial}{\partial z}zdz\right]\wedge dx\wedge dy - \left[\frac{\partial}{\partial x}xdx+\frac{\partial}{\partial y}xdy+\frac{\partial}{\partial z}xdz\right]\wedge dy\wedge dz\\
&= dz\wedge dx\wedge dy + dx\wedge dy\wedge dz = 2dx\wedge dy\wedge dz
\end{aligned}$$

$$d\theta = \left(\frac{\partial}{\partial x}zdx+\frac{\partial}{\partial y}zdy+\frac{\partial}{\partial z}zdz\right)\wedge dy = dz\wedge dy = dy\wedge dz$$

5. Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ un mapeo diferenciable dado por

$$f(x_1,\dots,x_n) = (y_1,\dots,y_n)$$

y sea $w = dy_1\wedge\cdots dy_n$. Probar que $f^*w = \det(df)dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$.

Solución.

$$\begin{aligned}
f^*w &= f^*(dy_1\wedge\cdots\wedge dy_n)(p)(v_1,\dots,v_k)\\
&= (dy_1\wedge\cdots\wedge dy_n)f(p)(df_p(v_1),\dots,df_p(v_k))\\
&= \det((dy_i)v_j) = \det(df)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n
\end{aligned}$$

6. *(Operador estrella de Hodge)*. Dada una k-forma w en $\mathbb{R}^n$ definimos una $(n-k)$-forma $*w$ haciendo

$$*(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k} = (-1)^\sigma(dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_{n-k}})$$

Calcular $*w$ si
a) $w = a_{12}dx_1dx_2 + a_{13}dx_1dx_3 + a_{23}dx_2dx_3$ es una 2-forma en $\mathbb{R}^3$ y
b) $w = a_1dx_1 + a_2dx_2$ es una 1-forma en $\mathbb{R}^2$.
c) Probar que $**w = (-1)^{k(n-k)}w$.

Solución.

a) Si $w = a_{12}dx_1dx_2 + a_{13}dx_1dx_3 + a_{23}dx_2dx_3$, se tiene que

$$\begin{aligned} *w &= a_{12}\widehat{dx_1dx_2}dx_3 + a_{13}\widehat{dx_1dx_3}dx_2 + a_{23}\widehat{dx_2dx_3}dx_1 \\ &= a_{12}dx_3 - a_{13}dx_2 + a_{23}dx_1 \end{aligned}$$

b) Si $w = a_1dx_1 + a_2dx_2$, se tiene que

$$*w = a_1\widehat{dx_1}dx_2 + a_2\widehat{dx_2}dx_1 = a_1dx_2 - a_2dx_1$$

Para una n-forma se tiene que

$$*dx_i = (-1)^{1-i}dx_1 \dots dx_{i-1}dx_{i+1} \dots dx_n$$

7. *(La divergencia)*. Un campo vectorial diferenciable $v \in \mathbb{R}^n$ puede ser considerado como un mapeo $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Definiremos la función $\operatorname{div} v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (llamada la divergencia de v) como sigue:

$$(\operatorname{div} v)(p) = \operatorname{tr}(dv)_p, \quad p \in \mathbb{R}^n$$

donde $(dv)_p : \mathbb{R}^p_n \to \mathbb{R}^n_p$ es el diferencial de v en p. Probar que:

a) Si $v = \sum a_ie_i$, donde $\{e_i\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\operatorname{div} v = \sum \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

b) Si w denota la 1-forma diferencial obtenida de v por el isomorfismo canónico inducido por el productor interno $\langle , \rangle$ y $\mathrm{e.\,v}$ es el elemento de volumen de $\mathbb{R}^n$, la divergencia puede ser obtenida como sigue: $v \to w \to *w \to d(*w) = (\operatorname{div} v)\,\mathrm{e.\,v}$

Solución. *a)* Se tiene que

$$v = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$$

$$dv = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1}e_1dx_1 & \frac{\partial a_1}{\partial x_2}e_2dx_2 & \cdots \frac{\partial a_1}{\partial x_n}e_ndx_n \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1}e_1dx_1 & \frac{\partial a_2}{\partial x_2}e_2dx_2 & \cdots \frac{\partial a_2}{\partial x_n}e_ndx_n \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1}e_1dx_1 & \frac{\partial a_3}{\partial x_2}e_2dx_2 & \cdots \frac{\partial a_3}{\partial x_n}e_ndx_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial a_n}{\partial x_1}e_1dx_1 & \frac{\partial a_n}{\partial x_2}e_2dx_2 & \cdots \frac{\partial a_n}{\partial x_n}e_ndx_n \end{pmatrix}$$

Dado que $dx_i(v) = v_i$

$$\operatorname{div} v = \operatorname{tr}(dv) = \sum \frac{\partial a_i}{\partial x_i} e_i dx_i = \sum \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

b) $v = \langle a_i, dx_i \rangle = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \cdots + a_n dx_n = w$. Luego

$$*w = *(a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \cdots + a_n dx_n)$$

$$\begin{aligned}
d(*w) &= *(dw) \\
&= \left[\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial a_1}{\partial dx_n} dx_n\right) dx_1\right. \\
&+ \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial a_2}{\partial dx_n} dx_n\right) dx_2 \\
&\vdots \\
&+ \left.\left(\frac{\partial a_n}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_n}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial dx_n} dx_n\right) dx_n\right] \\
&= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial a_1}{\partial dx_n} dx_n\right) dx_2 dx_3 \cdots dx_n \\
&- \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial a_2}{\partial dx_n} dx_n\right) dx_1 dx_3 dx_4 \cdots dx_n \\
&\vdots \\
&= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \cdots dx_n - \frac{\partial a_2}{\partial x_2} dx_2 dx_1 dx_3 \cdots dx_n + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} \\
&= \sum \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \cdots dx_n \\
&= (\operatorname{div} v)(\mathrm{e.\,v})
\end{aligned}$$

8. *(El gradiente)*. Dada una función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos un campo vectorial $\operatorname{grad} f \in \mathbb{R}^n$ (el gradiente de f) por

$$\langle \operatorname{grad} f(p), u \rangle = df_p(u), \quad \forall \ \ p \in \mathbb{R}^n \textit{ y toda } u \in \mathbb{R}^n_p$$

Notar que $\operatorname{grad} f$ es el campo vectorial correspondiente a la 1-forma df en el isomorfismo canónico. Probar que:

En la base canónica $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{grad} f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{grad} f, e\rangle &= \langle\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right), (e_1, e_2, \ldots, e_n)\rangle \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}e_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}e_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}e_n = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}e_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \\
&= \operatorname{grad} f
\end{aligned}$$

9. *(El rotacional).* Sea v un campo vectorial diferenciable en $\mathbb{R}^n$. El rotacional $\operatorname{rot} v$ es la $(n-2)$-forma definida por:

$$v \to w \to dw \to *(dw) = \operatorname{rot} v$$

donde $v \to w$ es la correspondencia entre 1-formas y el campo vectorial inducido por el producto interior. Probar que $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$.

Solución. Se tiene que $v = \langle a_i, dx_i\rangle = a_1dx_1 + a_2dx_2 + \cdots + a_ndx_n = w$

$$\begin{aligned}
dw = & \frac{\partial a_1}{\partial x_2}dx_2dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}dx_3dx_1 + \cdots + \frac{\partial a_1}{\partial x_n}dx_ndx_1 \\
+ & \frac{\partial a_2}{\partial x_1}dx_1dx_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_3}dx_3dx_2 + \cdots + \frac{\partial a_2}{\partial x_n}dx_ndx_2 \\
+ & \frac{\partial a_3}{\partial x_1}dx_1dx_3 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2}dx_2dx_3 + \cdots + \frac{\partial a_2}{\partial x_n}dx_ndx_3 \\
& \vdots \\
= & \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2 + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)dx_2dx_3 \\
+ & \left(\frac{\partial a_4}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_4}\right)dx_3dx_4 + \cdots + \left(\frac{\partial a_n}{\partial x_{n-1}} - \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_n}\right)dx_{n-1}dx_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
*(dw) = & \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)dx_3\cdots dx_n + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)dx_1dx_4dx_5\cdots dx_n \\
+ & \cdots + \left(\frac{\partial a_n}{\partial x_{n-1}} - \frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_n}\right)dx_1dx_2\cdots dx_{n-2} \\
= & \operatorname{rot} v
\end{aligned}$$

El gradiente se define como

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = &\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 dx_2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) dx_2 dx_3 \\
&+ \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial f}{\partial x_n} - \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\right) dx_{n-1} dx_n \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right) dx_1 dx_2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}\right) dx_2 dx_3 \\
&+ \cdots + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n}\right) dx_{n-1} dx_n \\
&= 0
\end{aligned}$$

10. Demostrar que $d(df) = 0$ para cualquier función f, y también para una 1-forma.

Demostración. Sea f una función. Entonces tenemos

$$df = D_1 f dx_1 + \cdots D_n f dx_n = \sum_{i=1}^{n} D_i f dx_i$$

así que

$$ddf = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} D_j D_i f dx_j \wedge dx_i$$

Pero sabemos que $dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$ y $dx_i \wedge dx_i = 0$ luego

$$ddf = \sum_{1 \le s < k \le n} (D_s D_k f - D_k D_s f) dx_s \wedge dx_k$$

asumiendo que f es C^∞, las parciales conmutan, por lo tanto $ddf = 0$.

Sea w una 1-forma. Es suficiente probar que $ddw = 0$ cuando w es descomponible. Escribimos $w = g dx_k$

$$dw = dg \wedge dx_k = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i dx_i\right) \wedge dx_k$$

donde $f_i = D_i g$. Un argumento similar al dado anteriormente muestra que

$$ddw = \sum_{i=1}^{n} df_i \wedge dx_i \wedge dx_k = 0$$

■

11. Demostrar que $d(dw) = 0$ para toda k-forma $w \in \Omega^k(U)$.

Demostración. Sea

$$w = w_{i_1\cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

entonces

$$dw = d(w_{i_1\cdots i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = w_{i_1\cdots i_k,p} dx_p \wedge dx_{i_j} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

luego

$$d(dw) = w_{i_1\cdots i_k,p\ell} dx_\ell \wedge dx_p \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

donde se están sumando índices simétricos k, ℓ con índices anti-simétricos $dx_\ell \wedge dx_k$, por lo tanto $d(dw) = 0$. ■

12. En $\mathbb{R}^3$, determina dw y $d(dw)$ de cada w siguiente:

a) $w = xdx + ydz$
b) $w = xydy + xdz$
c) $w = (\operatorname{sen} x)dy + dz$
d) $w = e^y dx + ydy + e^{xy} dx$

Solución. a)

$$\begin{aligned}
dw &= d(x)dx + d(y)dz \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}xdx + \frac{\partial}{\partial y}xdy + \frac{\partial}{\partial z}xdz\right)dx + \left(\frac{\partial}{\partial x}ydx + \frac{\partial}{\partial y}ydy + \frac{\partial}{\partial z}ydz\right)dz \\
&= dxdx + dydz \\
&= dydz \\
d(dw) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)dydz \\
&= 0
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
dw &= d(xy)dy + d(x)dz \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}xydx + \frac{\partial}{\partial y}xydy + \frac{\partial}{\partial z}xydz\right)dy + \left(\frac{\partial}{\partial x}xdx + \frac{\partial}{\partial y}xdy + \frac{\partial}{\partial z}xdz\right)dz \\
&= (ydx + xdy)dy + dxdz \\
&= ydxdy + xdydy + dxdz \\
&= ydxdy + dxdz \\
d(dw) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}ydx + \frac{\partial}{\partial y}ydy + \frac{\partial}{\partial z}ydz\right)dxdy + \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)dxdz \\
&= dydxdy \\
&= 0
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
dw &= d(e^y)dx + d(y)dy + d(e^{xy})dz \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{sen} xdx + \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{sen} xdy + \frac{\partial}{\partial z}\operatorname{sen} xdz\right)dy + \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)dz \\
&= \cos xdxdy \\
d(dw) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\cos xdx + \frac{\partial}{\partial y}\cos xdy + \frac{\partial}{\partial z}\cos xdz\right)dxdy \\
&= -\operatorname{sen} xdxdxdy \\
&= 0
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
dw &= d(e^y)dx + d(y)dy + d(e^{xy})dz \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}e^ydx + \frac{\partial}{\partial y}e^ydy + \frac{\partial}{\partial z}e^ydz\right)dx + \left(\frac{\partial}{\partial x}ydx + \frac{\partial}{\partial y}ydy + \frac{\partial}{\partial z}ydz\right)dy \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial x}e^{xy}dx + \frac{\partial}{\partial y}e^{xy}dy + \frac{\partial}{\partial z}e^{xy}dz\right)dz \\
&= e^ydydx + ye^{xy}dxdz + xe^{xy}dydz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(dw) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}e^ydx + \frac{\partial}{\partial y}e^ydy + \frac{\partial}{\partial z}e^ydz\right)dydx \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial x}ye^{xy}dx + \frac{\partial}{\partial y}ye^{xy}dy + \frac{\partial}{\partial z}ye^{xy}dz\right)dxdz \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial x}xe^{xy}dx + \frac{\partial}{\partial y}xe^{xy}dy + \frac{\partial}{\partial z}xe^{xy}dz\right)dydz
\end{aligned}$$

$$= e^y dydydx + y^2 e^{xy} dxdxdz + xye^{xy} dydxdz + xye^{xy} dxdydz + x^2 e^{xy} dydydz$$
$$= -xye^{xy} dxdydz + xye^{xy} dxdydz$$
$$= 0$$

13. Sean $w = x_1 dx_2 - x_2 dx_3$ y $\eta = dx_1 dx_2$ formas en $\mathbb{R}^3$. Calcular $w \wedge \eta$.

Solución.

$$\begin{aligned} w \wedge \eta = &\ (x_1 dx_2 - x_2 dx_3) \wedge (dx_1 dx_3) \\ &= x_1 dx_2 dx_1 dx_3 - x_2 dx_3 dx_1 dx_3 \\ &= -x_1 dx_1 dx_2 dx_3 + x_2 dx_1 dx_3 dx_3 \\ &= -x_1 dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

14. Calcular $e^x \wedge (xdy + y^2 dx)$ y $5(xdy + \cos y dx) + (xdx)$.

Solución.

$$\begin{aligned} e^x \wedge (xdy + y^2 dx) &= e^x (xdy + y^2 dx) \\ &= xe^x dy + y^2 e^x dx \\ 5(xdy + \cos y dx) + (xdx) &= (x + 5\cos y) dx + 5xdy \end{aligned}$$

15. Calcula

a) $d(xy)$

b) $d(xydx)$

c) $d(x_1 x_2^2 dx_1 dx_2 + dx_2 dx_3)$

Solución.

a) $d(xy) = xdy + ydx$

b) $d(xydx) = (xdy + ydx) \wedge dx = -xdxdy$

c) $d(x_1 x_2^2 dx_1 dx_2 + dx_2 dx_3) = (x_2^2 dx_1 + 2x_1 x_2 dx_2) dx_1 dx_2 = 0$

16. *(Pull-back)*. Si w es una k-forma en A y $\varphi : B \to A$ es un mapeo suave sobre un conjunto abierto B, entonces la forma $\varphi^* w$ sobre B se define como sigue:

i) Para una 0-forma g.

$$\varphi^* g = g \circ \varphi$$

ii) Para diferenciales dx_i.

$$\varphi^* dx_i = d(x_i \circ \varphi)$$

iii) Para $w = \sum g_{i_1,\ldots,i_k}\ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$

$$\varphi^* w = \sum g_{i_1,\ldots,i_k} \circ \varphi\ d(x_{i_1} \circ \varphi) \wedge \cdots \wedge d(x_{i_k} \circ \varphi)$$

Si $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ está dado por $\varphi(x, y, z) = (x^2, 2 + x + z, 4)$. Determinar

a) $\varphi^*(x^2 - z)$
b) $\varphi^*(xdz - dy)$
c) $\varphi^*(dx \wedge dy)$
d) $\varphi(e^x dx \wedge dy \wedge dz)$

Solución.

a) $\varphi^*(x^2 - z) = \varphi^*(x^2) - \varphi^*(z) = (x \circ \varphi)^2 - (z \circ \varphi) = (x^2)^2 - 4 = x^4 - 4$
b) $\varphi^*(xdz - dy) = (x \circ \varphi)d(z \circ \varphi) - d(y \circ \varphi) = x^2 d(4) - d(2 + x + z)$
$= x^2(0) - d(2) - dx - dz = -dx - dz$
c) $\varphi^*(dx \wedge dy) = \varphi^*(dx) \wedge \varphi^*(dy) = d(x \circ \varphi) \wedge d(y \circ \varphi)$
$= d(x^2) \wedge d(2 + x + z) = 2xdx \wedge (dx + dz) = 2xdxdx \wedge 2xdxdz = 2xdxdz$
d) $\varphi^*(e^x dx \wedge dy \wedge dz) = 0$

17. Demostrar el siguiente teorema.

Sea $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$ una base de V^*. Entonces las p-formas

$$\phi_{i_1} \otimes \cdots \phi_{i_p} : 1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq k$$

forman una base de $\Im^p(V^*)$. En consecuencia $\dim \Im^p(V^*) = k^p$.

Demostración. Durante la demostración utilizaremos la siguiente notación. Si $I = (i_1, \ldots, i_p)$ es una sucesión de enteros, cada uno entre 1 y k, sea

$$\phi_I = \phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_p}$$

Sean $\{v_1, \ldots, v_k\}$ la base dual en V y $v_I = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_p})$. Por definición, si I y J son dos subconjuntos de índices de este tipo, $\phi_I(v_j)$ es igual 1 si $I = J$ y es igual a cero si $I \neq J$. Es claro, por la multilinealidad, que dos p-tensores T y S son iguales si y sólo si $T(v_j) = S(v_j)$ para cada sucesión de índices J. Así, si tenemos dado T, el tensor

$$S = \sum_I T(v_I)\phi_I$$

debe ser igual a T; por lo tanto, los $\{\phi_I\}$ generan a $\Im^p(V^*)$. Los ϕ_I también son independientes, ya que si

$$S = \sum_I a_I\phi_I = 0$$

entonces

$$0 = S(v_J) = a_J$$

para cada J. ■

18. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3) = (x_1 \cos x_2, x_1 \operatorname{sen} x_2, x_3^2)$$

Si $w = (y_3 dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3)$. Calcular f^*w.

Solución.

$$\begin{aligned}
f^*w = & \ (y_3 \circ f)d(y_1 \circ f) \wedge d(y_2 \circ f) \wedge d(y_3 \circ f) \\
= & \ x_3^2 d(x_1 \cos x_2) \wedge d(x_1 \operatorname{sen} x_2) \wedge d(x_3^2) \\
= & \ x_3^2(\cos x_2 dx_1 - x_1 \operatorname{sen} x_2 dx_2) \wedge (\operatorname{sen} x_2 dx_1 + x_1 \cos x_2 dx_2) \wedge 2x_3 dx_3 \\
= & \ 2x_3^3(\cos x_2 \operatorname{sen} x_2 dx_1 dx_1 + x_1 \cos x_2^2 dx_1 dx_2 \\
- & \ x_1 \operatorname{sen}^2 x_2 dx_2 dx_1 - x_1 \operatorname{sen} x_2 \cos x_2 dx_2 dx_2) \wedge dx_3 \\
= & \ 2x_3^3(x_1 \cos^2 x_2 + x_1 \operatorname{sen}^2 x_2) dx_1 dx_2 dx_3 \\
= & \ 2x_3^3 x_1 dx_1 dx_2 dx_3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f^*(dy_1\wedge\ dy_2\wedge\cdots\wedge dy_n) &= df_1\wedge df_2\wedge\cdots\wedge df_n\\
&=\left(\sum_{i_1=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}}dx_{i_1}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{i_1=1}^{n}\frac{\partial f_n}{\partial x_{i_n}}dx_{i_n}\right)\\
&=\sum_{\sigma\in S_n}\frac{\partial f_1}{\partial x_{\sigma(1)}}\frac{\partial f_2}{\partial x_{\sigma(2)}}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_{\sigma(n)}}dx_{\sigma(1)}\wedge dx_{\sigma(2)}\cdots\wedge dx_{\sigma(n)}\\
&=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\frac{\partial f_1}{\partial x_{\sigma(1)}}\frac{\partial f_2}{\partial x_{\sigma(2)}}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_{\sigma(n)}}dx_1\wedge dx_2\cdots\wedge dx_n\\
&=\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots\dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n
\end{aligned}
$$

18. Calcular la segunda forma fundamental para la esfera S^2, parametrizada por

$$x(\alpha,\beta)=(R\cos\alpha\operatorname{sen}\beta, R\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta, R\cos\beta)$$

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
x_\alpha(\alpha,\beta) = &\ (-R\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta, R\cos\alpha\operatorname{sen}\beta, 0)\\
x_\beta(\alpha,\beta) = &\ (R\cos\alpha\cos\beta, R\operatorname{sen}\alpha\cos\beta, -R\operatorname{sen}\beta)
\end{aligned}
$$

A partir de aquí omitiremos (α,β) en cada expresión.

$$
\begin{aligned}
x_\alpha\wedge x_\beta = &\left(\begin{vmatrix} R\cos\alpha\operatorname{sen}\beta & 0\\ R\operatorname{sen}\alpha\cos\beta & -R\operatorname{sen}\beta\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -R\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta & 0\\ R\cos\alpha\cos\beta & -R\operatorname{sen}\beta\end{vmatrix},\right.\\
&\left.\begin{vmatrix} -R\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta & R\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\ R\cos\alpha\cos\beta & R\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\end{vmatrix}\right)\\
&= (-R^2\cos\alpha\operatorname{sen}^2\beta, -R^2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}^2\beta,\\
&-R^2\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\alpha - R^2\cos^2\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\beta)\\
&= (-R^2\cos\alpha\operatorname{sen}^2\beta, -R^2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}^2\beta, -R^2\operatorname{sen}\beta\cos\beta(\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)\\
&= (-R^2\cos\alpha\operatorname{sen}^2\beta, -R^2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}^2\beta, -R^2\operatorname{sen}\beta\cos\beta)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
||x_\alpha \wedge x_\beta|| &= \sqrt{R^4\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}^4\,\beta + R^4\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\,\mathrm{sen}^4\,\beta + R^4\,\mathrm{sen}^2\,\beta\cos^2\beta} \\
&= \sqrt{R^4\,\mathrm{sen}^2\,\beta(\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}^2\,\beta + \mathrm{sen}^2\,\alpha\,\mathrm{sen}^2\,\beta + \cos^2\beta)} \\
&= \sqrt{R^4\,\mathrm{sen}^2\,\beta[\mathrm{sen}^2\,\beta(\mathrm{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha) + \cos^2\beta]} \\
&= \sqrt{R^4\,\mathrm{sen}^2\,\beta(\mathrm{sen}^2\,\beta + \cos^2\beta)} = \sqrt{R^2\,\mathrm{sen}^2\,\beta} \\
&= R^2\,\mathrm{sen}\,\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N &= \frac{(-R^2\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\,\beta, -R^2\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}^2\,\beta, -R^2\,\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta)}{R^2\,\mathrm{sen}\,\beta} \\
&= -(\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta, \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta, \cos\beta) \\
x_{\alpha\alpha} &= (-R\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta, -R\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta, 0) \\
x_{\beta\alpha} &= (-R\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta, R\cos\alpha\cos\beta, 0) \\
x_{\beta\beta} &= (-R\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta, -R\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta, -R\cos\beta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e &= \langle x_{\alpha\alpha}, N\rangle \\
&= (-R\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta, -R\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta, 0) \\
&\quad \cdot(-\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta, -\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta, -\cos\beta) \\
&= R\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}^2\,\beta + R\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\,\mathrm{sen}^2\,\beta \\
&= R\,\mathrm{sen}^2\,\beta(\mathrm{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha) \\
&= R\,\mathrm{sen}^2\,\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f &= \langle x_{\beta\alpha}, N\rangle \\
&= (-R\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta, R\cos\alpha\cos\beta, 0) \\
&\quad \cdot(-\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta, -\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta, -\cos\beta) \\
&= R\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta - R\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g &= \langle x_{\beta\beta}, N\rangle \\
&= (-R\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta, -R\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta, -R\cos\beta) \\
&\quad \cdot(-\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta, -\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta, -\cos\beta) \\
&= R\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}^2\,\beta + R\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\,\mathrm{sen}^2\,\beta + R\cos^\beta \\
&= R\,\mathrm{sen}^2\,\beta(\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\,\alpha) + R\cos^2\beta \\
&= R\,\mathrm{sen}^2\,\beta + R\cos^2\beta \\
&= R
\end{aligned}$$

Entonces

$$II_p(h,k) = Rh^2 \operatorname{sen}^2\beta + Rk^2$$

19. Determinar la segunda forma fundamental del toro con parametrización:

$$\begin{aligned} x:&\ [0,2\pi)\times[0,2\pi)\to\mathbb{R}^3 \\ x(\alpha,\beta) =&\ ((\cos\alpha+2)\cos\beta,(\cos\alpha+2)\operatorname{sen}\beta,\operatorname{sen}\alpha) \end{aligned}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} x_\alpha(\alpha,\beta) =&\ (-\operatorname{sen}\alpha\cos\beta,-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,\cos\alpha) \\ x_\beta(\alpha,\beta) =&\ (-(\cos\alpha+2)\operatorname{sen}\beta,(\cos\alpha+2)\cos\beta,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_\alpha(\alpha,\beta)\wedge x_\beta(\alpha,\beta) \\ & = (-\cos\alpha(\cos\alpha+2)\cos\beta,-\cos\alpha(\cos\alpha+2)\operatorname{sen}\beta,-\operatorname{sen}\alpha(\cos\alpha+2)) \\ & ||x_\alpha(\alpha,\beta)\wedge x_\beta(\alpha,\beta)|| = \cos\alpha+2 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} N(\alpha,\beta) =&\ \frac{x_\alpha(\alpha,\beta)\wedge x_\beta(\alpha,\beta)}{||x_\alpha(\alpha,\beta)\wedge x_\beta(\alpha,\beta)||} = (-\cos\alpha\cos\beta,-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta,-\operatorname{sen}\alpha) \\ x_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) =&\ (-\cos\alpha\cos\beta,-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta,-\operatorname{sen}\alpha) \\ x_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) =&\ (\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,-\operatorname{sen}\alpha\cos\beta,0) \\ x_{\beta\beta}(\alpha,\beta) =&\ (-(\cos\alpha+2)\cos\beta,-(\cos\alpha+2)\operatorname{sen}\beta,0) \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} e(\alpha,\beta) =&\ x_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\cdot N(\alpha,\beta) = 1 \\ f(\alpha,\beta) =&\ x_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\cdot N(\alpha,\beta) = 0 \\ g(\alpha,\beta) =&\ x_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\cdot N(\alpha,\beta) = \cos\alpha(\cos\alpha+2) \end{aligned}$$

Entonces

$$II_p(h,k) = h^2 + \cos\alpha(\cos\alpha+2)k^2$$

6.2. Ejercicios propuestos

1. Determina si las siguientes 1-formas en $\mathbb{R}^2$ son exactas. Expresa df.

a) $3ydx + xdy$

b) $ydx + xdy$

c) $e^x ydx + e^x dy$

2. Calcular $(3dx + dy) \wedge (e^x dx + 2dy)$.

3. Sea F una función definida sobre un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$. Entonces $*(F_1dx + F_2dy + F_3dz) = F_1dydz + F_2dxdz + F_3dxdy$. Calcular $*(F_1dydz + F_2dxdz + F_3dxdy)$, donde $*$ es llamado "operador estrella de Hodge".

4. Sean $\alpha = xdx + ydy + zdz$, $\beta = zdx + xdy + ydz$ y $\gamma = xydz$. Calcular

a) $\alpha \wedge \beta$	*b)* $d\alpha$
c) $\alpha \wedge \gamma$	*d)* $d\beta$
e) $\beta \wedge \gamma$	*f)* $d(\alpha + \gamma)$

5. Dada $w = fdx + gdy + hdz$ tal que $w \wedge dz = 0$, ¿Qué puede concluir acerca de f, g y h?.

6. Determinar si las siguientes 1-formas son exactas, expresar df.

a) $dx + 2ydy + 3z^2dz$

b) $zy\ \cos(xy)dx + 2x\cos(xy)dy + \mathrm{sen}(xy)dz$

7. Resuelve lo siguiente

a) Calcula $(dx_1dx_2 + dx_2dx_3) \wedge (x_2^2 + 3dx_3)$.

b) Prueba que las $(n + 1)$-formas en $\mathbb{R}^n$ son todas cero.

8. Determina lo que se te pide

a) *Calcula* $d(ydx - xdy)$ *y* $d(d(ydx - xdy))$

b) *Prueba que en* $\mathbb{R}^3$ $d(g_1dx_1 + g_2dx_2 + g_3dx_3)$

$$= \left(\frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3}\right) dx_2dx_3 + \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1}\right) dx_3dx_1 + \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right) dx_1dx_2$$

c) *Calcula* $(e^x dy - e^y dx) \wedge d(e^{xy})$

9. Resuelva lo siguiente

a) Calcula $\varphi^* w$ si φ es un mapeo constante.

b) $\psi^* \varphi^* w = (\varphi \circ \psi)^* w$ cuando $C \xrightarrow{\psi} B \xrightarrow{\varphi} A$.

c) Calcula $\varphi^*(dx)$, $\varphi^*(xdx + y^4 dy)$, $\varphi^*(dx \wedge dy)$ si $\varphi(x, y) = (3, y)$.

d) Calcula $\varphi^*(dx \wedge dy)$ si $\varphi(x, y) = (2x, 3y)$.

10. Sea $w = Adydz + Bdzdx + cdxdy$.

i. Demostrar que $dw = 0$.

ii. Determinar α tal que $d\alpha = w$

11. Considera la transformación lineal $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dado por

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \cdots, y_n)$$

donde $y_i = \sum a_{ij} x_j + b_i, \quad a_{ij}, b_i$ son constantes. Determinar $\phi^*(dx_1 \cdots dx_n)$.

Capítulo 7

Teorema de Stokes

7.1. Simplejos y homología singular

Definición 7.1.1. Sea $M \subset \mathbb{R}^m$, diremos que M es un *espacio afín*, si dados $x, y \in M$ la recta que pasa por x y y está contenida en M, esto es,

$$tx + (1-t)y \in M \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 7.1.1. Sea M un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$ entonces M es afín.

Definición 7.1.2. Sea $M \subset \mathbb{R}^m$, diremos que M es un *conjunto convexo* si dados $x, y \in M$ el segmento que une x con y está contenido en M, esto es,

$$tx + (1-t)y \in M \quad t \in [0,1]$$

Podemos ver de las definiciones 7.1.1. y 7.1.2. que todo espacio afín es convexo, más no necesariamente todo convexo es afín. La intersección de espacios afines (o convexos) es un espacio afín (o convexo).

Teorema 7.1.1. *Sea M un espacio afín y $p_0, p_1, \ldots, p_r$ puntos en M, además sean $a_0, a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=0}^{r} a_i = 1$. Entonces $\sum_{i=0}^{r} a_i p_i \in M$. Además, el resultado es cierto para conjuntos convexos con la hipotésis adicional $a_i \geq 0$ para cada i con $0 \leq i \leq r$.*

Demostración. Por inducción sobre el número de sumandos. Sea

$r=1$, por definición $a_0p_0+a_1p_1 \in M$. Supongamos que se vale para r sumandos, sean $p_0,p_1,\ldots,p_r \in M$ y $a_0,a_1,\ldots,a_r \in \mathbb{R}$ con $\sum_{i=0}^r a_i = 1$, sea $a_k \neq 1$, de aquí $\sum_{i\neq k} a_i = 1-a_k$, por lo que $\sum_{i\neq k} \dfrac{a_i}{1-a_k} = 1$. Por hipótesis de inducción tenemos $\sum_{i\neq k} \dfrac{a_i}{1-a_k} p_i \in M$. Como $a_k+(1-a_k)=1$, tenemos $(1-a_k)\left(\sum_{i\neq k} \dfrac{a_i}{1-a_k} p_i\right) + a_kp_k \in M$ pero $(1-a_k)\left(\sum_{i\neq k} \dfrac{a_i}{1-a_k} p_i\right) + a_kp_k = \sum_{i=0}^r a_ip_i$ que es lo que queriamos demostrar. ■

Definición 7.1.3. Sea M un espacio afín, con $p_0,p_1,\ldots,p_r \in M$, decimos que $p_0,p_1,\ldots,p_r$ son *afinmente independientes* si los vectores $p_1-p_0, p_2-p_0,\ldots,p_r-p_0$ son linealmente independientes.

De la definición 7.1.3. tenemos que un conjunto afín tiene a lo más $m+1$ puntos afinmente independietes sobre un espacio m-dimensional.

Teorema 7.1.2. *Sea M un espacio afín, con $p_0,p_1,\ldots,p_r \subset M$, los siguientes son equivalentes*

1. *$p_0,p_1,\ldots,p_r$ son afinmente independientes.*
2. *Cuando $s_0,s_1,\ldots,s_r$ satisfacen la condición $\sum_{i=0}^r s_ip_i = 0$ con $\sum_{i=0}^r s_i = 0$, entonces $s_i=0$ con $0\leq i\leq r$.*
3. *Si x está en el conjunto afín generado por $p_0,p_1,\ldots,p_r$, entonces x se expresa de manera única como combinación afín de $p_0,p_1,\ldots,p_r$.*

Demostración. $1\to 2$. Sean $s_0,s_1,\ldots,s_r$ con $\sum_{i=0}^r s_ip_i = 0$ y $\sum_{i=0}^r s_i = 0$, de aquí tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^r s_ip_i = \sum_{i=0}^r s_ip_i - 0p_0 = \sum_{i=0}^r s_ip_i - \left(\sum_{i=0}^r s_i\right)p_0 \\ &= \sum_{i=1}^r s_i(p_1-p_0) \end{aligned}$$

Pero $(p_1-p_0)_{i=1}^r$ son linealmente independientes. Entonces $s_i=0$ para toda i.

$2 \to 3$. Sea $x = \sum_{i=0}^{r} a_i p_i = \sum_{i=0}^{r} b_i p_i$, con $\sum_{i=0}^{r} a_i = 1$ y $\sum_{i=0}^{r} b_i = 1$, entonces

$$\sum_{i=0}^{r}(a_i - b_i) = 1 - 1 = 0$$

entonces $x - x = 0 = \sum_{i=0}^{r}(a_i - b_i)p_i$, de 2 tenemos $a_i - b_i = 0$ para toda i. Entonces $a_i = b_i$.

$3 \to 1$. Basta ver que si $p_0, p_1, \ldots, p_r$ son afínmente dependientes entonces dada una representación podemos construir otra distinta.

Sean $p_1 - p_0, p_2 - p_0, \ldots, p_r - p_0$ vectores linealmente dependientes, entonces existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ no todos 0, digamos $\alpha_k \neq 0$, tales que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(p_i - p_0) = 0$ entonces

$$0 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots + \alpha_r p_r - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r)p_0$$

Sea $x = \sum_{i=0}^{r} a_i p_i$ entonces

$$\begin{aligned} x = x + 0 &= \sum_{i=0}^{r} a_i p_i + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(p_i - p_0) \\ &= \left(a_0 - \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i\right) p_0\right) + \sum_{i=1}^{r}(a_i + \alpha_i)p_i \end{aligned}$$

como α_k es distinto de cero, entonces x tiene dos representaciones distintas. ■

Sean $p_0, p_1, \ldots, p_r$ puntos afínmente independientes, en un espacio afín E, el conjunto de todas las combinaciones afines es llamado *espacio generado* por $p_0, p_1, \ldots, p_r$ y es denotado por $\langle p_0, p_1, \ldots, p_r \rangle$.

Del teorema 7.1.2. vemos que cada $p \in \langle p_0, p_1, \ldots, p_r \rangle$ tiene una expresión única

$$p = a_0 p_0 + a_1 p_1 + \cdots + a_r p_r$$

tal que $\sum_{i=1}^{r} a_i = 1$.

El vector de coordenadas $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ es llamado el *vector de coordenadas baricéntricas* de p con respecto a $p_0, p_1, \ldots, p_r$.

Definición 7.1.4. Sea M un espacio afín y $p_0, p_1, \ldots, p_r$ puntos afínmente independientes en M. El punto $p \in M$ de coordenadas baricétricas $\left(\frac{1}{r+1}, \frac{1}{r+1}, \ldots, \frac{1}{r+1}\right)$ es llamado *el baricéntro* del conjunto $p_0, p_1, \ldots, p_r$.

Para $r = 1$ el baricéntro de p_0, p_1 es el punto medio del segmento que une p_0 con p_1.
Para $r = 2$ es el punto donde se cruzan las medianas del triángulo con vértices p_0, p_1, p_2, y así extendiendonos a otras dimensiones. Ver figura 7.1.

Definición 7.1.5. Dados $p_0, p_1, \ldots, p_r$ puntos afínmente independientes, el subconjunto de $\langle p_0, p_1, \ldots, p_r\rangle$ de todos los puntos con coordenadas baricéntricas positivas es llamado *simplejo gométrico r-dimensional* generado por $p_0, p_1, \ldots, p_r$. En ocaciones diremos simplemente *r-simplejo.*

Un *0-simplejo* resulta ser un punto p_0.
Un *1-simplejo* resulta ser un segmento p_0, p_1.
Un *2-simplejo* resulta ser un triángulo p_0, p_1, p_2 tomando sus vértices en cierto orden.
Un *3-simplejo* resulta ser un tetraedro p_0, p_1, p_2, p_3 y así extendiendonos a otras dimensiones.

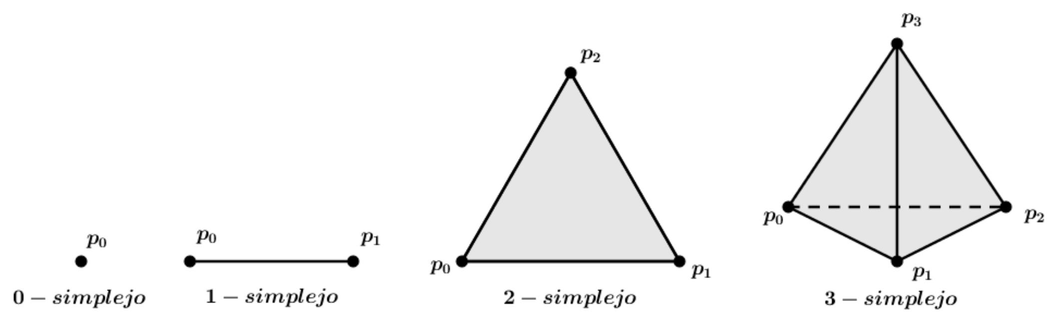

Figura 7.1: r-simplejos

Definición 7.1.6. Dados E, E' espacios afines, $f : E \to E'$, decimos que f es una *transformación afín*, si dados $p, q \in E$ y $t \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$f(tp + (1-t)q) = tf(p) + (1-t)f(q) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Si $f(p) \neq f(q)$ es una transformación afín, entonces manda la recta que pasa por p y q en la recta que pasa por $f(p)$ y $f(q)$.

Teorema 7.1.3. *Sean $f : E \to E'$ una transformación afín, donde $r \in \mathbb{N}$, $p_0, \ldots, p_r \in E$ y $a_0, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=0}^{r} a_i = 1$, entonces*

$$f\left(\sum_{i=0}^{r} a_i p_i\right) = \sum_{i=0}^{r} a_i f(p_i)$$

Demostración. Por inducción sobre r. Sea $r = 1$, $p_0, p_1 \in E$ y $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, tales que $a_0 + a_1 = 1$, tenemos que $a_1 = 1 - a_0$, por lo tanto

$$\begin{aligned} f(a_0p_0 + a_1p_1) = &\; f(a_0p_0 + (1-a_0)p_1) = a_0 f(p_0) + (1-a_0)f(p_1) \\ = &\; a_0 f(p_0) + a_1 f(p_1) \end{aligned}$$

Supongamos que es válido para cada natural menor que r con $r > 1$. Sean $a_0, a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ tales que $\sum a_i = 1$. Alguno de los $\{a_i\}_{i=0}^{r}$ es distinto de 1, pues si todos fueran iguales a 1, tendriamos que $\sum a_i = r > 1$ lo cual no es posible. Supongamos que $a_k \neq 1$, entonces $\sum_{i \neq k} a_i = 1 - a_k$, de aquí que $\sum_{i \neq k} \frac{a_i}{1-a_k} = 1$.

Por hipótesis de inducción tenemos que

$$f\left(\sum_{i \neq k} \frac{a_i}{1-a_k} p_i\right) = \sum_{i \neq k} \frac{a_i}{1-a_k} f(p_i)$$

Además, $a_k + (1 - a_k) = 1$, de lo cual obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=0}^{r} a_i p_i\right) = &\; f\left(a_k p_k + (1-a_k)\sum_{i \neq k} \frac{a_i}{1-a_k} p_i\right) \\ = &\; (1-a_k) f\left(\sum_{i \neq k} \frac{a_i}{1-a_k} p_i\right) + a_k f(p_k) \\ = &\; (1-a_k)\left(\sum_{i \neq k} \frac{a_i}{1-a_k} f(p_i)\right) + a_k f(p_k) \\ = &\; \sum_{i \neq k} a_i f(p_k) + a_k f(p_k) \\ = &\; \sum_{i=0}^{r} a_i f(p_i) \end{aligned}$$

■

Definición 7.1.7. Sea $q \geq 0$. Llamamos *q-simplejo geométrico estadar* al q-simplejo geométrico generado por $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_q$. Lo denotaremos por Δ_q. (Ver figura 7.2).

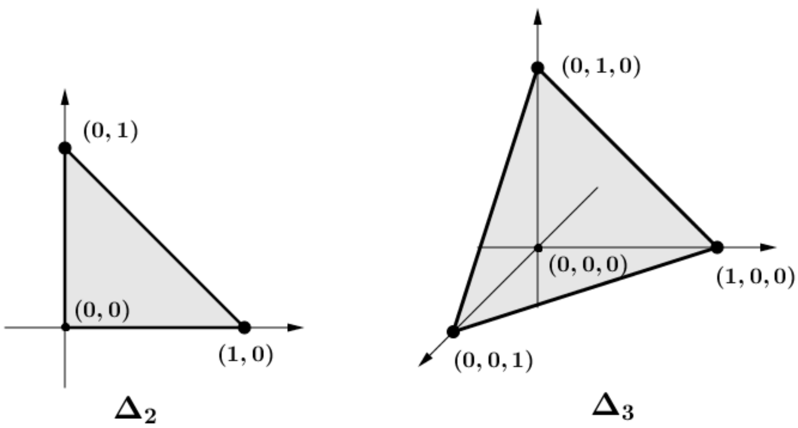

Figura 7.2: Simplejos estadar.

Definición 7.1.8. Un *complejo simplicial* es un tipo particular de espacio topológico construido mediante el pegado de simplejos. (Ver figura 7.3).

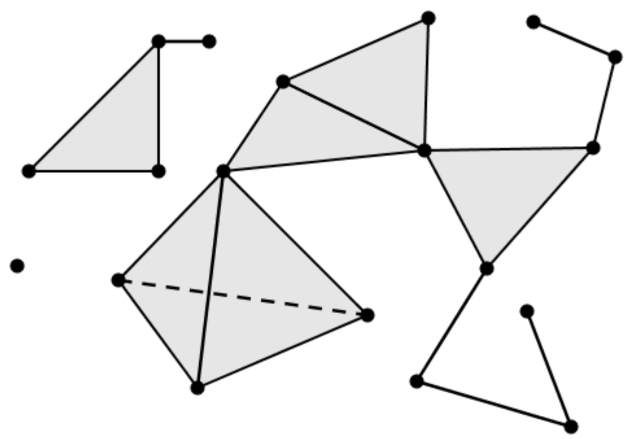

Figura 7.3: Un ejemplo de complejo simplicial. Este consiste en 19 puntos (0-simplejos), 22 aristas (1-simplejos), 8 triángulos (2-simplejos) y 1 tetraedro (3-simplejo).

Definición 7.1.9. Sea E un espacio afín y $p_0, p_1, \ldots, p_q \in E$. ($p_0, p_1, \ldots, p_q$) denotará la restricción a Δ_q de la única transformación afín $f : \mathbb{R}^q \to E$ tal que

$$f(e_0) = p_0, f(e_1) = p_1, \ldots, f(e_q) = p_q$$

De aquí que $(e_0, e_1, \ldots, e_q)$ es la función identidad de Δ_q en Δ_q, que denotaremos de ahora en adelante como δ_q.

Definición 7.1.10. Dado un espacio topológico X, un *q-simplejo singular* en X es una función continua $\sigma : \Delta_q \to X$.

Con esto un *0-simplejo* lo podemos asociar a un punto, un *1-simplejo* a un arco, un *2-simplejo* a una deformación de un triángulo, y así sucesivamente a otras dimensiones superiores.

Nótese que estamos definiendo un simplejo singular como una función y no como la imagen de puntos que toma la función. Además, la imagen de puntos que toma la función no tiene porque verse como un simplejo, ni tiene que ser homeomorfo a Δ_q, ya que puede deformarse, incluso a un punto, de ahí el nombre de simplejo singular.

Definición 7.1.11. Sea X un espacio topológico fijo. $\mathcal{F}_q(X)$ será el conjunto de q-simplejos singulares de X, esto es

$$\mathcal{F}_q(X) = \{\sigma : \Delta_q \to X : \sigma \textit{ es continua}\}$$

Nótemos que para cada espacio topológico X, $\mathcal{F}_q(X)$ es no vacío pues contiene al menos a todas las funciones constantes de Δ_q en X.

Deseamos construir un espacio de q-simplejos, que tenga propiedades algebraicas interesantes, pero a simple vista no tenemos una operación natural entre simplejos, por lo que definimos esta operación formalmente, así como un producto por elementos de un anillo, esto lo haremos con escalares sobre un anillo arbitrario, pues la teoría no se hace más ni menos complicada. Para propósitos de aplicación destacan los casos $R = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición 7.1.12. Sea X un espacio topológico y R un anillo conmutativo con 1. Definimos $S_q(X;R)$ como el *módulo libre* generado por el conjunto $\mathcal{F}_q(X)$, esto es $S_q(X;R)$ es el conjunto de sumas formales finitas de productos por escalares en R de q-simplejos singulares.

Denotaremos a $S_q(X;R)$ simplemente como $S_q(X)$ si trabajamos con un anillo fijo R.

Un elemento $c \in S_q$ se ve de la forma

$$c = v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2 + \cdots + v_k\sigma_k$$

donde $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ son q-simplejos singulares y $v_1, \ldots, v_k$ son elementos de R; esto lo denotaremos por comodidad como

$$c = \sum_{\sigma} v_\sigma \sigma$$

Los elementos de $S_q(X)$ serán llamados *q-cadenas singulares* de X.

Definición 7.1.13. Para un q-simplejo singular σ es un espacio X, definimos la *i-ésima cara* de σ como el $(q-1)$-simplejo, y la denotaremos por $\sigma^{(i)}$. Donde i representa el elemento que omitimos.

Definición 7.1.14. Sea $q > 0$ y σ un q-simplejo singular. La *frontera* de σ, denotada por $\partial(\sigma)$, es la $(q-1)$-cadena

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma^{(i)}$$

Definimos la frontera de un 0-simplejo como 0.

Ejemplo 7.1.2. Cuando $\sigma = (p_0, \ldots, p_q)$, con $p_0, \ldots, p_q \in E$, siendo E un espacio afín, tenemos que

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (p_0, \ldots, \widehat{p_i}, \ldots, p_q)$$

Entonces

i. $\partial(p_0, p_1) = p_1 - p_0$.

ii. $\partial(p_0, p_1, p_2) = (p_1, p_2) - (p_0, p_2) + (p_0, p_1)$.

iii. $\partial(p_0, p_1, p_2, p_3) = (p_1, p_2, p_3) - (p_0, p_2, p_3) + (p_0, p_1, p_3) - (p_0, p_1, p_2)$.

iv. $\partial[\partial(p_0, p_1, p_2)] = \partial(p_1, p_2) - \partial(p_0, p_2) + \partial(p_0, p_1) = (p_2 - p_1) - (p_2 - p_0) + (p_1 - p_0) = 0$.

v. $\partial[\partial(p_0, p_1, p_2, p_3)] = [(p_2, p_3) - (p_1, p_3) + (p_1, p_2)] - [(p_2, p_3) - (p_0, p_3) + (p_0, p_2)] + [(p_1, p_3) - (p_0, p_3) + (p_0, p_1)] - [(p_1, p_2) - (p_0, p_2) + (p_0, p_1)]$.

Extendemos ∂, a un homomorfismo de módulos $S_q(X) \to S_{q-1}(X)$, por linealidad esto es

$$\partial\left(\sum_\sigma v_\sigma \sigma\right) = \sum_\sigma v_\sigma \partial(\sigma)$$

Para $q = 0$ tenemos de nuevo $\partial(c) = 0$ para cada 0-cadena c.

Proposición 7.1.1. *Sea X espacio topológico, $c \in S_q(X)$, entonces*

$$\partial \circ \partial(c) = 0$$

Veamos lo que tenemos hasta ahora. Dado un espacio topológico X, para cada $q \geq 0$ hemos construido un módulo libre $S_q(X)$. Además, un homomorfismo de módulos $\partial_q : S_q(X) \to S_{q-1}(X)$. De manera que $\partial \circ \partial = 0$. Esto podemos verlos de la siguiente forma en el siguiente diagrama

$$\cdots \xrightarrow{\partial} S_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial} S_q(X) \xrightarrow{\partial} S_{q-1}(X) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} S_0(X) \xrightarrow{\partial} 0$$

con la condición de $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ para $q > 0$. Esto implica que

$$\operatorname{Im}(\partial_{q+1}) \subset \ker(\partial_q)$$

Definición 7.1.15. Sea $c \in S_q(X)$, diremos que c es un q-ciclo si $\partial c = 0$. Diremos que c es una q-frontera si existe $d \in S_{q+1}(X)$ tal que $\partial d = c$. Al conjunto de q-ciclos lo denotaremos como $Z_q(X; R)$, miestras que al conjunto de fronteras lo denotaremos por $B_q(X; R)$.

Denotaremos $Z_q(X; R)$ y $B_q(X; R)$ simplemente por $Z_q(X)$ y $B_q(X)$ si trabajamos con un anillo R fijo.

Es claro que $B_q(X)$ y $Z_q(X)$ son submódulos de $S_q(X)$ pues

$$Z_q(X) = \ker \partial_q$$
$$B_q(X) = \operatorname{Im} \partial_{q+1}$$

Además por la condición $\partial \circ \partial = 0$ tenemos que el conjunto de q-fronteras es submódulo del conjunto de q-ciclos, esto es, $B_q(X) \leq Z_q(X)$.

Definición 7.1.16. Sea X un espacio topológico, definimos el *q-ésimo módulo de homología* de X sobre R como

$$H_q(X;R) = \frac{Z_q(x;R)}{B_q(X;R)}$$

7.2. Mapeos de cadenas

Supongamos que M y N son dos variedades y f un mapeo suave

$$f : M \to N$$

Entonces, a cada p-cadena c sobre M le corresponde de manera natural una p-cadena f_* sobre N.

Es suficiente explicar esto cuando c es un simplejo σ^p, tal simplejo es representado por (S^p, U, ϕ). Meramente componemos f y ϕ así que $f_* c$ está representada por

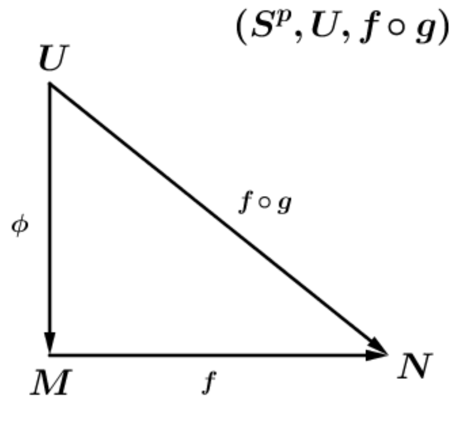

Figura 7.4:

El mapeo inducido f_* mapea el espacio de cadenas M en el espacio de cadenas de N.

$$\begin{aligned} M &\xrightarrow{f} N \\ C_p(M) &\xrightarrow{f_*} C_p(N) \end{aligned}$$

Observemos que si c es una p-cadena en M, entonces $f_*(\partial c) = \partial(f_* c)$ lo cual lleva al diagrama conmutativo.

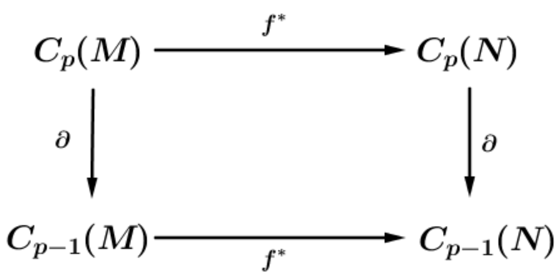

Figura 7.5:

el cual es análogo al correspondiente diagrama para el pull-back, f^*.

$$\begin{aligned} f : M &\to N \\ f^* : f^p(N) &\to f^p(M) \end{aligned}$$

Ahora veremos que pasa con dos mapeos. Consideremos que

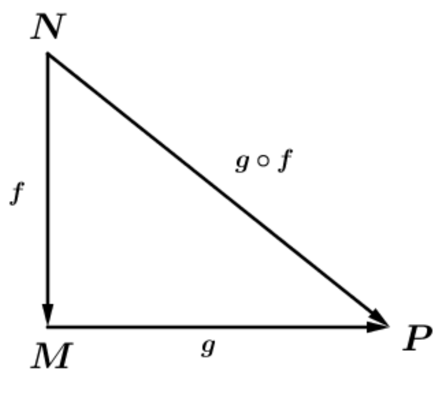

Figura 7.6:

Entonces

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

Sea $f : M \to N$ un mapeo suave. Supongamos que w es una p-forma sobre N y c una p-cadena en M. Entonces $f^* w$ es una p-forma en M y $f_* c$ es una p-cadena en N. Tenemos que

$$\int_c f^* w = \int_{f_* c} w$$

7.3. Teorema (general) de Stokes

La relación entre un dominio e integrales sobre su frontera está en el corazón del cálculo.

Ejemplo 7.3.1. Supongamos $D = [a, b]$ es un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ y que f es una función continuamente diferenciable en D. Entonces el *Teorema fundamental del cálculo* sostiene:

$$\int_D df = f(b) - f(a) \tag{7.1}$$

Denotaremos la frontera orientada $\{b\} - \{a\}$ de D por ∂D. Entonces, el lado derecho de la expresión anterior puede ser escrita por $\int_{\partial D} f$.

Ejemplo 7.3.2. Supongamos D es un dominio acotado en $\mathbb{R}^2$, cuya orientación es coherente con la de $\mathbb{R}^2$. Utilice ∂D para indicar la frontera orientada de D con la orientación inducida por D, es decir, la orientación positiva de ∂D junto con el vector normal apuntando hacia el interior de D forman un sistema de coordenadas que es coherente con la orientación de $\mathbb{R}^2$. Supongamos que P y Q son continuamente diferenciables en D. Entonces la *fórmula de Green* sostiene:

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \tag{7.2}$$

Si $w = Pdx + Qdy$, entonces

$$dw = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \tag{7.3}$$

De este modo 7.2 se puede escribir como

$$\int_{\partial D} w = \int_D dw \tag{7.4}$$

Ejemplo 7.3.3. Supongamos D es un dominio acotado en $\mathbb{R}^3$, cuya orientación es coherente con la de $\mathbb{R}^3$. La normal exterior como la dirección positiva, entonces induce una orientación en la frontera ∂D. Supongamos que P, Q y R son funciones continuamente diferenciables en D. La fórmula del Gauss da

$$\int \partial D P dydz + Qdzdx + Rdxdy = \int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \tag{7.5}$$

o

$$\int_{\partial D} \varphi = \int_D d\varphi \tag{7.6}$$

donde $\varphi = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$.

Ejemplo 7.3.4. Supongamos que Σ es una superficie orientada en $\mathbb{R}^3$ cuya frontera $\partial\Sigma$ es una curva cerrada orientada. La orientación positiva de $\partial\Sigma$ junto con cualquier vector normal positivo a Σ satisface la regla de la mano derecha (suponiendo $\mathbb{R}^3$ es orientado por ésta regla). Supongamos que P, Q y R son continuamente diferenciables en funciones de un dominio que contiene Σ. Entonces la fórmula de Stokes sostiene:

$$\int_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz$$

$$= \int_\Sigma \int \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \right\}$$

Si hacemos

$$w = Pdx + Qdy + Rdz, \tag{7.7}$$

entonces la fórmula anterior se puede reescribir como

$$\int_{\partial\Sigma} w = \int_\Sigma dw \tag{7.8}$$

Vemos que las anteriores cuatro fórmulas asumen una forma unificada en la notación de las formas diferenciales exteriores. La fórmula de Stokes considerada en esta sección es la generalización de las fórmulas enteriores sobre variedades.

Sin más preámbulos presentemos el teorema más importante de todo este libro.

Teorema 7.3.1. *El teorema (general) de Stokes. Sea U un conjunto abierto del espacio $\mathbb{R}^n$, w una $(p-1)$-forma en U, y c una p-cadena singular en U. Entonces.*

$$\int_{\partial c} w = \int_c dw$$

Demostración. Consideremos primero el caso en el que $p = n$. Entonces w es una $(n-1)$-forma definida en un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, y se escribe por lo tanto como

$$w = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n$$

Tomemos la n-cadena singular $c = T$, formada por el único n-cubo singular $T : I^n \to \mathbb{R}^n$ dado por $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_c dw &= \int_c \sum_{i=1}^{n} (df_i) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_c \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n \right) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_c \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_c \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_{I^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 dx_2 \cdots dx_n
\end{aligned}$$

La integral que aparece en la expresión anterior es una integral n-multiple de la función $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}$ sobre el cubo I^n. Podemos integrar esta función primero respecto de la i-ésima variable x_i (entre 0 y 1). Es claro que el resultado de la integral indefinida será la función

f_i, la cual se deberá evaluar (en su i-ésima variable) entre 0 y 1, resultando entonces la diferencia

$$f_i(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_i,\ldots,x_n)-f_i(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_i,\ldots,x_n)$$

Nótese que cada uno de estos sumandos no es más que la composición de la función f con las funciones ∂_i, $\partial_i' : I_{n-1}\to I_n$

$$\begin{aligned}\partial_i(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})&=(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_i,\ldots,x_{n-1})\\ \partial_i'(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})&=(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_i,\ldots,x_{n-1})\end{aligned}$$

En forma más precisa, se tiene

$$\begin{aligned}f_i(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_i,\ldots,x_n)&=(f_i\circ\partial_i')(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})\\ f_i(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_i,\ldots,x_n)&=(f_i\circ\partial_i)(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})\end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned}\int_c dw &= \sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}\int_{I^{n-1}}\left(\int_0^1\frac{\partial f_i}{\partial x_i}dx_i\right)dx_1\cdots dx_{i-1}dx_{i+1}\cdots dx_n\\ &= \sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}\int_{I^{n-1}}(f_i\circ\partial_i'-f_i\circ\partial_i)dx_1\cdots dx_{i-1}dx_{i+1}\cdots dx_n\end{aligned}$$

Nótese que (viendo a las funciones ∂_i, $\partial_i' : I^{n-1}\to I^n$) como $(n-1)$-cubos singulares en $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\int_{\partial_i'} w = \int_{I^{n-1}}\partial_i'^{*}w &= \int_{I^{n-1}}\partial_i'^{*}\left(\sum_{j=1}^n f_j dx_1\cdots dx_{j-1}dx_{j+1}\cdots dx_n\right)\\ = \int_{I^{n-1}}\sum_{j=1}^n &\partial_i'^{*}(f_j)\partial_i'^{*}(dx_1)\cdots\partial_i'^{*}(dx_{j-1})\partial_i'^{*}(dx_{j+1})\cdots\partial_i'^{*}(dx_n)\end{aligned}$$

Recuerde que

$$(\partial_i^{*})(dx_j)=(\partial_i'^{*})(dx_j)=\begin{cases}dx_j & \text{si } j<i\\ 0 & \text{si } j=i\\ dx_{j-1} & \text{si} j>i\end{cases}$$

Obsérvese entonces que si $j<i$ o bien si $j>i$, en la expresión $dx_1\cdots dx_{j-1}dx_{j+1}\cdots dx_n$ deberá aparecer un dx_i. En tal caso $\partial_i'^{*}(dx_i)=0$. Por lo tanto, el único sumando que sobrevive es el que corresponde a $j = i$ (este es el único sumando donde no aparece dx_i). Así pues

$$\int_{\partial_i'} w = \int_{I^{n-1}} \partial_i'^*(f_i) = \int_{I^{n-1}} f_i \circ \partial_i'$$

Un argumento análogo muestra que

$$\int_{\partial_i} w = \int_{I^{n-1}} f_i \circ \partial_i$$

o bien, en términos de integrales $(n-1)$-multiples

$$\begin{aligned} \int_{\partial_i'} w &= \int_{I^{n-1}} f_i \circ \partial_i' dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \\ \int_{\partial_i} w &= \int_{I^{n-1}} f_i \circ \partial_i dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \end{aligned}$$

En resumen,

$$\begin{aligned} \int_c dw &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{I^{n-1}} (f_i \circ \partial_i' - f_i \circ \partial_i) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \left(\int_{\partial_i'} w - \int_{\partial_i} w \right) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \left(\int_{\partial_i} w - \int_{\partial_i'} w \right) \end{aligned}$$

Ahora bien, recuerde que la n-cadena singular c que estamos considerando es la formada por el n-cubo singular $T : I^n \to \mathbb{R}^n$ dado por $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Entonces las funciones $\partial_i, \partial_i' : I^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ se pueden escribir como $T \circ \partial_i$ y $T \circ \partial_i'$, respectivamente. Así pues, se tiene

$$\begin{aligned} \int_c dw &= \sum_{i=1}^n (-1)^i \left(\int_{T\circ\partial_i} w - \int_{T\circ\partial_i'} w \right) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \int_{T\circ\partial_i - T\circ\partial_i'} w \\ &= \int_{\sum_{i=1}^n (-1)^i (T\circ\partial_i - T\circ\partial_i')} w \end{aligned}$$

expresión que no es más que la integral de la forma w sobre la frontera de la n-cadena c, (es decir, la frontera del n-cubo T, definida justamente como $\partial T = \sum_{i=1}^n (-1)^i (T \circ \partial_i - T \circ \partial_i')$). Entonces

$$\int_c dw = \int_{\partial c} w$$

lo que prueba el teorema de este caso particular (en el que w es una $(n-1)$-forma y c es la n-cadena singular formada por el único n-cubo singular ”identidad”).

Consideremos ahora el caso más general de la $(p-1)$-forma w definida en $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y c y p-cadena singular en U formada por el único p-cubo singular $T : I^p \to U$. Se tiene

$$\int_T dw = \int_{I^p} T^*(dw) = \int_{I^p} d(T^*w)$$

Obsérvese que T^*w es una $(p-1)$-forma definida en (un abierto que contiene a) $I^p \subset \mathbb{R}^p$. Consideremos el p-cubo singular identidad del caso anterior, que denotaremos por $Id : I^p \to \mathbb{R}^p$. Por el resultado previamente probado, se tiene

$$\int_{I^p} d(T^*w) = \int_{Id} d(T^*w) = \int_{\partial Id} T^*w$$

donde $\partial Id = (-1)^i(Id \circ \partial_i - Id \circ \partial_i') = \sum_{i=1}^p (-1)^i(\partial_i - \partial_i')$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\partial Id} T^*w &= \sum_{i=1}^p (-1)^i(\partial_i - \partial_i')^*(T^*w) = \sum_{i=1}^p (-1)^i(\partial_i^*(T^*w) - \partial_i'^*(T^*w)) \\
&= \sum_{i=1}^p (-1)^i((T \circ \partial_i)^*w - (T \circ \partial_i'^*)w) = \sum_{i=1}^p (-1)^i((T \circ \partial_i)^* - (T \circ \partial_i'^*))w
\end{aligned}$$

Esta última expresión es justamente la integral de la $(p-1)$-forma w sobre la frontera de T (es decir, de c). Entonces hemos probado que para este caso (c un p-cubo arbitrario) se tiene también que

$$\int_c dw = \int_{\partial c} w$$

Supongamos por último que c es una p-cadena singular arbitraria en $U \subseteq \mathbb{R}^n$, digamos $c = a_1T_1 + a_2T_2 + \cdots + a_kT_k$, en donde $T_i : I^p \to U$ son p-cubos singulares en U. Se tiene (con el caso ya demostrado)

$$\int_{\partial c} w = \sum_{i=1}^k a_i \int_{\partial T_i} w = \sum_{i=1}^k \int_{T_i} dw = \int_c dw$$

Así queda plenamente probado este teorema. ■

7.4. El inverso del lema de Poincaré

El lema de Poincaré, $d(dw) = 0$, tiene las siguientes interpretaciones en 3 dimensiones:

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f) = 0, \quad \mathrm{div}(\mathrm{rot}\, v) = 0$$

i. En el análisis vectorial se demuestra que un campo vectorial cuyo rotacional es cero es gradiente.

ii. Un campo vectorial cuya divergencia vale cero es un rotacional.

Sea una variedad diferencial M^n una k-forma diferencial w, se dice que es exacta si existe una $(k-1)$-forma β tal que $d\beta = w$; se dice que w es cerrada si $dw = 0$. Puesto que $d^2 = 0$, toda forma exacta es cerrada. El inverso del hecho anterior no se cumple en general. Por ejemplo, sea

$$w = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

la cual está definida en $\mathbb{R} - \{0\} = U$. Es fácil ver que $dw = 0$, es decir, w es cerrada, sin embargo, no existe una función diferenciable g en U tal que $dg = w$; en caso contrario, por el teorema de Stokes

$$\int_c w = \int_c dg = \int_{\partial c} g = 0$$

Por otro lado

$$\int_c w = 2\pi$$

Vamos a demostrar a continuación (si los dominios no son muy complicados topológicamente), que si w es una p-forma $(p \geq 1)$ y $dw = 0$, entonces existe una $(p-1)$-forma α tal que $w = d\alpha$.

Sea U un dominio de $\mathbb{R}^n$, denotamos por $I = [0, 1]$ el intervalo unitario sobre el eje t y consideremos el cilindro o espacio producto $I \times U$. Este consiste de todos los pares (t, x) donde $0 \leq t \leq 1$ y x corresponde a los puntos de U.

Destacaremos los siguientes dos mapeos, los cuales identifican a U en las tapas superior e inferior respecto del cilindro.

$$j_1 : U \longrightarrow I \times U, \quad j_1(x) = (1, x)$$

$$j_0 : U \longrightarrow I \times U, \quad j_0(x) = (0, x)$$

Por lo tanto

$$j_i^* : \mathbb{F}^p(I \times U) \to \mathbb{F}^p(U) \quad (i = 0, 1)$$

Por ejemplo, para formar $j_1^* w$ donde w es una forma en $I \times U$ simplemente reemplazamos t por 1 siempre que este aparezca en w (y dt por 0 correspondientemente).

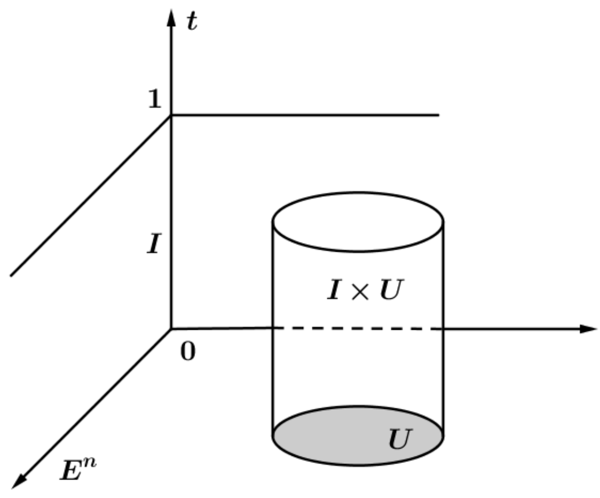

Figura 7.7:

Ahora formamos una operación k,

$$k : \mathbb{F}^{p+1}(I \times U) \longrightarrow \mathbb{F}^{p}(U)$$

k está definida sobre monómios mediante las fórmulas:

$$k(a(t,x)dx^H) = 0$$

$$k(a(t,x)dtdx^J) = \left(\int_0^1 a(t,x)dt\right) dx^J$$

y sobre una forma diferencial general sumando el resultado al aplicar a los monómios de cada forma. Aquí tenemos las propiedades básicas de k: Si w es alguna $(p+1)$-forma sobre $I \times U$, entonces

$$k(dw) + d(kw) = j_1^* w - j_0^* w$$

Es suficiente verificar esto para monómios

Caso i) $w = a(t,x)dx^H$

De la definición de k tenemos que $kw = 0,\ dkw = 0$

$$dw = \frac{\partial a}{\partial t} dtdx^H + [\textit{términos libres de dt}]$$

$$kdw = \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t} dt\right) dx^H = [a(1,x) - a(0,x)]dx^H$$

pero $j_1^* w = a(1,x)dx^H$, $j_0^* w = a(0,x)dx^H$ así que la fórmula es válida para este caso.

Caso ii) $w = a(t,x)dtdx^J$

Primero $j_1^* w = j_0^* w = 0$. Luego

$$kdw = k\left[-\sum \frac{\partial a}{\partial x^i} dtdx^i dx^J\right] = -\sum\left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^i}dt\right)dx^i dx^J$$

$$dkw = d\left[\left(\int_0^1 a(t,x)dt\right)dx^J\right] = \sum \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\int_0^1 a(t,x)dt\right]dx^i dx^J$$
$$= \sum\left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^i}dt\right)dx^i dx^J$$

Definición 7.4.1. Un dominio U es deformable (contraible) a un punto p, si hay un mapeo

$$\phi : I \times U \to U$$

tal que

$$\phi(1,x) = x$$
$$\phi(0,x) = p$$

Las condiciones a la frontera pueden ser interpretadas en términos de las $Ji's$ como sigue:

$$\phi \circ j_1 = I, \quad \phi \circ j_0 = p$$

Para una $(p+1)-$forma w sobre U tenemos como consecuencia

$$j_1^*[\phi^* w] = w, \quad j_0^*[\phi^* w] = 0$$

Ahora podemos establecer y demostrar el resultado principal. Sea U un dominio en $\mathbb{R}^n$ el cual puede ser deformado a un punto p. Sea w una $(p+1)$-forma sobre U tal que

$$dw = 0$$

sustituimos $\phi^* w$ en la fórmula de arriba

$$k[d(\phi^* w)] + d[k(\phi^* w)] = w$$

Pero $d(\phi^* w) = \phi^*(dw) = 0 \implies d[k(\phi^* w)] = w$.

Ejemplo 7.4.1. Vamos a ilustrar el método completo para el caso $n = 3$, $p = 2$ por lo tanto tenemos una 2-forma

$$w = Adydz + Bdzdx + Cdxdy$$

en $\mathbb{R}^3$ para la cual $dw = 0$, es decir

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$$

El espacio $\mathbb{R}^3$ puede ser deformado mediante el mapeo

$$\phi(t, x, y, z) = (tx, ty, tz)$$

La afirmación es que $w = d\alpha$ donde

$$\begin{aligned}
\alpha &= k\phi^* w \\
\phi^* w &= A(tx, ty, tz)d(ty)d(tz) + \cdots \\
&= A(tx, ty, tz)(tdy + ydt)(tdz + zdt) + \cdots \\
&= A(tx, ty, tz)(ytdtdz - ztdtdy) + \cdots + (\textit{términos libres de dt})
\end{aligned}$$

Ahora tenemos

$$\alpha = k(\phi^* w) = \left(\int_0^1 A(tx, ty, tz)tdt\right)(ydz - zdy)$$

$$+ \left(\int_0^1 B(tx, ty, tz)tdt\right)(zdx - xdz) + \left(\int_0^1 C(tx, ty, tz)tdt\right)(xdy - ydx)$$

Podemos verificar que $d\alpha = w$.

Para $w = Adydz + Bdzdx + Cdxdy$ tal que $d\alpha = w$. Es equivalente a encontrar funciones desconocidas P, Q, R que dependen de las variedades x, y, z tal que

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = A, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = B, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C$$

Las funciones dadas A, B, C están sujetas a la condición

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$$

7.5. Ecuaciones de campo de Maxwell

Las ecuaciones básicas de Maxwell en lenguaje vectorial ordinario son

$$\textit{i)}\ \ \text{rot}\ \ E=-\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}\quad \textit{(Ley de inducción de Faraday)} \tag{7.9}$$

$$\textit{ii)}\ \ \text{rot}\ \ H=\frac{4\pi}{c}J+\frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}\quad \textit{(Ley de Ampére)} \tag{7.10}$$

$$\textit{iii)}\ \ \text{div}\ \ D=4\pi\rho\quad \textit{(Continuidad)} \tag{7.11}$$

$$\textit{iv)}\ \ \text{div}\ \ B=0\quad \textit{(No existencia de monopolios)} \tag{7.12}$$

En el espacio libre, todo se simplifica

$$E=D \quad H=B$$

$$J=0 \quad \rho=0$$

Así que las ecuaciones de Maxwell se ven ahora como

$$\text{rot}\ \ E=-\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, \quad \text{div}\ \ E=0$$

$$\text{rot}\ \ H=\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}, \quad \text{div}\ \ H=0$$

Aquí c es la velocidad de la luz. Vamos a poner estas fórmulas en el lenguaje de formas, para este fin hacemos

$$\alpha=(E_1dx^1+E_2dx^2+E_3dx^3)(cdt)+(B_1dx^2dx^3+B_2dx^3dx^1+B_3dx^1dx^2)$$
$$\beta=-(H_1dx^1+H_2dx^2+H_3dx^3)(cdt)+(D_1dx^2dx^3+D_2dx^3dx^1+D_3dx^1dx^2)$$
$$\gamma=(J_1dx^2dx^3+J_2dx^3dx^1+J_3dx^1dx^2)dt-\rho dx^1dx^2dx^3$$

De las ecuaciones (i) y (iv) se concluye que

$$d\alpha=0$$

De las ecuaciones (ii) y (iii) se concluye que

$$d\beta+4\pi\gamma=0$$

Supongamos que $a=Adx+Bdy+Cdz$, donde A, B y C son funciones suaves en $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} da &= d(Adx+Bdy+Cdz)\\ &= \left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)dxdy \end{aligned}$$

Introduciendo la métrica de Lorentz en el 4-espacio mediante

$$dx^1, dx^2, dx^3, cdt$$

Es una base ortonormal:

$$(dx^i, dx^j) = \delta^{ij}, \quad (dx^i, cdt) = 0$$

$$(cdt, cdt) = -1$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= (E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3)(cdt) + (H_1 dx^2 dx^3 + H_2 dx^3 dx^1 + H_3 dx^1 dx^2) \\
\beta &= -(H_1 dx^1 + H_2 dx^2 + H_3 dx^3)(cdt) + (E_1 dx^2 dx^3 + E_2 dx^3 dx^1 + E_3 dx^1 dx^2) \\
&= *\alpha
\end{aligned}$$

De acuerdo a la definición del operador estrella de Hodge tenemos

$$*(dx^1 dx^2) = -dx^3(cdt) \quad etc$$
$$*(dx^1 cdt) = dx^2 dx^3, \quad etc$$

Consecuentemente las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre son

$$d\alpha = 0$$

$$d * \alpha = 0$$

7.6. Aplicaciones en el espacio euclidiano

Volumenes en $\mathbb{R}^n$

Denotemos por

$$w = dx_1 \cdots dx_n$$

el elemento de volumen en $\mathbb{R}^n$, una n-forma y establecemos

$$V_n = \int_{r \leq 1} w, \quad r^2 = \sum x_i^2$$

así que V_n es el volumen de la bola unitaria. A continuación denotemos por σ el elemento de volumen de dimensión $(n-1)$ de la esfera unitaria

$$S^{n-1} = \{x | r = 1\}$$

$$A_{n-1} = \int_{S^{n-1}} \sigma$$

$$A_1 = 2\pi, \ A_2 = 4\pi, \ V_1 = 2, \ V_2 = \pi, \ v_3 = 4/3\pi$$

Es claro que el volumen de la esfera de radio r es $r^{n-1}A_{n-1}$

$$V_n = \int_0^1 r^{n-1}A_{n-1}dr = \frac{1}{n}A_{n-1}$$

podemos evaluar V_n integrando en bloques

$$V_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{(n-1)/2}V_{n-1}dx = V_{n-1}J_n$$

donde

$$J_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{(n-1)/2}dx$$

Integrando por partes

$$J_n = \int_{-1}^1 x(2x)\left(\frac{n-1}{2}\right)(1-x^2)^{(n-3)/2}dx = (n-1)(-Jn + J_{n-2}),$$

$$J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2}$$

Esta fórmula recursiva lleva al resultado estandar

$$V_n = \frac{\pi^{(n/2)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

A continuación obtendremos una fórmula explicita para σ en términos de las coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Comenzaremos con la forma

$$rdr = \sum x_i dx_i$$

una 1-forma invariante bajo rotaciones (transformaciones ortogonales) $\mathbb{R}^n$. Consecuentemente

$$*rdr = \sum (-1)^{i-1}x_i dx_i \cdots \overline{dx_i} \cdots dx_n$$

(el sombrero denota el factor que resulta) es una $(n-1)$-forma en $\mathbb{R}^n$. La cual es invariante bajo rotaciones. Se sigue que en S^{n-1},

$$\sigma = c * rdr$$

donde c, es constante.

A continuación notamos que

$$d(*rdr) = \sum(-1)^{i-1}dx_i dx_1 \cdots \overline{dx_i} \cdots dx_n = nw$$

luego

$$A_{n-1} = \int_{S^{n-1}} \sigma = c\int_{S^{n-1}} *rdr = c\int_{r\leq 1} d(*rdr) = c\int_{r\leq 1} nw = cnV_n = cA_{n-1}$$

donde $c = 1,\ \sigma = *rdr$ en S^{n-1}

7.7. Teoría de potencial

Hacemos un recuento de la notación introducida anteriormente. Espacio: $\mathbb{R}^n$.

Coordenadas: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$r^2 = x_1^2 + \cdots + x_n 2,$$

$$rdr = \sum_1^n x_i dx_i,$$

$$\sigma = *(rdr) = \sum_1^n x_i * dx_i = \sum_1^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \cdots \overline{dx_i} \cdots dx_n.$$

$$\tau = \frac{\sigma}{r^n}$$

$$w = dx_1 \cdots dx_n = \textit{elemento de volumen en } \mathbb{R}^n$$

$$d\sigma = nw, \quad d\tau = 0$$

$$V_n = \int_{r\leq 1} w = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}, \quad A_{n-1} = \int_{r=1} \sigma = nV_n$$

Sea u una función suave sobre un dominio en $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$du = \sum \frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i,$$

$$*du = \sum(-1)^{i-1} \frac{\partial u}{\partial x^i} dx^1 \cdots \overline{dx^i} \cdots dx^n.$$

$$d * du = \left(\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x^{i2}}\right) w = (\Delta u)w,$$

Definimos el Laplaciano

$$\Delta u = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x^{i2}}$$

Si u y v son funciones sobre un dominio finito $\mathbb{R}$, la integral de *Dirichlet* es

$$D[u,v] = \int_{\mathbb{R}} du \wedge *dv = \int_{\mathbb{R}} dv \wedge *du = \int_{\mathbb{R}} \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x^i}\right) w$$

A continuación, tenemos por el teorema de Stokes

$$\int_{\partial\mathbb{R}} u * dv = \int_{\mathbb{R}} d(u * dv)$$

Pero

$$d(u * dv) = du \wedge *dv + ud * dv = du \wedge *dv + u\Delta vw$$

Luego tenemos

Fórmula de Green

$$\int_{\partial\mathbb{R}} u * dv = D[u,v] + \int_{\mathbb{R}} u\Delta vw$$

Intercambiando u y v, y restando los resultados, obtenemos

$$\int_{\partial\mathbb{R}} (u * dv - v * du) = \int_{\mathbb{R}} (u\Delta v - v\Delta u)w$$

Usualmente escribimos

$$*du = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)\lambda$$

donde λ es un elemento de volumen de dimensión $(n-1)$ en $\partial\mathbb{R}$ y $\frac{\partial u}{\partial v}$ es la derivada normal.

7.8. Fórrmula simétrica de Green

Sean u y v funciones armónicas en la región $\mathbb{R}$. Entonces

$$\int_{\partial\mathbb{R}} (u * dv - v * du) = \int_{R} (u\Delta v - v\Delta u)w$$

$$\int_{\partial\mathbb{R}} u * dv = \int_{\partial\mathbb{R}} v * du$$

Derivamos otras consecuencias haciendo

$$V = \frac{1}{r^{n-2}}$$

$$dv = \frac{-(n-2)}{r^n}(rdr)$$

$$*dv = -(n-2)\tau$$

$$d * dv = 0, \quad \Delta v = 0$$

La función v está definida sobre $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Suponemos que la región $\mathbb{R}$ contiene al cero y aplicamos la fórmula de arriba en la región agujerada

$$\mathbb{R} - \{r \leq \varepsilon\}$$

con ε una constante positiva pequeña. Puesto que

$$\partial[\mathbb{R} - \{r \leq \varepsilon\}] = \partial\mathbb{R} - \{r = \varepsilon\}$$

tenemos

$$\int_{\partial\mathbb{R}} u * dv - \int_{r=\varepsilon} u * dv = \int_{\partial\mathbb{R}} v * du - \int_{r=\varepsilon} v * du$$

$$-(n-2)\int_{\partial\mathbb{R}} u\tau + (n-2)\int_{r=\varepsilon} u\tau = \int_{\partial\mathbb{R}} \frac{1}{r^{n-2}} * du - \int_{r=\varepsilon} \frac{1}{r^{n-2}} * du$$

Evaluando individualmente cada término

$$\int_{r=\varepsilon} u\tau = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{r=\varepsilon} u\sigma = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{r\leq\varepsilon} d(u\sigma) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{r\leq\varepsilon} (du \wedge \sigma + u \cdot nw)$$

Ahora para $|x| \leq \varepsilon$, $u(x) = u(0) + O(\varepsilon)$, luego

$$\int_{r\leq\varepsilon} nw = u(0)V_n + O(\varepsilon)\varepsilon^n$$

Análogamente

$$\int_{r\leq\varepsilon} du \wedge \sigma = \int_{r\leq\varepsilon} \left(\sum \frac{\partial u}{\partial x^i} x^i\right) w = \int_{r\leq\varepsilon} O(\varepsilon)w = O(\varepsilon)\varepsilon^n$$

$$\int_{r=\varepsilon} u\tau = nV_n u(0) + O(\varepsilon) = A_{n-1}u(0) + O(\varepsilon)$$

$$\int_{r=\varepsilon} \frac{1}{r^{n-2}} * du = \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int_{r=\varepsilon} *du = \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int_{r\leq\varepsilon} d(*du) = \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int_{r\leq\varepsilon} (\Delta u) w = 0$$

Sustituyendo estos resultados y haciendo $\varepsilon \to 0$, tenemos

$$u(0) = \frac{1}{A_{n-1}} \int_{\partial\mathbb{R}} u\tau + \frac{1}{(n-2)A_{n-1}} \int_{\partial\mathbb{R}} \frac{*du}{r^{n-2}}$$

que es la fórmula para determinar la función armónica en un punto.

Caso especial. Sea $\mathbb{R}$ una región esférica de radio a y centro en 0, $\mathbb{R} = \{r \leq a\}$. En este caso el segundo término del lado derecho se anula por la misma razón que la correspondiente integra tomada sobre $\{r = \varepsilon\}$ se anuló. Sobre $\partial\mathbb{R} = \{r = a\}$ tenemos

$$\tau = \frac{\sigma}{a^n} = \frac{1}{a^{n-1}}\mu$$

donde

$$\mu = \mu x = \frac{1}{a} \sum (-1)^{i-1} x_i dx_1 \cdots \overline{dx_i} \cdots dx_n$$

es elemento de volumen de dimensión $(n-1)$ sobre $\{r = a\}$. Tenemos

$$v(0) = \frac{1}{a^{n-1}A_{n-1}} \int_{r=a} u\mu = \frac{\int_{r=a} u\mu}{\int_{r=a} \mu}$$

7.9. Teoremas de De Rham

Teorema 7.9.1. (Primer Teorema de De Rham). *Una forma cerrada es exacta si y sólo si todos sus periodos se anulan.*

Teorema 7.9.2. (Segundo Teorema de De Rham). *Supongamos que a cada p-ciclo z se le asigna un número $\operatorname{per}(z)$ sujeto a la relación de consistencia*

$$\sum a_i z_i = \textit{frontera}$$

entonces

$$\sum a_i \operatorname{per}(z_i) = 0$$

Concluimos que existe una forma cerrada la cual tiene periodos asignados,

$$\int_z w = \operatorname{per}(z),$$

para cada p-ciclo z.

7.10. Winding Number

Supongamos que ξ es una $(n-1)$-variedad en $\mathbb{R}^n - \{0\}$ orientada y cerrada. Por el teorema de *Jordan-Brower*, ξ descompone $\mathbb{R}^n$ en exactamente dos regiones. Supongamos que ξ está orientada por la normal exterior. El mapeo proyección π manda a ξ en S^{n-1}. ¿Cuánto vale el *deg* π?.

Hagamos $\delta =$ *deg* π.

$$\int_\xi \tau = \int_\xi \pi^*\sigma' = \int_{\pi(\xi)} \sigma' = \delta \int_{S^{n-1}} \sigma' = \delta A_{n-1}$$

donde

$$\delta = \frac{1}{A_{n-1}} \int_\xi \tau$$

Sea M^{n-1} una variedad cerrada orientada

$$f : M^{n-1} \to \mathbb{R}^n - \{0\}$$

Pensamos que $f(M^{n-1})$ como una hipersuperficie en $\mathbb{R}^n - \{0\}$ la cual se puede intersectar ella misma. Buscamos entender como esta super hipersuperficie rodea al origen y pretendemos contar cuantas veces rodea. Este número de rodeo *(Winding Number)* está dado por la integral de Kronecker

$$\frac{1}{A_{n-1}} \int_M f^*\tau$$

Justifiquemos esto como sigue. Hagamos $g = \pi \circ f : M^{n-1} \to S^{n-1}$. Buscamos el *deg* g.

$$g_*(M) = (\textit{deg}\ g)S^{n-1} + \textit{(frontera)}$$

$$\int_M g^*\sigma' = \int_{g_*M} \sigma' = (\textit{deg}\ g) \int_{S^{n-1}} \sigma' = A_{n-1}\textit{deg}\ g$$

$$\textit{deg}\ g = \frac{1}{A_{n-1}} \int_M g^*\sigma'$$

Pero $g^*\sigma' = (f^* \circ \pi^*)\sigma' = f^*\tau$, estonces se tiene

$$\textit{deg}\ g = \frac{1}{A_{n-1}} \int_M f^*\tau$$

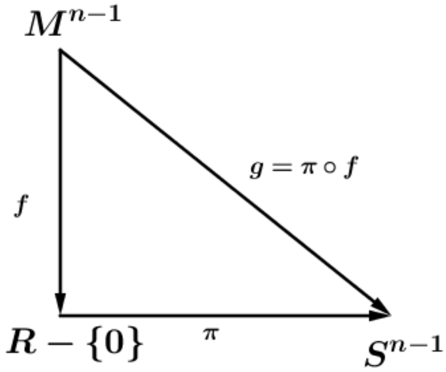

Figura 7.8:

La situación más general:

$$f : M^n \to N^n$$

Sea β una forma de volumen en N escogida de modo tal que $\int_N \beta = 1$. Entonces

$$\textit{deg}\ f = \int_M f^*\beta$$

Para $f_*M = (\textit{deg}\ f)N +$ *(frontera)*, entonces

$$\int_M f^*\beta = \int_{f_*M} \beta = (\textit{deg}\ f) \int_N \beta = \textit{deg}\ f$$

Ejemplo 7.10.1. Un ejemplo interesante es: Sea T^n el n-toro, $f : S^n \to T^n$ donde $n \geq 2$. Entonces *deg* $f = 0$.

7.11. El invariante de Hopf

Para cada esfera S^n, sea σ_n' el elemento de área, normalizado de modo tal que

$$\int_{S^n} \sigma_n = 1$$

Consideremos un mapeo $f : S^3 \to S^2$. Entonces $f^*\sigma_2$ es una 2-forma en S^3. Considerar que:

i) S^3 no tiene 2-ciclos no triviales.

ii) La esfera no tiene 1-ciclos no triviales.

iii) La esfera y el toro son 2-ciclos.

También $d(f^*\sigma_2) = f^*(d\sigma_2)$. Por lo tanto

$$f^*\sigma_2 = d\alpha_1$$

para alguna 1-forma α_1 en S^3, ésta es única salvo la diferencial de una función.

La 3-forma $\alpha_1 \wedge f^*\sigma_2$ tiene integral

$$\int_{S^3} \alpha_1 \wedge f^*\sigma_2$$

La cual tiene la notable propiedad de que es un entero, llamado el ***invariante de Hopf*** . El mapeo $(z, w) \to z/w$ proporciona un mapeo de S^3 en el plano complejo cerrado, es decir, la esfera de Riemann. Éste tiene invariante de Hopf igual a $+1$. Más generalmente, sea

$$f : S^{2n-1} \to S^n$$

Entonces $f^*\sigma_n = d\alpha_{n-1}$ y el invariante de Hopf de f es

$$\int_{S^{2n-1}} \alpha_{n-1} \wedge f^*\sigma_n$$

7.12. Geometría diferencial de superficies

Las ecuaciones de estructura de $\mathbb{R}^n$.

Una variedad Rimanniana es una variedad diferenciable M y una elección para cada $p \in M$, de un producto interior definido positivo $\langle , \rangle_p$ en T_pM el cual varía diferenciablemente con p en el siguiente sentido: si X y Y son campos diferenciables en M, la función $p \to \langle X, Y\rangle_p$ es diferenciable. El producto interno $\langle , \rangle_p$ es usualmente llamado una métrica Rimanniana sobre M.

Un difeomorfismo $\varphi : M \to M'$ entre variedades M y M' es una isometría si para todo $p \in M$ y toda pareja $x, y \in T_pM$ tenemos

$$\langle x, y\rangle_p = \langle d\varphi_p(x), d\varphi_p(y)\rangle_{\varphi(p)}$$

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sean $e_1, \ldots, e_n$, n campos vectoriales en $\mathbb{R}^n$ tales para cada $p \in U$, $\langle e_i, e_j\rangle_p = \delta_{ij}$, donde $\delta ij = 0$ si

$i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$. Tal conjunto de campos vectoriales es llamado un marco ortogonal movible. Dado un marco $\{e_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ podemos definir 1-formas diferenciales w_i por la condición $w_i(e_j) = \delta_{ij}$, $j = 1, \cdots, n$, en otras palabras, en cada p, la base $\{(w_i)_p\}$ es la base dual de $\{(e_i)_p\}$. El conjunto $\{w_i\}$ es llamado el marco asociado a $\{e_i\}$. Cada campo vectorial $e_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un mapeo diferenciable. La diferencial en $p \in U$, $(de_i)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, es un mapeo lineal. Por lo tanto, para cada $p \in U$ y cada $v \in \mathbb{R}^n$ podemos escribir

$$(de_i)_p(v) = \sum_j (w_{ij})_p(v) e_j$$

Las n^2 1-formas diferenciables w_{ij}, así definidas son llamadas las formas de conexión de $\mathbb{R}^n$ en el marco movible $\{e_i\}$.

No todas las formas w_{ij} son independientes. Si derivamos $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ tenemos

$$0 = \langle de_i, e_j \rangle + \langle e_i + de_j \rangle = w_{ij} + w_{ji}$$

esto es, las formas de conexión $w_{ij} = -w_{ji}$ son antisimétricas en los índices *i,j*.

Las ecuaciones de estructura de $\mathbb{R}^n$

Proposición 7.12.1. *Sea $\{e_i\}$ un marco movible en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Sea $\{w_i\}$ el co-marco asociado a e_i y w_{ij} las formas de conexión en U en el marco $\{e_i\}$. Entonces*

$$dw_i = \sum_k w_k \wedge w_{ki} \quad (1)$$

$$dw_{ij} = \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj}, \quad i, j, k = 1, \ldots, n \quad (2)$$

Demostración. Sea $a_1 = (1, \ldots, 0), \ldots a_n = (0, \ldots, 1)$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, y sea $x_i = \mathbb{R}$ la función que asigna a cada punto $(x_1, \ldots, x_n)$ su i-ésima coordenada. Entonces dx_i es una 1-forma diferencial y puesto que $dx_i(a_j) = \delta_{ij}$ calculamos que $\{dx_i\}$ es el co-marco asociado a $\{a_i\}$. Ahora escribimos

$$e_i = \sum_j \beta_{ij} a_j \quad (3)$$

donde β_{ij} es una función diferenciable sobre U, para cada $p \in U$, la matriz $(\beta_{ij}(p))$ es ortonormal. Puesto que $w_i(e_j) = \delta_{ij}$,

$$w_i = \sum_j \beta_{ij} dx_j \quad (4)$$

Primero probaremos que $d\beta_{ij} = \sum_k w_{ik}\beta_{kj}$. De hecho

$$de_i = \sum_k w_{ik} e_k = \sum_k w_{ik} \left(\sum_j \beta_{kj} a_j \right) = \sum_{jk} w_{ik}\beta_{kj} a_j$$

Derivamos (3) y de $de_i = \sum d\beta_{ij} a_j$ obtenemos comparando

$$d\beta_{ij} = \sum_k w_{ik}\beta_{kj} \quad (5)$$

Para obtener la primera ecuación de estructura derivamos (4) y usamos (5).

$$dw_i = \sum_j d\beta_{ij} \wedge dx_j = \sum_{jk} w_{ik}\beta_{kj} \wedge dx_j = \sum_k w_k \wedge w_{ki}$$

La segunda ecuación puede obtenerse análogamente. ■

La idea principal del método de Cartan para estudiar la geometría de subaridades en $\mathbb{R}^n$ se describe a continuación. Sea $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ una inmersión de una variedad diferencial M en $\mathbb{R}^{n+k}$. Como consecuencia del teorema de la función inversa para cada $p \in M$ existe una vecindad $U \subset M$ tal que $x|_u \subset M \to \mathbb{R}^{n+k}$ es un encaje. Sea $V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ una vecindad de $x(p)$ en $\mathbb{R}^{n+k}$ tal que $V \cap M = x(U)$. Supongamos que V es tal que existe un marco movible $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+k}\}$ en V con la propiedad de que, cuando nos restringimos a $x(U)$ los vectores $e_1, \ldots, e_n$ son tangentes a $x(U)$, tal marco movible es llamado marco adaptado. En V tenemos, asociando al marco $\{e_j\}$, el co-marco de formas w_i y las formas de conexión w_{ij} las cuales satisfacen las acuaciones de estructura. El mapeo $x : U \subset M \to \mathbb{R}^{n+k}$ induce formas $x^*(w_i),\ x^*(w_{ij})$ en U. Puesto que x^* conmuta con la derivada exterior y con el producto exterior, tales formas en U satisfacen las ecuaciones de estructura. Esto refleja el carácter universal de $\mathbb{R}^{n+k}$

Lema 1. Lema de Cartan .

Sea V^n un espacio vectorial de dimensión n, $w_1, \ldots, w_r : V^n \to \mathbb{R}$, $r \leq n$, formas lineales en V linealmente independientes. Supogongamos que existen $\theta_1, \ldots, \theta_r : V \to \mathbb{R}$ tal que $\sum_{i=1}^{r} w_i \wedge \theta_i$. Entonces

$$\theta_i = \sum_j a_{ij} w_j, \quad a_{ij} = a_{ji}$$

Lema 2. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ y sean $w_1, \ldots, w_n$ 1-formas en U. Supongamos que existe un conjunto de 1-formas diferenciales $\{w_{ij}\}$, $i, j = 1, \ldots, n$ que satisfacen las condiciones

$$w_{ij} = -w_{ji}, \quad dw_j = \sum w_k \wedge w_{kj}$$

entonces tal conjunto es único.

Superficies En $\mathbb{R}^3$.

Sea $x : M^2 \to \mathbb{R}^3$ una inmersión de una variable diferencial de dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$. Para cada punto $p \in M^2$, está definido un producto interior $\langle , \rangle$ en T_pM^2 mediante la regla

$$\langle v_1, v_2 \rangle_p = \langle dx_p(v_1), dx_p(v_2) \rangle_{x(p)}$$

donde el producto interno del lado es el producto interior canónico de $\mathbb{R}^3$. Es directo verificar que $\langle , \rangle_p$ es diferenciable y define una métrica Rimanniana en M^2 llamada la métrica inducida por la imersión. Vamos a estudiar la geometría local de M^2 alrededor de un punto $p \in M^2$. Sea $U \subset M$ una vecindad de p tal que la restricción $x|_u$ es un encaje. Sea $V \in \mathbb{R}^3$ una vecindad de $x(p)$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $V \cap x(M) = x(U)$, y es posible escoger en V un marco movible adaptado e_1, e_2, e_3; esto significa que cuando restringimos a $x(U)$, e_1 y e_2 son tangentes a $x(U)$ (por lo tanto e_3 es normal a la superficie). En V tenemos, asociando al marco $\{e_i\}$, las formas del co-marco $\{w_i\}$ y las formas de conexión $w_{ij} = -w_{ji}$ donde $i, j = 1, 2, 3$ las cuales satisfacen las ecuaciones de estructura.

$$\begin{aligned}
dw_1 &= w_2 \wedge w_{21} + w_3 \wedge w_{31} \\
dw_2 &= w_1 \wedge w_{12} + w_3 \wedge w_{32} \\
dw_3 &= w_1 \wedge w_{13} + w_2 \wedge w_{23} \\
dw_{12} &= w_{13} \wedge w_{32} \\
dw_{13} &= w_{12} \wedge w_{23} \\
dw_{23} &= w_{21} \wedge w_{13}
\end{aligned}$$

La inmersión $x : U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^3$ induce formas $x^*(w_i), x^*(w_{ij})$ en U. Puesto que x^* conmuta con d y $\wedge$, tales formas tadavía satisfacen las ecuaciones de estructura. En efecto, por ejemplo la primera

$$\begin{aligned} d(x^*(w_1)) = x^*(dw_1) = x^*(w_2 \wedge w_{21} + w_3 \wedge w_{31}) &= x^*(w_2 \wedge w_{21}) + x^*(w_3 \wedge w_{31}) \\ &= x^*(w_2) \wedge x^*(w_{21}) + x^*(w_3) \wedge x^*(w_{31}) \end{aligned}$$

Capítulo 8

Ejercicios

8.1. Ejercicios resueltos

1. Defina lo que significa integrar una p-forma w en una variedad M.

Solución. Definimos

$$\int_c w$$

donde w es una p-forma y c una p-cadena. Luego

$$c = \sum a_i \sigma_i$$

donde las a_i son constantes y los σ_i son p-simplejos.

Luego

$$\int_c w = \sum a_i \int_{\sigma_i} w$$

2. Demuestre que el mapeo antípoda $p(x, y, z) = (-x, -y, -z)$, $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una isometría.

Demostración. Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$ una curva arbitraria suave en S^2 y sea $\beta = p \circ \alpha$. Entonces

$$\beta(t) = (-x(t), -y(t), -z(t))$$

Así también

$$||\alpha(t)|| = ||\beta(t)||$$

para todo $a \leq t \leq b$. Se sigue que

$$\begin{aligned} L(\alpha) = & \int_a^b ||\alpha(t)||dt = \int_a^b ||\beta(t)|| \\ = & L(\beta) \end{aligned}$$

por lo tanto p es un isometría. ■

3. *Lema de Poincaré para una 1-forma.* Sea $w = a(x,y,z)dx + b(x,y,z)dy + c(x,y,z)dz$ una forma diferenciable en $\mathbb{R}^3$ tal que $dw = 0$. Se define $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ por

$$f(x,y,z) = \int_0^1 [a(tx,ty,tz)x + b(tx,ty,tz)y + c(tx,ty,tz)z]dt$$

Probar que $df = w$.

Sugerencia: $dw = 0$ implica que

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}, \quad \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial z}, \quad \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial y}$$

Solución. Sea $X = (x,y,z)$.

$$\begin{aligned} f(X) = & \int_0^1 [a(tX)x + b(tX)y + c(tX)z]dt \\ \frac{\partial f}{\partial x}(X) = & \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 [a(tX)x + b(tX)y + c(tX)z]dt \\ = & \int_0^1 \{\frac{\partial}{\partial x}[a(tX)x] + \frac{\partial}{\partial x}[b(tX)y] + \frac{\partial}{\partial x}[c(tX)z]\} \\ = & \int_0^1 [a(tX) + x\frac{\partial a}{\partial x}(tX)t + y\frac{\partial b}{\partial x}(tX)t + z\frac{\partial a}{\partial x}(tX)t]dt \\ = & \int_0^1 \frac{d}{dt}[a(tX)t] \\ = & a(tX)t|_0^1 \\ = & a(X) \end{aligned}$$

Análogamente usando $\dfrac{\partial}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial}{\partial x}$.

Por lo tanto

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = a(X) + b(X) + c(X) = w$$

.

4. Sea
$$w = (x^2yz)dydz + (xy^2z)dzdx - 2(xyz^2)dxdy$$
una 2-forma en $\mathbb{R}^3$. Demuestra que $dw = 0$ y determina α tal que $d\alpha = w$.

Solución. Tenemos

$$\begin{aligned}
dw = & \ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \\
= & \ \left[\frac{\partial(x^2yz)}{\partial x}dx + \frac{\partial(x^2yz)}{\partial y}dy + \frac{\partial(x^2yz)}{\partial z}dz\right]dydz \\
+ & \ \left[\frac{\partial(xy^2z)}{\partial x}dx + \frac{\partial(xy^2z)}{\partial y}dy + \frac{\partial(xy^2z)}{\partial z}dz\right]dzdx \\
+ & \ \left[\frac{\partial(xyz^2)}{\partial x}dx + \frac{\partial(xyz^2)}{\partial y}dy + \frac{\partial(xyz^2)}{\partial z}dz\right]dxdy \\
= & \ \left[2xyzdx + x^2zdy + x^2ydx\right]dydz \\
+ & \ \left[y^2zdx + 2xyzdy + xy^2dz\right]dxdz \\
- & \ 2\left[yz^2dx + xz^2dy + 2xyzdz\right]dxdy \\
= & \ 2xyzdxdydz + 2xyzdydzdx - 4xyzdzdxdy \\
= & \ 4xyzdxdydz - 4xyzdxdydz \\
= & \ 0
\end{aligned}$$

Ahora, el espacio $\mathbb{R}^3$ puede ser deformado a 0 mediante el mapeo

$$\phi(t, x, y, z) = (tx, ty, tz)$$

La afirmación es que $w = d\alpha$ donde $\alpha = K\phi^*w$. Empecemos calculando ϕ^*w. Esto es

$$\begin{aligned}
\phi^*w \ & = [(tx)^2(ty)(tz)]d(ty)d(tz) + [(tx)(ty)^2(tz)]d(tz)d(tx) \\
& -2[(tx)(ty)(tz)^2]d(tx)d(ty) \\
& = (t^4x^2yz)(ydt + tdy)(zdt + tdz) + (t^4xy^2z)(zdt + tdz)(xdt + tdx) \\
& -2(t^4xyz^2)(xdt + tdx)(ydt + tdy) \\
& = (t^4x^2yz)(ytdtdz - ztdtdy) + (t^4xy^2z)(ytdtdx - xtdtdz) \\
& -2(t^4xyz^2)(xtdtdy - ytdtdx)
\end{aligned}$$

$$= (t^5x^2yzdt)(ydz - zdy) + (t^5xy^2zdt)(zdx - xdz)$$
$$-2(t^5xtz^2dt)(xdy - ydx)$$

Luego

$$\begin{aligned}
\alpha =& \; K\phi^* w \\
=& \left(\int_0^1 t^5x^2yzdt\right)(ydz - zdy) + \left(\int_0^1 t^5xy^2zdt\right)(zdx - xdz) \\
-& \left(\int_0^1 2t^5xyz^2dt\right)(xdy - ydx) \\
=& \left(\frac{1}{6}t^6x^2yz|_0^1\right)(ydz - zdy) + \left(\frac{1}{6}t^6xy^2z|_0^1\right)(zdx - xdz) \\
-& \left(\frac{1}{3}t^6xyz^2|_0^1\right)(xdy - ydx) \\
=& \frac{1}{6}x^2yz(ydz - zdy) + \frac{1}{6}xy^2z(zdx - xdz) - \frac{1}{3}xyz^2(xdy - ydx) \\
=& \frac{1}{6}x^2y^2zdz - \frac{1}{6}x^2yz^2dy + \frac{1}{6}xy^2z^2dx \\
-& \frac{1}{6}x^2y^2zdz - \frac{1}{3}x^2yz^2dy + \frac{1}{3}xy^2z^2dx \\
=& \frac{1}{2}xy^2z^2dx - \frac{1}{2}x^2yz^2dy
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\alpha = \frac{1}{2}(xy^2z^2dx - x^2yz^2dy)$$

5. Determine los valores de $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7$ y V_8 y consecuentemente, los de y $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ y A_6 para la esfera unitaria S^3.

Solución. Consideremos las siguientes fórmulas

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \tag{8.1}$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \sqrt{\pi}\frac{n!!}{2^{(n+1)/2}} \tag{8.2}$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \tag{8.3}$$

$$A_{n-1} = nV_n \tag{8.4}$$

Si $n = 1$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\pi^{n/2} =& \ \pi^{1/2} = \sqrt{\pi} \\
\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) =& \ \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \sqrt{\pi}\frac{1!!}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
\therefore V_1 =& \ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}/2} = 2
\end{aligned}
$$

Si $n = 2$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\pi^{n/2} =& \ \pi^{2/2} = \pi \\
\Gamma\left(1 + 1\right) =& \ \Gamma(1) = 1! = 1 \\
\therefore V_2 =& \ \frac{\pi}{1} = \pi
\end{aligned}
$$

Si $n = 3$ usamos la fórmula que ha sido usada para $n = 1$.

$$
\begin{aligned}
\pi^{n/2} =& \ \pi^{3/2} = \pi\sqrt{\pi} \\
\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) =& \ \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \sqrt{\pi}\frac{3!!}{2^2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \\
\therefore V_3 =& \ \frac{\pi\sqrt{\pi}}{3\sqrt{\pi}/4} = \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}
$$

Si $n = 4$ usamos la fórmula usada para $n = 2$.

$$
\begin{aligned}
\pi^{n/2} =& \ \pi^{4/2} = \pi^2 \\
\Gamma\left(4/2 + 1\right) =& \ \Gamma(2 + 1) = 2! = 2 \\
\therefore V_4 =& \ \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}
$$

Para $n = 5$

$$
\begin{aligned}
\pi^{n/2} =& \ \pi^{5/2} = \pi^2\sqrt{\pi} \\
\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) =& \ \Gamma\left(\frac{5}{2} + 1\right) = \sqrt{\pi}\frac{5!!}{2^3} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8} \\
\therefore V_5 =& \ \frac{\pi^2\sqrt{\pi}}{15\sqrt{\pi}/8} = \frac{8}{15}\pi^2
\end{aligned}
$$

Para $n = 6$

$$
\begin{aligned}
\pi^{n/2} =& \ \pi^{6/2} = \pi^3 \\
\Gamma\left(6/2 + 1\right) =& \ \Gamma(3 + 1) = 3! = 6 \\
\therefore V_6 =& \ \frac{\pi^3}{6}
\end{aligned}
$$

Para $n = 7$

$$\begin{aligned}
\pi^{n/2} &= \pi^{7/2} = \pi^3\sqrt{\pi} \\
\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) &= \Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right) = \sqrt{\pi}\frac{7!!}{2^4} = \frac{105\sqrt{\pi}}{16} \\
\therefore V_7 &= \frac{\pi^3\sqrt{\pi}}{105\sqrt{\pi}/16} = \frac{16}{105}\pi^2
\end{aligned}$$

Para $n = 8$

$$\begin{aligned}
\pi^{n/2} &= \pi^{8/2} = \pi^4 \\
\Gamma\left(8/2+1\right) &= \Gamma(4+1) = 3! = 24 \\
\therefore V_8 &= \frac{\pi^3}{6}
\end{aligned}$$

Consideremos la fórmula $A_{n-1} = nV_n$

$$\begin{aligned}
A_0 &= V_1 = 2 \\
A_1 &= 2\cdot V_2 = 2\pi \\
A_2 &= 3\cdot V_3 = 4\pi \\
A_3 &= 4\cdot V_4 = 2\pi^2 \\
A_4 &= 5\cdot V_5 = \frac{8}{3}\pi^2 \\
A_5 &= 6\cdot V_6 = \pi^3 \\
A_6 &= 7\cdot V_7 = \frac{16}{15}\pi^3
\end{aligned}$$

Resumimos los resultados en la tabla siguiente.

Dimensión	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Volumen (V)	2	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\pi^2}{2}$	$\frac{8\pi^2}{15}$	$\frac{\pi^3}{6}$	$\frac{16\pi^3}{105}$	$\frac{\pi^4}{24}$	$\frac{32\pi^4}{945}$	$\frac{\pi^5}{120}$
Superficie (S)	2	2π	4π	$2\pi^2$	$\frac{8\pi^2}{3}$	π^3	$\frac{16\pi^3}{15}$	$\frac{\pi^4}{3}$	$\frac{32\pi^4}{105}$	$\frac{\pi^5}{12}$

6. Sean w_1 y w_2 dos p-formas definidas en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$, sean c y d dos p-cadenas singulares en U, y α un número real. Entonces demostrar que:

a)
$$\int_c (w_1 + w_2) = \int_c w_1 + \int_c w_2$$

b)
$$\int_{c+d} w_1 = \int_c w_1 + \int_d w_1$$

c)
$$\int_{\alpha c} w_1 = \alpha \int_c w_1 = \int_c \alpha w_1$$

Demostración. Se trata de verificaciones de simple rutina, que se obtienen directamente de las definiciones correspondientes y de las propiedades previamente establecidas para la operación estrella en formas. Presentamos las demostraciones de las propiedades de los incisos $a)$ y $b)$ y dejamos para el lector la del inciso $c)$.

Sea $c = a_1T_1 + a_2T_2 + \cdots + a_kT_k$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\int_c (w_1 + w_2) &= \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{T_i} (w_1 + w_2) = \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{I^p} T^*(w_1 + w_2) \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{I^p} (T_i^* w_1 + T_i^* w_2) = \sum_{i=1}^{k} a_i \left(\int_{I^p} T_i^* w_1 + \int_{I^p} T^* w_2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{I^p} T_i^* w_1 + \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{I^p} T_i^* w_2 = \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{T_i} w_1 + \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{T_i} w_2 \\
&= \int_c w_1 + \int_c w_2
\end{aligned}$$

(donde usamos la propiedad de lineabilidad de las integrales p-multiples). Si $d = b_1T_1 + \cdots + b_mT_m$, se tiene $c + d = a_1T_1 + \cdots + a_kT_k + b_1T_1 + \cdots + b_mT_m$, y entonces

$$\int_{c+d} w_1 = \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{T_i} w_1 + \sum_{j=1}^{m} b_j \int_{T_j} w_1 = \int_c w_1 + \int_d w_1$$

■

8.2. Ejercicios propuestos

1. Sea α una 2-forma cerrada en $M \subset \mathbb{R}^3 - \{0\}$. ¿Qué condiciones debe satisfacer M para que α sea exacta en los siguientes casos:

i. $M \neq \mathbb{R}^3 - \{0\}$.

ii. $M = \mathbb{R}^3 - \{0\}$

2. Enuncie las ecuaciones de estructura de $\mathbb{R}^n$. (Argumente).

3. Sea

$$w = \frac{1}{2}\sum a_{ij}dx_i dx_j, \quad a_{ij} + a_{ji} = 0$$

probar que

$$dw = \frac{1}{6}\sum\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}\right)dx_i dx_j dx_k$$

4. Considerar el mapeo

$$\phi : (x, y) \to (xy, 1)$$

de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$. Calcula

a) $\phi^*(dx)$

b) $\phi^* dy$

c) $\phi^*(ydx)$

5. Sea M una variedad, w una p-forma en M y sea c una p-cadena en M.

a) ¿Cómo se define $\int_c w$?.

b) ¿Cómo se define la integral si la cadena solo es el simplejo $\sigma = (S_p, U, \phi)$?

6. Enuncie el ”Problema de Dirichket” y escriba la ”Fórmula integral de Poisson”.

7. Enuncie el primer teorema de ”De Rham”.

8. Dadas las formas siguientes

$$\begin{aligned}
\alpha &= (E_1dx_1 + E_2dx_2 + E_3dx_3)(cdt) + (B_1dx_2dx_3 + B_2dx_3dx_1 + B_3dx_1dx_2)\\
\beta &= -(H_1dx_1 + H_2dx_2 + H_3dx_3)(cdt) + (D_1dx_2dx_3 + D_2dx_3dx_1 + D_3dx_1dx_2)\\
\gamma &= (J_1dx_2dx_3 + J_2dx_3dx_1 + J_3dx_1dx_2)dt
\end{aligned}$$

donde todas las funciones son funciones de variables espaciales $x_1, x_2.x_3$ y el tiempo t.

a) Las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E = & -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \\ \operatorname{div} B = & \ 0 \end{aligned}$$

son equivalentes a

i. $*\alpha$

ii. $d\alpha = 0$

iii. $f^*\alpha = 0$

b) Calcula $d\alpha$ y $d\beta + 4\pi\gamma$.

c) Describa las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre.

9. Muestra con detalles que el espacio proyectivo real $P^n(\mathbb{R}^n)$ es una variedad diferenciable.

Capítulo 9

Apéndice

9.1. A. Mapeo de Gauss en coordenadas locales

Sea $x(u, v)$ una parametrización en un punto $p \in S$ de una superficie S, y sea $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ una curva parametrizada sobre S, con $\alpha(0) = p$.

El vector tangente para $\alpha(t)$ en p es $\alpha' = x_u u' + x_v v'$ y

$$dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'$$

Puesto que N_u y N_v pertenecen a T_pS, podemos escribir

$$N_u = a_{11}x_u + a_{21}x_v \tag{9.1}$$
$$N_v = a_{12}x_u + a_{22}x_v \tag{9.2}$$

y por lo tanto

$$dN\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Esto muestra que en la base $\{x_u, x_v\}$, dN está dada por la matriz (a_{ij}), $i, j = 1, 2$.

Por otro lado, la epxresión de la segunda forma fundamental en la base $\{x_u, x_v\}$ está dada por

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') = -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle &= -\langle N_u u' + +N_v v', x_u u' + x_v v' \rangle \\ &= e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 \end{aligned}$$

donde, puesto $\langle N, x_u\rangle = \langle N, x_v\rangle = 0$,

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, x_u\rangle = \langle N, x_{uu}\rangle, \\ f &= -\langle N_v, x_u\rangle = \langle N, x_{uv}\rangle = \langle N, x_{vu}\rangle = -\langle N_u, x_v\rangle, \\ g &= -\langle N_v, x_v\rangle = \langle N, x_{vv}\rangle \end{aligned}$$

Vamos a obtener los valores de a_{ij}, en términos de los coeficientes e, f y g de las ecuaciones 9.1 y 9.2, tenemos

$$-f = \langle N_u, x_v\rangle = a_{11}F + a_{21}G, \tag{9.3}$$
$$-f = \langle N_v, x_u\rangle = a_{12}E + a_{22}F, \tag{9.4}$$
$$-e = \langle N_u, x_u\rangle = a_{11}E + a_{21}F, \tag{9.5}$$
$$-g = \langle N_v, x_v\rangle = a_{12}F + a_{22}G, \tag{9.6}$$

donde $E = \langle x_u, x_u\rangle$, $F = \langle x_u, x_v\rangle$ y $G = \langle x_v, x_v\rangle$.

Las relaciones 9.3, 9.4, 9.5 y 9.6 pueden ser expresadas en forma matricial

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \tag{9.7}$$

por lo tanto

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

Se puede verificar que

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

de este modo las siguientes expresiones dan los coeficientes (a_{ij}) de la matriz de dN en la base $\{x_u, x_v\}$:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - f^2}, \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{aligned}$$

Debemos mencionar que las relaciones 9.1 y 9.2 con los valores a_{ij}, son conocidos como *ecuaciones de Weingarten.*

De la ecuación 9.7 obtenemos:

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \tag{9.8}$$

Índice alfabético

k-forma , 41
k-forma diferencial, 41

Variedad
  topológica, 73

Atlas, 56, 74
  maximal, 74
  topológico, 74

Baricéntro, 112
Base dual, 20
Base dual estándar, 39

Cadenas singulares, 116
Cambio de coordenadas, 74
Campo vectorial, 34
  operaciones, 36
Carta, 56, 74
Cartas suavemente equivalentes, 74
Complejo simplicial, 114
Conjunto contráctil, 53
Conjunto convexo, 109
Conservación de la masa, 17
Curvas cerradas homotópicas, 53

Derivada exterior, 45
  propiedades, 45
Derivada parcial, 18
Difeomorfismo, 59
  en variedades, 78
  entre superficies regulares, 59
Diferenciabilidad, 15
Diferenciales elementales, 39
Distancia entre dos puntos, 14
Divergencia, 38, 94

Ecuaciones de Maxwell, 131
Ecuaciones de Weingarten, 159
Encaje, 79
Espacio, 20
  afín, 109
  dual, 20
  euclídeo, 13
  generado, 111
  tangente, 33

Fórmula de Green, 120, 136
Forma, 21
  k-lineal, 22
  bilineal, 22, 40
  cerrada, 52
  exacta, 52
  lineal, 21, 39
Función, 22
  n-lineal, 22
  infinitamente diferenciable, 15
  multilineal, 22
  multilineal antisimétrica, alternada, 23
  multilineal simétrica, 23
Función diferenciable, 74
Funcional lineal, 19
funciones de transición, 74

Gradiente, 38, 95

Haz cotangente, 39

Haz tangente, 34, 78

I-ésima función coordenada, 20
Infinitamente diferenciable, 18
Inmersión, 79
Invariante de Hopf, 141

Líneas de rumbo de la esfera, 68
Laplaciano, 51
Loxodromas, 68

Módulo de homología, 118
Módulo libre , 116

Norma, 14

Operador estrella de Hodge, 93

Parametrización, 56
Partición de la unidad, 85
    existencia, 87
Plano proyectivo, 75
Primera forma fundamental, 65
    aplicaciones, 69
Producto exterior, 26
    cuña, 26
    de k-formas, 44
    propiedades, 26
Producto interior, 13
Producto tensorial, 25
    propiedades, 26
Pull-back, 47, 100
    propiedades, 47
Punto crítico, 80
Punto crítico degenerado, 83
Punto regular, 62
Puntos afínmente independientes, 110

Rotacional, 38, 96

Simplejo, 112
    r-dimensional, 112
    cara, 116
    estandar, 114
    singular, 115
Simplejos
    frontera, 116
Soporte, 85
Superficie, 55
    diferenciable, 60
    topológica, 55

Teorema, 16
    de De Rham, 138
    Sard, 80
    Stokes, 16, 122
Transformación afín, 112

Valor regular, 62
Variedad, 73
    diferenciable, 74, 75
    suave, 74
Vector de coordenadas baricéntricas, 111

Winding Number, 139

Bibliografía

(i) Manfredo P. do Carmo. (1971). *Differential forms.* New York: Springer.

(ii) Munkres, James R. (1990). *Analysis on manifolds.* Canada: Addison-Wesley Publishing Company.

(iii) Michael Spivak. (1988). *Cálculo en variedades.* Barcelona: Editorial Reverté.

(iv) J. Milnor. (1973). *Morse theory.* United States of America: Princeton University Press.

(v) Braun, Martin. (1983). *Differential equations and their applications.* City University of New York: Springer-Verlag New York, Ink.

(vi) Stephen H. Friedberg. (1982). *Álgebra lineal.* México: Publicaciones cultural, S. A.

(vii) Harley Flanders. (1989). *Differential forms with applications to the physical sciences* . Canada: General Publishing Company, Ltd.

(viii) Manfredo P. do Carmo. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* New Jersey: Prentice-Hall

(ix) Chern, S.S. (1944). *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds.* Annals of Math.

(x) James Stewart. (2012). *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas.* México, DF: CENGAGE Learning.

(xi) George B. Thomas, Jr. (2010). *Cálculo de varias variables.* México, DF : PEARSON.

(xii) Claudio Pita Ruiz.(1995). *Cálculo vectorial.* México: PRENTICE HALL.

(xiii) Thierry Aubin. (2000). *A course in differential geometry.* Usa: AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY.

(xiv) Peter Giblin. (1977). *Graphs, surfaces and homology.* Cambridge: Cambridge University Press.

(xv) Oscar A. Palmass Velasco, J. Guadalupe Reyes Victoria. (2005). *Curso de geometría diferecial. Parte 1. Curvas y superficies.* México: LAS PRENSAS DE LA CIENCIA.