



Universidad Autónoma de Guerrero

Unidad Académica de Matemáticas

“Constante de Hiperbolicidad de Graficas Geométricas”

TESIS

Que para obtener el título de:
Maestro en Ciencias Matemáticas

PRESENTA:

Rosalío Reyes Guillermo

DIRECTOR DE TESIS:

José María Sigarreta Almira



Octubre 2017.

Agradecimientos

Indudablemente la primera persona a la que quiero expresar mi más sincero y profundo agradecimiento, es a mi asesor, el Dr. José María Sigarreta Almira. En él encontré un gran asesor, un excelente profesor y un gran amigo. Agradezco el gran interés que siempre tuvo por ayudarme; el tiempo que dedicó para mi formación; sus enseñanzas, tanto académicas como personales; el apoyo incondicional que siempre me brindo para ayudarme a concluir esta etapa de mi vida académica.

Agradezco al Dr. Juan Carlos Hernández Gómez por todo el apoyo y las facilidades brindadas durante mis estudios de la Maestría, e incluso desde antes de comenzarlos. Agradezco también su tiempo y paciencia en todos los ámbitos .

Agradezco a mis profesores, que aún no he mencionado pero que sin duda alguna estoy agradecido: Dr. Efrén Morales Amaya, Dr. Jesús Romero Valencia, Dr. Jorge Castillo Medina, Dr. Gerardo Reyna Hernández, Dr. Martín P. Arciga Alejandre y Dr. Omar Rosario Cayetano, por su dedicación y el tiempo que se tomaron, tanto dentro y fuera del aula, para ayudar a mi formación.

A mis padres: Florentino R. y Esperanza G (especialmente ella) y a mis hermanos: Armando y Maricela, por su apoyo incondicional a lo largo de toda mi vida y mis proyectos. En este mismo espacio agradezco también a Ángeles por su apoyo y paciencia.

A mis amigos y compañeros de la Maestría: Florentino, Juan A., Cristóbal, Ángel, A. Fleitas, Carlos L., Diana Milagros., Daniel S., Ramphery, Abel, Diana Maritza, Alejandro, Lulú, Frank, J.L. Sánchez, Airon. Les agradezco todo el tiempo convivido, las grandes experiencias y los diversos apoyos de su parte. Créanme que para mí es un honor el haberlos conocido y tratado.

Aunque ya los mencione, quiero agradecer nuevamente la invitación a la maestría de parte de Ramphery, Abel y el Dr. Efrén Morales.

A todo aquel que me haya ayudado en esta etapa y no lo mencione, créame, realmente le estoy agradecido.

Índice general

Introducción	1
1. Introducción a los Espacios Hiperbólicos	3
1.1. Conceptos fundamentales sobre Espacios Hiperbólicos	3
2. Avances en la teoría de Gráficas Hiperbólicas	11
2.0.1. Discretización del parámetro de hiperbolicidad	13
2.0.2. Resultados previos	16
2.1. La relación entre la constante de hiperbolicidad y otros parámetros de la gráfica.	17
2.2. El estudio de la hiperbolicidad para importantes clases de gráficas	20
2.2.1. Hiperbolicidad y complemento de gráficas	21
2.2.2. Hiperbolicidad y Gráficas Producto	22
2.2.3. Constante de hiperbolicidad de gráficas línea	28
2.3. El estudio de la invarianza de la hiperbolicidad de gráficas bajo transformaciones apropiadas	29
3. Hiperbolicidad en Gráficas Intervalo	32
3.1. Gráficas Intervalo e Hiperbolicidad	33
3.2. Gráficas Intervalo con aristas de longitud 1	38
Conclusiones	46

Introducción

A lo largo de esta tesis trabajaremos con gráficas hiperbólicas. La teoría de gráficas es una línea de investigación de las Matemáticas Discretas. A pesar de ser un área relativamente reciente, está creciendo muy rápidamente con muchos resultados descubiertos en las últimas 3 décadas.

Dicha teoría permite tratar en forma más simple, cualquier problema donde exista una relación binaria entre ciertos objetos, por lo que sus usos son bastantes amplios. Muestra de ello es que podemos encontrar aplicaciones a áreas dentro de las mismas Matemáticas, Ingeniería, Biología, Sociología, Administración, etc.

En particular, en este trabajo nos enfocaremos en las Gráficas Geométricas. Generalmente al hablar de hiperbolicidad, lo más común es pensar en las variedades Riemannianas con curvatura negativa. Sin embargo, a partir de los trabajos de Gromov en los años 70 y posteriormente de los de Kanai en los años 80 se sabe que las gráficas pueden modelizar bien las variedades (lo cual es un resultado impresionante, puesto que permite pasar de trabajar con una estructura que podría llegar a ser complicada a tratar con una estructura discreta). Con base en esto surge la hiperbolicidad en el sentido de Gromov (que es la que usaremos en este trabajo).

Los espacios hiperbólicos en el sentido de Gromov, juegan un importante papel en la teoría geométrica de grupos y en la geometría de espacios con curvatura negativa. El concepto de hiperbolicidad de Gromov capta la esencia de dichos espacios, tales como: el espacio hiperbólico clásico, espacios finitamente generados, variedades Riemannianas con curvatura negativa y espacios discretos. Es notable que un concepto discreto simple conduzca a una teoría general tan rica.

Como ya se mencionó anteriormente hablaremos de hiperbolicidad en gráficas, considerando a estas como espacios métricos geodésicos. La enorme ventaja de esto es que no tenemos que hablar de dimensión, estructura diferenciable, métrica Riemanniana, etc. Basta sólo con considerar las distancias naturales.

Los primeros trabajos sobre espacios hiperbólicos de Gromov se ocupan de estudiar los grupos finitamente generados (véase [51]). Inicialmente, los espacios de Gromov se aplicaron al estudio de grupos automáticos en la ciencia de la computación (véase, por ejemplo, [73]). Dicho concepto aparece también en algoritmos y redes. Por ejemplo, se ha demostrado empíricamente en [87] que la gráfica que modela el enrutamiento de Internet se inserta con mayor exactitud en un espacio hiperbólico que en un espacio euclidiano de dimensión comparable (las pruebas formales de que la distorsión está relacionada con la hiperbolicidad se pueden encontrar en [89]); además, se evidencia que muchas redes reales son hiperbólicas (ver, por ejemplo, [1, 2, 35, 63, 70]). Algunos

problemas algorítmicos en espacios hiperbólicos y gráficas hiperbólicas han sido considerados en trabajos recientes (ver [62] y sus referencias). Además, los espacios hiperbólicos son útiles en la transmisión segura de información en la red (ver [58]). La hiperbolicidad también se ha utilizado ampliamente en el contexto de gráficas aleatorias (ver, por ejemplo, [84, 85, 86]).

Capítulo 1

Introducción a los Espacios

Hiperbólicos

El tema fundamental de esta tesis es el estudio de la constante de hiperbolicidad de las Gráficas Geométricas, en particular las Gráficas Intervalo.

El termino hiperbolicidad hace referencia a conceptos diferentes, según el marco en el que estemos trabajando. Por ejemplo, se puede relacionar con la existencia de curvas transversales sobre las que actúa un sistema dinámico ya sea contrayendo o expandiendo, o de la función de Green o la curvatura negativa. En este trabajo siempre que hablemos de hiperbolicidad lo haremos en el sentido de Gromov, cuyo concepto será definido más adelante.

A finales de los años 80's se impulsa el estudio de los grupos finitamente generados, trayendo consigo la noción de los grupos hiperbólicos (ver [51]), estos captan la idea de grupos finitamente generados con "curvatura negativa", y posteriormente en [52] se describe el programa de Gromov, el cual trata sobre las propiedades cuasi-isométricas de los grupos. El trabajo de Gromov tuvo un amplio efecto en el estudio de los grupos discretos y apareció el concepto de "teoría geométrica de grupos" la cual permite el estudio de grupos finitamente generados y explora la conexión entre propiedades geométricas y algebraicas de los espacios sobre los cuales estos grupos actúan. Para poder estudiar estos grupos se les asocia una gráfica de Cayley, y en dicha gráfica se considera un espacio métrico.

1.1. Conceptos fundamentales sobre Espacios Hiperbólicos

Existen varias posibles definiciones para el concepto de hiperbolicidad. Mencionaremos algunas, que a primera vista parecen no tener ninguna relación, pero en realidad son equivalentes. A continuación daremos las definiciones necesarias:

Definición 1.1.1. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ una curva continua en un espacio métrico (X, d) , definimos su longitud $L(\gamma)$ de la siguiente manera

$$L(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^n d(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \right\}.$$

Si X es un espacio conexo por arcos en el cual está definida la longitud de curva y D es un subconjunto cerrado de X entonces la métrica interna en D , d_D , se obtiene al restringir las curvas de X al conjunto D , es decir, para cada $z, w \in D$:

$$d_D(z, w) := \inf \{ L_X(\gamma) : \gamma \subset D \text{ es una curva continua que une } z \text{ y } w \} \geq d_X(z, w).$$

Como consecuencia tenemos $L_X(\gamma) = L_D(\gamma)$.

Una curva γ uniendo los puntos x e y en un espacio métrico (X, d) se dice que es una geodésica si $L(\gamma) = d(x, y)$.

Decimos que una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ en un espacio métrico X es una *geodésica* si tenemos $L(\gamma|_{[t,s]}) = d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|$ para cada $s, t \in [a, b]$, donde L y d denotan la longitud y distancia, respectivamente, y $\gamma|_{[t,s]}$ es la restricción de la curva γ al intervalo $[t, s]$ (entonces γ está equipada con una parametrización de longitud de arco).

Definición 1.1.2. Un espacio métrico (X, d) será llamado *geodésico* si para cada pareja de puntos en X existe una geodésica uniéndolos; denotamos por $[xy]$ cualquier geodésica uniendo x e y ; esta notación es ambigua, ya que en general no tenemos unicidad de las geodésicas, pero es muy conveniente. Consecuentemente, cualquier espacio métrico geodésico es conexo. Si el espacio métrico X es una gráfica, entonces la arista uniendo los vértices u y v será denotada por uv .

A continuación daremos algunas definiciones básicas.

Definición 1.1.3. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos, y sea $f : X \rightarrow Y$. Decimos que f es una isometría si $d_X(u, v) = d_Y(f(u), f(v))$ para cualesquiera $u, v \in X$.

La siguiente es una de las definiciones básicas más importantes, pues a lo largo de todo nuestro trabajo, al referirnos a hiperbolicidad, lo haremos tomándola en cuenta.

Definición 1.1.4. Hiperbolicidad δ -thin. Si X es un espacio métrico geodésico y $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ es un polígono con lados $J_i \subseteq X$, decimos que J es δ -thin si para cada $x \in J_i$ tenemos que $d(x, \cup_{j \neq i} J_j) \leq \delta$. Denotamos por $\delta(J)$ la constante thin óptima de J , es decir $\delta(J) := \inf \{ \delta \geq 0 : J \text{ es } \delta\text{-thin} \}$. Si $x_1, x_2, x_3 \in X$, la unión de tres geodésicas $[x_1x_2]$, $[x_2x_3]$ y $[x_3x_1]$ es un triángulo geodésico que será denotado por $T = \{x_1, x_2, x_3\}$ y diremos que x_1, x_2 y x_3 son los vértices de T ; esto es usualmente escrito también como $T = \{[x_1x_2], [x_2x_3], [x_3x_1]\}$. Decimos que T es δ -thin si cualquier lado de T está contenido en la

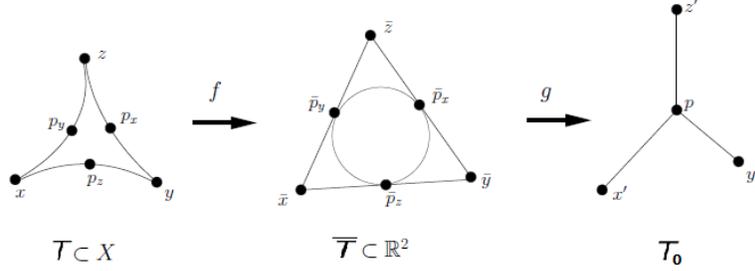


Figura 1.1: Dado un triángulo T en X se manda, mediante isometrías, a un trípode T_0 .

δ -vecindad de la unión de los otros dos lados. Denotamos por $\delta(T)$ la constante *thin* óptima de T , es decir, $\delta(T) := \inf\{\delta \geq 0 \mid T \text{ es } \delta\text{-thin}\}$. El espacio X es δ -hiperbólico (o satisface la condición de Rips con constante δ) si cada triángulo geodésico en X es δ -thin. Denotaremos por $\delta(X)$ la constante óptima de hiperbolicidad de X , es decir, $\delta(X) := \sup\{\delta(T) \mid T \text{ es un triángulo geodésico en } X\}$. Diremos que X es hiperbólico si X es δ -hiperbólico para algún $\delta \geq 0$; entonces X es hiperbólico si y sólo si $\delta(X) < \infty$.

Si tenemos un triángulo con dos vértices idénticos, lo llamaremos “bigon”. Obviamente, cada bigon en un espacio δ -hiperbólico es δ -thin. Si X tiene componentes conexas $\{X_i\}_{i \in I}$, entonces definimos $\delta(X) := \sup_{i \in I} \delta(X_i)$, y decimos que X es hiperbólico si $\delta(X) < \infty$.

Notese que cada cuadrilátero en un espacio δ -thin es 2δ -thin. Para ver esto es suficiente dividir al cuadrilátero en 2 triángulos y aplicar a estos la definición. En la misma dirección se puede probar, en general, que todo polígono geodésico de n -lados es $(n-2)\delta$ -thin.

Como hemos dicho, en las referencias clásicas sobre este tema (ver, por ejemplo, [16, 46]) aparecen varias definiciones diferentes de la hiperbolicidad de Gromov, que son equivalentes en el sentido de que si X es δ -hiperbólico con respecto a una definición, entonces es δ' -hiperbólico con respecto a otra definición (para algún δ' relacionado con δ). Hemos elegido esta definición por su profundo significado geométrico [46].

Definición 1.1.5. Hiperbolicidad δ -fine. Dado un triángulo geodésico $T = \{x, y, z\}$ podemos construir un triángulo $\bar{T} = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ en el plano euclideo cuyos lados tengan la misma longitud que los del triángulo original. El círculo máximo inscrito en el triángulo euclideo interseca los lados $[\bar{x}\bar{y}]$, $[\bar{y}\bar{z}]$ y $[\bar{x}\bar{z}]$ en \bar{p}_z , \bar{p}_x y \bar{p}_y respectivamente tal que $d(\bar{x}, \bar{p}_y) = d(\bar{x}, \bar{p}_z)$, $d(\bar{y}, \bar{p}_x) = d(\bar{y}, \bar{p}_z)$, $d(\bar{z}, \bar{p}_x) = d(\bar{z}, \bar{p}_y)$. Mediante una isometría podemos mandar \bar{T} al Trípode T_0 (un árbol con un vértice p de grado 3 y tres vértices x', y', z' de grado uno), tal que $d(x', p) = d(\bar{x}, \bar{p}_y) = d(\bar{x}, \bar{p}_z)$, $d(y', p) = d(\bar{y}, \bar{p}_x) = d(\bar{y}, \bar{p}_z)$ y $d(z', p) = d(\bar{z}, \bar{p}_x) = d(\bar{z}, \bar{p}_y)$.

Consideramos ahora la isometría $h = g \circ f$ del triángulo T al trípode T_0 y decimos que el triángulo $T = \{x, y, z\}$ es δ -fine si para cualesquiera par de puntos q y r en diferentes lados de T tenemos que si $h(q) = h(r)$ implica que $d(q, r) \leq \delta$. El espacio X es δ -fine si todo triángulo geodésico en X es δ -fine.

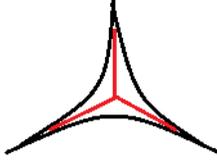


Figura 1.2: Mientras menor sea el δ , más “parecidos” serán los triángulos en el espacio a las gráficas árboles conocidas como tripodes.

Definición 1.1.6. Hiperbolicidad con el producto de Gromov. Dado un espacio métrico (X, d) y un punto $w \in X$ se define el producto de Gromov entre $x, y \in X$ respecto del punto base w como

$$(x | y)_w := \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y)) \geq 0.$$

Diremos que el espacio métrico (X, d) es δ -hiperbólico ($\delta \geq 0$), si

$$(x | z)_w \geq \min\{(x | y)_w, (y | z)_w\} - \delta$$

para todo $x, y, z, w \in X$. Diremos que X es hiperbólico con el producto de Gromov si es δ -hiperbólico para algún δ .

El siguiente resultado (ver [3, Proposición 2.2] y [51, Lema 1.1A]) muestra que la definición de hiperbolicidad es independiente del punto base.

Proposición 1.1.7. Sea X un espacio métrico y sean $w, w' \in X$. Si X es δ -hiperbólico con el producto de Gromov con base en w , entonces, con el producto de Gromov con base en w' , X es 2δ -hiperbólico.

Puede probarse que para todo $x, y, w, w' \in X$ se tiene que:

$$|(x | y)_w - (x | y)_{w'}| \leq d(w, w').$$

El producto de Gromov entre dos puntos v_2, v_3 , respecto a un punto v_1 , guarda relación con el ángulo α que forman las geodésicas que los unen con el punto base:

$$(v_2 | v_3)_{v_1} \approx \log \frac{1}{\sin(\alpha/2)}.$$

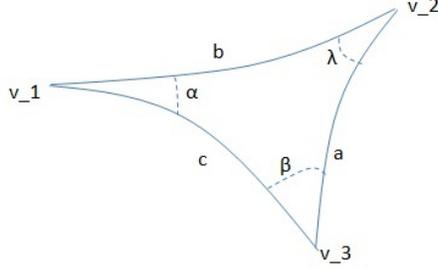


Figura 1.3: El producto de Gromov entre los ángulos y el punto base.

El siguiente resultado establece la equivalencia entre la condición de Rips (Definición 1.1.4), la propiedad fine (Definición 1.1.5) y la hiperbolicidad de Gromov (Definición 1.1.6):

Teorema 1.1.8 ([46] y [3]). *Sea X un espacio métrico geodésico:*

1. *Si X es δ -hiperbólico de Gromov, entonces es 3δ -hiperbólico y 4δ -fine.*
2. *Si X es δ -hiperbólico, entonces es 4δ -hiperbólico de Gromov y 4δ -fine.*
3. *Si X es δ -fine, entonces es 2δ -hiperbólico de Gromov y δ -hiperbólico.*

Definición 1.1.9. Hiperbolicidad Insize. *Sea X un espacio métrico geodésico y sea $T = \{x, y, z\}$ un triángulo geodésico en X y sean p_x, p_y, p_z como en la definición 1.1.5. Definimos el Insize del triángulo geodésico T como:*

$$\text{insize}(T) := \text{diam}\{p_x, p_y, p_z\} = \max\{d(p_x, p_y), d(p_x, p_z), d(p_y, p_z)\}. \quad (1.1.1)$$

El espacio X es δ -insize si cada triángulo geodésico en X tiene un insize a lo más δ .

Teorema 1.1.10. [46, Proposición 2.21, p.41] *Sea X un espacio métrico geodésico.*

- (1) *Si X es δ -hiperbólico, entonces es 4δ -insize.*
- (2) *Si X es δ -insize, entonces es 2δ -hiperbólico.*

Definición 1.1.11. Hiperbolicidad Minsize. *Sea X un espacio métrico geodésico y sea $T = \{x, y, z\}$ un triángulo geodésico en X y sean $x' \in [yz]$, $y' \in [zx]$, $z' \in [xy]$. Definimos el minsizedel triángulo geodésico T como:*

$$\text{minsize}(T) := \min_{x', y', z' \in T} \text{diam}\{x', y', z'\}. \quad (1.1.2)$$

El espacio X es δ -minsize si cada triángulo geodésico en T tiene minsizedel a lo más δ .

Se sabe que esta definición de minsize es también equivalente a nuestra definición de la hiperbolicidad en el sentido de Gromov, de una manera cuantitativa.

Teorema 1.1.12. *Sea X un espacio métrico geodésico.*

- (1) *Si X es δ -hiperbólico, entonces es 4δ -minsize.*
- (2) *Si X es δ -minsize, entonces es 8δ -hiperbólico.*

Los siguientes son ejemplos interesantes de espacios hiperbólicos.

Ejemplo 1.1.13. *Todo espacio métrico acotado X es $\frac{1}{2}DiamX$ -hiperbólico.*

Ejemplo 1.1.14. *La recta Real \mathbb{R} es 0-hiperbólica. Esto debido a que al considerar un punto cualquiera en un triángulo geodésico, este pertenece simultáneamente a dos lados del triángulo y por lo tanto cualquier triángulo geodésico en \mathbb{R} es 0-hiperbólico.*

Ejemplo 1.1.15. *El plano Euclidiano \mathbb{R}^2 no es hiperbólico, ya que para cualquier δ es posible construir una infinidad de triángulos cuyo diámetro haga ineficaz a dicho δ . Esta misma idea puede ampliarse para \mathbb{R}^n .*

Ejemplo 1.1.16. *Un espacio vectorial real normado es hiperbólico si y sólo si su dimensión es 1.*

Ejemplo 1.1.17. *Todo árbol métrico con aristas de longitud arbitraria es 0-hiperbólico, esto por la misma razón que la recta real.*

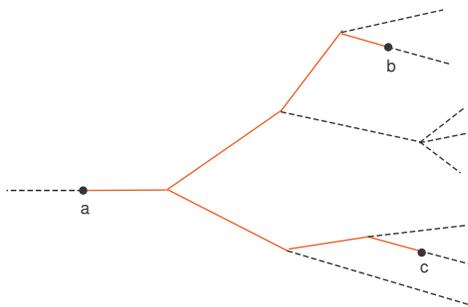


Figura 1.4: Cualquier árbol métrico T verifica $\delta(T) = 0$.

Ejemplo 1.1.18. *El plano hiperbólico \mathbb{H}^2 es $\log(\sqrt{2} + 1)$ -hiperbólico.*

Ejemplo 1.1.19. *Toda variedad riemanniana completa simplemente conexa cuya curvatura seccional verifica $K \leq -c^2 \leq 0$, para alguna constante c , es hiperbólica (ver, por ejemplo, [46, p.52]).*

Ejemplo 1.1.20. La gráfica Γ correspondiente a la infraestructura de enrutamiento de Internet también se muestra empíricamente que es hiperbólica (ver [6]). Uno puede pensar que esto es trivial (y por tanto no muy útil) ya que de hecho, todo espacio métrico acotado X es $(\frac{1}{2} \text{diam } X)$ -hiperbólico. El punto es que el cociente

$$\frac{\delta(\Gamma)}{\text{diam } \Gamma}$$

es muy pequeño, y esto hace que las herramientas de los espacios hiperbólicos sean aplicables a Γ (ver, por ejemplo, [30]).

Otros resultados importantes se pueden ver en las referencias clásicas [3, 16, 46]. Queremos remarcar que los principales ejemplos de gráficas hiperbólicas son los árboles. De hecho, la constante de hiperbolicidad de un espacio métrico geodésico se puede ver como una medida de qué tan “similar a un árbol” es el espacio, puesto que esos espacios X con $\delta(X) = 0$ son precisamente los árboles métricos. Este es un tema interesante ya que, en muchas aplicaciones, se encuentra que la frontera entre casos manejables e intratables puede ser el grado de “similitud a árbol” de la estructura a tratar (ver, por ejemplo, [31]).

Debemos mencionar que la tarea de decir cuándo un espacio es hiperbólico es difícil, en general. Primero, notemos que tenemos que considerar un triángulo geodésico arbitrario T y calcular la distancia mínima entre un punto arbitrario P de T a la unión de los otros dos lados que no contienen el punto P . Después, tomar el supremo sobre todas las posibles elecciones de P y después sobre todas las posibles elecciones de T . Esto quiere decir que si el espacio es, por ejemplo, una variedad n -dimensional y seleccionamos dos puntos P y Q en lados diferentes de un triángulo T , la función que mide la distancia entre P y Q es una función F que tiene $(3n + 2)$ -variables ($3n$ variables describen los tres vértices de T y dos variables describen los puntos P y Q en la curva dada por T). Para poder demostrar que nuestro espacio es hiperbólico tendríamos que tomar el mínimo de F en la variable que describe Q y el supremo sobre las restantes $3n + 1$ variables o, al menos, probar que es finita. Sin tener en cuenta la dificultad de resolver un problema minimax, notemos que el principal obstáculo es que no conocemos, ni siquiera de forma aproximada, donde están localizadas las geodésicas en el espacio.

A continuación mencionaremos unas aplicaciones de gran importancia en la teoría de espacios hiperbólicos, su importancia radica en el hecho de que dichas aplicaciones preservan la hiperbolicidad.

Definición 1.1.21. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos. Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es una (α, β) -quasi-isometría (con $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 0$) si para todo $x, y \in X$:

$$\alpha^{-1}d_X(x, y) - \beta \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq \alpha d_X(x, y) + \beta.$$

Se dice que f es una quasi-isometría si es una (α, β) -quasi-isometría para algunas constantes α y β .

Ejemplo 1.1.22. Para los valores de $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ la quasi-isometría f es una isometría.

Ejemplo 1.1.23. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = [x]$ es una $(1, 1)$ -quasi-isometría, aunque f no es continua en los números naturales.

Observación 1.1.24. Estas funciones, aparte de ser muy flexibles (ya que como se vio en el ejemplo 1.1.23 ni siquiera se les pide continuidad), son una herramienta fundamental para determinar la hiperbolicidad de un espacio.

Definición 1.1.25. Sean X un espacio métrico, Y subconjunto no vacío de X y ε un número real positivo. Se llama ε -entorno o ε -vecindad de Y en X y se denota $\mathcal{V}_\varepsilon(Y)$, al conjunto $\{x \in X : d_X(x, Y) \leq \varepsilon\}$. Se dice que Y es ε -full, si $\mathcal{V}_\varepsilon(Y) = X$.

Definición 1.1.26. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos y sea $f : X \rightarrow Y$ una quasi-isometría. Diremos que f es ε -full, para un real $\varepsilon \geq 0$, si $f(X)$ es ε -full en Y .

Definición 1.1.27. Dos espacios métricos X e Y son quasi-isométricos si existe una quasi-isometría $f : X \rightarrow Y$ y un real $\varepsilon \geq 0$ tales que f es ε -full.

A continuación se muestra un importante resultado que relaciona las quasi-isometrías con la preservación de la hiperbolicidad.

Teorema 1.1.28 (Invarianza de la hiperbolicidad por quasi-isometrías). Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos geodésicos y sea $f : X \rightarrow Y$ una (α, β) -quasi-isometría.

- i) Si Y es hiperbólico, entonces X es hiperbólico. Además, si Y es δ -hiperbólico, entonces, X es δ' -hiperbólico, donde δ' es una constante que depende de α, β, δ .
- ii) Si f es ε -full para algún $\varepsilon \geq 0$, entonces X es hiperbólico si y sólo si Y es hiperbólico. Además, si X es δ -hiperbólico, entonces Y es δ' -hiperbólico, donde δ' es una constante, la cual depende de $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$.

Puesto que nuestro objeto de estudio serán las Gráficas, dada cualquier Gráfica $G = (V, E)$ deberemos considerar a esta como un espacio métrico geodésico. Para esto consideramos que dada una arista $uv \in E(G)$ con una longitud $L(uv)$ puede ser identificada mediante una isometría con un intervalo real que tenga la misma longitud que dicha arista, por lo que cualquier punto en el interior de dicha arista es un punto de la gráfica G . Toda gráfica G tiene una métrica natural, la cual está dada al tomar los caminos más cortos que unen a cualquier par de puntos de la gráfica.

A lo largo de esta tesis trabajaremos con gráficas (finitas o infinitas) conexas y localmente finitas, es decir, que en cada bola hay una cantidad finita de aristas.

Capítulo 2

Avances en la teoría de Gráficas

Hiperbólicas

El concepto de hiperbolicidad aparece también en matemáticas discretas, algoritmos y redes. Como se mencionó en el ejemplo 1.1.20, se ha demostrado empíricamente que la topología de Internet se inserta con mayor precisión en un espacio hiperbólico que en un espacio euclidiano de dimensión comparable (las pruebas formales de que la distorsión está relacionada con la hiperbolicidad se pueden encontrar en [89]).

Además, se pone de manifiesto que muchas redes reales son hiperbólicas (véase, por ejemplo, [1, 2, 35, 63, 70]). Algunos problemas algorítmicos en espacios hiperbólicos y gráficas hiperbólicas han sido considerados en trabajos recientes (véase [33, 40, 45, 62]). Otra aplicación importante de estos espacios es el estudio de la propagación de virus a través de Internet (véase [58, 59]). Además, los espacios hiperbólicos son útiles en la transmisión segura de información en la red (véase [57, 58, 59, 71]). La hiperbolicidad también se ha utilizado ampliamente en el contexto de gráficas aleatorias, es decir, aquellas gráficas generadas en algún tipo de proceso aleatorio (véase, por ejemplo, [84, 85, 86]).

El estudio de las gráficas hiperbólicas de Gromov es un tema de creciente interés en la teoría de gráficas; ver, por ejemplo, [4, 9, 11, 17, 23, 30, 32, 37, 41, 53, 57, 58, 59, 63, 66, 68, 70, 71, 76, 81, 88, 92, 93] y sus referencias.

Como ya se mencionó al final del primer capítulo, para considerar una gráfica G como un espacio métrico geodésico, identificamos (por una isometría) una arista $uv \in E(G)$ con el intervalo $[0, L]$ (donde L es la longitud de la arista) en la recta real; entonces la arista uv (considerada como una gráfica de una sola arista) es isométrica al intervalo $[0, L]$. Así, los puntos en G son los vértices y, además, los puntos en el interior de cualquier arista de G . De esta manera, cualquier gráfica conexa G tiene una distancia natural definida sobre sus puntos, inducida al tomar el camino más corto en G , y podemos ver a G como una gráfica métrica.

Observe que si consideramos una gráfica G cuyas aristas tienen longitud igual a uno y una gráfica G_k obtenida de G extendiendo o contrayendo sus aristas hasta la longitud k , entonces $\delta(G_k) = k\delta(G)$. Por

lo tanto, todos los resultados en este trabajo se pueden generalizar cuando las aristas de la gráfica tienen longitud igual a k .

En este documento, $G = (V, E) = (V(G), E(G))$ denotará una gráfica conexa tal que cada arista tiene longitud 1 y $V \neq \emptyset$. Estas propiedades garantizan que cualquier gráfica conexa es un espacio métrico geodésico. Trabajaremos con gráficas simples y no simples. La diferencia entre ellas es que el primer tipo no contiene lazos o aristas múltiples. Aunque la operación contracción se define naturalmente para gráficas no simples, las gráficas simples son un contexto más habitual en el estudio de la hiperbolicidad.

Para una gráfica finita con n vértices es posible calcular $\delta(G)$ en un tiempo $O(n^{3,69})$ [43] (esto ha sido mejorado en [35, 37]). Dada una gráfica de Cayley hay un algoritmo que permite decidir si es hiperbólico [75].

Sin embargo, decidir si una gráfica infinita en general, es o no hiperbólica suele ser muy difícil. Por lo tanto, es interesante estudiar la invariancia de la hiperbolicidad de las gráficas bajo transformaciones apropiadas y la hiperbolicidad de clases particulares de gráficas. La invariancia de la hiperbolicidad bajo algunas transformaciones naturales en las gráficas se ha estudiado en trabajos anteriores, por ejemplo, la eliminación de aristas de una gráfica se estudia en [11, 23].

Además, se ha caracterizado la hiperbolicidad de algunos productos de gráficas (ver, por ejemplo, [25] para gráficas unión y producto corona). Algunos otros autores han obtenido resultados sobre la hiperbolicidad para clases particulares de gráficas: gráficas cordal, gráficas simétricas, gráficas bipartitas y de intersección, gráficas puente y expansoras [17, 93, 66, 18, 38, 61, 65].

Eliminar y contraer aristas en una gráfica también son transformaciones muy naturales. En [23] los autores estudian la distorsión de la constante de hiperbolicidad de la gráfica $G \setminus e$, obtenida de una gráfica G por la eliminación de una arista e . Estos resultados permiten obtener la caracterización, de forma cuantitativa, de la hiperbolicidad de muchas gráficas en términos de hiperbolicidad local.

Una gráfica H es una *menor* de una gráfica G si una gráfica isométrica a H puede ser obtenida de G por contracción de algunas aristas, borrando algunas aristas y eliminando algunos vértices aislados. Las gráficas menores son una interesante clase de gráficas. Este tema comenzó con un resultado bien conocido en las gráficas planas (gráficas que se pueden incrustar en el plano, es decir, gráficas que se pueden dibujar en el plano sin que sus aristas se intersecten más que en sus extremos), probado independientemente por Kuratowski y Wagner, dicho resultado establece que una gráfica es plana si y sólo si no incluye como un menor ni la gráfica completa K_5 ni la gráfica completa bipartita $K_{3,3}$ (ver [64, 91]).

Existen trabajos previos que relacionan las gráficas menores con la *tree-length* y la *tree-width*, que son parámetros estrechamente relacionados con la hiperbolicidad (ver [13, 50, 77, 78]).

Existen tres principales tipos de problemas en el estudio de las gráficas hiperbólicas de Gromov, los cuales son los siguientes:

- I Obtener desigualdades relacionando la constante de hiperbolicidad y otros parámetros de las gráficas.
- II Estudiar la hiperbolicidad para clases importantes de gráficas.
- III Estudiar la invarianza de la hiperbolicidad de las gráficas bajo transformaciones apropiadas.

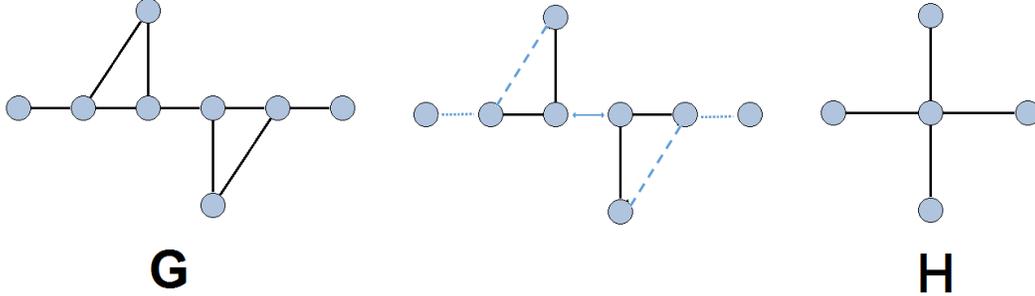


Figura 2.1: H es una gráfica menor de G.

2.0.1. Discretización del parámetro de hiperbolicidad

Por *ciclo* nos referiremos a una curva cerrada simple, es decir, un camino con vértices diferentes, excepto el último el cual coincide con el primero. Denotamos por $J(G)$ la unión del conjunto $V(G)$ y los puntos medios de las aristas de G . Consideramos el conjunto \mathbb{T}_1 de triángulos geodésicos T en G que son ciclos y tal que los tres vértices del triángulo T pertenecen a $J(G)$, y denotamos por $\delta_1(G)$ el ínfimo de las constantes λ tal que cada triángulo \mathbb{T}_1 es λ -thin.

Ahora demostraremos el resultado principal en esta sección, que establece que, para verificar si una gráfica es hiperbólica o para calcular la constante de hiperbolicidad de una gráfica, basta con considerar triángulos geodésicos tales que los tres puntos que determinan esos triángulos son vértices o puntos medios de las aristas de la gráfica. Además, se muestra que la constante de hiperbolicidad es un múltiplo de $\frac{1}{4}$. Estos resultados son importantes porque reducen considerablemente el número de triángulos geodésicos $T = \{x, y, z\}$ que hay que tomar en cuenta y también reduce el número de puntos $p \in [xy]$ para los cuales necesitamos saber el valor de $d(p, [yz] \cup [zx])$. Para probar estos teoremas necesitamos el siguiente resultado.

Lema 2.0.1. [82, Lema 2.1] *Consideremos un espacio métrico geodésico X . Si todo triángulo geodésico en X el cual es una curva cerrada simple, es δ -thin, entonces X es δ -thin.*

Este lema tiene la siguiente consecuencia directa.

Corolario 2.0.2. *En una gráfica G ,*

$$\delta(G) = \sup \{ \delta(T) : T \text{ es un triángulo geodésico el cual es un ciclo} \}.$$

Teorema 2.0.3. [9, Teorema 2.5] *Para cada gráfica G , tenemos $\delta_1(G) = \delta(G)$.*

Demostración. La desigualdad $\delta_1(G) \leq \delta(G)$ es obvia. Por el corolario 2.0.2 es suficiente con probar que para cada triángulo geodésico $T = \{x, y, z\}$ y $p \in [xy]$ existe un triángulo geodésico simple $T' = \{x', y', z'\}$,

con $x', y', z' \in J(G)$, y $p' \in [x'y']$ tal que $d(p', [x'z'] \cup [y'z']) \geq d(p, [xz] \cup [yz])$. Para obtenerlo, utilizamos la siguiente notación:

- x^+ (respectivamente, x^-) el punto más cercano a x en $J(G) \cap [xy]$ si $J(G) \cap [xy] \neq \emptyset$ (respectivamente, en $J(G) \cap [zx]$ si $J(G) \cap [zx] \neq \emptyset$);
- y^+ (respectivamente, y^-) el punto más cercano a y en $J(G) \cap [yz]$ si $J(G) \cap [yz] \neq \emptyset$ (respectivamente, en $J(G) \cap [xy]$ si $J(G) \cap [xy] \neq \emptyset$);
- z^+ (respectivamente, z^-) el punto más cercano a z en $J(G) \cap [xz]$ si $J(G) \cap [xz] \neq \emptyset$ (respectivamente, en $J(G) \cap [yz]$ si $J(G) \cap [yz] \neq \emptyset$).

Caso 1. Supongamos que los puntos x y y pertenecen a la misma arista $[u_x, v_x]$. Si $d(u_x, x) < d(u_x, y)$ y tomamos $x' = u_x$ y $y' = v_x$, las geodésicas $[x'z]$ y $[y'z]$ contienen los mismos vértices que $[xz]$ y $[yz]$. Tomando $z' = z^+$ (o z^-), $T' = \{x', y', z'\}$ y p' el punto medio de la arista $x'y'$, tenemos $d(p', [x'z'] \cup [y'z']) \geq d(p, [xz] \cup [yz])$.

Caso 2. Los puntos x y y pertenecen $u_x v_x$ y $u_y v_y$, respectivamente, y $v_x, u_y \in [xy]$.

Caso 2.1. Supongamos que z pertenece, por ejemplo, a la misma arista que x ; entonces $z \in [u_x x]$ y

$$d(p, [xz] \cup [yz]) = \min\{d(p, x), d(p, y), d(p, [u_x v_y])\}.$$

tomamos $z' = u_x$. Si $v_x = u_y$, entonces sabemos que T es o un ciclo C_3 o un ciclo C_4 ; en consecuencia, podemos elegir un triángulo geodésico simple $T' = \{x', y', z'\}$ tal que $x', y', z' \in J(G)$, el ciclo determinado por $[x'y'] \cup [y'z'] \cup [z'x']$ es el mismo ciclo determinado por $[xy] \cup [yz] \cup [zx]$ y $\delta(T) \leq \delta(T')$.

Nos ocupamos ahora del caso $v_x \neq u_y$.

Caso 2.1.1. Supongamos que $d(p, [xz] \cup [yz]) = d(p, [u_x v_y])$; entonces $p \notin u_x v_x$. Denotamos por $u_p v_p$ la arista conteniendo p con $u_p \in [px]$ (si $p \in V(G)$, entonces definimos $u_p := v_p := p$).

Si u_p pertenece a la geodésica que da la distancia $d(p, [u_x v_y])$, entonces tenemos $d(p, u_p) + d(u_p, v_x) + d(v_x, x) \geq d(p, u_p) + d(u_p, [u_x v_y])$. Así, tenemos dos casos: Si $x \in V(G)$, por [9, Proposición 2.2]), podemos tomar $x' = x$ y $y' = y^+$ para obtener $d(p, [x'z'] \cup [y'z']) \geq d(p, [xz] \cup [yz])$. Si $x \notin V(G)$, tomamos $d(u_p, v_x) \geq d(u_p, [u_x v_y])$ y, por [9, Proposición 2.2]), podemos tomar $x' = v_x$ y $y' = y^+$ para concluir que $[x'y']$ es también una geodésica que contiene p y satisface $d(p, [xz] \cup [yz]) = d(p, [x'z'] \cup [y'z'])$.

Si v_p pertenece a la geodésica que da la distancia $d(p, [u_x v_y])$, entonces tenemos $d(p, v_p) + d(v_p, u_y) + d(u_y, y) \geq d(p, v_p) + d(v_p, [u_x v_y])$. Así, tenemos dos casos: Si $y \in V(G)$, por [9, Proposición 2.2]), podemos tomar $x' = x^-$ y $y' = y$ para obtener $d(p, [x'z'] \cup [y'z']) \geq d(p, [xz] \cup [yz])$. Si $y \notin V(G)$, tenemos $d(v_p, u_y) \geq$

$d(v_p, [u_x v_y])$ y, por [9, Proposición 2.2]), podemos tomar $y' = y^-$ y $x' = x^-$ concluir que $[x'y']$ es también una geodésica conteniendo p y satisfaciendo $d(p, [xz] \cup [yz]) = d(p, [x'z'] \cup [y'z'])$.

Caso 2.1.2. Supongamos ahora que $d(p, [xz] \cup [yz]) = d(p, x)$. Si $p \in [xv_x]$, podemos tomar $x' = x^-$, $p' \in [x'v_x]$ tal que $d(p, x) = d(p', x')$ y, por [9, Proposición 2.2]), $y' = y^-$, así que $p' \in [x'y']$ y $d(p, [xz] \cup [yz]) = d(p', [x'z'] \cup [y'z'])$. En otro caso, denotamos por $u_p v_p$ la arista conteniendo p con $u_p \in [px]$ (si $p \in V(G)$, entonces definimos $u_p := v_p := p$); esta claro que $d(p, u_p) + d(u_p, [u_x v_y]) \geq d(p, u_p) + d(u_p, v_x) + d(v_x, x)$; así, $d(u_p, [u_x v_y]) \geq d(u_p, v_x) + 1$ (si $x = v_x$, basta con tomar $x' = x$ y $y' = y^+$). Vamos a comprobar que esto permite elegir $x' \in [u_x v_x] \cap J(G)$ tal que $d(x, x') \leq \frac{1}{2}$, y $p' \in [px]$ tal que $d(x, x') = d(p, p')$, satisfaciendo $d(p', x') \leq d(p', [u_x v_y])$. Para esto definimos $s_0 := d(x, v_x)$, $t_0 := d(u_y, y)$, $s := d(x^-, x)$ y $t := d(y^-, y)$. Por [9, Proposición 2.2]), si $(s_0, t_0) \in A_i$ con i un número par, podemos tomar $x' = x^-$, $y' = y^+$ y $p' \in [px]$ tal que $d(x, x') = d(p, p')$, y entonces $d(p, [xz] \cup [yz]) = d(p, x) = d(p', x') = d(p', [x'z'] \cup [y'z'])$. Si $(s_0, t_0) \in A_i$ con i un número impar, podemos tomar $x' = x^-$, $y' = y^-$ y $p' \in [px]$ tal que $d(x, x') = d(p, p')$ y, como $s \geq t$, tenemos $d(p, [xz] \cup [yz]) = d(p, x) = d(p', x') = d(p', [x'z'] \cup [y'z'])$.

Caso 2.1.3. Para el caso cuando $d(p, [xz] \cup [yz]) = d(p, y)$, Como el hecho de que z pertenece a la misma arista que x no está involucrado en el caso anterior, podemos usar el mismo razonamiento intercambiando los papeles de x y y , es decir, $x' = x^-$, $y' = y^+$, $p' \in [py]$ tal que $d(y, y') = d(p, p')$ si $(s_0, t_0) \in A_i$ con i un número par, y $x' = x^+$, $y' = y^+$ si $(s_0, t_0) \in A_i$ con i un número impar.

Caso 2.2. Suponemos ahora que x, y, z están en diferentes aristas $u_x v_x, u_y v_y$ y $u_z v_z$; así,

$$d(p, [xz] \cup [yz]) = \min\{d(p, x), d(p, y), d(p, [u_x v_z] \cup [u_z v_y])\}.$$

Caso 2.2.1. Supongamos que $d(p, [xz] \cup [yz]) = d(p, [u_x v_z] \cup [u_z v_y])$. Si $x \in V(G)$, por [9, Proposición 2.2]), podemos tomar $x' = x$, $y' = y^+$, $z = z^+$ y $p' = p$ para obtener que $p' \in [x'y']$ y $d(p, [xz] \cup [yz]) = d(p, [u_x v_z] \cup [u_z v_y]) = d(p', [x'z'] \cup [y'z'])$. Análogamente, si $y = v_y$, tomando $x' = x^-$, $y' = y$, $z = z^-$ y $p' = p$ obtenemos $p' \in [x'y']$ y $d(p, [xz] \cup [yz]) = d(p, [u_x v_z] \cup [u_z v_y]) = d(p', [x'z'] \cup [y'z'])$. Por lo tanto, podemos asumir que $x, y \notin V(G)$; así, $p \notin u_x v_x \cup u_y v_y$. Denotamos por $u_p v_p$ la arista que contiene p tal que $u_p \in [xp]$ (si $p \in V(G)$, entonces definimos $u_p := v_p := p$). Supongamos que la geodésica la cual da la distancia $d(p, [u_x v_z] \cup [u_z v_y])$ contiene u_p . En este caso tenemos $d(p, u_p) + d(u_p, v_x) + d(v_x, x) \geq d(p, u_p) + d(u_p, [u_x v_z] \cup [u_z v_y])$; por lo tanto, $d(u_p, v_x) \geq d(v_p, [u_x v_z] \cup [u_z v_y])$ y, por [9, Proposición 2.2]), podemos tomar $x' = x^+$, $y' = y^+$ y $z' = z^+$ tal que $T' = \{x', y', z'\}$ es un triángulo geodésico, $p \in [x'y']$ y $d(p, [xz] \cup [yz]) = d(p, [x'z'] \cup [y'z']) = d(p, [u_x v_z] \cup [u_z v_y])$. Si la geodésica la cual da la distancia $d(p, [u_x v_z] \cup [u_z v_y])$ contiene v_p , tenemos $d(p, v_p) + d(v_p, u_y) + d(u_y, y) \geq d(p, v_p) + d(v_p, [u_x v_z] \cup [u_z v_y])$, así $d(v_p, u_y) \geq d(v_p, [u_x v_z] \cup [u_z v_y])$ y, por

[9, Proposición 2.2]), podemos tomar $x' = x^-$, $y' = y^-$ y $z' = z^-$ tal que $T' = \{x', y', z'\}$ es un triángulo geodésico, $p \in [x'y']$ y $d(p, [xz] \cup [yz]) = d(p, [x'z'] \cup [y'z']) = d(p, [u_x v_z] \cup [u_z v_y])$.

Caso 2.2.2. Si tenemos $d(p, [xz] \cup [yz]) = d(p, x)$ (o $d(p, [xz] \cup [yz]) = d(p, y)$), podemos tomar x' y y' como en el caso 2.1.2 (o 2.1.3) y $z' = z^-$ (o $z' = z^+$). \square

Teorema 2.0.4. [9, Teorema 2.6] Para cada gráfica hiperbólica G , $\delta(G)$ es un múltiplo de $\frac{1}{4}$.

El siguiente resultado es una consecuencia de los resultados anteriores. Indica que en cualquier gráfica hiperbólica siempre existe un triángulo geodésico para el cual se alcanza la constante de hiperbolicidad.

Teorema 2.0.5. [9, Teorema 2.7] Para alguna gráfica hiperbólica G , existe un triángulo geodésico $T \in \mathbb{T}_1$ tal que $\delta(T) = \delta(G)$.

2.0.2. Resultados previos

Decimos que una subgráfica Γ de G es *isométrica* si $d_\Gamma(x, y) = d_G(x, y)$ para cada $x, y \in \Gamma$.

Lema 2.0.6. [81, Lema 5] Si Γ es una subgráfica isométrica de G , entonces $\delta(\Gamma) \leq \delta(G)$.

Demostración. Nótese que, por hipótesis, $d_\Gamma(x, y) = d_G(x, y)$ para cada $x, y \in \Gamma$; por tanto, cada triángulo geodésico en Γ es un triángulo geodésico en G . Por lo tanto, $\delta(\Gamma) \leq \delta(G)$. \square

Un *lazo* es una arista que conecta un vértice a sí mismo y una *arista múltiple* es el conjunto de todos las aristas (al menos dos) que inciden en los mismos dos vértices. Probaremos en esta sección que, para estudiar la hiperbolicidad de Gromov, basta con considerar gráficas sin lazos ni aristas múltiples.

Dada una gráfica G , definimos $A(G)$ como la gráfica G sin sus lazos, y $B(G)$ como la gráfica G sin sus aristas múltiples, obtenida reemplazando cada arista múltiple por una sola arista con la longitud mínima de las aristas correspondientes a esa arista múltiple.

Definición 2.0.7. Decimos que un vértice v de una gráfica G es un vértice de corte si $G \setminus \{v\}$ es no conexa. Una gráfica es dos conexa si no contiene vértices de corte. Dada una arista en G , consideremos la subgráfica maximal dos conexa que la contiene. Llamamos al conjunto de estas subgráficas maximales dos conexa $\{G_n\}_n$ la T -descomposición canónica de G .

Observación 2.0.8. Tenga en cuenta que cada G_n en la T -descomposición (también conocida como *tree-descomposición*) de G es una subgráfica isométrica de G .

Lema 2.0.9. [11, Teorema 3] Sea G alguna gráfica con T -descomposición canónica $\{G_n\}_n$. Entonces

$$\delta(G) = \sup_n \{\delta(G_n)\}.$$

Demostración. Note que, ya que $\{G_n\}_n$ es una T-descomposición de G , si g es un ciclo en G , entonces existe n tal que $g \subseteq G_n$. Por el corolario 2.0.2, tenemos

$$\begin{aligned}\delta(G) &= \sup \{ \delta(T) : T \text{ es un triángulo geodésico que es un ciclo} \} \\ &= \sup_n \{ \sup \{ \delta(T) : T \text{ es un triángulo geodésico que es un ciclo en } G_n \} \} \\ &= \sup_n \{ \delta(G_n) \}.\end{aligned}$$

□

Teorema 2.0.10. [11, Teorema 6] *Si G es una gráfica con algunos lazos, entonces*

$$\delta(G) = \max \left\{ \delta(A(G)), \frac{1}{4} \right\}.$$

Demostración. Está claro que $A(G)$ y los lazos de G es una T-descomposición de G . Tenga en cuenta que cada lazo g verifica $\delta(g) = \frac{L(g)}{4}$. Entonces el teorema 2.0.9 da la formula. Las otras afirmaciones son consecuencias directas de ésta. □

Teorema 2.0.11. [11, Teorema 8] *Si G es una gráfica con algunas aristas múltiples, entonces*

$$\delta(G) = \max \left\{ \delta(B(G)), \frac{1}{2} \right\} = \max \left\{ \delta(B(A(G))), \frac{1}{2} \right\}.$$

2.1. La relación entre la constante de hiperbolicidad y otros parámetros de la gráfica.

El siguiente resultado relaciona δ con un importante parámetro de una gráfica: el diámetro. Es un simple pero útil resultado.

Teorema 2.1.1. [81, Teorema 8] *En cualquier gráfica G la desigualdad $\delta(G) \leq \frac{1}{2} \text{diam } G$ se mantiene, y además, es óptima.*

Demostración. Consideremos un lado geodésico γ en cualquier triángulo geodésico $T \subset G$. Denotemos por x, y los puntos finales de γ , y por γ_1, γ_2 los otros lados de T . Para algún $p \in \gamma$, está claro que

$$d(p, \gamma_1 \cup \gamma_2) \leq d(p, \{x, y\}) \leq \frac{1}{2} L(\gamma) \leq \frac{1}{2} \text{diam } G,$$

y consecuentemente, $\delta(G) \leq \frac{1}{2} \text{diam } G$. □

Dada cualquier gráfica G definimos, como es usual, su *cuello* $g(G)$ como el ínfimo de las longitudes de los ciclos en G .

Teorema 2.1.2. [68, Teorema 17] Para cualquier gráfica G tenemos $\delta(G) \geq \frac{g(G)}{4}$ y la desigualdad es óptima.

Demostración. La desigualdad en la oración de este teorema es, de hecho, una igualdad para cada ciclo en la gráfica.

Si G no contiene ciclos, entonces G es un árbol y $g(G) = 0 = \delta(G)$.

Si existe un ciclo en G , entonces [68, Teorema 16] da que existe un ciclo isométrico C_0 en G . Entonces el lema 2.0.6 da

$$\delta(G) \geq \delta(C_0) = \frac{L(C_0)}{4} \geq \frac{g(G)}{4}.$$

□

Definamos la *circunferencia* $c(G)$ de una gráfica G como el supremo de las longitudes de sus ciclos.

Teorema 2.1.3. Para cualquier gráfica G , tenemos $\delta(G) \leq \frac{1}{4}c(G)$, y esta desigualdad es óptima.

Decimos que un subconjunto $A \subset V(G)$ es un *conjunto independiente* si $[v, w] \notin E(G)$ para cada $v, w \in A$. Denotamos por $\beta(G)$ el *número de independencia* de G , es decir, el cardinal del mayor conjunto independiente en G .

Teorema 2.1.4. [79, Teorema 2.2] Para cada gráfica G con n vértices, tenemos

$$\delta(G) \leq \min \left\{ \beta(G), \frac{n - \beta(G) + 2}{2} \right\}.$$

Un conjunto $S \subset V$ de una gráfica G , es un conjunto de dominación si cada vértice que no este en S es adyacente a un vértice en S . El *número de dominación* de G , denotado por $\gamma(G)$, es el mínimo cardinal de los conjuntos de dominación de G .

Teorema 2.1.5. [79, Teorema 2.8] Para cada gráfica G , tenemos $\delta(G) \leq \frac{3\gamma(G)}{2}$.

Demostración. Es bien sabido que $\gamma(G) \geq \frac{\text{diam } V(G) + 1}{3}$. Usando este resultado y el lema 2.1.1 da

$$\delta(G) \leq \frac{\text{diam } G}{2} \leq \frac{\text{diam } V(G) + 1}{2} \leq \frac{3\gamma(G)}{2}.$$

□

Teorema 2.1.6. Sea G una gráfica con orden n , si existe un ciclo C en G tal que $V(G) \setminus V(C)$ es un conjunto dominante, entonces

$$\delta(G) \leq \frac{n - \gamma(G)}{4}.$$

Demostración. Ya que $V(G) \setminus V(C)$ es un conjunto dominante, deducimos que $\gamma(G) \leq n - L(C)$. Además, por [80, Proposición 4.8] sabemos que $\delta(G) \leq L(C)/4$. De estas desigualdades obtenemos el resultado. \square

Teorema 2.1.7. [79, Teorema 3.2] *Sea G una gráfica con n vértices y grado máximo $\Delta = n - 1$ la cual no es un árbol. Entonces*

$$\frac{3}{4} \leq \delta(G) \leq \frac{3}{2},$$

y ambas desigualdades son óptimas.

Teorema 2.1.8. [79, Teorema 3.3] *Sea G una gráfica con m aristas y grado máximo Δ . Entonces*

$$\delta(G) \leq \frac{m + 2 - \Delta}{4}.$$

Además, si $\Delta = 2$, entonces la igualdad se alcanza si y sólo si G es isomorfo a C_m ; si $\Delta = 3$, entonces la igualdad se alcanza si y sólo si G es isomorfo a C_{m-1} con una arista uniendo dos vértices de C_{m-1} a distancia (en C_{m-1}) 2 o 3.

Teorema 2.1.9. [79, Teorema 3.4] *Sea G una gráfica con n vértices y grado mínimo d_0 . Entonces*

$$\delta(G) \leq \max \left\{ \frac{3}{2}, \frac{n + 2 - d_0}{4} \right\},$$

y la desigualdad es óptima.

Definición 2.1.10. *Dada una gráfica G y su T -descomposición canónica $\{G_n\}$, definimos los diámetros efectivos de los vértices y la gráfica respectivamente como:*

$$\text{diameff } V(G) := \sup_n \text{diam } V(G_n), \quad \text{diameff}(G) := \sup_n \text{diam}(G_n).$$

El lema 2.0.9 y teorema 2.1.1 tienen la siguiente consecuencia.

Lema 2.1.11. [8, Lema 4.4] *Sea G una gráfica. Entonces*

$$\delta(G) \leq \frac{1}{2} \text{diameff}(G).$$

Teorema 2.1.12. [8, Teorema 4.14] *Sea G una gráfica. Entonces $\delta(G) = 1$ si y sólo si $\text{diameff}(G) = 2$.*

Demostración. Supongamos que $\text{diameff}(G) = 2$. El lema 2.1.11 da $\delta(G) \leq \frac{1}{2} \text{diameff}(G) = 1$. Si $\delta(G) < 1$, entonces [8, Proposición 4.5] da $\text{diameff}(G) \leq \frac{3}{2}$, lo que contradice $\text{diameff}(G) = 2$. Por lo tanto, $\delta(G) = 1$.

Supongamos ahora que $\delta(G) = 1$. Buscando una contradicción, suponemos que $\text{diameff}(G) > 2$. Si $\{G_n\}_n$ es la T-descomposición canónica de G , entonces existe n_0 con $\text{diam}(G_{n_0}) > 2$.

Ya que G_{n_0} no tiene vértices de corte, por [8, Proposición 4.13] tenemos que $\delta(G_{n_0}) > 1$ y el lema 2.0.9 da $\delta(G) > k$, lo cual es una contradicción. Así, $\text{diameff}(G) \leq 2$. Además, el lema 2.1.11 da $2 = 2\delta(G) \leq \text{diameff}(G)$. Por lo tanto, $\text{diameff}(G) = 2$. \square

Observación 2.1.13. Si $\delta(G) \geq \frac{3}{2}$ entonces no es posible garantizar que $\text{diameff } V(G)$ o $\text{diameff}(G)$ estén acotados. Consideremos lo siguiente:

Sea G la gráfica de Cayley del grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ (G tiene la forma de un riel infinito). Tenemos $\delta(G) = \frac{3}{2}$ y la T-descomposición canónica de G tiene sólo una gráfica $G_1 = G$; por lo tanto, $\text{diameff } V(G) = \text{diam } V(G_1) = \infty$ y $\text{diameff}(G) = \infty$.

Para cada $n > 6$ consideramos la gráfica ciclo C_n con aristas de longitud k , y fijamos los vértices $v_1 \in V(G)$ y $v_2 \in V(C_n)$. La gráfica G_n obtenida de G y C_n por identificación v_1 y v_2 tiene T-descomposición canónica $\{G, C_n\}$ y $\text{diameff } V(G_n) = \text{diameff } V(G) = \infty$ y $\text{diameff}(G_n) = \infty$. Además, el lema 2.0.9 da

$$\delta(G_n) = \max \{ \delta(G), \delta(C_n) \} = \max \left\{ \frac{3}{2}, \frac{n}{4} \right\} = \frac{n}{4}.$$

2.2. El estudio de la hiperbolicidad para importantes clases de gráficas

A continuación damos los valores de la constante de hiperbolicidad para algunas de las familias más importantes de gráficas, tomemos en cuenta que estamos considerando que cada arista tiene longitud 1.

Teorema 2.2.1. [81, Teorema 11] Las siguientes gráficas tienen estos precisos valores de δ :

- La gráfica camino verifica $\delta(P_n) = 0$ para cada $n \geq 1$.
- La gráfica ciclo verifica $\delta(C_n) = n/4$ para cada $n \geq 3$.
- La gráfica completa verifica $\delta(K_1) = \delta(K_2) = 0$, $\delta(K_3) = 3/4$, $\delta(K_n) = 1$ para cada $n \geq 4$.
- La gráfica bipartita completa verifica $\delta(K_{1,1}) = \delta(K_{1,2}) = \delta(K_{2,1}) = 0$, $\delta(K_{m,n}) = 1$ para cada $m, n \geq 2$.
- La gráfica de Petersen P verifica $\delta(P) = 3/2$.

- La gráfica Rueda con n vértices W_n verifica $\delta(W_4) = \delta(W_5) = 1$, $\delta(W_n) = 3/2$ para cada $7 \leq n \leq 10$, y $\delta(W_n) = 5/4$ para $n = 6$ y para cada $n \geq 11$.

Además, las gráficas C_n y K_n para cada $n \geq 3$, $K_{m,n}$ para cada $m, n \geq 2$, la gráfica de Petersen y W_n para cada $4 \leq n \leq 10$, verifican $\delta(G) = \frac{1}{2} \text{diam } G$.

Teorema 2.2.2. [68, Teorema 11] Sea G una gráfica.

- $\delta(G) < 1/4$ si y sólo si G es un árbol.
- $\delta(G) < 1/2$ si y sólo si $A(G)$ es un árbol.
- $\delta(G) < 3/4$ si y sólo si $B(A(G))$ es un árbol.
- $\delta(G) < 1$ si y sólo si cada ciclo g en G tiene longitud $L(g) \leq 3$.

Además, si $\delta(G) < 1$, entonces $\delta(G) \in \{0, 1/4, 1/2, 3/4\}$.

Teorema 2.2.3. [8, Teorema 3.8] Sea G una gráfica, entonces $\delta(G) = 1$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

- (1) Existe un ciclo isomorfo a C_4 .
- (2) Para cada ciclo γ tal que $L(\gamma) \geq 5$ y para cada vértice $w \in \gamma$, se satisface $\deg_\gamma(w) \geq 3$.

Demostración. Por un lado, si $\delta(G) = 1 < \frac{5}{4}$, por [8, Proposición 3.4] obtenemos (1) y por [8, Teorema 3.2] tenemos (2). Por otro lado, si se cumple (1), por los teoremas 2.0.4 y 2.2.2 tenemos $\delta(G) \geq 1$.

Si (2) también se cumple, por [8, Teorema 3.2] sabemos que $\delta(G) < \frac{5}{4}$. Finalmente, ya que $\delta(G)$ es un múltiplo de $\frac{1}{4}$ por el teorema 2.0.4, concluimos $\delta(G) = 1$. \square

2.2.1. Hiperbolicidad y complemento de gráficas

Dada una gráfica simple finita o infinita $G = (V(G), E(G))$, se define el **complemento** de G , denotado por \overline{G} , como la gráfica con el mismo conjunto de vértices $V(G)$ y dos vértices son adyacentes en \overline{G} si y sólo si no lo son en G .

Comenzamos con algunos ejemplos. Las siguientes gráficas tienen estos valores precisos de δ :

- El complemento de la gráfica camino verifica $\delta(\overline{P_n}) = 5/4$ para cada $n \geq 5$.
- El complemento de la gráfica ciclo verifica $\delta(\overline{C_n}) = 5/4$ para cada $n \geq 5$.
- El complemento de la gráfica estrella verifica $\delta(\overline{S_n}) = 1$ para cada $n \geq 5$.

Teorema 2.2.4. [10, Teorema 2.2] Si $\text{diam}(V(G)) \geq 3$, entonces $\delta(\overline{G}) \leq 2$, y ésta desigualdad es óptima.

Teorema 2.2.5. [10, Teorema 3.1] Si G es alguna gráfica con $\delta(G) > \frac{3}{2}$, entonces $1 \leq \delta(\overline{G}) \leq 2$. Además, si $\delta(G) > 2$, entonces $1 \leq \delta(\overline{G}) \leq \frac{3}{2}$. En particular, si $\delta(G) \geq 2$, entonces $\delta(\overline{G}) \leq \delta(G)$; si $\delta(G) > 2$, entonces $\delta(\overline{G}) < \delta(G)$.

Proposición 2.2.6. [10, Proposición 3.4] Si G es una gráfica con $n \geq 4$ vértices y $\deg v \geq n - 2$ para cada vértice $v \in V(G)$, entonces $\delta(\overline{G}) < \delta(G)$.

2.2.2. Hiperbolicidad y Gráficas Producto

Definición 2.2.7. Dadas las gráficas $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ y $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$, definimos su producto cartesiano $G_1 \square G_2$ como la gráfica con vértices $V(G_1 \square G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ y $(u_1, u_2)(v_1, v_2) \in E(G_1 \square G_2)$ si y sólo si tenemos ya sea $u_1 = v_1 \in V(G_1)$ y $u_2 v_2 \in E(G_2)$ o $u_2 = v_2 \in V(G_2)$ y $u_1 v_1 \in E(G_1)$.

Teorema 2.2.8. [69, Teorema 13] Sean G_1, G_2 gráficas cualesquiera, y $\text{diam}'_G G := \sup\{d_G(u, v), u \in G, v \in V(G)\}$ tenemos

$$\delta(G_1 \square G_2) \leq \min\{\max\{1/2 + \text{diam}_{G_2} V(G_2), \delta(G_1) + \text{diam}'_{G_2} G_2\}, \max\{1/2 + \text{diam}_{G_1} V(G_1), \delta(G_2) + \text{diam}'_{G_1} G_1\}\},$$

y la desigualdad es óptima.

También tenemos los siguientes límites inferiores para $\delta(G_1 \square G_2)$.

Teorema 2.2.9. [69, Teorema 18] Para cualesquiera gráficas G_1, G_2 tenemos

- (a) $\delta(G_1 \square G_2) \geq \max\{\delta(G_1), \delta(G_2)\}$,
- (b) $\delta(G_1 \square G_2) \geq \min\{\text{diam}_{G_1} V(G_1), \text{diam}_{G_2} V(G_2)\}$,
- (c) $\delta(G_1 \square G_2) \geq \min\{\text{diam}_{G_1} V(G_1), \text{diam}_{G_2} V(G_2)\} + 1/2$, si $\text{diam}_{G_1} V(G_1) \neq \text{diam}_{G_2} V(G_2)$,
- (d) $\delta(G_1 \square G_2) \geq \frac{1}{2} \min\{\delta(G_1) + \text{diam}_{G_2} V(G_2), \delta(G_2) + \text{diam}_{G_1} V(G_1)\}$.

Además, las desigualdades en (b) y (c) son óptimas, como se mostrará en el primer y segundo punto en el teorema 2.2.11

Teorema 2.2.10. [69, Teorema 21] Para cualesquiera gráficas G_1, G_2 tenemos que $G_1 \square G_2$ es hiperbólico si y sólo si G_1 es hiperbólico y G_2 está acotado o si G_2 es hiperbólico y G_1 está acotado.

Teorema 2.2.11. [69, Teorema 23] Las siguientes gráficas tienen estos valores precisos de δ :

- $\delta(P_n \square P_n) = n - 1$, para cada $n \geq 2$.
- $\delta(P_m \square P_n) = \min\{m, n\} - 1/2$, para cada $m, n \geq 2$ con $m \neq n$.
- $\delta(Q_n) = n/2$, para cada $n \geq 2$.
- $\delta(C_m \square C_n) = (m + n)/4$, para cada $m, n \geq 3$.
- $\delta(T_1 \square T_2) = \delta(P_{1+\text{diam } T_1} \square P_{1+\text{diam } T_2})$, para cualesquiera árboles T_1, T_2 , es decir,

$$\delta(T_1 \square T_2) = \begin{cases} \text{diam}_{T_1} T_1, & \text{si } \text{diam}_{T_1} T_1 = \text{diam}_{T_2} T_2, \\ \min\{\text{diam}_{T_1} T_1, \text{diam}_{T_2} T_2\} + 1/2, & \text{si } \text{diam}_{T_1} T_1 \neq \text{diam}_{T_2} T_2. \end{cases}$$

Usaremos la definición de producto lexicográfico dada en [56].

Definición 2.2.12. Sean $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ y $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ dos gráficas. El producto lexicográfico $G_1 \circ G_2$ de G_1 y G_2 tiene a $V(G_1) \times V(G_2)$ como conjunto de vértices, de manera que dos vértices distintos (u_1, v_1) y (u_2, v_2) de $G_1 \circ G_2$ son adyacentes si o bien $u_1 u_2 \in E(G_1)$, o $u_1 = u_2$ y $v_1 v_2 \in E(G_2)$.

Tenga en cuenta que el producto lexicográfico de dos gráficas no siempre es conmutativo (ver figura 2.2). Usamos la notación (x, y) para los puntos de la gráfica $G_1 \circ G_2$ con $x \in V(G_1)$ o $y \in V(G_2)$. Por otro lado esta notación puede ser ambigua.

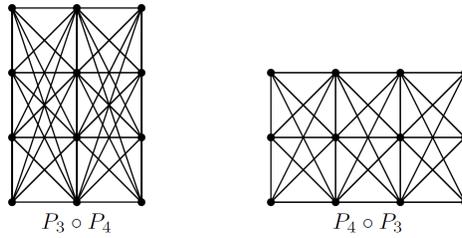


Figura 2.2: El producto Lexicográfico de dos gráficas no es en general conmutativo.

Observación 2.2.13. El producto cartesiano y el producto fuerte (del cual hablaremos más adelante) de dos gráficas son subgráficas del producto lexicográfico de dos gráficas, es decir, $G_1 \square G_2 \subseteq G_1 \boxtimes G_2 \subseteq G_1 \circ G_2$.

Por *gráfica trivial* nos referimos a una gráfica que tiene un sólo vértice, y lo denotamos por E_1 . Si G_1 y G_2 son isomorfas, entonces escribimos $G_1 \simeq G_2$.

El siguiente teorema muestra un importante resultado cualitativo: si G_1 no es hiperbólico entonces $G_1 \circ G_2$ no es hiperbólico.

Teorema 2.2.14. [21, Teorema 3.1] Sean G_1 y G_2 dos gráficas, entonces $\delta(G_1) \leq \delta(G_1 \circ G_2)$.

Ejemplo 2.2.15. Sea P_n la gráfica camino con $n \geq 2$. Entonces

$$\delta(P_n \circ P_2) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 2, \\ 5/4, & \text{si } n = 3, \\ 3/2, & \text{si } n \geq 4. \end{cases}$$

Ejemplo 2.2.16. Sea C_n la gráfica ciclo con $n \geq 3$. Entonces

$$\delta(C_n \circ P_2) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 3, \\ 5/4, & \text{si } n = 4, \\ n/4, & \text{si } n \geq 5. \end{cases}$$

Teorema 2.2.17. [21, Teorema 3.3] Sea G_1 una gráfica no trivial y G_2 alguna gráfica. Entonces

$$\delta(G_1 \circ G_2) = \max\{\delta(\Gamma_1 \circ \Gamma_2) : \Gamma_i \text{ es isométrica a } G_i \text{ para } i = 1, 2 \text{ y } \Gamma_1 \text{ no trivial}\}.$$

Teorema 2.2.18. [21, Teorema 3.7] Sea G_1 una gráfica no trivial y G_2 alguna gráfica. Entonces tenemos $\delta(G_1 \circ G_2) \leq \delta(G_1) + 3/2$.

Teorema 2.2.19. [21, Teorema 3.10] Sea G_1 una gráfica no trivial y G_2 alguna gráfica. El producto lexicográfico $G_1 \circ G_2$ es hiperbólico si y sólo si G_1 es hiperbólica.

Usaremos la definición dada en [54] para la definición del producto directo.

Definición 2.2.20. Sean $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ y $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ dos gráficas. El producto directo $G_1 \times G_2$ de G_1 y G_2 tiene $V(G_1) \times V(G_2)$ como conjunto de vértices, y dos vértices distintos (u_1, v_1) y (u_2, v_2) de $G_1 \times G_2$ son adyacentes si $u_1 u_2 \in E(G_1)$ y $v_1 v_2 \in E(G_2)$.

Proposición 2.2.21. [20, Proposición 2.8] Sean G_1 y G_2 dos gráficas no acotadas, entonces $G_1 \times G_2$ no es hiperbólico.

Teorema 2.2.22. [20, Teorema 2.11] Sean G_1 una gráfica y G_2 una gráfica no trivial acotada con algún ciclo impar, entonces, $G_1 \times G_2$ es hiperbólico si y sólo si G_1 es hiperbólica.

Teorema 2.2.23. [20, Teorema 3.6] Si G_1 y G_2 son gráficas bipartitas con $k_1 := \text{diam } V(G_1)$ y $k_2 := \text{diam } V(G_2)$ tal que $k_1 \geq k_2 \geq 1$, entonces

$$\max \left\{ \min \left\{ \frac{k_1 - 1}{2}, k_2 - 1 \right\}, \delta(G_1), \delta(G_2) \right\} \leq \delta(G_1 \times G_2) \leq \frac{k_1}{2}.$$

Además, si $k_1 \leq 2k_2 - 2$ y k_1 es par, entonces $\delta(G_1 \times G_2) = k_1/2$.

Teorema 2.2.24. [20, Teorema 3.7] Para cada número impar $m \geq 3$ y cada $n \geq 2$,

$$\delta(C_m \times P_n) = \begin{cases} m/2, & \text{si } n-1 \leq m, \\ (n-1)/2, & \text{si } m < n-1 < 2m, \\ m-1/2, & \text{si } n-1 \geq 2m. \end{cases}$$

Usaremos las definiciones dadas en [39] para la suma cartesiana.

Definición 2.2.25. Sean $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ y $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ dos gráficas. La suma Cartesiana $G_1 \oplus G_2$ de G_1 y G_2 tiene $V(G_1) \times V(G_2)$ como conjunto de vértices, y dos distintos vértices (u_1, v_1) y (u_2, v_2) de $G_1 \oplus G_2$ son adyacentes si $u_1 u_2 \in E(G_1)$ o si $v_1 v_2 \in E(G_2)$.

Observación 2.2.26. Los productos Cartesiano, fuerte y lexicográfico de dos gráficas son subgráficas del producto suma cartesiana de dos gráficas, es decir, $G_1 \square G_2 \subseteq G_1 \boxtimes G_2 \subseteq G_1 \circ G_2 \subseteq G_1 \oplus G_2$.

Teorema 2.2.27. [22, Teorema 3.5] Para cada gráficas no triviales G_1, G_2 , tenemos

$$\delta(G_1 \oplus G_2) = \max\{\delta(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) : \Gamma_i \text{ es una subgráfica isométrica de } G_i \text{ y } \Gamma_i \text{ es no trivial para } i = 1, 2\}.$$

Los siguientes resultados caracterizan las sumas cartesianas hiperbólicas.

Teorema 2.2.28. [22, Teorema 3.9] Sean G_1 y G_2 un par de gráficas.

- (1) Si G_1 es una gráfica trivial, entonces la suma cartesiana $G_1 \oplus G_2$ es hiperbólica si y sólo si G_2 es hiperbólica. Además,

$$\delta(G_1 \oplus G_2) = \delta(G_2).$$

- (2) Si G_2 es una gráfica trivial, entonces la suma cartesiana $G_1 \oplus G_2$ es hiperbólica si y sólo si G_1 es hiperbólica. Además,

$$\delta(G_1 \oplus G_2) = \delta(G_1).$$

- (3) Para gráficas no triviales G_1, G_2 la suma cartesiana $G_1 \oplus G_2$ es hiperbólica con

$$1 \leq \delta(G_1 \oplus G_2) \leq 3/2.$$

Además, la constante de hiperbolicidad $\delta(G_1 \oplus G_2)$ pertenece a $\{1, 5/4, 3/2\}$.

Teorema 2.2.29. [22, Teorema 3.12] Sean G_1, G_2 gráficas. Si $\text{diam } V(G_i) \geq 3$ para $i \in \{1, 2\}$, entonces $\delta(G_1 \oplus G_2) = 3/2$.

Teorema 2.2.30. [22, Teorema 3.22] Sean G_1, G_2 árboles. Entonces

$$\delta(G_1 \oplus G_2) = \begin{cases} 0, & \text{si } G_1 \simeq E_1 \quad \text{o} \quad G_2 \simeq E_1, \\ 1, & \text{si } 1 \leq \text{diam } G_1 \leq 2 \quad \text{y} \quad 1 \leq \text{diam } G_2 \leq 2, \\ 5/4, & \text{si } 1 \leq \text{diam } G_1 \leq 2 \quad \text{y} \quad \text{diam } G_2 \geq 3, \\ 5/4, & \text{si } \text{diam } G_1 \geq 3 \quad \text{y} \quad 1 \leq \text{diam } G_2 \leq 2, \\ 3/2, & \text{si } \text{diam } G_1 \geq 3 \quad \text{y} \quad \text{diam } G_2 \geq 3. \end{cases}$$

Teorema 2.2.31. [22, Teorema 4.5] Sean G_1, G_2 gráficas. Si $\text{diam } V(G_i) \geq 3$ para $i \in \{1, 2\}$, entonces

$$\frac{3}{2} \leq \delta(\overline{G_1 \oplus G_2}) \leq 2.$$

Definición 2.2.32. Sean $G = (V(G), E(G))$ y $H = (V(H), E(H))$ dos gráficas con $V(G) \cap V(H) = \emptyset$. La gráfica unión $G + H$ de G y H tiene $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ y dos vértices diferentes u y v de $G + H$ son adyacentes si $u \in V(G)$ y $v \in V(H)$, o $uv \in E(G)$ o $uv \in E(H)$.

Corolario 2.2.33. [25, Corolario 3.2] Para cualesquiera gráficas G, H , la gráfica unión $G + H$ es hiperbólica con $\delta(G + H) \leq 3/2$, y la desigualdad es óptima.

Teorema 2.2.34. [25, Teorema 3.9] Sean G, H dos gráficas.

- (1) $\delta(G + H) = 0$ si y sólo si G o H es una gráfica vacía y la otra isomorfa a E_1 .
- (2) $\delta(G + H) = 3/4$ si y sólo si $G \simeq E_1$ y $\Delta_H = 1$, o $H \simeq E_1$ y $\Delta_G = 1$.

Si G es una gráfica con componentes conexas $\{G_j\}$, definimos

$$\text{diam}^* G := \sup_j \{\text{diam } G_j\}$$

Teorema 2.2.35. [25, Teorema 3.22] Sean G, H dos gráficas. Entonces

$$\delta(G + H) = \begin{cases} 0, & \text{si } G \simeq E_n \quad \text{y} \quad H \simeq E_m \quad \text{con} \quad n = 1 \quad \text{o} \quad m = 1, \\ 3/4, & \text{si } G \simeq E_1 \quad \text{y} \quad \Delta_H = 1, \quad \text{o} \quad H \simeq E_1 \quad \text{y} \quad \Delta_G = 1, \\ 1, & \text{si } G \simeq E_1 \quad \text{y} \quad 1 < \text{diam}^* H \leq 2, \quad \text{o} \\ & H \simeq E_1 \quad \text{y} \quad 1 < \text{diam}^* G \leq 2; \quad \text{o} \\ & |V(G)|, |V(H)| \geq 2, \quad \text{y} \quad \text{diam} G \leq 2 \quad \text{o} \quad \text{diam}^* G = 0, \\ & \text{y} \quad \text{diam} H \leq 2 \quad \text{o} \quad \text{diam}^* H = 0; \\ 3/2, & \text{si } G \in \mathcal{F} \quad \text{o} \quad H \in \mathcal{F} \\ 5/4, & \text{otros casos.} \end{cases}$$

Usaremos la definición de producto fuerte dada por Sabidussi en [83].

Definición 2.2.36. Sean $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ y $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ dos gráficas. El producto fuerte $G_1 \boxtimes G_2$ de G_1 y G_2 tiene $V(G_1) \times V(G_2)$ como conjunto de vértices, y dos distintos vértices (u_1, v_1) y (u_2, v_2) de $G_1 \boxtimes G_2$ son adyacentes sí, o $u_1 = u_2$ y $[v_1, v_2] \in E(G_2)$, o $[u_1, u_2] \in E(G_1)$ y $v_1 = v_2$, o $u_1 u_2 \in E(G_1)$ y $v_1 v_2 \in E(G_2)$.

Corolario 2.2.37. [19, Corolario 12] Para todas las gráficas G_1, G_2 , tenemos

$$\delta(G_1 \boxtimes G_2) \leq \frac{\text{máx}\{\text{diam } V(G_1), \text{diam } V(G_2)\} + 1}{2},$$

y la desigualdad es óptima.

Teorema 2.2.38. [19, Teorema 15] Para todas las gráficas G_1, G_2 tenemos:

- (a) $\delta(G_1 \boxtimes G_2) \geq \text{máx}\{\delta(G_1), \delta(G_2)\}$,
- (b) $\delta(G_1 \boxtimes G_2) \geq \frac{1}{2} \text{mín}\{\text{diam } V(G_1), \text{diam } V(G_2)\}$,
- (c) $\delta(G_1 \boxtimes G_2) \geq \frac{1}{2} (\text{diam } V(G_1) + 1)$, si $0 < \text{diam } V(G_1) < \text{diam } V(G_2)$,
- (d) $\delta(G_1 \boxtimes G_2) \geq \frac{1}{4} \text{mín}\{\text{diam } V(G_1) + 2\delta(G_2), \text{diam } V(G_2) + 2\delta(G_1)\}$.

El siguiente es un resultado cualitativo acerca de la hiperbolicidad de $G_1 \boxtimes G_2$.

Teorema 2.2.39. [19, Teorema 17] Si G_1 y G_2 son gráficas infinitas, entonces $G_1 \boxtimes G_2$ no es hiperbólica.

Teorema 2.2.40. [19, Teorema 34] Sean C_n, C_m dos gráficas ciclos con $3 \leq n \leq m$. Entonces

$$\delta(C_n \boxtimes C_m) = \begin{cases} \lfloor m/2 \rfloor / 2 + 1/2, & \text{si } \lfloor m/2 \rfloor < 2\lfloor n/2 \rfloor, \\ \lfloor m/2 \rfloor / 2 + 1/4, & \text{si } \lfloor m/2 \rfloor = 2\lfloor n/2 \rfloor, \\ m/4, & \text{si } \lfloor m/2 \rfloor > 2\lfloor n/2 \rfloor. \end{cases}$$

Teorema 2.2.41. [19, Teorema 35] Para cada $m \geq 2, n \geq 3$,

$$\delta(C_n \boxtimes P_m) = \begin{cases} \lfloor n/2 \rfloor + 1/2, & \text{si } \lfloor n/2 \rfloor < (m-1)/2, \\ \lfloor n/2 \rfloor + 1/4, & \text{si } \lfloor n/2 \rfloor = (m-1)/2, \\ m/2, & \text{si } (m-1)/2 < \lfloor n/2 \rfloor \leq (m-1), \\ (\lfloor n/2 \rfloor + 1)/2, & \text{si } m-1 < \lfloor n/2 \rfloor < 2(m-1), \\ \lfloor n/2 \rfloor / 2 + 1/4, & \text{si } \lfloor n/2 \rfloor = 2(m-1), \\ n/4, & \text{si } \lfloor n/2 \rfloor > 2(m-1). \end{cases}$$

2.2.3. Constante de hiperbolicidad de gráficas línea

Las gráficas línea fueron introducidas inicialmente en los artículos [37, 57], a pesar de que la terminología de gráfica línea fue usada en [10] por primera vez.

Dada una gráfica G , su gráfica línea $\mathcal{L}(G)$, es aquella que cumple los siguientes requisitos:

1. Cada vértice de $\mathcal{L}(G)$ representa a una arista de G .
2. Dos vértices de $\mathcal{L}(G)$ son adyacentes si las aristas correspondientes en G tienen un punto en común.

Teorema 2.2.42. [26, Teorema 2.2] *Existe una $(1/2)$ – full $(1,1)$ – quasi-isometría de G sobre su gráfica línea \mathcal{L} y, consecuentemente, G es hiperbólica si y sólo si $\mathcal{L}(G)$ es hiperbólica.*

Además, si G (respectivamente, $\mathcal{L}(G)$) es δ - hiperbólica, entonces $\mathcal{L}(G)$ (respectivamente, G) es δ' - hiperbólica, donde δ' es una constante que depende de δ .

Se obtuvo también una versión cuantitativa (con constantes explícitas) para las constantes de hiperbolicidad en 2.2.42. Para ello definimos el *producto de Gromov* de $x, y \in G$ con punto base $w \in G$ por

$$(x, y)_w := \frac{1}{2} (d(x, w) + d(y, w) - d(x, y))$$

Si G es una gráfica hiperbólica de Gromov, se cumple

$$(x, z)_w \geq \min\{(x, y)_w, (y, z)_w\} - \delta \tag{2.2.1}$$

para cada $x, y, z, w \in G$ y alguna constante $\delta \geq 0$. Denotaremos por $\delta^*(G)$ la constante óptima para esta desigualdad, es decir,

$$\delta^*(G) := \sup\{\min\{(x, y)_w, (y, z)_w\} - (x, z)_x : x, y, z, w \in G\}.$$

Ahora es que 2.2.1 es, de hecho, equivalente a nuestra definición de hiperbolicidad de Gromov; además, tenemos $\delta^*(G) \leq 4\delta(G)$ y $\delta(G) \leq 3\delta^*(G)$ (ver por ejemplo [3, 46]).

Teorema 2.2.43. [26, Teorema 2.3] *Para alguna gráfica G , tenemos $\delta^*(G) - 3 \leq \delta^*(\mathcal{L}(G)) \leq \delta^*(G) + 6$.*

Proposición 2.2.44. [26, Proposición 3.3] *Sea T algún árbol con grado máximo Δ . Entonces*

$$\delta(\mathcal{L}(T)) = \begin{cases} 1, & \text{si } \Delta \geq 4, \\ 3/4, & \text{si } \Delta = 3 \\ 0, & \text{si } \Delta \leq 2. \end{cases}$$

Teorema 2.2.45. [26, Teorema 3.13] Para alguna gráfica G , tenemos

$$\frac{1}{4}g(G) \leq \delta(\mathcal{L}(G)) \leq \frac{1}{4}c(G) + 2.$$

2.3. El estudio de la invarianza de la hiperbolicidad de gráficas bajo transformaciones apropiadas

Si G es una gráfica y $e := ab \in E(G)$, denotamos por G/e la gráfica obtenida por la contracción de la arista e sobre ella (removemos e de G mientras simultáneamente unimos a y b).

En este trabajo denotaremos por v_e el vértice de G/e obtenido por la identificación de a y b al contraer la arista $e := ab$.

Notemos que cualquier vértice $v \in V(G) \setminus \{a, b\}$ puede ser visto como un vértice en $V(G/e)$. También podemos escribir cualquier arista $E(G/e)$ en términos de sus puntos finales, pero escribimos v_e en lugar de a o b . Si va y vb son aristas de G para algún $v \in V(G)$, entonces, para evitar lazos, necesitamos remplazar ambas aristas por una sola arista $vv_e \in G/e$ ya que trabajamos con gráficas simples, ver figura 2.3.

Definimos el mapeo $h : G \rightarrow G/e$ de la siguiente forma: si x pertenece a la arista e , entonces $h(x) := v_e$; si $x \in G$ no pertenece a e , entonces $h(x)$ es el “mapeo de inclusión natural”. Claramente h es sobre, es decir, $h(G) = G/e$. Además, h es un mapeo inyectivo en la unión de aristas sin puntos finales en $\{a, b\}$.

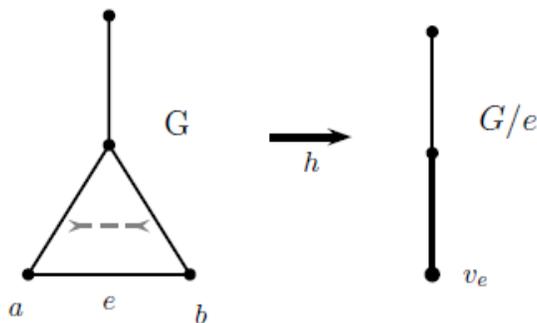


Figura 2.3: Mapeo de inclusión

Observación 2.3.1. La definición de $\delta(G)$ cuando G es una gráfica no conexa da que el teorema 1.1.28 se aplica para gráficas no conexas.

Usando la invarianza de la hiperbolicidad (Teorema 1.1.28), podemos obtener el principal resultado cualitativo en esta sección.

Teorema 2.3.2. [24, Teorema 2.5] Sea G una gráfica y $e \in E(G)$, entonces G es hiperbólica si y sólo si

G/e es hiperbólica. Además, si G (respectivamente, G/e) es δ -hiperbólica, entonces G/e (respectivamente, G) es δ' -hiperbólica, donde δ' es una constante la cual depende solamente de δ .

Demostración. [24, Proposición 2.1] da que h es una 0-full $(1, 3/2)$ -quasi-isometría de G sobre G/e , y obtenemos el resultado por el Teorema 1.1.28. \square

Los resultados previos permiten obtener una versión cuantitativa del teorema 2.3.2.

Teorema 2.3.3. [24, Teorema 2.13] Sea G una gráfica y $e \in E(G)$, entonces

$$\frac{1}{3} \delta(G/e) \leq \delta(G) \leq \frac{16}{3} \delta(G/e) + 1. \quad (2.3.2)$$

Decimos que una arista $e \in E(G)$ es una *arista de corte* si $G \setminus e$ es no conexa.

Proposición 2.3.4. [24, Proposición 2.17] Sea G una gráfica y e arista de corte en G , entonces

$$\delta(G/e) = \delta(G) = \delta(G \setminus e).$$

Demostración. Consideremos la T-descomposición $\{G_s\}_s$ de $G \setminus e$. Entonces $\{G_s\}_s \cup \{e\}$ es una T-descomposición de G y la proposición 2.0.9 da

$$\delta(G) = \max \left\{ \sup_s \delta(G_s), \delta(e) \right\} = \max \left\{ \sup_s \delta(G_s), 0 \right\} = \sup_s \delta(G_s) = \delta(G \setminus e).$$

Para cada s , sea G'_s la subgráfica de G/e obtenida de G_s por el remplazamiento de los vértices en $\{a, b\}$ por v_e . Note que G'_s y G_s son isomorfas (e isométricas) y, por lo tanto, $\delta(G'_s) = \delta(G_s)$. Ya que $\{G'_s\}_s$ es una T-descomposición de G/e , la Proposición 2.0.9 da

$$\delta(G/e) = \sup_s \delta(G'_s) = \sup_s \delta(G_s) = \delta(G).$$

\square

Consideramos un subconjunto $\{e_j\}_{j \in J} \subset E(G)$ con $e_j = a_j b_j$ para algún $j \in J$. Decimos que $\{e_j\}_{j \in J}$ es un *subconjunto adecuado de eliminación* si $\Lambda(G, \{e_j\}_{j \in J}) < \infty$, donde

$$\Lambda(G, \{e_j\}_{j \in J}) := \sup \left\{ d_{G \setminus \{e_j\}_{j \in J}}(a_k, b_k) \mid k \in J \text{ con } a_k, b_k \text{ en la misma componente conexa de } G \setminus \{e_j\}_{j \in J} \right\}.$$

Consideramos un subconjunto $\{e_j\}_{j \in J} \subset E(G)$ con componentes conexas $\{K_i\}_{i \in I}$. Decimos que $\{e_j\}_{j \in J}$ es un *subconjunto adecuado de contracción* si $\sup_{i \in I} \text{diam}_G K_i < \infty$.

Teorema 2.3.5. [24, Teorema 3.6] Sea G una gráfica, G_1 una gráfica menor de G obtenida por la contracción de subconjunto adecuado de contracción de $E(G)$, G_2 una gráfica menor de G_1 obtenida por la eliminación de un subconjunto adecuado de eliminación de $E(G_1)$, y G' una gráfica menor de G_2 (y de G) obtenida por la eliminación de cualquier cantidad de vértices aislados. Entonces G es hiperbólica si y sólo si G' es hiperbólica.

Capítulo 3

Hiperbolicidad en Gráficas Intervalo

En [88] se demostró la equivalencia de la hiperbolicidad de superficies curvadas negativamente y la hiperbolicidad de una gráfica relacionada a dicha superficie; por lo tanto, es útil conocer criterios de hiperbolicidad para gráficas desde un punto de vista geométrico. En los últimos años, el estudio de las propiedades matemáticas de los espacios hiperbólicos de Gromov se ha convertido en un tema de creciente interés en la teoría de las gráficas y sus aplicaciones (ver, *por ejemplo*, [7, 8, 15, 17, 32, 35, 37, 38, 43, 44, 58, 61, 63, 66, 84, 85, 86, 88, 93]).

Una gráfica geométrica es una gráfica en la cual las aristas y/o los vértices están asociados a objetos geométricos. Dos de las principales clases de gráficas geométricas son las gráficas euclidianas y gráficas de intersección. Una gráfica es *Euclidiana* si los vértices son puntos en \mathbb{R}^n y la longitud de cada arista que conecta dos vértices es la distancia euclidiana entre ellos. Una *gráfica de intersección* es una gráfica en la que cada vértice está asociado con un conjunto y en el que los vértices están conectados por aristas siempre que los conjuntos correspondientes tengan una intersección no vacía. En este capítulo trabajaremos con gráficas intervalos (una clase de gráficas de intersección) y gráficas de indiferencia (una clase de gráficas euclidianas).

Una *gráfica intervalo* es la gráfica de intersección de una familia de intervalos en la recta real, tiene un vértice para cada intervalo en la familia, y una arista entre cada par de vértices correspondientes a los intervalos que se intersecan. Generalmente, consideramos que cada arista de una gráfica intervalo tiene longitud 1, pero también consideramos gráficas intervalo cuyas aristas tienen diferentes longitudes. Las gráficas de intervalos son gráficas cordales y, por lo tanto, gráficas perfectas [42, 48]. Sus complementos pertenecen a la clase de gráficas de comparabilidad [47], y las relaciones de comparabilidad son precisamente los órdenes de intervalo [42]. En particular, Cohen aplicó gráficas de intervalo a los modelos matemáticos en biología, específicamente las redes alimenticias de poblaciones [34, pp. 12-33].

Las Gráficas Intervalo se utilizan para representar los problemas de asignación de recursos en la Investigación de Operaciones y la Teoría de Programación. En estas aplicaciones, cada intervalo representa una solicitud de un recurso (tal como una unidad de procesamiento de un sistema de computación distribuida o una habitación para una clase) durante un período de tiempo específico. El problema del peso independiente del conjunto para la gráfica representa el problema de encontrar el mejor subconjunto de peticiones que

se pueden satisfacer sin conflictos [5]. Una gráfica óptima de la gráfica intervalo representa una asignación de recursos que cubre todas las solicitudes con el menor número posible de recursos; puede encontrarse en tiempo polinomial mediante un algoritmo de coloración codicioso que colorea los intervalos ordenados por sus extremos izquierdos [36]. Otras aplicaciones incluyen la Genética, la Bioinformática y la Informática. Encontrar un conjunto de intervalos que representan un gráfica intervalo también se puede utilizar como una forma de ensamblar subsecuencias contiguas en el mapeo de ADN [94]. Las gráficas Intervalo también juegan un papel importante en el razonamiento temporal [49].

Una *Gráfica de Indiferencia* es una gráfica euclidiana en \mathbb{R} construida asignando un número real a cada vértice y conectando dos vértices por una arista cuando sus números correspondientes están dentro de una unidad de diferencia entre sí. Puesto que es una gráfica euclidiana, la longitud de cada arista que conecta dos vértices es la distancia euclídea entre ellos. Es bien sabido que cada gráfica de indiferencia es isomorfa a una gráfica intervalo. Además, las gráficas de indiferencia verifican otras propiedades, tales como: 1. Cada gráfica de indiferencia conexa tiene una ruta Hamiltoniana [12]. 2. Una gráfica de indiferencia tiene un ciclo Hamiltoniano si y sólo si está biconectado [74]. 3. Las gráficas de indiferencia obedecen a la conjetura de reconstrucción: están determinados únicamente por sus subgráficas suprimidas por vértices [90]. 4. En la misma dirección, consideramos gráficas de indiferencia, ya que para estas gráficas podemos eliminar una de las hipótesis de un teorema principal en las Gráficas Intervalo (compare el Teorema 3.1.7 y el Corolario 3.1.8).

Dado que la hiperbolicidad de Gromov es una propiedad geométrica, es natural estudiarla en el contexto de las Gráficas Geométricas. Es bien sabido, que las Gráficas Intervalo (con una hipótesis muy débil) y de Indiferencia son hiperbólicas, ya que son gráficas cordales. En este trabajo damos cotas óptimas para sus constantes de hiperbolicidad (ver Teorema 3.1.7). Además, en la sección 3 calculamos el valor preciso de la constante de hiperbolicidad de cada gráfica intervalo con aristas de longitud 1 (ver Teorema 3.2.14). Además, obtenemos buenas cotas óptimas para la constante de hiperbolicidad del complemento de cualquier gráfica de intervalo con aristas de longitud 1.

3.1. Gráficas Intervalo e Hiperbolicidad

Como es conocido, tenemos el siguiente resultado:

Lema 3.1.1. [82, Lemma 2.1] *Consideremos un espacio métrico geodésico X . Si cada triángulo geodésico en X que es un ciclo δ -thin, entonces X es δ -hiperbólico.*

Este lema tiene la siguiente consecuencia directa.

Corolario 3.1.2. *En un espacio métrico geodésico X ,*

$$\delta(X) = \sup \{ \delta(T) \mid T \text{ Es un triángulo geodésico que es un ciclo} \}.$$

Consideremos un ciclo C en una gráfica intervalo G , con $\{v_1, \dots, v_k\}$ vértices en G de tal que

$$C = v_1v_2 \cup \dots \cup v_{k-1}v_k \cup v_kv_1.$$

Denotemos por $\{I_1, \dots, I_k\}$ los intervalos correspondientes a $\{v_1, \dots, v_k\}$. Si $I_j = [a_j, b_j]$, entonces definamos el *intervalo minimal* de C como el intervalo $I_{j_1} = [a_{j_1}, b_{j_1}]$ con $a_{j_1} \leq a_j$ para cada $1 \leq j \leq k$ y $b_{j_1} > b_j$ si $a_j = a_{j_1}$ con $1 \leq j \leq k$ y $j \neq j_1$, y el *intervalo maximal* de C como el intervalo $I_{j_2} = [a_{j_2}, b_{j_2}]$ con $b_{j_2} \geq b_j$ para cada $1 \leq j \leq k$ y $a_{j_2} < a_j$ si $b_j = b_{j_2}$ con $1 \leq j \leq k$ y $j \neq j_2$. Si $i \in \mathbb{Z} \setminus \{1, 2, \dots, k\}$, $1 \leq j \leq k$ y $i = j \pmod{k}$, entonces $v_i := v_j$ y $I_i := I_j$.

Si H es una subgráfica de G y $w \in V(H)$, denotamos por $\deg_H(w)$ el grado del vértice w en la subgráfica inducida por $V(H)$. Para alguna gráfica G , definimos,

$$\begin{aligned} \text{diam } V(G) &:= \sup \{d_G(v, w) \mid v, w \in V(G)\}, \\ \text{diam } G &:= \sup \{d_G(x, y) \mid x, y \in G\}. \end{aligned}$$

Lema 3.1.3. *Para algún triángulo geodésico T en una gráfica G tenemos $\delta(T) \leq (\text{diam } T)/2 \leq L(T)/4$.*

Demostración. Sea T un triángulo geodésico $T = \{x, y, z\}$ y $p \in [xy]$. Consideramos $s, t \in T$ con $d(s, t) = \text{diam } T$. Ya que T contiene 2 curvas uniendo s y t , tenemos $\text{diam } T \leq L(T)/2$ y

$$d(p, [xz] \cup [zy]) \leq d(p, \{x, y\}) \leq \frac{1}{2} \text{diam } T \leq \frac{1}{4} L(T),$$

para algún $p \in [xy]$. Puesto que podemos renombrar los vértices de T , concluimos $\delta(T) \leq (\text{diam } T)/2 \leq L(T)/4$. \square

Así, Tenemos la siguiente consecuencia directa.

Corolario 3.1.4. *Para toda Gráfica G , se tiene*

$$\delta(G) \leq \frac{1}{2} \text{diam } G \leq \frac{1}{2} (\text{diam } V(G) + 1).$$

Para probar los nuevos resultados necesitamos el siguiente lema técnico. Recordemos que una *gráfica cordal* es aquella en la que todos los ciclos de cuatro o más vértices tienen una cuerda, que es una arista que no es parte del ciclo sino que conecta dos vértices del ciclo. Equivalentemente, cada ciclo inducido en la gráfica debe tener a lo sumo tres vértices.

Lema 3.1.5. *[17, Lema 2.2] Consideremos una gráfica cordal G y un ciclo C en G con $a, v, b \in C \cap V(G)$ y $av, vb \in E(G)$. Si $ab \notin E(G)$, entonces $\deg_C(v) \geq 3$.*

El Lema 3.1.5 tiene la siguiente consecuencia.

Corolario 3.1.6. *Consideremos un ciclo C en un gráfica cordal G y v_1, v_2, v_3 vértices consecutivos en C . Si $\deg_C(v_2) = 2$, entonces $v_1v_3 \in E(G)$. Por consiguiente, si C tiene al menos 4 vértices, entonces $\deg_C(v_1) \geq 3$ y $\deg_C(v_3) \geq 3$.*

Decimos que una gráfica G tiene *longitud apropiada* si cada arista es una geodésica. Una gran clase de gráficas con longitud apropiada son las gráficas con aristas de longitud 1. Otra clase importante de gráficas con longitud apropiada son las gráficas geométricas siguientes: considere un conjunto discreto V en un espacio euclídeo (o en un espacio métrico) donde consideramos dos puntos conectados por una arista si se satisface algún criterio. Si definimos la longitud de una arista como la distancia entre sus vértices, entonces obtenemos una gráfica con longitud apropiada.

Sea G una gráfica, definimos $\ell_0 := \sup\{L(e) | e \in E(G)\}$, donde $L(e)$ es la longitud de la arista e .

Es bien sabido que cada gráfica intervalo es cordal. Por lo tanto, cada gráfica intervalo con longitud apropiada es hiperbólica. El siguiente resultado es uno de los principales teoremas de este trabajo, ya que proporciona una cota superior para la constante de hiperbolicidad de cualquier gráfica intervalo con longitud apropiada.

Teorema 3.1.7. *Cada gráfica intervalo G con longitud apropiada satisface la desigualdad*

$$\delta(G) \leq \frac{3}{2} \ell_0.$$

Demostración. Consideramos un triángulo geodésico $T = \{x, y, z\}$ que es un ciclo en G y $p \in [xy]$. Supondremos primero que T satisface la siguiente propiedad:

$$\text{si } a, b \in V(G) \cap [xy] \text{ y } ab \in E(G), \text{ entonces } ab \subseteq [xy]. \quad (3.1.1)$$

Consideramos los vértices consecutivos $\{v_1, \dots, v_k\}$ en el ciclo T , y sus intervalos correspondientes $\{I_1, \dots, I_k\}$. Como antes, denotamos por I_{j_1} y I_{j_2} los intervalos minimal y maximal, respectivamente.

Si $k < 4$, entonces $L(T) \leq 3\ell_0$ por el lema 3.1.3 tenemos:

$$d(p, [xz] \cup [zy]) \leq \frac{1}{4} L(T) \leq \frac{3}{4} \ell_0. \quad (3.1.2)$$

Consideremos ahora que $k \geq 4$.

Caso (A). Suponemos que $p \in V(G)$. Sean $a, b \in V(G)$ con $ap, bp \in E(G)$ y $ap \cup bp \subset T$.

Caso (A,1). Si $ab \notin E(G)$, entonces el lema 3.1.5 da $\deg_T(p) \geq 3$, y existen $q \in V(G) \cap T$ con $pq \in E(G)$ tal que pq no está contenida en T . Por (3.1.1), $q \in [xz] \cup [zy]$ y así

$$d(p, [xz] \cup [zy]) \leq d(p, q) = L(pq) \leq \ell_0. \quad (3.1.3)$$

Caso (A,2). Si $ab \in E(G)$, entonces ab no está contenido en T , ya que T es un ciclo y $k \geq 4$. Por (3.1.1), $\{a, b\}$ no está contenida en $[xy]$, y

$$d(p, [xz] \cup [zy]) \leq \max \{d(p, a), d(p, b)\} = \max \{L(pa), L(pb)\} \leq \ell_0. \quad (3.1.4)$$

Caso (B). Suponemos que $p \notin V(G)$. Sea $a, b \in V(G)$ con $p \in ab \subset T$ y $d(p, a) \leq L(ab)/2 \leq \ell_0/2$. El corolario 3.1.6 da que tenemos $\deg_T(a) \geq 3$ o $\deg_T(b) \geq 3$.

Caso (B,1). Suponemos que $\deg_T(a) \geq 3$.

Caso (B,1,1). Si $a \notin [xy]$, entonces

$$d(p, [xz] \cup [zy]) \leq d(p, a) \leq \frac{1}{2} \ell_0. \quad (3.1.5)$$

Caso (B,1,2). Suponemos que $a \in [xy]$. Ya que $\deg_T(a) \geq 3$, existen $q \in V(G) \cap T$ con $aq \in E(G)$ tal que aq no está contenida en T . Por (3.1.1), $q \in [xz] \cup [zy]$ y así

$$\begin{aligned} d(p, [xz] \cup [zy]) &\leq d(p, a) + d(a, [xz] \cup [zy]) \leq d(p, a) + d(a, q) \\ &= d(p, a) + L(aq) \leq \frac{1}{2} \ell_0 + \ell_0 = \frac{3}{2} \ell_0. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Caso (B,2). Suponemos que $\deg_T(a) = 2$ y $\deg_T(b) \geq 3$. Sea $\alpha \neq b$ con $\alpha \in V(G)$, $\alpha a \in E(G)$ y $\alpha a \subset T$. El corolario 3.1.6 da que tenemos $\alpha b \in E(G)$. Por (3.1.1), tenemos que $\{\alpha, b\}$ no está contenida en $[xy]$, y

$$\begin{aligned} d(p, [xz] \cup [zy]) &\leq \max \{d(p, \alpha), d(p, b)\} \leq \max \{d(p, a) + d(a, \alpha), d(p, b)\} \\ &\leq \max \left\{ \frac{1}{2} \ell_0 + \ell_0, \ell_0 \right\} = \frac{3}{2} \ell_0. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Las desigualdades (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5), (3.1.6) y (3.1.7) da en cada caso $d(p, [xz] \cup [zy]) \leq 3\ell_0/2$.

Consideremos ahora un triángulo geodésico $T = \{x, y, z\} = \{[xy], [xz], [yz]\}$ que no satisface la propiedad (3.1.1). Obtendremos una nueva geodésica γ uniendo x y y tal que el triángulo geodésico $T' = \{\gamma, [xz], [yz]\}$ satisface (3.1.1).

Definamos inductivamente una secuencia finita de geodésicas $\{g_0, g_1, g_2, \dots, g_r\}$ uniendo x y y de la siguiente manera:

Si $j = 0$, entonces $g_0 := [xy]$.

Supongamos que $j \geq 1$. Si el triángulo geodésico $\{g_{j-1}, [xz], [yz]\}$ satisface (3.1.1), entonces $r = j - 1$ y la sucesión se detiene. Si $\{g_{j-1}, [xz], [yz]\}$ no satisface (3.1.1), entonces existen $a, b \in V(G) \cap [xy]$ tal que $ab \in E(G)$ y ab no está contenida en $[xy]$. Denotemos por $[ab]$ la geodésica uniendo a y b contenida en g_{j-1} .

Definamos $g_j := (g_{j-1} \setminus [ab]) \cup ab$. Notemos que $g_j \cap V(G) \subset g_{j-1} \cap V(G)$ y $|g_j \cap V(G)| < |g_{j-1} \cap V(G)|$.

Ya que $|g_j \cap V(G)| < |g_{j-1} \cap V(G)|$ para algún $j \geq 1$, esta sucesión debe terminar con alguna geodésica g_r tal que el triángulo geodésico $T' := \{g_r, [xz], [yz]\}$ satisface (3.1.1). Así, definimos $\gamma := g_r$. Por lo tanto,

$$g_r \cap V(G) \subset g_{r-1} \cap V(G) \subset \cdots \subset g_1 \cap V(G) \subset g_0 \cap V(G),$$

y así $\gamma \cap V(G) \subset [xy] \cap V(G)$.

Consideremos $p \in [xy] \subset T$.

Si $p \in \gamma \subset T'$, entonces por la aplicación del previo argumento al triángulo geodésico T' obtenemos $d(p, [xz] \cup [zy]) \leq 3\ell_0/2$.

Supongamos que $p \notin \gamma$.

Ya que $\gamma \cap V(G) \subset [xy] \cap V(G)$, existe $v, w \in \gamma \cap V(G)$ con $vw \in E(G)$ tal que si $[vw]$ denota la geodésica uniendo v y w contenida en $[xy]$, entonces

$$p \in [vw], \quad [vw] \cap vw = \{v, w\}.$$

Ya que vw y $[vw]$ son geodésicas, tenemos $L(vw) = L([vw])$. Así, podemos definir $p' \in \gamma$ como el punto en vw con $d(p', v) = d(p, v)$ y $d(p', w) = d(p, w)$. Aplicando el argumento previo a p' y T' , obtenemos $d(p', [xz] \cup [zy]) \leq 3\ell_0/2$. Ya que p' pertenece a la arista vw , Tenemos $d(p', [xz] \cup [zy]) = d(p', v) + d(v, [xz] \cup [zy])$ o $d(p', [xz] \cup [zy]) = d(p', w) + d(w, [xz] \cup [zy])$. Por simetría, podemos suponer que $d(p', [xz] \cup [zy]) = d(p', v) + d(v, [xz] \cup [zy])$. Ya que $d(p', v) = d(p, v)$, tenemos

$$d(p, [xz] \cup [zy]) \leq d(p, v) + d(v, [xz] \cup [zy]) = d(p', v) + d(v, [xz] \cup [zy]) = d(p', [xz] \cup [zy]) \leq \frac{3}{2} \ell_0.$$

Finalmente, el Corolario 3.1.2 da $\delta(G) \leq 3\ell_0/2$.

La Proposición 3.2.6 más adelante muestra que la desigualdad es óptima. \square

Note que si removemos la hipótesis $\ell_0 < \infty$, entonces hay gráficas intervalo con longitud apropiada no hiperbólicas: Si Γ es alguna gráfica tal que cada ciclo en Γ tiene exactamente 3 vértices y $\sup\{L(C) \mid C \text{ es un ciclo en } \Gamma\} = \infty$, entonces Γ es una gráfica cordal no hiperbólica. Alguna de estas gráficas Γ son gráficas de intervalo con longitud propia.

Como ya se mencionó anteriormente gráfica de indiferencia es una gráfica euclideana, como tal, la longitud de una arista es la distancia euclidiana entre los números correspondientes a los vértices de la arista. Por lo tanto, toda gráfica de indiferencia es una gráfica con longitud apropiada y $\ell_0 \leq 1$. Es bien sabido que cada gráfica de indiferencia es una gráfica intervalo.

El Teorema 3.1.7 tiene la siguiente consecuencia directa.

Corolario 3.1.8. *Cada gráfica de indiferencia G satisface la desigualdad*

$$\delta(G) \leq \frac{3}{2} \ell_0 \leq \frac{3}{2}.$$

3.2. Gráficas Intervalo con aristas de longitud 1

A través de esta sección consideraremos gráficas con aristas de longitud 1. Esta es una muy usual clase de gráficas. Note que cada gráfica con aristas de longitud 1 es una gráfica con longitud apropiada con $\ell_0 = 1$.

El punto principal de esta sección es calcular el valor de la constante de hiperbolicidad de cada gráfica intervalo con aristas de tamaño 1 (ver Teorema 3.2.14). Deseamos enfatizar que es inusual ser capaz de calcular la constante de hiperbolicidad de cada gráfica en una gran clase de gráficas. Comencemos con una consecuencia directa del Teorema 3.1.7.

Corolario 3.2.1. *Cada gráfica intervalo G con aristas de longitud 1 satisface la desigualdad*

$$\delta(G) \leq \frac{3}{2}.$$

Necesitaremos las siguientes definiciones y resultados.

Denotemos por $J(G)$ el conjunto de vértices y puntos medios de las aristas en G . Consideremos el conjunto \mathbb{T}_1 de triángulos geodésicos T en G que son ciclos y tales los que tres vértices de un triángulo T pertenezcan a $J(G)$, y denotemos por $\delta_1(G)$ el ínfimo de las constantes λ tal que cada triángulo en \mathbb{T}_1 es λ -thin.

Los siguientes tres resultados, los cuales aparecen en [9], serán útiles.

Teorema 3.2.2. [9, Teorema 2.5] *Para cada gráfica G con aristas de longitud 1 tenemos $\delta_1(G) = \delta(G)$.*

El siguiente resultado limitará los posibles valores para la constante de hiperbolicidad δ .

Teorema 3.2.3. [9, Teorema 2.6] *Si G es una gráfica hiperbólica con aristas de longitud 1, entonces $\delta(G)$ es múltiplo de $1/4$.*

Teorema 3.2.4. [9, Teorema 2.7] *Si G es una gráfica hiperbólica con aristas de longitud 1, entonces existe un triángulo geodésico $T \in \mathbb{T}_1$ tal que $\delta(T) = \delta(G)$.*

El siguiente resultado puede ser deducido de [8, Proposición 4.5 y Teoremas 4.14 y 4.21].

Teorema 3.2.5. *Sea G una gráfica con aristas de longitud 1. Si existe un ciclo en G con $p, q \in V(G)$ y $d(p, q) \geq 3$, entonces $\delta(G) \geq 3/2$.*

Primero de todo caracterizaremos las gráficas intervalo con aristas de longitud 1 y $\delta(G) = 3/2$ en la Proposición 3.2.6 más adelante. Por lo tanto, la Proposición 3.2.6 muestra que la desigualdad en el Teorema 3.1.7 es óptima.

Sea G una gráfica intervalo. Decimos que G tiene la *propiedad de intersección-(3/2)* si existen dos intervalos disjuntos I' e I'' correspondiendo a vértices en un ciclo C en G tal que no hay intervalo I (correspondiendo a un vértice en G) con $I \cap I' \neq \emptyset$ e $I \cap I'' \neq \emptyset$.

Proposición 3.2.6. *Una gráfica intervalo G con aristas de longitud 1 satisface $\delta(G) = 3/2$ si y sólo si G tiene la propiedad de intersección-(3/2).*

Demostración. Suponemos que G tiene la propiedad de intersección-(3/2). Si v' y v'' son los vértices correspondientes a I' e I'' , respectivamente, entonces $v', v'' \in C$ y $d(v', v'') \geq 3$. Así, el Teorema 3.2.5 da $\delta(G) \geq 3/2$ y, puesto que $\delta(G) \leq 3/2$ por el Corolario 3.2.1, concluimos $\delta(G) = 3/2$.

Suponemos ahora que G no tiene la propiedad de intersección-(3/2). Buscando una contradicción suponemos que $\delta(G) = 3/2$. Por el Teorema 3.2.4, existe un triángulo geodésico $T = \{x, y, z\}$ que es un ciclo en G y $p \in [xy]$ tal que $d(p, [xz] \cup [zy]) = \delta(T) = \delta(G) = 3/2$ y $x, y, z \in J(G)$. Ya que $d(p, \{x, y\}) \geq d(p, [xz] \cup [zy]) = 3/2$, tenemos $d(x, y) \geq 3$. Ya que G no tiene la propiedad de intersección-(3/2), para cada dos intervalos disjuntos I' e I'' correspondiendo a vértices en el ciclo T existe un intervalo I (correspondiendo a un vértice en G) con $I \cap I' \neq \emptyset$ y $I \cap I'' \neq \emptyset$. Si v' y v'' son los vértices correspondientes a I' e I'' , respectivamente, entonces $v', v'' \in T$ y $d(v', v'') = 2$. Concluimos que $\text{diam}(T \cap V(G)) \leq 2$ y $\text{diam} T \leq 3$. Ya que $d(x, y) \geq 3$ con $x, y \in J(G)$, tenemos $\text{diam}(T \cap V(G)) = 2$, $\text{diam} T = 3$, $d(x, y) = 3$, $L([xy])/2 = d(p, x) = d(p, y) = d(p, [xz] \cup [zy]) = \delta(T) = \delta(G) = 3/2$ y p es el punto medio de $[xy]$. Así, $x, y \in J(G) \setminus V(G)$ y $p \in V(G)$. Si $x \in x_1x_2 \in E(G)$ y $y \in y_1y_2 \in E(G)$, entonces $d(\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}) = 2$. Sean $I_{x_1}, I_{x_2}, I_{y_1}, I_{y_2}, I_p$ los intervalos correspondiendo a los vértices x_1, x_2, y_1, y_2, p , respectivamente. Podemos suponer que $x_1, y_1 \in [xy]$ y así, $I_{x_1} \cap I_p \neq \emptyset$ e $I_{y_1} \cap I_p \neq \emptyset$. Ya que $d(x_1, y_1) = 2$, $I_{x_1} \cap I_{y_1} = \emptyset$. Así, existen $\zeta \in I_p \setminus (I_{x_1} \cup I_{y_1})$. Ya que $[xy] \cap V(G) = \{x_1, p, y_1\}$ y T es un ciclo conteniendo x_1, p, y_1 , existe un intervalo J correspondiente a un vértice $v \in ([xz] \cup [zy]) \cap V(G)$ con $\zeta \in J$. Así, $pv \in E(G)$ y $3/2 = d(p, [xz] \cup [zy]) \leq d(p, v) = 1$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $\delta(G) \neq 3/2$. \square

El siguiente resultado en [68, Teorema 11] será útil.

Teorema 3.2.7. *Si G es una gráfica con aristas de longitud 1 con $\delta(G) < 1$, entonces tenemos o bien $\delta(G) = 0$ o $\delta(G) = 3/4$. Además,*

- $\delta(G) = 0$ si y sólo si G es un árbol.
- $\delta(G) = 3/4$ si y sólo si G no es un árbol y cada ciclo en G tiene longitud 3.

Corolario 3.2.8. *Una gráfica G con aristas de longitud 1 satisface $\delta(G) \geq 1$ si y sólo si existe un ciclo G con longitud mínima 4.*

El Corolario 3.2.1 y los Teoremas 3.2.3 y 3.2.7 dan que $\delta(G) \in \{0, 3/4, 1, 5/4, 3/2\}$ para cada gráfica intervalo G con aristas de longitud 1. La Proposición 3.2.6 caracteriza las gráficas intervalo con aristas de longitud 1 y $\delta(G) = 3/2$. Para caracterizar gráficas de intervalos con otros valores de constante de hiperbolicidad, necesitamos algunas definiciones.

Sea G una gráfica intervalo. Decimos que G tiene la *propiedad de intersección-0* si para cada tres intervalos I' , I'' e I''' correspondiendo a vértices G tenemos $I' \cap I'' \cap I''' = \emptyset$.

Decimos que G tiene *propiedad de intersección-(3/4)* si no tiene la propiedad de intersección-0 y para cada cuatro intervalos I' , I'' , I''' e I'''' correspondientes a vértices en G tenemos $I' \cap I'' \cap I''' = \emptyset$ o $I' \cap I'' \cap I'''' = \emptyset$.

Por un *acoplamiento* de intervalos en un ciclo C de G nos referiremos a la unión de dos intervalos no disjuntos cuyos vértices correspondientes pertenecen a C . Decimos que G tiene la *propiedad de intersección-1* si no tiene la propiedad de intersección-0 y la propiedad de intersección-(3/4) y por cada ciclo C en G cada intervalo y acoplamiento de intervalos correspondiendo a vértices en C no son disjuntos.

Se puede comprobar que cada gráfica cordal que tiene un ciclo con longitud por lo menos cuatro tiene un ciclo con longitud cuatro y entonces este ciclo tiene una cuerda y también tiene un ciclo de longitud tres.

A continuación se proporciona una caracterización de las gráficas intervalos con constante de hiperbolicidad 0. Es bien sabido que estos son árboles oruga (los árboles que al eliminar las hojas y aristas incidentes producen gráficas camino) ver [60], pero preferimos caracterizarlos por la propiedad de intersección-0 en la Proposición 3.2.9 más adelante, ya que se parece a las otras propiedades de intersección.

Proposición 3.2.9. *Una gráfica intervalo G con aristas de longitud 1 satisface $\delta(G) = 0$ si y sólo si G tiene la propiedad de intersección-0.*

Demostración. Por el teorema 3.2.7, $\delta(G) = 0$ si y sólo si G es un árbol. Ya que cada gráfica intervalo es cordal, G no es un árbol si y sólo si contiene un ciclo de longitud 3, y esta última condición se mantiene si y sólo si existen tres intervalos I' , I'' y I''' correspondiendo a vértices en G con $I' \cap I'' \cap I''' \neq \emptyset$. Por lo tanto, G tiene un ciclo si y sólo si no tiene la propiedad de intersección-0. \square

Proposición 3.2.10. *Una gráfica intervalo G con aristas de longitud 1 satisface $\delta(G) = 3/4$ si y sólo si G tiene la propiedad de intersección-(3/4).*

Demostración. Por el teorema 3.2.7, $\delta(G) = 3/4$ si y sólo si G no es un árbol y cada ciclo en G tiene longitud 3. Proposición 3.2.9 da que G no es un árbol si y sólo si G no tiene la propiedad de intersección-0. Por lo tanto, es suficiente mostrar que cada ciclo en G tiene longitud 3 si y sólo si para cada cuatro intervalos I' , I'' , I''' e I'''' correspondientes a vértices en G tenemos $I' \cap I'' \cap I''' = \emptyset$ o $I' \cap I'' \cap I'''' = \emptyset$.

Ya que cada gráfica intervalo es cordal, G tiene un ciclo con longitud de al menos 4 si y sólo si tiene un ciclo C con longitud 4 y este ciclo tiene al menos una cuerda.

Primero supondremos que existe dicho ciclo C . Si I', I'', I''', I'''' son los intervalos correspondiendo a los vértices en C y I', I'' corresponden a vértices con una cuerda, entonces $I' \cap I'' \cap I''' \neq \emptyset$ e $I' \cap I'' \cap I'''' \neq \emptyset$.

Supondremos ahora que hay intervalos I', I'', I''', I'''' correspondiendo a los vértices v', v'', v''', v'''' en G con $I' \cap I'' \cap I''' \neq \emptyset$ e $I' \cap I'' \cap I'''' \neq \emptyset$. Así $v'v''', v''v'''' \in E(G)$ y $v'v''', v''v'''' \in E(G)$, y entonces $v'v'''' \cup v''v'' \cup v''v'''' \cup v''''v'$ es un ciclo en G con longitud 4. \square

Para caracterizar las gráficas G con $\delta(G) = 1$, necesitamos los siguientes resultados, los cuales pueden ser deducidos de [8, Teorema 4.14].

Teorema 3.2.11. *Sea G una gráfica con aristas de longitud 1. Tenemos $\delta(G) = 1$ si y sólo si $\delta(G) \notin \{0, 3/4\}$ y para cada ciclo C en G y cada $x, y \in C \cap J(G)$ tenemos $d(x, y) \leq 2$.*

Los Teoremas 3.2.7 y 3.2.11 tienen las siguientes consecuencia.

Corolario 3.2.12. *Sea G una gráfica con aristas de longitud 1. Tenemos $\delta(G) \leq 1$ si y sólo si para cada ciclo C en G y cada $x, y \in C \cap J(G)$ tenemos $d(x, y) \leq 2$.*

Proposición 3.2.13. *Una gráfica intervalo G con aristas de longitud 1 1 satisface $\delta(G) = 1$ si y sólo si G tiene la propiedad de intersección-1.*

Demostración. Por el Teorema 3.2.11, $\delta(G) = 1$ si y sólo si $\delta(G) \notin \{0, 3/4\}$ y para cada ciclo C en G y cada $x, y \in C \cap J(G)$ tenemos $d(x, y) \leq 2$. Las Proposiciones 3.2.9 y 3.2.10 dan que $\delta(G) \notin \{0, 3/4\}$ si y sólo si G no tiene las propiedades de intersección-0 y la (3/4). Por lo tanto, es suficiente mostrar que para cada ciclo C en G , tenemos $d(x, y) \leq 2$ para cada $x, y \in C \cap J(G)$ si y sólo si cada intervalo y acoplamiento de intervalos correspondiendo a vértices C son no disjuntos.

Fijemos un ciclo C en G . Cada intervalo y acoplamiento de intervalos correspondiendo a vértices en C son no disjuntos si y sólo si $d(x, y) \leq 3/2$ para cada $x \in C \cap V(G)$ y $y \in C \cap (J(G) \setminus V(G))$. Puesto que cada punto en $C \cap (J(G) \setminus V(G))$ tiene un punto en $C \cap V(G)$ a distancia $1/2$, esta última condición es equivalente a $d(x, y) \leq 2$ para cada $x, y \in C \cap J(G)$. \square

Finalmente, recogemos los resultados anteriores en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.14. *Cada gráfica intervalo G con aristas de longitud 1 es hiperbólico y $\delta(G) \in \{0, 3/4, 1, 5/4, 3/2\}$. Además,*

- $\delta(G) = 0$ si y sólo si G tiene la propiedad de intersección-0.
- $\delta(G) = 3/4$ si y sólo si G tiene la propiedad de intersección-(3/4).
- $\delta(G) = 1$ si y sólo si G tiene la propiedad de intersección-1.

- $\delta(G) = 5/4$ si y sólo si G no tiene las propiedades de intersección- 0, $3/4$, 1 y $(3/2)$.
- $\delta(G) = 3/2$ si y sólo si G tiene la propiedad de intersección- $(3/2)$.

Recordemos que el *complemento* \overline{G} de la gráfica G está definida como la gráfica con $V(\overline{G}) = V(G)$ y tal que $e \in E(\overline{G})$ si y sólo si $e \notin E(G)$. Tenga en cuenta que \overline{G} puede ser disconexa en general, y recuerde que para cada gráfica disconexa G definimos $\delta(G)$ como el supremo de $\delta(G_i)$ donde G_i varía en el conjunto de componentes conexas de G .

Si Γ es una subgráfica de G , consideramos en Γ la *métrica interior* obtenida por la restricción de la métrica en G , es decir

$$d_\Gamma(v, w) := \inf \{L(\gamma) \mid \gamma \subset \Gamma \text{ es una curva continua uniendo } v \text{ y } w\} \geq d_G(v, w).$$

Tenga en cuenta que la métrica interior d_Γ es la métrica usual si consideramos la subgráfica Γ como una gráfica.

Dado que los complementos de gráficas intervalos pertenecen a la clase de gráficas de comparabilidad [47], es natural estudiar también la constante de hiperbolicidad de los complementos de las gráficas de intervalos. Para ello necesitamos algunos resultados preliminares y el siguiente lema técnico.

Lema 3.2.15. *Sea G una gráfica de intervalo con aristas de longitud 1, $V(G) = \{v_1, \dots, v_r\}$ e intervalos correspondientes $\{I_1, \dots, I_r\}$. Tenemos $\text{diam } V(G) = 2$ si y sólo si existe un intervalo I_i con $I_j \cap I_i \neq \emptyset$ para cada $1 \leq j \leq r$ y $\text{diam } V(G') \geq 2$, donde G' es la gráfica intervalo correspondiendo a $\{I_1, \dots, I_r\} \setminus I_i$. Además, si este es el caso, entonces $\delta(\overline{G}) = \delta(\overline{G'})$.*

Demostración. Primero suponemos que $\text{diam } V(G) = 2$. Sea $[a_j, b_j] = I_j$ para $1 \leq j \leq r$. Consideremos enteros $1 \leq i_1, i_2 \leq r$ satisfaciendo

$$b_{i_1} \leq b_j, \quad a_j \leq a_{i_2}, \quad \text{para cada } 1 \leq j \leq r. \quad (3.2.8)$$

Ya que $\text{diam } V(G) = 2$, tenemos $b_{i_1} < a_{i_2}$. Así $d_G(v_{i_1}, v_{i_2}) = 2$ y existe i con $v_i v_{i_1}, v_i v_{i_2} \in E(G)$. Por lo tanto, $I_{i_1} \cap I_i \neq \emptyset$ e $I_{i_2} \cap I_i \neq \emptyset$. Así el Corolario (3.2.8) da $I_j \cap I_i \neq \emptyset$ para cada $1 \leq j \leq r$, y deducimos $d_G(v_j, v_i) \leq 1$ para cada $1 \leq j \leq r$.

Buscando una contradicción suponemos que $\text{diam } V(G') \leq 1$. Así $d_G(v_j, v_{j'}) \leq d_{G'}(v_j, v_{j'}) \leq 1$ para cada $1 \leq j, j' \leq r$ con $j, j' \neq i$. Además, hemos probado $d_G(v_j, v_i) \leq 1$ para cada $1 \leq j \leq r$. Por lo tanto, $d_G(v_j, v_{j'}) \leq 1$ para cada $1 \leq j, j' \leq r$ y concluimos $\text{diam } V(G) \leq 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\text{diam } V(G') \geq 2$.

Supondremos ahora que existe un intervalo I_i con $I_j \cap I_i \neq \emptyset$ para cada $1 \leq j \leq r$ y $\text{diam } V(G') \geq 2$. Por lo tanto, $d_G(v_j, v_i) \leq 1$ para cada $1 \leq j \leq r$. Por lo tanto, $d_G(v_j, v_{j'}) \leq d_G(v_j, v_i) + d_G(v_i, v_{j'}) \leq 2$

para cada $1 \leq j, j' \leq r$ y concluimos $\text{diam } V(G) \leq 2$. Ya que $\text{diam } V(G') \geq 2$, existe $1 \leq j_1, j_2 \leq r$ con $d_{G'}(v_{j_1}, v_{j_2}) \geq 2$. Así $d_G(v_{j_1}, v_{j_2}) = d_G(v_{j_1}, v_i) + d_G(v_i, v_{j_2}) = 2$, y así $\text{diam } V(G) = 2$.

Finalmente, ya que $v_j v_i \in E(G)$ para cada $1 \leq j \leq r$ con $j \neq i$, tenemos $\overline{G} = \{v_i\} \cup \overline{G'}$ y

$$\delta(\overline{G}) = \max\{\delta(\{v_i\}), \delta(\overline{G'})\} = \max\{0, \delta(\overline{G'})\} = \delta(\overline{G'}).$$

□

[68, Teorema 30] tiene la siguiente consecuencia.

Teorema 3.2.16. *Si G es una gráfica con aristas de longitud 1 y n vértices, entonces $\delta(G) \leq n/4$.*

Decimos que una subgráfica Γ de G es *isométrica* si $d_\Gamma(x, y) = d_G(x, y)$ para cada $x, y \in \Gamma$.

Necesitamos el siguiente resultado (ver [81, Lemma 5]).

Lema 3.2.17. *Si Γ es una subgráfica isométrica de G , entonces $\delta(\Gamma) \leq \delta(G)$.*

El siguiente teorema es nuestro mejor resultado sobre el complemento de las gráficas intervalos.

Teorema 3.2.18. *Sea G una gráfica intervalo con aristas de longitud 1.*

- Si $\text{diam } V(G) = 1$, entonces $\delta(\overline{G}) = 0$.
- Si $2 \leq \text{diam } V(G) \leq 3$, entonces $0 \leq \delta(\overline{G}) \leq 2$.
- Si $\text{diam } V(G) \geq 4$, entonces $5/4 \leq \delta(\overline{G}) \leq 3/2$.

Además, los límites $\delta(\overline{G})$ son óptimos.

Demostración. Si $\text{diam } V(G) = 1$, entonces G es una gráfica completa. Así \overline{G} es una unión de vértices aislados $\delta(\overline{G}) = 0$.

Probemos ahora los límites superiores.

Es bien sabido que si $\text{diam } V(G) \geq 3$, entonces \overline{G} es conexo y $\text{diam } V(\overline{G}) \leq 3$. Por lo tanto, por el Corolario 3.1.4 tenemos $\delta(\overline{G}) \leq 2$.

Si $\text{diam } V(G) \geq 4$, entonces por [55, Teorema 2.14] da $\delta(\overline{G}) \leq 3/2$.

Suponemos ahora que $\text{diam } V(G) = 2$. Por el Lema 3.2.15, existe una gráfica intervalo G' con $|V(G')| = |V(G)| - 1$, $\text{diam } V(G') \geq 2$ y $\delta(\overline{G}) = \delta(\overline{G'})$. Definamos inductivamente una secuencia finita de gráficas intervalos $\{G^{(0)}, G^{(1)}, G^{(2)}, \dots, G^{(k)}\}$ con

$$\delta(\overline{G^{(0)}}) = \delta(\overline{G^{(1)}}) = \delta(\overline{G^{(2)}}) = \dots = \delta(\overline{G^{(k)}}),$$

$$|V(G^{(j)})| = |V(G^{(j-1)})| - 1, \quad \text{para } 0 < j \leq k,$$

$$\text{diam } V(G^{(j)}) \geq 2, \quad \text{para } 0 \leq j \leq k,$$

de la siguiente manera:

Si $j = 0$, entonces $G^{(0)} := G$. Si $j = 1$, entonces $G^{(1)} := G'$.

Supongamos que $j > 1$. Si $\text{diam } V(G^{(j-1)}) \geq 3$, entonces $k = j - 1$ y la secuencia se detiene. Si $\text{diam } V(G^{(j-1)}) = 2$, entonces el Lema 3.2.15 proporciona una gráfica intervalo $(G^{(j-1)})'$ con

$$|V((G^{(j-1)})')| = |V(G^{(j-1)})| - 1, \quad \text{diam } V((G^{(j-1)})') \geq 2, \quad \delta(\overline{G^{(j-1)}}) = \delta(\overline{(G^{(j-1)})'}),$$

y definimos $G^{(j)} := (G^{(j-1)})'$.

Ya que $|V(G^{(j)})| = |V(G^{(j-1)})| - 1$ para $0 < j \leq k$ y el diámetro de una gráfica con sólo un vértice es 0, esta secuencia debe terminar con alguna gráfica $G^{(k)}$ satisfaciendo $\text{diam } V(G^{(k)}) \geq 3$. Así,

$$\delta(\overline{G}) = \delta(\overline{G^{(0)}}) = \delta(\overline{G^{(1)}}) = \dots = \delta(\overline{G^{(k)}}) \leq 2.$$

Probaremos ahora que $\delta(\overline{G}) \geq 5/4$ si $\text{diam } V(G) \geq 4$. Fijemos cualquier gráfica G con $\text{diam } V(G) \geq 4$. Así, existe una geodésica $[v_0v_4] = v_0v_1 \cup v_1v_2 \cup v_2v_3 \cup v_3v_4$ en G . Si Γ es la subgráfica de \overline{G} inducida por $\{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$, entonces $E(\Gamma) = \{v_0v_2, v_0v_3, v_0v_4, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_4\}$. Considerando el ciclo $C := v_0v_2 \cup v_2v_4 \cup v_4v_1 \cup v_1v_3 \cup v_3v_0$ en Γ . Si p es el punto medio de v_0v_2 , entonces $d_\Gamma(v_1, p) = 5/2$ y así por el Corolario 3.2.12 tenemos $\delta(\Gamma) > 1$. Y por lo tanto por el Teorema 3.2.3 obtenemos $\delta(\Gamma) \geq 5/4$. Ya que Γ es una subgráfica isométrica de \overline{G} , por el Lema 3.2.17 se cumple $\delta(\overline{G}) \geq \delta(\Gamma) \geq 5/4$.

Mostraremos ahora que las cotas inferiores en $\delta(\overline{G})$ son óptimos. Recordando que la gráfica camino con n vértices P_n es una gráfica con $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $E(P_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$.

Consideremos la gráfica camino con 4 vértices $G = P_4$. Ya que $\overline{G} = P_4$, tenemos $\text{diam } V(G) = 3$ y $\delta(\overline{G}) = 0$.

Considerando la gráfica camino con 5 vértices $G = P_5$. Ya que $\text{diam } V(G) = 4$, tenemos $\delta(\overline{G}) \geq 5/4$. Observemos que \overline{G} tiene 5 vértices Y así por el Teorema 3.2.16 obtenemos $\delta(\overline{G}) \leq 5/4$. Por lo tanto, concluimos $\delta(\overline{G}) = 5/4$. \square

En 1956, Nordhaus y Gaddum dieron cotas inferiores y superiores para la suma y el producto del número cromático de una gráfica y su complemento (ver [72]). Desde entonces, se han propuesto relaciones de tipo similar para más invariantes. El Corolario 3.2.1 y el Teorema 3.2.18 proporcionan un par de resultados de este tipo.

Teorema 3.2.19. *Si G es una gráfica intervalo con aristas de longitud 1, entonces*

$$\delta(G) \delta(\overline{G}) \leq \begin{cases} 0 & \text{si } \text{diam } V(G) = 1, \\ 3 & \text{si } 2 \leq \text{diam } V(G) \leq 3, \\ 9/4 & \text{si } \text{diam } V(G) \geq 4. \end{cases}$$

Tenga en cuenta que no podemos mejorar el límite inferior trivial $\delta(G)\delta(\overline{G}) \geq 0$, puesto que se alcanza si G es un árbol.

Teorema 3.2.20. *Si G es una gráfica intervalo con aristas de longitud 1, entonces*

$$\delta(G) + \delta(\overline{G}) \leq \begin{cases} 3/2 & \text{si } \text{diam } V(G) = 1, \\ 7/2 & \text{si } 2 \leq \text{diam } V(G) \leq 3, \\ 3 & \text{si } \text{diam } V(G) \geq 4. \end{cases}$$

Además, $\delta(G) + \delta(\overline{G}) \geq 5/4$ para cada gráfica intervalo G con $\text{diam } V(G) \geq 4$.

Conclusiones

En este trabajo analizamos la constante de hiperbolicidad para algunas familias de Gráficas Geométricas, en particular, las Gráficas Intervalo; las cuales son gráficas de intersección de familias de intervalos en la recta real. En el capítulo 1, se explicó una breve introducción a los espacios hiperbólicos en el sentido de Gromov. Mencionamos varias definiciones sobre hiperbolicidad, posteriormente observamos que aunque a primera vista eran diferentes y no parecen tener relación alguna, en realidad son equivalentes. Además en los Teoremas 1.1.8, 1.1.10 y 1.1.12 se dan las relaciones siguientes:

Sea X un espacio métrico geodésico:

Con respecto a la **hiperbolicidad fine** (definición 1.1.5) tenemos:

- Si X es δ -hiperbólico, entonces es 4δ -fine.
- Si X es δ -fine, entonces es δ -hiperbólico.

Con respecto a la **hiperbolicidad del producto de Gromov** (definición 1.1.6) tenemos:

- Si X es δ -hiperbólico, entonces es 4δ -hiperbólico de Gromov.
- Si X es δ -hiperbólico de Gromov, entonces es 3δ -hiperbólico.

Con respecto a la **hiperbolicidad insize** (definición 1.1.9) tenemos:

- Si X es δ -hiperbólico, entonces es 4δ -insize.
- Si X es δ -insize, entonces es 2δ -hiperbólico.

Con respecto a la **hiperbolicidad minsize** (definición 1.1.11) tenemos:

- Si X es δ -hiperbólico, entonces es 4δ -minsize.
- Si X es δ -minsize, entonces es 8δ -hiperbólico.

En el capítulo 2, se expresan algunos resultados importantes dentro de la Teoría de Gráficas Hiperbólicas, en particular, se destaca el Teorema 3.1.7, en el cual se demuestra que para estudiar la constante de hiperbolicidad de una gráfica, basta considerar únicamente los triángulos cuyos vértices sean vértices y puntos medios de las aristas de dicha gráfica.

En la misma dirección, se relaciona la constante de la hiperbolicidad de una gráfica con algunos parámetros de la misma:

- $\delta(G) \leq \frac{1}{2} \text{diam } G$, Teorema 2.1.1.
- $\delta(G) \geq \frac{g(G)}{4}$, Teorema 2.1.2.
- $\delta(G) \leq \frac{1}{4}c(G)$, Teorema 2.1.3.
- $\delta(G) \leq \min \left\{ \beta(G), \frac{n-\beta(G)+2}{2} \right\}$, Teorema 2.1.4.
- $\delta(G) \leq \frac{3\gamma(G)}{2}$, Teorema 2.1.5.

En la sección 2.2 se estudian los valores exactos de la constante de hiperbolicidad para ciertas familias de gráficas. En la sección 2.3 se analiza la hiperbolicidad de las gráficas bajo la contracción de aristas.

En el capítulo 3 se trabaja con Gráficas Geométricas, en particular nos enfocamos en las Gráficas Intervalo. Entre los principales resultados obtenidos tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.1.7. Cada gráfica intervalo G con longitud apropiada satisface la desigualdad

$$\delta(G) \leq \frac{3}{2} \ell_0.$$

Donde: $\ell_0 := \sup\{L(e)|e \in E(G)\}$, siendo $L(e)$ la longitud de la arista e .

Con su respectiva consecuencia:

Corolario 3.1.8. Cada gráfica de indiferencia G satisface la desigualdad

$$\delta(G) \leq \frac{3}{2} \ell_0 \leq \frac{3}{2}.$$

Posteriormente se dan las definiciones de: **propiedad de intersección-(3/2)**, **propiedad de intersección-0**, **propiedad de intersección-(3/4)** y la **propiedad de intersección-1** con respectivos resultados acerca de estas propiedades, los cuales se resumen en el siguiente teorema:

Teorema 3.2.14: Cada gráfica intervalo G con aristas de longitud 1 es hiperbólica y $\delta(G) \in \{0, 3/4, 1, 5/4, 3/2\}$. Además,

- $\delta(G) = 0$ si y sólo si G tiene la propiedad de intersección-0.
- $\delta(G) = 3/4$ si y sólo si G tiene la propiedad de intersección-(3/4).
- $\delta(G) = 1$ si y sólo si G tiene la propiedad de intersección-1.
- $\delta(G) = 5/4$ si y sólo si G no tiene las propiedades de intersección: 0, 3/4, 1 y 3/2.

- $\delta(G) = 3/2$ si y sólo si G tiene la propiedad de intersección-(3/2).

Y finalmente se obtienen dos de resultados del tipo Nordhaus-Gaddum (Teoremas 3.2.19 y 3.2.20).

Si G es una gráfica intervalo con aristas de longitud 1, entonces

$$\delta(G) \delta(\overline{G}) \leq \begin{cases} 0 & \text{si } \text{diam } V(G) = 1, \\ 3 & \text{si } 2 \leq \text{diam } V(G) \leq 3, \\ 9/4 & \text{si } \text{diam } V(G) \geq 4. \end{cases}$$

$$\delta(G) + \delta(\overline{G}) \leq \begin{cases} 3/2 & \text{si } \text{diam } V(G) = 1, \\ 7/2 & \text{si } 2 \leq \text{diam } V(G) \leq 3, \\ 3 & \text{si } \text{diam } V(G) \geq 4. \end{cases}$$

Además, $\delta(G) + \delta(\overline{G}) \geq 5/4$ para cada gráfica intervalo G con $\text{diam } V(G) \geq 4$. Tenga en cuenta que no podemos mejorar el límite inferior, ya que $\delta(G)\delta(\overline{G}) = 0$ si G es un árbol.

Bibliografía

- [1] Abu-Ata, M., Dragan, F. F., Metric tree-like structures in real-life networks: an empirical study, *Networks* **67** (2016), 49-68.
- [2] Adcock, A. B., Sullivan, B. D. and Mahoney, M. W., Tree-like structure in large social and information networks, 13th Int Conference Data Mining (ICDM), IEEE, Dallas, Texas, USA, 2013, pp. 1-10.
- [3] Alonso, J., Brady, T., Cooper, D., Delzant, T., Ferlini, V., Lustig, M., Mihalik, M., Shapiro, M. and Short, H., Notes on word hyperbolic groups, in: E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky (Eds.), *Group Theory from a Geometrical Viewpoint*, World Scientific, Singapore, 1992.
- [4] Bandelt, H.-J. and Chepoi, V., 1-Hyperbolic Graphs, *SIAM J. Discrete Math.* **16** (2003), 323-334.
- [5] Bar-Noy, A., Bar-Yehuda, R., Freund, A., Naor, J., Schieber, B., A unified approach to approximating resource allocation and scheduling, *Journal of the ACM* **48** (5) (2001), 1069-1090.
- [6] Baryshnikov, Y., On the curvature of the internet, Workshop on Stochastic Geometry and Teletraffic, Eindhoven, The Netherland, April 2002.
- [7] Bermudo, S., Carballosa, W., Rodríguez, J. M. and Sigarreta, J. M., On the hyperbolicity of edge-chordal and path-chordal graphs, to appear in *FILOMAT*. Preprint in <http://gama.uc3m.es/index.php/jomaro.html>
- [8] Bermudo, S., Rodríguez J. M., Rosario, O. and Sigarreta, J. M., Small values of the hyperbolicity constant in graphs, *Discrete Mathematics* **339** (2016), 3073-3084.
- [9] Bermudo, S., Rodríguez, J. M. and Sigarreta, J. M., Computing the hyperbolicity constant, *Comput. Math. Appl.* **62** (2011), 4592-4595.
- [10] Bermudo, S., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M. and Tourís, E., Hyperbolicity and complement of graphs, *Appl. Math. Letters* **24** (2011), 1882-1887.
- [11] Bermudo, S., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M. and Vilaire, J.-M., Gromov hyperbolic graphs, *Discr. Math.* **313** (2013), 1575-1585.
- [12] Bertossi, A. A., Finding Hamiltonian circuits in proper interval graphs, *Inform. Process. Letters* **17** (1983), 97-101.

- [13] Birmelé, E., Bondy, J. A. and Reed, B. A., Tree-width of graphs without a 3×3 grid minor, *Discr. Appl. Math.* **157** (2009), 2577-2596.
- [14] Bodlaender, H.L., Thilikos, D.M., Treewidth for graphs with small chordality, *Discrete Applied Mathematics* **79** (1997), 45-61.
- [15] Boguñá, M., Papadopoulos, F. and Krioukov, D., Sustaining the Internet with Hyperbolic Mapping, *Nature Commun.* **1**(62) (2010), 18 p.
- [16] Bowditch, B. H., Notes on Gromov's hyperbolicity criterion for path-metric spaces in Group theory from a geometrical viewpoint, Trieste, 1990 (ed. E. Ghys, A. Haefliger and A. Verjovsky; World Scientific, River Edge, NJ, 1991) 64-167.
- [17] Brinkmann, G., Koolen J. and Moulton, V., On the hyperbolicity of chordal graphs, *Ann. Comb.* **5** (2001), 61-69.
- [18] Calegari, D. and Fujiwara, K., Counting subgraphs in hyperbolic graphs with symmetry, *J. Math. Soc. Japan* **67** (2015), 1213-1226.
- [19] Carballosa, W., Casablanca, R. M., de la Cruz, A. and Rodríguez, J. M., Gromov hyperbolicity in strong product graphs, *Electr. J. Comb.* **20**(3) (2013), # P2.
- [20] Carballosa, W., de la Cruz, A., Martínez-Pérez, A. and Rodríguez, J. M., Hyperbolicity of Direct products of graphs, submitted. Preprint in <http://gama.uc3m.es/index.php/jomaro.html>
- [21] Carballosa, W., de la Cruz, A. and Rodríguez, J. M., Characterization of the hyperbolicity in the lexicographic product, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* **46** (2014), 97-104.
- [22] Carballosa, W., de la Cruz, A. and Rodríguez, J. M., Gromov hyperbolicity in the Cartesian sum of graphs, submitted. Preprint in <http://gama.uc3m.es/index.php/jomaro.html>
- [23] Carballosa, W., Pestana, D., Rodríguez, J. M. and Sigarreta, J. M., Distortion of the hyperbolicity constant of a graph, *Electr. J. Comb.* **19** (2012), # P67.
- [24] Carballosa, W., Rodríguez J. M., Rosario, O. and Sigarreta, J. M., On the hyperbolicity constant in minor graphs. Submitted.
- [25] Carballosa, W., Rodríguez, J. M. and Sigarreta, J. M., Hyperbolicity in the corona and join graphs, to appear in *Aequat. Math.* Preprint in <http://link.springer.com/article/10.1007/s00010-014-0324-0>
- [26] Carballosa, W., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M. and Villeta, M., On the hyperbolicity constant of line graphs, *Electronic Journal of Combinatorics* **18** (2011), P210.
- [27] Chandran, L.S., Lozin, V.V. and Subramanian, C.R., Graphs of low chordality, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* **7** (2005), 25-36.
- [28] Chandran, L.S. and Ram, L.S., On the number of minimum cuts in a graph, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **18** (2004), 177-194.

- [29] Charney, R., Artin groups of finite type are biautomatic, *Math. Ann.* **292** (1992), 671-683.
- [30] Chen, W., Fang, W., Hu, G. and Mahoney, M. W., On the hyperbolicity of small-world and treelike random graphs, *Internet Math.* **9** (4) (2013), 434-491.
- [31] Chen, B., Yau, S.-T. and Yeh, Y.-N., Graph homotopy and Graham homotopy, *Discrete Math.* **241** (2001), 153-170.
- [32] Chepoi, V., Dragan, F. F., Estellon, B., Habib, M. and Vaxes Y., Notes on diameters, centers, and approximating trees of δ -hyperbolic geodesic spaces and graphs, *Electr. Notes Discr. Math.* **31** (2008), 231-234.
- [33] Chepoi, V. and Estellon, B., Packing and covering δ -hyperbolic spaces by balls, APPROX-RANDOM 2007 pp. 59-73.
- [34] Cohen, J. E., Food webs and niche space, Monographs in Population Biology 11, Princeton, NJ: Princeton University Press (1978).
- [35] Cohen, N., Coudert, D. and Lancin, A., Exact and approximate algorithms for computing the hyperbolicity of large-scale graphs. Rapport de recherche RR-8074, INRIA, September 2012.
- [36] Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L. and Stein, C., Introduction to Algorithms (2nd ed.). MIT Press and McGraw-Hill (2001).
- [37] Coudert, D. and Ducoffe, G., Recognition of C_4 -Free and $1/2$ -Hyperbolic Graphs, *SIAM J. Discrete Math.* **28** (2014), 1601-1617.
- [38] Coudert, D. and Ducoffe, G., On the hyperbolicity of bipartite graphs and intersection graphs. Research Report, INRIA Sophia Antipolis - Méditerranée; I3S; Université Nice Sophia Antipolis; CNRS. 2015, pp.12. <hal-01220132>
- [39] D. Der-Fen Liu and X. Zhu, Coloring the Cartesian Sum of Graphs, *Discr. Math.* **308** (2008), 5928-5936.
- [40] Eppstein, D., Squarepants in a tree: sum of subtree clustering and hyperbolic pants decomposition, SODA'2007, Proceedings of the eighteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms, pp. 29-38.
- [41] Diestel, R. and Müller, M., Connected tree-width, arXiv:1211.7353, 2015.
- [42] Fishburn, P. C., Interval orders and interval graphs: A study of partially ordered sets, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics, New York: John Wiley and Sons (1985).
- [43] Fournier, H., Ismail, A. and Vigneron, A., Computing the Gromov hyperbolicity of a discrete metric space, *J. Inform. Proc. Letters* **115** (2015), 576-579.
- [44] Frigerio, R. and Sisto, A., Characterizing hyperbolic spaces and real trees, *Geom. Dedicata* **142** (2009), 139-149.

- [45] Gavoille, C. and Ly, O., Distance labeling in hyperbolic graphs, In ISAAC 2005, pp. 171-179.
- [46] Ghys, E. and de la Harpe, P., Sur les Groupes Hyperboliques d’après Mikhael Gromov. Progress in Mathematics 83, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990.
- [47] Gilmore, P. C., Hoffman, A. J., A characterization of comparability graphs and of interval graphs, *Can. J. Math.* **16** (1964), 539-548.
- [48] Golumbic, M. C., Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs, Academic Press (1980).
- [49] Golumbic, M. C., Shamir, R., Complexity and algorithms for reasoning about time: a graph-theoretic approach, *J. Assoc. Comput. Mach.* **40** (1993), 1108-1133.
- [50] Grigoriev, A., Marchal, B. and Usotskaya, N., On planar graphs with large tree-width and small grid minors, *Electr. Notes Discr. Math.* **32** (2009), 35-42.
- [51] Gromov, M., Hyperbolic groups, in “Essays in group theory”. Edited by S. M. Gersten, M. S. R. I. Publ. **8**. Springer, 1987, 75-263.
- [52] Gromov, M. (with appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes), Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces. Progress in Mathematics, vol. 152. Birkhäuser, 1999.
- [53] Hamann, M., On the tree-likeness of hyperbolic spaces, arXiv:1105.3925, 2011.
- [54] Hammack, R., Imrich, W. and Klavžar, S., Handbook of product graphs, 2nd ed., Discrete Mathematics and its Applications Series, CRC Press, 2011.
- [55] Hernández, J. C., Rodríguez, J. M. and Sigarreta, J. M., On the hyperbolicity constant of circulant networks, *Advances in Mathematical Physics* **ID 723451** (2015), 1-11.
- [56] Imrich, W. and Klavžar, S., Product Graphs: Structure and Recognition, *Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization*, 2000.
- [57] Jonckheere, E. and Lohsoonthorn, P., A hyperbolic geometry approach to multipath routing, Proceedings of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2002), Lisbon, Portugal, July 2002. FA5-1.
- [58] Jonckheere, E. A., Contrôle du trafic sur les réseaux à géométrie hyperbolique—Vers une théorie géométrique de la sécurité l’acheminement de l’information, *J. Europ. Syst. Autom.* **8** (2002), 45-60.
- [59] Jonckheere, E. A. and Lohsoonthorn, P., Geometry of network security, *Amer. Control Conf. ACC* (2004), 111-151.
- [60] Jürgen, E., Extremal interval graphs, *J. Graph Theory* **17** (1993), 117-127.
- [61] Koolen, J. H. and Moulton, V., Hyperbolic Bridged Graphs, *Europ. J. Comb.* **23** (2002), 683-699.
- [62] Krauthgamer, R. and Lee, J. R., Algorithms on negatively curved spaces, FOCS 2006.

- [63] Krioukov, D., Papadopoulos, F., Kitsak, M., Vahdat, A. and Boguñá, M., Hyperbolic geometry of complex networks, *Physical Review E* **82**, 036106 (2010).
- [64] Kuratowski, K., Sur le problème des courbes gauches en topologie, *Fund. Math.* (in French) **15** (1930), 271-283.
- [65] Li, S. and Tucci, G. H., Traffic Congestion in Expanders, (p, δ) -Hyperbolic Spaces and Product of Trees, 2013, arXiv:1303.2952 [math.CO].
- [66] Martínez-Pérez, A., Chordality properties and hyperbolicity on graphs. Submitted.
- [67] Meijer, P. T., Connectivities and diameters of circulant graphs. Thesis, Department of Mathematics and Statistics, Simon Fraser University, 1991.
- [68] Michel, J., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M. and Villeta, M., Hyperbolicity and parameters of graphs, *Ars Comb.* **100** (2011), 43-63.
- [69] Michel, J., Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M. and Villeta, M., Gromov hyperbolicity in cartesian product graphs, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* **120** (2010), 1-17.
- [70] Montgolfier, F., Soto, M. and Viennot, L., Treewidth and Hyperbolicity of the Internet, In: 10th IEEE International Symposium on Network Computing and Applications (NCA), 2011, pp. 25?32.
- [71] Narayan, O. and Sanjeev, I., Large-scale curvature of networks, *Physical Review E* **84**, 066108 (2011).
- [72] Nordhaus, E. A. and Gaddum, J., On complementary graphs, *Amer. Math. Monthly* **63** (1956), 175-177.
- [73] Oshika, K., Discrete groups, AMS Bookstore, 2002.
- [74] Panda, B. S., Das, S. K., A linear time recognition algorithm for proper interval graphs, *Inform. Process. Letters* **87** (2003), 153-161.
- [75] Papasoglu, P., An algorithm detecting hyperbolicity, in Geometric and computational perspectives on infinite groups, DIMACS - Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science Volume 25, AMS, 1996, pp.193-200.
- [76] Portilla, A. and Tourís, E., A characterization of Gromov hyperbolicity of surfaces with variable negative curvature, *Publ. Mat.* **53** (2009), 83-110.
- [77] Robertson, N. and Seymour, P. D., Graph minors. III. Planar tree-width, *J. Comb. Theory, Series B* **36** (1984), 49-64.
- [78] Robertson, N. and Seymour, P. D., Graph minors. X. Obstructions to Tree-Decomposition, *J. Comb. Theory, Series B* **52** (1991), 153-190.
- [79] Rodríguez, J. M. and Sigarreta, J. M., Bounds on Gromov hyperbolicity constant in graphs, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* **122** (2012), 53-65.

- [80] Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M. and Villeta, M., Gromov hyperbolicity and line graphs. Submitted.
- [81] Rodríguez, J. M., Sigarreta, J. M., Vilaire, J.-M. and Villeta, M., On the hyperbolicity constant in graphs, *Discr. Math.* **311** (2011), 211-219.
- [82] Rodríguez, J. M. and Tourís, E., Gromov hyperbolicity through decomposition of metric spaces, *Acta Math. Hung.* **103** (2004), 53-84.
- [83] Sabidussi, G., Graph multiplication, *Math. Z.* **72** (1960), 446-457.
- [84] Shang, Y., Lack of Gromov-hyperbolicity in colored random networks, *Pan-American Math. J.* **21**(1) (2011), 27-36.
- [85] Shang, Y., Lack of Gromov-hyperbolicity in small-world networks, *Cent. Eur. J. Math.* **10**(3) (2012), 1152-1158.
- [86] Shang, Y., Non-hyperbolicity of random graphs with given expected degrees, *Stoch. Models* **29**(4) (2013), 451-462.
- [87] Shavitt, Y. and Tankel, T., On internet embedding in hyperbolic spaces for overlay construction and distance estimation, INFOCOM 2004.
- [88] Tourís, E., Graphs and Gromov hyperbolicity of non-constant negatively curved surfaces, *J. Math. Anal. Appl.* **380** (2011), 865-881.
- [89] Verbeek, K. and Suri, S., Metric embeddings, hyperbolic space and social networks. In Proceedings of the 30th Annual Symposium on Computational Geometry, pp. 501-510, 2014.
- [90] Von Rimscha, M., Reconstructibility and perfect graphs, *Discr. Math.* **47** (1983), 283-291.
- [91] Wagner, K., Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe, *Math. Ann.* **114** (1937), 570-590.
- [92] Wang, C., Jonckheere, E. and Brun, T., Ollivier-Ricci curvature and fast approximation to tree-width in embeddability of QUBO problems, Proceedings of 6th International Symposium on Communications, Control, and Signal Processing (ISCCSP 2014).
- [93] Wu, Y. and Zhang, C., Chordality and hyperbolicity of a graph, *Electr. J. Comb.* **18** (2011), # P43.
- [94] Zhang, P., Schon, E. A., Fischer, S. G., Cayanis, E., Weiss, J., Kistler, S., Bourne, P. E., An algorithm based on graph theory for the assembly of contigs in physical mapping of DNA, *Bioinformatics* **10** (3) (1994), 309-317.