UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

RAZONAMIENTO INDUCTIVO EN PROFESORES DE MATEMÁTICAS AL RESOLVER TAREAS DE GENERALIZACIÓN CON SUCESIONES CUADRÁTICAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS ÁREA: MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA:

KARINA PATRICIA NUÑEZ GUTIERREZ

Directora de tesis:

DRA. MARÍA GUADALUPE CABAÑAS SÁNCHEZ

Chilpancingo, Guerrero Julio de 2018

Razonamiento inductivo en profesores de matemáticas al resolver tareas de generalización con sucesiones cuadráticas

Tesis de Maestría

Karina Patricia Nuñez Gutierrez

Directora de tesis
Dra. María Guadalupe Cabañas Sánchez

Comité evaluador:
Dr. Armando Morales Carballo
Mtra. Landy Sosa Moguel

2018
Centro de Investigación en Matemática Educativa
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero
Chilpancingo, Guerrero, México

Esta investigación fue financiada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Becaria Conacyt
602991

A mis padres, Marco y Ceneris, su apoyo fue incondicional
para que esto fuese posible
A mis hermanos y sobrinos, a quienes amo mucho
A Luz Divina,
estás en nuestros corazones

Agradecimientos

Al culminar esta etapa quiero demostrar mi gratitud a todos quienes me brindaron su apoyo en este proceso de crecimiento como persona, que representa el fruto de esfuerzo y dedicación.

A Dios, quien me ha dotado de sabiduría y fortaleza en este camino de aprendizaje, por su gracia y bondad, permitió que este sueño fuera real y escalar un peldaño más en el ámbito profesional.

A mi familia, quienes son promotores y espectadores de lo que ocurre en mi vida. Su apoyo incondicional a lo largo de mi carrera ha sido de vital importancia. ¡Este logro es para ustedes!

A Mayra, Romario, Jhonatan, Camilo y Gustavo, compañeros de estudio, de convivencia y de viajes. Gracias por cada momento compartido, su amistad y compañía brindada durante este tiempo lejos de casa.

A la Universidad Autónoma de Guerrero, por brindarme la oportunidad de formarme en el campo de la investigación. Por el apoyo brindado en la participación externa en diversos eventos y, la realización de estancias académicas a nivel nacional e internacional.

A la Doctora Guadalupe Cabañas por su dedicación, compromiso, respaldo y orientación en la elaboración de este trabajo de investigación. Cada sesión fue importante para mi aprendizaje y que el trabajo, evolucionara hasta alcanzar los resultados esperados.

A la Doctora María Cañadas, por recibirme amablemente durante el período de la estancia académica en la Universidad de Granada, sus conocimientos y experiencia aportaron significativamente en este trabajo.

A los profesores de Alpoyeca quienes participaron en esta investigación. Su colaboración y disposición en el trascurso de la aplicación, contribuyeron para avanzar y fortalecer el estudio.

A los sinodales, sus aportes fueron importantes para fortalecer el trabajo. Agradezco por su tiempo dedicado a la lectura de este trabajo de investigación.

¡Muchas gracias!

Tabla de contenido

Lista de Figuras

Lista de Esquemas

Lista de Tablas

Introducción

El razonamiento inductivo es un proceso cognitivo que inicia con el estudio de ejemplos específicos, para establecer reglas o leyes generales (Pólya, 1965; Castro, Cañadas & Molina, 2010). Su importancia en la enseñanza de las matemáticas, radica en que permite el descubrimiento de propiedades de fenómenos y reconocimiento de regularidades de manera lógica (Pólya, 1994), que implica la identificación de patrones, formulación de conjeturas y generalización (Castro, Cañadas & Castro, 2010). Este último componente, permite que el razonamiento inductivo sea un medio potente e imprescindible para nuevos conocimientos matemáticos.

El interés de la investigación se centra en identificar y describir el trabajo de aquellos profesores de matemáticas de secundaria, que evidencian el razonamiento inductivo en la resolución de tareas, que refieren a la generalización de patrones figurales en el marco de sucesiones cuadráticas. El estudio se sustenta teóricamente en el modelo del razonamiento inductivo propuesto por Cañadas y Castro (2007).

Para el cumplimiento del objetivo de la investigación, se adaptaron dos tareas que refieren a la generalización de sucesiones cuadráticas (Kirwan, 2017; Rivera, 2013). La adaptación consistió en considerar el contexto de los patrones figurales, inicialmente propuestos por los estudios, para formular preguntas propias y evidenciar el razonamiento inductivo de los participantes. Estos fueron dieciséis profesores de matemáticas de secundaria en México, con experiencia en la enseñanza de las matemáticas en primero, segundo y tercer grado. Su participación en el estudio se dio a partir de talleres, que el grupo de investigación ha desarrollado para esta población en el marco del razonamiento inductivo.

La exploración con los profesores de secundaria, evidenció la trayectoria de los pasos del razonamiento inductivo. Se identificaron diferentes formas de proceder al resolver las tareas en el contexto de la generalización de patrones figurales, en ese proceso recurrieron a más de un sistema de representación. Los resultados evidencian que una mayoría de profesores trabajó con casos particulares, identificaron el patrón, formulan conjeturas y generalizaron. Hay una relación entre los profesores que identifica el patrón con los que llegan a la formulación de la conjetura, pocos justifican la conjetura que proponen y ninguno realiza una demostración de la generalización que estableció.

Esta memoria se estructura en seis capítulos. El primero presenta el problema de investigación, que rinde cuenta de la importancia y justificación del estudio por el razonamiento inductivo en profesores de secundaria.

El segundo capítulo se constituye de los elementos teóricos que sustentan la investigación. Se describe el modelo teórico del razonamiento inductivo (Cañadas & Castro, 2007) y en los sistemas de representación (Lupiáñez, 2016).

El tercer capítulo documenta el contenido matemático, sucesiones cuadráticas, objeto de estudio en esta investigación. Su estudio, se apoyó del análisis de contenido matemático escolar (Rico & Moreno, 2016), que se categoriza en tres organizadores curriculares.

El cuarto capítulo presenta los aspectos del marco metodológico tenidos en cuenta para la investigación. Esto incluye la descripción de los participantes, la prueba piloto realizada, el rediseño de las tareas, el proceso de recolección de la información y las categorías consideradas para el análisis.

El quinto capítulo comprende el análisis de los datos. Se describen los hallazgos del razonamiento inductivo en los profesores por tarea y la caracterización del razonamiento inductivo por profesor. Además, se identifican y describen los sistemas de representación utilizados por los profesores como también los procesamientos y conversiones que realizaron.

El sexto capítulo recopila los resultados del estudio y se reflexiona sobre algunas limitaciones del estudio y sobre futuras investigaciones.

Capítulo 1
Planteamiento del problema y antecedentes

El razonamiento matemático es una capacidad asociada al pensamiento, que contribuye en el aprendizaje de las matemáticas (Conner, Singletary, Smith, Wagner, & Francisco, 2014) y en el desarrollo de competencias demandadas por el currículo escolar (Cañadas & Castro, 2003). Si el razonamiento no es desarrollado, entonces las matemáticas se convierten en una cuestión de seguir un conjunto de procedimientos e imitar ejemplos sin reflexionar acerca de por qué tienen sentido (e.g, Lithner, 2000; Ball & Bass, 2003). En el campo de la Matemática Educativa, diversas investigaciones se han interesado por el estudio del razonamiento matemático, otros se han centrado en los diferentes tipos, como el inductivo, deductivo, abductivo, por analogía, el transformacional, covarional, entre otros (e.g, Michal & Ruhama, 2008; Fann, 1970; Simon, 1996; Carlson, Jacob, Coe , Larsen , & Hsu, 2002). En particular, esta investigación se centra en el estudio del razonamiento inductivo.

La inducción juega un papel importante en diferentes áreas científicas, es utilizada en todas las ciencias, incluyendo las matemáticas. Pólya (1994) afirma que "es un modo de razonar que conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de ejemplos particulares y de sus combinaciones" (p.114). El razonamiento inductivo es considerado como un camino importante que conduce al conocimiento matemático, propiciado mediante la construcción inductiva y empírica del conocimiento, para luego llegar a su formalización y estructuración (Cañadas y Castro, 2003). Pólya (1994) resalta su uso en la enseñanza, como un método para descubrir propiedades de fenómenos y reconocer regularidades de manera lógica. Para Castro, Cañadas y Molina (2010) el razonamiento inductivo es un proceso que implica la identificación de patrones, formulación de conjeturas y generalización. Este último componente, permite que este razonamiento sea un medio potente e imprescindible para nuevos conocimientos matemáticos.

La generalización es de gran importancia en diferentes ámbitos, Dörfler (1991) señala que su relevancia radica en la vida cotidiana y en el pensamiento científico y, es tanto objeto como medio de pensamiento y comunicación. En las matemáticas, esta adopta diferentes formas específicas y hace uso de medios especiales. Estas formas y variedades, así como los medios de generalizar, son objeto de las reflexiones posteriores. Desde este punto de vista, la generalización es un proceso cognitivo que conduce a *algo general* y su producto es una forma existente o posible de agrupar. Mason (1996) afirma que "la generalización es el latido de las matemáticas" y que en la enseñanza, los estudiantes deberían ser conscientes en: *ver lo particular en lo general* y *ver lo general* a través de *lo particular*. Tomando conciencia de cómo una multitud de detalles pueden ser subsumidos bajo una generalidad. Estas apreciaciones están íntimamente relacionadas con el razonamiento inductivo en matemáticas, conectado con el hallazgo de patrones y relaciones entre números y figuras (Neubert & Binko, 1992; Murawska & Zollman, 2015).

1.1 Razonamiento inductivo en los estudiantes

La revisión a la literatura, evidencia que la investigación sobre razonamiento inductivo con estudiantes, se orientan en dos direcciones, aquellas que exploran este tipo de razonamiento sin intervención previa, otras, que se enfocan en desarrollarlo.

En el marco de los estudios de tipo exploratorio, Cañadas (2007) describió y caracterizó el razonamiento inductivo de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en España, al resolver problemas que podían modelarse mediante una progresión aritmética de números naturales cuyo orden era 1 o 2. En relación con los pasos que siguieron los estudiantes del modelo de razonamiento considerado, siguen una tendencia general de actuación en el trabajo con casos particulares y el uso de estrategias inductivas.

Por su parte, Cañadas y Figueiras (2011) exploraron el razonamiento inductivo y las representaciones en la resolución de problemas de combinatoria en educación primaria, en el marco de la inducción y la generalización. Los estudiantes que generalizaron empíricamente, evidenciaron el uso de representaciones aritméticas, algebraicas, textuales y sintéticas –aritmético y textual- y se asevera que la inducción, facilitó la construcción de un diagrama de árbol efectivo, en tanto que representaba el crecimiento *n* dimensional y el número de elementos que intervienen en cada factor.

Por cuanto a las investigaciones enfocadas a desarrollarlo, manifiestan la potencialidad del razonamiento y cómo se evidencia en los estudiantes. En Educación Infantil, Salgado y Salinas (2012) desarrollan el razonamiento inductivo en niños a través del significado de número, por medio de un modelo que propusieron, cuyas etapas son las siguientes: *trabajar con casos concretos, sencillos y observables, identificar patrones, que ayuden a ver las regularidades, formular conjeturas, justificar conjeturas y demostrar*.

Murawska y Zollman (2015) promovieron el desarrollo del razonamiento inductivo en estudiantes de secundaria, con base en el modelo pedagógico *inquirim continum*. Este modelo se sustenta de cuatro niveles de preguntas: de confirmación, estructurada, guiada, y abierta. El contexto, fue la resolución de problemas y el uso de múltiples representaciones. Los resultados de su estudio evidencian que el modelo es una guía útil en el diseño de tareas exitosas, así también, que es un modelo útil para que los maestros de la escuela intermedia profundicen la comprensión matemática de los estudiantes de combinar el desarrollo conceptual y procedimental.

El razonamiento inductivo manifiesto por los estudiantes en estos estudios, reflejan que su proceso cognitivo consiste mayoritariamente, en el trabajo con casos particulares y la formulación de conjeturas. Quienes no generalizan, es debido a que no validan las conjeturas que formulan, con nuevos casos particulares. Al respecto, Cañadas (2007) sostiene, que se debe en parte, a que se apoyan solamente en su capacidad empírica.

La investigación ha documentado que si se desarrolla este tipo de razonamiento (e.g., Barkl, Porter & Ginns, 2012; Christou & Papageorgiou, 2007) se puede favorecer el que los estudiantes resuelvan problemas sobre generalización. Además de ser un proceso cognitivo, este tipo de razonamiento potencializa el desarrollo de otros razonamientos.

1.1.1 Acciones que se relacionan con el razonamiento inductivo

Las acciones del razonamiento inductivo implican la identificación de patrones, establecimiento de conjeturas y generalización (Cañadas & Castro, 2003). Varias investigaciones (Rivera & Becker, 2010; Rivera, 2013; Stacey, 1989) se han ocupado de estudiar estos aspectos en los estudiantes, en el ámbito de la generalización.

Identificación de Patrones figurales

Uno de los caminos para estudiar el razonamiento inductivo en los estudiantes es mediante el análisis de patrones, que sirven como contexto para explorar la generalización.

Rivera y Becker (2010) estudian la generalización de patrones figurales lineales y cuadráticos en estudiantes de Secundaria. En este proceso, reconocen a la abducción y la inducción. Documentan que en la fase abductiva los estudiantes plantean hipótesis sobre el comportamiento del patrón en las diferentes etapas. En la fase inductiva, los estudiantes confirman repetidamente su hipótesis y determinan una regla general. De igual modo, el proceso inductivo les permitió analizar la naturaleza y distribución de los patrones figurales. Evidencian que mediante este tipo de patrones, se favorece la visualización, la unidad estructural del patrón y el razonamiento por analogía.

En Walkowiak (2014) se comparan formas de razonar en estudiantes de primaria y secundaria a través de patrones de crecimiento pictórico. Identifican formas distintas de razonar. En los de primaria, su razonamiento se apoya del comportamiento pictórico al analizar los patrones, mientras que los de secundaria, analizan estas regularidades por medio de lo numérico, para establecer la generalización. Se reconoce como una necesidad, el incorporar el análisis de los patrones de crecimiento pictórico en las matemáticas de primaria y secundaria por el potencial que ofrecen en promover el uso del razonamiento basado en lo figural y numérico, además, el desarrollo del pensamiento matemático y generalización sobre relaciones.

Estos estudios enfocados en el proceso de la generalización de patrones y en las formas de razonar del estudiante al resolver tareas en este contexto, reconocen que el patrón figural facilita a los estudiantes para reconocer las regularidades por medio de la visualización y construir reglas generales que representen la generalización (e.g. Rivera, 2010; Amit & Neria, 2008).

Estrategias

Las tareas del razonamiento inductivo en el contexto de la generalización de patrones numéricos y figurales, evidencian las diferentes formas de proceder del individuo, del cómo es la ruta que siguen para construir la generalización y de qué manera reconocen el patrón.

En este contexto, se ha enfatizado en el análisis de las estrategias que construyen, así como de los enfoques de razonamiento en la generalización de patrones (e.g, Stacey, 1989; Becker & Rivera, 2005; Jurdak & Mouhayar, 2014; Mouhayar & Jurdak, 2016).

En el estudio de Jurdak y Mouhayar (2014) se explora el razonamiento de los estudiantes de diferentes grados escolares de primaria y secundiaria sustentados de la taxonomia *solo*, en el contexto de la generalización de patrones. Se exploró en dos direcciones. La primera, enfocada al análisis de las estrategias usadas por los estudiantes, y la segunda, en el nivel en que se ubica la generalización, que inicia en el nivel concreto hasta la generalización simbólica. Evidencian que el desarrollo del razonamiento en la generalización de patrones se debe principalmente a la experiencia de los estudiantes con el tratamiento de este proceso y el uso de estrategias. Mouhayar y Jurdak (2016) por su parte, se sustentan del análisis de estrategias, para estudiar cómo se percibe por estudiantes de diferentes grados escolares, el razonamiento numérico y figurativo, en el contexto de la generalización de patrones. Las estrategias a las que recurren con mayor frecuencia son: conteo, recursiva, fragmentación, funcional y objeto completo (*véase Tabla 1*).

Tabla 1. *Estrategias del estudiante dentro de los enfoques numéricos y figurativos en generalización de patrones*

Estrategia	Enfoque del Razonamiento numérico	Enfoque del razonamiento figural
Conteo de una figura construida	Construye una figura de una manera incorrecta que no sigue el crecimiento del patrón y luego cuenta sus elementos	Construye una figura de una manera estructurada siguiendo el crecimiento del patrón y luego cuenta sus elementos.
Recursiva	Reconoce un patrón numérico al encontrar la diferencia entre los términos consecutivos y luego lo agrega a un valor numérico en un paso dado para alcanzar el siguiente paso.	Reconoce el crecimiento estructural del patrón entre pasos figurativos consecutivos y luego agrega el valor del crecimiento a un término dado para alcanzar el siguiente paso figurativo.
Objeto completo	Multiplica el valor de un paso para encontrar el valor numérico de otro paso suponiendo que $f(na) = n \times f(a)$ tal que $f(a)$ es el valor numérico del paso a en el patrón.	Multiplica partes del patrón en el paso a por un número n tal que $n \times a$ es el número de paso de figura requerido.
Fragmentación	Identifica una diferencia constante entre pares de pasos consecutivos del patrón. Utiliza esta diferencia para multiplicarla por el número de pasos necesarios para alcanzar el paso requerido en el patrón.	Distingue el crecimiento estructural del patrón entre pasos figurativos consecutivos, cuenta el número de pasos necesarios para alcanzar el paso figurado requerido en el patrón, multiplica el número de pasos necesarios con la diferencia constante entre pasos figurativos consecutivos y luego agrega el resultado a la figura paso figurativo a 5 + 4 (en la fila inferior).
Funcional	Reconoce una regla basada en el patrón numérico	Identifica los componentes en crecimiento del patrón así como los componentes constantes y los relaciona entre sí y con el número de paso figurativo.

Estos resultados revelan que el análisis de patrones es subjetivo y que el mismo patrón puede ser reconocido de maneras diferentes por los estudiantes (Mouhayar & Jurdak, 2016).

Estas formas de reconocer la regularidad en patrones lineales y no lineales, indican que el razonamiento del estudiante para las tareas lineales, es más evidente que en tareas no lineales; esto se muestra en el mayor uso de estrategias en las tareas. Una explicación plausible es que la tarea lineal es menos compleja que la tarea cuadrática, ya que el crecimiento entre los pasos figurales consecutivos es constante, mientras que el crecimiento en el último varía (Jurdak & Mouhayar, 2014).

1.2 Modelos teóricos del razonamiento Inductivo

La investigación sobre razonamiento inductivo también se ha centrado en el desarrollo de marcos teóricos (e.g Reid, 2002; Cañadas & Castro, 2007; Klauer & Phye, 2008, Rivera, 2013) que han permitido estudiarlo y promoverlo, principalmente con estudiantes, en diferentes niveles educativos.

En el campo de la psicología, Klauer y Phye (2008) desarrollan un modelo teórico, como teoría prescriptiva, con incidencias en el campo de la educación, a partir de experimentos con niños de primaria. Conciben al razonamiento inductivo como aquel que apunta a detectar generalizaciones, reglas, regularidades e irregularidades. Su modelo teórico contiene una clasificación exhaustiva de las tareas del razonamiento inductivo, que son procesos específicos que se siguen al resolverlas: generalización, discriminación, clasificación cruzada, reconocer y diferenciar relaciones, construcción de sistema *(véase figura 1).*

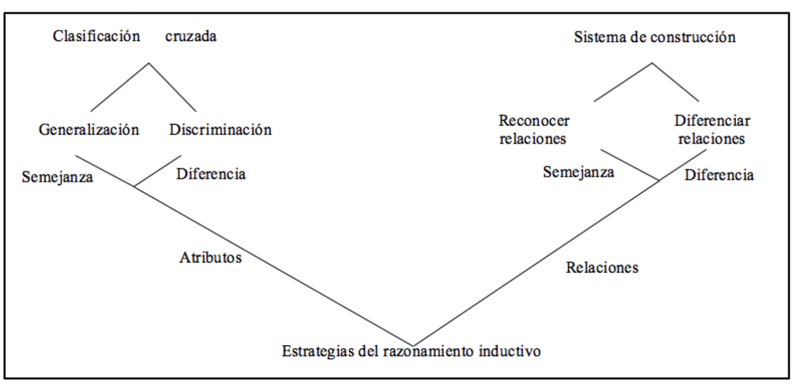


Figura 1. *Genealogía del Razonamiento Inductivo. Tomada de (Klauer & Phye 2008, p. 87)*

Los estudios longitudinales de Rivera (2013) por su parte, indagan acerca de la generalización de patrones, con estudiantes de diferentes edades. En ese contexto, ha evidenciado el tipo de estructuras matemáticas que construyen, modos de representación, de comprensión, tipos y fuentes de generalización, y de la atención o conciencia de la generalización. Con base en ello, propone un modelo de la generalización de patrones graduales, como marco organizativo para una síntesis de los estudios sobre generalización de patrones, que involucra el razonamiento inductivo con el abductivo y el deductivo, como procesos inferenciales cognitivos (*véase figura 2*).

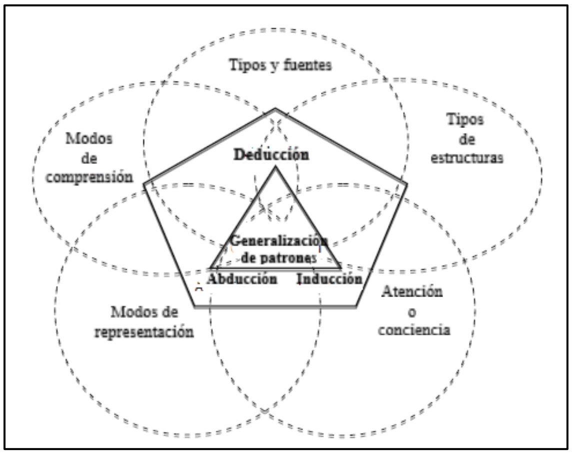


Figura 2. Marco organizativo para una síntesis de los estudios sobre generalización de patrones (Rivera, 2013, pág.59)

Otra propuesta para el razonamiento inductivo, es el modelo teórico de Reid (2002) y Cañadas (2007) quienes consideraron los pasos propuestos por Pólya (1968). En el caso de Reid (2002) estudió el razonamiento matemático y cómo éste se evidencia en los contextos escolares. Esto se denota, en el patrón del razonamiento de los estudiantes de quinto grado al resolver una actividad matemática, que permitió establecer un modelo teórico a partir de las acciones de los estudiantes:

- Observación del patrón.
- Formulación de una conjetura como regla general
- Evaluación de la conjetura.
- Generalización de la conjetura.
- Utilización de la generalización como base para deducciones simples (prueba)

Cañadas y Castro (2007) propusieron una modelo teórico del razonamiento inductivo en un contexto en particular, basado en modelos teóricos previos (Pólya, 1966; Reid, 2002; Cañadas, 2002). Esta categorización consta de siete etapas o pasos, que permite describir este razonamiento:

- Trabajo con casos particulares.
- Organización de los casos particulares.
- Identificación de patrones.
- Formulación de conjeturas.
- Justificación de conjeturas.
- Generalización.
- Demostración.

Este modelo teórico ha sido utilizado en otras investigaciones, que consideraron algunos elementos teóricos entre ellos la conjetura y la generalización y, es vinculado con otros enfoques que depende del objetivo de los estudios (e.g., Sutarto, Nusantara, Subanji, & Sisworo 2016; Ni'mah, Purwanto, Irawan, & Hidayanto 2017).

Sutarto y colaboradores (2016) por ejemplo, describen el proceso de conjetura local en la generalización de patrones, desde la perspectiva teórica Acción, Proceso, Objeto y Esquema (APOE) y en el modelo teórico de Cañadas y Castro (2007). Reconocen como parte de la *acción*, a la observación y organización de los casos particulares; Por cuanto al *proceso*, a encontrar y predecir el patrón; en el *objeto,* a la formulación de la conjetura y en el *esquema*, a la generalización de la conjetura. Ni'mah, Purwanto, Irawan y Hidayanto (2017) por su parte, se basan en la investigación de Mulligan y colaboradores (2012) y de Cañadas y Castro (2007), para proponer una etapa de desarrollo cinco-estructural: a saber, preestructural, emergente, parcial, estructural y avance.

1.3 Razonamiento inductivo en los profesores

Las investigaciones sobre razonamiento inductivo que refieren al profesor de matemática, se ubican tanto en los que están en su etapa de formación como en servicio. Algunas son de tipo exploratorio (e.g., Rivera & Becker, 2003; Kolar, Mastnak, & Hodnik, 2012), otras, propuestas de enseñanza para desarrollarlo (e.g., Barrera, Castro, & Cañadas, 2009). Otras investigaciones se interesan por lo que hace el profesor de matemáticas en servicio, en aspectos específicos del razonamiento inductivo como la conjetura, la generalización y la justificación (e.g., Mouhayar & Murad , 2013; Čadež & Kolar, 2015; Lin & Tsai, 2016).

El estudio de Rivera y Becker (2003), analiza en qué aspectos de la información se apoyan futuros profesores de primaria, cuando razonan inductivamente. Así también, qué contextos les permiten percibir las relaciones invariantes e inherentes, de una muestra finita y, con ello, formular generalizaciones viables, y en qué medida justifican los resultados inductivos de manera no inductiva, que son otros medios de explicación que no han sido extraídos por la fuerza de las apariencias superficiales o por mera especulación arbitraria. Su estudio se sustenta de tareas con patrones numéricos y figurales. De su estudio, reconocen que los futuros profesores, se basan principalmente en sus experiencias matemáticas previas y que sus procesos de inducción sugieren una preferencia por las estrategias de similitud numérica. Por cuanto a los contextos, reconocen cuatro: (1) el nivel de homogeneidad de los valores numéricos o figuras, (2) la naturaleza de la propiedad de invariancia inducida (3) la tipicidad de las tareas de inducción que se realizan, y 4) especialmente en el caso de los futuros profesores, el tipo de conocimiento matemático que traen consigo a la inducción. Observaron además, que quienes emplearon la estrategia de similitud numérica parecían menos capaces de justificar sus resultados de manera no inductiva, mientras que los que empleaban la similitud figural proporcionaban suficientes justificaciones no inductivas debido, en parte, a la manera en que relacionaban los símbolos y las variables se acostumbraban a los patrones que se generaban a partir de las figuras.

Kolar, Mastnak y Hodnik (2012) estudian las competencias de razonar inductivamente en profesores de primaria, mientras resuelven un problema matemático que preveía el uso del razonamiento inductivo para llegar a la solución y construir generalizaciones. Su análisis se sustenta desde tres perspectivas diferentes: La perspectiva de la comprensión de la situación problemática, la perspectiva de la profundidad de resolución de problemas y la perspectiva de las estrategias aplicadas. Analizan además, la relación entre la profundidad y la estrategia de resolución de problemas. A partir de ello, reconocen que no todas las estrategias fueron igualmente eficaces en la búsqueda de generalizaciones de problemas.

Barrera, Castro y Cañadas (2009) caracterizan el razonamiento inductivo en futuros de primaria, para luego llevar a cabo una actuación instruccional, y con ello, analizar la evolución y cambio en el proceso de razonamiento. Reconocen, que aún cuando los futuros profesores se apoyan de los sistemas de representación numérico, gráfico, verbal y algebraico, el que utilizaron mayormente fue el numérico. Por cuanto a los pasos del razonamiento, predominó el que refiere al trabajo con casos particulares, del modelo de Cañadas y Castro (2007).

En relación con la generalización como componente del razonamiento inductivo, Mouhayar y Jurdak (2013) analizaron la habilidad de profesores de matemáticas de secundaria, para identificar acciones de los estudiantes para determinar el n-ésimo término de una sucesión en la generalización de patrones. Se evidenció que los profesores identificaron las acciones de los estudiantes cuando establecieron el enésimo término en la generalización del patrón, pero evidenciaron dificultades en sus explicaciones, sobre las acciones de los estudiantes en las diferentes tareas, capacidad asociada con la explicación del conteo o la representación pictórica, paso a paso de los estudiantes.

1.4 Problemática de la investigación.

Con base en la revisión a la literatura especializada, se reconoce que la mayoría de las investigaciones que han estudiado el razonamiento inductivo, han enfatizado en el estudiante y en el profesor en formación, pocas se han realizado con profesores en servicio (e.g., Sosa & Cabañas-Sánchez, 2017). En este sentido, se requiere profundizar sobre las formas de razonar inductivamente en profesores en servicio, quienes asumen un rol indispensable en el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes, donde la mayoría de sus actividades se basan en el razonamiento inductivo, de lo particular a lo general (NCTM, 2000).

La importancia del razonamiento inductivo como proceso cognitivo, juega un papel importante en la construcción del conocimiento matemático y debe ser considerado en la enseñanza de las matemáticas, para potenciar habilidades en los estudiantes. Los argumentos, la conjetura, la demostración, la explicación y la justificación, son aspectos relacionados con el razonamiento inductivo y resulta complicado hablar sobre uno de ellos sin hacer referencia a uno o varios de los otros (Cañadas, 2002). Su importancia también incide en el camino hacia la demostración; sin embargo, se reportan dificultades asociadas con la adquisición de las habilidades del razonamiento necesarias para llegar a hacer y comprender una demostración matemática formal de manera inmediata, para ello es necesario un período de tiempo de adaptación y conviene que sigan una progresión lógica en el desarrollo de su razonamiento, desde los razonamientos cotidianos más próximos a lo concreto hasta los razonamientos matemáticos más abstractos (Cañadas y Castro, 2010). Así, se reconoce que la inducción favorece el desarrollo de estas habilidades a partir de la formulación de conjeturas y su demostración.

Desde el marco curricular, los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000) enfatizan en que los estudiantes agudicen y amplíen sus habilidades de razonamiento inductivo y deductivo, para que profundicen en las valoraciones de sus afirmaciones y conjeturas, como también en la formulación de sus argumentos. Además, consideran que la generalización es uno de los principales objetivos de la enseñanza de las matemáticas y exponen la trascendencia e importancia de la inducción en el quehacer matemático de los estudiantes (Cañadas y Castro, 2010). En México, el currículo de la Educación Básica (SEP, 2011) enfatiza en la importancia porque la actividad intelectual de los estudiantes se apoye más en el razonamiento que en la memorización. Así también, que formulen y validen conjeturas; busquen argumentos para validar procedimientos y resultados.

Con base en estas demandas a los estudiantes, implícitamente se vincula a los profesores de matemáticas, quienes promueven y participan en el proceso del razonamiento matemático en condiciones de enseñanza (NCTM, 2000). De ahí, surge la necesidad de que el profesor de matemáticas agudice y amplíen en sus estudiantes, destrezas del razonamiento inductivo para profundizar en las valoraciones de sus conjeturas y fortalecer sus argumentos matemáticos.

Para ello, una de las tareas del profesor consiste en "ayudar a sus alumnos a introducirse en una comunidad de conocimientos y capacidades que otros ya poseen. Su trabajo es una actividad social que lleva a cabo mediante el desarrollo y puesta en práctica del currículo de matemáticas" (Rico, 1996, p. 18). Así también, en promover maneras particulares de pensar y llevarlos a comparar, verificar, explicar y justificar conjeturas (Brodie, 2010). En este contexto de ideas, Ball y Bass (2003) señalan el profesor debe estar capacitado en proveer a sus estudiantes recursos que les permitan desarrollar estas habilidades y fomentar ambientes que lo hagan posibles. De acuerdo con estas responsabilidades y la importancia del razonamiento inductivo, se considera que si un profesor de matemáticas trabaja y pone en práctica situaciones de aprendizaje que promuevan este tipo de razonamiento en sus estudiantes, debe estar familiarizado y adquirir hábitos desde su práctica como docente en esta manera de razonar (Castro, 2002; Cañadas & Castro, 2003).

Otro de las consideraciones de la revisión a la literatura especializada, es que la mayoría de las investigaciones que estudian el razonamiento inductivo como proceso del pensamiento y como generador de conocimiento, en el contexto de tareas de generalización, refieren principalmente a las relaciones lineales. Varios estudios dan cuenta de la capacidad de generalizar efectivamente patrones lineales, pero se reconocen dificultades en la generalización de patrones no lineales (Ebersbach & Wilkening, 2007; Krebs, 2005) que influyen el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes. Estas dificultades se asocian con el reconocimiento del comportamiento del patrón y representarlo de forma simbólica (aritmética y algebraica), otras consisten en el comportamiento de recursividad del patrón más que en el de correspondencia y se considera que estas dificultades pueden estar relacionadas con el proceso de enseñanza en el desarrollo del pensamiento algebraico (Amit & Neria, 2008). Sin embargo, pocas investigaciones se han enfocado en las relaciones cuadráticas (Kirwan, 2015) tanto en profesores en formación como en servicio.

De ahí el interés de esta investigación por el estudio del razonamiento inductivo del profesor de matemáticas, en el contexto de las sucesiones de tipo cuadrático, a partir de patrones figurales.

1.5 Pregunta de investigación y objetivos.

La pregunta de investigación que se plantea es:

¿Cuál es el razonamiento inductivo que evidencian profesores de matemáticas de secundaria al resolver tareas con sucesiones cuadráticas en el contexto de la generalización de patrones figurales?

Para dar respuesta a esta cuestión, se pretende:

Describir el razonamiento inductivo que evidencian profesores de Matemáticas al resolver tareas relacionadas con sucesiones cuadráticas en el contexto de la generalización de patrones figurales.

Este objetivo se particulariza en los siguientes objetivos específicos:

OE1: Identificar y describir los pasos del razonamiento inductivo que siguen profesores de matemáticas de Secundaria al resolver tareas que demandan la generalización de sucesiones cuadráticas.

OE2: Identificar y analizar los sistemas de representación que utilizan los profesores Matemáticas al resolver tareas de relacionadas con generalización de sucesiones cuadráticas.

Capítulo 2

Fundamentación Teórica

La fundamentación teórica de la investigación del razonamiento inductivo, se sustenta en el modelo teórico de Cañadas y Castro (2007), que surge de los trabajos de investigación de Pólya (1966), Castro (1995), Cañadas (2002) y Reid (2002). Se consideran los elementos teóricos de los patrones numéricos, figurales, tipos de generalización, representaciones y sistemas de representación.

1.1 Razonamiento Matemático

El razonamiento por ser un término polisémico, se asume y conceptualiza desde diferentes perspectivas humanísticas, entre ellas la filosofía, que lo define como una forma del pensamiento que consiste en extraer un juicio nuevo llamado conclusión, que se deriva necesariamente de juicios dados, llamados premisas . En el campo de la psicología, se relaciona con la capacidad de identificar las propiedades de cada objeto ideal y las relaciones entre las distintas ideas sobre la base de la necesidad del propio individuo, los datos externos memorizados y los recuerdos naturales (de Acedo Baquedano & de Acedo Lizarraga, 2006).

En Matemática Educativa, Castro, Cañadas y Molina (2010) lo definen como un proceso de pensamiento que permite obtener conclusiones a partir de premisas previamente establecidas. Por cuanto al razonamiento matemático, es un proceso mental que involucra el desarrollo del pensamiento o argumento, con el fin de convencer a otros o a nosotros mismos sobre una aserción en particular, resolver un problema o integrar ideas de forma coherente (Brodie,2010). Involucra además, la búsqueda de similitudes y diferencias (generalizar, conjeturar, identificar un patrón, comparar y clasificar) y la validación (justificación, prueba y prueba formal), ambos relacionados con la ejemplificación (Jeannotte & Kieran, 2017).

2.1.1 Tipos de razonamiento

Por lo general, el razonamiento matemático es clasificado en inductivo y deductivo. Hay consideraciones de otro tipo de razonamiento, entre ellos el abductivo, por analogía, el plausible y el transformacional.

La abducción hace referencia a las razones para adoptar una hipótesis, que se deriva en la obtención de nuevas ideas, siendo así las hipótesis de tipo explicativa (Fann, 1970). Se establece diferencias entre el razonamiento inductivo y el abductivo. La inducción la relaciona con la inferencia que inicia de lo particular hasta encontrar una ley general, mientras que la abducción es una inferencia que inicia desde un cuerpo de datos hasta una hipótesis que es llamada explicativa o de efecto de causa.

Para Pólya (1966) la analogía, es una semejanza sobre un nivel definido y conceptual, cuya diferencia con otras semejanzas radican en las intenciones del pensador. Define los objetos semejantes como aquellos que concuerdan entre sí en algún aspecto, cuando se delimita este aspecto para definir conceptos, estos objetos semejantes se miran como análogos.

Simon (1996) define el razonamiento tranformacional como la representación mental o física de una operación o conjunto de operaciones en un objeto o conjunto de objetos que le permite a uno imaginar las transformaciones que sufren estos objetos y el conjunto de resultados de estas operaciones.

El razonamiento deductivo se concibe como aquel proceso de inferencia de conclusiones de premisas, basadas en reglas propias de la lógica formal, donde se obtiene conclusiones a partir de casos generales a casos particulares. Este tipo de razonamiento permite inferir conclusiones de información conocida (premisas) basadas en reglas lógicas formales, donde las conclusiones se derivan necesariamente de la información dada y no hay necesidad de validarlas mediante experimentos (Michal & Ruhama, 2008).

Pólya (1966) destaca que el conocimiento matemático es asegurado por medio del razonamiento demostrativo, pero las conjeturas se apoyan en el razonamienoto plausible. Considera que una prueba matemática es razonamiento demostrativo, pero la evidencia desde diferentes puntos de vistas pertenecen al razonamiento plausible. Afirma además, que el razonamiento demostrativo es seguro, definitivo y está más allá de la controversia, mientras que el razonamiento plausible es azaroso, discutible y provisional. El razonamiento demostrativo tiene modelos rigidos, codificados y aclarados por la lógica (formal o demostrativa), que es la teoría del razonamiento demostrativo. Los modelos del razonamiento plausible son fluidos, y no hay teoría de este razonamiento que pueda ser comparada a la logica demostrativa en claridad o que tenga un consenso comparable.

1.2 Inducción

Desde un punto de vista filosófico, la inducción se define como "el razonamiento que intenta establecer enunciados universales a partir de la experiencia. Es decir, ascender lógicamente a través del conocimiento científico, desde la observación de fenómenos o hechos de la realidad a la ley universal" (Pineda, 2009, p.124). El procedimiento del científico para tratar la experiencia se le llama *inducción* (Polya, 1966). Por esta vía, es posible obtener una nueva información desde una ya conocida, donde la conclusión supera el de las premisas, se evidencia su importancia, por considerarse el método más propicio en la obtención de nuevos conocimientos científicos.

En el contexto de la matemática, la inducción incluye la observación, la generalización y formulación de un juicio general que es conjetural o tentativo, para llegar a la verificación de la conjetura por medio de casos particulares (Pólya, 1966). Desde esta postura, la inducción consiste en inferir una ley general de ejemplos particulares, o una producción de hechos para demostrar juicios generales, el experimento es un procedimiento para comprobar hipótesis y la observación es una correcta apreciación y anotación de fenómenos. Pólya (1994) afirma, que tanto en las matemáticas como en las ciencias físicas, la observación y la inducción son base del descubrimiento de leyes generales, la diferencia está en que las ciencias físicas considera imprescidimble la observación, mientras que en las matemáticas se considera a la demostración formal.

En esta investigación, se asume que la inducción y el razonamiento inductivo son términos relacionados, y se diferencian con la inducción matemática (Pólya, 1994).

1.3 Razonamiento Inductivo

El razonamiento inductivo es un proceso del pensamiento humano que produce afirmaciones y alcanza conclusiones, que parte de casos particulares hasta llegar a una generalidad. Es un modo de razonar que conduce al descubrimiento de leyes generales a través de la observación de ejemplos particulares. En el proceso inductivo, Pólya (1994) considera como elementos claves:

- La observación.
- El trabajo con casos particulares.
- La formulación de conjeturas.
- La justificación de las conjeturas o la comprobación de conjeturas con nuevos casos particulares.

La inducción y el razonamiento son utilizados a la par, debido a sus significados y el proceso cognitivo que está inmerso en ellos, permite la obtención de reglas generales a partir del comportamiento común, observado en algunos casos particulares y concretos (Castro, Cañadas & Molina 2010).

1.4 Modelo Teórico del Razonamiento Inductivo

El modelo teórico de Cañadas y Castro (2007) considera siete pasos del razonamiento inductivo: trabajo con casos particulares, organización de casos particulares, búsqueda y predicción de patrones, formulación, validación, generalización y demostración de la conjetura.

1.4.1 Trabajo con casos particulares

El punto de partida son experiencias con casos particulares de una situación o problema. Los casos particulares son los ejemplos o casos concretos con los que se inicia un proceso inductivo. Los casos particulares juegan un papel fundamental como punto de partida de la inducción. Además, son útiles para la validación de una conjetura de manera informal.

1.4.2 Organización de casos particulares

Consiste en el uso de diferentes estrategias para sistematizar y facilitar el trabajo con casos particulares, por medio de gráficos, tablas o cualquier sistema que permita la visualización de la relación entre los diferentes resultados obtenidos de forma organizada, a partir de los casos particulares anteriores.

1.4.3 Identificación del patrón

Con la observación de casos particulares (organizados o no), se puede pensar en el próximo caso desconocido. Los patrones son algo que se repiten con regularidad, refieren a representaciones internas y externas. Cuando a partir de una regularidad observada, se busca un patrón que sea válido para más casos, se habla de generalización (Pólya, 1966). El reconocimiento de patrones es, por tanto, esencial en el desarrollo de la habilidad para generalizar.

Pólya defiende en sus trabajos el uso del razonamiento inductivo como método para describir propiedades tras la observación de los fenómenos, la regularidad que presentan dichos fenómenos y la coherencia que se les supone a los mismos. Los patrones tienen un lugar destacado en el razonamiento inductivo de cualquier ciencia, si se tiene en cuenta que el reconocimiento de patrones puede ayudar a encontrar fórmulas y relaciones generales. Los patrones matemáticos se han considerado como la estructura que permite modelizar las *reiteraciones* que se observan en el entorno.

Patrones numéricos y figurales

Los patrones pueden clasificarse en *numérico* y *figural*. Un *patrón numérico* es una secuencia de números, en la que existe una regla bien definida para calcular cada número a partir de los números anteriores o desde su posición en la secuencia (Bishop, 2000). Un *patrón figural* es una secuencia estructurada de objetos en etapas dadas, las cuales están configuradas en determinada forma y exhiben caracteristicas asociadas con representaciones esquemáticas (Rivera, 2010)

1.4.4 Formulación de conjeturas

Consiste en establecer una afirmación acerca de todos los casos posibles, basados en los particulares, pero con un elemento de duda. Es una afirmación que parece razonable, cuya veracidad no ha sido demostrada. No se ha demostrado convincentemente y aún no se sabe tampoco que haya ejemplos que lo contradigan, ni se sabe que tenga alguna consecuencia falsa (Mason, Burton , & Stacey, 1988).

1.4.5 Justificación de conjeturas

Cuando se formulan conjeturas con dudas, hay convicción de la verdad de las conjeturas para esos casos específicos pero no para otros. En esta etapa, intentan validar sus conjeturas para nuevos casos específicos pero no en general.

1.4.6 Generalización

Cuando la conjetura se expresa de tal manera que se refiere a todos los casos de una clase determinada, entonces se habla de generalización. Los patrones matemáticos están relacionados con una regla general, no solo en algunos casos. Con base en una conjetura que es cierta para algunos casos particulares, y habiéndola validado para casos nuevos (validación de conjeturas), se podría hipotetizar que es verdadera en general. Este es el principal objetivo del razonamiento inductivo, por el que se considera generador de conocimiento matemático. Sin embargo, para poder saber si estamos o no ante nuevo conocimiento, antes de poder aceptar una nueva conjetura (general o no) con plena certeza de su validez desde el punto de vista matemático, es necesario llegar a demostrarla mediante un proceso de validación formal.

La generalización es uno de los procesos de suma importancia en las matemáticas. Kaput la define como:

> "… extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos… (p, 136)".

El enfoque de la generalización son las expresiones que permiten describir propiedades o relaciones entre números a partir de la identificación de regularidades y que no necesariamente corresponden al simbolismo convencional (Mason, 1996).

En los patrones, la generalización descansa en la capacidad de identificar una regularidad en algunos casos particulares, y extender esa regularidad a otros términos, permitiendo así una expresión vinculada con todos los términos de la secuencia (Radford, 2006). Proceso que reconoce dos aspectos como: identificar una regularidad en algunos casos de la secuencia, para luego generalizar esa regularidad, aplicada en todos los términos de la secuencia. Por otra parte, la generalización de patrones depende del tratamiento que se da a la secuencia, más que en el uso de notaciones.

Cañadas, Castro y Castro (2007) afirman que los estudiantes generalizan cuando tienen la capacidad de identificar un patrón, a partir de ciertos casos y también aplican esta característica común a otros casos particulares, que no se habían considerado hasta el momento. La generalización está relacionada con la regularidad presente en casos particulares, la cual es identificada y es llevada a su extensión. En los procesos escolares, se resalta el papel de la generalización, Blanton y Kaput (2011) plantean que los estudiantes necesitan ir más allá, en sentido que deben construir, expresar y justificar la generalización de patrones.

Tipos de generalización

Davydov (1990) distingue entre generalización empírica y generalización teórica. En esta investigación se centra en la generalización empírica.

La *generalización empirica*, es encontrar una cualidad o propiedad común entre varios objetos o situaciones y notar y registrar estas cualidades como comunes y generales a estos objetos o situaciones, lo común se encuentra al comparar los objetos y situaciones con respecto a su apariencia y su forma figurativa. Es aquella que opera como resultado de comparar mediante desglose los rasgos comunes (afines) en los que coinciden los fenómenos comparados. Es una selección realizada entre las propiedades obtenidas de modo sensorial, directo y empírico.

La *generalización teórica,* es aquella que opera mediante el análisis y la abstracción de los atributos esenciales de las cosas. Se centran en las acciones o sistemas de acciones relevantes que acompañan al proceso general, los resultados o productos de tales acciones o sistemas, o las condiciones (es decir, las relaciones y las propiedades) que hacen viables las acciones o sistemas.

1.4.7 Demostración de las conjeturas generales

El primer paso en el camino para confirmar o rechazar una conjetura general es validarla con casos particulares. Pero esto es insuficiente para justificar una generalización. Es necesario dar razones que expliquen la conjetura con la intención de convencer a otra persona de que la generalización está justificada.

En este punto, una prueba formal puede proporcionar la justificación final que garantiza la veracidad de la conjetura. Cañadas (2007) manifiesta que en algunos procesos de validación predomina el razonamiento inductivo, éstos son aquellos que se basan en casos particulares.

Cañadas (2007) define la demostración como un proceso de validación formal que no deja lugar a dudas sobre la validez de la conjetura que prueba; sin embargo, la demostración no deja de estar relacionada con el razonamiento deductivo y es similar lo que ocurre con la inducción matemática, requiere de la inducción dentro de su primera fase, basadas en casos particulares (Pólya, 1994).

1.5 Sistemas de representación

Lupiáñez (2016) distingue al concepto de representación en el campo de la filosofía y en el de la matemática. En el primero, como una relación entre el sujeto y el objeto. En el ámbito de las matemáticas, como aquellas notaciones simbólicas o gráficas, o bien expresiones verbales, que se hacen presentes y se nombran los conceptos y procedimientos que hacen parte de este ámbito, incluyendo también sus características, propiedades y relaciones más relevantes. Reconoce además, que las representaciones en el ámbito de las matemáticas, pueden organizarse, según sus características y propiedades, en diferentes sistemas de representación. A cada sistema, le reconoce como conformado por un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, dotados de una serie de reglas y convenios, que permiten expresar determinados aspectos y propiedades de un concepto matemático y posibilitan su uso para determinadas funciones.

Reconoce dos tipos de sistemas: las representaciones *simbólicas*, que incluyen los símbolos alfanuméricos que se emplean con unas reglas de procedimiento y, las representaciones *gráficas* que son de tipo figurativo y disponen de unas reglas de composición y de unos convenios de interpretación. Teniendo en cuenta estos dos tipos de representación y el concepto objeto de estudio, pueden surgir otros sistemas de representación que expresan diferentes facetas del mismo, así como sus significados.

Las representaciones en matemáticas conllevan un modo dinámico de procesamiento que les brinda un potencial enorme y que las aleja de un carácter estático vinculado exclusivamente a unos símbolos o reglas sintácticas. Las representaciones se pueden manipular, procesar, operar y convertir, para así poder expresar y mostrar una amplia variedad de propiedades y relaciones estructurales de los conceptos e ideas matemáticas. Lupiáñez (2016) sostiene que estas actuaciones sobre los sistemas de representación se pueden clasificar en dos grupos principales: aquellas que se realizan sin cambiar de sistema de representación (procesamiento en un sistema) y aquellas en las que se transita entre uno o varios sistemas de representación (conversiones entre sistemas).

1, 2, 4, 7, 11, 16, 22,…

Sistema de representación numérica

N	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	1	2	4	7	11	16	22	29	...

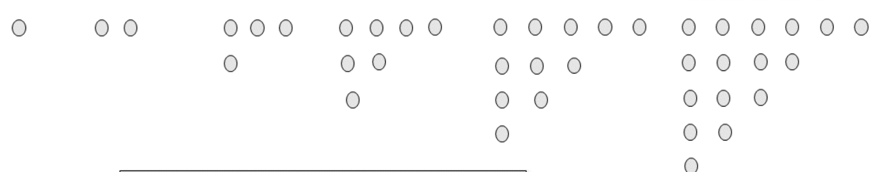
Sistema de representación tabular

$$a_n = a_{n-1} + (n-1), a_0 = 1$$

Sistema de representación algebraica (recurrente)

$$a_n = \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

Sistema de representación algebraica (funcional)



Sistema de representación pictórico

Figura 3. *Sucesión de números poligonales centrales en distintos sistemas de representación*

1.5.1 Procesamientos en un sistema

En cada sistema de representación es posible llevar a cabo *procesamientos*, es decir, transformaciones de las representaciones en el mismo sistema donde fueron creadas.

$$\boldsymbol{Expresión\ algebraica\ 1}: y = x^2 - 3x + 2$$

$$\boldsymbol{Expresión\ algebraica\ 2}: y = (x-1)(x-2)$$

$$\boldsymbol{Expresión\ algebraica\ 3}: y = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$$

Estas tres expresiones diferentes se ubican en un mismo sistema de representación (simbólico) y se pueden derivar una de la otra, por lo que proporciona ejemplos de procesamientos. Para pasar de una a otra es necesario aplicar diferentes técnicas de composición y descomposición, agrupamiento o factorización de términos, pero ciertamente cada una de ellas enfatiza diferentes facetas o propiedades mediante distintos elementos de la función: la primera es su expresión general, la segunda muestra sus dos raíces, y la tercera emplea las coordenadas del vértice de la parábola asociada.

1.5.2 Conversiones entre sistemas

Entre diferentes sistemas de representación se pueden realizar conversiones, que son traducciones de una determinada expresión hecha en un sistema, a la expresión de esa misma notación en otro sistema distinto.

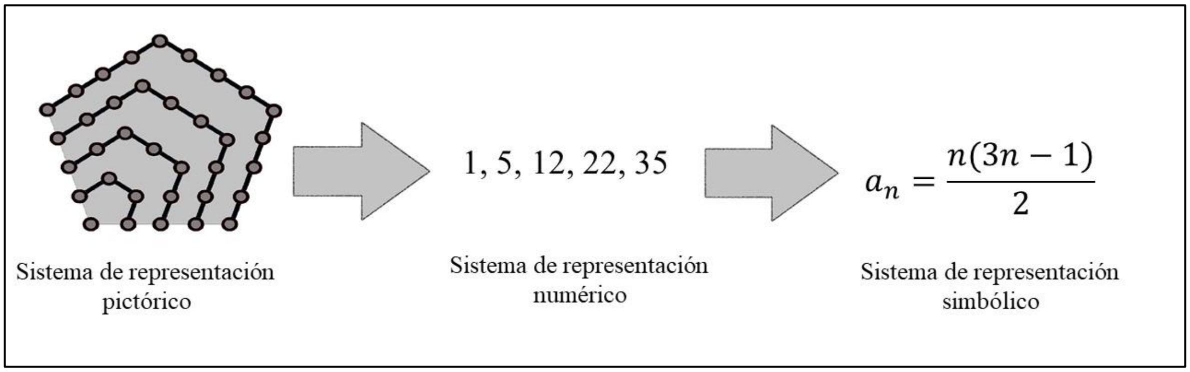


Figura 4. *Conversión entre sistemas de representación de los números pentagonales*

Por ejemplo, los números pentagonales se representan en diferentes sistemas de representación. Así si se realizan conversiones de un sistema de representación pictórico a un sistema de representación numérico, se emplea la estrategia del conteo, para establecer los términos k-ésimo de la sucesión. La conversión de un sistema de representación numérico a un sistema de representación simbólico, se realizan procedimientos que permitan establecer la regla general que represente el comportamiento de la sucesión en un sistema de representación simbólico, una alternativa es por el método de diferencias. Se reconoce, que estas formas de representar los números poligonales, son equivalentes.

Capítulo 3

Contenido matemático

El contenido matemático al que refiere el estudio del razonamiento inductivo en esta investigación es la sucesión cuadrática, progresión aritmética de orden 2 en los números naturales. Su estudio, se ubica en el nivel básico (secundaria) del sistema educativo mexicano. A fin de comprender la estructura conceptual, los significados y representaciones de este concepto en el curriculum de secundaria en México, se analizó el contenido matemático, con base en una de las dimensiones del análisis didáctico[1] propuesto en Rico y Moreno (2016), el *análisis de contenido matemático*.

Análisis de contenido matemático

El análisis del contenido matemático escolar establece y organiza los significados de los conceptos y procedimientos de un tema de matemáticas a través de su estructura conceptual, sistemas de representación y contextos o modos de uso (*véase tabla 3.1*). Estos componentes evidencian la multiplicidad de significados que se le puede atribuir a los conceptos matemáticos escolares, que se derivan de la noción de un organizador curricular (Rico, 1997) cuyo desarrollo e implicaciones se analizan y examinan mediante componentes propios que favorecen su estudio.

Tabla 2. *Análisis del Contenido Matemático Escolar*

Dimensión	Cultural-Conceptual.
Método de análisis	Análisis de los significados.
Objeto de estudio	Significado de los contenidos matemáticos escolares.
Organizadores curriculares o categorías para el análisis en cada dimensión	**1.** Estructura conceptual. **2.** Sistemas de representación. **3.** Sentidos y modos de uso.

[1] Es un método para escudriñar, estructurar e interpretar, dentro de un marco curricular, los contenidos didácticos de las matemáticas escolares, con el propósito de su planificación, su implementación en el aula y su evaluación. Se conforma de las dimensiones del análisis de los significados de los contenidos matemáticos escolares, el análisis cognitivo, el análisis instruccional y el análisis evaluativo.

Contenidos didácticos o componentes de los organizadores para el análisis de cada contenido matemático	**1.** Propiedades formales/ Funcionalidad cognitiva-actitudes emocionales, morales y éticas. **2.** Representaciones simbólicas/gráficas/numéricas. **3.** Términos/contextos/fenómenos/situaciones
Síntesis	Significados prioritarios para su aprendizaje y enseñanza

3.1 Categorías de análisis para los contenidos matemáticos escolares

El análisis considera tres campos y tres niveles de complejidad, que consta de nueve categorías: hechos, destrezas y emociones; conceptos razonamientos y normas; estructuras, estrategias y valores (Fernández-Plaza, 2016). Esta organización permite interpretar aquellos contenidos matemáticos escolares concretos (sucesiones) que aparecen en el currículo escolar, para ello se consideró el plan y programa de estudio del área de matemáticas (SEP, 2011) y tres libros de matemáticas de secundaria (Cantoral, Farfan, Cabañas-Sánchez, Ferrari, & Lezama, 2014). Además, los sistemas de representación y sentidos y modos de uso.

3.2 Las sucesiones en el currículo de México

En México, el plan y programas de estudio 2011 de Matemáticas para básica secundaria (SEP, 2011) establece los propósitos, enfoques, estándares curriculares y aprendizajes esperados. Los Estándares Curriculares de matemáticas, presentan la visión de una población estudiantil que debe saber utilizar los conocimientos matemáticos, éstos comprenden el conjunto de aprendizajes que se espera de los estudiantes en los cuatro períodos escolares, para conducirlos a altos niveles de alfabetización matemática. Su organización se distribuye en cuatro ejes: sentido numérico y pensamiento algebraico, forma, espacio y medida, manejo de la información y actitud hacia el estudio de las Matemáticas.

El contenido matemático escolar de las sucesiones, se ubica en el eje del sentido numérico y pensamiento algebraico. Se estudian en los tres años escolares de secundaria, a través de patrones numéricos y figurales, con el fin de desarrollar habilidades de construcción, formulación y obtención de la regla general de dicha sucesión (*véase Tabla 3.2*). Las sucesiones cuadráticas se estudian en tercer año.

Tabla 3. *Programa de Matemáticas de Estudios 2011. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas*

Grado	Aprendizaje esperado	Contenido
Primero	Representen sucesiones de números de figuras a partir de una regla dada y viceversa.	Construcción de sucesiones de números o de figuras a partir de una regla dada en lenguaje común Formulación en lenguaje común de expresiones generales que definen las reglas de sucesiones con progresión aritmética o geométrica de números y figuras Obtención de la regla general (en lenguaje algebraico) de una sucesión con progresión aritmética.
Segundo	Representen sucesiones de números de figuras a partir de una regla dada y viceversa.	Construcción de sucesiones de números enteros a partir de las reglas algebraicas que las definen y la obtención de la regla general (en lenguaje algebraico) de una sucesión con progresión aritmética de números enteros.
Tercero	Utilicen en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión.	Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

3.3 Campo conceptual

El campo conceptual relaciona redes estructuradas de hechos, que a su vez se articulan y organizan, para dar lugar a estructuras conceptuales, considera tres niveles: *hechos, conceptos* y *estructuras conceptuales*.

3.3.1 Identificación de hechos

El estudio de los hechos se hace mediante cuatro subcategorías que consisten en los *términos, notaciones, convenios* y *resultados,* relacionados con las sucesiones en los tres grados de secundaria (Fernández-Plaza, 2016).

Las sucesiones se estudian desde el primer año de secundaria, expresadas por medio del lenguaje común. Se reconoce, que una progresión es una sucesión de números o términos algebraicos entre los cuales hay una ley constante. Están asociados a patrones, que es lo que se repite constantemente y se describe con formalidad. En segundo año, el patrón es de construcción, que expresa variación u orden de algo, para estos casos de un número a otro. En tercer año, las sucesiones cuadráticas son reconocidas por medio del método de diferencias (*véase Tabla 3.4*).

Tabla 4. *Hechos de las sucesiones en Secundaria*

Primer año	Segundo año	Tercer año
	Términos	
Sucesión Expresión general/fórmulas/reglas Progresión Progresión aritmética Progresión geométrica Patrón Términos general y particular	Sucesión Reglas algebraicas/expresiones algebraicas Sucesiones aritméticas Sucesiones geométricas Patrón Progresiones numéricas	Sucesión Expresión algebraica Posición Término Consecutivos Primera diferencia Segunda diferencia Regularidades Constante Creciente Decreciente
	Notaciones	
d (diferencia) a_n (término general) a_n=$a_1+(n-1)*d$ (término general) a_n=$a_k+(n-k)*d$ (cualquier término) $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n,$ n (posición del término) a_k (término) $a_1+a_2+\cdots+\ a_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$ (suma de progresiones aritméticas)	a_k (término) a_1 (primer término de la sucesión) a_n=$a_1+(n-1)*d$ (sucesión aritmética) $a_n=a_1(r^{n-1})$ (sucesión geométrica)	x (posición del elemento) y (número de elementos) Δy (primera diferencia) $\Delta^2 y$ (segunda diferencia) $y=ax^2+bx+c$ (sucesión cuadrática) a, b, c coeficientes $2a =$ segunda diferencia $3a+b =$ primer término de la primera diferencia $a+b+c =$ primer término de la sucesión
	Convenios	
Patrones numéricos y geométricos Visualización Tabulación	Patrón de construcción Visualización Tabulación	Ordenar la sucesión de valores, calcular las diferencias de valores consecutivos, si es constante, hallar la expresión algebraica.
	Resultados	
- Sucesión particular es una progresión aritmética, se obtiene sumando una misma cantidad, *diferencia* -Suma de una progresión aritmética.	- La sucesión aritmética obtiene todos sus términos sumando al anterior un número fijo llamado *diferencia,* excepto al primer término. - La sucesión geométrica los obtiene multiplicando al anterior un número fijo, *razón.*	- El método de diferencias permite hallar el término general de la sucesión cuadrática

3.3.2 Identificación de conceptos

Se caracteriza por la abstracción y generalización de los conceptos y las relaciones entre ellos. Los conceptos vienen dados por comprensión o extensión, que establece una clase o conjunto de objetos (véase Tabla 3.5).

Tabla 5. *Conceptos de las sucesiones en Secundaria*

Primer año	Segundo año	Tercer año
	Conceptos	
Sucesión numérica	Sucesión Tipos de sucesión (aritmética y geométrica)	Sucesión cuadrática

En secundaria, se define una sucesión como un conjunto ordenado de objetos que suceden unos de otros, según un criterio determinado. Se reconocen dos tipos de sucesiones numéricas específicas: *aritméticas*, cuya particularidad es que todos sus términos, salvo el primero se pueden obtener sumando al anterior un número fijo llamado *diferencia* y expresado por *d*. En las *geométricas*, sus términos excepto el primero, se obtiene de multiplicar el término anterior por una constante, llamado *razón* y representado por *r*.

Cuando la primera diferencia entre los términos de una sucesión aritmética es constante, la sucesión es lineal. Si la segunda diferencia es constante, la sucesión es *cuadrática*.

3.3.3 Identificación de estructuras

Es el tercer nivel de complejidad, asociados con los conceptos formales, transformaciones, operaciones y propiedades de las sucesiones (*véase Tabla 6*).

Tabla 6. *Estructuras conceptuales de las sucesiones*

Estructuras
Definición de sucesión en los números naturales, $\varphi(n) = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$
Término general de una sucesión $\{a_n\}$.
Finitud $\{F_n\}_{n=k}^{\infty}$ (infinita)
Acotación.
Recurrencia.
Convergencia.
Progresiones aritméticas de orden superior: $a_n = c_0 x^p + c_1 x^{p-1} + \cdots + c_{p-1}x + c_p$
Diferencias finitas: $\Delta u_0 = u_1 - u_0,\ \Delta u_1 = u_2 - u_1, \dots, \Delta u_n = u_n - u_{n-1}, u_{n+1} - u_n, \dots$

Sucesión

Intuitivamente, una sucesión es una lista ordenada de elementos $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$. Cada elemento a_k se llama *término k-ésimo*, *k* corresponde a *subíndice* o *índice.* Formalmente, una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y su rango es un conjunto de los reales. En los reales, una sucesión $\{a_n\}$ es una función *S:* $\mathbb{N} \to$ R de una variable *n* donde dom {S}= $\mathbb{N}$; es decir, a cada $n \in \mathbb{N}$, le corresponde un número real, a_n es el *término n-ésimo* o general de la sucesión. La sucesión de números naturales viene definida por $\varphi(n) = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y se denota simplemente por $\{n\}$. Se relaciona con 1,2,3, $\dots, n, \dots$

Término general de una sucesión

El término general es la expresión algebraica de la sucesión que satisface todos los términos, en función del ordinal correspondiente, expresa la estructura común que comparten todos sus términos cuando se les considera como elementos ordenandos de un conjunto. La notación usual de la sucesión está dada por $\{a_n\}$.

Límite de una sucesión

Una sucesión a_n se dice que tiene límite *l* finito si para todo número real $\varepsilon > 0$, existe un natural *n*, dependiente de ε, tal que:

$$|a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq \mathbb{N}$$

Es decir, dado un número ε>0, siempre existe un número natural *n* tal que a partir de él todos los términos, a_n, a_{n+1}; ... van a estar a lo sumo a una distancia ε de *l*.

Propiedades de la sucesión

Según sus características, las sucesiones tienen propiedades que permiten distinguirlas y clasificarlas de acuerdo con: finitud, acotación, monotonía, recurrencia y convergencia.

Finitud

Una sucesión finita de n términos es una función F cuyo dominio sea el conjunto de números $\{1,2,\ldots, n\}$. El recorrido de F es el conjunto $\{F(1), F(2), F(3),\ldots, F(n)\}$, ordinariamente designado por $\{F_1, F_2, F_3,\ldots, F_n\}$.

Una sucesión infinita es una función F cuyo dominio sea el conjunto $\{1, 2, 3,\ldots\}$ de todos los enteros positivos de F, esto es, el conjunto $\{F(1), F(2), F(3)\}$, se designa también por $\{F_1, F_2, F_3,\ldots$, y el valor F_n se llama el *término n-ésimo* de la sucesión. La manera explícita de establecer el índice inicial de una sucesión infinita F, es $\{F_n\}_{n=k}^{\infty}$

Acotación

Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada si existe un número positivo M tal que $|a_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$ .Entonces M es una cota de la sucesión $\{a_n\}$.

Una sucesión $\{a_n\}$ está acotada inferiormente cuando existe un número natural que es menor o igual que todos los términos de dicha sucesión. De manera análoga, una sucesión $\{a_n\}$ está acotada superiormente cuando existe un número natural que es mayor o igual que todos los términos de dicha sucesión. Cuando la sucesión está acotada inferior y superiormente, entonces está acotada.

Monotonía

Una sucesión es monótona, cuando es creciente o decreciente.

- Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es *monótona creciente,* cuando $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Una sucesión $\{a_n\}$ es *estricta creciente,* si y solo si $a_n < a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Una sucesión $\{a_n\}$ es *monótona decreciente,* cuando $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Una sucesión $\{a_n\}$ es estricta decreciente, si y solo si $a_n > a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Recurrencia

La recurrencia es una amplia generalización del concepto de progresión aritmética o geométrica. También comprende como casos particulares las sucesiones de cuadrados o cubos de los números naturales, las sucesiones de las cifras de la descomposición decimal de los números racionales (y, en general, todas las sucesiones periódicas), las sucesiones de los coeficientes del cociente que se obtiene al dividir dos polinomios cualesquiera, escritos en el orden creciente de las potencias de x, etc.

Uno de los tipos de sucesión recurrente es la sucesión de la forma:

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n \qquad (1)$$

O brevemente $\{u_n\}$. Si existe un número natural k y unos números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ tales que desde un cierto número *n* y para todos los números siguientes se tiene:

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n \quad (n \geq m \geq 1) \qquad (2)$$

La sucesión (1) se llama *sucesión recurrente de orden k* y la relación (2), *ecuación recurrente de orden k*.

Por lo tanto, lo que caracteriza la sucesión recurrente es que todo término suyo (desde uno determinado) se expresa según la fórmula (2) mediante una misma cantidad de *k* de términos anteriores. El término recurrente se emplea porque para determinar el término posterior hay que recurrir a las anteriores.

Relaciones de recurrencia lineales

Una relación de recurrencia de orden *k* se llama relación de recurrencia lineal cuando la fórmula de recurrencia es lineal:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + g(n), \qquad \forall n \geq k$$

Si $g(n) = 0$, la relación de recurrencia lineal sea llama *homogénea.*

Si $g(n) \neq 0$, la relación de recurrencia lineal sea llama *no homogénea.*

Convergencia

Sea $\{x_n, n > 1\}$ una sucesión en R y $x \in \mathbb{N}$. Decimos que la sucesión $\{x_n, n > 0\}$ converge a a, si para todo ε existe un número natural N= N (ε) tal que $|x_n - a| < \varepsilon$, siempre que $n \geq N$. Simbólicamente es:

$$\{x_n\} \to x \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0 \; \exists m \epsilon \text{ N}: n \geq m]$$

Si una sucesión tiene límite es convergente y si no lo tiene es divergente.

Progresiones aritméticas

Las progresiones constituyen casos especiales de sucesiones. Así, una progresión se define como una sucesión numérica que cumple con ciertas condiciones con respecto al valor entre un término y el siguiente.

Una progresión aritmética constituye una sucesión infinita de números donde cualquier término (distinto del primero) se obtiene sumando un número fijo al anterior. Se denota a tal sucesión como:

$$a_1, a_2, a_{3,} \dots$$

Entonces, se satisface la fórmula recurrente:

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Donde d es un número fijo llamado *diferencia común.* Además, el valor de d es muy importante, ya que si es:

- **Positivo**, entonces la progresión aritmética es creciente; es decir, cada término es mayor que el anterior.
- **Cero**, entonces la progresión aritmética es constante; es decir, tiene todos sus términos iguales.
- **Negativo**, entonces la progresión es decreciente; es decir, cada término es menor que el anterior.

Se considera que los términos k-ésimo de la sucesión son:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$$\dots$$

$$a_n = a_1 + (n-1) * d$$

Entonces el término general de una progresión aritmética es:

$$a_n = a_1 + (n-1) * d$$

Progresiones aritméticas de orden superior

Se denomina progresión aritmética de orden p a la sucesión de números resultantes de calcular los valores numéricos de un polinomio de grado p para valores enteros consecutivos de su variable.

El término general de la progresión aritmética de orden superior es:

$$a_n = c_0x^p + c_1x^{p-1} + \cdots + c_{p-1}x + c_p,$$

donde c_i son los números conocidos.

Las progresiones de primer orden, son las progresiones aritméticas ordinarias, que tienen como término general $a_n = c_0x + c_1$. Con los valores consecutivos 0,1,2, ... obtenemos:

$$c_1, c_{0+}c_1, 2c_{0+}c_1, 3c_{0+}c_1, \ldots$$

Una progresión aritmética ordinaria con $a_1 = c_1$ y $d = c_0$

Diferencias finitas

Dada una sucesión de números cualesquiera, finita o infinita, $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots$ de ella se deduce otra, restando de cada elemento el anterior, así:

$$u_1 - u_0, u_2 - u_1, \ldots, u_n - u_{n-1}, u_{n+1} - u_n, \ldots$$

Que resulta de emplear $\Delta u_0 = u_1 - u_0$, $\Delta u_1 = u_2 - u_1, \ldots, \Delta u_n = u_n - u_{n-1}, u_{n+1} - u_n, \ldots$

Esta sucesión se conoce como *diferencias primeras o de primer orden:*

$$\Delta u_0, \Delta u_1 \ldots, \Delta u_n, \ldots, \Delta u_{n,}, \Delta u_{n+1}, \ldots$$

Así mismo, $\Delta^2 u_0 = \Delta(u_n) = \Delta(u_{n+1} - u_n) = \Delta u_{n+1} - \Delta u_n = \Delta u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$

Se obtiene la sucesión de *segundo orden* o de *diferencias segundas*,

$$\Delta^2 u_0,\ \Delta^2 u_1 \ldots,\ \Delta^2 u_n, \ldots$$

donde,

$$\Delta^2 u_n = \Delta u_{n+1} - \Delta u_n.$$

En general, las *diferencias de orden k* son de la forma:

$$\Delta^k u_n = \Delta^{k-1} u_{n+1} - \Delta^{k-1} u_n.$$

Progresiones aritméticas de orden 1 y 2

Las propiedades específicas de este tipo de sucesiones, progresiones aritméticas de orden 1 y 2 en los números naturales son:

Tabla 7. *Propiedades de las progresiones aritméticas de orden 1 y 2*

Propiedades	Características
Monotonía	Estrictamente creciente
Finitud	Infinita
Acotación	No acotada
Convergencia	Divergente
Recurrencia	De orden 2 o 3

3.4 Campo procedimental

El campo procedimental considera las operaciones, propiedades y métodos matemáticos, sus modos de procesamiento y el conocimiento que sustentan. Se basa en tres niveles: *destrezas, razonamientos* y *estrategias (véase Tabla 8).* Las *destrezas* son el procesamiento secuenciado de contenidos básicos, uso de convenio y manipulación de las notaciones correspondientes. Se identifica que el *razonamiento* que se involucra el procesamiento de relaciones en las sucesiones en Secundaria es el razonamiento inductivo, porque las actividades que se proponen para los estudiantes, trabajan con casos particulares basados en patrones numéricos y geométricos, hasta llegar a la generalización por medio de una expresión algebraica que corresponda a la sucesión con progresión aritmética o geométrica. Las *estrategias* involucran el procesamiento de conceptos y la conexión de razonamientos vinculados con una o varias estructuras**.**

Tabla 8. Campo procedimental para las sucesiones

Primer año	Segundo año	Tercer año
Destrezas		
Determinar el término general de la sucesión. Reconocer el patrón. Organizar los términos de la sucesión en tablas. Calcular cualquier término de la sucesión.	Obtener la regla general de una sucesión con progresión aritmética y geométrica con números enteros.	Obtener la expresión general cuadrática para definir el término n-ésimo de una sucesión cuadrática. Aplicar el método de diferencias.
Razonamiento		
Razonamiento inductivo: Determinar el término k-ésimo de la sucesión. Determinar expresiones algebraicas de las sucesiones de figuras o numéricas.		
Estrategias		
Método de diferencias Arreglos geométricos Organización de tablas Recurrencia		

Mapas Conceptuales

Para sintetizar las características de las sucesiones cuadráticas desde su estructura conceptual en las matemáticas y en el currículo, se estructura de mapas conceptuales que permitan tener una mirada global del contenido matemático escolar.

La *figura 5,* recopila la información obtenida de la estructura conceptual de las sucesiones en el currículo escolar mexicano, y en específico, las sucesiones cuadráticas. Esta recopilación incluye la definición, las propiedades, tipos especiales (progresiones aritméticas) y términos, consideradas por el currículo.

La *figura 6*, incluye información amplia de las sucesiones, con respecto a su estructura conceptual, desde sus propiedades, tipos y términos.

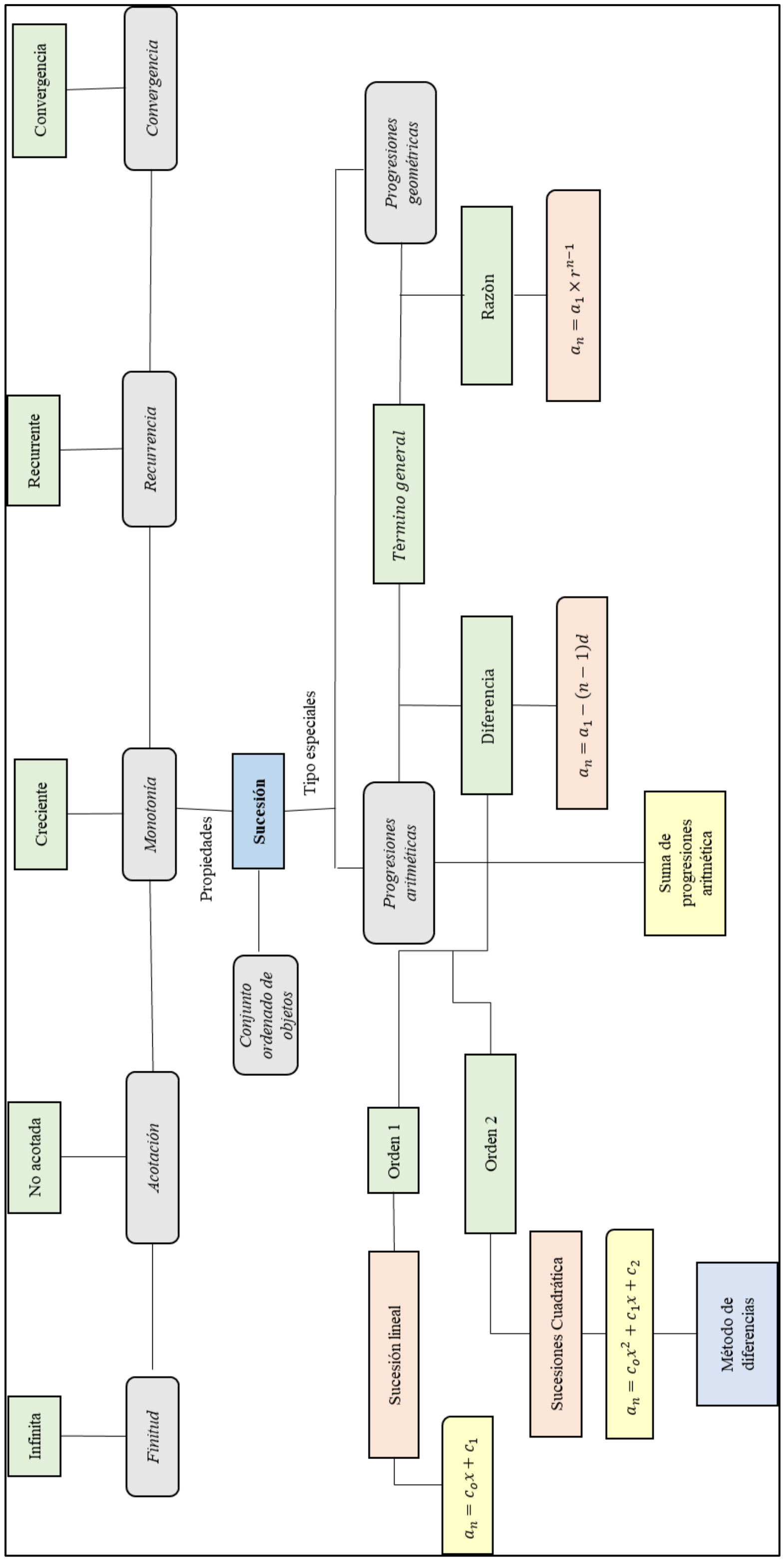


Figura 5. Estructura conceptual de las sucesiones en el currículo de México

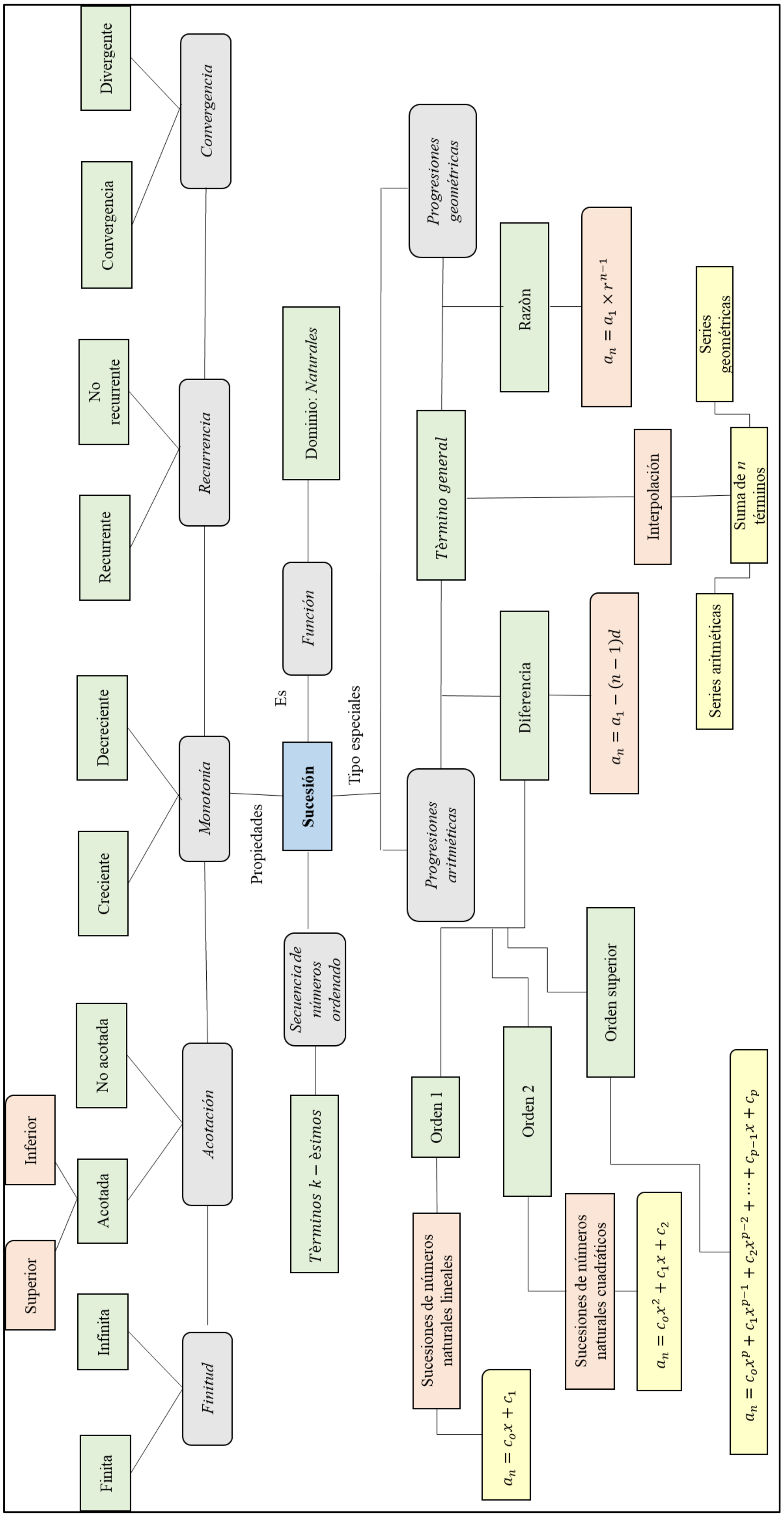


Figura 6. *Mapa conceptual de la estructura conceptual de las sucesiones*

3.3 Sistemas de representación

Las características y propiedades de las sucesiones de números naturales, permiten que sean expresadas en diferentes representaciones. Se identificaron seis sistemas de representación de las sucesiones en el currículo escolar mexicano: numérico, simbólico, verbal, tabular, gráfico, pictórico y geométrico (*véase figura 7*). En el primer año los sistemas de representación más utilizados son el verbal (lenguaje común), pictórico y numérico; en segundo año tabular, numérico y pictórico y en tercer año, el simbólico, tabular y numérico.

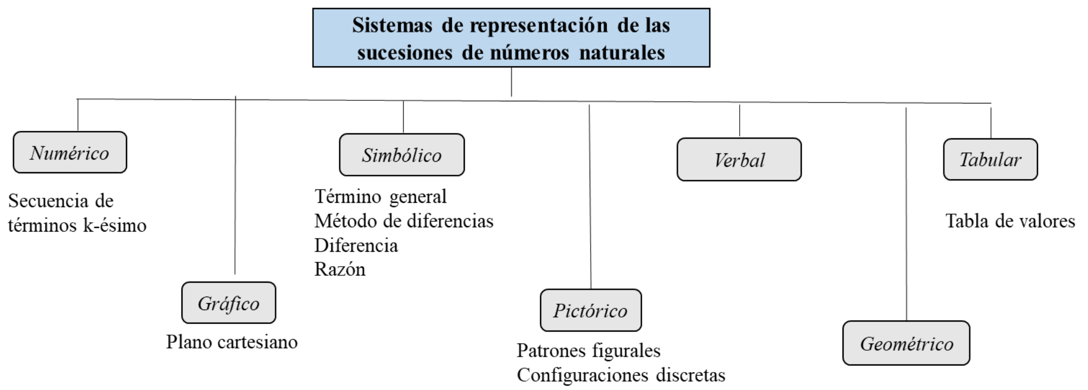


Figura 7. *Sistemas de representación de sucesiones cuadráticas en el currículo mexicano*

El *sistema de representación numérico* de las sucesiones en los libros de texto, lo representan por medio de números ordenados en secuencia (*véase figura 8*), cada número se reconoce como término k-ésimo o particulares de la sucesión. Además, representan por medio de descomposiciones aritméticas.

Considera ahora la sucesión siguiente:

7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, . . .

a) En equipo analicen los términos de la sucesión. Obtengan el término a_{20}.

- ¿Cuántas diferencias deben sumarse al primer término de la sucesión para obtener a_{20}?

Figura 8. *Sistema de representación numérico en primer año de Secundaria. Tomada de Cantoral, Farfán, Cabañas-Sánchez, Ferrari, y Lezama, 2014, p. 233).*

El *sistema de representación simbólico*, se identificó en los libros de texto como el término general de las sucesiones se representa por expresiones algebraicas de forma recurrente o polinómica. Por ejemplo, el término general de una sucesión es expresado: $a_n = a_1 + (n-1) * d$, otro ejemplo es la representación simbólica de las expresiones algebraicas para hallar los coeficientes de una sucesión cuadrática (*véase figura 9*).

TABLA 3

X	1	2	3	....
Y	$a(1)^2 + b(1) + c = a + b + c$	$a(2)^2 + b(2) + c = 4a + 2b + c$		...
Primera diferencia (Δy)	$(4a + 2b + c) - (a + b + c) = 3a + b$		...	
Segunda diferencia ($\Delta^2 y$)	$(5a + b) - (3a + b) = 2a$			

Figura 9. *Sistema de representación simbólica en tercer año de Secundaria. Tomado de Cantoral, Farfán, Cabañas-Sánchez, Ferrari, y Lezama, (2014, p. 178)*

El *sistema de representación verbal*, se asocia con el lenguaje matemático académico (Cañadas, 2007). Se considera en este sistema de representación, el lenguaje oral y escrito. Los libros de textos evidencian que las sucesiones pueden ser expresadas por medio del lenguaje matemático y las relacionan con ejemplos cotidianos, como las sucesiones de números impares, la sucesión de Fibonacci, los números triangulares, entre otros (*véase figura 10*).

> Las primeras progresiones aritméticas y geométricas, tanto en Egipto como en la India, aparecieron alrededor del siglo XVI a. n. e. Podemos ver cómo, en los años 2000 a. n. e. al 1750 a. n. e. aproximadamente, aparecen en forma de verso en el *Mandala II* del *Ṛg Veda*.
>
> *Indra, ven hacia aquí con dos corceles castaños,*
> *Ven con cuatro, con seis cuando se te invoca.*
> *Ven tú con ocho, con diez, para beber el Soma.*
> *He aquí el jugo, valiente guerrero, no lo desdeñes*
> *¡Oh Indra!, ven tú aquí habiendo enganchado a tu carro*
> *veinte, treinta, cuarenta caballos.*
> *Ven tú con cincuenta corceles bien adiestrados, Indra,*
> *sesenta o setenta, para beber el Soma.*
> ***Mandala II***

Figura 10 *Sistema de representación verbal en primer año. Tomado de Cantoral, Farfán, Cabañas-Sánchez, Ferrari, y Lezama, (2014, p. 3.)*

Las representaciones gráficas de las sucesiones con las que se trabajan en la enseñanza de las sucesiones en secundaria en México, son las de plano cartesiano o recta numéricas. La naturaleza de este tipo de sucesiones es en las matemáticas discretas, por tanto para representarlas se asigna un punto a cada término k-ésimo de la sucesión. La abscisa corresponde al lugar que ocupa y la ordenada, con el valor numérico de ese término. La representación en la recta numérica, se realiza mediante la ubicación de un punto por cada uno de los términos de la sucesión. La representación de una sucesión cuadrática en el plano cartesiano es una parábola (*véase figura 11*).

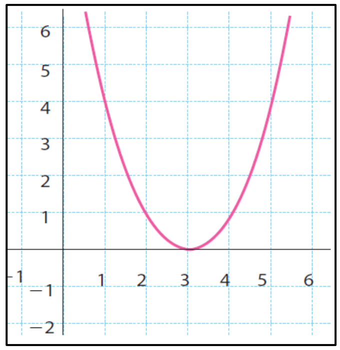


Figura 11. *Sistema de representación gráfico. Tomado de Cantoral, Farfán, Cabañas-Sánchez, Ferrari, y Lezama (2014, p 36).*

El sistema de representación pictórico de las sucesiones se relaciona con lo visual, los objetos figurales son organizados en relación con los términos k-ésimo y representan el comportamiento de la sucesión de números naturales. La mayoría de las representaciones para la enseñanza de las sucesiones en secundaria (México) utilizan configuraciones de gráficos como cuadrados, rectángulos, círculos, configuraciones puntuales (*véase figura 12*).

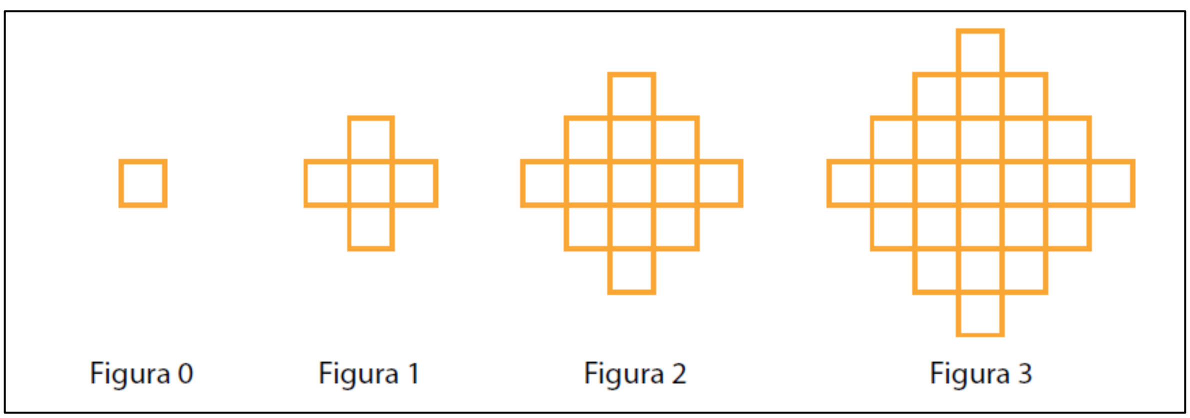


Figura 12. *Sistema de representación pictórico. Tomada de Cantoral, Farfán, Cabañas-Sánchez, Ferrari, y Lezama, (2014, p. 37)*

3.4 Contextos y modos de usos

3.4.1 Revisión histórica de las sucesiones

Las evidencias históricas reportan que las sucesiones han sido utilizadas desde los inicios de las matemáticas y han permitido consolidar su uso a lo largo de la historia. El uso primitivo de las sucesiones, está relacionado con el conteo, ya que los primeros hombres estaban interesados en organizar las cantidades en forma creciente y progresiva a través de los números, como símbolos que los representaba. De esta manera, se fue construyendo la sucesión natural de números, relacionadas con las progresiones aritméticas.

Las progresiones aritméticas y geométricas son los primeros tipos de sucesiones, y las más utilizadas desde la antigüedad por su cercanía a problemas planteados en la vida cotidiana, herramienta útil para la resolución de ciertos problemas matemáticos (Cañadas, 2007).

La civilización mesopotámica registra que realizaron sumas con progresiones aritméticas y geométricas, como también las sucesiones de cuadrados. Según los historiadores, para el cálculo de $\sqrt{2}$ esta civilización aplicaron inconscientemente una sucesión de la forma:

$$x_0 = 1 \, , \, x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} \quad .$$

Por consiguiente esta sucesión es convergente a $\sqrt{2}$. Esta civilización estudiaron numerosos problemas matemáticos, algunos de ellos estaban relacionados con el interés aritmético o algebraico, que incluye la suma de términos de una progresión aritmética o geométrica de base 2, la suma de los cuadrados de los diez primeros números mediante una expresión algebraica correcta y una ecuación exponencial resuelta con aproximaciones (Rey Pastor & Balbini, 1997).

Por su parte, la civilización egipcia no se centraron únicamente en operaciones aritméticas básicas, ellos evidenciaron también la resolución de problemas por medio de progresiones aritméticas y geométricas, cuyos problemas se encuentran registrados en el Papiro de Rhind (Ribnikov, 1974). Los problemas *39, 40* y *64* implican las progresiones aritméticas y el problema *79*, una progresión geométrica.

La civilización griega, utilizaron métodos de sumatoria de progresiones aritméticas simples y resultados de tipo $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$. Los griegos fueron quienes formalizaron la aritmética e inventaron una notación para representar las generalizaciones. Pitágoras con sus discípulos, organizaron los conceptos de sucesiones y series dadas por los mesopotámicos y de los egipcios. Algunos de sus aportes a la aritmética fueron las definiciones de números pares e impares, por medio de una sucesión para cada una de ellas, y también la clasificación de los números poligonales: triangulares, cuadrados, pentagonales,.., formando sucesiones y series aritméticas.

Asimismo, el libro IX de los Elementos de Euclides (siglo III a.c) contiene en uno de sus apartados, la fórmula para determinar la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica. Euclides, demostró que la sucesión de los números primos es infinita. Consideró también, que el algoritmo para calcular el mínimo común divisor es una sucesión.

En esta civilización se reconoce los aportes hechos por Eudoxo y Arquímedes, el método de exhsaución. Arquímedes, expresan en lenguaje geométrico la cuadratura de la parábola, que en lenguaje algebraico es la suma de una progresión geométrica de la forma:

$$\sum_{r=0}^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^r+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{4}{3}.$$

Otra de sus demostraciones incluyen progresiones aritméticas y geométricas, tales como la esferoide, elipsoide, espirales, cilindro, entre otras.

Por otro lado, Zenón de Elea planteó en sus célebres paradojas, aparentes absurdos, uno de ellos consistió en dividir el espacio y el tiempo indefinidamente. En la paradoja de la dicotomía, Zenón argumenta que un corredor no llega a su meta nunca, porque primero debe recorrer la mitad y luego la mitad de la mitad etc. En términos actuales, Zenón argumenta que dado que la suma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, ... es infinita, por tanto el corredor nunca podrá llegar al final. Estas explicaciones están relacionadas con las progresiones y la serie geométrica de razón un medio (Gacharná León, 2012).

En la Edad Media, las sucesiones se denominaban series o progresiones, nombre derivado del latín progressio. La palabra serie se utilizó por primera vez por algunos autores británicos del siglo XVII, al referirse a las series infinitas en conexión con las secuencias infinitas utilizadas por los algebristas. En el ámbito latino, se ha utilizado el término progresión, que se ha mantenido hasta nuestros días (Smith, 1958). Durante esta época Bhaskara, plantea en su más conocida obra, el Lilavati, diversos problemas sobre progresiones aritméticas y geométricas.

Se da la aparición del matemático Leonardo de Pisa, reconocido por el cálculo de una progresión relativa a una pareja de conejos, en la actualidad se le atribuye aplicabilidad en diferentes fenómenos de la vida cotidiana. Esta sucesión es conocida como sucesión de Fibonacci. Se reconoce que las obras de Leonardo están vinculadas con el estudio de sucesiones recurrentes y series.

En la época del renacimiento, en el siglo XV Nicolás Chuquet estaba familiarizado con las reglas para exponentes negativos y en el siglo XVI el alemán Michael Stifel extiende la exponencial a exponentes negativos y fraccionarios. Se afirma que él publicó una tabla de sucesiones, la cual contiene los números enteros desde -3 hasta 6 y las correspondientes potencias de 2 y señala en una parte de su libro la siguiente observación: "*Se podría escribir todo un libro nuevo sobre las propiedades maravillosas de esos números, pero debo ponerme coto a mí mismo en este punto y pasar de largo con los ojos cerrados*". Más adelante agrega: "*La adición en la sucesión aritmética corresponde a la multiplicación en la geométrica, lo mismo que la sustracción en aquella corresponde a la división en ésta*". Presentó una comparación entre los términos de una progresión aritmética de razón 1 que llama números, con los de una progresión geométrica de razón 2 que llama exponentes.

Neper (1550-1617) aprovechó la relación entre la progresión aritmética de los exponentes y la progresión geométrica de las potencias que permitía reducir los productos a sumas. Él se interesó por intentar tapar los numerosos vacíos que se encuentran entre las sucesiones geométricas, estas tienen la propiedad de que entre más alejadas están de los primeros términos más grandes son los espacios entre un término y otro, para ello establece como razón de la progresión geométrica un número que hiciera que los avances entre un término cuya bases fueron $0{,}9999999$ o $1 - 10^{-7}$.

En la edad contemporánea, Isaac Newton logró generalizar los métodos para trazar líneas tangentes a curvas y para calcular el área encerrada bajo una curva, estableciendo que los dos procedimientos eran operaciones inversas. En una de sus publicaciones, que se ha considerado de suma importancia por sus aportes a las matemáticas, introduce en sus métodos infinitesimales el concepto de fluxión, en el habla del papel de las sucesiones infinitas en el nuevo análisis y de las operaciones que se pueden efectuar con esas sucesiones. La primera parte de la obra se refiere justamente a la reducción de «términos complicados» mediante división y extracción de raíces con el fin de obtener sucesiones infinitas. A Newton se le reconoce como otro de sus mayores aportes el Teorema del Binomio, cuyo teorema es capaz de desarrollar cualquier potencia de sumandos como una serie finita de términos.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^{n-k} y^k$$

Se reconoce que Leibniz encuentra todas las propiedades que los pitagóricos hallaron a través del álgebra geométrica, como son la suma de los números impares, de los pares, de los cuadrados, etc. Y va más allá cuando extiende la propiedad a sumas infinitas, al encontrar que: $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = a_1$, donde la sucesión b_i es decreciente y está definida por $b_i = (a_i - a_{i+1}), i = 1,2,3, \ldots$ Con su fascinación por las series, continúo estudiando su comportamiento hasta llegar a inventar el cálculo.

Uno de los grandes matemáticos quien contribuyó aportes significativos a las series y sucesiones fue Leonhard Euler, quien por medio de técnicas rigurosas y combinación de análisis y aritmética, logró valiosas demostraciones tales como:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

Además, se le atribuye la respuesta al gran problema planteado varios años antes por Jakob Bernoulli, el que se dio en llamar el problema de Basilea, que no es otro que calcular la suma de los inversos de los cuadrados de los números naturales.

Las series y sucesiones también fue objeto de estudio por Agustín Cauchy, sus investigaciones se centraron en la convergencia y la divergencia de las series infinita. En consecuencia, caracterizó el concepto de límite mediante las sucesiones. Otro matemático de la época contemporánea fue Fourier quien desarrolló una función en forma de series infinitas de funciones trigonométricas que se conoce como series de Fourier y tienen numerosas aplicaciones en prácticamente en todas las áreas científico-técnicas con las que se hay que modelizar numerosos datos y procesos complejos.

3.4.2 Aplicación de las sucesiones

El sentido de uso de las sucesiones en el currículo mexicano, se presenta por medio de la resolución problemas y se relaciona con algunos contextos y situaciones que se aplica el contenido matemático. La aplicación se relaciona con otras áreas como la biología, la física y la economía.

Biología

Las sucesiones son utilizadas en procesos naturales como la bipartición de la célula, en la manera en que crece el número de conejos de una granja, entre otros. El cálculo de una progresión relativa a una pareja de conejos, tiene múltiples aplicaciones en fenómenos naturales y es conocida como *sucesión de Fibonacci.* Se trata de una sucesión muy simple, en la que cada término es la suma de los dos anteriores. La sucesión comienza por el número 1, y continúa con $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584 \dots$, ya que: $\mathbf{1} = 0 + 1;\ \mathbf{2} = 1 + 1;\ \mathbf{3} = 1 + 2;\ \mathbf{5} = 2 + 3;\ 8 = 3 + 5;\ \mathbf{13} = 5 + 8 =;\ \mathbf{21} = 8 + 13$ ... La situación consiste en que una pareja de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil, y a partir de ese momento cada vez engendra otra pareja de conejos, que a su vez (tras llegar a la edad de la fertilidad) engendrarán cada mes una pareja de conejos. ¿Cuántos conejos habrá al cabo de un determinado número de meses? (*véase figura 13*).

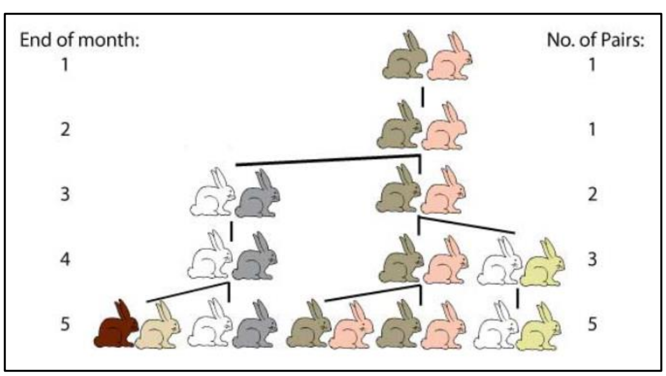


Figura 13. *Uso de la sucesión Fibonacci en biología*

Física

Galileo Galilei a través de la experimentación, diseñó planos inclinados para determinar la caída libre de los objetos. Establece dos variables que hacen parte del fenómeno observado, el tiempo y la distancia; luego, analiza los datos recolectados y reconoce que hay un comportamiento constante entre las magnitudes, que le permite generalizar. Una de las herramientas matemáticas utilizadas por Galilei, fue la diferencia de los valores medidos en los experimentos realizados. Galilei (1638) reconoce que si los tiempos iguales tomados sucesivamente desde el inicio del movimiento, recorren las distancias de *1, 3,5,7,…* esto permite establecer que la velocidad aumenta en tiempos iguales, que se según esta sucesión de números simples, las distancias recorridas en relación de los tiempos, incrementan según la sucesión de números impares, a contar desde la unidad. Es ahí, donde se establece que la parábola, que permite explicar el fenómeno.

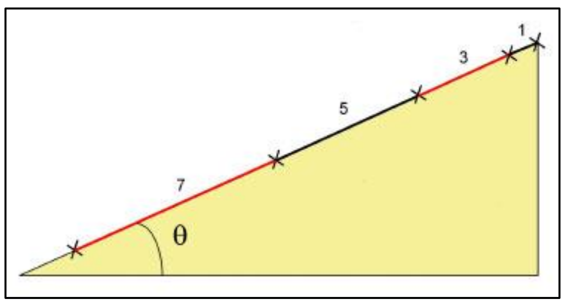


Figura 14. *Uso de la sucesión cuadrática Galilei en física*

Economía

Una de las aplicaciones de las sucesiones en la economía, está relacionado con el manejo del capital y el interés simple. El interés simple es la utilidad que se obtiene de una inversión sin agregarle las ganancias.

La rentabilidad inicia con un capital, que corresponde a la cantidad inicial del dinero invertido ($a_1 = C$). Es decir, se dispone de un capital C y proporciona un tanto por ciento anual de interés (i) en determinado tiempo, entonces:

• Al cabo de un año, el capital se incrementa en $C + Ci$

• En dos años será de $(C + Ci) + Ci = C + 2Ci$

• Y en *n* número de años aumentará $C + nCi$

Por ejemplo, Adriana quiere invertir $8500.00 en la caja de ahorro, la cual le ofrece un interés simple por su inversión que consistió en darle dos pesos por cada cien de su capital inicial. Ella quiere calcular cuánto dinero obtendría si invierte su capital hasta diez años. El incremento de su inversión financiera es:

Tabla 9. *Incremento por año de la inversión de Adriana*

Tiempo (año)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Inversión (Pesos)	8670	8840	9010	9180	9350	9520	9690	9860	10030	10200

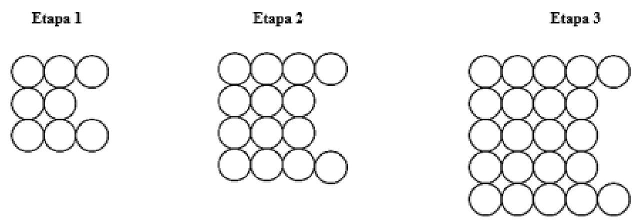
Los ingresos de Adriana están determinados por una progresión aritmética, para *n* número de años:

$$a_n = 8500 + n * (170)$$

3.5 Consideraciones sobre los organizadores curriculares para el diseño de las tareas del instrumento

El análisis del contenido escolar matemático (Rico & Moreno, 2016) permitió una descripción de la sucesión cuadrática A través de este método, se obtuvo información general sobre las sucesiones y en particular las de tipo cuadrático, principalmente en sus estructuras conceptuales, sistemas de representación que incluye los procesamientos en un sistema de representación determinado y, las conversiones entre sistemas, como también sus sentidos y modos de usos. Se tuvo en cuenta el razonamiento inductivo, que considera los elementos de la sucesión: términos particulares y generales. Además, los sistemas de representación tomados son el numérico, verbal, pictórico y algebraico (*véase Tabla 10*).

Tabla 10. *Indicadores para el diseño de las tareas del instrumento*

<table>
<tr><th>Estructura Conceptual</th><th>Sistemas de representación</th><th>Sentido y modos de usos</th></tr>
<tr>
<td>
1. La sucesión en los números naturales como conjunto ordenado de objetos.
2. Tipo de sucesión: aritmética
3. Propiedades de la sucesión cuadrática:
▪ Monotonía: Estrictamente creciente
▪ Finitud: Infinita
▪ Acotación: No acotada
▪ Convergencia: Divergente:
▪ Recurrencia: de orden 2
4. Progresión de orden dos: $a_n = c_0x^2 + c_1x + c_2$
5. Términos k-ésimo y general de la sucesión.
6. Razonamiento inductivo: Trabajo con términos k-ésimo de la sucesión cuadrática hasta la generalización expresada con la variable *n* (término general). Se consideró dos pasos del Modelo del razonamiento inductivo (trabajo con casos particulares hasta la generalización)
7. Estrategias previas consideradas:
▪ Métodos de diferencia.
▪ Organización de tablas.
▪ Recurrencia
</td>
<td>
• Sistema de representación pictórico (patrón figural)
Tarea 1:


Tarea 2:

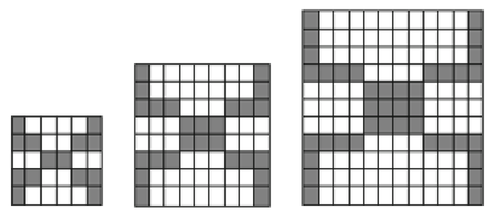



Figura 1 Figura 2 Figura 3
• Conversión del sistema de representación pictórico a otros (numérico, simbólico, verbal, tabular)
</td>
<td>
Se consideró para la tarea 1, una situación problema que consiste en el crecimiento del patrón figural de forma constante. Además, la visualización de la organización de las piedras en cada una de las etapas, para explicar su comportamiento.

Para la tarea 2, se consideró la configuración de los objetos del patrón asociado con el patrón cuadrático de la rana.
</td>
</tr>
</table>

Capítulo 4

Metodología de la investigación

El estudio describió el razonamiento inductivo que evidencian profesores de Matemáticas de secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones cuadráticas. El diseño de las tareas considera el análisis de los significados de los contenidos matemáticos escolares del método *Análisis Didáctico* (Rico, Lupiáñez, & Molina, 2013; Rico & Moreno, 2016) y el modelo Teórico del Razonamiento Inductivo de Cañadas y Castro (2007). Se sometieron a un proceso de validación, con una muestra distinta a la que participó en el estudio exploratorio. En este capítulo se describe el enfoque de la investigación, el estudio piloto, las características de los sujetos participantes, las técnicas e instrumentos, la aplicación y la organización de las categorías de la información obtenida para su respectivo análisis.

4.1 Enfoque de la investigación

La investigación es de tipo exploratoria (Hernández, Fernández, & Baptista, 2014), que aborda el razonamiento inductivo en profesores de secundaria en servicio, siendo este un tema poco estudiado. Además, es descriptiva porque se analiza cómo es y cómo se manifiesta un fenómeno y sus componentes.

4.2 Prueba piloto

Previo a la exploración del razonamiento inductivo en los profesores de matemáticas que participaron en el estudio, se realizó una prueba piloto, con el fin de validar el cuestionario a usar en la exploración. El cuestionario consistió de cuatro tareas *(Anexo I)* en la generalización de sucesiones cuadráticas a través de patrones figurales. Estas tareas demandaron el razonamiento inductivo, dado que ubicaron al sujeto (o profesor), a iniciar su trabajo con casos particulares hasta llegar a casos generales. Se adaptaron de trabajos previos de Rivera (2013), Cantoral, Farfán, Cabañas-Sánchez, Ferrari y Lezama (2014), Rivera (2010) y Barrera, Castro y Cañadas (2008). Esta adaptación, consistió en considerar los patrones figurales de sucesiones cuadráticas, en razón de que en estos trabajos, el énfasis estaba sólo en la generalización. De ahí que para cada patrón, se formularon preguntas que permitieran estudiar el razonamiento inductivo.

4.2.1. Validación de la prueba piloto

El cuestionario de la prueba piloto se sometió a validación con cinco profesores de matemáticas, quienes laboran en una institución colombiana de carácter privado en los grados de secundaria. Sus años de experiencia en el campo de la docencia oscilan de los cinco a los treinta años (*véase* Tabla 11). De ellos, cuatro con formación profesional, Licenciatura en Matemáticas, y el otro, en Matemática Pura. Los aspectos a validar, fueron: tiempo que le tomó a los profesores trabajar con las tareas, ambigüedad en las preguntas, posibles respuestas en evidencia del razonamiento inductivo y aspectos relacionados con el mismo, en el contexto matemático de las sucesiones cuadráticas.

Tabla 11. *Información de los profesores de secundaria en Colombia*

Profesor	Experiencia	Formación
1	*30 años*	*Licenciado*
2	*6 años*	*Matemático Puro*
3	*9 años*	*Licenciado*
4	*5 años*	*Licenciado*
5	*14 años*	*Licenciado*

4.2.3 Resultados de la validación

Cinco aspectos se reconocen de la validación del cuestionario de la prueba piloto, y que dieron lugar a su rediseño. Son los siguientes:

1. El tiempo aproximado que los profesores invirtieron en resolver las tareas fue de 3 a 5 horas.
2. En la *tarea 1* dedicaron mayor tiempo. En razón de que se situó a los profesores a trabajar de manera implícita, con dos variables en el marco de una figura formada por cuadrados de colores blancos y grises del mismo tamaño, e inscrita en un rectángulo. De igual modo, porque trabajaron de manera implícita con la relación funcional directa e inversa de la sucesión cuadrática involucrada en esta tarea. Esta tarea proporcionó información sobre el razonamiento inductivo que evidencian los profesores, la cual refiere a: a) Trabajaron con casos particulares, b) Se apoyaron de

gráficos y tablas para organizar casos, c) identificaron el patrón de los cuadrados grises y blancos así como de los que componen el rectángulo, d) formularon conjeturas, y; e) establecieron la generalización por medio de representaciones algebraicas y verbales. Esta generalización, la justificaron por medio de nuevos casos particulares y validación de los suministrados en el patrón figural. Reconocieron el comportamiento de la sucesión cuadrática y fueron expresadas de diferentes formas algebraicas.

3. En la *tarea 2*, los profesores evidenciaron dificultades en su planteamiento así como con el contexto, el geométrico. Ello requirió instruirlos, a fin de que la comprendieran. Otro aspecto fue el contexto de la tarea, el geométrico. Aquí, se les ubicó en una situación de un triángulo rectángulo, en su interior con otro rectángulo. Algunos profesores, optaron por utilizar sus conocimientos previos en geometría para entender y dar respuesta a las preguntas planteadas, realizaron procesos algorítmicos para determinar el valor numérico de la hipotenusa y catetos, asociando la generalidad con segmentos y área del triángulo. Otra de las dificultades, fue la ubicación de un punto *P* en diferentes posiciones en la representación gráfica planteada en la tarea.
4. En la *tarea 3*, los profesores consideraron semejanzas con la *tarea 1*. Optaron por trabajar con casos particulares, realizando conteos de los puntos negros y lados correspondientes en cada figura. Algunos, extendieron el patrón figural para comprender el comportamiento y establecer el patrón correspondiente. La primera cuestión, fue con respecto a la etapa del razonamiento inductivo, generalización, pero los profesores realizaron el recorrido de las etapas iniciando con trabajos con casos particulares e identificando el patrón. Sin embargo, presentaron algunas dificultades para establecer la regla general respecto de las líneas y puntos del patrón figural.
5. En la resolución de la *tarea 4*, la sucesión cuadrática correspondiente fue de la forma $a_n = \frac{(3n^2+n)}{2}$. Los profesores presentaron mayor dificultad para establecer esta regla general, una de las posibles causas es por el cociente que conforma la sucesión. Identificaron el patrón de *recurrencia* en cada uno de los pisos con relación a la cantidad de naipes. En esta tarea, solo se suministró la cantidad de naipes en la tercer figura, por lo cual los profesores identificaron la cantidad de naipes en las anteriores figuras y posteriores hasta la figura diez, que corresponde al castillo de naipes con

diez pisos, y dar respuesta a la primera cuestión, identificando el patrón, estableciendo la suma del término anterior por cada piso. Sin embargo, ningún profesor determinó una regla general correcta para esta sucesión cuadrática.

Los resultados de la validación de las tareas de la prueba piloto, permitieron configurar el cuestionario de exploración. En este sentido, se determinó que sólo una de las tareas de la prueba piloto se mantendría y qué aspectos se considerarían en su rediseño. La tarea rediseñada fue la del *patrón cuadrático de la rana* (Rivera, 2013).

4.3 Contexto y participantes

Los participantes de esta investigación fueron treinta y siete profesores de matemáticas de secundaria en México, con experiencia de uno a veinticinco años aproximadamente en la enseñanza de las matemáticas en primero, segundo y tercer grado (*véase Tabla 12*). Su participación en el estudio se dio a partir de talleres, que el grupo de investigación ha desarrollado para esta población en el marco del razonamiento inductivo. Para el análisis de los datos, se escogieron intencionalmente a seis profesores a partir de la variedad en sus respuestas dadas en las tareas, y describir el razonamiento inductivo y procedimientos de los profesores al resolver tareas de generalización con sucesiones cuadráticas para establecer diferentes perfiles, obteniendo mayor información.

Tabla 12. *Información de los profesores de Secundaria en México*

Profesor	*Experiencia (años)*	*Grados donde enseñan actualmente*	*Formación profesional*
P1	3	Tercero	Educación Secundaria especialización Telesecundaria
P2	4	Primero y segundo	Educación Secundaria especialidad Matemáticas
P3	2	Primero	Educación Secundaria especialización Telesecundaria
P4	20	Primero, segundo y tercero	Matemáticas Educativa
P5	7	Primero, segundo y tercero	Matemática Educativa
P6	5	Primero	Educación Secundaria especialización Telesecundaria
P7	3	Segundo y tercero	Educación Secundaria especialidad Matemáticas
P8	15	Primero, segundo y tercero	Educación Secundaria especialidad Matemáticas
P9	8	Primero	Educación Secundaria especialidad Matemáticas
P10	3	Primero y segundo	Educación Secundaria especialidad Matemáticas
P11	13	Primero, segundo y tercero	Educación Secundaria especialidad Matemáticas
P12	3	Primero, segundo y tercero	Educación Secundaria especialidad Matemáticas
P13	6	Primero, segundo y tercero	Educación Secundaria especialidad Matemáticas
P14	4	Segundo	Educación Secundaria especialización Telesecundaria
P15	17	Segundo	Enseñanza de las matemáticas
P16	1	Segundo	Educación Secundaria especialización Telesecundaria

4.4 Tareas de exploración

Con base en los resultados de la validación, se construyó el cuestionario exploratorio. Se sustenta de dos tareas adaptadas (*véase Tabla 13*) de los estudios de Kirwan (2017) y Rivera (2013), que refieren a la generalización de sucesiones cuadráticas. La adaptación consistió en tener en cuenta el contexto de los patrones figurales -sistema de representación pictórico, propuestos en estos estudios. Con base en ello y en el objetivo de esta investigación, se formularon las preguntas con las que se examinó el razonamiento inductivo de los participantes. Las tareas se presentaron a los profesores en un ambiente de lápiz y papel.

La *tarea 1* es una adaptación del estudio de Kirwan (2017). El contexto es la generalización de una sucesión cuadrática, constituida por un patrón figural creciente, donde se favorece la visualización. En ella, se sitúa al profesor a trabajar con términos particulares, cercanos y lejanos, y con ello, se le demanda determinar una regla que explique el comportamiento de la sucesión.

Son dos las características que Kirwan (2017) reconoce en la sucesión articulada a esta tarea. Una de ellas, es que favorece el uso de múltiples reglas para explicar el comportamiento de dicha sucesión. Reconoce que las más frecuentes usadas por la población que participó en su estudio, fueron las siguientes:

Regla 1: $(d+2)^2-d$

Regla 2: $(d+1)(d+2)+2$

Regla 3: $2(d+2)+d(d+1)$

Otra característica, es que lo visual contribuye a que se sustenten en la descomposición de la figura de cada etapa del patrón figural, en otras. En su estudio por ejemplo, observó que en algunos casos, completaron las figuras para situarse a trabajar sobre “un cuadrado”, otros la descompusieron (partición) y se ubicaron a trabajar sobre “un rectángulo”. Estos aspectos fueron básicos para determinar su inserción en el cuestionario exploratorio.

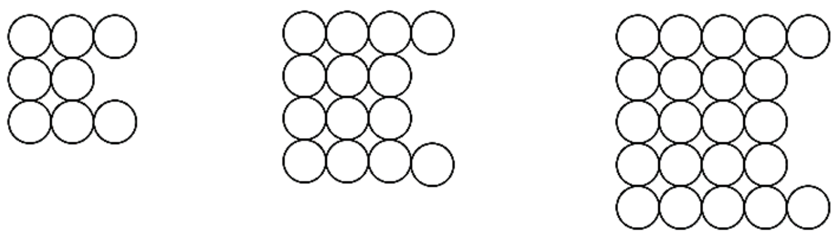
La *tarea 2,* se adaptó de los estudios de Rivera (2013), quien la usó con estudiantes de secundaria en el contexto de la generalización de patrones. El objetivo de esta tarea para

Rivera (2013), consistió en relacionar la generalización con la acción abductiva-inductiva sobre objetos, que implica emplear diferentes formas de contar y estructurar objetos o partes discretas en un patrón de una manera algebraicamente útil y acción simbólica, que implica traducir en la forma de una generalización algebraica.

Tabla 13. *Tareas usadas en la exploración.*

Tarea 1. En la construcción de un patio, se colocan piedras circulares de igual tamaño. Para observar el avance que sigue la construcción, se toma una foto al patio por etapa.

Etapa 1 **Etapa 2** **Etapa 3**



a. ¿Cuántas piedras circulares se han colocado para la sexta etapa si en la construcción del patio se avanza de la misma manera? Justifica tu respuesta.

b. ¿Cuántas para la etapa 50? Justifica tu respuesta.

c. ¿Cómo se puede hallar la cantidad de piedras circulares para cualquier número de etapa? Describe ampliamente tu respuesta.

Tarea 2. Observa la secuencia de las siguientes figuras. Justifica ampliamente el proceso de solución en cada una de las preguntas.

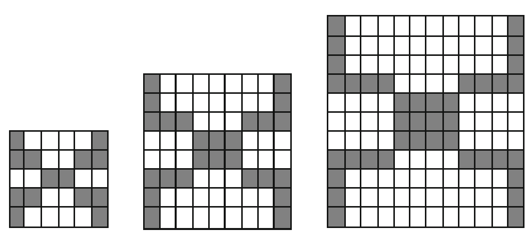


Figura 1 **Figura 2** **Figura 3**

a. ¿Cuántos cuadrados grises conforman la figura 5?

b. ¿Cuántos cuadrados grises conforman la figura 7?

c. ¿Cuántos cuadrados grises conforman la figura *n*?

Los aspectos relacionados con las tareas responden a las demandas del currículo, y están vinculados con los organizadores del análisis del contenido matemático escolar (Rico y Moreno, 2016), tales como elementos matemáticos, sistemas de representación verbal y pictórico (patrones figurales), descritos en el capítulo anterior. En específico, el patrón creciente, la progresión aritmética de orden 2 en los números naturales, términos particulares, términos generales. Las sucesiones cuadráticas que corresponden a la tarea 1 y 2, son de la forma $a_n = n^2 + 3n + 4$ y $a_n = n^2 + 9n$ +8 respectivamente, que se pueden reconocer por medio del comportamiento de la progresión, diferencias entre los términos, visualización de la distribución de los patrones figurales, que corresponden a áreas de cuadrado o rectángulos, descomposición de las figuras y regla general de la sucesión cuadrática. En México, las sucesiones en secundaria se estudian durante los tres años, desde su representación por medio de números y figuras, hasta el desarrollo de habilidades en la construcción, formulación y obtención en la regla general de dicha sucesión (SEP, 2011). Las de tipo cuadrático son estudiadas en el tercer año.

El orden de las preguntas pretende evidenciar el razonamiento inductivo, a partir de casos particulares hacia los generales. Con respecto al patrón, se tiene en cuenta los resultados obtenidos en investigaciones previas, que reportan que la visualización y la distribución espacial, aspectos que contribuyen a la generalización efectiva de patrones no lineales (e.g, (Amit & Neria, 2008; Krebs, 2005). Además, estas tareas favorece el uso de diferentes sistemas de representación para evidenciar el razonamiento inductivo.

4.4.3 Recogida de la información

La aplicación de las tareas a los profesores de matemática de secundaria, se realizó durante un taller desarrollado por el grupo de investigación en el que participa la investigadora, en el VII Congreso Regional sobre la Enseñanza de las Matemáticas realizado en la Escuela Primaria Federal “Juan Ruíz Alarcón” y en la Escuela Secundaria Técnica No 54 “Lorenzo Curiel Bazán” dirigido a profesores de Matemáticas, y que convoca la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas en México. Se desarrolló en el estado de Guerrero, México.

El taller se desarrolló en tres momentos (*véase figura 15*). El primero, fue cuando los profesores resolvieron las tareas de manera individual. Posteriormente, se hizo la recolección de las producciones escritas. Con base en sus respuestas, se identificó a los profesores que presentaron patrones de respuestas diferentes.

Seguidamente, se discutió en grupo las formas de proceder y razonar por los profesores de matemáticas, en la solución de las tareas realizadas, bajo la dirección de un moderador, que fue uno de los investigadores colaboradores. Aquí los profesores explicaron el razonamiento, apoyándose de la pizarra. Etapa que también evidenció formas de razonamiento, en particular, el inductivo. Además, se contó con la participación de otros dos investigadores, quienes recolectaron información por medio de toma de notas de campo, fotografías, recolección del instrumento, grabaciones de audio-video y la observación.

Figura 15. *Momentos de la aplicación de las tareas*

4.5 Categorías de análisis de los datos

Las categorías para el análisis de los datos consideran el modelo de los pasos del razonamiento inductivo y los sistemas de representación de los profesores que utilizan los profesores, incluye los procesamientos y conversiones de un sistema a otro**.** Los datos que se discuten en esta memoria, provienen de los procesos de solución dadas por los profesores en las *tarea 1* y *2*. Se toma como base las producciones escritas y verbales de los profesores de Matemáticas en secundaria.

Tabla 14. *Categoría para el análisis de datos.*

Categorías	**Subcategorías**
Pasos del Razonamiento Inductivo	Trabajo y organización de casos particulares Identificación de patrón Formulación y justificación de conjetura Generalización
Sistemas de Representación	Pictórico Verbal Numérico Tabular Algebraico (funcional o recurrencia)

Categoría de los pasos del razonamiento inductivo

El modelo teórico del razonamiento inductivo propuesto por Cañadas y Castro (2007), considera que los pasos se presentan en un orden ideal, que inicia con el trabajo de casos particulares hasta la generalización. Pero, esto no significa que se tenga que presentar o seguir todos los pasos que se han propuesto para el razonamiento inductivo. No es un proceso lineal y se pueden repetir pasos que se hayan realizado con anterioridad.

Trabajo y organización de casos particulares

Se considera que un profesor está trabajando con casos particulares, cuando evidencia el tratamiento de los términos k-ésimo de la sucesión cuadrática presentada a través del patrón figural, mediante observaciones y cálculos directos de las etapas en las tareas 1 y 2 de la investigación. El trabajo con casos particulares en las tareas, se identifica cuando los profesores realizan conteos de los objetos de los patrones figurales y calcula nuevos términos k-ésimo de la sucesión cuadrática planteada.

Su organización se reconoce a partir de la sistematización de los casos particulares reconocidos mediante tablas, gráficos o cualquier otro sistema de representación.

Identificación de patrones

La identificación del patrón se evidencia cuando los profesores perciben la regularidad presente en los casos particulares de las etapas o número de figura según la tarea, cuya representación es por medio de estructuras de tipo aditiva o multiplicativa, que depende del reconocimiento del comportamiento del profesor. Además, se considera como parte de la identificación del patrón, cuando los profesores se apoyan de la recurrencia, que relaciona la diferencias y los términos consecutivos con los anteriores.

Formulación y justificación de conjeturas

Se identifica la formulación de conjeturas por los profesores, cuando proponen una hipótesis sobre los casos trabajados o no, que pueden estar relacionada con el comportamiento de los términos entre las etapas. Esta conjetura, puede ser una regla general que no ha sido verificada o justificada. Las conjeturas pueden ser expresadas simbólicamente.

Generalización

Se establece que cuando el patrón reconocido se transforma en una regla general y verifica para nuevos casos particulares, el profesor ha generalizado. Esta generalización puede ser representada de forma verbal, aritmética o algebraica.

Sistemas de representación

Se destaca que los sistemas de representación más utilizados por los profesores son: verbal, pictórico, tabular, numérico y algebraico. A continuación se ejemplifican los sistemas de representación empleados en investigaciones previas (Rivera, 2013), que relacionan el sistema de representación pictórico con el sistema de representación algebraico, que permite analizar la forma de razonar y expresar del estudiante en el contexto de la generalización de la sucesión cuadrática.

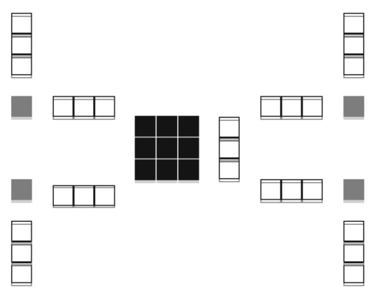


Figura 16.*Sistema de representación pictórica en la etapa 3. Tomada de Rivera (2013)*

La relación entre el sistema de representación algebraica y pictórica está asociada en la descomposición del sistema de representación pictórico*,* x^2 se refiere al número de cuadrados en el cuadrado negro medio, $9x$ se refiere al número de cuadrados en los 9 rectángulos sin sombrear, 4 se refiere a los cuadrados grises. $x^2 + 9x + 4 = n$, n corresponde al número total de cuadrados en la etapa n

Capítulo 5

Análisis de datos

En este estudio, se investigó el razonamiento inductivo que evidenciaron profesores de matemáticas de secundaria, al resolver tareas que demandan la generalización de sucesiones cuadráticas, en el marco de patrones figurales. Se analiza con base en el modelo inductivo de Cañadas y Castro (2007) y los sistemas de representación (Lupiañez, 2016). Los hallazgos obtenidos de las producciones escritas y verbales (estas últimas, de las explicaciones que dieron en la pizarra) se presentan bajo dos categorías de análisis: pasos del razonamiento inductivo y sistemas de representación. Para organizar la información, los dieciséis profesores fueron codificados en *P1, P2, P3, P4,…, P16.*

Categoría I: Pasos del razonamiento inductivo

Tarea 1.

La tarea *la piedra del patio* fue resuelta por los dieciséis profesores de secundaria (*véase Tabla 15).* Las producciones evidencian que la mayoría trabajaron con casos particulares, identificaron el patrón, formularon conjeturas y generalizaron. Pocos organizaron los casos particulares y justificaron sus conjeturas. Ningún profesor realizó una demostración formal de la generalización que construyó, en razón de que la tarea no lo demandó.

El trabajo con casos particulares de la mayoría, consistió en realizar conteos estratégicos de las piedras en las etapas consecutivas y no consecutivas del patrón figural, tanto las que les demandó como las que consideraron pertinente analizar. Conceptualmente, significa que los profesores en este proceso, se involucraron en determinar el término k-ésimo de la sucesión. Se observó que quienes organizaron los casos particulares, optaron por sistematizarlos en tablas, en las que relacionan la cantidad de piedras y el número de la etapa.

Los profesores percibieron el comportamiento del patrón figural y lo representaron en secuencias numéricas. Los tipos de patrones identificados, los expresaron en variadas estructuras aritméticas, aditivas y multiplicativas, que corresponden a la cantidad de piedras en relación al número de etapa:

A. $(2\times 3)+2,\ \ (3\times 4)+2,\ \ (4\times 5)+2$

B. $(1+2)+(1+2)+(1^2+1),\ \ \ (2+2)+(2+2)+(2^2+2),\ \ (3+2)+(3+2)+(3^2+2)$

C. $(3\times 3)-2,\ \ \ (4\times 4)-2,\ \ (5\times 5)-2$

D. $(1+2)^2-1,\ \ (2+2)^2-2,\ \ (3+2)^2-3$

E. $3^2-1,\qquad 4^2-2,\quad 5^2-3$

F. $(1\times 2)+(2\times 3),\quad (2\times 3)+(2\times 4),\quad (3\times 4)+(2\times 5),\quad (4\times 5)+(2\times 6),$ $(5\times 6)+(2\times 7),\quad (6\times 7)+(2\times 8)$

G. $4+4\ \ \ ,8+6,\quad 14+8,\quad 22+10,\quad 32+12,\quad 44+14$

Los seis primeros patrones, asocian a los términos k-ésimo de la sucesión 8, 14, 22 en las tres primeras etapas del patrón figural y fueron representadas por estructuras aditivas y multiplicativas, que corresponde a la distribución y organización de las piedras, que se relacionan con la fórmula básica del área del cuadrado o rectángulo, dependiendo de la forma como el profesor visualizó el patrón figural. El último, es un patrón de recurrencia, cuyos términos se obtienen de sumar el término k-ésimo anterior con su diferencia.

Las conjeturas formuladas por los profesores dependieron del trabajo con casos particulares o la identificación del patrón. Las representaron de forma general, apoyados del uso de alguna variable, de acuerdo con las exigencias de la tarea:

A. $(n+1)(n+2)+2$

B. $n+2+n+2+n^2+n$

C. $(n+2)^2-n$

D. $2n^2+6$

De quienes generalizaron, se reconoce que fueron aquellos que justificaron sus conjeturas a partir del uso de la regla general en nuevos casos particulares, verificando la veracidad de su hipótesis. Las generalizaciones las expresaron de modo verbal y algebraico. Algunos profesores que generalizaron algebraicamente, simplificaron sus conjeturas a la forma sencilla:

$$\textit{Generalización algebraica: } n^2 + 3n + 4.$$

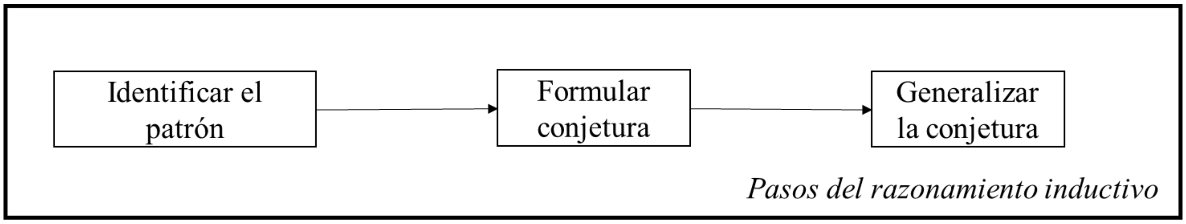
Tabla 15. *Razonamiento inductivo de profesores de matemáticas en la tarea 1*

Profesor	TC	OC	IP	FC	JC	G	D
P1			X	X		X	
P2			X	X	X	X	
P3			X			X	
P4	X		X			X	
P5	X		X	X			
P6	X						
P7	X	X	X			X	
P8	X	X	X			X	
P9	X	X					
P10	X		X	X	X	X	
P11	X		X	X		X	
P12			X			X	
P13	X	X		X		X	
P14	X		X				
P15	X	X	X	X		X	
P16							
Total	11	5	12	7	2	11	

Para caracterizar el razonamiento inductivo de los profesores de secundaria en matemáticas, se han seleccionados seis profesores participantes (*P1, P2, P4, P5, P7, P14)*, que evidencian diferentes patrones de respuestas en sus producciones. Consiste en describir los pasos del razonamiento inductivo que manifestaron estos profesores y, en explicar los procedimientos que siguieron en la resolución de la tarea *la piedra del patio*. Para representar en términos generales los pasos del razonamiento inductivo en que se involucraron, se usan esquemas. Algunas figuras representan reconstrucciones propias del investigador, basado en el patrón figural y la manera cómo se interpretó el razonamiento del profesor.

Profesor 1

El proceso del razonamiento inductivo manifiesto por este profesor, evidencia que a partir de la observación y descomposición de la figura, reconoce el patrón asociado con la sucesión, luego formula una conjetura basada en el patrón identificado y, establece una generalización de forma algebraica (*ver Esquema 1* y *Tabla 16*).



Esquema 1. *Proceso del razonamiento inductivo P1*

Tabla 16. *Descripción de los pasos del razonamiento inductivo de P1*

Pasos del razonamiento inductivo	**Descripción**
1. Identificación del patrón	Descomposición de la figura en dos partes: - Rectángulo: Estructuras multiplicativa y aditivas (etapa+1)(etapa+2) $2 \times 3 = 6 + 2 = 8$ $3 \times 4 = 12 + 2 = 14$ $4 \times 5 = 20 + 2 = 22$ - 2 piedras constante
2. Formulación de la conjetura	$(n + 1)(n + 2) + 2$
3. Generalización	Generalización algebraica $n^2 + 3n + 4$

Identificación del patrón

El profesor reconoce el patrón a través de la organización de las piedras (a las que refiere la tarea), en cada una de las etapas. Percibe que una de las partes de la figura, está conformada por un rectángulo, y que en cada etapa se mantienen dos piedras constantes (*véase figura 17*). En ese contexto, implica al área del rectángulo y a la fórmula básica, para explicar cómo se comporta esa parte del patrón figural, en cada etapa. Por cuanto a las piedras que se mantienen constantes, las expresa mediante una suma, esto es, “más dos”. En términos de una estructura matemática, este comportamiento lo expresa con base en la multiplicación y la adición (*véase figura 17*).

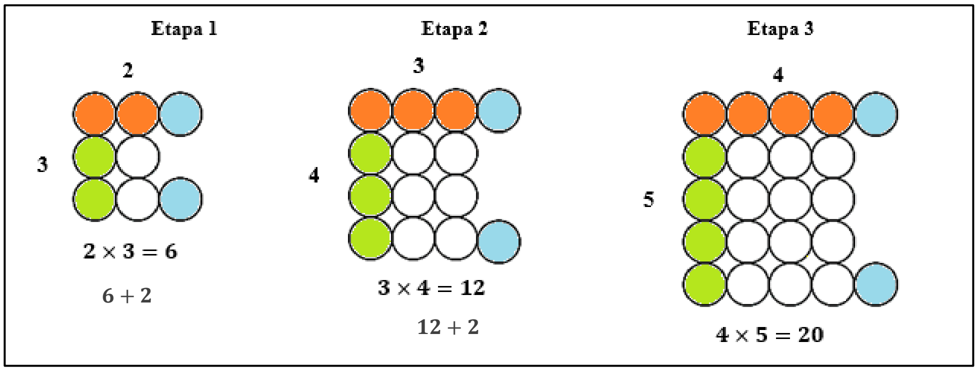


Figura 17. *Identificación del patrón P1.*

Formulación de la conjetura

Se reconoce que formula una conjetura, al momento en que el profesor, para explicar el comportamiento del patrón figural (creciente) de la etapa 1, construye una estructura algebraica, basada en la de tipo aritmético, como sigue:

$$\text{La conjetura: } (n+1)(n+2)+2$$

Donde $(n+1)$ representa el ancho del rectángulo, $(n+2)$ el largo, y $+2$ a las dos piedras que permanecen constante. Su forma de razonamiento en esta etapa, la explica como sigue:

P1: … entonces aquí nos dimos cuenta que la fórmula es "*ene más uno*" por "*ene más dos*"… lo que los decía va aumentando uno y en el otro va aumentando dos…y estas dos, son estas dos bolitas que tenemos aquí… más dos, esta es la fórmula que nosotros encontramos…

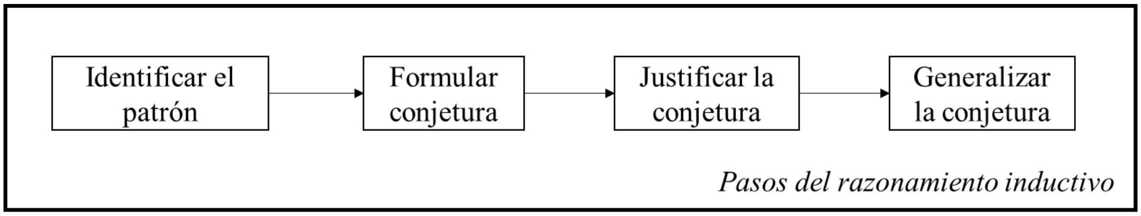
Generalización

Se reconoce que generaliza, al momento en que el profesor usa la conjetura que estableció en el paso previo, para analizar otros casos, de términos lejanos (k-ésimo) que se les pide determinar. Establece que su conjetura es verdadera y simplifica la expresión algebraica $(n+1)(n+2)+2$ a la forma: n^2+3n+4. El profesor explica que la generalización que construyo, la evalúo para la etapa 1:

P1: … para la primera etapa… *ene* es la etapa uno más uno son dos… y aquí es uno más dos son tres… entonces dos por tres nos da seis… más este dos nos da las ochos bolitas en la etapa uno…

Profesor 2

El profesor 2 identifica el patrón por medio de la descomposición de la figura en dos partes y términos k-ésimo de la sucesión, establece la conjetura que relaciona los extremos y el centro del patrón figural y verifica la conjetura formulada con casos particulares. La generalización construida es expresada de forma verbal y algebraica (*véase Esquema 2* y *Tabla 17*).



Esquema 2. *Proceso del razonamiento inductivo P2*

Tabla 17. *Descripción de los pasos del razonamiento inductivo de P2*

Pasos del razonamiento inductivo	**Descripción**
1. Identificación del patrón	Descomposición de la figura en dos partes: - Extremos: Estructuras aditivas (etapa+2) $1+2=3$ $2+2=4$ $3+2=5$ - Centro: Estructuras aditivas y multiplicativas (área del cuadrado y etapa) $1^2+1=2$ $2^2+2=6$ $3^2+3=12$
2. Formulación de conjetura	$n+2+n+2+n^2+n$
3. Justificación de la conjetura	Verifica para la cantidad de piedra para las etapas 1, 2 y 3. Etapa 1: 8 piedras Etapa 2: 14 piedras Etapa 3: 22 piedras
4. Generalización	Generalización verbal y algebraica. n^2+3n+4

Identificación del patrón:

Este profesor, primero reconoce que los extremos en cada etapa *aumentan* de dos en dos en relación con el número de la etapa, comportamiento que expresa mediante una estructura aritmética aditiva. Para la etapa 1 por ejemplo, lo hace en términos de 1+2=3. Seguidamente, transforma esta estructura en una de tipo algebraica, donde a la etapa la nombra con la letra n y la constante, la expresa como tal. Así, para la etapa 1, se reconoce la estructura n+2 y sigue ese procedimiento para el resto de las etapas (*véase figura 18*).

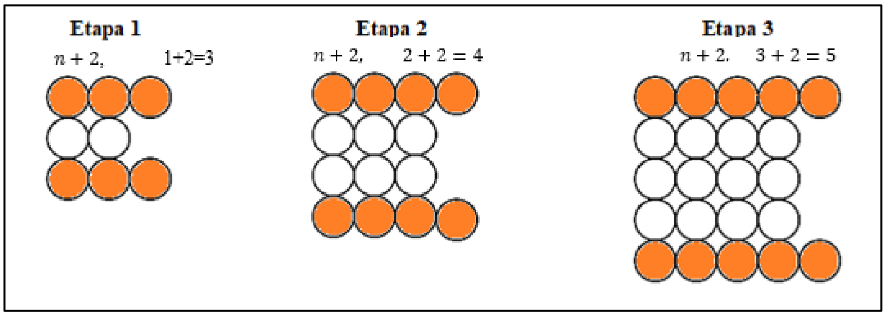


Figura 18. *Identificación del patrón figural y numérico P2*

Posteriormente, percibe la regularidad en que están distribuidas las piedras que se ubican en el centro cada figura en las etapas. Asocia este comportamiento con el cuadrado y la medida de su área, más el número de la etapa. Mantiene el razonamiento que usó previamente, de expresar este comportamiento, en un primer momento, en términos de una estructura aritmética. Así, la medida del área la expresa como el número de la etapa elevada al cuadrado a la que le suma el número de la etapa. Esto es, por ejemplo, para la etapa uno, considera: $1^2 + 1$. Luego transforma esta estructura en una de tipo algebraica, donde a la etapa la nombra con la letra n, esto es: $n^2 + n$ (*véase figura 19*).

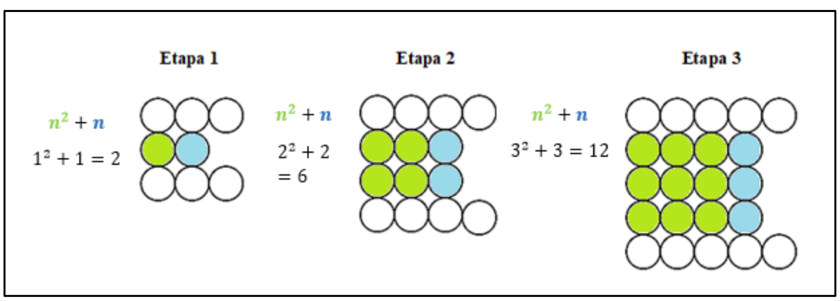


Figura 19. *Identificación del patrón P2*

Formulación y justificación de conjetura

La evidencia empírica de que establece una conjetura, es cuando el profesor conecta a través de una suma, la expresión algebraica que usó para representar el comportamiento de las piedras que se encuentran en cada extremo de la figura de cada etapa, con la que utilizó para expresar el comportamiento de las piedras que se ubican en el centro cada figura en las etapas. Esto es: $n + 2 + n + 2 + n^2 + n$. El profesor representa su conjetura en términos de la letra n y expresa cómo la utiliza para casos particulares:

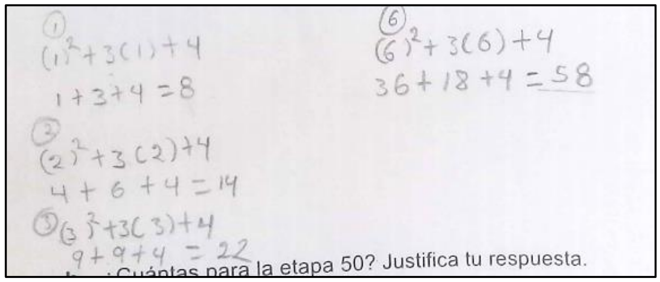


Figura 20. *Justificación de la conjetura P2*

***P2*:** … por ejemplo *ene* al cuadrado más la figura uno sería e*ne* son dos… *ene* al cuadrado sería dos por dos… cuatro más *n* seis…tres por tres nueve, más tres sería doce…entonces en esta parte quedaría *n* al cuadrado más n…entonces ya tengo para esta parte…para esta y para esta…

Luego, simplifica su conjetura y la verifica para establecer que corresponde a la sucesión, utilizándola para los casos particulares de las etapas consecutivas, *1 ,2 ,3* y, dar respuesta a la cuestión planteada del término cercano de la sucesión, *etapa 6* (*véase figura 20*).

Generalización

El profesor plantea la generalización de forma verbal y algebraica (*véase figura 21*). La de tipo algebraica, de forma simbólica y simplificada: $n^2 + 3n + 4$. La verbal, como se evidencia en la figura 5.5.

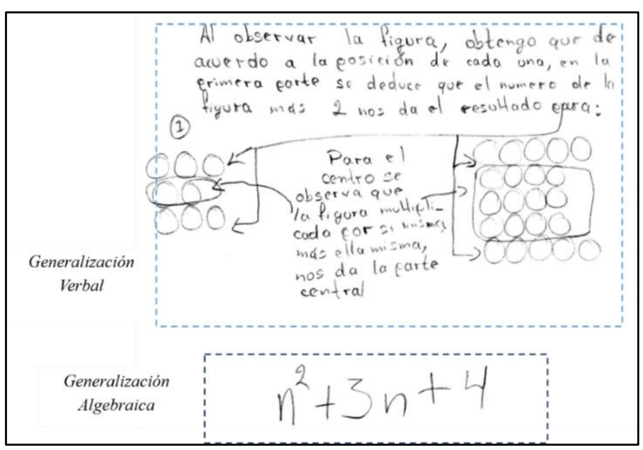
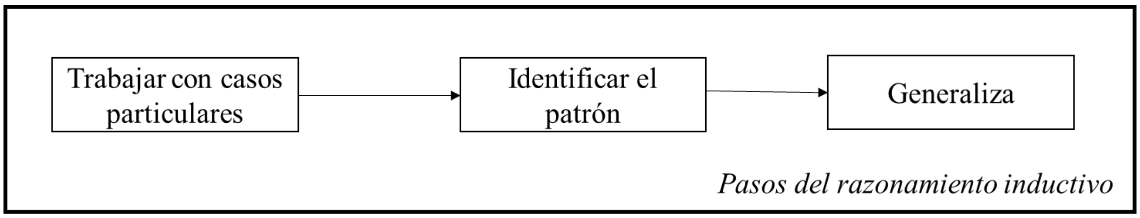


Figura 21. *Generalización* verbal y algebraica P2

Profesor 4

El proceso inductivo del profesor 4 inicia con el trabajo con casos particulares, realiza un conteo estratégico de las piedras en cada una de las etapas, para identificar la regularidad de los patrones figurales y establecer la generalización de forma verbal y algebraica (véase *Esquema 3 y Tabla 18*).



Esquema 3. *Proceso del razonamiento inductivo P4.*

Tabla 18. *Pasos del razonamiento inductivo P4.*

Pasos del razonamiento inductivo	Descripción
1. Trabajo con casos particulares	Conteo estratégico en el patrón figural y el número de etapa.
2. Identificación del patrón	Diferencia entre el área del cuadrado (estructura aditiva y multiplicativa) y el número de la etapa. $(1+2)^2-1$ $(2+2)^2-2$ $(3+2)^2-3$
3. Generalizar	$(n+2)^2-n$

Trabajo con casos particulares

El trabajo con casos particulares de este profesor, se basa en el conteo de las piedras de cada una de las etapas. Este conteo, consiste en agrupar las piedras en relación con el número de la etapa, para luego identificar la regularidad del crecimiento de cada figura en el patrón (*véase figura 22*). El profesor asocia el crecimiento de las piedras con el conteo:

P4: … como vimos lo que está creciendo y todos crecen…entonces yo empecé como que aquí hay uno…aquí hay uno y dos…y aquí hay uno dos tres… hacia acá también, dos tres…aquí dos y aquí uno, ¿sale?…

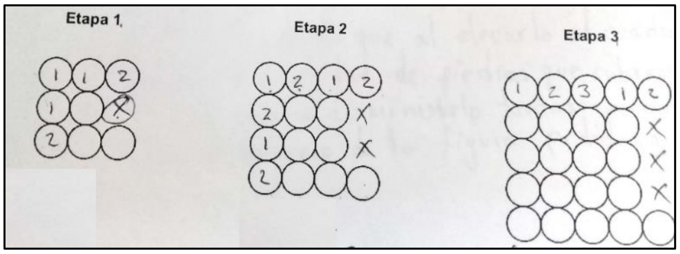


Figura 22. *Trabajo con casos particulares P4*

Identificación del patrón

La evidencia empírica de que el *profesor 4* reconoce el patrón, es a partir de que observa que las piedras de cada figura en las etapas, están ubicadas en forma de un cuadrado, cuyas dimensiones se relacionan con la etapa, que crece de dos en dos. Pero además, que en cada una de las etapas hacen faltan piedras para completar dicho cuadrado, esta cantidad corresponde al número de la etapa:

P4: … cuántos crece… crece uno y crece dos… crece uno y crece dos… pero esto es un cuadrado… solo que esta piedra no sirve… este es otro cuadrado con dos piedras menos… y este es otro cuadrado con piedras menos…entonces mi figura principal es generar, al área…

El patrón es expresado de forma numérica, por medio de las estructuras multiplicativas y aditivas, que implica la fórmula del área del cuadrado con la diferencia de las piedras faltantes (*véase figura 23*).

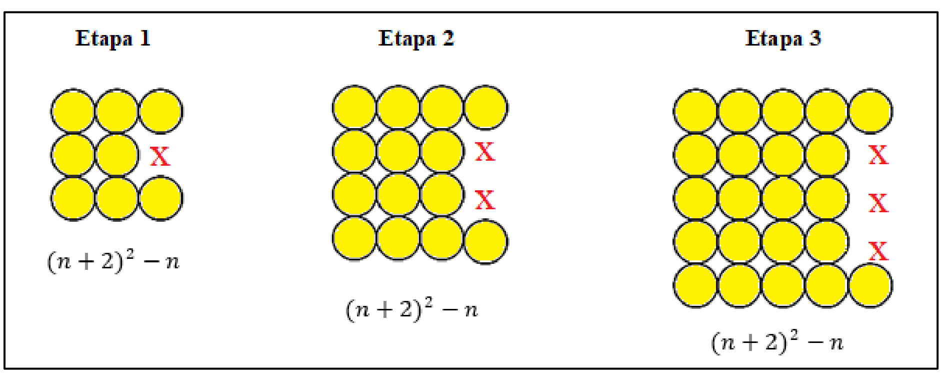


Figura 23. *Identificación del patrón P4*

Generalización

Una vez que el profesor identifica el patrón, relaciona las estructuras aditivas y multiplicativas con la expresión general de la sucesión cuadrática, el profesor expresa verbal y algebraicamente la generalización a partir del patrón figural, la verbal relaciona la sucesión cuadrática con la cantidad de piedras para cualquier número de la etapa (*véase figura 24*).

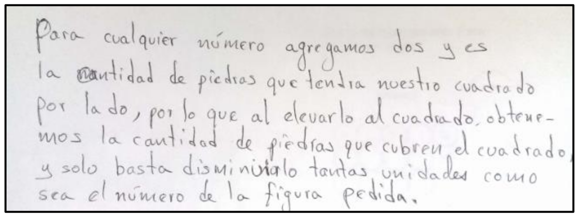

Para cualquier número agregamos dos y es la cantidad de piedras que tendria nuestro cuadrado por lado, por lo que al elevarlo al cuadrado, obtenemos la cantidad de piedras que cubren el cuadrado, y solo basta disminuirlo tantas unidades como sea el número de la figura pedida.

Figura 24. *Generalización verbal P4*

La algebraica, expresa simbólicamente que el área del cuadrado corresponde a la etapa más dos elevado al cuadrado $(n+2)^2$ y la diferencia con el número de la etapa n (*véase figura 25*).

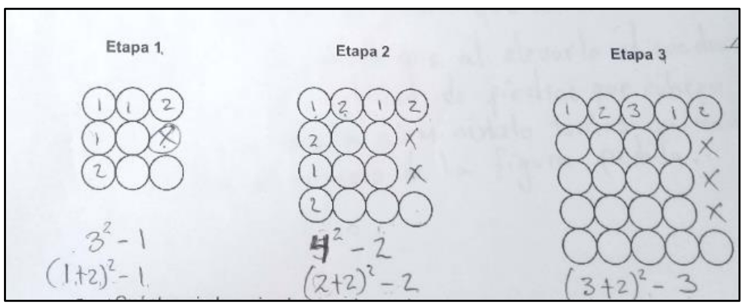


Figura 25. *Generalización algebraica P4*

Otra forma de razonamiento que usa para expresar la estructura algebraica (generalización) que explica el comportamiento en que se colocan las piedas por etapa, implica al binomio cuadrado perfecto, donde lo figural es fundamental para reconocer relaciones:

P4: Aquí no puede haber problema… binomio al cuadrado. A lo mejor aquí me puede dar el concepto geométrico, y hacerlo… retomar este asunto… inducir al binomio cuadrado… el resultado de este es un cuadrado grandote más dos rectangulitos, más un cuadradito… entonces al desarrollarlo me tiene *ene* cuadrada más dos *ene* más cuatro menos *ene*…

En particular, el profesor vincula la representación gráfica del binomio con el comportamiento del patrón figural, en términos de una expresión algebraica (*véase figura 26*).

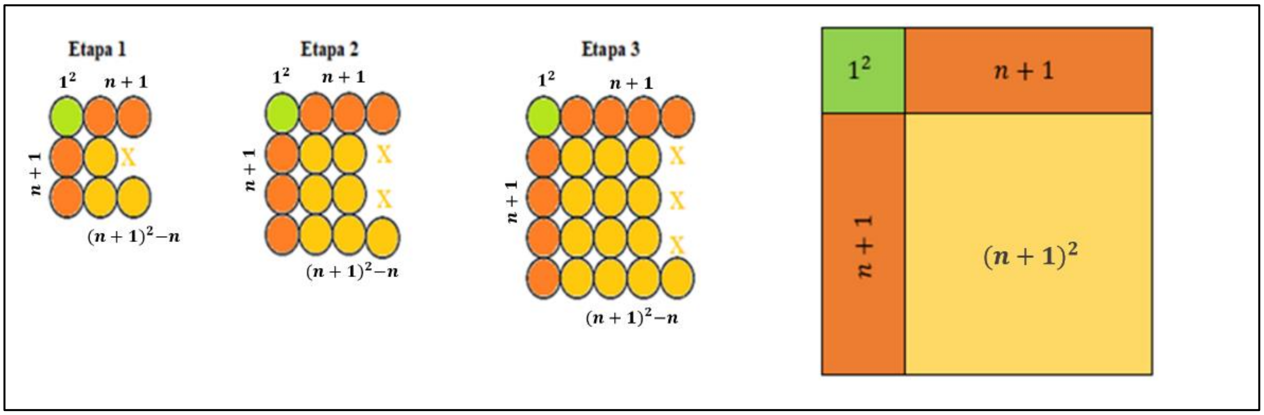
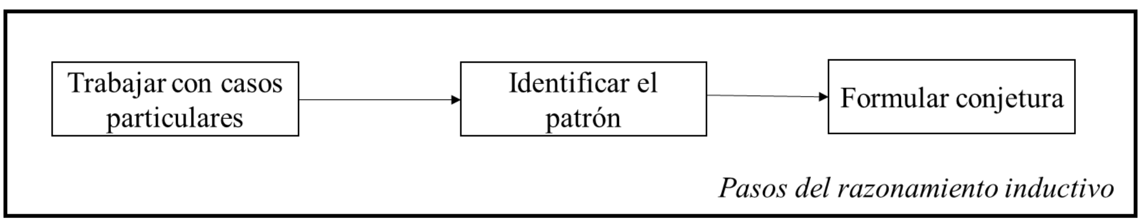


Figura 26. *Vinculación con el binomio cuadrado perfecto*

Profesor 5

El razonamiento inductivo manifiesto por el profesor 5, inicia con el trabajo con casos particulares basado en el conteo de las piedras que forman el patio en cada etapa. Luego, identifica cuántas tiene cada una, y las expresa en términos numéricos. Con esos datos, determinó las primeras y segundas diferencias entre lo términos k-ésimo de la sucesión, para identificar de qué tipo es, la que reconoce es cuadrática. Finalmente, formula una conjetura y la evalúa para términos que demanda la tarea, cercanos y lejanos (*véase Esquema 4* y *Tabla 19*).



Esquema 4. *Proceso del razonamiento inductivo P5.*

Tabla 19. *Pasos del razonamiento inductivo P5*

Pasos del razonamiento inductivo	Descripción
1. Trabajo con casos particulares	Conteo Etapa 1: 8 piedras Etapa 2: 14 piedras Etapa 3: 22 piedras Etapa 4: 32 piedras Etapa 5: 44 piedras Etapa 6: 58 piedras
2. Identificación del patrón	Segunda diferencia: 2 piedras Patrón de recurrencia Etapa 4: 22 piedras+10 piedras= 32 piedras Etapa 5: 32 piedras+12 piedras= 44 piedras Etapa 6: 44 piedras+14 piedras= 58 piedras
3. Formulación de conjeturas	$(n+1)(n+2)+2=n^2+3n+4$

Trabajo con casos particulares

La evidencia empírica de que el profesor trabaja con casos particulares, se reconoce cuando realiza el conteo, basado en el sistema de representación pictórico, de las piedras por cada una de las etapas, lo cual permite reconocer los primeros términos k-ésimo de la sucesión para establecer el tipo de sucesión (*véase figura 27*).

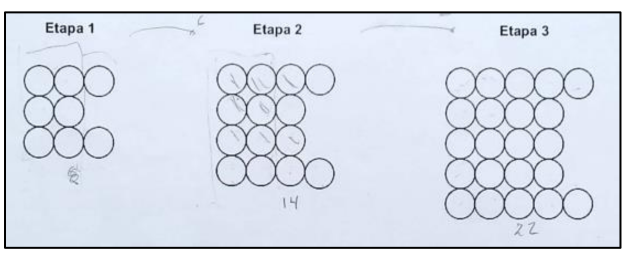


Figura 27. *Trabajo con casos particulares de P5*

Identificación del patrón

El profesor reconoce el patrón de recurrencia cuando determina las diferencias entre los términos k-ésimo de la sucesión. Es así que al obtener la primera diferencia, se da cuenta que no es constante, por ello es que determina la segunda diferencia, y observa que es constante. Por su experiencia con este tipo de análisis, inmediatamente reconoce que la sucesión es de tipo cuadrático.

Para determinar cuántas piedras componen una figura de las etapas, procede como sigue: Considera la primera diferencia que obtuvo entre una etapa y la siguiente, más el término anterior (*véase figura 28*).

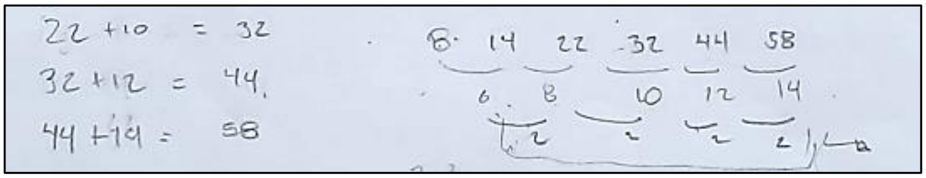


Figura 28. *Identificación del patrón de recurrencia del P5*

Formulación de conjeturas

El profesor establece que la sucesión es cuadrática, y formula la conjetura de forma algebraica $(n+1)(n+2)+2$, en la que relaciona la cantidad de piedras con el número de etapa. La evalúa en la etapa 1, de ahí, observa que el valor que obtiene, se corresponde con el número de piedras de dicha etapa. Seguidamente, simplifica su conjetura a la forma $n^2 + 3n + 4$ (*véase figura 29*).

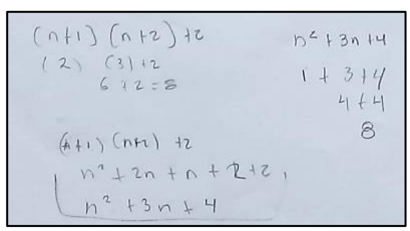
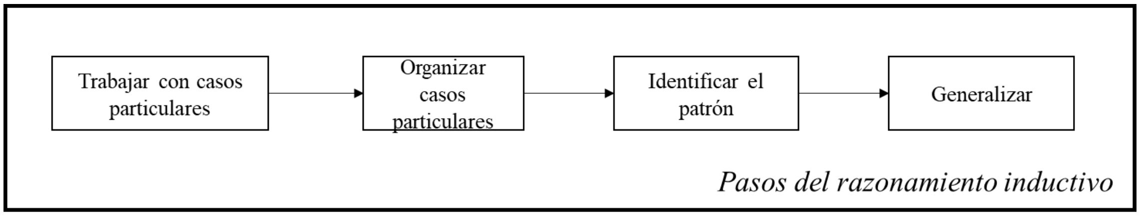


Figura 29. Formulación de la conjetura *P5*

Profesor 7

El profesor 7 inicia su proceso inductivo, trabajando y organizando casos particulares. Luego procede a determinar las diferencias entre los términos. De la primera diferencia, reconoce que los valores no son constantes, por lo que recurre a las segundas diferencias, es ahí que observa que se mantiene el valor de 2, lo que le permite establecer que la sucesión es de tipo cuadrática, así también, construir una regla general que explica el comportamiento de dicha sucesión (*véase Esquema 5* y *Tabla 20*).



Esquema 5. *Proceso del razonamiento inductivo de P7*

Tabla 20. *Pasos del razonamiento inductivo P7*

Pasos del razonamiento inductivo	Descripción
1. Trabajo con casos particulares	Conteo Etapa 1: 8 piedras Etapa 2: 14 piedras Etapa 3: 22 piedras Etapa 4: 32 piedras Etapa 5: 44 piedras Etapa 6: 58 piedras
2. Organización de casos particulares	Tabla de valores (variables, *x y*)
3. Identificación del patrón	Primera y segunda diferencia. Patrón de recurrencia.
4. Generalización	Método de diferencias finitas: $a + b + c = 8$; $3a + b = 6$; $2a = 2$

Trabajo y organización de casos particulares

El razonamiento que evidencia este profesor, es que se ubica a trabajar con los tres primeros casos particulares que demanda la tarea, y los tres consecutivos a estos. Para organizarlos, se apoya de una tabla de doble entrada, en la que representa en términos de x al número de la figura y mediante la y, al número de piedras que le corresponde. Una vez hecho esto, ubica su análisis en el número de piedas que obtuvo en los seis casos (*véase figura 30*).

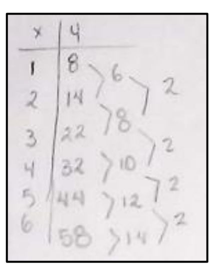


Figura 30. *Trabajo y organización con casos particulares P7*

Identificación del patrón

La evidencia empírica de que reconoce el patrón, se sustenta del análisis que realiza en los datos de la tabla (*véase figura* 30), particularmente los que refieren al número de piedras que determina para las figuras 1 a 6. Las acciones que le siguen a ello, es que obtiene las primeras diferencias. De ahí, observa que el número resultante no es constante, por ello analiza las segundas diferencias. Al reconocer que el valor obtenido de las segundas diferencias es constante, le permite a P7, que se trata de una sucesión cuadrática. En esta etapa, el profesor identifica el patrón de recurrencia. En este proceso, se apoya de la representación tabular.

Generalización

El profesor al reconocer el tipo de sucesión, la relaciona con la regla general de la forma $ax^2 + bx + c$, con base en ello, se ubica a determinar los valores de los coeficientes *a, b, c*. Para ello, el profesor plantea tres ecuaciones: la primera como el doble de los coeficientes igual a la constante de las segundas diferencias de la sucesión; la segunda, es la suma de tres veces *a* más *b* que es igual al primer término de las primeras diferencias de la sucesión y la tercera, la suma del término $a + b + c$ es igual al primer término de la sucesión cuadrática (*véase figura 31*). Los coeficientes hallados por el profesor son *1,3* y *4.* Por tanto, la regla general que establece de la sucesión, basado en el razonamiento que siguió, es $x^2 + 3x + 4$.

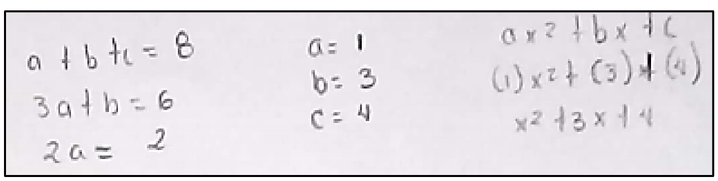
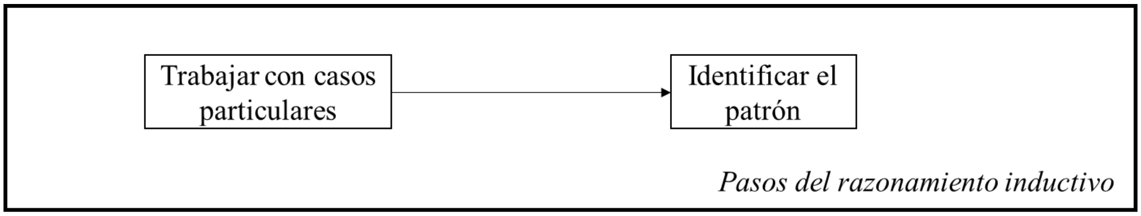


Figura 31. *Generalización algebraica de P7*

Profesor 14

El razonamiento inductivo de este profesor evidenció el trabajo con casos particulares de la sucesión. Esta etapa la sustentó en conteos estratégicos de las piedras que conforman las figuras en cada una de las etapas. De ese modo, identificó la regularidad entre cada uno de los términos k-ésimo, seguidamente, expresó el patrón en con base en una estructura de tipo aditiva (*véase Esquema 6 y Tabla 21*).



Esquema 6. *Proceso del razonamiento indutivo P14*

Tabla 21. *Pasos del razonamiento inductivo de P14*

Pasos del razonamiento inductivo	**Descripción**
1. Trabajo con casos particulares	Conteo Descomposición numérica Etapa 1: 3 piedras 3 piedras 2 piedras=8 piedras Etapa 2: 4 piedras 4 piedras 4 piedras 2 piedras =14 piedras Etapa 3: 5 piedras 5 piedras 5 piedras 5 piedras 2 piedras =22 piedras
2. Identificar el patrón	Diferencias Estructuras aditivas Etapa 4: 6+6+6+6+6+2=32 Etapa 5: 7+7+7+7+7+7+2= 44 Etapa 6: 8+8+8+8+8+8+8+2= 58 Etapa 5: (6*(6+1)+2(6+2)) Etapa 50: (50*(50+1)+2(50+2))

Trabajo con casos particulares

El profesor se involucró en el trabajo con casos particulares, procediendo de dos maneras, ambas basadas en el conteo. La primera, se apoyó del conteo de las piedras de forma horizontal y escribió el número correspondiente junto a cada fila (*véase figura 32*). Así por ejemplo, determinó que la primera figura tiene dos filas con 3 piedras y una con 2. Con base en ello, se dio cuenta que con esos datos no podría explicar el crecimiento de las figuras en las etapas, lo que implicaría al reconocimiento del patrón. Por ello continuó trabajando con casos particulares. Es así que procedió a contar nuevamente las piedras, ahora de forma vertical y colocó debajo de cada columna, el número correspondiente, y debajo de estos números, el total de piedras de cada figura (*véase figura 32*).

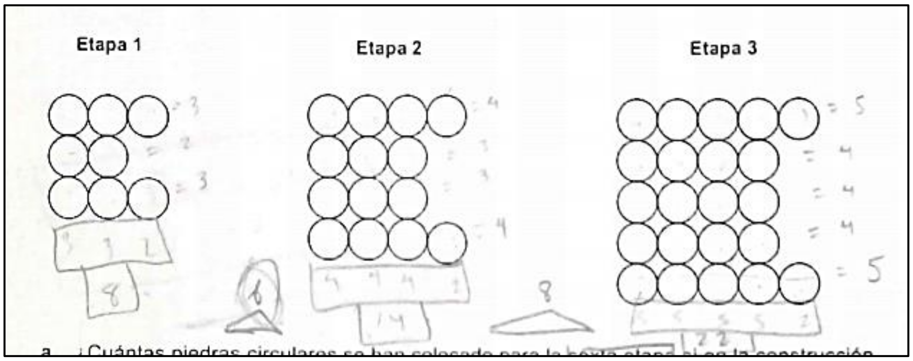


Figura 32. *Trabajo con casos particulares P14*

Identificación del patrón

El trabajo con casos particulares, le permite al profesor establecer el patrón numérico de la sucesión por extrapolación, en el sentido de que a partir de él reconoce que para la etapa 6, la estructura aditiva es: $(6 \times 7) + (2 \times 8) = 42 + 16 = 58$; para la etapa 50, $(50 \times 51) + (2 \times 52) = 2550 + 104 = 3654$ (*véase figura 33*).

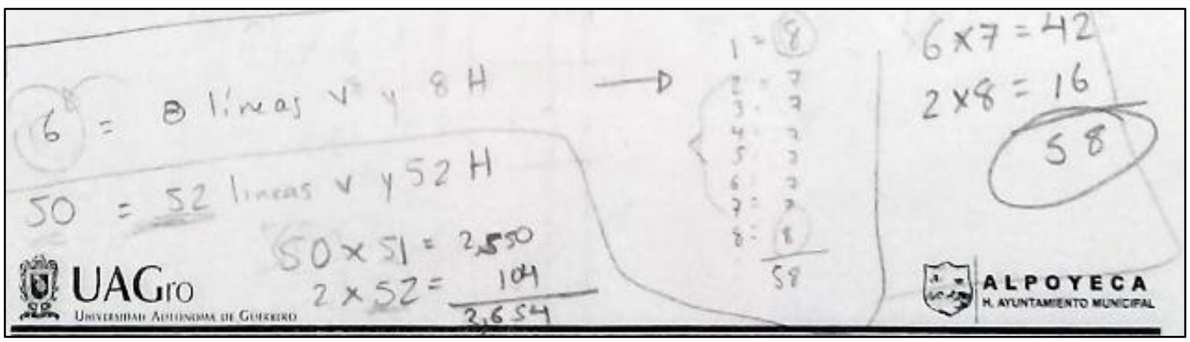


Figura 33. *Identificación del patrón P14*

Tarea 2

Esta tarea fue resuelta por los dieciséis participantes. Mediante su forma de proceder, se evidencia que la mayoría trabajó con casos particulares, identificaron el patrón, formularon conjeturas y generalizaron. De ellos, pocos organizaron los casos particulares y justificaron sus conjeturas. Ningún profesor se involucró en un proceso demostrativo de la generalización que construyó (*véase Tabla 22*).

El proceso inductivo de la mayoría de los profesores, inició con el trabajo con casos particulares, basado en el conteo de los cuadrados grises en cada una de las figuras de las etapas dadas del patrón. Algunos trabajaron con etapas consecutivas no dadas en la tarea a fin de identificar los términos k-ésimo. Los profesores que organizaron los casos particulares, optaron por sistematizarlos en tablas de doble entrada, que relacionan la cantidad de cuadrados grises con el número de la figura.

Los profesores percibieron el comportamiento del patrón figural y lo representaron en secuencias numéricas. Los tipos de patrones identificados, los expresaron en variadas estructuras aritméticas, aditivas y multiplicativas:

A. $4[1+2(1)]+(1+1)\times 1$, $4[1+2(2)]+\ (2+1)\times 2$, $4[1+2(3)]+(3+1)\times 3$
B. $4\times 3+2\times 1$, $4\times 5+3\times 2$, $4\times 7+4\times 3$
C. $6\times 5-16$, $9\times 8-46$, $12\times 11-92$
D. 14, $14{+}12$, $26{+}14$, $40{+}16$, $56{+}18$

Las tres primeras estructuras, muestran que los profesores percibieron el patrón figural de las siguientes maneras:

a) Descomponen la figura en los extremos del patrón figural que mantiene su mismo comportamiento y el centro que se relaciona con la forma y fórmula básica del área de un rectángulo.
b) Determinan la cantidad de cuadrados que componen al rectángulo implicado en las figuras de cada etapa del patrón, a la que restan el número de cuadrados blancos, y con ello determinan la cantidad de los cuadrados grises.
c) Identifican la recurrencia al sumar el término anterior de la sucesión, las primeras diferencias para determinar los siguientes términos k-ésimo.

Las conjeturas formuladas por los profesores se sujetaron al trabajo con casos particulares o bien a la identificación del patrón. Las conjeturas las representaron de forma general mediante el uso de alguna variable demandas en la tarea:

A. $8n+4+n^2+n$
B. $4[1+2(n)]+[n(n+1)]$
C. $4(n+1)+(n^2+1)$
D. $(n^2+n)+2n+1$

Los profesores que generalizaron, son quienes justificaron sus conjeturas a partir del uso de la regla general en nuevos casos particulares, verificaron la veracidad de su hipótesis. La generalización fue de tipo verbal y algebraica, la regla general de la tarea 2 es equivalente a las expresiones generales de las tres primeras conjeturas y simplificadas a la forma:

$$n^2 + 9n + 4.$$

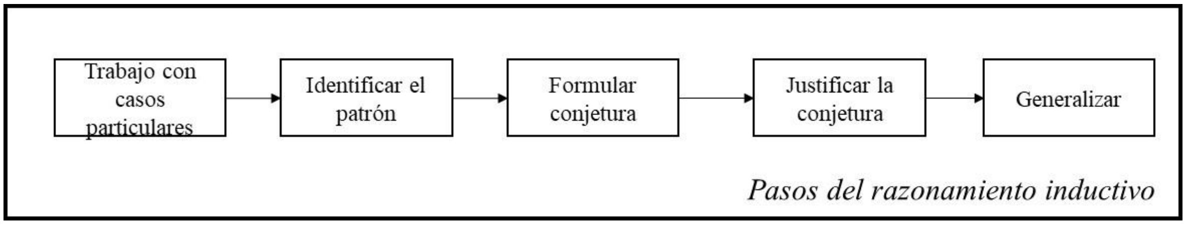
Tabla 22. *Razonamiento inductivo de profesores de matemáticas en la tarea 2*

Profesor	TC	OC	IP	FC	JC	G	D
P1							
P2	X		X	X	X	X	
P3	X						
P4			X	X		X	
P5			X	X			
P6	X		X	X	X		
P7			X			X	
P8	X	X				X	
P9	X	X	X	X	X	X	
P10							
P11			X	X	X		
P12			X	X		X	
P13	X		X	X	X		
P14	X	X	X	X		X	
P15	X						
P16	X	X	X	X		X	
Total	9	4	11	8	6	8	0

Para caracterizar el razonamiento inductivo de los profesores de matemáticas de secundaria en la tarea 2, fueron seleccionados seis profesores (*P2, P4, P5, P7, P8, P13),* en particular, aquellos casos que evidencian diferentes patrones de respuestas en sus producciones. Consiste en describir los pasos del razonamiento inductivo que manifestaron estos profesores y, las explicaciones que dieron acerca de los procedimientos que siguieron en la resolución de esta tarea, *la piedra del patio*. A través de esquemas se muestran los pasos del razonamiento inductivo en que se involucró cada profesor.

Profesor 2

El profesor 2 inició el proceso inductivo por medio del conteo de los cuadrados grises y blancos que conforman cada figura, identificó la regularidad en el crecimiento del patrón figural para formular y justificar su conjetura. Al verificar la veracidad de su conjetura, generalizó de manera algebraica (véase *Esquema 7* y *Tabla 23*).



Esquema 7. *Proceso del razonamiento inductivo P2*

Tabla 23. *Pasos del razonamiento inductivo P2*

Pasos del razonamiento inductivo	Descripción
1. Trabajo con casos particulares	Conteo Figura 1, Cuadrados grises: 14 Cuadrados blancos : 16 Figura 2, Cuadrados grises: 26 Cuadrados blancos : 16 Figura 3, Cuadrados grises: 40 Cuadrados blancos : 16
2. Identificación del patrón	Centro: área del cuadrado+ posición de la figura Extremos: (Dos veces la posición más uno)× 4
3. Formulación de la conjetura	$8n + 4 + n^2 + n = n^2 + 9n + 4$
4. Justificación de la conjetura	Figura 1: $1^2 + 9(1) + 4 = 14$ Figura 2: $2^2 + 9(2) + 4$=26 Figura 3: $3^2 + 9(3) + 4 = 40$ Figura 6: $6^2 + 9(6) + 4 = 74$ Figura 7: $7^2 + 9(7) + 4$=116
5. Generalización	$n^2 + 9n + 4$

Trabajo con casos particulares

El profesor realiza el conteo de los cuadrados grises y cuadrados blancos en cada una de las figuras. Determinó que hay 14, 26 y 40 cuadrados grises, y 15,46 y 92 cuadrados blancos para las tres primeras figuras respectivamente.

Identificación del patrón

Se reconoce que el razonamiento del profesor se centra en el análisis del comportamiento que guarda el rectángulo gris, ubicado en el centro de cada figura de la secuencia. A partir de ello, identifica que este comportamiento se corresponde (o puede expresarse), con el número de la figura elevada al cuadrado más el número de la figura. Percibe además, que los cuadrados grises que forman cuatro escuadras, equivale a dos veces el número de la figura más uno.

Formulación de la conjetura

El profesor formuló la conjetura basado en la descomposición que hizo de la figura. Para el centro, es de la forma algebraica $n^2 + n$ y para las cuatro escuadras, $4\ (2n + 1)$. Finalmente, al sumar estas expresiones algebraicas, obtiene que la conjetura final es $8n + 4 + n^2 + n$ que expresa en la forma más simple:

$$\text{Conjetura: } n^2 + 9n + 4$$

Justificación de la conjetura

Para verificar que la conjetura formulada es verdadera, el profesor relaciona el comportamiento de los cuadrados grises con el número de figura y evalúa la expresión con términos cercanos y lejanos de la sucesión cuadrática (*véase figura 34*).

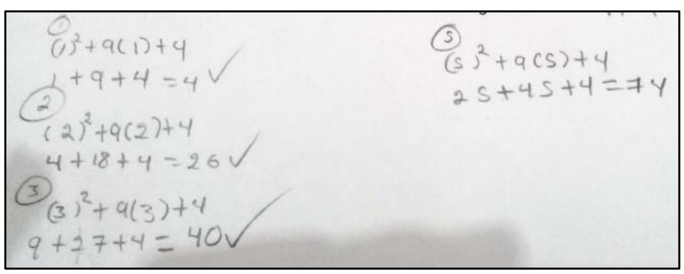


Figura 34. *Justificación de la conjetura P2*

Generalización

Se reconoce que el profesor ha generalizado porque verifica la validez de la conjetura (que formuló y justificó anteriormente), para casos particulares. El profesor generalizó algebraicamente, donde relacionó la correspondencia entre el número de la figura y la cantidad de cuadrados grises por secuencia (*véase figura 35*).

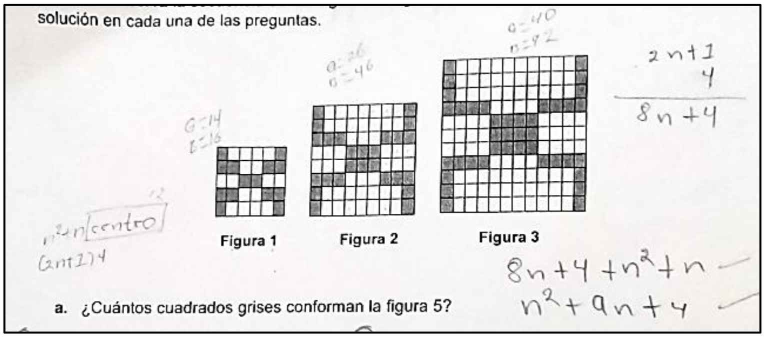
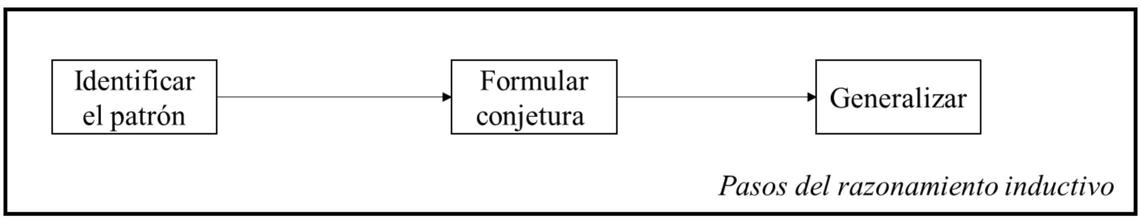


Figura 35. *Generalización algebraica P2*

Profesor 4

El profesor inició reconociendo el patrón. Para ello, se sustenta de una descomposición del patrón figural, luego estableció estructuras aditivas y multiplicativas que representaron la regularidad que observó. Seguidamente, formuló una conjetura y finalmente, generalizó de forma algebraica (*véase Esquema 8* y *Tabla 24*).



Esquema 8. Proceso del razonamiento inductivo P4

Tabla 24. *Pasos de razonamiento inductivo P4*

Pasos del razonamiento inductivo	**Descripción**
1. Identificación del patrón	Descomposición de la figura: Patas de la rana $4[1+2(1)]$ $4[1+2(2)]$ Centro de la rana $(1+1)\times 1$ $(2+1)\times 2$ $(3+1)\times 3$
2. Formulación de la conjetura	$4[1+2(n)]+[n(n+1)]$
3. Generalización	n^2+9n+4

Identificación del patrón

El razonamiento de este profesor se enfocó en observar la distribución y comportamiento de los cuadrados grises en el patrón figural, de ahí identificó el patrón en dos partes. Primero, observó los cuadrados que conforman el rectángulo ubicado en el centro de la figura. Se dio cuenta que el patrón figural es creciente y que en cada figura, en sus cuatro esquinas se conserva constante un cuadrado gris, más dos veces el número de la figura (*véase figura 36*). Este análisis el *profesor 4* lo expresa como sigue:

P4: Yo no me fijé en toda la figura… yo me fijé en una parte… aquí (señala la figura 1)… Ese cuadrito va a ser para todos siempre que haya esquina en uno. Entonces pongo ese uno… pero ya me di cuenta que crece hacia los lados… aquí crece uno y uno. Entonces crece más uno… pero como crece uno de cada lado… entonces dos por uno. Aquí crece dos… y allá crece tres.

Segundo, asoció el comportamiento del centro del patrón figural con la fórmula del área de un rectángulo, ya que su análisis se enfocó en este objeto geométrico:

P4: …Vamos por el rectángulo… el rectángulo tiene uno de amplio y uno más uno. Aquí tiene un… dos más uno… y aquí tiene tres más uno y aquí tiene tres. Entonces… qué es lo que tiene el rectángulo… el área del rectángulo.

Reconoció que las dimensiones de la figura geométrica se relacionan con el número de la figura, de manera que el ancho corresponde al número de la figura y el largo, dos veces el número de la figura más uno (*véase figura 36).*

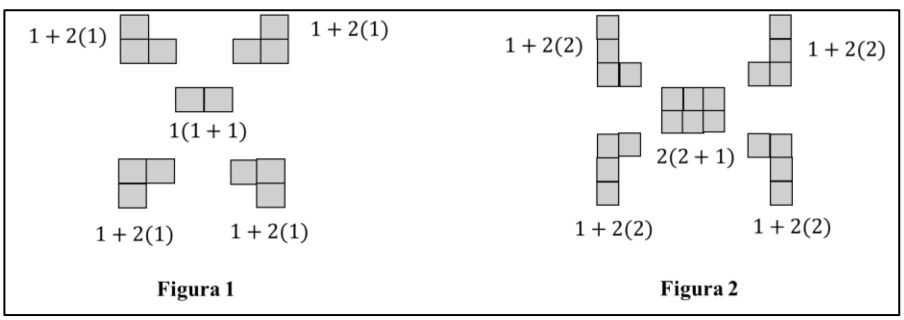


Figura 36. *Identificación del patrón P4*

Formulación de la conjetura

El profesor formuló una conjetura en términos de la letra *n*, para expresar el comportamiento del patrón. Por su forma de proceder se observó que su razonamiento en esta fase, se corresponde con las acciones realizadas en la identificación del patrón, esto es, que recurre a trabajar por partes. Así, construyó dos estructuras algebraicas. Una que refiere al comportamiento que siguen los cuadrados grises ubicados en las cuatro esquinas del rectángulo principal, esto es: $4\,[1 + 2(n)]$. Otra, que implica al comportamiento que siguen los cuadrados grises ubicados en centro y que forman un rectángulo, es como sigue: $n\,(n+1)$. Sobre la base de estas dos estructuras algebraicas, P4 formula la conjetura: $4[1+2(n)]+[n(n+1)]$, la cual implica a los cuadrados grises del rectángulo principal de cada figura del patrón.

Generalización

La conjetura que P4 establece en términos algebraicos, la verifica para la *figura 1*, evidencia empírica de que generaliza el comportamiento que mantiene el patrón figural implicado en la secuencia. En este paso, P4 expresa de modo simple su generalización a la que llama *regla*, en la forma: n^2+9n+n (*véase figura 37*).

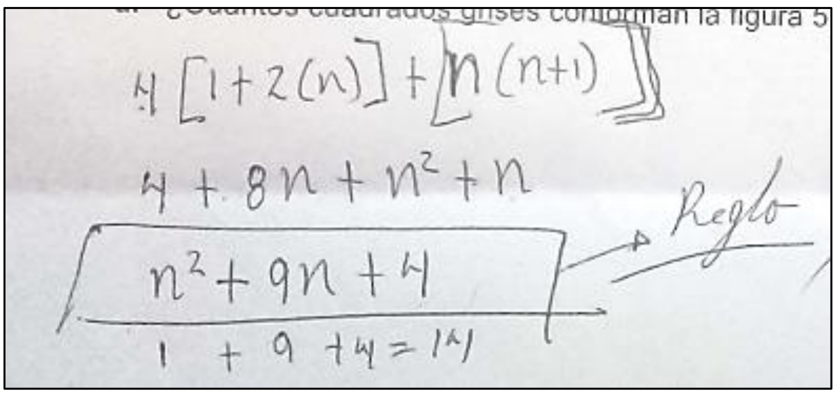
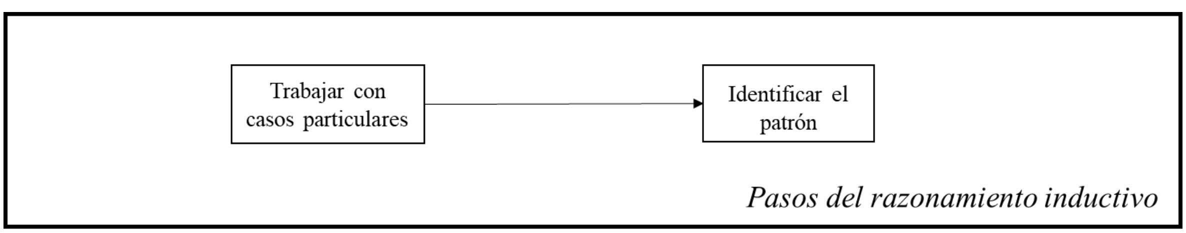


Figura 37. *Generalización algebraica P4*

Profesor 5

El razonamiento inductivo del profesor 5 evidencia el trabajo con casos particulares a través del conteo de los cuadrados grises, para establecer los términos k-ésimo de la sucesión. Halla las primeras y segundas diferencias para identificar el tipo de sucesión y encontrar nuevos casos particulares (*véase Esquema 9* y *Tabla 25*).



Esquema 9. Proceso del razonamiento inductivo P5

Tabla 25. *Pasos del razonamiento inductivo P5*

Pasos del razonamiento inductivo	Descripción
1. Trabajo con casos particulares	Conteo Figura 1: 14 cuadrados grises Figura 2: 26 cuadrados grises Figura 3: 40 cuadrados grises
2. Identificación del patrón	Primeras y segundas diferencias

Trabajo con casos particulares

El *profesor 5* se involucra en el trabajo con casos particulares por medio del conteo de los cuadrados grises de las figuras *1, 2* y *3,* que corresponde a la cantidad correspondiente de forma numérica: *14, 26, 40,* mismos que representan a términos k-ésimo de la sucesión implicada en el patrón objeto de análisis.

Identificación del patrón

Al establecer los términos k-ésimo de la secuencia numérica, el profesor determina las diferencias entre ellos. Reconoce que la primera y la segunda diferencia, le permite encontrar nuevos casos particulares de la sucesión cuadrática, recurre a los términos consecutivos sumando el término anterior y la diferencia (*véase figura 38*).

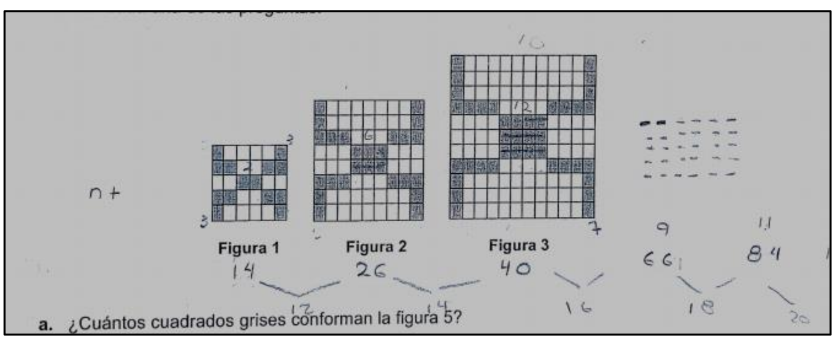
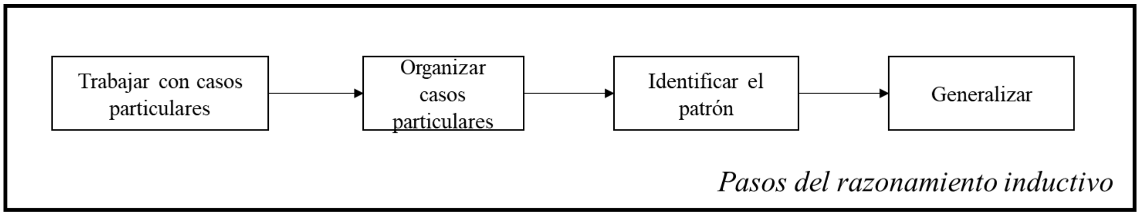


Figura 38. *Identificación del patrón de recurrencia P5*

Profesor 7

El profesor 7 inició su proceso inductivo con el trabajo y organización de términos k-ésimo de la sucesión, que conlleva a la cantidad de cuadrados grises de las figuras del patrón objeto de estudio. Usa estos datos para determinar las primeras y segundas diferencias entre los términos. De la primera, reconoce que los valores no son constantes, por lo que determina a las segundas, es ahí que observa que se mantiene el valor de *2*, para establecer que la sucesión es de tipo cuadrática, así también, construir una regla general que explica el comportamiento de los cuadrados grises con respecto al número de la figura (*véase Esquema 10 y Tabla 26*).



Esquema 10. *Proceso del razonamiento inductivo P7.*

Tabla 26. *Pasos del razonamiento inductivo P7*

Pasos del razonamiento inductivo	**Descripción**
1. Trabajo con casos particulares	Conteo Figura 1: 8 cuadrados grises Figura 2: 14 cuadrados grises Figura 3: 22 cuadrados grises Figura 4: 32 cuadrados grises Figura 5: 44 cuadrados grises
2. Organización de casos particulares	Tabla de valores (Variables, *x y*)
3. Identificación del patrón	Primera y Segunda diferencia Patrón de recurrencia
4. Generalización	Método de diferencias finitas $a+b+c=14$ $3a+b=12$ $2a=2$

Trabajo y organización de casos particulares

El profesor 7 analiza los primeros términos k-ésimo de la secuencia numérica que construye a partir del conteo de los cuadrados grises de cada figura. Ello, a fin de reconocer el tipo de sucesión implicada. Para lograr esto, se apoya de una tabla de doble entrada, en la que indica al número de la figura con la variable *x*, y por medio de la *y*, a la cantidad de cuadrados grises (*véase figura 39*). En este paso del razonamiento inductivo, su análisis se enfoca en los términos k-ésimo de las figuras dadas.

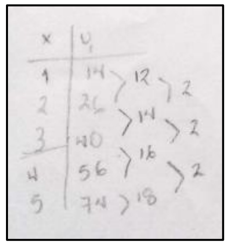


Figura 39. *Trabajo y organización de los casos particulares P7*

Identificación del patrón

Los términos k-ésimo de la sucesión, favorece que el profesor identifique el patrón de recurrencia por el método de diferencias. Seguidamente, trabaja con nuevos casos particulares y establece las primeras y segundas diferencias. Identifica que las segundas se mantienen constante en *2*. Es así que reconoce que se trata de una sucesión cuadrática (*véase figura 39*)

Generalización

El profesor al reconocer el tipo de sucesión, establece que la regla general es de la forma $ax^2 + bx + c$ y determina los coeficientes de la expresión algebraica de la sucesión cuadrática. Para hallar los coeficientes *a, b, c,* utiliza las tres ecuaciones por el método de diferencias, los coeficientes hallados por el profesor son *1*, *9* y *4,* por tanto la regla general de esta sucesión es de la forma $x^2 + 9x + 4$ (*véase figura 40*).

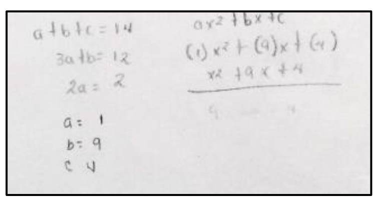
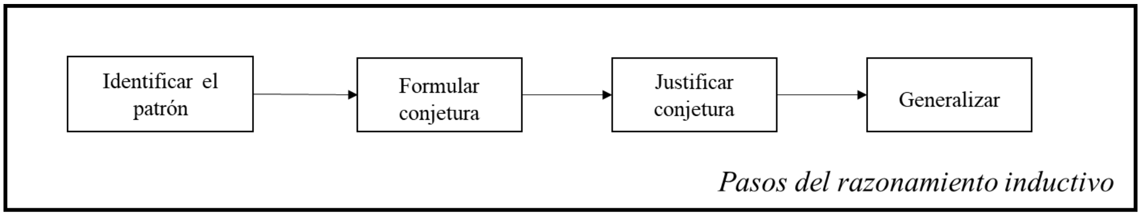


Figura 40. *Generalización algebraica P7.*

Profesor 8

El *profesor 8* identifica el comportamiento del patrón con la descomposición de la figura en dos partes: Primero, las cuatro escuadras que forman los cuadrados grises de las esquinas y los cuadrados grises del centro y las representó por medio de estructuras aditivas y multiplicativas. Luego, formula y justifica su conjetura, que corresponde al comportamiento de los cuadrados grises. Por último, verifica que la regla general es verdadera y generaliza algebraicamente (*véase Esquema 11* y *Tabla 27*).



Esquema 11. Proceso del razonamiento inductivo *P8*

Tabla 27. *Pasos del razonamiento inductivo P8*

Pasos del razonamiento inductivo	**Descripción**
1. Identificación del patrón	Descomposición de la figura (extremos y centro) Figura 1: $4 \times 3 + 2 \times 1 = 14$ Figura 2: $4 \times 5 + 3 \times 2 = 26$ Figura 3: $4 \times 7 + 4 \times 3 = 40$
2. Formulación de conjetura	$4(n+1) + n(n+1)$
3. Justificación de conjetura	Figura 1: $4(1+1) + 1(1+1) = 14$ Figura 5: $4(5+1) + 5(5+1) = 74$
4. Generalización	$4(n+1) + (n^2+1)$

Identificación del patrón

El patrón identificado por el profesor, es representado por estructuras aditivas y multiplicativas que relacionan la cantidad de cuadrados grises y el número de la figura. Para el comportamiento de las cuatros escuadras de los cuadrados grises, las representa a través de estructuras aditivas que corresponden al número de la figura más uno y para el centro de los cuadrados grises, por estructuras aditivas y multiplicativas, que implican el factor del número de la figura con el número de la figura más uno (*véase figura 41*).

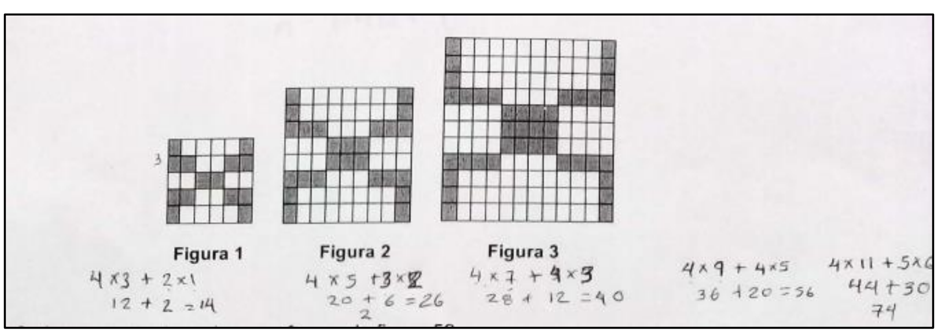


Figura 41. *Identificación del patrón P8*

Formulación y justificación de conjetura

El profesor 8 construye una conjetura de la forma $4(n+1)+n(n+1)$, la cual infiere del comportamiento del patrón figural. Primero la establece en términos de una estructura aritmética (*véase figura 42*), para expresar el comportamiento que mantienen los cuadrados grises del patrón en la figura 3. En seguida, la verifica en las figuras 5, 7 y 11, evidencia empírica de que justifica la conjetura formulada.

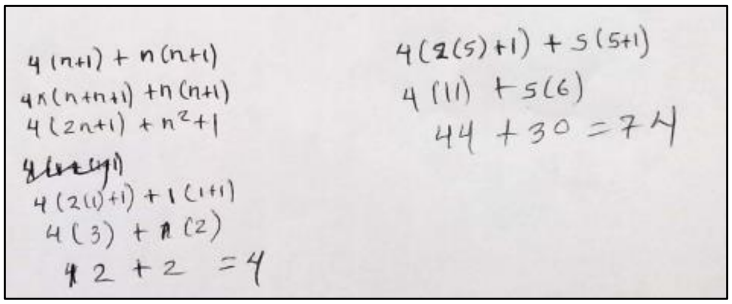


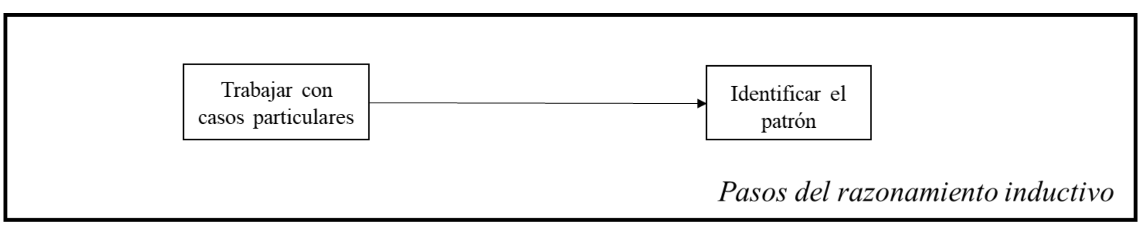
Figura 42. *Formulación y justificación de la conjetura P8*

Generalización

El profesor verificó la veracidad de su conjetura en el paso anterior y simplifica su generalización algebraica a la forma n^2+9n+4, que relaciona la cantidad de cuadrados grises y el número de la figura.

Profesor 13

El razonamiento inductivo del profesor 13 evidenció el trabajo con casos particulares por medio del conteo de los cuadrados grises y blancos que conforman el rectángulo en cada una de las figuras, luego identificó la regularidad de crecimiento de los cuadrados grises (*véase Esquema 12 y Tabla 27*).



Esquema 12 *Proceso del razonamiento inductivo P13*

Tabla 28. *Pasos del razonamiento inductivo P13*

Pasos del razonamiento inductivo	**Descripción**
1. Trabajo con casos particulares	Conteo Figura 1:14 cuadrados grises Figura 2: 26 cuadrados grises Figura 3: 40 cuadrados grises Figura 4: 56 cuadrados grises Figura 5: 74 cuadrados grises Figura 6: 94 cuadrados grises
2. Identificación del patrón	Composición de la figura (Área del rectángulo y cuadrados blancos) Figura 1: $6 \times 5 - 16 = 14$ Figura 2: $9 \times 8 - 46 = 26$ Figura 3: $12 \times 11 - 92 = 40$

Trabajo con casos particulares

El profesor 13 trabajó con los casos particulares a través del conteo total del rectángulo principal: los cuadrados grises y blancos que lo conformaban. Por ejemplo, estableció que la *figura 1* estaba conformada por 30 cuadrados en total, 16 cuadrados blancos y 14 cuadrados grises.

Identificación del patrón

El patrón reconocido por el profesor 13, implica la diferencia entre el área del rectángulo que conforma la figura completamente y la cantidad de cuadrados blancos, para hallar la cantidad de cuadrados grises. El patrón es representado por medio de las estructuras aditivas y multiplicativas (*véase figura 43).*

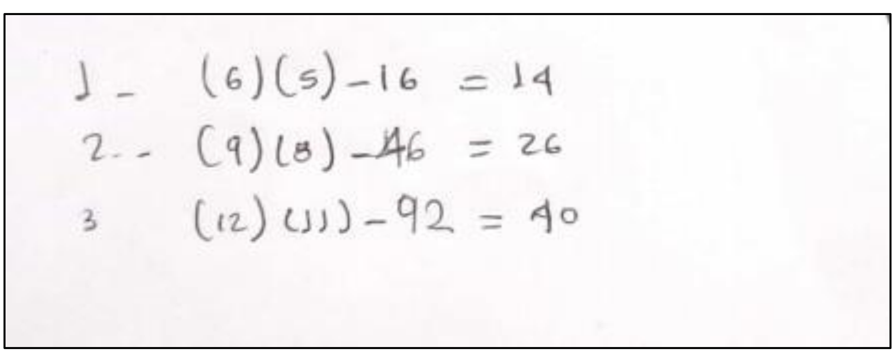


Figura 43. *Identificación del patrón P13*

Categoría II: Sistemas de representación

Los profesores de secundaria se apoyaron de diferentes sistemas de representación en el proceso de solución de las tareas planteadas, cuyo contexto, fue la generalización de sucesiones cuadráticas. En las condiciones iniciales de las tareas se implicó al sistema de representación pictórico (patrón figural), como un medio para analizar el razonamiento que siguen los profesores al construir una estructura matemática plausible y útil que exprese de manera directa el comportamiento del patrón involucrado en la sucesión objeto de estudio.

En el trabajo con casos particulares, el sistema de representación utilizado por los profesores fue el numérico y pictórico. Para la organización de estos casos, emplearon tablas de doble entrada, que es un sistema de representación tabular. Para representar la regularidad reconocida, utilizaron los sistemas de representación numérica y para las conjeturas, el sistema de representación algebraico. La generalización, fue representada de forma textual (verbal) y algebraica.

La utilización del sistema de representación numérico, consistió en determinar la cantidad de objetos en cada una de las etapas o figuras planteadas en las tareas, como términos k-ésimo de la sucesión; significar el comportamiento del patrón figural correspondiente, por medio de estructuras aritméticas de tipo aditiva y multiplicativa y evaluar la veracidad de las conjeturas que formularon.

El sistema de representación pictórico empleado por los profesores, les permitió continuar con el trabajo de nuevos casos particulares y reconocer figuralmente el comportamiento de crecimiento del patrón en las siguientes etapas o número de figuras.

El sistema de representación tabular evidenció la forma de cómo los profesores organizaron los términos de la sucesión, establecieron como entradas: el número de figura o etapa (en algunos casos representada por la letra x) y para la cantidad de piedras o cuadrados grises (en algunos casos representada por la letra y).

El sistema de representación verbal permitió a los profesores expresar textualmente el comportamiento de los patrones figurales. Por lo general, algunos explicaron la generalización por medio de este sistema.

El sistema de representación algebraico manifiesto por los profesores, mostró que ellos lo emplearon para determinar la cantidad de piedras o cuadrados grises para cualquier número de etapa o figura. Se destacan que las expresiones algebraicas construidas por los profesores fueron:

Tabla 29. *Sistema de representación algebraico de los profesores*

Tarea 1	Tarea 2
A. $(n+1)(n+2)+2$	**A.** $8n+4+n^2+n$
B. $n+2+n+2+n^2+n$	**B.** $4[1+2(n)]+[n(n+1)]$
C. $(n+2)^2-n$	**C.** $4(n+1)+(n^2+1)$
D. $2n^2+6$	**D.** $(n^2+n)+2n+1$
E. n^2+3n+4	**E.** n^2+9n+4

En general, se destaca que los sistemas de representación más utilizados fueron el numérico y el algebraico, en menor medida utilizaron las de tipo verbal, tabular y pictórico (*véase Tabla 30).*

Tabla 30. *Sistema de representación utilizados por los profesores de Secundaria*

Profesor	**Tarea 1**					**Tarea 2**				
	P	N	T	A	V	P	N	T	A	V
P1*		X		X			X			
P2*		X		X	X		X		X	
P3*				X	X		X			
P4*	X	X		X	X		X		X	
P5*		X		X			X		X	
P6	X						X			
P7*		X	X	X			X	X	X	
P8*		X	X	X			X		X	
P9		X	X				X			
P10*		X		X	X		X		X	
P11*		X		X			X			
P12		X					X			
P13		X	X				X			
P14*		X					X			
P15*		X	X	X		X	X		X	
P16		X					X			
Total	2	14	5	10	4	1	16	1	7	0

Nota. P= Pictórico N=Numérico A =Algebraico T =Tabular V =Verbal

*****Profesores que generalizan

Procesamiento en un mismo sistema

Se destaca que los procesamientos realizados por los profesores fueron llevados a cabo en el sistema de representación pictórico, numérico y algebraico.

Pictórico

El procesamiento en este sistema de representación se evidencia en la continuidad de etapas o figuras para representar el comportamiento del patrón figural por medio de las piedras o cuadrados grises (*véase figura 44* y *figura 45*). Esta forma de análisis por parte de los profesores, favoreció el que sólo identificaran el comportamiento de crecimiento del patrón figural, sin que lograran construir una conjetura que representara esta regularidad y generalizar.

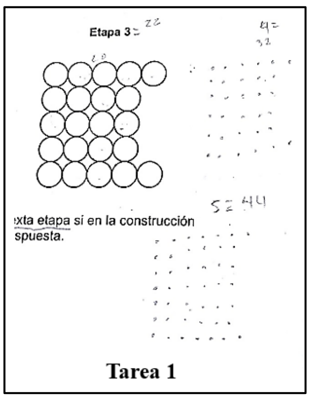


Figura 45. *Sistema de representación P6*

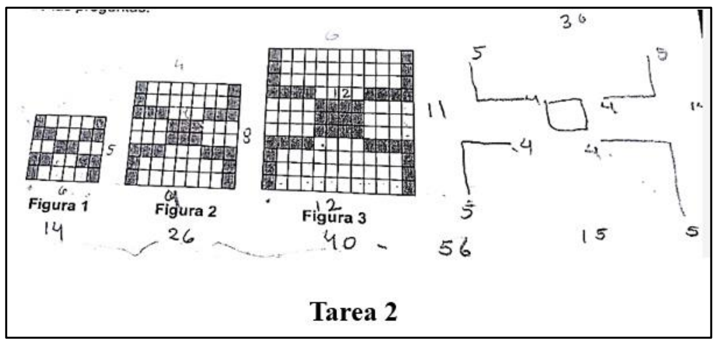


Figura 44. *Sistema de representación P15*

Numérico

En las producciones de la mayoría de los profesores, se evidenció el uso del sistema de representación numérico en el desarrollo de las tareas. Los procesamientos manifiestos por los profesores en este sistema de representación, fueron por medio de operaciones aritméticas para construir estructuras aritméticas (aditivas y multiplicativas) que les permitiera representar el comportamiento de los objetos con respecto al número de la figura o etapa (*véase figura 46*). Los profesores que se apoyaron de este sistema de representación a través de las estructuras aritméticas y realizaron diferentes procesamientos, evidenciaron construir conjeturas y generalizar.

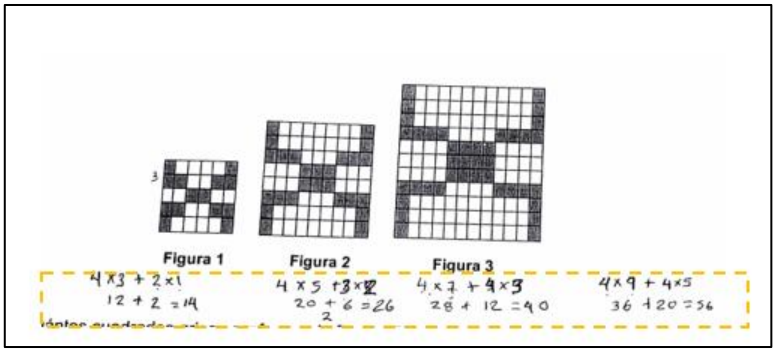


Figura 46. *Sistema de representación numérica P8*

Algebraico

Uno de los procesamientos en el sistema de representación fue el algebraico, donde el profesor representa por medio de una expresión matemática la sucesión de la forma $f(n) = (n+1)(n+2)+2$ (*véase figura 47*) que es equivalente a:

$$a_n = n^2 + 3n + 4$$

Los procesamientos en este sistema de representación de los profesores los realizaron para simplificar sus expresiones algebraicas (*ver figura 47* y *figura 48*). Para utilizarlas como reglas generales en la determinación de los objetos para cualquier número de etapa o figura. Los términos generales de la sucesión cuadrática, fueron expresados por el sistema de representación verbal y algebraico, este último fue el que predominó.

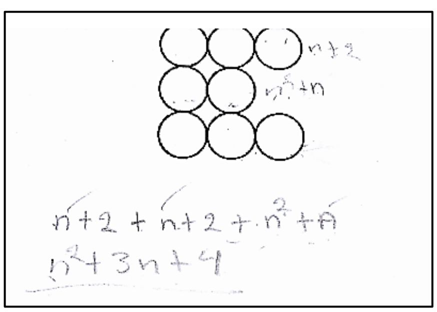


Figura 47. *Sistema de representación algebraico P2*

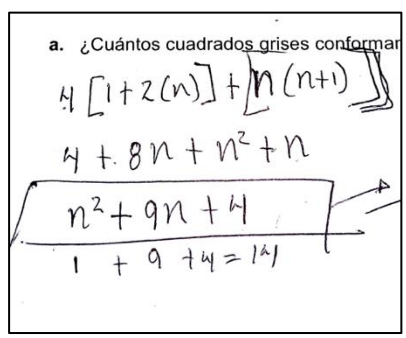


Figura 48. *Sistema de representación algebraico P4*

Conversión entre sistemas

La mayoría de los profesores al momento de leer la tarea, realizan la conversión del sistema de representación pictórico hacia el sistema de representación numérico, para establecer los términos de la sucesión cuadrática. Uno de ellos, al representar la sucesión con el sistema de representación numérico, realizó la conversión al sistema de representación algebraica, por medio de una regla general, que es la sucesión no lineal. Mientras que otros, a partir del sistema de representación pictórica, optan por hacer la conversión hacia el algebraico. Se destacan cinco tipos de conversiones entre sistemas de representación de los profesores de matemáticas en secundaria.

Conversión I

Pictórico-Numérico- Algebraico (funcional)-Numérico

El *profesor 2* con base en el sistema de representación pictórico realiza la conversión al sistema de representación numérico, que expresa la cantidad de piedras en las primeras etapas a través del conteo. Luego, reconoce el comportamiento de los términos k-ésimo de la sucesión y lo asocia con una expresión algebraica, que corresponde la conversión al sistema de representación algebraico. Por último, realiza la conversión al sistema de representación numérico, para evaluar que su expresión algebraica es verdadera para las primeras etapas. Las conversiones entre las diferentes representaciones (*véase figura 49*), evidencian la forma de razonar inductivamente del profesor quien trabaja con casos particulares hasta generalizar, el tránsito de un sistema de representación a otro permite reconocer que el profesor identifica el comportamiento del patrón figural y es asociado funcionalmente con una sucesión cuadrática.

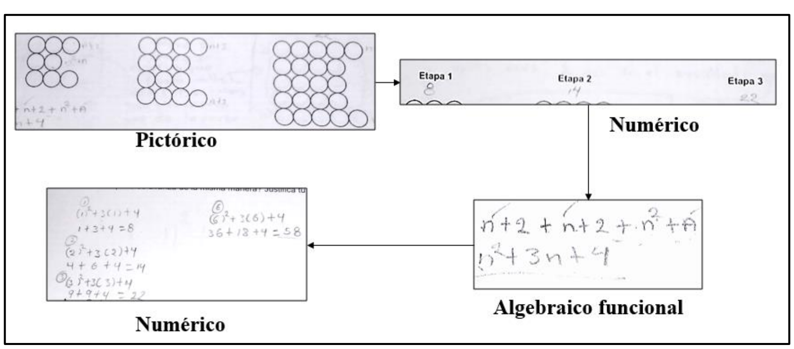


Figura 49. *Conversión de sistemas de representación P2*

Conversión II

Pictórico-Numérico-Algebraico- Verbal

El *profesor 10* realiza la conversión al sistema de representación pictórico al numérico, al construir estructuras aditivas y multiplicativas que representara el comportamiento de la cantidad de piedras en correspondencia con el número de la etapa. Estas estructuras facilitan la conversión al sistema de representación algebraico, que es la construcción de una expresión funcional, que implica la sucesión cuadrática en términos de *n* para determinar la cantidad de piedras en cualquier etapa. El profesor, expresa textualmente el comportamiento del patrón figural y la regla general construida (*véase figura 50*).

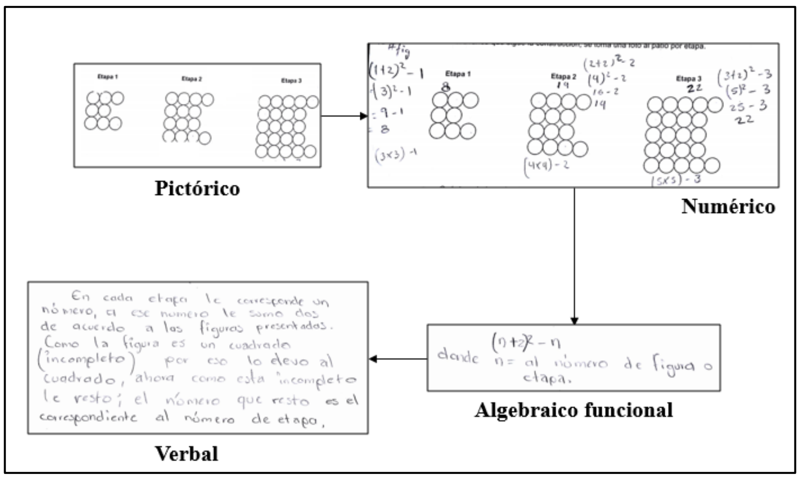


Figura 50. *Conversión de sistemas de representación P10*

Conversión III

Pictórico-Numérico

El *profesor 14* realiza la conversión del sistema de representación pictórico al sistema de representación numérico. La conversión consiste en realizar conteo de los cuadrados grises en cada una de las etapas que los organiza en una secuencia numérica, para continuar realizando procesamiento en este mismo sistema, determina las diferencias entre los términos k-ésimo de la sucesión (*véase figura 51*). Este profesor evidenció dificultades para reconocer el comportamiento del patrón y construir expresiones numéricas o algebraicas que lo representara para cualquier número de figura.

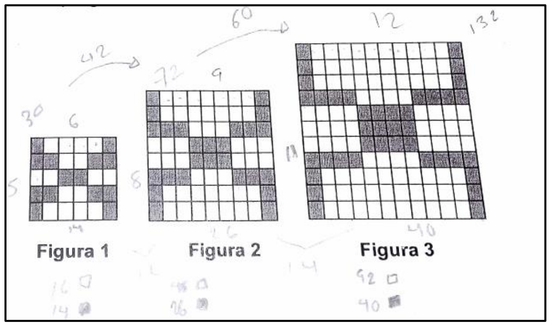


Figura 51. *Conversión de sistemas de representación P14*

Conversión IV

Pictórico- Numérico--Verbal-Algebraico-Pictórico

Las conversiones de una representación a otra del *profesor 4,* manifestaron su forma de razonar inductivamente desde el trabajo con casos particulares hasta la generalización. La primera conversión realizada por el profesor consistió desde el sistema de representación pictórico hasta el sistema de representación numérico por medio del conteo estratégico de las piedras en cada una de las etapas propuestas en la tarea, para representarla a través de estructuras aditivas y multiplicativas asociadas con la identificación del patrón figural. El profesor expresa verbalmente cómo percibió este comportamiento de crecimiento, que está relacionado con el área del cuadrado y piedras faltantes (*véase figura 52*).

Para luego, convertir su representación verbal a la representación algebraica, que asocia por términos de *n*, el número de la figura y la cantidad de piedras.

La generalización algebraica construida por este profesor, es representada en el sistema de representación pictórico, diferente al planteado inicialmente en la tarea. Es asociado con el binomio cuadrado perfecto

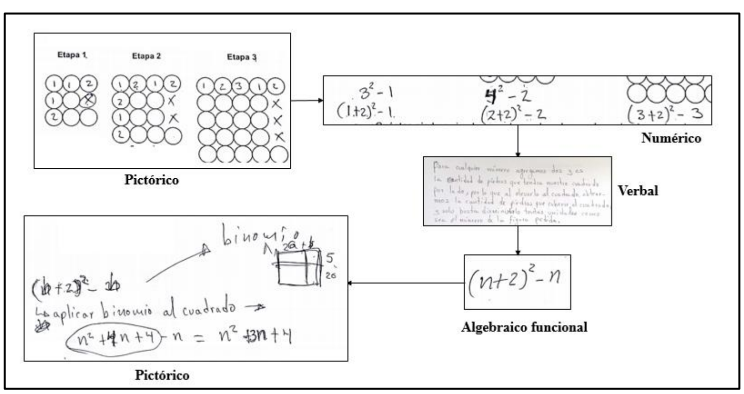


Figura 52. *Conversión de sistemas de representación de P4*

Conversión V

Pictórico-Tabular-Numérico-Algebraico.

El *profesor 7* evidenció la conversión del sistema de representación pictórico al sistema de representación numérico a través del conteo de los cuadrados grises y blancos en las tres primeras figuras. Esta representación es convertida al sistema de representación tabular en una tabla de doble entrada, que corresponde a los valores de *x* y los valores de *y*, asociados con el número de la figura y la cantidad de cuadrados grises, el procesamiento en este sistema continua con el hallazgo de las primeras y segundas diferencias. El sistema de representación tabular permite la conversión al sistema de representación algebraico, el profesor identifica los coeficientes de la relación funcional de la sucesión cuadrática y lo corresponde en términos de *x*, para determinar la cantidad de cuadrados grises en cualquier número de figura (*véase figura 53*).

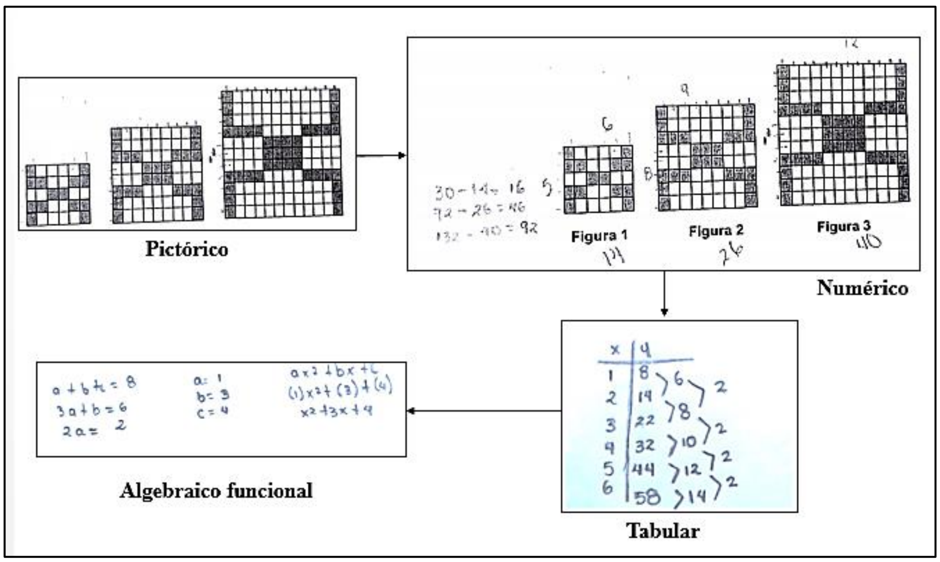


Figura 53. *Conversión de sistemas de representación P7*

Capítulo 6

Resultados y discusión

En esta investigación se analizó el razonamiento inductivo que evidencian profesores de matemáticas de secundaria, al resolver tareas que demandan la generalización de patrones figurales, asociados a sucesiones cuadráticas. El modelo de Cañadas y Castro (2007) fue útil en el análisis, así como los sistemas de representación a los que recurrieron al resolver las tareas.

En respuesta de la pregunta de investigación: *¿Cuál es el razonamiento inductivo que evidencian profesores de matemáticas de secundaria al resolver tareas con sucesiones cuadráticas en el contexto de la generalización de patrones figurales?*

6.1. Pasos del razonamiento inductivo

Los pasos del razonamiento inductivo en que se involucraron con mayor medida los profesores, fueron: el trabajo con casos particulares, la identificación del patrón, la formulación de la conjetura y la generalización. Se involucraron con menor frecuencia, en la organización de casos particulares y en la justificación de la conjetura. Por cuanto al paso de la demostración, ninguno lo realizó (*véase Tabla 31*).

Tabla 31. *Pasos del razonamiento inductivo que siguen los profesores de matemáticas*

Tarea	Pasos del razonamiento inductivo						
	Trabajo con casos particulares	Organización de casos particulares	Identificación de patrones	Formulación de conjeturas	Justificación de las conjeturas	Generalización	Demostración
T1	11	5	12	7	2	11	0
T2	9	4	11	8	6	8	0

a) Trabajo de casos particulares

La mayoría de los profesores que trabajó con casos particulares, identificaron la cantidad de objetos en cada etapa de la sucesión. En algunos casos, este trabajo consistió de conteos estratégicos, uno de ellos por medio de la descomposición de la figura o identificación del todo en las partes que la conformaban, para reconocer el comportamiento del patrón figural. En este primer paso, lo visual fue importante en la percepción de la distribución de las figuras, permitió que el trabajo con casos particulares conllevara al siguiente paso, que es la identificación del patrón. Otros profesores, realizaron el conteo a fin de establecer los términos k-ésimo e identificar el tipo de sucesión. Algunos profesores si bien trabajaron con casos particulares, evidenciaron dificultades para avanzar a las siguientes etapas.

Pocos profesores organizaron los casos particulares que identificaron, su sistematización se apoyó del uso de tablas de doble entrada, establecieron la correspondencia entre las variables de la cantidad de objetos del patrón figural con el número de la etapa o figura, según las demandas de la tarea. Las tablas fueron distribuidas para algunos casos, de forma vertical y para otros, de forma horizontal. Esta forma de organizar la evidenciaron aquellos profesores que utilizaron el método de diferencias en su proceso inductivo.

b) Identificación del Patrón

En la etapa de la identificación del patrón, los profesores tuvieron formas particulares de reconocerlo. Algunos profesores, se apoyaron del sistema de representación pictórico (figural) para analizar el comportamiento de crecimiento de los objetos y reconocieron la figura por partes. En algunos casos implicaron el cuadrado o el rectángulo y, lo relacionaron con la fórmula básica de sus áreas, así realizaron la representación numérica de estructuras aditivas y multiplicativas. Otros profesores, por medio del método de diferencias, determinaron las primeras y segundas diferencias entre los términos k-ésimo, hallados en la etapa anterior (trabajo con casos particulares), reconocieron que las primeras diferencias no eran constantes y que las segundas si lo eran, en este sentido les permitió hallar nuevos términos k-ésimo por recurrencia.

c) Formulación y justificación de la conjetura

Los profesores que formularon conjeturas, son aquellos que percibieron el comportamiento de los objetos en las figuras (patrón figural). En un primer momento, establecieron estas conjeturas a través de las estructuras aditivas y multiplicativas, seguidamente, las convirtieron a una estructura algebraica, ya sea en términos de n (demanda de la tarea) o en el uso de otra variable. Pocos justificaron sus conjeturas. De quienes lo hicieron, fue la de tipo algebraico y la validaron con casos particulares.

d) Generalización

Los profesores que generalizaron sin formular conjeturas, fueron aquellos que aplicaron el método de diferencias. En un primer momento, lo usaron para reconocer el tipo de sucesión (cuadrática) y con base en ello determinaron la regla general asociada al patrón figural.

La generalización construida por los profesores que formularon la conjetura, previamente la verificaron para comprobar la veracidad de la misma, en algunos casos este proceso fue realizado con los casos particulares propuestos y en otros, fue utilizado con nuevos casos particulares, como términos cercanos y lejanos. Este proceso consistió en evaluar la conjetura para algunos casos particulares, en correspondencia entre la cantidad de los objetos con el número de la etapa o figura. Se reconoció que la generalización fue representada de forma algebraica y en algunos casos, verbal.

6.2 Tareas y formas de proceder del profesor

a) Tareas

Desde el punto de vista metodológico, las tareas promovieron que los profesores trabajaran con etapas cercanas y lejanas, a fin de que construyeran una conjetura, y seguidamente la validaran, para establecerla como la regla general que explica el comportamiento del patrón figural asociado. Aunque como se ha señalado, no todos validaron sus conjeturas. De otra parte, se reconoce que si bien se promovió desde las preguntas de las tareas el que transitara por algunos pasos del modelo del razonamiento inductivo, se observó que no todos se ciñeron a ellas. Quienes se ubican en estos casos, se enfocaron a determinar la regla mediante diversas estrategias.

Por cuanto a la resolución de las tareas, los profesores reflejaron el proceso inductivo como estrategia, en el contexto de la generalización con patrones figurales. La investigación ha reportado que el trabajo con patrones figurales construidos de forma bien definida, favorece el que se interpreten como configuraciones de cierta manera (Rivera, 2010). En este sentido, la tarea del profesor en este estudio, consistió en involucrarse en una generalización significativa de patrones. Sin embargo, los objetos de un patrón figural resultan complejos de interpretar, aun cuando su construcción esté bien definida. Ejemplo de ello, es la *tarea 2* la cual le resultó más compleja de analizar a una mayoría de profesores, en razón de que el patrón figural implicó más de un objeto, en este caso, cuadrados grises y blancos, en relación con el número de figura. La tarea demandó representar algebraicamente, el comportamiento de la variable cuadrados grises, en la que se observa, la distribución de estos objetos, no se relaciona con una figura geométrica en específico. No obstante, la ubicación de los objetos blancos con los grises conforma un rectángulo. Estas variables influyeron para que los profesores evidenciaran dificultades en el reconocimiento del comportamiento de los cuadrados grises.

b) Formas de proceder del profesor

En términos generales se establece, que el contexto de la generalización de patrones figurales conllevó a que los profesores involucraran sus capacidades inferenciales perceptivas y simbólicas (Rivera, 2010), en el proceso del razonamiento inductivo. Quienes trabajaron con casos particulares hasta la generalización, construyeron y justificaron de forma completa, útil y enriquecedora su forma de razonar en este contexto algebraico.

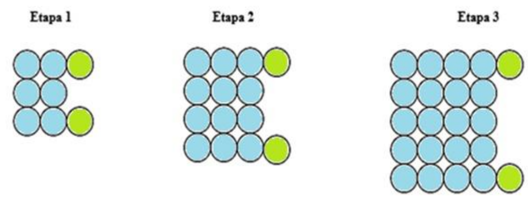
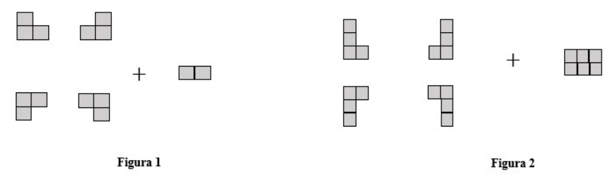
Como es natural, los profesores procedieron de forma diferenciada al trabajar con los objetos del patrón figural de cada tarea. En ese sentido, se reconocieron dos formas de proceder (*véase* Tabla 33):

b.1) *Descomposición de la figura*. Percibieron los objetos del patrón figural como configuraciones básicas: cuadrados y/o rectángulos. A partir de ello, asocian una estructura matemática útil para explicar y justificar el comportamiento de estos objetos.

b.2) *Método de diferencias*. Identificaron el patrón de recurrencia entre los términos k-ésimo de la sucesión asociada al patrón figural. Luego, trabajaron con la primera diferencia y reconocieron que no es constante, por ello, determinaron las segundas diferencias y observaron que es constante. A partir de ello, derivaron que la sucesión es de tipo cuadrática.

Los profesores que recurren a la descomposición de los objetos en las figuras de las etapas dadas en las tareas, favoreció que reconocieran el comportamiento del patrón figural y lo asociaran con la expresión algebraica de la sucesión cuadrática como objeto matemático en estudio. Las expresiones algebraicas que establecieron como regla general, reflejan que el profesor, relacionó ese comportamiento con la relación funcional cuadrática, a partir del área de un cuadrado o rectángulo, en dependencia de la percepción del profesor. Así también, el uso del método de diferencias a partir de la cantidad de piedras como términos k-ésimo de la sucesión.

Tabla 32 *Formas de proceder del profesor al resolver tareas de generalización*

Formas de proceder	**Tarea**	**Ejemplos**
Descomposición de la figura	T1	 Con base en esta forma de percibir los objetos del patrón figural en T1, construyeron una regla general asociada a una estructura multiplicativa y aditiva: $(n+1)(n+2)+2$
	T2	 Con base en esta forma de percibir los objetos del patrón figural en T1, construyeron una regla general asociada a una estructura multiplicativa y aditiva: $4(1+2n)+n(n+1)$
Método de diferencias	T1	Términos k-ésimo 8 14 22 32 Primera diferencia 6 8 10 Segunda diferencia 2 2 Con base en esta forma de percibir los objetos del patrón figural en T2, construyeron una regla general asociada a una expresión algebraica: x^2+3x+4
	T2	Términos k-ésimo 14 26 56 74 Primera diferencia 12 14 16 Segunda diferencia 2 2 Con base en esta forma de percibir los objetos del patrón figural en T2, construyeron una regla general asociada a una expresión algebraica: x^2+9x+4

Los profesores que aplicaron el método de diferencias, utilizaron la figura sólo para identificar los términos k-ésimo de la sucesión, para enfocarse a trabajar en el sistema de representación numérico y algebraico. La investigación ha documentado (e.g., Orton & Orton, 1999), que quienes recurren a este método para determinar el comportamiento de un patrón figural, favorece que el que reconozcan la regla de manera inmediata y expresarla algebraicamente.

Las tareas permitieron analizar la forma de razonar inductivamente del profesor y cómo los conocimientos previos favorecieron para que la resolución de la misma, presentara diferentes formas de proceder, enriqueció la información del cómo perciben el comportamiento de una sucesión cuadrática. En algunos casos, relacionado con la forma de enseñanza de este contenido matemática escolar y sus conocimientos matemáticos.

6.3. El papel de la visualización

La investigación reporta que la visualización juega un papel importante en la generalización de patrones, principalmente en los patrones figurales (Stacey, 1989; Rivera, 2009; Kirwan, 2017). En un proceso inductivo, se reconoce que el profesor que percibe el patrón figural, establece numéricamente estructuras aditivas y multiplicativas (numéricas) de lo que observa en las partes y el todo del patrón figural y significa algebraicamente este comportamiento (regla general algebraica).

Se destaca la visualización de los profesores en las siguientes etapas del razonamiento inductivo:

a) Trabajo con casos particulares

La visualización de los profesores que realizaron un conteo estratégico de los objetos de los patrones figurales, les favoreció para agruparlos numéricamente, de tal manera que se asociara con el comportamiento de crecimiento de los objetos en las etapas de la sucesión, a través de la representación numérica o algebraica del patrón figural. La forma como percibieron la cantidad de estos objetos, permite establecer la importancia que juega la visualización como punto de partida en el proceso inductivo, y así continuar con este proceso en las demás etapas.

b) Identificación del patrón

La visualización del patrón figural favoreció a los profesores para que identificaran el comportamiento, asociado con el crecimiento de los objetos que conformaron las figuras. Por ejemplo, algunos profesores visualizaron en la *tarea 1,* un cuadrado. Para ello lo completaron con los objetos faltantes para conformarlo, implicaron su área y fórmula básica para representar su comportamiento. Otros profesores, visualizaron el patrón por partes, para analizar su comportamiento, fue asociado con el rectángulo que conformaban las piedras del patrón figural y las piedras de los extremos. En la *tarea 2¸* algunos profesores visualizaron las partes iguales del patrón figural conformadas por las escuadras de la figura y el rectángulo de los cuadrados grises ubicados en el centro. En este sentido, la visualización permitió a los profesores vincular el comportamiento de los objetos en términos matemáticos.

6.4. Sistemas de representación

En el proceso inductivo, los profesores utilizaron diferentes sistemas de representación en la resolución de las tareas. Destacan el verbal, numérico, tabular, algebraico y pictórico.

Se pone de manifiesto la utilidad del sistema de representación pictórico (patrón figural) en el contexto de la generalización, los profesores que evidenciaron el trabajo con casos particulares hasta la generalización, fueron aquellos que transitaron de un sistema de representación a otro, representando de diferentes formas el cómo fue su trayectoria en el proceso de resolución de las tareas.

Por lo general, significaron en cada sistema de representación, la forma como percibieron el comportamiento del patrón figural y su movilización en los significados de la sucesión cuadrática en los sistemas de representación pictórico, numérico, tabular, algebraico y verbal. Aquellos que profesores que no generalizaron, se limitaron a reconocer el comportamiento del patrón basados en el sistema de representación pictórico en combinación con el sistema de representación numérico, no lograron representar este comportamiento en términos matemáticos generales por medio de estructuras aritméticas y algebraicas.

6.5 Reflexiones finales

Una limitación del estudio, es la escasa profundización que hizo del razonamiento que siguieron los profesores que no generalizaron. Esta limitante no obedeció al instrumento ni al modelo del razonamiento inductivo, sino al tiempo del que dispuso para trabajar con esta población.

Un desafío para investigación, es documentar las dificultades que enfrentan los profesores que no generalizan y de dónde provienen. E ir más allá, por ejemplo, generar programas de actualización que desarrollen el razonamiento inductivo de este tipo de población, en el contexto de la generalización de sucesiones. En este marco, se plantea además, indagar acerca del conocimiento del profesor de matemáticas de secundaria, ante tareas o problemas asociados a la generalización de patrones lineales o no lineales.

Referencias bibliográficas

Amit, M., & Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM Mathematics Education, 40*(1), 111-129.

Apostol, T. (1974). *Análisis Matemático. Segunda Edición.* (J. Plá, Trad.) Barcelona, España: Reverté.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematical reasonanle in school. En J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter, *A research companion to principles and standards for school mathematics* (págs. 27-44). Reston, VA: National Countil of Teachers Mathematics.

Barrera , V., Castro, E., & Cañadas, M. (2009). Cuaderno sobre razonamiento inductivo para profesores de primaria en formación. (M. González, M. González, & J. Murillo, Edits.) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM. Santander*.

Barrera, V., Castro, E., & Cañadas, M. C. (2008). Análisis del razonamiento inductivo de maestros en formación en el problema de castillos de naipe. *Investigación en el aula de matemáticas: sentido numérico* , (págs. 127-133). Granada.

Becker, J. R., & Rivera , F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. En H. L. Chick, & J. L. Vincent (Ed.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 4*, págs. 121-128. Melbourne: PME.

Bishop, J. (2000). Linear Geometric Number Patterns: Middle School Students' Strategies. *Mathematics Education Research Journal, 12*(2), 107-126.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). *Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades.* Springer.

Brodie , K. (2010). *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms.* Johannesburg, Sudáfrica: Springer.

Čadež, T. H., & Kolar, V. M. (2015). Comparison of types of generalizations and problem-solving schemas used to solve a mathematical problem. *Education Studies Mathematical*, *89*, 283-306.

Cantoral, R., Farfan, R., Cabañas-Sánchez, M., Ferrari, M., & Lezama, F. (2014). *Matemáticas 3* (Segunda ed.). México: McGraw Hill.

Cañadas , M., & Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje, 34*(4), 409-425.

Cañadas, M. (2002). *Razonamiento Inductivo puesto de manifiesto por alumnos de secundaria. Tesis inédita de maestría.* Universidad de Granada.

Cañadas, M. C., & Castro, E. (2003). La importancia del razonamiento inductivo en la formación inicial de profesores. En J. Gutiérrez, A. Romero, & M. Coriat (Edits.), *El Practicum en la formación inicial del profesorado de magisterio y educación secundaria: avances de investigación, fundamentos y programas de formación* (págs. 133-138). Granada: Universidad de Granada.

Cañadas, M., & Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *2*(1), 69-81.

Cañadas, M., Castro, E., & Castro, E. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estuidantes de secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas.* Universidad de Granada, España: Tesis Doctoral.

Carlson, M., Jacob, S., Coe , E., Larsen , S., & Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. *Journal for in Mathematics Education*, *33*(5), 352-378.

Castro, E. (2002). Razonamiento inductivo desde la Didáctica de la Matemática. En M. d. Penalva, G. Torregrosa, & J. Valls , *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (págs. 157-166). Alicante: Universidad de Alicante.

Castro, E., Cañadas, M., & Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *Uno, 54*, 55-67.

Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Identifying Kinds of Reasoning in Collective Argumentation. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(3), 181-200.

Davydov, V. (1990). *Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological. Problems in the Structuring of School Curricula.* (Vol. 2). Reston Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Dörfler, W. (1991). Forms and Means of Generalization in Mathematics. En A. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. Van Dormolen (Edits.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (Vol. 10, págs. 63-85). Dordrech: Springer.

Ebersbach, M., & Wilkening, F. (2007). Children's Intuitive Mathematics: The Development of Knowledge About Nonlinear Growth. *Child Development, 78*(1), 296-308.

El Mouhayar, R.R., & Jurdak, M.E. (2013). Teachers’ ability to identify and explain students’ actions in near and far figural pattern generalization tasks. *Educational Studies in Mathematics, 82*(3), 379–396.

Fann, K. (1970). *Peirce Theory´s of abduction.* Martinus Nijhoff.

Fernández Plaza, J. (2016). Análisis del Contenido. En L. Rico, & A. Moreno, *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (págs. 103-117). Granada, España: Pirámide.

Gacharná León, O. (2012). *Algunas consideraciones didácticas sobre el concepto de logaritmo y de función logarítmica y sus posibilidades en la educación básica y media.* Bogotá: Tesis de Maestría.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación* (Sexta ed.). México: McGraw Hill.

Jeannotte , D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1-16.

Jurdak, M., & Mouhayar, R. (2014). Trends in the development of student level of reasoning in pattern generalization tasks across grade level. *Education Studies Mathematical, 85*, 75–92.

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is Algebraic Reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blantón, *Algebra in the Early Grades* (págs. 5-18). Estados Unidos de América: Routledge Taylor & Francis Group.

Kirwan, J. (2015). *Preservice secondary mathematics teachers`s knowledge of generalization and justification on geometric-numerical patterning tasks.* Illinois State University, USA: Theses and Dissertations. Paper 392.

Kirwan, J. (2017). Using visualization to generalize on quadratic patterning task. *Mathematics Teacher , 110*(8), 588-593.

Klauer, K., & Phye, G. (2008). Inductive Reasoning: A Training Approach. *Review of Educational Research, 78*(1), 85-123. doi:10.3102/0034654307313402

Kolar, Mastnak, & Hodnik. (2012). Primary teacher students' competences in inductive reasoning. *Learning Problem Solving and Learning Through Problem Solving, proceedings* (págs. 54-68). Umeå, Suecia: Print & Media, Umeå University.

Krebs, A. S. (2005). Take time for action: Studying students' reasoning in writing generalizations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 10*(6), 284-287.

Lin, P.-J., & Tsai, W.-H. (2016). Conjecturing and Justification in Third-Grade Classrooms: The Sum of Even/Odd Numbers. *Journal of Mathematics Education, 9*(1), 1-15.

Lithner, J. (2000). Mathematical Reasoning in school task. *Educational Studies in Mathematics, 41*(2), 165-190.

Lupiáñez, J. (2016). Sistemas de representación. En L. Rico , & A. Moreno, *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (págs. 119-136). Granada, España: Pirámide.

Mason , J. (2008). Making Use of Children´s Powers to Produce Algebraic Thinking. En J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blantón, *Algebra in the Early Grades* (págs. 57-94). Routledge Taylor & Francis Group.

Mason, J., Burton , L., & Stacey, K. (1988). *Thinking Mathematically.* (M. Martínez Pérez, Trad.) España: Labor S.A-Ministerio de Educación y Ciencias.

Michal, A., & Ruhama, E. (2008). Deductive reasoning: in the eye of the beholder. *Educational Studies in Mathematics, 69*(3), 235–247.

Mouhayar, R. R., & Murad , E. J. (2013). Teachers' ability to identify and explain students' actions in near and far figural pattern generalization tasks. *Educational Studies Mathematical, 82*, 379-396.

Mouhayar, R., & Jurdak, M. (2016). Variation of student numerical and figural reasoning approaches by pattern generalization type, strategy use and grade level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(2), 197-215.

Mulligan, J., Mitchelmore, M., & Prescott, A. (2006). Seeing an Exercise as a Single Mathematical Object: Using Variation to Structure Sense-Making. En J. Novotná, H. Moraová, K. Krátká, & Stehlíková (Ed.), *Proceedings 30th Conference of the the International Group for the Psychology. 4*, págs. 209-216. Praga: PME.

Murawska , J. M., & Zollman, A. (2015). Taking It to the Next Level: Students Using Inductive Reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle Sch, 20*(7), 416-422.

NCTM. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática. Traducción del original "Principles and Standars for school mathematics" 2000.* Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Neubert, G. A., & Binko, J. (1992). *Inductive Reasoning in the Secondary Classroom.* Washington: A National Education Association Publication.

Ni'mah, Purwanto, Irawan, & Hidayanto. (2017). Conjecturing and Generalization Process on The Structural Development. *Journal of Physics: Conference Series*, 1-12. doi:10.1088/1742-6596/855/1/012030

Orton, J., & Orton, A. (1996). Making sense of children`s patterning. *Proceeding of the 20th International Conference for the psychology of mathematics education* (págs. 83-90). Valencia: Universidad de Valencia.

Pineda, O. (2009). Inducción y Deducción como orígen de la ciencia. *Kovergencias Filosofía y Culturas en diálogo*(21), 122-133.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* (J. Zagazagoitia, Trad.) México: Trillas.

Pólya, G. (1966). *Matemática y razonamiento plausible.* Madrid: Technos-Madrid.

Pólya, G. (1968). *Mathematics and Plausible Reasoning: Patterns of plausible inference* (Vol. 2). Princeton University Press.

Polya, G. (1994). *Cómo plantear y resolver problemas* (Décimooctava ed.). (J. Zagazagoitia, Trad.) México: Trillas.

Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, 1*, págs. 2-21. Mérida: Universidad Pedagógica Nacional.

Reid, D. (2002). Conjectures and Refutations in Grade 5 Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(1), 5-29.

Rey Pastor, J., & Balbini, J. (1997). *Historia de la Matemática* (Vol. I. De la antigüed a la baja Edad Media). Barcelona, España: Gedisa.

Ribnikov, K. (1974). *Historia de las matemáticas.* Mi Moscú.

Rico , L. (2016). Análisis Didáctico. En L. Rico , & A. Moreno , *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria.* Granada, España: Pirámide.

Rico Romero, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., . . . Socas, M. (1997). Consideraciones sobre el currículo de Matemáticas para Educación Secundaria. En L. Rico , *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (págs. 15-38). Madrid: Ice-Horsori.

Rico, L. (1996). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, . . . M. Socas, *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (págs. 15-38). Madrid: ice - Horsori.

Rico, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Barcelona: Horsori.

Rico, L., & Moreno, A. (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria.* Granada: Pirámide.

Rico, L., Lupiáñez, J., & Molina, M. (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, formación de profesores e innovación currícular.* Granada: Comares S. L.

Rivera, & Becker. (2003). The Effects of Numerical and Figural Cues on the Induction Processes of Preservice Elementary Teachers. *Proceedings of the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference Held Jointly with the 25th PME-NA Conference, 4,* 63-70.

Rivera, F. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies Mathematical, 73*(3), 297–328.

Rivera, F. (2013). *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics.* San José, USA: Springer.

Rivera, F., & Becker, J. R. (2011). Formation of Pattern Generalization Involving Linear Figural Patterns Among Middle School Students: Results of a Three-Year Study. En J. Cai , & E. Knuth (Edits.), *Early Algebraization. Advances in Mathematics Education* (págs. 323-366). Berlin, Heidelberg: Springer.

Salgado, M., & Salinas, M. (2012). El razonamiento inductivo como generador de la construcción del número en 5 años. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, & A. Maz (Ed.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática* (págs. 119-125). Valencia: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

SEP. (2011). *Programa de estudio. Guia para el maestro. Educación básica secundaria. Matemáticas.* México.

Simon, M. (1996). Beyond Inductive and Deductive Reasoning: The Search for a Sense of Knowing. *Educational Studies in Mathematics, 30*(2), 197-209.

Smith, D. E. (1958). *History of mathematics* (Vol. II). New York: Dover.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Struik, D. (1967). *A concise history of mathematics* (Instituo Politécnico Nacional ed.). (P. Lezama y Noriega, Trad.) Estados Unidos.

Sutarto, Nusantara, T., Subanji, & Sisworo. (2016). Local conjecturing process in the solving of pattern generalization problem. *Academic Journal, 11*(8), 732-742.

Walkowiak, T. A. (2014). Elementary and middle school students' analyses of pictorial growth patterns. *The Journal of Mathematical Behavior, 33*, 56-71.

Wilkie, K. (2016). Students' use of variables and multiple representations in generalizing functional relationships prior to secondary school. *Education mathematical studies in mathematics, 93*, 333-361.

Anexos

Anexo I

Prueba piloto

Título profesional: ____

Años de experiencia docente: ____ **Grado (s) escolar (es) en que se desempeña:** _____

1. Observa la secuencia de las siguientes figuras.

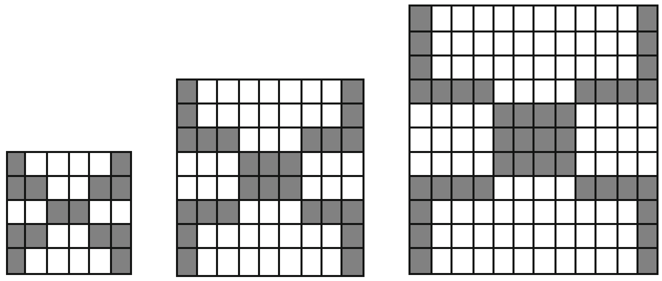


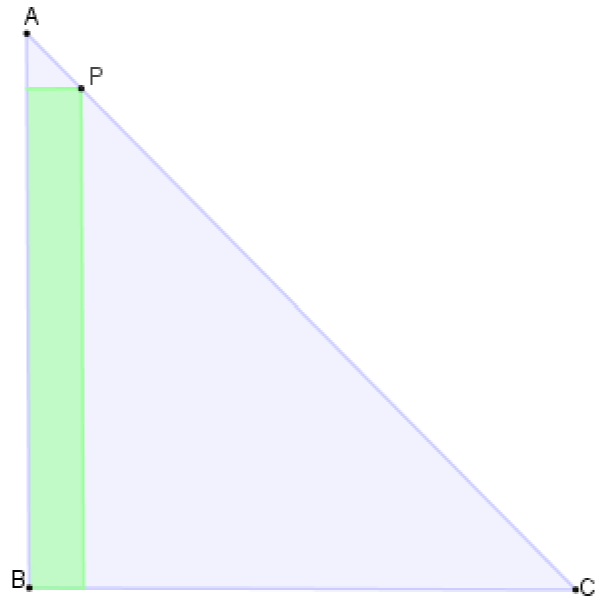
Fig. 1 **Fig. 2** **Fig. 3**

a. ¿Cuántos cuadrados blancos y grises conforman la figura 5? ¿Cuántos la figura 7? Argumenta ampliamente el proceso de solución.

b. ¿Qué figura contiene un total de 140 cuadrados grises? Justifica ampliamente el proceso de solución**.**

c. ¿Qué figura contiene un total de 326 cuadrados blancos? Justifica ampliamente el proceso de solución

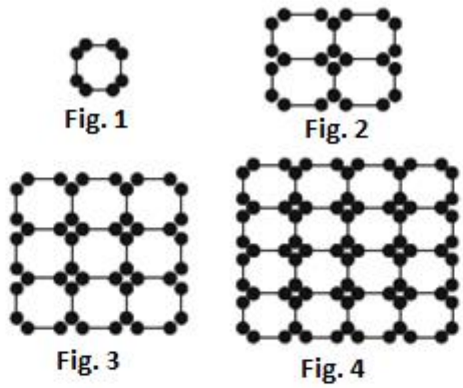
2. Los catetos de un triángulo rectángulo isósceles ABC miden 10 cm cada uno y sobre su hipotenusa se encuentra un punto P. Se establece que este punto sólo se puede desplazar sobre el segmento AC del triángulo, y al trazar perpendiculares a los catetos, forma un rectángulo como en la siguiente figura.



a. Ubica el punto P en diferentes posiciones y determina el área del rectángulo que se forma en cada caso.

b. A partir de esta información, determina el área del rectángulo para cualquier base y cualquier altura. Argumenta ampliamente el proceso de solución.

3. Analiza las siguientes secuencias de figuras.



a. Con base en el análisis, genera una expresión algebraica con la que sea posible determinar el número total de lados en cualquier figura. Argumenta ampliamente el proceso de solución.

b. Genera una expresión algebraica con la que sea posible determinar el número total de puntos en cualquier figura. Justifica ampliamente el proceso de solución.

4. Julio puede formar castillos con naipes de uno, dos, tres pisos, etc. Se aprecia en la figura que se necesitan 2, 7 y 15 cartas respectivamente.

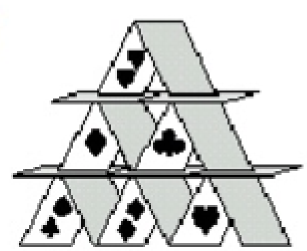


Fig. 3

a. ¿Cuántos naipes se necesitan para construir castillos de 10 pisos? Argumenta ampliamente el proceso de solución.

b. ¿Cuántos naipes se necesitan para construir un castillo de n pisos? Argumenta ampliamente el proceso de solución.

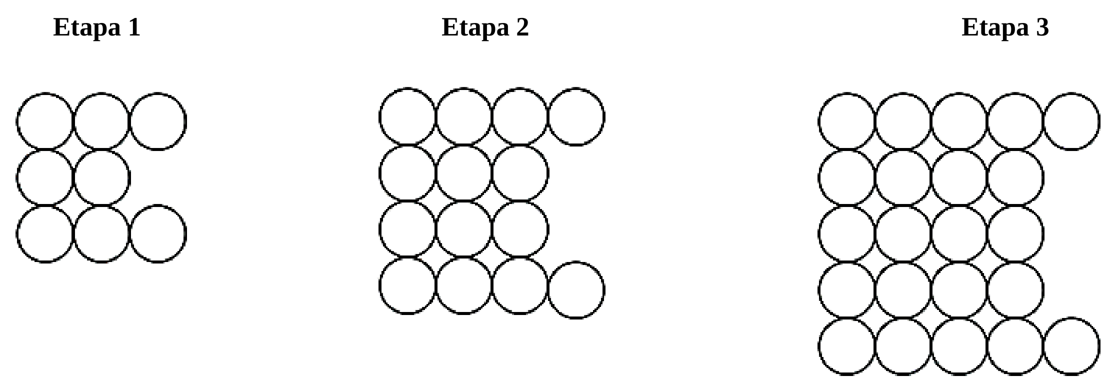
Anexo II

Estudio exploratorio

Título profesional: ____

Años de experiencia docente: ___ Grado (s) escolar (es) en que se desempeña: _____

Tarea 1. En la construcción de un patio, se colocan piedras circulares de igual tamaño. Para observar el avance que sigue la construcción, se toma una foto al patio por etapa.



a. ¿Cuántas piedras circulares se han colocado para la sexta etapa si en la construcción del patio se avanza de la misma manera? Justifica tu respuesta.

b. ¿Cuántas para la etapa 50? Justifica tu respuesta.

c. ¿Cómo se puede hallar la cantidad de piedras circulares para cualquier número de etapa? Describe ampliamente tu respuesta.

Título profesional: ____

Años de experiencia docente: ___ Grado (s) escolar (es) en que se desempeña: ______

Tarea 2. Observa la secuencia de las siguientes figuras. Justifica ampliamente el proceso de solución en cada una de las preguntas.

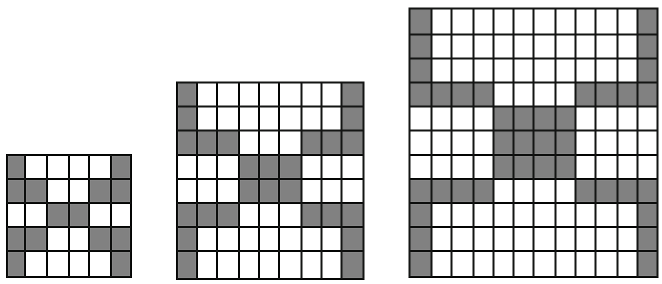


Figura 1 **Figura 2** **Figura 3**

a. ¿Cuántos cuadrados grises conforman la figura 5?

b. ¿Cuántos cuadrados grises conforman la figura 7?

c. ¿Cuántos cuadrados grises conforman la figura *n*?